Diszkrét matematika 1

5. előadás
Komplex számok II.

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

Komplex számok II.

$$(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(n \cdot t) + i \cdot \sin(n \cdot t)$$

Komplex számok trigonometrikus alakja, szorzás

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Ekkor

- A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
- A szorzat argumentuma:
  - ha $0 \leq \arg z + \arg w < 2\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w$;
  - ha $2\pi \leq \arg z + \arg w \leq 4\pi$, akkor $\arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi$.

A $\sin, \cos$ függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásnál redukálni kell az argumentumok összegét.

Példa

- $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$
- $(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$
- $(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$

Általában,

- $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$
- Így $(1+i)^4 = \sqrt{2}^4(\cos(4 \cdot \pi/4) + i\sin(4 \cdot \pi/4)) = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$

Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

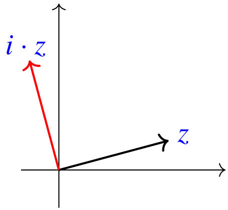
- A szögek rendre összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak.
- Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Szorzás, példák

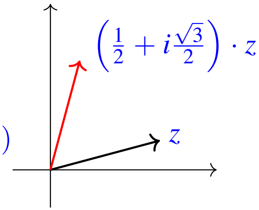
Példa

$$i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) \Longrightarrow$$
$$i \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi + \pi/2) + i\sin(\varphi + \pi/2))$$

(algebrai alakban: $i \cdot (a + bi) = -b + ia$)



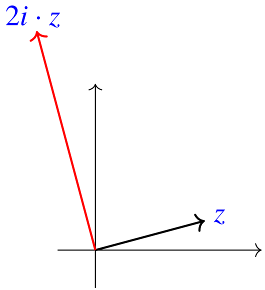
$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) \Longrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot z = |z| \cdot (\cos(\varphi + \pi/3) + i\sin(\varphi + \pi/3))$$



Szorzás, példák

Példa

$$2i = 2\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right) \Longrightarrow$$
$$2i \cdot z = 2|z| \cdot \left(\cos(\varphi + \pi/2) + i\sin(\varphi + \pi/2)\right)$$



Geometriai jelentés:

Egy $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex számmal való szorzás: nyújtva-forgatás

- $|w|$-szeres nyújtás
- $\arg(w)$ szöggel való forgatás.

Lineáris transzformációk mátrixai – kiegészítő anyag

Lineáris transzformációk

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbf{0}$-t fixáló nyújtás, forgatás, tükrözés
- általában $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, ha
  - $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
  - $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n)$
  - $T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$ $(\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R})$.

Tétel: (NB)
A T az $\mathbb{R}^n$ lineáris transzformációja $\iff$ $T(\mathbf{v}) = M\mathbf{v}$ valamely $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra.

Konstrukció:
Legyenek $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{i.}{1}, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ a sztenderd bázisvektorok.

Ekkor $M = (T(e_1), \ldots, T(e_n)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, u.i.

$T(\mathbf{v}) = T(v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n) = v_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + v_nT(\mathbf{e}_n) = M\mathbf{v}$.

Lineáris transzformációk mátrixai – kiegészítő anyag

Példa

- Mi lesz a $T : \mathbf{v} \mapsto 2\mathbf{v}$ $(T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ mátrixa?

  $$M = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)) = \left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

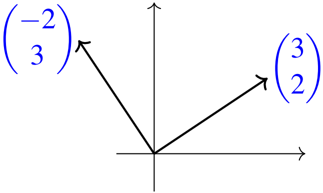
  Valóban: $M\mathbf{v} = M\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2v_1\\2v_2\end{pmatrix}$

- Mi lesz $\mathbb{R}^2$-ben a $\frac{\pi}{2}(= 90^\circ)$ való forgatás mátrixa?

  $$M = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)) = \left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

  Valóban:

  $$M\mathbf{v} = M\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-v_2\\v_1\end{pmatrix}$$



Lineáris transzformációk $\mathbb{C}$-n – kiegészítő anyag

Emlékeztető:
Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ekkor a $z \mapsto w \cdot z$ egy nyújtva-forgatás (azaz lineáris transzformáció). Mi lesz ennek a mátrixa? ($\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}$, $z \leftrightarrow (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$)

Példa

- $T_i : z \mapsto i \cdot z$ transzformáció: $\pi/2$-vel való forgatás. Mátrixa: $T_i \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $T_2 : z \mapsto 2 \cdot z$ transzformáció: 2-vel való nyújtás. Mátrixa: $T_2 \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Általába:

- A $\mathbb{C}$ számsíkon a két bázisvektor: $1, i$.
- Legyen $w = a + bi$ és $T_w : z \mapsto w \cdot z$
- Ekkor $T_w(1) = w = a + bi$ és $T_w(i) = w \cdot i = -b + ai$.
- Így $T_w \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Komplex számok implementálása – kiegészítő anyag

Legyen $w = a + bi$ és $T_w : z \mapsto w \cdot z$

Ekkor $T_w \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & -\operatorname{Im}(w) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix}$

Állítás (NB):

Legyen $v, w \in \mathbb{C}$. Ekkor

- $T_{v+w} \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(v+w) & -\operatorname{Im}(v+w) \\ \operatorname{Im}(v+w) & \operatorname{Re}(v+w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(v) & -\operatorname{Im}(v) \\ \operatorname{Im}(v) & \operatorname{Re}(v) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & -\operatorname{Im}(w) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix}$
- $T_{v \cdot w} \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(v \cdot w) & -\operatorname{Im}(v \cdot w) \\ \operatorname{Im}(v \cdot w) & \operatorname{Re}(v \cdot w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(v) & -\operatorname{Im}(v) \\ \operatorname{Im}(v) & \operatorname{Re}(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & -\operatorname{Im}(w) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix}$

A $w \in \mathbb{C}$ számot megfeleltethetjük a $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & -\operatorname{Im}(w) \\ \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak.

$\rightarrow$ komplex számok gyakori implementációja

Emlékeztető: Moivre-azonosságok

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

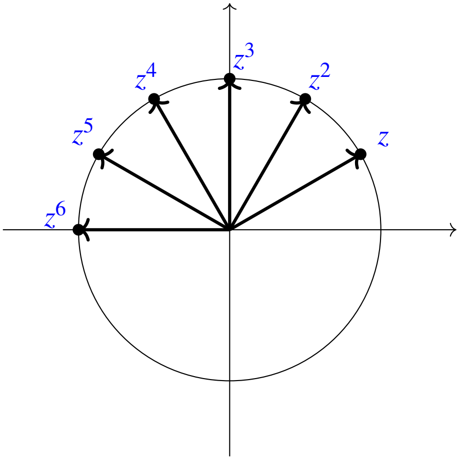
- $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

- A szögek rendre összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak.
- Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Komplex számok hatványa

Példa

Legyen $z = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$. Ekkor z hatványai:



- $z^2 = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6)$
- $z^3 = \cos(3\pi/6) + i\sin(3\pi/6) = i$
- $z^4 = \cos(4\pi/6) + i\sin(4\pi/6)$
- $z^5 = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)$
- $z^6 = \cos(6\pi/6) + i\sin(6\pi/6) = -1$
- $\ldots$
- $z^9 = \cos(9\pi/6) + i\sin(9\pi/6) = -i$
- $\ldots$
- $z^{12} = \cos(12\pi/6) + i\sin(12\pi/6) = 1 = z^0$

Komplex számok hatványai, példa

Példa

Számoljuk ki $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8$ hatványt.

- Az alap trigonometrikus alakja: $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- Így a hatvány:
  $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^8 = \cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$

De sok olyan z komplex szám van, melyre $z^8 = 1$:

- $1^8 = 1$, $(-1)^8 = 1$, $i^8 = 1$, $(-i)^8 = 1$
- $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$, $\left((-1)\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$
- Sőt $\left(\pm i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1$

Gyökvonás

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Ekkor

$$z = w \quad \Longleftrightarrow \quad |z| = |w| \text{ és } \varphi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Adott $w \in \mathbb{C}$ számra keressük a $z^n = w$ egyenlet megoldásait. Ekkor

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = w$$

Így

$$|z| = |w|^{1/n} \quad \text{és} \quad n\varphi = \psi + 2k\pi \quad \left(\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

Hány lényegesen különböző megoldás van:

$$\frac{\psi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \frac{\psi}{n} + \frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\psi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

De $\sin\left(\frac{\psi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$ és $\cos\left(\frac{\psi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2n\pi}{n}\right)$,

így pontosan n különböző megoldás lesz: $\frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Komplex számok gyökei

Tétel (Biz.: ld. fönt)

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k): \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Példa

- Mi lesz $z^2 = 1$ egyenlet megoldása (spoiler: ± 1).
  - $w = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$.
  - $|z| = 1$
  - $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
  - $2\varphi = 0 + 2k\pi \Longrightarrow \varphi = 0 + k\pi$ $(k = 0, 1)$.
  - $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

Komplex számok gyökei

$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) : \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Példa

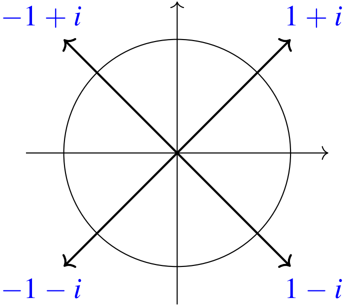
Keressük a $z^4 = -4$ egyenlet megoldásait.

- $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$
- $|z| = 4^{1/4} = \sqrt{2}$
- $4\varphi = \pi + 2k\pi \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$, $(k = 0, \ldots, 3)$
- $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + i$

  $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1 + i$

  $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -1 - i$

  $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = 1 - i$



Egységgyökök

- Valós számok esetén $x^n = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 1$ (sőt, ha n páratlan, $x = 1$)
- Komplex számok esetén sok ilyen szám van: ± 1, $\pm i$, $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\pm i \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ...

Definíció

- $z \in \mathbb{C}$ komplex számot egységgyöknek hívunk, ha $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \wedge z^n = 1$
- Adott $n \geq 1$ esetén legyen $\mathcal{E}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ az n-edik egységgyök halmaza.

Példa

$$\mathcal{E}_1 = \{1\}, \quad \mathcal{E}_2 = \{\pm 1\}, \quad \mathcal{E}_4 = \{\pm 1, \pm i\}, \quad \mathcal{E}_8 = \left\{\pm 1, \pm i, \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \pm i \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}$$

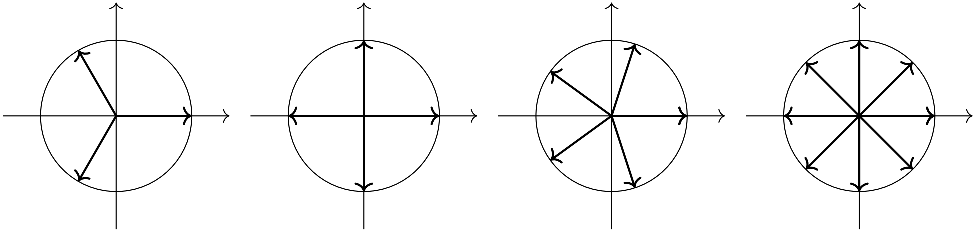
Egységgyökök

- n-edik egységgyökök: $\mathcal{E}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$

Állítás (Biz: HF)

Legyen $n \geq 1$. Ekkor az n-edik egységgyökök a következők:

$$\mathcal{E}_n = \left\{ \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) : k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$$



3. egységgyökök 4. egységgyökök 5. egységgyökök 8. egységgyökök

Egységgyökök és gyökvonás

$\mathbb{R}$-ben: $x^2 = a \iff x = \pm\sqrt{a}$. $\mathbb{C}$-ben hasonlóan:

Tétel (már szerepelt)

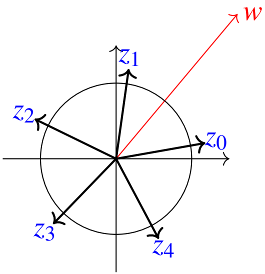
Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = \varepsilon \cdot z_0 : \quad \varepsilon \in \mathcal{E}_n \quad \text{ahol } z_0 = |w|^{1/n}\left(\cos\frac{\psi}{n} + i\sin\frac{\psi}{n}\right).$$

Azaz egy komplex szám n-edik gyökei egy szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon.

Példa

$z^5 = 1,6 + 1,9i$ megoldásai.



Egységgyökök rendje

Egy egységgyök több $\mathcal{E}_n$ halmazban is benne lehet:

- $1 \in \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots$
- $-1 \in \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_6 \ldots$
- $i \in \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_8, \mathcal{E}_{12} \ldots$

Általában

Ha $z \in \mathcal{E}_n \Longrightarrow z \in \mathcal{E}_{k \cdot n}$ (u.i.: $z^n = 1 \Longrightarrow z^{k \cdot n} = (z^n)^k = 1$)

Definíció

Egy $z \in \mathbb{C}$ egységgyök rendje $o(z) = \min\{n \in \mathbb{N} : z \in \mathcal{E}_n\} = \min\{n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$.

Példa

$$o(1) = 1, \;\; o(-1) = 2, \;\; o(\pm i) = 4, \;\; o\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 8$$

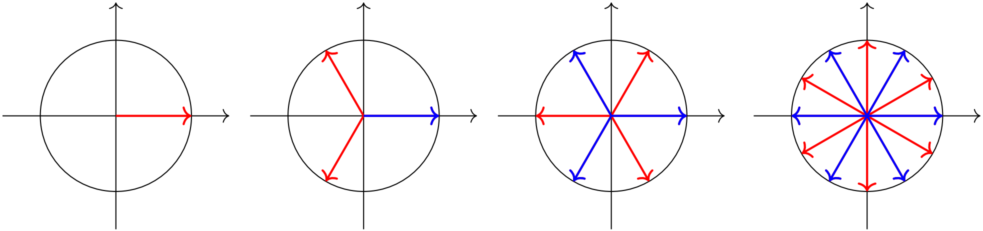
Egységgyökök rendje

Egy $z \in \mathbb{C}$ egységgyök rendje $o(z) = \min\{n \in \mathbb{N} : z \in \mathcal{E}_n\} = \min\{n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$.

Definíció

Egy $z \in \mathcal{E}_n$ egységgyök **primitív**, ha $o(z) = n$.

Példa



1. egységgyökök 3. egységgyökök 6. egységgyökök 12. egységgyökök

egységgyökök és primitív egységgyökök

Primitív egységgyökök

Egy $z \in \mathcal{E}_n$ egységgyök primitív, ha $o(z) = n$.

Tétel

Legyen $z \in \mathcal{E}_n$ egy primitív n-edik egységgyök. Ekkor $\mathcal{E}_n = \{z^k : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

Bizonyítás.

- Tekintsük a $Z = \{z^k : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazt.
- Ekkor $Z \subset \mathcal{E}_n$, u.i. $(z^k)^n = (z^n)^k = 1$.
- A Z elemei különbözőek: ha $z^k = z^\ell$ $(k \geq \ell) \Rightarrow z^{k-\ell} = 1$, de akkor $o(z) \leq k - \ell$
- Tehát $Z \subset \mathcal{E}_n \wedge |E| = n = |\mathcal{E}_n| \Rightarrow Z = \mathcal{E}_n$.

$\square$

Példa

- -1 egy primitív 2-dik egységgyök, így $\mathcal{E}_2 = \{(-1)^0, -1\}$
- i egy primitív 4-edik egységgyök, így $\mathcal{E}_4 = \{i^0, i, i^2, i^3\}$

Primitív egységgyök

Tétel (Biz: NB)

Legyen $n \geq 1$. Ekkor az n-edik primitív egységgyökök

$$\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) : \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \ \mathrm{lnko}(k, n) = 1$$

Tétel (már megint)

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal és ε egy primitív n-edik egységgyök. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = \varepsilon^k \cdot z_0 : \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$