9. gyakorlat

VÉGTELEN SOROK 3.

Emlékeztető. ***A hatványsor fogalma.*** Az adott $(\alpha_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1 (x-a) + \alpha_2 (x-a)^2 + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

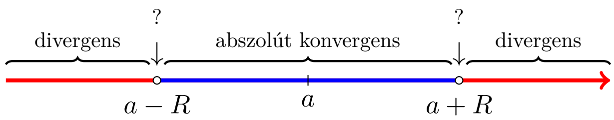
függvénysort $a \in \mathbb{R}$ középpontú, (α_n) együtthatójú ***hatványsornak*** nevezzük.

A hatványsor konvergenciahalmaza. Azok az $x \in \mathbb{R}$ értékek, amelyekre a hatványsor konvergens:

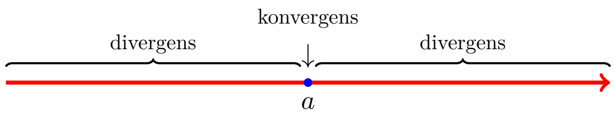
$$\mathrm{KH}\Big(\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n\Big) := \Big\{ x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \text{a } \sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \text{ számsor konvergens} \Big\} \ni a.$$

A hatványsor konvergenciasugara. Tetszőleges $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:

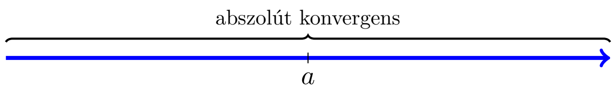
1. $\underline{\exists\, 0 < R < +\infty}$, hogy a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < R$ pontban abszolút konvergens, és a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| > R$ pontban divergens, azaz $(a-R, a+R) \subset \mathrm{KH}\big(\sum \alpha_n (x-a)^n\big) \subset [a-R, a+R]$.



2. A hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens, azaz $\mathrm{KH}\big(\sum \alpha_n (x-a)^n\big) = \{a\}$. Ekkor legyen $R := 0$.



3. A hatványsor abszolút konvergens $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz $\mathrm{KH}\big(\sum \alpha_n (x-a)^n\big) = \mathbb{R}$. Ekkor legyen $\underline{R := +\infty}$.



R-et a hatványsor ***konvergenciasugarának*** nevezzük.

Tétel. **(A Cauchy–Hadamard-tétel)** *Tekintsük a* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy*

$$\exists \lim \big(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\big) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \quad \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

A konvergenciasugár hányadoson alapuló kiszámítása. Tekintsük a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort, és tegyük fel, hogy $\alpha_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és

$$\exists \lim \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor $A \geq 0$, és a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \quad \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

1. Feladat. *Határozzuk meg a*

$$a)\ \sum_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n, \qquad b)\ \sum_{n=1} \frac{2^{n-1}}{2n-1}(3x-1)^n, \qquad c)\ \sum_{n=0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+2)^n$$

hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán.

Megoldás. A hatványsorok általános alakja $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$.

a) A $\sum\limits_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$ hatványsornál $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ha $n \in \mathbb{N}^+$, és $\underline{\underline{a=0}}$. A Cauchy–Hadamard-tétel szerint

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1,$$

amiből következik, hogy a hatványsor konvergenciasugara:

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{A} = 1.}}$$

Ezért

$$(-1,1) = (a-R, a+R) \subset \mathrm{KH}\left(\sum_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n\right) \subset [a-R, a+R] = [-1,1].$$

A határpontok vizsgálata.

- Ha $x=1$, akkor a $\sum\limits_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sort kapjuk, ami divergens, hiszen

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e \neq 0,$$

  azaz a sort generáló sorozat nem tart nullához.
- Ha $x=-1$, akkor a $\sum\limits_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n$ sort kapjuk, ami divergens, hiszen

$$|a_n| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e \neq 0,$$

  azaz a sort generáló a_n sorozat nem tart nullához.

Összefoglalva:

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n\right) = (-1,1).$$

b) Vegyük észre, hogy

$$\sum_{n=1} \frac{2^{n-1}}{2n-1}(3x-1)^n = \sum_{n=1} \frac{2^{n-1}3^n}{2n-1}\left(x-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Ez olyan hatványsor, ahol $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = \dfrac{2^{n-1}3^n}{2n-1} \neq 0$, ha $0 < n \in \mathbb{N}$, és $\underline{\underline{a = \frac{1}{3}}}$.

Ekkor

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n 3^{n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{2^{n-1}3^n} = \lim_{n\to+\infty} 6\cdot\frac{2n-1}{2n+1} = 6\lim_{n\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 6,$$

amiből következik, hogy a hatványsor konvergenciasugara:

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{A} = \frac{1}{6}.}}$$

Ezért

$$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right) = (a-R, a+R) \subset \mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\frac{2^{n-1}3^n}{2n-1}\left(x-\frac{1}{3}\right)^n\right) \subset [a-R, a+R] = \left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right].$$

A határpontok vizsgálata.

- Ha $x=\frac{1}{6}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}\frac{2^{n-1}3^n}{2n-1}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = \sum\limits_{n=1}\frac{1}{2(2n-1)}(-1)^n$ sort kapjuk, ami konvergens, hiszen ez egy Leibniz-típusú sor. Valóban, az
$$a_n = \frac{1}{2(2n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
és a sorozat monoton csökkenő.
- Ha $x=\frac{1}{2}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}\frac{2^{n-1}3^n}{2n-1}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \sum\limits_{n=1}\frac{1}{2(2n-1)}$ sort kapjuk, ami divergens a minoráns kritérium szerint. Valóban
$$\frac{1}{2(2n-1)} \geq \frac{1}{2(2n)} = \frac{1}{4n} \quad (n>0) \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}\frac{1}{4n} \text{ divergens.}$$

Összefoglalva:

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\frac{2^{n-1}3^n}{2n-1}\left(x-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right).$$

Megjegyzés. A feladat megoldható a $t=3x-1$ transzformáció alkalmazásával is. Igazolható, hogy az így kapott

$$\sum_{n=1}\frac{2^{n-1}}{2n-1}t^n$$

hatványsor konvergenciahalmaza a $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ intervallum. Ebből következik, hogy az eredeti sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$-\frac{1}{2} \leq 3x-1 < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \leq 3x < \frac{3}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{2}.$$

c) A $\sum\limits_{n=0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+2)^n$ hatványsornál $\alpha_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \neq 0$, ha $n\in\mathbb{N}$, és $\underline{\underline{a=-2}}$. Ekkor

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{4},$$

amiből következik, hogy a hatványsor konvergenciasugara:

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{A} = 4.}}$$

Ezért

$$(-6, 2) = (a - R, a + R) \subset \mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+2)^n\right) \subset [a - R, a + R] = [-6, 2].$$

A határpontok vizsgálata.

- Ha $x = 2$, akkor a $\sum\limits_{n=0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ sort kapjuk. Megmutatjuk, hogy a sort generáló

  $$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  sorozat nem tart nullához, ezért a hatványsor az $x = 2$ pontban divergens. Valóban $a_0 = \frac{(0!)^2}{(2\cdot 0)!}4^0 = 1$ és az (a_n) sorozat szigorúan monoton növekvő, mert

  $$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^2 4^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} = \frac{(n+1)^2 (n!)^2 \cdot 4 \cdot 4^n (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2 4^n} = \\ &= \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{4(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1} > 1.\end{aligned}$$

  Ezért (a_n) nem nullsorozat, és így a hatványsor divergens az $x = 2$ pontban.

- Ha $x = -6$, akkor a $\sum\limits_{n=0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n$ sort kapjuk, ami divergens, hiszen generáló sorozata nem tart nullához. Valóban, az előzőek alapján az

  $$|b_n| = \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\right| = \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  generáló sorozat abszolút értéke nem tart nullához, és így (b_n) nem nullsorozat. A hatványsor az $x = -6$ pontban is divergens.

Összefoglalva:

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+2)^n\right) = (-6, 2).$$

Emlékeztető. ***Hatványsor összegfüggvénye.*** A konvergenciahalmaz minden egyes x eleméhez a sor összegét rendelve egy függvényt, nevezetesen a hatványsor ***összegfüggvényét*** értelmezzük:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n, \quad \text{ha} \quad x \in \mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n\right).$$

A mértani sor összegfüggvénye. *A*

$$\sum_{n=0} x^n$$

hatványsor összegfüggvénye

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1).$$

Tétel. **(Műveletek hatványsorokkal)** *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$*, illetve* $\sum_{n=0} \beta_n(x-a)^n$ *hatványsorok* R_α*, illetve* R_β *konvergenciasugarai pozitívak, és legyen*

$$R := \min\{R_\alpha, R_\beta\}.$$

Jelölje f*, illetve* g *az összegfüggvényeket:*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R_\alpha,\, a+R_\alpha)\big),$$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R_\beta,\, a+R_\beta)\big).$$

Ekkor a $\lambda \cdot f$*,* $f+g$ *és* $f \cdot g$ *függvények az* $(a-R, a+R)$ *intervallumon felírhatók az alábbi hatványsorok összegeként:*

1. $\lambda \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R, a+R)\big),$

2. $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n + \beta_n)(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R, a+R)\big),$

3. $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \beta_{n-k} \right) (x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R, a+R)\big).$

2. Feladat. *Az alábbi* f *függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsuk elő nulla középpontú hatványsor összegeként:*

$$a)\quad f(x) = \frac{1-x}{1-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$$

$$b)\quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$c)\quad f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}).$$

Megoldás.

a) Alakítsuk át a függvényt!

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}).$$

A mértani sor összegfüggvénye alapján (x helyett $-x$-et írunk)

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < -x < 1),$$

azaz minden $-1 < x < 1$ esetén. Ez azt jelenti, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

b) Alakítsuk át a függvényt!

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A mértani sor összegfüggvénye alapján (x helyett $-x^2$-et írunk)

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (-1 < -x^2 < 1),$$

azaz minden $-1 < x < 1$ esetén. Ez azt jelenti, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (-1 < x < 1).$$

Megjegyzés. $\sum\limits_{n=0} (-1)^n x^{2n}$ egy olyan nulla középpontú hatványsor, amelynek minden páratlan indexű tagja nulla. Valóban, a sor felírható a

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-0)^n \qquad \text{alakban, ahol} \qquad \alpha_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} & (n \text{ páros szám}) \\ 0 & (n \text{ páratlan szám}). \end{cases}$$

c) Alakítsuk át a függvényt!

$$f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}).$$

Parciális törtekre bontunk:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}.$$

Ekkor

$$x = (A+B)x - 3A - 2B \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $A+B=1$ és $-3A-2B=0$, amiből

$$B = 1-A \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = -3A-2B = -3A-2(1-A) = -2-A$$

azaz $A=-2$ és $B=3$. Így

$$f(x) = -\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}).$$

A mértani sor összegfüggvénye alapján (x helyett $x/2$-et írunk)

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n \qquad \left(-1 < \frac{x}{2} < 1\right),$$

azaz minden $-2 < x < 2$ esetén, illetve (x helyett $x/3$-at írunk)

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} x^n \qquad \left(-1 < \frac{x}{3} < 1\right),$$

azaz minden $-3 < x < 3$ esetén.

Tehát

$$f(x)=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n \qquad (-2<x<2).$$

Megjegyzés. A feladat hatványsorok szorzatával is megoldható. Valóban

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{x}{(2-x)(3-x)}=\frac{x}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

illetve már igazoltuk, hogy

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n \quad (-2<x<2) \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}x^n \quad (-3<x<3).$$

A fenti két hatványsor szorzata

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{3^{n-k}}\right)x^n \qquad (-2<x<2).$$

Ezért

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{x}{6}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{3^{n-k}}\right)x^n=\frac{x}{6}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)x^n=\\
&=\frac{x}{6}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1-(3/2)^{n+1}}{1-3/2}\cdot x^n=\frac{x}{6}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^n}\left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n=\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^{n+1}=\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n \qquad (-2<x<2).
\end{aligned}$$

Emlékeztető. ***Az exponenciális függvény.*** A $\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$ hatványsor minden $x\in\mathbb{R}$ pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis a

$$\exp(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvényt ***exponenciális függvénynek*** nevezzük.

Az e szám hatványait tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ kitevő esetén így *értelmezzük*:

$$e^x:=\exp(x) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A szinusz- és koszinuszfüggvény. A $\sum_{n=0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ hatványsor minden $x\in\mathbb{R}$ pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét ***szinuszfüggvénynek*** nevezzük, vagyis

$$\sin x:=\sin(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

A $\sum_{n=0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ hatványsor minden $x\in\mathbb{R}$ pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét ***koszinuszfüggvénynek*** nevezzük, vagyis

$$\cos x:=\cos(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

3. Feladat. *Állítsuk elő az*

$$a)\quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad\qquad b)\quad f(x) = \sin^2 x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényeket nulla középpontú hatványsor összegeként.

Megoldás.

a) Az exponenciális függvény hatványsora alapján (x helyett $-x^2/2$-et írunk)

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \exp(-\tfrac{x^2}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{2})^n}{n!} \qquad (\underbrace{-x^2/2 \in \mathbb{R}}_{x\in\mathbb{R}}),$$

azaz

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(-2)^n n!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) A

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{és} \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

trigonometrikus azonosságok kivonásával azt kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

A koszinuszfüggvény hatványsora alapján (x helyett $2x$-et írunk)

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \qquad (\underbrace{2x \in \mathbb{R}}_{x\in\mathbb{R}}),$$

azaz

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{-2}\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-4)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-4)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-4)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$