

Diszkrét matematika I. feladatok

Komplex számok II

Hatodik alkalom (2024.03.18-03.22.)

1. Számítsd ki a következő kifejezéseket a trigonometrikus alak felhasználásával:

$$\text{a) } \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}; \quad \text{b) } \left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}; \quad \text{c) } \frac{(\sqrt{3}+i)^{11}}{(1+i\sqrt{3})^{13}}; \quad \text{d) } \frac{(1-i)^{13}}{(\sqrt{3}+i)^5}$$

2. Az alábbi geometriai transzformációk a komplex számsík mely műveleteivel írhatóak le:

- a) origó körüli forgatás $\pi/4$ -gyel;
b) origó körüli forgatás $5\pi/6$ -tal és 3-szoros nyújtás;

Írja fel a transzformáció mátrixát is.

3. A sík mely geometriai transzformációnak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \mapsto 3z$, $z \mapsto (1+i)z$, $z \mapsto (1/2 + i\sqrt{3}/2)z$. Írja fel a megfelelő transzformációt valós $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixok segítségével.

4. Legyenek z és w különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát.

5. A komplex számsíkon egy négyzet középpontja a $K = 1 + 2i$ illetve egyik csúcsa az $A = 5 + 4i$ komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.

6. Vonjon négyzetgyököt a következő számokból:

a) $3 - 4i$; b) $2i$; c) $(1-i)^3/(1-\sqrt{3}i)^5$.

7. Oldja meg a következő másodfokú egyenletet: $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$.

8. Adja meg a következő mátrixok sajátértékeit (számológép használata megengedett):

a) $\begin{pmatrix} 7-2i & 8-4i \\ -6+3i & -7+5i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 10-7i & 12-8i \\ -9+6i & -11+7i \end{pmatrix}$.

9. Vonjon harmadik gyököt a következő számokból

a) 1 ; b) -1 ; c) $2 + 2i$; d) $(3 + 4i)/(1 + i)$.

10. Vonjon negyedik gyököt a következő számból: $\frac{-4}{(2+i)^3}$.

Szorgalmi feladatok

11. Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak. (1 pont)

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0