5. gyakorlat

VALÓS SOROZATOK 2.

Emlékeztető. $\boxed{\textbf{1.}}$ ***Nevezetes sorozatok***

	(a_n)	$\lim(a_n)$	paraméterek
1. a)	$\dfrac{1}{n^k}$	0	$k = 1, 2, \ldots$
1. b)	n^k	$+\infty$	$k = 1, 2, \ldots$
1. c)	$\sqrt[k]{n}$	$+\infty$	$k = 2, 3, \ldots$
2.	$\sqrt[m]{x_n}$	$\sqrt[m]{A}$	$x_n \geq 0,\ \exists \lim(x_n) =: A \geq 0,\ m = 2, 3, \ldots$
3. a)		0	$\lvert q\rvert < 1$
3. b)	q^n	1	$q = 1$
3. c)		$+\infty$	$q > 1$
3. d)		$\nexists$	$q \leq -1$
4. a)	$\sqrt[n]{a}$	1	$a > 0$
4. b)	$\sqrt[n]{n}$	1	
4. c)	$\sqrt[n]{x_n}$	1	$x_n \geq 0,\ \exists \lim(x_n) \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
5. a)	$\dfrac{n^k}{a^n}$	0	$a > 1,\ k = 1, 2, \ldots$
5. b)	$\dfrac{a^n}{n!}$	0	$a \in \mathbb{R}$
5. c)	$\dfrac{n!}{n^n}$	0	
6.	$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$	e	
7.	$\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$	e^x	$x \in \mathbb{Q}$

$\boxed{\textbf{2.}}$ ***Felhasználható eredmények***

Tétel. **(A műveletek és a határérték kapcsolata)** *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke, és legyen $\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

1. *az $(a_n + b_n)$ összeg-sorozatnak is van határértéke, és $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B$, feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van,*
2. *az $(a_n \cdot b_n)$ szorzat-sorozatnak is van határértéke, és $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B$, feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van,*
3. *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor az (a_n/b_n) hányados-sorozatnak is van határértéke, és $\lim(a_n/b_n) = \lim(a_n)/\lim(b_n) = A/B$, feltéve, hogy az $A/B \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.*

Kritikus határértékekről beszélünk akkor, ha az előző tétel nem alkalmazható. Pl.

$$(+\infty)+(-\infty)\ \ (\text{vagy } (+\infty)-(+\infty)),\qquad 0\cdot(\pm\infty),\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\qquad \frac{0}{0},\quad \frac{c}{0}\ (c\in\overline{\mathbb{R}}).$$

Ilyen esetekben a sorozat határértékének a meghatározása során a következő „módszert” követjük: ***a kritikus határértéket valamilyen „alkalmas” átalakítással igyekszünk nem kritikus határértékre visszavezetni.***

Fontos megjegyezni, hogy ***a műveletek és a határérték kapcsolatáról szóló tétel véges sok egymásután végzett algebrai művelet esetén is alkalmazható***. Ez az állítás teljes indukcióval könnyen igazolható.

Tétel. **(A közrefogási elv)** *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists N\in\mathbb{N}$, *hogy* $\forall n>N\colon a_n\le b_n\le c_n$,
- *az* (a_n) *és a* (c_n) *sorozatnak van határértéke, továbbá* $\lim(a_n)=\lim(c_n)=A\in\overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor a (b_n) *sorozatnak is van határértéke és* $\lim(b_n)=A$.

Tétel. *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és a* (b_n) *sorozatnak van határértéke és* $\lim(a_n)=A\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim(b_n)=B\in\overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor:*

1. $A<B \implies \exists N\in\mathbb{N}$, *hogy* $\forall n>N\colon a_n<b_n$.
2. $\exists N\in\mathbb{N}$, *hogy* $\forall n>N\colon a_n\le b_n \implies A\le B$.

Tétel. **(Monoton sorozatok határértéke)** *Minden* (a_n) *monoton sorozatnak van határértéke.*

1. a) *Ha* $(a_n)\nearrow$ *és felülről korlátos, akkor* (a_n) *konvergens és* $\lim(a_n)=\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$.
   b) *Ha* $(a_n)\searrow$ *és alulról korlátos, akkor* (a_n) *konvergens és* $\lim(a_n)=\inf\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$.
2. a) *Ha* $(a_n)\nearrow$ *és felülről nem korlátos, akkor* $\lim(a_n)=+\infty$.
   b) *Ha* $(a_n)\searrow$ *és alulról nem korlátos, akkor* $\lim(a_n)=-\infty$.

1. Feladat. *Legyen*

$$P(x):=a_rx^r+a_{r-1}x^{r-1}+\dots+a_1x+a_0\qquad(x\in\mathbb{R})$$
$$(a_i\in\mathbb{R},\ i=0,1,2,\dots,r)$$

egy pontosan r*-edfokú polinom (azaz* $a_r\ne0$*). Mutassuk meg, hogy ha* $1\le r\in\mathbb{N}$*, akkor*

$$\lim_{n\to+\infty}P(n)=\begin{cases}+\infty & (a_r>0)\\ -\infty & (a_r<0)\end{cases}=\operatorname{sgn}(a_r)\cdot(+\infty)$$

Megoldás. Tekintsük a következő átalakítást:

$$P(n)=n^r\cdot\left(a_r+\frac{a_{r-1}}{n}+\dots+\frac{a_0}{n^r}\right).$$

Az első tényező $(+\infty)$-hez tart, és $\frac{1}{n}\to0$, ha $n\to+\infty$ (1. típusú nevezetes sorozatok). Ezért a konvergens sorozatokra vonatkozó műveleti tételek alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}P(n)=\lim_{n\to+\infty}n^r\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(a_r+\frac{a_{r-1}}{n}+\dots+\frac{a_0}{n^r}\right)=(+\infty)\cdot(a_r+0+\dots+0)=$$
$$=(+\infty)\cdot a_r=\begin{cases}+\infty & (a_r>0)\\ -\infty & (a_r<0).\end{cases}$$

Megjegyzés. A feladat tehát azt állítja, hogy egy polinom viselkedését nagy n-ekre csak a főegyütthatójának – vagyis a_r-nek – az előjele határozza meg. Az előző feladatban alkalmazott módszerrel:

$$\lim_{n\to+\infty}(n^5-3n^2-1)=\lim_{n\to+\infty}n^5\left(1-\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^5}\right)=(+\infty)\cdot(1-0-0)=(+\infty)\cdot 1=+\infty$$

vagy

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n^3)=\lim_{n\to+\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-1\right)=(+\infty)\cdot(0-1)=(+\infty)\cdot(-1)=-\infty.$$

2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2-n+2}{1-n^2}$,

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4}$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4-2n^3+n+1}{n^3-4n+3}$,

d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^7+n-12}{1-n^2+3n}$,

e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(2-n)^7+(2+n)^7}{(n^2+n+1)\cdot(2n+1)^5}$,

f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{3n^2}{6n-1}\right)$.

Megoldás. Két polinom hányadosából álló határértéket úgy érdemes átalakítani, hogy külön a számlálóból és külön a nevezőből kiemeljük a legmagasabb kitevőjű hatványokat.

a) A hányadosban szereplő két polinom fokszáma megegyezik.

$$\frac{2n^2-n+2}{1-n^2}=\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1}=\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-1}\to\frac{2-0+0}{0-1}=-2\quad\text{ha}\quad n\to+\infty.$$

Az alkalmazott módszerből az az általános következtetés vonható le, hogy ha a sorozat két azonos fokszámú polinom hányadosaként írható fel, akkor a sorozat határértéke a két polinom főegyütthatójának hányadosa.

b) A hányados számlálójában lévő polinom fokszáma kisebb, mint a nevezőjében lévő polinomé. Ha $n\to+\infty$, akkor

$$\frac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4}=\frac{n^4}{n^5}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{2+\frac{1}{n^4}-\frac{4}{n^5}}=\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\cdot\frac{\overbrace{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}^{1+0+0+0}}{\underbrace{2+\frac{1}{n^4}-\frac{4}{n^5}}_{\to 2+0-0}}\to 0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Az alkalmazott módszerből az az általános következtetés vonható le, hogy ha a sorozat két polinom hányadosaként írható fel, és a számlálóban lévő polinom fokszáma kisebb, mint a nevezőé, akkor a sorozat határértéke nulla.

c) A hányados számlálójában lévő polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezőjében lévő polinomé. Ha $n\to+\infty$, akkor

$$\frac{n^4-2n^3+n+1}{n^3-4n+3}=\frac{n^4}{n^3}\cdot\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1-\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=\underbrace{n}_{\to+\infty}\cdot\frac{\overbrace{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}^{\to 1-0+0+0}}{\underbrace{1-\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}}_{1-0+0}}\to(+\infty)\cdot 1=+\infty.$$

d) A hányados számlálójában lévő polinom fokszáma most is nagyobb, mint a nevezőjében lévő polinomé. Ha $n \to +\infty$, akkor

$$\frac{n^7+n-12}{1-n^2+3n} = \frac{n^7}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n^6}-\frac{12}{n^7}}{\frac{1}{n^2}-1+\frac{3}{n}} = \underbrace{n^5}_{\to+\infty}\cdot\frac{\overbrace{1+\frac{1}{n^6}-\frac{12}{n^7}}^{\to 1+0-0}}{\underbrace{\frac{1}{n^2}-1+\frac{3}{n}}_{\to 0-1+0}} \to (+\infty)\cdot(-1) = -\infty.$$

Az alkalmazott módszerből az az általános következtetés vonható le, hogy ha a sorozat két polinom hányadosaként írható fel és a számlálóban lévő polinom fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, akkor a sorozat határértéke $+\infty$, vagy $-\infty$ aszerint, hogy a két főegyüttható előjele megegyezik, vagy nem egyezik meg.

e) Nem mindig szükséges elvégezni a műveleteket, és polinomalakban felírni a számlálót és a nevezőt:

$$\frac{(2-n)^7+(2+n)^7}{(n^2+n+1)\cdot(2n+1)^5} = \frac{n^7}{n^7}\cdot\frac{\left(\frac{2}{n}-1\right)^7+\left(\frac{2}{n}+1\right)^7}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)^5} = \frac{\overbrace{\left(\frac{2}{n}-1\right)^7}^{\to(-1)^7=-1}+\overbrace{\left(\frac{2}{n}+1\right)^7}^{\to 1^7=1}}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(2+\frac{1}{n}\right)^5}_{\to 2^5}} \to$$

$$\to \frac{0}{2^5} = 0, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

Az eredmény azért nulla, mert a számlalóban valójában egy olyan polinom áll, amelynek fokszáma 6.

f) Hozzuk közös nevezőre a törteket és alkalmazzuk az előbb tanult fogásokat!

$$\frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2}{6n-1} = \frac{(n^2+1)(6n-1)-3n^2(2n+1)}{(2n+1)(6n-1)} = \frac{-4n^2+6n-1}{12n^2+4n-1} =$$

$$= \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{-4+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{-4+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{12+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

3. Feladat. *Mi a határértéke az*

$$a_n := n^2\cdot\left(n-\sqrt{n^2+1}\right) \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozatnak?

Megoldás. „$(+\infty)\cdot\left(+\infty-(+\infty)\right)$” típusú kritikus határértékről van szó. Az a_n képletének az átalakítását gyöktelenítéssel kezdjük:

$$a_n := n^2\cdot\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = n^2\cdot\frac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{n^2}{n}\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = n\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (+\infty)\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\infty.$$

Megjegyzés. Az előző feladatban a 2. típusú nevezetes sorozatokra vonatkozó szabályt alkalmaztuk a

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{n^2}} \to \sqrt{1+0}=1, \quad \text{ha} \quad n\to+\infty$$

lépésben. Ezért érdemes a gyökös kifejezéseket tartalmazó feladatokat úgy kezdeni, hogy a gyökökből kiemeljük a bennük szereplő kifejezés „nagyságrendjét”, hogy ott már egy konvergens sorozat maradjon. Ezután a megszokott módon dolgozunk tovább. Pl. a következő feladatnál:

$$a_n := \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n^2+1} = \frac{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}-n^2}{n^2+1} = \frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-n^2}{n^2+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{\sqrt{1+0}-1}{1+0} = 0.$$

ha $n\to+\infty$. Azonban ezek a lépések egy

$$a_n := \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n+1} = \frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-n^2}{n+1} = n\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1}{1+\frac{1}{n}} \to (+\infty)\cdot\frac{\sqrt{1+0}-1}{1+0} = (+\infty)\cdot 0 = ?$$

kritikus határértékhez is vezethetnek. Ebben az esetben érdemes gyöktelenítéssel kezdeni:

$$a_n := \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n+1} = \frac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n^4+1}+n^2}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \frac{n^4+1-n^4}{(n+1)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)} = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\cdot\frac{1}{(1+0)(\sqrt{1+0}+1)} = 0.$$

4. Feladat. *Az $\alpha\in\mathbb{R}$ paramétertől függően határozzuk meg az*

$$a_n := \sqrt{n^2+n+1}-\alpha n \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

Megoldás. Először a feladatot megpróbáljuk kiemeléssel megoldani:

$$(*) \qquad a_n = \sqrt{n^2+n+1}-\alpha n = n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\alpha\right) \qquad (n\in\mathbb{N}^+).$$

Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\alpha\right) = \sqrt{1+0+0}-\alpha = 1-\alpha.$$

- Ha $\boxed{\alpha<1}$, azaz $1-\alpha>0$, akkor a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = (+\infty)\cdot\underbrace{(1-\alpha)}_{>0} = +\infty.$$
- Ha $\boxed{\alpha>1}$, azaz $1-\alpha<0$, akkor pedig
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = (+\infty)\cdot\underbrace{(1-\alpha)}_{<0} = -\infty.$$

- Ha $\boxed{\alpha = 1}$, akkor „$(+\infty)\cdot 0$” kritikus határértéket kapunk. Ekkor a $(*)$ kiemelés nem vezet célra, ehelyett gyöktelenítést alkalmazzuk az eredeti képletben:

$$a_n := \left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{(n^2+n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} =$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

Összefoglalva, azt mutattuk meg, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\alpha\, n\right) = \begin{cases} +\infty & (\alpha<1) \\ \frac{1}{2} & (\alpha=1) \\ -\infty & (\alpha>1). \end{cases}$$

5. Feladat. *A nevezetes sorozatok határértékeiről tanultakat is felhasználva, számítsuk ki az alábbi határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{5^{n+1}+2^n}{3\cdot 5^n-5^{-n}}$, *b)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot 3^n+2^{2n}}{4^{n+1}+2^n}$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{(-5)^n+7^n}{7^{n+1}+n^7}}$, *d)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n+n}{n!+3^n}$.

Megoldás. A sorozat tagjait megadó képletekben igyekszünk nevezetes sorozatokat kialakítani.

a) A 3. a) mértani sorozatokra vonatkozó nevezetes „$\underline{q^n\to 0, \text{ ha } |q|<1}$” tulajdonságból:

$$\frac{5^{n+1}+2^n}{3\cdot 5^n-5^{-n}} = \frac{5\cdot 5^n+2^n}{3\cdot 5^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{5+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{3-\left(\frac{1}{25}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5+0}{3-0} = \frac{5}{3}.$$

b) Az előző 3. a) „$\underline{q^n\to 0, \text{ ha } |q|<1}$” és az 5. a) „$\underline{\frac{n^k}{\alpha^n}\to 0, \text{ ha } \alpha>1,\ k\in\mathbb{N}^+}$” nevezetes sorozatok szerint:

$$\frac{n^2\cdot 3^n+2^{2n}}{4^{n+1}+2^n} = \frac{n^2\cdot 3^n+4^n}{4\cdot 4^n+2^n} = \frac{n^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{4+\left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{\frac{n^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}+1}{4+\left(\frac{1}{2}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0+1}{4+0} = \frac{1}{4}.$$

Fontos megjegyezni, hogy az 5. a) nevezetes sorozat az „$\underline{n^kq^n\to 0, \text{ ha } |q|<1,\ k\in\mathbb{N}^+}$” alakban is írható.

c) A 3. a) „$\underline{q^n\to 0, \text{ ha } |q|<1}$”, az 5. a) „$\underline{\frac{n^k}{\alpha^n}\to 0, \text{ ha } \alpha>1,\ k\in\mathbb{N}^+}$” illetve a 2. „$\underline{\sqrt[k]{x_n}\to\sqrt[k]{A}, \text{ ha } x_n\to A\geq 0, x_n\geq 0,\ 2\leq k\in\mathbb{N}}$” nevezetes sorozatok szerint:

$$\sqrt{\frac{(-5)^n+7^n}{7^{n+1}+n^7}} = \sqrt{\frac{(-5)^n+7^n}{7\cdot 7^n+n^7}} = \sqrt{\frac{\left(-\frac{5}{7}\right)^n+1}{7+\frac{n^7}{7^n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{0+1}{7+0}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

d) Az 5. a) „$n^k q^n \to 0$, ha $|q|<1$, $k \in \mathbb{N}^+$” és az 5. b) „$\frac{\alpha^n}{n!} \to 0$, ha $\alpha \in \mathbb{R}$” nevezetes sorozatok szerint:

$$\frac{(-2)^n + n}{n! + 3^n} = \frac{(-2)^n}{n!} \cdot \frac{1 + n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{3^n}{n!}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cdot \frac{1+0}{1+0} = 0.$$

6. Feladat. *Konvergensek-e a következő sorozatok, ha igen, mi a határértékük!*

a) $a_n = \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1}$ $(n \in \mathbb{N})$, *b)* $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2n+3}}$ $(n \in \mathbb{N})$,

c) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, *d)* $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n!} + 2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Megoldás. A sorozat tagjait megadó képletekben igyekszünk nevezetes sorozatokat kialakítani.

a) A sorozat konvergens:

$$a_n := \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} = \sqrt[n]{n^5 \cdot \left(3 + \tfrac{2}{n^4} + \tfrac{1}{n^5}\right)} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \sqrt[n]{3 + \tfrac{2}{n^4} + \tfrac{1}{n^5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^5 \cdot 1 = 1,$$

hiszen $\sqrt[n]{n} \to 1$ és a 4. c) nevezetes sorozat szerint

$$x_n := 3 + \tfrac{2}{n^4} + \tfrac{1}{n^5} \to 3 \in \mathbb{R}^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{3 + \tfrac{2}{n^4} + \tfrac{1}{n^5}} \to 1.$$

b) A sorozat konvergens:

$$a_n := \sqrt[n]{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

hiszen a 4. c) nevezetes sorozat szerint

$$x_n := \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} \to \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{x_n} \to 1.$$

c) A sorozat konvergens:

$$a_n :\, = \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \sqrt[n]{3^n \cdot \left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^n + 1\right)} = \sqrt[n]{3^n} \cdot \sqrt[n]{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n + 1} =$$

$$= 3 \cdot \sqrt[n]{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3 \cdot 1 = 3,$$

hiszen a 4. c) nevezetes sorozat szerint

$$x_n := \left(\tfrac{2}{3}\right)^n + 1 \to 0 + 1 = 1 \in \mathbb{R}^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{\left(\tfrac{2}{3}\right)^n + 1} \to 1,$$

mivel 3. a) „$|q|^n \to 0$, ha $|q| < 1$” szerint $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$.

d) A sorozat konvergens:

$$a_n := \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!} + 2^n} = \sqrt[n]{2^n \cdot \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} + 1\right)} = \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} + 1} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \cdot 1 = 2,$$

hiszen a 4. c) nevezetes sorozat szerint

$$x_n := \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} + 1 \to 0 + 1 = 1 \in \mathbb{R}^+ \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!} + 1} \to 1,$$

mivel 5. b) „$\underline{\frac{\alpha^n}{n!} \to 0, \text{ ha } \alpha \in \mathbb{R}}$" szerint $\dfrac{(3/2)^n}{n!} \to 0.$