Analízis 1, 1. zárthelyi dolgozat, 2023.04.15.

Megoldások (vázlatosan)

1. (7 pont) Legyen
$$H = \left\{ \frac{3n+2}{2n+1} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Határozza meg a H halmaz szuprémumát és infimumát! Van-e a H halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

Megoldás:

- $\dfrac{3n+2}{2n+1} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot(2n+1)+\frac{1}{2}}{2n+1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4n+2}$
- $\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4n+2} > \dfrac{3}{2}$. Sejtés: $\inf H = \dfrac{3}{2}$
  - $\forall h \in H : h \geq \dfrac{3}{2}$ ✓
  - $\forall \varepsilon > 0 -$ hoz $\exists h \in H\colon h < \dfrac{3}{2} + \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0 -$ hoz $\exists n \in \mathbb{N}\colon \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4n+2} < \dfrac{3}{2} + \varepsilon$

    elég: $4n+2 > 4n > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n > \dfrac{1}{4\varepsilon}$, pl. $n := \left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$
- $\inf H \notin H \implies \nexists \min H$
- $n \geq 0 \implies \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4n+2} \leq 2 \in H\ (n=0) \implies \max H = \sup H = 2$

---

2. (8 pont) Legyen
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-9} \quad \big(x \in (-3,3)\big) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt{x+4} \quad (x \in [0,+\infty)).$$

(a) Határozza meg az $f \circ g$ függvényt! (4 pont)

(b) Igazolja, hogy a g függvény invertálható, és határozza meg az inverzét! (4 pont)

Megoldás:

(a)

- $\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \geq 0 \mid -3 < g(x) < 3\}$
- $x \geq 0$ és $-3 < g(x) < 3 \iff x \geq 0$ és $0 \leq \sqrt{x+4} < 3 \iff x \geq 0$ és $-4 \leq x < 5 \iff$ $0 \leq x < 5$, tehát $\mathcal{D}_{f\circ g} = [0,5)$
- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{g^2(x)}{g^2(x)-9} = \dfrac{x+4}{x-5} \quad (0 \leq x < 5)$

(b)

- $x, t \geq 0:\ g(x) = g(t) \iff \sqrt{x+4} = \sqrt{t+4} \iff x = t$, tehát g invertálható
- $x \geq 0 \implies \sqrt{x+4} \geq 2$, tehát $\mathcal{R}_g \subset [2,+\infty)$. Sejtés: $\mathcal{R}_g = [2,+\infty)$
- $[2,+\infty) \subset \mathcal{R}_g \iff \forall y \geq 2:\ \exists x \geq 0:\ g(x) = y$

  $g(x) = y \iff \sqrt{x+4} = y \iff x = y^2 - 4 \geq 0 \quad (y \geq 2)$
- Tehát $\mathcal{D}_{g^{-1}} = \mathcal{R}_g = [2,+\infty)$, és $g^{-1}(y) = y^2 - 4 \quad (y \geq 2)$

---

3. (5 pont) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-n-15}{2n^2-7} = 2.$$

Megoldás:

- Bizonyítandó: $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0$: $\left|\frac{4n^2-n-15}{2n^2-7} - 2\right| < \varepsilon$
- $\left|\frac{4n^2-n-15}{2n^2-7} - 2\right| = \left|\frac{-n-1}{2n^2-7}\right| \underset{(n\geq 2)}{=} \frac{n+1}{2n^2-7} \leq \frac{n+n}{n^2+n^2-7} \underset{(n\geq 3)}{\leq} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$
- $\varepsilon > 0$ rögzített, elég: $\frac{2}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{2}{\varepsilon}$, tehát pl. $n_0 := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 3$ alkalmas

---

4. (12 pont) Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}, \qquad (4\ pont)$$

$$b)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{7n^5+3^{n+1}}{2^{2n}+9^{1-n}}}, \qquad (4\ pont)$$

$$c)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{3n+2023}. \qquad (4\ pont)$$

Megoldás:

(a) $$\lim \frac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{n^2+2}-n} = \lim \frac{(n^2+3)-n^2}{(n^2+2)-n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+3}+n} = \lim \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1} = \frac{3}{2}$$

(b) $$\sqrt[n]{\frac{7n^5+3^{n+1}}{2^{2n}+9^{1-n}}} = \sqrt[n]{\frac{7n^5+3\cdot 3^n}{4^n+9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{7\cdot\frac{n^5}{3^n}+3}{1+9\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n}} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[n]{\frac{7\cdot\frac{n^5}{3^n}+3}{1+9\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n}}$$

$$\lim \frac{7\cdot\frac{n^5}{3^n}+3}{1+9\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n} = 3 \in \mathbb{R}^+, \text{ tehát } \lim \frac{3}{4}\cdot\sqrt[n]{\frac{7\cdot\frac{n^5}{3^n}+3}{1+9\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^n}} = \frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}$$

(c) $$\lim \left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{3n+2023} = \lim \left(\frac{1-\frac{3/2}{n}}{1+\frac{1/2}{n}}\right)^{3n+2023} = \lim \left[\left(\frac{1-\frac{3/2}{n}}{1+\frac{1/2}{n}}\right)^n\right]^3 \cdot \left(\frac{1-\frac{3/2}{n}}{1+\frac{1/2}{n}}\right)^{2023} =$$

$$= \left[\frac{e^{-3/2}}{e^{1/2}}\right]^3 \cdot 1^{2023} = e^{-6}$$

---

5. (8 pont) Mutassa meg, hogy az

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \sqrt{3a_n + 4} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

Megoldás:

- Értelmezés: $a_n \geq 0$, a sorozat jól definiált
- Lehetséges határérték: ha $\exists A := \lim(a_n)$, akkor $A = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{3a_n + 4} = \sqrt{3A + 4}$ $\implies A^2 - 3A - 4 = 0 \iff A = -1 \vee A = 4 \underset{(A \geq 0)}{\implies} A = 4$
- Monotonitás: $(a_n) \nearrow \iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$, teljes indukcióval:
  - $n = 0 : a_0 = 0 \leq a_1 = 2$
  - Adott $n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \implies a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \leq \sqrt{3a_{n+1} + 4} = a_{n+2}$
- Korlátosság: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq 4$, teljes indukcióval:
  - $n = 0 : a_0 = 0 \leq 4$
  - Adott $n \in \mathbb{N} : a_n \leq 4 \implies a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \leq \sqrt{3 \cdot 4 + 4} = 4$
- (a_n) monoton növekvő és felülről korlátos $\implies$ konvergens, $\lim(a_n) = 4$