

1. feladat 6 pont

- (a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: fél pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **2 pont**
- (1) Ha z komplex szám, akkor $z - \bar{z}$ valós. **I H**
- (2) Ha az R relációra $R \subseteq A \times A$, ahol A egy kételemű halmaz, akkor R biztosan tranzitív. **I H**
- (3) Egy részbenrendezett halmazban legfeljebb egy legkisebb elem létezhet. **I H**
- (4) Ha f függvény, és f^{-1} is függvény, akkor mindkettő injektív. **I H**
- (b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2|x| - 5 = y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ reláció értékkészletét és az $R^{-1}(\{6, 7\})$ inverz képet. **2 pont**
- (c) Konstruáljon az $\{1, 2, 3\}$ halmazon olyan R relációt mely szimmetrikus, tranzitív, reflexív, de nem antiszimmetrikus. **2 pont**

2. feladat 10 pont

- (a) Igazolja, hogy az $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 3x + 5y \text{ páros}\}$ reláció ekvivalenciareláció. Mik lesznek az ekvivalenciaosztályok? **5 pont**
- (b) Adjon meg olyan nem üres A, B és C halmazokat, amelyekre teljesül a következő összefüggés: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$. **2 pont**
- (c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $A \setminus (B \cup C) \subseteq A \Delta (B \Delta C)$. Adjunk meg olyan A, B, C halmazokat, ahol a tartalmazás valódi. **3 pont**

3. feladat 5 pont

Legyen $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + 3y = 2\}$ és $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + y = 5\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

4. feladat 5 pont

- (a) Döntse el a következő függvényekről, hogy injektívek-e. **3 pont**
- $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = (x - 1/4)^2$
 $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^3 - x$
- (b) Döntse el, hogy az $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := -2\sqrt{|x + 42|}$ függvény injektív-e, illetve szürjektív-e. **2 pont**

5. feladat 7 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^4 = z$, ahol

$$z = \frac{(\sqrt{3} - i)^{18}}{(2 - 2i)^{20}}.$$

6. feladat – komplex 7 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = 1 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 5\}$ **3 pont**
- (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \geq |z + 1|\}$ **4 pont**

6. feladat – relációk 7 pont

- (a) Adjunk meg egy olyan $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ függvényt, mely függvényként injektív, relációként pedig antiszimmetrikus. **3 pont**
- (b) Legyen S szimmetrikus reláció. Igazoljuk, hogy ekkor $R \circ S \circ R^{-1}$ is szimmetrikus reláció. **4 pont**