NÉV: NEPTUN: GYAKORLATVEZETŐ:

ELTE IK Diszkrét matematika I.

1. zárthelyi dolgozat – 2022-04-06

Felhasználható idő: 105 perc, használható segédeszközök: üres papír és toll vagy digitális változatuk. Gyorssegély, ne ezen múljon: $\cos 30° = \sin 60° = \sqrt{3}/2$, $\cos 45° = \sin 45° = \sqrt{2}/2$, $\cos 60° = \cos 30° = 1/2$, $180° = \pi$, $i^2 = -1$.

1. feladat 6 pont

(a) Döntse el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak (helyes válasz: fél pont, nincs válasz/helytelen válasz: 0 pont). **2 pont**

(1) Ha a, b, c, d valósak, és $a + bi = c + di$, akkor $a = c$, és $b = d$. **I H**

(2) Egy reláció nem lehet egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus. **I H**

(3) Egy ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok uniója a reláció értelmezési tartománya. **I H**

(4) Ha f és g injektív függvények, akkor $f \circ g$ is injektív. **I H**

(b) Határozza meg az $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid 10x-5 = y\} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ reláció értelmezési tartományát és az $R^{-1}(\{-20\})$ inverz képet. **2 pont**

(c) Konstruáljon az $\{1, 2, 3\}$ halmazon olyan R relációt mely nem szimmetrikus és nem tranzitív. **2 pont**

2. feladat 10 pont

(a) Igazolja, hogy az $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y - x \text{ nemnegatív páros szám } \}$ reláció részbenrendezés. Mik lesznek a minimális elemek? **5 pont**

(b) Adjon meg olyan A, B és C halmazokat, amelyekre teljesül a következő összefüggés: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$. **2 pont**

(c) Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C halmazok esetén igaz a következő összefüggés: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$. **3 pont**

3. feladat 5 pont

Legyen $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3y + 5 = -8x\}$ és $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x \geq -8y + 4\}$. Határozza meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ kompozíciót.

4. feladat 5 pont

(a) Döntse el a következő relációkról, hogy függvények-e. **3 pont**

$f_1 \subset (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$, $f_1 = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R} \mid (x - 2)y = 1\}$

$f_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 = y^2\}$

$f_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \mid y - x^{12} = -1 + 3y\}$

(b) Döntse el, hogy az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2\sqrt{x + 13}$ függvény injektív-, illetve szürjektív-e. **2 pont**

5. feladat 7 pont

A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyekre $w^3 = z$, ahol $z = \dfrac{(1 + i)^{32}}{\left(-1 - \sqrt{3}i\right)^{12}}$.

6. feladat 7 pont

Ábrázolja a Gauss-számsíkon a következő halmazokat:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 2\,\mathrm{Re}\, z + 2\,\mathrm{Im}\, z \geq 2 \wedge \mathrm{Im}\, z < 5\}$ **3 pont**

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 4 \wedge \mathrm{Re}\, z < 10\}$ **4 pont**