Diszkrét matematika 1

4. előadás
Komplex számok I.

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

Komplex számok I.

$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t)$$

Komplex számok

- $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-117}$, $3+\sqrt{-1}$...

Komplex számok

- $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-117}$, $3+\sqrt{-1}$...

Komplex számok használata

- egyenletek megoldása
  (harmadfokú megoldó képlet)

Komplex számok

- $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-117}$, $3+\sqrt{-1}$...

Komplex számok használata

- egyenletek megoldása
  (harmadfokú megoldó képlet)

- 2D grafika

Komplex számok

- $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-117}$, $3+\sqrt{-1}\dots$

Komplex számok használata

- egyenletek megoldása
  (harmadfokú megoldó képlet)
- 2D grafika
- jelfeldolgozás

Komplex számok

- $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-117}$, $3+\sqrt{-1}$...

Komplex számok használata

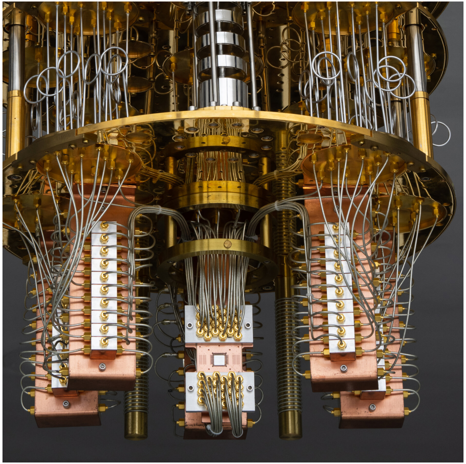
- egyenletek megoldása
  (harmadfokú megoldó képlet)
- 2D grafika
- jelfeldolgozás
- fizika (áramlástan, elektromosság)

Komplex számok

- $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-117}$, $3+\sqrt{-1}$...

Komplex számok használata

- egyenletek megoldása
  (harmadfokú megoldó képlet)
- 2D grafika
- jelfeldolgozás
- fizika (áramlástan, elektromosság)
- kvantummechanika, kvantumszámítógépek



Komplex számok

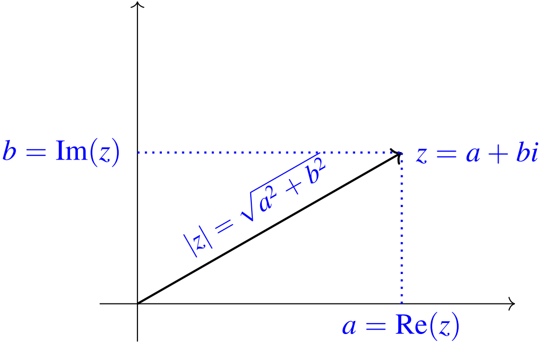
- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

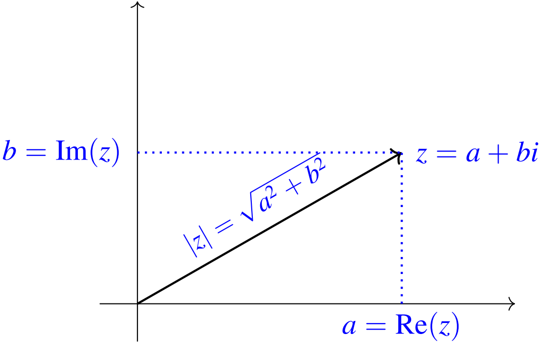


Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor



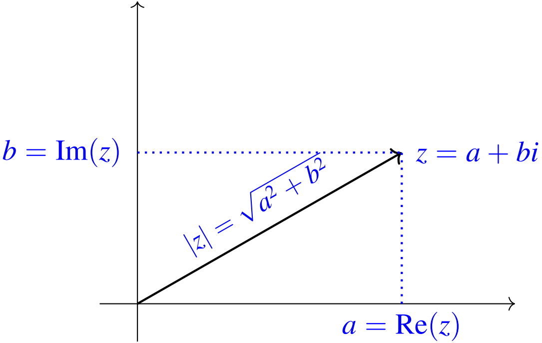
Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$



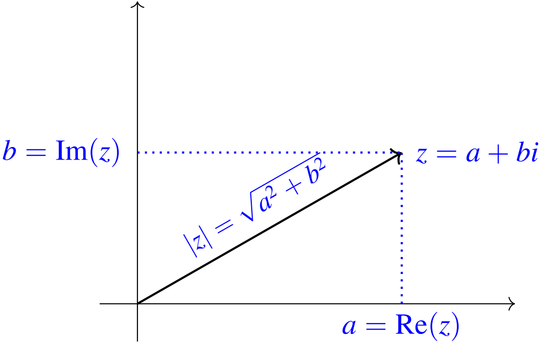
Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$
- z képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$



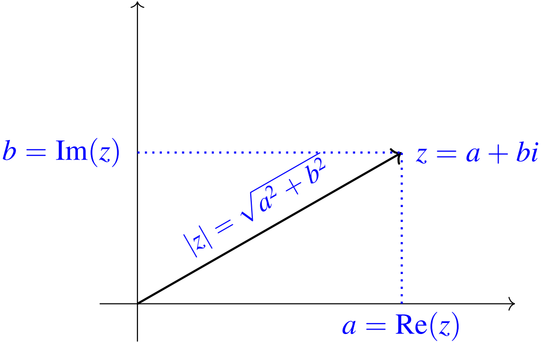
Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$
- z képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$
- z abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



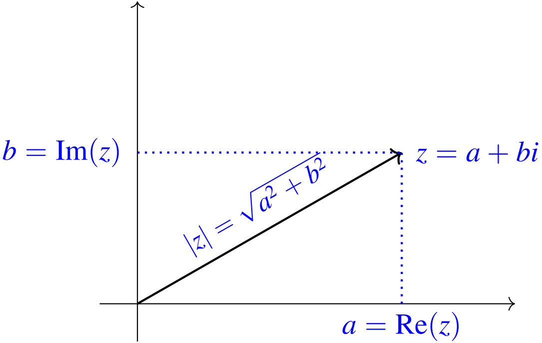
Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$
- z képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$
- z abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Műveletek:

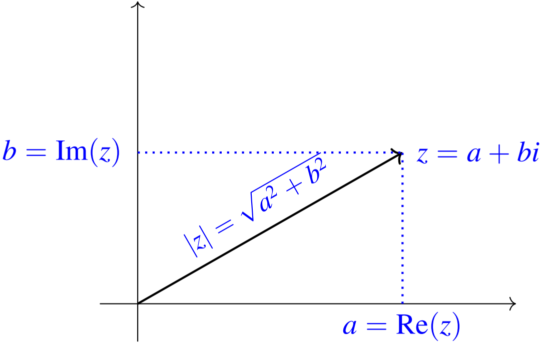
Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$
- z képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$
- z abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Műveletek:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

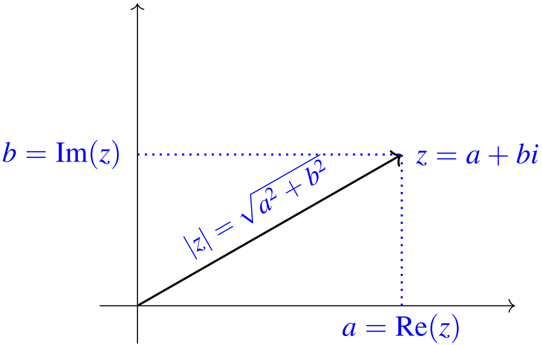
Komplex számok

- az $i \in \mathbb{C}$: $i^2 = -1$ számmal szimbolikus számolási szabályokkal

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$
- z képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$
- z abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Műveletek:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z}$$

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$$

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi}$$

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)}$$

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2-i^2b^2}$$

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Definíció

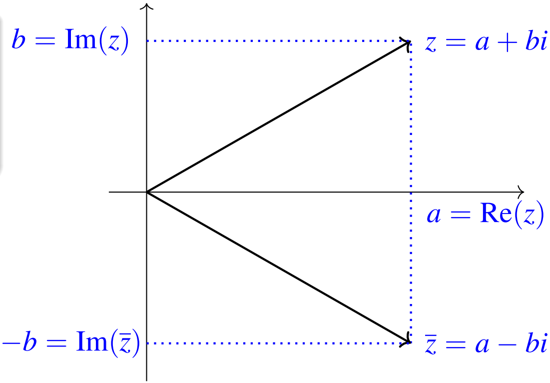
Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám konjugáltja:
  $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$.



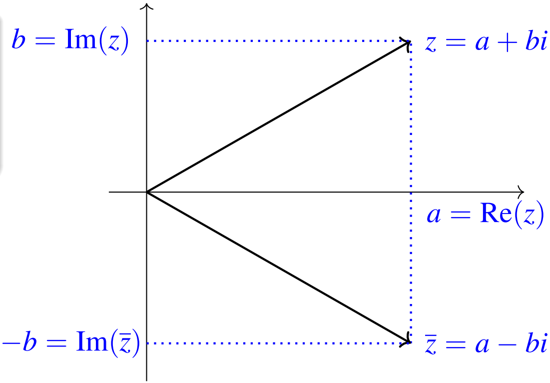
Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám konjugáltja:
$$\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi.$$
- Ezzel $z \neq 0$ esetén $1/z = \bar{z}/|z|^2$.



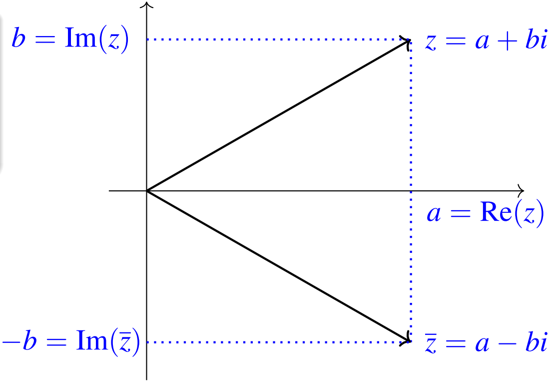
Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám konjugáltja:
  $$\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi.$$
- Ezzel $z \neq 0$ esetén $1/z = \bar{z}/|z|^2$.



Példa

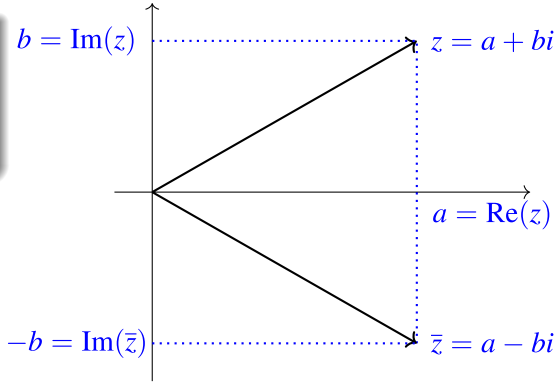
Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám konjugáltja:
  $$\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi.$$
- Ezzel $z \neq 0$ esetén $1/z = \bar{z}/|z|^2$.



Példa

- $z = i$. Ekkor $\bar{i} = -1$, $|i| = 1$, így $1/i = -i$.

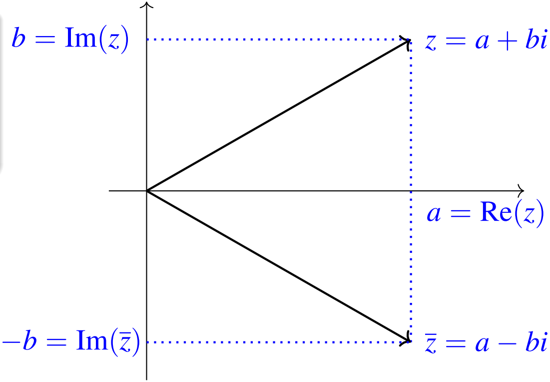
Számolás komplex számokkal

Legyen $z = a + bi \neq 0$. Ekkor $1/z$ kiszámolása a nevező gyöktelenítésével:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a-bi} \cdot \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a-bi}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám konjugáltja:
$$\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi.$$
- Ezzel $z \neq 0$ esetén $1/z = \bar{z}/|z|^2$.



Példa

- $z = i$. Ekkor $\bar{i} = -1$, $|i| = 1$, így $1/i = -i$.
- $z = 2$. Ekkor $\bar{2} = 2$, $|2| = 2$, így $1/2 = 2/4 = 2$.

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w}$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i =$
  $(ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i = \bar{z} \cdot \overline{w}$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i = \bar{z} \cdot \overline{w}$
- $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{z \cdot w} = (z \cdot w) \cdot \bar{z} \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i =$ $(ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i = \bar{z} \cdot \overline{w}$
- $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{z \cdot w} = (z \cdot w) \cdot \bar{z} \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2$
- speciálisan $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Műveletek komplex számokkal

Hasznos összefüggések:

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$ és $w = c + di \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\dfrac{w}{z} = w \cdot \dfrac{1}{z} = w \cdot \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)i = \bar{z} \cdot \overline{w}$
- $|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot \overline{z \cdot w} = (z \cdot w) \cdot \bar{z} \cdot \overline{w} = |z|^2 |w|^2$
- speciálisan $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $\ldots$

(További hasznos összefüggéseket ld. a kiegészítésben.)

Számfogalom bővítése

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

- Nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $x + 2 = 1$.

Számfogalom bővítése

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

- Nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $x + 2 = 1$.

Egész számok: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

- Kivonás elvégezhető.
- Egész számok: (a, b) rendezett párok ekvivalenciaosztályai, ahol $(a, b) \sim (c, d)$, ha $a + d = c + b$.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{Z}$ egész szám, hogy $2 \cdot x = 1$.

Számfogalom bővítése

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

- Nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $x + 2 = 1$.

Egész számok: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

- Kivonás elvégezhető.
- Egész számok: (a, b) rendezett párok ekvivalenciaosztályai, ahol $(a, b) \sim (c, d)$, ha $a + d = c + b$.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{Z}$ egész szám, hogy $2 \cdot x = 1$.

Racionális számok: $\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

- Az osztás elvégezhető.
- Racionális számok: (a, b) rendezett párok ekvivalenciaosztályai, ahol $(a, b) \sim (c, d)$, ha $a \cdot d = c \cdot b$.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{Q}$ egész szám, hogy $x^2 = 2$.

Számfogalom bővítése

Valós számok: $\mathbb{R} = \{1, 2, \dots\}$

- Gyökvonás nem-negatív számból elvégezhető.
- Valós számok: Cauchy sorozatok ekvivalenciaosztályai.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ egész szám, hogy $x^2 = -1$.

Számfogalom bővítése

Valós számok: $\mathbb{R} = \{1, 2, \dots\}$

- Gyökvonás nem-negatív számból elvégezhető.
- Valós számok: Cauchy sorozatok ekvivalenciaosztályai.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ egész szám, hogy $x^2 = -1$.

Komplex számok: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

- Az $x^2 = -1$ egyenlet megoldható.

Számfogalom bővítése

Valós számok: $\mathbb{R} = \{1, 2, \ldots\}$

- Gyökvonás nem-negatív számból elvégezhető.
- Valós számok: Cauchy sorozatok ekvivalenciaosztályai.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ egész szám, hogy $x^2 = -1$.

Komplex számok: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

- Az $x^2 = -1$ egyenlet megoldható.

A komplex számoknál nem kell tovább menni:

Számfogalom bővítése

Valós számok: $\mathbb{R} = \{1, 2, \ldots\}$

- Gyökvonás nem-negatív számból elvégezhető.
- Valós számok: Cauchy sorozatok ekvivalenciaosztályai.
- Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ egész szám, hogy $x^2 = -1$.

Komplex számok: $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

- Az $x^2 = -1$ egyenlet megoldható.

A komplex számoknál nem kell tovább menni:

Tétel (Algebra alaptétele, biz.: NB)

Adott $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $c_n \neq 0$, a

$$c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

egyenlet mindig megoldható.

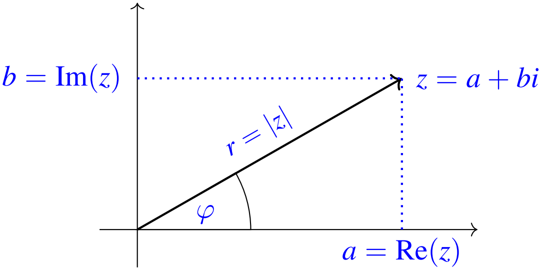
Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

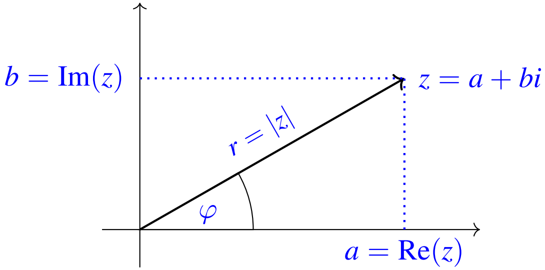
- Az $r = |z|$ az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vektor hossza.



Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Az $r = |z|$ az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vektor hossza.
- A $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ az (a, b) vektor irányszöge, az z argumentuma.

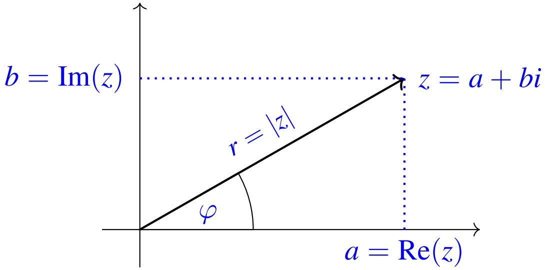


Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Az $r = |z|$ az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vektor hossza.
- A $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ az (a, b) vektor irányszöge, az z argumentuma.
- Ekkor $a = r\cos\varphi$ és $b = \sin\varphi$, így

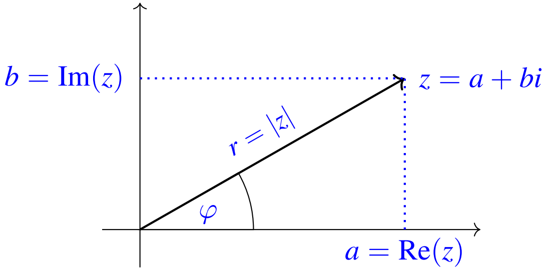
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Az $r = |z|$ az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vektor hossza.
- A $\varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ az (a, b) vektor irányszöge, az z argumentuma.
- Ekkor $a = r\cos\varphi$ és $b = \sin\varphi$, így
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Definíció

Az $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám trigonometrikus alakja:

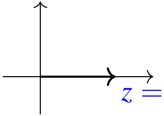
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{ahol } a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi \text{ és } b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

Példa

Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

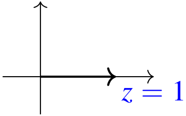
Példa

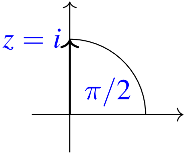


$z = 1$: $|z| = 1$, $\arg(z) = 0$
$\Longrightarrow z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

Példa



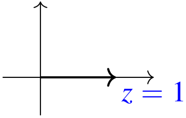


$z = 1$: $|z| = 1$, $\arg(z) = 0$
$\Longrightarrow z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

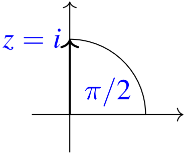
$z = i$: $|z| = 1$, $\arg(z) = \pi/2$
$\Longrightarrow z = 1(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$

Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

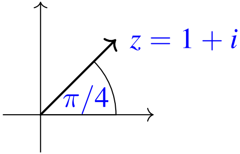
Példa



$z = 1$: $|z| = 1$, $\arg(z) = 0$
$\Longrightarrow z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$



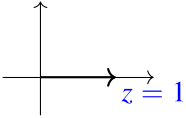
$z = i$: $|z| = 1$, $\arg(z) = \pi/2$
$\Longrightarrow z = 1(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$



$z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \pi/4$
$\Longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$

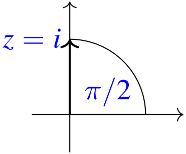
Komplex számok trigonometrikus alakja, példák

Példa



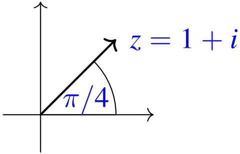
$z = 1$: $|z| = 1$, $\arg(z) = 0$

$\Longrightarrow z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$



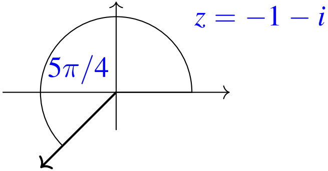
$z = i$: $|z| = 1$, $\arg(z) = \pi/2$

$\Longrightarrow z = 1(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$



$z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \pi/4$

$\Longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$



$z = -1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = 5\pi/4$

$\Longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$zw =$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$zw = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) \end{aligned}$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) \end{aligned}$$

Addíciós képletek:

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \qquad \sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) \end{aligned}$$

Addíciós képletek:

$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \qquad \sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$

Így

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) \end{aligned}$$

Addíciós képletek:

$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi \qquad \sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$

Így

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Tétel (Biz: Id fent)

Legyenek $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Ekkor $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$.

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \le \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \le \arg z + \arg w \le 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \le \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \le \arg z + \arg w \le 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1 + i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$
- Így $(1+i)^4 = \sqrt{2}^4(\cos(4 \cdot \pi/4) + i\sin(4 \cdot \pi/4))$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$
- Így $(1+i)^4 = \sqrt{2}^4(\cos(4 \cdot \pi/4) + i \sin(4 \cdot \pi/4)) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$
- Így $(1+i)^4 = \sqrt{2}^4(\cos(4 \cdot \pi/4) + i \sin(4 \cdot \pi/4)) = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = -4$

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \ w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

A szögek rendre összeadódnak, kivonódnak, szórzódnak. Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$

Komplex számok hatványa

Példa

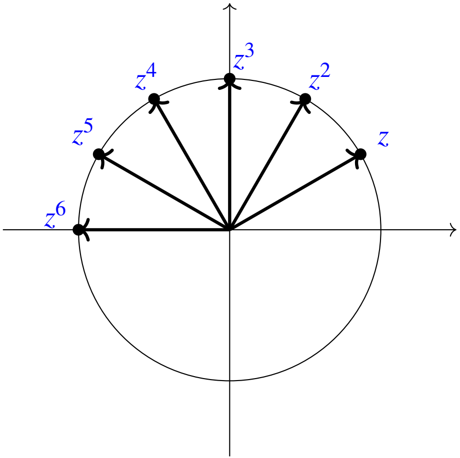
Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

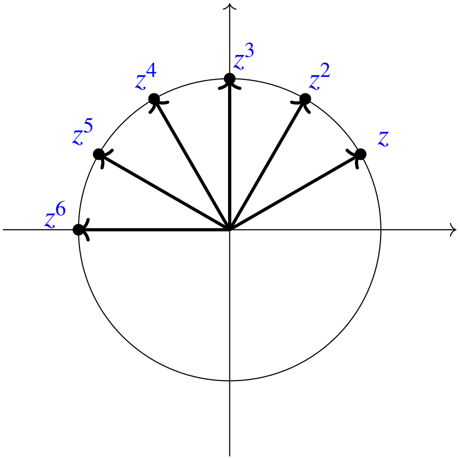


- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\ldots$

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

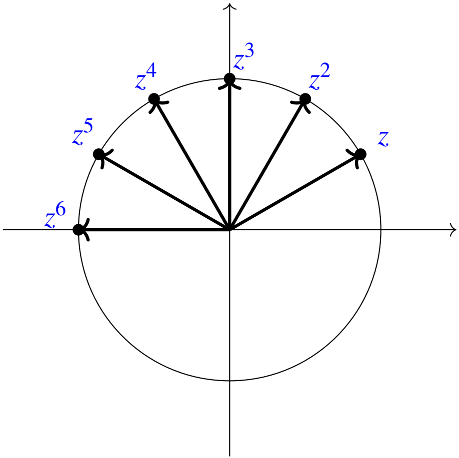


- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\ldots$
- $z^9 = \cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6) = -i$

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:

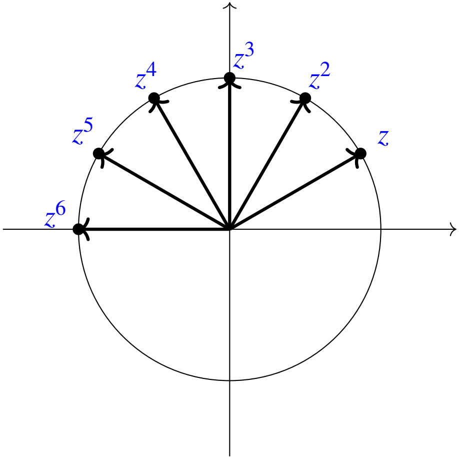


- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\ldots$
- $z^9 = \cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6) = -i$
- $\ldots$

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:



- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\ldots$
- $z^9 = \cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6) = -i$
- $\ldots$
- $z^{12} = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1 = z^0$

Gyökvonás

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Ekkor

$$z = w \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = |w| \text{ és } \varphi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Adott $w \in \mathbb{C}$ számra keressük a $z^n = w$ egyenlet megoldásait. Ekkor

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = w$$

Így

$$|z| = |w|^{1/n} \quad \text{és} \quad n\varphi = \psi + 2k\pi \quad \left(\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

Hány lényegesen különböző megoldás van:

$$\frac{\psi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\psi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

De $\sin\left(\frac{\psi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$ és $\cos\left(\frac{\psi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$,

így pontosan n különböző megoldás lesz: $\frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Komplex számok gyökei

Tétel (Biz.: ld. fönt)

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) : \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Példa

- Mi lesz $z^2 = 1$ egyenlet megoldása (spoiler: ± 1).
  - $w = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$.
  - $|z| = 1$
  - $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
  - $2\varphi = 0 + 2k\pi \Longrightarrow \varphi = 0 + k\pi$ ($k = 0, 1$).
  - $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

Komplex számok gyökei

$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k): \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Példa

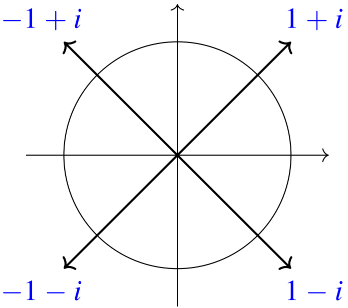
Keressük a $z^4 = -4$ egyenlet megoldásait.

- $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$
- $|z| = 4^{1/4} = \sqrt{2}$
- $4\varphi = \pi + 2k\pi \implies \varphi = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$, $(k = 0, \ldots, 3)$
- $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + i$

  $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1 + i$

  $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -1 - i$

  $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 1 - i$



Számolás komplex számokkal – kiegészítés

Tétel

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4. $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$
5. $z - \overline{z} = 2i \cdot \mathrm{Im}(z)$;
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
7. $z \neq 0$ esetén $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$;
8. $|0| = 0$ és $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$;
9. $|\overline{z}| = |z|$;
10. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
11. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (háromszög egyenlőtlenség).