

**Az Analízis I. (IP-18AN1E)**  
**előadásainak tervezett tematikája**  
*Programtervező informatikus BSc*

**1. előadás: A függvény fogalma. Valós számok.**

A függvény fogalmának és a kapcsolódó alapfogalmak felidézése: hozzárendelés, értelmezési tartomány, értékkészlet, helyettesítési érték, invertálható függvények.

A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere. A természetes számok halmaza, és a teljes indukció elve. Korlátos halmazok, szuprémum, infimum. A szuprémum elv. Az arkhimédészi tulajdonság (a természetes számok halmaza felülről nem korlátos) és a Cantor-tulajdonság. A racionális és irracionális számok halmaza. A valós számok kibővített struktúrája.

**2. előadás: Függvények. Valós sorozatok 1.**

Valós-valós függvények és alapvető tulajdonságai. Halmaz függvény által létesített képe, ősképe. Műveletek függvényekkel: függvények inverze, kompozíciója, algebrai műveletek valós-valós függvényekkel.

A valós sorozat fogalma, megadása és szemléltetése. Elemi tulajdonságok (monotonitás, korlátosság), műveletek sorozatokkal. Természetes távolság és környezetek,  $+\infty$  és  $-\infty$  középpontú környezetek.

**3. előadás: Valós sorozatok 2.**

A konvergencia definíciója. A határérték egyértelműsége. Példák: a  $((-1)^n/n)$  sorozat határértéke 0, a  $((-1)^n)$  sorozat divergens. A konvergencia átfogalmazása környezetekkel. Konvergens sorozatok alaptulajdonságai: véges sok tag megváltoztatása nem befolyásolja sem a konvergenciát sem a határértéket, minden konvergens sorozat korlátos.

Tágabb értelemben vett határérték. Példák. Egyértelműsége.

A részsorozat fogalma és konvergenciája. Minden számsorozatnak van monoton részsorozata.

A rendezés és a határérték kapcsolata. A közrefogási elv.

**4. előadás: Valós sorozatok 3.**

Nullsorozatok és alaptulajdonságaik. Műveletek nullsorozatokkal. Műveletek konvergens sorozatokkal. A műveletek kiterjesztése a kibővített számegyenesre, ezek kapcsolata a tágabb értelemben vett határértékekkel.

Monoton sorozatok határértéke. Nevezetes határértékek.

**5. előadás: Valós sorozatok 4.**

További nevezetes határértékek, az  $\epsilon$  szám bevezetése és a hozzá tartozó nevezetes sorozat határértéke.

Rekurzív sorozatok határértéke. A gyökvonásra vonatkozó tétel bizonyítása rekurzív sorozatok segítségével.

A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel. A Cauchy-kritérium, a konvergencia szükséges és elégséges feltétele.

## 6. előadás: Végtelen sorok 1.

A végtelen sor fogalma. Nevezetes sorok (mértani, teleszkopikus, a harmonikus sor, a négyzetszámok reciprokaiból álló sor, a hiperharmonikus sor, az  $e$  szám sorösszeg előállítása). Végtelen sorok lineáris kombinációi.

A Cauchy-féle konvergenciakritérium sorokra, ekvikonvergens sorok, a konvergencia szükséges feltétele.

Nemnegatív tagú sorok, összehasonlító kritérium. Abszolút és feltételesen konvergens sorok.

## 7. előadás: Végtelen sorok 2.

A Cauchy-féle gyök- és a D'Alembert-féle hányadoskritérium speciális esete. Leibniz-típusú sorok és konvergenciájuk.

A valós számok tizedestört, illetve  $p$ -adikus tört alakban való előállítása.

Sorok zárójelezése. Abszolút konvergens sorok átrendezése. Feltételesen konvergens sorok átrendezése (Riemann átrendezési tétele).

## 8. előadás: Végtelen sorok 3.

Végtelen sorok szorzása: téglányszorzat, Cauchy-szorzat. Mertens-tétel.

Hatványsorok. Hatványsor konvergenciasugara. A Cauchy-Hadamard-tétel. Példák. Műveletek hatványsorokkal.

Az exponenciális, a szinusz- és a koszinuszfüggvény.

## 9. előadás: Függvények határértéke és folytonossága 1.

Számhalmaz torlódási pontja. Függvény határértékének a definíciója (környezetekkel). A határérték definíciójának speciális esetei: végesben vett véges, végesben vett végtelen, stb. A határérték egyértelműsége. A határértékre vonatkozó átviteli elv. A közrefogási elv. A határérték és a műveletek közötti kapcsolat. Egyoldali határértékek, kapcsolata a határértékkel.

Nevezetes határértékek: előjelfüggvény, hatványfüggvények, reciprokfüggvények, gyökfüggvények, polinomok, racionális törtfüggvények.

## 10. előadás: Függvények határértéke és folytonossága 2.

Hatványsor összegfüggvényének a határértéke. További nevezetes határértékek, a  $\sin x/x$  határértéke a 0 pontban. Monoton függvények határértéke.

Folytonos függvények. A folytonosság és a határérték kapcsolata. Folytonos függvények alaptulajdonságai: előjeltartás, hatványsor összegfüggvénye folytonos, a folytonosságra vonatkozó átviteli elv, a műveletek és a folytonosság kapcsolata. Halmazon folytonos függvények.

A összetett függvény folytonossága és határértéke.

## 11. előadás: Függvények határértéke és folytonossága 3.

Szakadási helyek és osztályozásuk. Példák. Egyoldali folytonosság.

Korlátos és zárt  $[a, b]$  intervallumon folytonos függvények tulajdonságai: Weierstrass tétele, a Bolzano- és a Bolzano-Darboux-tétel. A Darboux-tulajdonság. Az inverz függvény folytonossága.

## 12. előadás: Függvények határértéke és folytonossága 4. Speciális függvények 1.

Konvex és konkáv függvények, definíciók és egy ekvivalens átfogalmazás. Példák. A konvexitás néhány tulajdonsága.

Hatványfüggvények, reciprokfüggvények és gyökfüggvények tulajdonságai.

### 13. előadás: Speciális függvények 2.

Hatványok értelmezése. Az  $e$  szám irracionálitása. Az exponenciális és a logaritmus függvény. Általános hatványfüggvények.

A szinusz- és a koszinuszfüggvény tulajdonságai. A  $\pi$  szám bevezetése, nevezetes értékek. Függvények periodicitása.