Diszkrét matematika I. feladatok
Komplex számok I
Ötödik alkalom (2024.03.11-03.15.)

1. Fejezze ki algebrai alakban a következő számokat:

   a) $(3+i)(2+3i)$; **Megoldás:** $(3+i)(2+3i) = (6-3) + i(2+9) = 3+11i$
   b) $(1-2i)(5+i)$; **Megoldás:** $(1-2i)(5+i) = (5-(-2)) + i(1-10) = 7-9i$
   c) $(2-5i)^2$; **Megoldás:** $(2-5i)^2 = 2^2 + (-5i)^2 - 2\cdot 2\cdot 5i = 4-25-20i = -21-20i$
   d) $(1-i)^3$. **Megoldás:** $(1-i)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 - i^3 = 1-3i-3+i = -2-2i$

2. Oldja meg a következő egyenleteteket a komplex számok halmazán:

   a) $\dfrac{z+i-3i\overline{z}}{z-4} = i-1$; **Megoldás:** Először kössük ki, hogy $z \neq 4$, ezután be lehet szorozni: $z+i-3i\overline{z} = (i-1)(z-4)$, most legyen $z = a+bi$, azaz $a+bi+i-3i(a-bi) = (i-1)(a+bi-4)$, vagyis $a-3b+i(b+1-3a) = (4-a-b)+i(a-4-b)$, azaz $a-3b = 4-a-b$ és $b+1-3a = a-4-b$. Tehát $2a-2b = 4$ és $4a-2b = 5$. A két egyenletet kivonva: $2a = 1$, és így $1-2b = 4$, azaz $2b = -3$. $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2}$, $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i \neq 4$.
   b) $(z+3-i)(\overline{z}-4+3i) = 1$; **Megoldás:** $z = a+bi$, így: $(a+bi+3-i)(a-bi-4+3i) = 1$ $((a+3)+(b-1)i)((a+4)+i(3-b)) = (a+3)(a+4)-(b-1)(3-b)+i((b-1)(a+4)+(a+3)(3-b)) = (a^2-a-12+b^2-4b+3)+i(2a+b+5) = 1$. Ez két egyenlet két valós ismeretlenre: $2a+b+5 = 0$ és $a^2-a-12+b^2-4b+3 = 1$, az első egyenletből kifejezzük b-t: $b = -5-2a$, ezt beírva a második egyenletbe: $a^2-a-12+(-5-2a)^2-4(-5-2a)+3 = 1$, $a^2-a-12+(25+20a+4a^2)+20+8a+3 = 1$, $5a^2+27a+16 = 1$, $5a^2+27a+15 = 0$, erre megoldóképlet: $a = (-27 \pm \sqrt{729-300})/10$. ($a$-ra csak valós megoldások jöhetnek szóba.)
   c) $\dfrac{z+i-\overline{z}}{\overline{z}-3+z} = i$ **Megoldás:** $z = a+bi$, $\overline{z} = a-bi$, így $\dfrac{a+bi+i-a+bi}{a-bi-3+a+bi} = \dfrac{(2b+1)i}{2a-3} = i$, vagyis $\dfrac{2b+1}{2a-3} = 1$, azaz $2b+1 = 2a-3$, vagyis $2b = 2a-2$, tehát $b = a-1$, ez egy egyenes.

3. Legyenek $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}, B \in \mathbb{C}^{3\times 2}, C \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ a következő mátrixok

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z} & z \\ z & \overline{z} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 3-i \\ 3-i & 2-i \\ -1+2i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3+i & i \\ 3i & 2i & 3-4i \\ 2i & 2 & -i \end{pmatrix}$$

   Számítsa ki a következő szorzatok közül amelyiket lehet: $A^2, B^2, AB, BA, AC, CA, BC, CB$.
   Megoldás: A^2 létezik, B^2 nem létezik, AB nem léezik, BA létezik, AC nem létezik, CA nem létezik, BC nem létezik, CB létezik.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \overline{z} & z \\ z & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z} & z \\ z & \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z}^2 + z^2 & 2z\overline{z} \\ 2z\overline{z} & \overline{z}^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

   BA és CB is kiszámolható...

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z} & z \\ z & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

   Számolja ki a $\det A, \det B, \det A^2, \det AB, \det BA, \det B^2$ determinánsokat.
   Megoldás: $\det A = \det(i \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = i^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1\cdot 1 - 1\cdot 1) = 2$, hiszen $d\times d$-es mátrix λ skalárszorosának determinánsa a determináns λ^d-szerese. De kijönne úgy is, hogy $\det A = (-i)\cdot(i) - (i)\cdot(i) = -(-1)-(-1) = 2$
   $\det B = \overline{z}\cdot\overline{z} - z\cdot z = \overline{z^2} - z^2 = \overline{(2+i)^2} - (2+i)^2 = \overline{(5+4i)} - (5+4i) = (5-4i)-(5+4i) = -8i$
   $\det A^2 = (\det A)^2 = 2^2 = 4$, $\det AB = \det A \det B = 2\cdot(-8i) = -16i$, $\det BA = \det B \det A = -16i$, $\det B^2 = (\det B)^2 = (-8i)^2 = -64$.

5. Rajzolja le a komplex számsíkon a következő halmazokat:

a) $\{z: \ \mathrm{Re}(z+2i) \le 0\}$;
Megoldás: Mivel $2i$ hozzáadása nem váloztat a valós részen: $\mathrm{Re}(z+2i) = \mathrm{Re}\, z \le 0$, ezek azok a z komplex számok, amiknek a valós része (az "x-koordinátája") nempozitív. Azaz ez a képzetes tengelytől balra eső zárt félsík (maga a félsíkot határoló képzetes tengely is benne van).

b) $\{z: \ \mathrm{Re}(z+1) \ge \mathrm{Im}(z-3i)\}$;
Megoldás: $\mathrm{Re}(z+1) = \mathrm{Re}\, z+1$, és $\mathrm{Im}(z-3i) = \mathrm{Im}\, z-3$, így a feltétel $1+\mathrm{Re}\, z \ge -3+\mathrm{Im}\, z$, vagyis $z = x+yi$ esetén $1+x \ge y-3$, vagyis $y \le 4+x$. Ez tehát az $y = x+4$ egyenletű egyenes által határolt két félsík egyike, méghozzá az, ami $(x,y) = (0.0)$ pontot tartalmazza (hiszen $0 \le 4+0$), azaz az egyenes *alatti* félsík (a határolóegyenest is beleértve).

c) $\{z: \ |z-i-1| \le 3\}$;
Megoldás: A $|z| \le 3$ egyenlőtlenséget kielégítő $z = a+bi$ komplex számokra $a^2+b^2 \le 3$ teljesül, azaz ez az origó körüli 3 sugarú körlap (a $a^2+b^2 = 3$ egyenletű körvonal és annak belseje is). De a feladat nem ezt kérdezi, hanem $|z-i-1| \le 3$ egyenlőtlenséget. Ebben a $z = 0$ helyett a $z = i+1$ esetén lenne a baloldal 0, azaz sejthető, hogy ez az $1+i$ körüli 3 sugarú körlap lesz.
Másik megoldás: $|z-i-1| = |(a-1)+(b-1)i| = (a-1)^2+(b-1)^2 \le 3$.

d) $\{z: \ |z-3+2i| = |z+4-i|\}$;
Megoldás: $|(a-3)+(b+2)i| = |(a+4)+(b-1)i|$, vagyis $(a-3)^2+(b+2)^2 = (a+4)^2+(b-1)^2$, azaz $a^2-6a+9+b^2+4b+4 = a^2+8a+16+b^2-2b+1$, azaz $13-6a+4b = 17+8a-2b$, azaz $6b = 14a+4$, azaz $3b = 7a+2$. Ez egy egyenes.
Másik megoldás: $|z-3+2i| = |z-(3-2i)|$ a z távolsága $3-2i$ számtól. $|z+4-i| = |z-(-4+i)|$ a z távolsága $-4+i$ számtól. Azaz $|z-3+2i| = |z+4-i|$ feltételt azok a z pontok teljesítik, amik *ugyanakkora távolságra* vannak $3-2i$ és $-4+i$ pontoktól, azaz ezeknek a szakaszfelező merőlegese (ezen egyenes pontjai) a megoldás.

e) $\{z: \ z = 1/\overline{z}\}$;
Megoldás: $z = 1/\overline{z} \Leftrightarrow 1 = z\overline{z} = |z|$. Ez a komplex egységkör.

f) $\{z: \ z+\overline{z} = 0\}$.
Megoldás: $z+\overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z = 0$, ez a képzetes tengely.

6. Adja meg az a és b valós számok értékét, ha:

a) $(a+bi)(2-i) = a+(3+b)i$; **Megoldás:** $(2a+b)+i\cdot(2b-a) = a+(3+b)i$, vagyis $(a+b)+i\cdot(b-a-3) = 0$, azaz $a+b = 0$ és $b-a-3 = 0$, tehát $b = -a$, és így $-2a-3 = 0$, ezért $a = -\frac{3}{2}$, és $b = \frac{3}{2}$

b) $(a+bi)(-1-2i) = \dfrac{2+i}{a-bi}$; **Megoldás:** Először kikötjük, hogy $a-bi \ne 0$, vagyis a és b *egyszerre* nem lehet nulla. Ezután már beszorozhatunk $a-bi$-vel: $(a-bi)(a+bi)(-1-2i) = 2+i$, azaz $(a^2+b^2)(-1-2i) = (-a^2-b^2)-2(a^2+b^2)i = 2+i$, vagyis $-a^2-b^2 = 2$, és $-2(a^2+b^2) = 1$, azaz $-2(-2) = 1$, $4 = 1$, ami ellentmondás, azaz nincs megoldás: semmilyen a és b valós számokat megadva sem teljesíthető az egyenlet.

c) $\overline{(a+bi)(3-4i)} = 2i$; **Megoldás:** $\overline{(a+bi)(3-4i)} = \overline{(3a+4b)+(3b-4a)i} = (3a+4b)-(3b-4a)i = 2i$, azaz $3a+4b = 0$, és $4a-3b = 2$. Ez egy lineáis egyenletrendszer, amit vagy mátrixosan oldunk meg, vagy ad hoc módon.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-9-16}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{25}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

az ad hoc megoldással: $3a+4b = 0$ egyenlet négyszeresét kivonjuk $4a-3b = 2$ egyenlet háromszorosából: $-9b-16b = 6$, azaz $-25b = 6$, vagyis $b = -\frac{6}{25}$. Illetve $3a+4b = 0$ egyenlet háromszorosát hozzáadjuk $4a-3b=2$ egyenlet négyszereséhez: $9a+16a=8$, és így $a=\frac{8}{25}$. (Természetesen ugyanaz jön ki, mint mátrixosan.)

7. Adja meg a következő számokat trigonometrikus alakban:

a) $\sqrt{3}+i$; **Megoldás:** $\sqrt{3}+i=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$

b) $1-i$; **Megoldás:** $=\sqrt{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i)=\sqrt{2}\cdot(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\cdot\sin(-\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4})$

c) $4i$; **Megoldás:** $4i=4\cdot(0+1\cdot i)=4\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2})$

d) -3; **Megoldás:** $-3=3\cdot(-1+0\cdot i)=3\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$

e) $\frac{10}{\sqrt{3}-i}$; **Megoldás:** Előbb külön a számláló és külön a nevező trigonometrikus alakja:

$10=10\cdot(1+0\cdot i)=10\cdot(\cos 0+i\cdot\sin 0)$ $\quad\sqrt{3}-i=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i)=2\cdot(\cos\frac{-\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{-\pi}{6})$

$$\frac{10}{\sqrt{3}-i}=\frac{10}{2}\cdot(\cos(0-\frac{-\pi}{6})+i\cdot\sin(0-\frac{-\pi}{6}))=5\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$$

f) $\frac{2+3i}{5+i}$; **Megoldás:** Vagy a fentihez hasonlóan, csak itt nem nevezetes szög sem a számláló, sem a nevező argumentuma, így precíz formárban benne maradnak az arkusztangensek. Vagy: **Másik megoldás:** Előbb algebrai alakkal kiszámoljuk tört algebrai alakját:

$$\frac{2+3i}{5+i}=\frac{2+3i}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i}=\frac{10+3+i\cdot(15-2)}{5^2-(-1)}=\frac{13+13i}{26}=\frac{1}{2}\cdot(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Tehát $\frac{2+3i}{5+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$, így sikerült precíz alakot adni.

g) $3-4i$; **Megoldás:** $3-4i=\sqrt{3^2+4^2}\cdot(\frac{3}{5}+i\cdot\frac{-4}{5})=5\cdot(\frac{3}{5}+i\cdot\frac{-4}{5})=5\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)$, ahol α egy olyan szög, aminek a tangense $\frac{-4}{3}$, és a negyedik síknegyedbe esik, tehát $\alpha=\arctan\frac{-4}{3}$.

h) $-2+i$. **Megoldás:** $-2+i=\sqrt{2^2+1^2}\cdot(\frac{-2}{\sqrt{5}}+i\cdot\frac{1}{\sqrt{5}})=\sqrt{5}\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)$, ahol α egy olyan szög, aminek a tangense $\frac{-1}{2}$, és a második síknegyedbe esik, tehát $\alpha=\arctan\frac{-1}{2}+\pi$.

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0