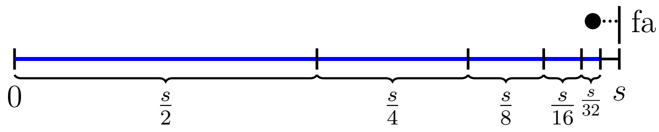
6. előadás

VÉGTELEN SOROK 1.

Több ógörög filozófus arra a következtetésre jutott, hogy az érzékelés csak látszat és félrevezető, hiszen a dolgok folyamatos változásban vannak, és így mire ezeket érzékelnénk azok már megváltoztak. Ezért a tudást csak gondolkodás útján lehet megszerezni. Zénón (i. e. 490-430), az eleai iskola egyik képviselője, azért vált híressé, mert több, a mozgás ellentmondásosságára rámutató paradoxont fogalmazott meg. Az egyikkel azt állította, hogy egy fának hajított kő sosem érkezhet célba, mert ehhez előbb meg kell tennie a célponttól lévő távolság felét, ezután a hátralévő távolság felét, és így tovább. Végtelen sok számot pedig nem tudunk összeadni.



A megtett távolság tart s-hez

Nincs kétség afelől, hogy egy hajított kő célba tud érni. Akkor hol a hiba az előző gondolatmenetben? A mozgást végtelen sok szakaszra bontotta fel, és feltételezte, hogy a teljes mozgás megtételéhez össze kell tudnunk adni az egyes szakaszok hosszát, ami lehetetlen, mert végtelen sok szakasz van. De a valóságban nincs szükség összeadásokra egy mozgás megtételéhez, nem állunk le menet közben számolni. Másrészt, összekeverte a matematikában előforduló két fajta végtelent. Az egyik végtelen a futási szakaszok számára vonatkozik, ami a halmazok számosságával áll összefüggésben. A másik végtelen a teljes futáshoz szükséges idő korlátlanságáról szól.

Zénón paradoxonjai arra hívják fel a figyelmünket, hogy a természet össze tud adni végtelen sok számot anélkül, hogy elvégezné a végtelen sok számítást. Jó lenne kifejleszteni egy olyan matematikai módszert, ami szintén képes lenne erre. Ilyen módon több gyakorlati problémát tudnánk megoldani egy teljesen új megközelítéssel. De ehhez először értelmezni kell, mit értünk végtelen sok szám összegén. Ezzel a sor fogalmához jutunk.

A végtelen sor fogalma

Egy sort egy olyan sorozatból képezzünk, amelynek tagjait szeretnék „összeadni”.

1. Definíció. *Az $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett*

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az (a_n) által generált **végtelen sornak** *(röviden* **sornak***) nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum a_n, \quad \textit{vagy} \quad \sum_{n=0} a_n, \quad \textit{vagy} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy s_n a $\sum a_n$ sor **n-edik részletösszege***, illetve a_n a $\sum a_n$ sor* **n-edik tagja***, ahol $n \in \mathbb{N}$.*

A végtelen sor tehát egy speciális képzésű sorozat, és még nem egy konkrét összeg. Ennek tagjai az (a_n) sorozat tagjaiból álló, véges számú összegek, amelyek egyre több összeadandó tagot tartalmaznak, ahogy az n index növekszik. Így jutunk ahhoz a felismeréshez, hogy az $n \to \infty$ határátmenet olyan, mintha összeadnánk a sorozat összes tagját.

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ **sor konvergens**, *ha részletösszegeinek az* (s_n) *sorozata konvergens, azaz ha létezik és véges a* $\lim(s_n)$ *határérték. Ekkor ezt a határértéket a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összegének*** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim(s_n).$$

A $\sum a_n$ **sor divergens**, *ha a részletösszegekből képzett* (s_n) *sorozat divergens. Ebben az esetben az* (s_n) *sorozatnak nincs határértéke, vagy*

- $\lim(s_n) = +\infty$, *és ekkor azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összege*** $+\infty$,

vagy

- $\lim(s_n) = -\infty$, *és ekkor azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összege*** $-\infty$.

Ezeket úgy jelöljük, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := +\infty, \qquad \textit{illetve} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := -\infty.$$

Megjegyzések.

1. ***Figyeljük meg a bevezetett jelölések közötti különbséget!***
   - A $\sum\limits_{n=0} a_n$ szimbólum jelöli a *végtelen sort*, ami egy *sorozat*, mégpedig az (a_n) részletösszegeinek sorozata. Ha a $\sum\limits_{n=0} a_n$ szimbólumra tekintünk, akkor arra gondolunk, hogy össze akarjuk adni az (a_n) sorozat tagjait. A sor konvergenciája azt jelenti, hogy ez a végtelen sok szám „összeadható” és eredménye egy valós szám.
   - A $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ szimbólum pedig az s_n részletösszeg-sorozat *határértékét*, azaz a *végtelen sor összegét*, vagyis egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemet jelöl abban az esetben, ha a szóban forgó határérték létezik. Ha ez a határérték nem létezik, akkor a sor összegét nem értelmezzük.

2. A sor összege különböző alakban írhatjuk fel:
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right).$$
   de időnként az
   $$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
   jelölést is használjuk annak ellenére, hogy ugyanígy jelöltük a $\sum a_n$ sort is. Az adott szövegkörnyezetben azonban világos lesz majd, hogy a végtelen sorról, vagy pedig annak az összegéről van szó.

3. A bemutatott Zénón paradoxonjában a kő mozgását végtelen sok szakaszra bontottuk. Az n-edik szakasz hossza $a_n := s/2^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, ahol s a dobás helye és a fa távolsága. Az (a_n) sorozatból készített végtelen sor tehát
   $$\sum a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \cdots = \sum_{n=0} \frac{s}{2^{n+1}}.$$
   Hamarosan igazolni fogjuk, hogy a fenti sor konvergens, és összege s.

4. A korábbi megállapodásunknak megfelelően az $(a_n) : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \to \mathbb{R}$ függvények is sorozatok minden $M \in Z$ esetén. Az ilyenekből képzett

$$s_n := a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_n \qquad (M \leq n \in \mathbb{N})$$

sorozatot is ***végtelen sornak tekintjük***, és jelölésükre a

$$\sum_{n=M} a_n$$

szimbólumot fogjuk használni. Ekkor a ***sor összege*** ugyanúgy legyen a $\lim(s_n)$ határérték. A további definíciók és tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre a sorokra is érvényesek lesznek, de ezt nem fogjuk külön hangsúlyozni. Ennek alapvető oka, hogy az

$$(a_n) \quad (n = M,\, M+1,\, M+2,\, \dots) \qquad \text{és az} \qquad (a_{n+M}) \quad (n = 0,\, 1,\, 2\, \dots)$$

sorozatok megegyeznek, ezért ugyanazt a sort generálják megegyező

$$\sum_{n=M}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+M}$$

sorösszegekkel. Az előző átalakítást ***átindexelésnek*** hívjuk.

Nevezetes sorok

$\boxed{\mathbf{1.}}$ A geometriai/mértani sor.

1. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A (q^n) sorozatból képzett $\sum_{n=0} q^n$* **geometriai** *vagy* **mértani sor** *akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor a $\sum_{n=0} q^n$ sornak van összege, és $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.

Bizonyítás. Az

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}\, b + \cdots + a\, b^{n-1} + b^n\right) \qquad \big(a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\big)$$

azonosság alapján ($a = 1$ és $b = q$) a $\sum_{n=0} q^n$ geometriai sor részletösszegeit $q \neq 1$ esetén az alábbi „zárt alakban” írhatjuk fel:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ha $q \neq 1$ valós szám, akkor a (q^{n+1}) geometriai sorozat pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor 0 a határértéke. Ekkor a $\sum_{n=0} q^n$ sor konvergens, és az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor az állítás következik abból, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$.

Megjegyzés. A kilőtt nyílt mozgásából kapott végtelen sor összege:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s}{2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \cdots + \frac{s}{2^{n+1}}\right) = \frac{s}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{s}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = s. \quad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ A teleszkopikus sor.

2. Tétel. *A* $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ *ún.* **teleszkopikus sor** *konvergens, és összege* 1*, azaz*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1.$$

Bizonyítás. A sor n-edik részletösszege:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \overbrace{\frac{1}{k\cdot(k+1)}}^{\textbf{ötlet: } \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{k+1}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Megjegyzés. Egy sornak, vagyis a részletösszeg-sorozatának a konvergenciavizsgálatához nem használhatjuk a műveletek és a határátmenet felcserélhetőségéről szóló tételt, ui. ez csak *rögzített számú* sorozatok összegére érvényes. Az n index növekedésével azonban s_n-t egyre nagyobb számú sorozat összegeként foghatjuk fel.

A teleszkopikus sornál ezt a problémát egy ügyes átalakítással meg tudtuk oldani. Az s_n részletösszeget olyan zárt alakra hoztuk, ahol csak véges sok tag maradt az összeg elejéből és a végéből, de a közepe „kiesett”. Vannak még olyan sorok, ahol ezt meg lehet tenni, és ezeket ***teleszkopikus típusú soroknak*** nevezzük. Elnevezésüket a régi hordozható egyszemes távcsövek (teleszkópok) után kapta, amelyek egymásba csúsztatható csövekből áll a könnyebb tárolásuk érdekében. Ebben az állapotban csak az első és az utolsó cső látható. $\blacksquare$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Hiperharmonikus sorok.

Tekintsük az alábbi sorokat:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$

Az első sort ***harmonikus sornak***, míg a másodikat ***szuperharmonikus sornak*** nevezzük.

Meglepőnek tűnhet, hogy annak ellenére, hogy az $1/n$ alakú számok nagy indexekre nagyon kis értékeket vesznek fel, ***a harmonikus sor divergens***. Látható, hogy a sor részletösszegei korlátlanul növekszenek:

n	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{15}	10^{20}	10^{30}	10^{40}	10^{50}
$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$2,9...$	$5,1...$	$12,0...$	$23,6...$	$35,1...$	$46,6...$	$69,6...$	$92,6...$	$115,7...$

Ezzel szemben, a szintén kis értékű $1/n^2$ alakú számok már „összeadhatók”, azaz ***a szuperharmonikus sor konvergens***. Ez látható, ha kiszámítjuk néhány nagy indexű részletösszegét:

n	5	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{20}
$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$	$1,4\ldots$	$1,5\ldots$	$1,634\ldots$	$1,644\,924\ldots$	$1,644\,934\ldots$	$1,644\,934\ldots$

Az alábbi tétel általánosítja az előző állításokat.

3. Tétel. *Legyen α rögzített valós szám. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

ún. **hiperharmonikus sor**

- *divergens, ha $\alpha \leq 1$, de ekkor van összege:* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$
- *konvergens, ha $\alpha > 1$.*

Bizonyítás. A hiperharmonikus sor pozitív tagokból áll. Ez jelentősen leegyszerűsíti a sor konvergenciájának vizsgálatát, hiszen ekkor az s_n részletösszegei monoton növekvő sorozatot alkotnak, és így elegendő (s_n) korlátosságát megvizsgálni.

- $\boxed{\alpha \leq 1}$ Először az $\alpha = 1$ esetet, azaz a harmonikus sor divergenciáját bizonyítjuk. Az s_n összegnek egy ötletes csoportosításával egyszerűen igazolhatjuk, hogy az (s_n) sorozat felülről nem korlátos. Legyen $P > 0$ tetszőleges, és válasszunk egy $k > 2P$ egész számot. Ekkor $\forall n \geq 2^k$ index esetén

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) > \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{\text{4-szer}}\right) + \cdots + \left(\underbrace{\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{-szer}}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{4}}_{=1/2} + \underbrace{4 \cdot \frac{1}{8}}_{=1/2} + \cdots + \underbrace{2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k}}_{=1/2} = 1 + k \cdot \frac{1}{2} > \frac{k}{2} > P. \end{aligned}$$

  Ezért (s_n) nem korlátos, tehát $\lim(s_n) = +\infty$, és így a harmonikus sor divergens.

  Legen most $\alpha < 1$. Ekkor

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

  és így hiperharmonikus sor részletösszegeire $\lim(s_n) = +\infty$ teljesül, hiszen a harmonikus sor divergenciája miatt

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

  Összefoglalva: minden $\alpha \leq 1$ esetén a hiperharmonikus sor divergens, és összege $+\infty$.

- $\boxed{\alpha > 1}$ Megmutatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor részletösszegeinek a sorozata felülről korlátos. Ennek igazolásához az $\alpha = 1$ esetben mutatott ötletet használjuk, ti. kettőhatványok közötti csoportokat képezünk. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor $\forall n < 2^{k+1}$ indexre:

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} \leq \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha}\right) < \\
&< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{4^\alpha}}_{\text{4-szer}}\right) + \cdots + \left(\underbrace{\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^\alpha}}_{2^k\text{-szor}}\right) = \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k =: s_k^{(q)}.
\end{aligned}
$$

ahol $q = 1/2^{\alpha-1}$. Mivel $\alpha > 1$, így $0 < q < 1$, amiből következik, hogy a $\sum q^n$ mértani sor konvergens. Ezért a részletösszegeinek a sorozata, vagyis az $s_k^{(q)}$ $(k \in \mathbb{N})$ sorozat felülről korlátos sorozatot alkotnak, és így az igazolt

$$s_n < s_k^{(q)} \qquad (n < 2^{k+1},\ k \in \mathbb{N})$$

becslés miatt az (s_n) sorozat is felülről korlátos. Mivel monoton növekvő is, ezért konvergens, és így a hiperharmonikus sor is konvergens $\alpha > 1$ esetén.

Megjegyzés. Az előző tétel $\alpha > 1$ esetén a hiperharmonikus sornak csak a konvergenciáját állítja. A bizonyításból a sor összegére csak egy felső becslést kapunk. Nevezetesen:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq \lim_{k\to+\infty} s_k^{(q)} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$

A XVII. században és a XVIII. század elején sokan próbálták az $\alpha = 2$ esetben adódó szuperharmonikus sor összegét meghatározni. Végül Leonhard Euler (1707–1783) svájci matematikus 1735-ben fedezte fel azt, hogy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644\,934.$$

A hiperharmonikus sor összegére csak néhány további speciális α esetén ismerünk formulát. A nehézségeket jól mutatja az a tény, hogy pl. $\alpha = 3$ esetén a sor összegére eddig nem sikerült semmilyen zárt alakot találni és lehet, hogy ilyen alak nem is létezik. Csak az 1970-es években bizonyították be, hogy a szóban forgó összeg irracionális. Sőt, továbbra is megoldatlan azonban az, hogy pl. a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$ szám racionális-e vagy sem. ■

$\boxed{\textbf{4.}}$ Az e szám sorösszeg előállítása.

4. Tétel. *A $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}$ végtelen sor konvergens, és az összege az $e := \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számmal egyenlő:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

Bizonyítás. Először a sor konvergenciáját igazoljuk. Mivel a sor pozitív tagokból áll, ezért az s_n részletösszegei monoton növekvő sorozatot alkotnak. Elegendő tehát igazolni, hogy az (s_n) sorozat felülről korlátos. Minden $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 2 + s^*_{n-1},$$

ahol s^*_n a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ teleszkopikus sor n-edik részletösszege. Már igazoltuk, hogy ez a sor konvergens, és összege 1. Ezért (s^*_n) felülről korlátos, és így a fenti becslés miatt (s_n) is felülről korlátos, és

$$s := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \to +\infty} s_n \leq 2 + \lim_{n \to +\infty} s^*_{n-1} = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2 + 1 = 3.$$

Most kiszámítjuk a sor összegét. A binomiális tétel alapján

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{<1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{<1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{<1} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n,$$

így

$$e = \lim_{n \to +\infty} a_n \leq \lim_{n \to +\infty} s_n = s, \qquad \text{azaz} \qquad \underline{e \leq s}.$$

Rögzítsük most egy $m \geq 2$ természetes számot, és legyen $n > m$. Ekkor az előbbiekből

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{m} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \frac{1}{k!}. \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = s_m.$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőtlenségben véges számú alapművelet szerepel (m rögzített), ezért tudtuk a műveletek és a határérték kapcsolatáról szóló tételt alkalmazni.

A fentiek szerint $\lim(a_n) \geq s_m$ minden $m \geq 2$ esetén, amiből $m \to +\infty$ határátmenetet véve kapjuk, hogy

$$e = \lim_{n \to +\infty} a_n \geq \lim_{m \to +\infty} s_m = s \qquad \text{azaz} \qquad \underline{e \geq s}.$$

Ezt a korábbi egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy $s = e$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ A Leibniz-sor.

5. Tétel. *A*

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor *konvergens.*

Az állítást később fogjuk igazolni.

Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra

A valós sorozatokra vonatkozó Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával, de a véges határérték definíciójával ellentétben annak eldöntésére, hogy egy adott sorozat Cauchy-sorozat-e vagy sem, nem szükséges ismerni a sorozat határértékét, hiszen ez utóbbi nem szerepel a Cauchy-tulajdonságban. A sorösszeg elég összetett fogalom, de lényegében egy határérték, a sor részletösszegeinek a határértéke. Ezért, ha a Cauchy-tulajdonságot felírjuk a sor részletösszegeinek sorozatára, akkor olyan tulajdonságot kapunk, ami ekvivalens a sor konvergenciájával, de nem tartalmazza a sor összegét.

6. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra). *A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0 \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\sum a_n \text{ konvergens} \quad\iff\quad (s_n) \text{ konvergens} \quad\iff\quad (s_n) \text{ Cauchy-sorozat},$$

azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_0 \colon |s_m - s_n| < \varepsilon$$

teljesül. Állításunk abból következik, hogy ha $m > n$, akkor

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m.$$

Megjegyzések.

1. A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot így is felírhatjuk:

   $$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0, \forall k \in \mathbb{N}^+ \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

   Valóban: legyen az előző tételben szereplő m index $m := n + k$.

2. A kritérium azt jelenti, hogy konvergens sorok esetén, ha elég nagy indextől adunk össze akármennyi véges sok tagot, akkor az összeg abszolút értéke kisebb, mint bármely előre meghatározott kicsi szám.

3. Ha a kritérium nem teljesül, akkor a sor divergens. Ez azt jelenti, hogy

   $$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists n > n_0, \exists k \in \mathbb{N}^+ \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \geq \varepsilon.$$

   A harmonikus sor divergenciája ennek alkalmazásával is igazolható. Valóban legyen $\varepsilon = 1/2$ és $n \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges index. A harmonikus sor általános tagja $a_n = 1/n$. Így minden $k \in \mathbb{N}^+$ szám esetén

   $$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+k}}_{k\text{-szor}} = \frac{k}{n+k}. \end{aligned}$$

   Ekkor $k = n$ esetén

   $$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \geq \frac{k}{k+k} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Nézzük meg a kritérium két fontos következményét!

7. Tétel. *Tekintsük a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorokat, és tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n = b_n.$$

*Ekkor a két sor **ekvikonvergens**, azaz a $\sum a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum b_n$ végtelen sor is konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens. Ekkor a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0\colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Ha $n_1 := \max\{n_0, N\}$, akkor $\forall m > n > n_1$ indexre

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_m| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

teljesül, így a $\sum b_n$ sor is kielégíti a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot, tehát konvergens.

Hasonlóan igazolható, hogy ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

Megjegyzés. A tétel azt állítja, hogy ha két sor legfeljebb véges sok tagban különbözik egymástól, akkor a két sor egyszerre konvergens vagy divergens. Ennek következménye, hogy egy sor véges sok tagjának a megváltoztatásával nem változik a sor konvergenciája.

Vigyázat! Itt csak a konvergencia/divergencia tényéről van szó, és ez nem jelenti azt, hogy a sorösszegek is megegyeznek. Ekvikonvergens sorok összege különböző is lehet. ■

8. Tétel (Sorok konvergenciájának szükséges feltétele). *Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor az (a_n) generáló sorozat nullsorozat, azaz $\lim(a_n) = 0$.*

Bizonyítás. A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumban legyen $m = n + 1$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim(a_{n+1}) = 0$, és így $\lim(a_n) = 0$.

Ebből az állításból rögtön kapunk egyszerű elégséges feltételeket sorok divergenciájára:

> *Ha az (a_n) sorozat nem nullsorozat, vagy divergens, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.*

Például, a $\sum \frac{3n}{n+1}$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = 3 \neq 0.$$

A $\sum(-1)^n$ sor is divergens, mert a $\big((-1)^n\big)$ sorozat divergens.

Megjegyzések.

1. Az előző szükséges feltétel így is igazolható: ha a sor összege s, akkor
$$a_n = \Big(a_0 + a_1 + \cdots + a_n\Big) - \Big(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}\Big) = s_n - s_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} s - s = 0.$$

2. A $\lim(a_n) = 0$ csak ***szükséges, de nem elégséges feltétel*** a $\sum a_n$ sor konvergenciájához, hiszen tudjuk, hogy a harmonikus sor divergens, de a tagjai nullához tartanak.

Végtelen sorok lineáris kombinációi

9. Tétel (Sorok lineáris kombinációi). *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ sorok összege. Legyen*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n =: A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \textit{és} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$
Ha a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyekre $\lambda \cdot A + \mu \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ értelmezve van, akkor a sorok $\sum\limits_{n=0} (\lambda\, a_n + \mu\, b_n)$ lineáris kombinációjának is van összege, és
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\Big) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B.$$

Bizonyítás. Jelölje s_n, illetve t_n a $\sum a_n$, illetve a $\sum b_n$ sor n-edik részletösszegét. Ekkor a sorok lineáris kombinációjának n-edik részletösszege:
$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\lambda\, a_k + \mu\, b_k\Big) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \sum_{k=0}^{n} b_k = \lambda\, s_n + \mu\, t_n.$$
Így az állítás abból következik, hogy
$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\lambda\, s_n + \mu\, t_n\Big) = \lambda \cdot \lim_{n\to+\infty} s_n + \mu \cdot \lim_{n\to+\infty} t_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lambda \cdot A + \mu \cdot B.$$

Megjegyzések.

1. Ha a $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ sorok konvergensek, akkor $A, B \in \mathbb{R}$, és így a $\sum(\lambda\, a_n + \mu\, b_n)$ sor konvergens, és
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\Big) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B \in \mathbb{R}.$$

2. Teljes indukcióval igazolható, hogy az állítás véges sok sor lineáris kombinációjára is kiterjeszthető..

Nemnegatív tagú sorok

A nevezetes soroknál látunk, hogy a pozitív tagokkal rendelkező sorok konvergenciának vizsgálata leegyszerűsödik. Ugyanez érvényes azokra a sorokra is, amelyeknek minden tagja nagyobb vagy egyenlő mint nulla. Ezeket ***nemnegatív tagú soroknak*** nevezzük.

10. Tétel. *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeiből álló sorozat korlátos.*

Bizonyítás. A $\sum a_n$ nemnegatív tagú sor (s_n) részletösszegeinek a sorozata monoton növekvő, hiszen $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor csak két eset lehetséges:

- (s_n) korlátos, és így a monotonitás miatt konvergens. Ekkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.
- (s_n) nem korlátos, és így a monotonitás miatt $(+\infty)$-hez tart. Ekkor a sor divergens.

Megjegyzések.

1. A tétel bizonyításából látható, hogy ha a $\sum a_n$ nemnegatív tagú sor divergens, akkor az összege $+\infty$, azaz $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.
2. Az előző tétel állítása érvényben marad, ha a sor csak véges sok negatív tagot tartalmaz, mert ekkor (s_n) egy index után már monoton növekvő sorozat lesz. Hasonló állítás fogalmazható meg nempozitív tagú végtelen sorokra. Más a helyzet, ha a sor végtelen sok pozitív és negatív tagot is tartalmaz.

11. Tétel (Összehasonlító kritériumok). *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \colon 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

1. **Majoráns kritérium:** *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*
2. **Minoráns kritérium:** *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen véges sok tag megváltozásával egy sor konvergenciája nem változik. Jelölje (s_n), illetve (t_n) a $\sum a_n$, illetve a $\sum b_n$ sorok részletösszegeiből álló sorozatokat. A feltevésünk miatt $s_n \leq t_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a nemnegatív tagú sorok konvergenciáról szóló tétel szerint

1. ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor (t_n) korlátos, így (s_n) is az. Ezért a $\sum a_n$ sor is konvergens.
2. ha $\sum a_n$ sor divergens, akkor (s_n) nem korlátos, így (t_n) sem az. Ezért a $\sum b_n$ sor is divergens.

Megjegyzés. A szuperharmonikus sor konvergenciája a majoráns kritériummal is igazolható. Valóban: a szóban forgó pozitív tagú sor tagjaira:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} \qquad (n \geq 2).$$

Így $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}$ majorálható a $\sum\limits_{n=2} \frac{1}{(n-1)n} = \sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens teleszkopikus sorral. ■

Abszolút és feltételesen konvergens sorok

Említettük, hogy ha egy sor végtelen számú pozitív és negatív tagot is tartalmaz, akkor a sor konvergenciája már nem csak az (s_n) sorozat korlátosságán fog múlni, mint a nemnegatív tagú sorok esetében. Ilyen sorok konvergenciájának a vizsgálatánál segítségünkre lehet a $\sum |a_n|$ nemnegatív tagú sor, amelyet a $\sum a_n$ sor ***abszolút sorának*** nevezünk.

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor* **abszolút konvergens**, *ha a $\sum |a_n|$ abszolút sora konvergens.*

12. Tétel. *Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Bizonyítás. Ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens, akkor a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0 \colon \Big| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \Big| < \varepsilon.$$

Mivel

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon,$$

ezért a Cauchy-féle konvergenciakritérium teljesül a $\sum a_n$ sorra is.

Megjegyzések.

1. Az előző tétel következménye, hogy ha egy konvergens pozitív tagú sor tetszőleges számú tagjainak előjelét mínuszra cseréljük, akkor abszolút konvergens sort kapunk. Így például az
$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$
sor abszolút konvergens, hiszen abszolút sora az
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$
konvergens szuperharmonikus sor.

2. Vezessük be a következő jelöléseket. Adott a $\sum a_n$ sor legyen
$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & (a_n > 0) \\ 0 & (a_n \le 0), \end{cases} \qquad a_n^- := \begin{cases} 0 & (a_n > 0) \\ -a_n & (a_n \le 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Képezzük a $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ nemnegatív tagú sorokat! Vegyük észre, hogy
$$\text{(1)} \qquad a_n = a_n^+ - a_n^- \qquad \text{és} \qquad |a_n| = a_n^+ + a_n^- \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
A $\sum a_n$ sor abszolút konvergenciája ekvivalens azzal, hogy a $\sum a_n^+$ és a $\sum a_n^-$ sorok mindegyike konvergens. Valóban ha $\sum |a_n|$ konvergens, akkor a
$$a_n^+ \le |a_n| \qquad \text{és} \qquad a_n^- \le |a_n| \qquad (n \in \mathbb{N})$$
relációkból a majoráns kritérium alapján $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ is konvergens. Fordítva, az előző két sor konvergenciájából következik a $\sum |a_n|$ és $\sum a_n$ sor konvergenciája az (1) egyenlőségek miatt, hiszen már igazoltuk, hogy két konvergens sor tagonkénti összegéből képzett sor is konvergens.

A tétel állításának a megfordítása nem igaz: egy konvergens sor nem feltétlenül abszolút konvergens. Meg fogjuk majd mutatni azt, hogy a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor konvergens, de az abszolút értékeiből képzett

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

harmonikus sor divergens.

4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor **feltételesen konvergens**, ha $\sum a_n$ konvergens, de nem abszolút konvergens.*

A Leibniz-sor tehát egy feltételesen konvergens sor.

Megjegyzés. Ha egy sor feltételesen konvergens, akkor legalább a $\sum a_n^+$ és a $\sum a_n^-$ sorok egyike divergens. De mivel $\sum a_n$ konvergens, így (1) első egyenlősége miatt a $\sum a_n^+$ és a $\sum a_n^-$ sorok mindegyike divergens. Másrészt, a konvergencia szükséges feltétele miatt $\lim(a_n) = 0$, és ezért $\lim(a_n^+) = 0$ és $\lim(a_n^-) = 0$ is igaz.

A $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ sorok divergenciája, és a $\lim(a_n^+) = 0$, $\lim(a_n^-) = 0$ feltételek szükségesek, de együttes teljesülésük még nem elegendő a $\sum a_n$ sor feltételes konvergenciájához. ■