# 6. gyakorlat

## VALÓS SOROZATOK 3.

***Emlékeztető.***

***Tétel.*** *Az*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

*sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen*

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Az 1-hez közeli $a_n$ számok nagy kitevőjű $b_n$ hatványaira az $a_n$ és $b_n$ megválasztásától függően minden eset előfordulhat. Ilyen esetekben „$1^{+\infty}$” típusú kritikus határértékről beszélünk.

Az $e$ szám a matematika egyik legfontosabb állandója, amit *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus vezetett be 1748-ban. Később meg fogjuk mutatni, hogy $e$ *irracionális* szám, egy közelítő értéke $e \approx 2,718$.

***Tétel.*** *Ha $x$ tetszőleges racionális szám, akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

**1. Feladat.** *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!*

*a)* $a_n := \left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} \quad (n \in \mathbb{N}),$ *b)* $a_n := \left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n} \quad (n \in \mathbb{N}^+),$

*c)* $a_n := \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} \quad (n \in \mathbb{N}).$

***Megoldás.***

a) Mivel

$$\frac{6n-7}{6n+4} = \frac{6 - \frac{7}{n}}{6 + \frac{4}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{és} \qquad 3n+2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ezért „$1^{+\infty}$” típusú kritikus határértékről van szó. A sorozat képletét átalakítjuk:

$$a_n := \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} = \left[\frac{\cancel{6n}\cdot\left(1 - \frac{7/6}{n}\right)}{\cancel{6n}\cdot\left(1 + \frac{4/6}{n}\right)}\right]^{3n+2} = \frac{\left[\left(1 - \frac{7/6}{n}\right)^n\right]^3 \cdot \left(1 - \frac{7/6}{n}\right)^2}{\left[\left(1 + \frac{2/3}{n}\right)^n\right]^3 \cdot \left(1 + \frac{2/3}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left( \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \to e^x,\ \tfrac{1}{n} \to 0 \ \text{ és a műv. tételek} \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\left(e^{-7/6}\right)^3 \cdot 1^2}{\left(e^{2/3}\right)^3 \cdot 1^2} = \frac{e^{-7/2}}{e^2} = \underline{\underline{e^{-\frac{11}{2}}}}.$$

b) Mivel

$$\frac{4n+3}{5n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{5} \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ezért azt sejtjük, hogy az $(a_n)$ sorozat határértéke 0.

A sorozat képletét átalakítjuk:

$$a_n := \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^{5n} = \left(\frac{4\cancel{n}\cdot\left(1+\frac{3/4}{n}\right)}{5\cancel{n}}\right)^{5n} = \left[\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]^5 \cdot \left[\left(1+\frac{3/4}{n}\right)^n\right]^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\ q^n \to 0, \text{ ha } |q|<1, \ \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \to e^x; \ \text{ és a műv. tételek}\ \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^5 \cdot \left(e^{3/4}\right)^5 = 0 \cdot e^{15/4} = \underline{\underline{0}}\,.$$

c) Mivel

$$\frac{3n+1}{n+2} = \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3 \qquad \text{és} \qquad 3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ezért azt sejtjük, hogy az $(a_n)$ sorozat határértéke $+\infty$. Ezt kétféle módon tudjuk igazolni.

<u>**1. bizonyítás.**</u> Mivel

$$\frac{3n+1}{n+2} \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3n+1 \geq 2n+4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq 3,$$

ezért $n \geq 3$ esetén

$$\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} \geq 2^{2n+3} = 2^3 \cdot 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^3 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

így a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik, hogy

$$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} = +\infty}}\,.$$

<u>**2. bizonyítás.**</u> A sorozat képletét átalakítjuk:

$$a_n := \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} = \left[\frac{3\cancel{n}\cdot\left(1+\frac{1/3}{n}\right)}{\cancel{n}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right]^{2n+3} =$$

$$= 3^3 \cdot \left(3^n\right)^2 \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \left(1+\frac{1/3}{n}\right)^3}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(q^n \to +\infty, \text{ ha } q>1, \ \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \to e^x, \ \tfrac{1}{n} \to 0, \text{ és a műv. t.}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 3^3 \cdot (+\infty)^2 \cdot \frac{\left(e^{1/3}\right)^2 \cdot 1^3}{\left(e^2\right)^2 \cdot 1^3} = \underline{\underline{+\infty}}\,.$$

***Emlékeztető.*** Rekurzív módon megadott $(a_n)$ sorozatok konvergenciájának a vizsgálatánál a feladatok megoldása során javasoljuk a következő „módszer” követését.

**1. lépés.** Ellenőrizzük, hogy a sorozat *jól definiált-e.*

Nem minden rekurzió generál egyértelműen egy sorozatot. Például előfordulhat, hogy az egyik lépésben nem tudjuk a kapott értéket behelyettesíteni a rekurziós képletbe, és így a rekurzió megszakad. Teljes indukcióval érdemes megpróbálni a „jól-definiáltság” ellenőrzését.

Legyen $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$, $f : D \to D$ és tekintsük az

$$a_0 := a, \qquad a_{n+1} := f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

egylépéses rekurziót. Egy ilyen rekurzió mindig „jól-definiált”, hiszen egyértelműen olyan $(a_n)$ sorozatot generál, amelynek értékkészlete része a $D$ halmaznak. Ez a ***rekurzív definíció tételének*** legegyszerűbb változata, ami teljes indukcióval könnyen igazolható.

**2. lépés.** Sejtések keresése a sorozat veselkedéséről.

Írjuk fel $(a_n)$ néhány tagját! Ezzel meg tudjuk sejteni a monotonitását. Tételezzük fel, hogy $(a_n)$ konvergens, azaz $\exists A := \lim(a_n)$, és vegyük az $n \to +\infty$ határátmenetet a rekurziós képletben. Ekkor a határérték egyértelműsége alapján $A$-ra egy egyenletet kapunk, aminek több megoldása is lehet. Próbáljuk meg ezekből a legtöbbet kizárni, lehetőleg csak az egyiket megtartani úgy, hogy megvizsgáljuk milyen intervallumokban találhatók $(a_n)$ tagjai.

A sejtések megkeresése nehezebb, ha paraméteres rekurzióval állunk szemben.

**3. lépés.** Megmutatjuk, hogy a sorozat *konvergens.*

„Szerencsés esetekben” a sorozat *monoton* és *korlátos*, amiből a konvergencia következik.

- A monotonitásra vonatkozó sejtést a sorozat első néhány tagjának a felírása után ki lehet alakítani, majd a sejtést teljes indukcióval vagy a definíció alkalmazásával bebizonyítani.
- Tudjuk, hogy ha $A := \lim(a_n)$ a sorozat határértéke, akkor
  - ha $(a_n)$ monoton növekvő, akkor $A = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
  - ha $(a_n)$ monoton csökkenő, akkor $A = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

  Ezért ha már van sejtésünk arról, hogy mi lehet az $A$ értéke, akkor a monotonitástól függően elég lenne igazolni, hogy $A$ a sorozat felső vagy alsó korlátja.

Természetesen, egy rekurzív módon megadott sorozat nem feltétlenül monoton. Az ilyen esetekben a javasolt „módszer” nem alkalmazható. Ekkor a konvergencia igazolását megpróbálhatjuk más eszközökkel, pl. felbonthatjuk diszjunkt részsorozatokra.

**4. lépés.** A határérték meghatározása.

Egyenként megvizsgáljuk a 2. lépésben kapott lehetséges határértékeket, és az elvégzett vizsgálatok alapján eldöntjük, hogy közülük melyik a sorozat határértéke.

**2. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az*

$$a_0 := \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

*sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét!*

***Megoldás.*** A sorozat felírható így is

$$a_0 := \sqrt{2} \in \mathbb{R}^+, \qquad a_{n+1} := f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f(x) := \sqrt{2 + x}.$$

Ebből következik, hogy a sorozat jól definiált, és $a_n \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez teljes indukcióval is igazolható.

Írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \qquad \ldots .$$

Ezekből az a sejtésünk, hogy $(a_n)$ monoton növekvő.

Tegyük fel, hogy $(a_n)$ konvergens, azaz $\exists A := \lim(a_n)$, és vegyük az $n \to +\infty$ határátmenetet a rekurziós képletben:

$$A \leftarrow a_{n+1} := \sqrt{2 + \underbrace{a_n}_{\to A}} \to \sqrt{2+A},$$

hiszen $(a_{n+1})$ részsorozata az $(a_n)$ sorozatnak, és ezért $\lim(a_{n+1}) = A$. Ekkor a határérték egyértelműsége miatt

$$(0 \leq)\ A = \sqrt{2+A} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - A - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (A+1)(A-2) = 0,$$

azaz $A = -1$ vagy $A = 2$, de $A = -1$ nem lehetséges, mert negatív szám.

Sejtés: $(a_n)$ monoton növekvő, felülről korlátos és 2 egy felső korlátja.

A monotonitás igazolása: teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad a_{n+1} \geq a_n.$$

- Az állítás igaz $n = 0$-ra, hiszen $a_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_0$. ✓
- Ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, amire $(*)$ teljesül (indukciós feltétel), akkor

  $$a_{(n+1)+1} = \sqrt{2 + a_{n+1}} = \ \text{(ind. felt.)}\ \geq \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}.$$

  Ez azt jelenti, hogy ha $n$-re igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is igaz. ✓

A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért az állítás valóban fennáll minden $n$ természetes számra.

A felső korlát igazolása: teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(**) \qquad a_n \leq 2.$$

- Az állítás igaz $n = 0$-ra, hiszen $a_0 = \sqrt{2} \leq 2$. ✓
- Ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, amire $(**)$ teljesül (indukciós feltétel), akkor

  $$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \ \text{(ind. felt.)}\ \leq \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2.$$

  Ez azt jelenti, hogy ha $n$-re igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is igaz. ✓

A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért az állítás valóban fennáll minden $n$ természetes számra.

Mivel $(a_n)$ monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. Az előzőekben láttuk, hogy az $A := \lim(a_n)$ határértékre az $A = \sqrt{2+A}$ egyenlet szükségképpen teljesül. Ennek egyetlen megoldása $A = 2$. Így az $(a_n)$ sorozat konvergens, és 2 a határértéke:

$$\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty} a_n = 2}}\,.$$

**3. Feladat.** *Az $\alpha > 0$ valós paraméter mely értékeire konvergens az*

$$a_0 := \sqrt{\alpha}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

*sorozat, és ekkor mi a határértéke?*

***Megoldás.*** A sorozat felírható így is

$$a_0 := \sqrt{\alpha} \in \mathbb{R}^+, \qquad a_{n+1} := f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f(x) := \sqrt{\alpha + x}.$$

Ebből következik, hogy a sorozat jól definiált, és $a_n \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez teljes indukcióval is igazolható.

Írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$\sqrt{\alpha}, \qquad \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \qquad \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}}, \qquad \ldots .$$

Ezekből az a sejtésünk, hogy $(a_n)$ monoton növekvő.

Tegyük fel, hogy $(a_n)$ konvergens, azaz $\exists A := \lim(a_n)$, és vegyük az $n \to +\infty$ határátmenetet a rekurziós képletben:

$$A \leftarrow a_{n+1} := \sqrt{\alpha + \underbrace{a_n}_{\to A}} \to \sqrt{\alpha + A},$$

hiszen $(a_{n+1})$ részsorozata az $(a_n)$ sorozatnak, és ezért $\lim(a_{n+1}) = A$. Ekkor a határérték egyértelműsége miatt

$$(0 \leq)\ A = \sqrt{\alpha + A} \quad \Longrightarrow \quad A^2 - A - \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}.$$

Azonban $A_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1+4\alpha}}{2} < 0$, és így $A_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1+4\alpha}}{2}$ az egyenlet egyetlen nemnegatív megoldása.

Sejtés: $(a_n)$ monoton növekvő, felülről korlátos és $A_2$ egy felső korlátja.

A monotonitás igazolása: teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad a_{n+1} \geq a_n.$$

- Az állítás igaz $n = 0$-ra, hiszen $a_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}} > \sqrt{\alpha} = a_0$. ✓
- Ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, amire $(*)$ teljesül (indukciós feltétel), akkor

  $$a_{(n+1)+1} = \sqrt{\alpha + a_{n+1}} = \text{(ind. felt.)} \geq \sqrt{\alpha + a_n} = a_{n+1}.$$

  Ez azt jelenti, hogy ha $n$-re igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is igaz. ✓

A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért az állítás valóban fennáll minden $n$ természetes számra.

A felső korlát igazolása: teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(**) \qquad a_n \le A_2.$$

- Az állítás igaz $n = 0$-ra, hiszen

$$A_2 = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} > \frac{0+\sqrt{0+4\alpha}}{2} = \frac{\sqrt{4\alpha}}{2} = \sqrt{\alpha},$$

  azaz $a_0 = \sqrt{\alpha} \le A_2$. ✓

- Ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, amire $(**)$ teljesül (indukciós feltétel), akkor

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n} \le \text{ (ind. felt.) } \le \sqrt{\alpha + A_2} = A_2,$$

  hiszen már igazoltuk, hogy $A_2$ megoldása az $A = \sqrt{\alpha + A}$ egyenletnek. Ez azt jelenti, hogy ha $n$-re igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is igaz. ✓

A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért az állítás valóban fennáll minden $n$ természetes számra.

Mivel $(a_n)$ monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. Az előzőekben láttuk, hogy az $A := \lim(a_n)$ határértékre az $A = \sqrt{\alpha + A}$ egyenlet szükségképpen teljesül. Ennek egyetlen nemnegatív megoldása $A_2$. Így az $(a_n)$ sorozat konvergens, és $A_2$ a határértéke:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}.$$

**4. Feladat.** *Legyen $\alpha \ge 0$ valós paraméter. Vizsgáljuk meg határérték szempontjából az*

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \alpha + a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

*sorozatot!*

***Megoldás.*** A sorozat felírható így is

$$a_0 := 0 \in \mathbb{R}_0^+, \qquad a_{n+1} := f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \qquad f(x) := \alpha + x^2.$$

Ebből következik, hogy a sorozat jól definiált, és $a_n \in \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez teljes indukcióval is igazolható.

Írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$0, \qquad \alpha \qquad \alpha + \alpha^2, \quad \alpha + \left(\alpha + \alpha^2\right)^2, \qquad \ldots .$$

Ezekből az a sejtésünk, hogy $(a_n)$ monoton növekvő.

Tegyük fel, hogy $(a_n)$ konvergens, azaz $\exists A := \lim(a_n)$, és vegyük az $n \to +\infty$ határátmenetet a rekurziós képletben:

$$A \leftarrow a_{n+1} := \alpha + \underbrace{a_n^2}_{\to A^2} \to \alpha + A^2,$$

hiszen $(a_{n+1})$ részsorozata az $(a_n)$ sorozatnak, és ezért $\lim(a_{n+1}) = A$. Ekkor a határérték egyértelműsége miatt

$$A = \alpha + A^2 \quad \Longrightarrow \quad A^2 - A + \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}.$$

Ha $1 - 4\alpha < 0$, azaz $\alpha > 1/4$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke, ezért ilyen $\alpha$-kra a sorozat nem konvergens. Igazolni fogjuk, hogy a sorozat monoton növekvő, és így

$$\underline{\underline{\alpha > \tfrac{1}{4} \text{ esetén } (a_n) \text{ divergens, és } \lim(a_n) = +\infty\,.}}$$

Ha $0 \le \alpha \le 1/4$, akkor nyilván $1 - \sqrt{1-4\alpha} \ge 0$, ezért

$$0 \le A_1 := \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2} \le \frac{1 + \sqrt{1-4\alpha}}{2} =: A_2.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $(a_n)$ konvergens, akkor vagy $A_1$ vagy $A_2$ a határértéke. Mi legyen ekkor a sejtésünk? A sorozat az $a_0 = 0$ tagból indul és sejtésünk szerint monoton növekvő. Így három eset lehetséges

- $A_1$ a sorozat felső korlátja,
- $A_1$ nem felső korlátja a sorozatnak, de $A_2$ igen (ez nem áll fenn, ha $\alpha = 1/4$, mert ekkor $A_1 = A_2$),
- egyik sem felső korlátja a sorozatnak, és így a sorozat divergens.

Egyszerűbb az első esettel kezdeni.

<u>Sejtés:</u> $(a_n)$ monoton növekvő, felülről korlátos és $A_1$ egy felső korlátja.

<u>A monotonitás igazolása:</u> teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad a_{n+1} \ge a_n.$$

- Az állítás igaz $n = 0$-ra, hiszen $a_1 = \alpha \ge 0 = a_0$. ✓
- Ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, amire $(*)$ teljesül (indukciós feltétel), akkor

  $$a_{(n+1)+1} = \alpha + a_{n+1}^2 = \ (\text{ind. felt., és } a_n \ge 0)\ \ge \alpha + a_n^2 = a_{n+1}.$$

  Ez azt jelenti, hogy ha $n$-re igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is igaz. ✓

A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért az állítás valóban fennáll minden $n$ természetes számra.

<u>A felső korlát igazolása ($\alpha \le 1/4$):</u> teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(**) \qquad a_n \le A_1.$$

- Az állítás igaz $n = 0$-ra, hiszen $A_1 \geq 0$, azaz $a_0 = 0 \leq A_1$. ✓
- Ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, amire $(**)$ teljesül (indukciós feltétel), akkor

$$a_{n+1} = \alpha + a_n^2 \leq \text{ (ind. felt., és } a_n \geq 0) \leq \alpha + A_1^2 = A_1,$$

  hiszen már igazoltuk, hogy $A_1$ megoldása az $A = \alpha + A^2$ egyenletnek. Ez azt jelenti, hogy ha $n$-re igaz az állítás, akkor $(n+1)$-re is igaz. ✓

A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért az állítás valóban fennáll minden $n$ természetes számra.

Mivel $(a_n)$ monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. Az előzőekben láttuk, hogy az $A := \lim(a_n)$ határértékre az $A = \alpha + A^2$ egyenlet szükségképpen teljesül. Ennek $A_1$ és $A_2$ a megoldásai, ahol $A_1 \leq A_2$. Mivel

$$\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq A_1,$$

így $A_1$ lesz a sorozat határértéke. Tehát

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4} \text{ esetén } (a_n) \text{ konvergens, és } \lim(a_n) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}.$$

**5. Feladat.** *Mutassuk meg, hogy az*

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \frac{2}{1 + a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

*sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét!*

***Megoldás.*** A sorozat felírható így is

$$a_0 := 0 \in \mathbb{R}_0^+, \qquad a_{n+1} := f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \qquad f(x) := \frac{2}{1 + x}.$$

Ebből következik, hogy a sorozat jól definiált, és $a_n \in \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ez teljes indukcióval is igazolható.

A sorozat első néhány tagja:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= 2, \\ a_2 &= \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = 0,666\ldots, \\ a_3 &= \frac{2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5} = 1,2\ldots. \end{aligned}$$

Úgy tűnik, hogy a sorozat nem monoton.

Számítsuk még ki néhány további tagját is!

$$a_4 = \frac{2}{1+\frac{6}{5}} = \frac{10}{11} = 0,909\ldots;$$
$$a_5 = \frac{2}{1+\frac{10}{11}} = \frac{22}{21} = 1,047\ldots;$$
$$a_6 = \frac{2}{1+\frac{22}{21}} = \frac{42}{43} = 0,976\ldots;$$
$$a_7 = \frac{2}{1+\frac{42}{43}} = \frac{86}{85} = 1,011\ldots;$$
$$a_8 = \frac{2}{1+\frac{86}{85}} = \frac{170}{171} = 0,994\ldots;$$
$$a_9 = \frac{2}{1+\frac{170}{171}} = \frac{342}{341} = 1,002\ldots.$$

A sorozat viselkedésére a következő tendenciákat figyelhetjük meg.

1. A páros indexű tagok 1-nél kisebbek, a páratlan indexűek pedig 1-nél nagyobbak:

   $$(1) \qquad 0 \le a_{2k} < 1 \quad \text{és} \quad a_{2k+1} > 1 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

   Ez az állítás igaz, mert

   - ha $0 \le a_n < 1$, akkor $\dfrac{2}{1+a_n} > \dfrac{2}{1+1} = 1$, és így $a_{n+1} > 1$,
   - ha $a_n > 1$, akkor $0 \le \dfrac{2}{1+a_n} < \dfrac{2}{1+1} = 1$, és így $0 \le a_{n+1} < 1$.

   Tehát a sorozat tagjai váltakoznak az 1 érték körül. Így a páros indexű tagok 1-nél kisebbek, és a páratlan indexűek pedig 1-nél nagyobbak, vagy fordítva, de az első eset lesz igaz, mert $a_0 = 0 < 1$.

2. A páros indexű $(a_{2k})$ részsorozat szigorúan monoton növekvő, az $(a_{2k+1})$ páratlan indexű részsorozat pedig szigorúan monoton csökkenő, azaz

   $$(2) \qquad (a_{2k}) \ \uparrow \qquad \text{és} \qquad (a_{2k+1}) \ \downarrow.$$

   Ennek igazolásához vegyük észre, hogy mind a páros, mind a páratlan indexű részsorozat ugyanazzal a rekurziós képlettel adható meg:

   $$(*) \qquad a_{n+2} = \frac{2}{1+a_{n+1}} = \frac{2}{1+\frac{2}{1+a_n}} = 2\cdot\frac{a_n+1}{a_n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

   de más az induló tagjuk ($a_0$ vagy $a_1$). A monotonitáshoz meg kell megvizsgálni az $a_{n+2} - a_n$ különbséget:

   $$a_{n+2} - a_n = 2\cdot\frac{a_n+1}{a_n+3} - a_n = \frac{(a_n+2)(1-a_n)}{a_n+3}.$$

   Ennek előjele csak az $1 - a_n$ tényezőn múlik, hiszen $a_n + 2 > 0$ és $a_n + 3 > 0$. Ezért

   - ha $n = 2k$ páros, akkor (1) miatt $1 - a_n > 0$, tehát $a_{n+2} - a_n > 0$, azaz $(a_{2k}) \uparrow$,
   - ha $n = 2k+1$ páratlan, akkor szintén (1) alapján $1 - a_n < 0$, tehát $a_{n+2} - a_n < 0$, azaz $(a_{2k+1}) \downarrow$.

Összefoglalva:

Ha $n = 2k$ páros, akkor

$$(a_{2k}) \quad \uparrow \quad \text{és fel. korl.} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergens;} \quad A := \lim(a_{2k}).$$

Ha $n = 2k + 1$ páratlan, akkor

$$(a_{2k+1}) \quad \downarrow \quad \text{és al. korl.} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergens;} \quad B := \lim(a_{2k+1}).$$

Ekkor $A$ és $B$ kielégíti a $(*)$ egyenlőségből határátmenettel kapott

$$\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3}$$

egyenletet. Ennek két megoldása $\alpha_1 = -2$ és $\alpha = 1$. Mivel pozitív tagú sorozatról van szó, ezért $\alpha = 1$ az egyedüli érték, ami szóba jöhet. Ez azt jelenti, hogy $A = B = 1$.

Megmutattuk tehát azt, hogy az $(a_n)$ sorozat konvergens, és a határértéke 1.