

3. előadás

VALÓS SOROZATOK 2.

Sorozat konvergenciájának a fogalma

Most a sorozatok kevésbé egyszerű, de igen fontos tulajdonságával, a *konvergencia* fogalmával fogunk megismerkedni. Ábrázoljuk a számegegyenesen például a következő sorozatokat:

Szemléletesen világos, hogy az (a_n) sorozat tagjai 0 körül „sűrűsödnek”, amit kifejezhetünk úgy is, hogy „a nagy indexű tagok közel vannak 0-hoz”. A (b_n) sorozat tagjainak egyik része -1 körül, a másik része 1 körül „sűrűsödik”, a (c_n) sorozatnak pedig egyetlen valós sűrűsödési helye sincs.

Egy sorozatot akkor fogunk *konvergensnek* nevezni, ha a tagjai egyetlen szám körül sűrűsödnek. Ez igaz az (a_n) sorozatra. Azt látjuk, hogy ha n nagy, akkor $(-1)^n/n$ értéke „nagyon kicsi”, azaz nagyon közel van 0-hoz. Pontosabban, 0-nak bármilyen környezetét véve, ha n elég nagy, akkor $(-1)^n/n$ „bele esik” ebbe környezetbe. Vegyük észre, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy csak véges sok indexre $(-1)^n/n$ marad a környezeten kívül.

1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat **konvergens**, ha

(*) $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ekkor az A számot a sorozat **határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim(a_n) := A, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n := A, \quad a_n \rightarrow A \ (n \rightarrow +\infty).$$

Az (a_n) sorozatot **divergensnek** nevezzük, ha nem konvergens

Megjegyzések.

1. Az $\varepsilon > 0$ számot **hibakorlátnak**, n_0 -at pedig **küszöbindexnek** nevezzük. Világos, hogy n_0 függ az ε -tól, ezért szokás ezt az ε -hoz tartozó küszöbindexnek is nevezni és $n_0(\varepsilon)$ -nal jelölni. Egy adott ε hibakorláthoz tartozó küszöbindex nem egyértelmű, ui. bármely n_0 -nál nagyobb természetes szám is egy „jó” küszöbindex.

2. Megállapodunk abban, hogy $(*)$ -ot így rövidítjük:

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

3. Ha egy sorozat divergens, akkor $(*)$ nem teljesül, amit pozitív állítás formájában azt jelenti, hogy

$$\forall A \in \mathbb{R}\text{-hez } \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists n > n_0: |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

1. Tétel (A határérték egyértelműsége). Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő A szám egyértelműen létezik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra $(*)$ az A_1 és az A_2 számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \neq A_2$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1: |a_n - A_1| < \varepsilon, \text{ és}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2: |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő n_1, n_2 indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = |(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)| \leq |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $|A_1 - A_2| < |A_1 - A_2|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet.

Az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, vagyis $a_n \in K_\varepsilon(A)$, azaz a_n eleme az A középpontú ε sugarú környezetnek. Ezért

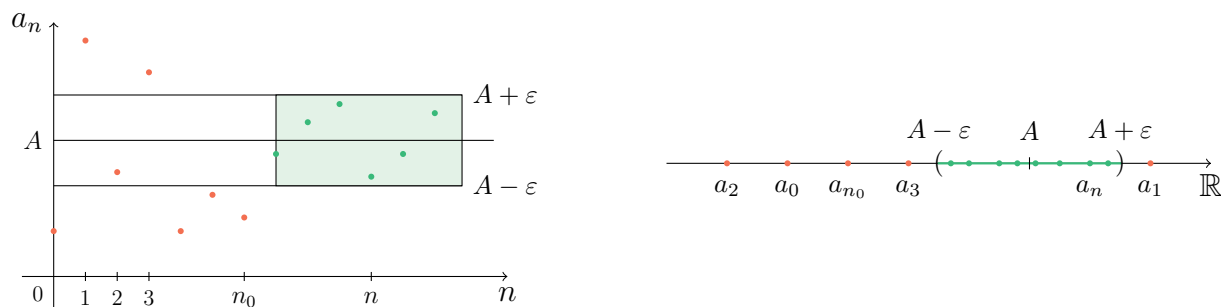
$$\lim(a_n) = A \iff \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Szavakkal megfogalmazva azt is mondhatjuk, hogy „az (a_n) sorozat konvergens, ha van olyan valós szám, hogy annak tetszőleges környezete tartalmazza a sorozat minden, alkalmas küszöb-index utáni tagját”. Mivel a küszöbindex előtt csak véges sok index van, ezért

$$\lim(a_n) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin K_\varepsilon(A)\} \text{ véges halmaz.}$$

Más szavakkal: „az (a_n) sorozat konvergens, ha van olyan valós szám, hogy annak tetszőleges környezetéből legfeljebb véges sok sorozatbeli tag marad ki”.

A határérték fogalmát szemléltetik az alábbi ábrák:



1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat konvergens és 0 a határértéke!

Megoldás. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$|a_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff 1 < n\varepsilon.$$

A valós számok arkhimédészi tulajdonságából következik, hogy ε -hoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}^+$ természetes szám, amelyre $1 < n_0\varepsilon$ (például az $1/\varepsilon$ szám $[1/\varepsilon]$ -nal jelölt egész része rendelkezik ezzel a tulajdonsággal). Ha $\mathbb{N}^+ \ni n > n_0$, akkor az $1 < n_0\varepsilon < n\varepsilon$ egyenlőtlenség is fennáll. Azt kaptuk tehát, hogy adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$|a_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } \mathbb{N} \ni n > n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon} \right],$$

így $\varepsilon > 0$ -hoz n_0 egy alkalmas küszöbindex.

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $(*)$ valóban teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

(Világos, hogy adott $\varepsilon > 0$ -hoz az imént megadott n_0 küszöbindexnél nagyobb természetes szám is jó küszöbindex. A küszöbindex megadásánál nem törekszünk a legkisebb küszöbindex meghatározására.)

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat divergens!

Megoldás. Az állítással ellentétben tegyük fel azt, hogy a sorozat konvergens és $A \in \mathbb{R}$ a határértéke. A konvergencia definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon = 1$. Ekkor

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - A| < 1.$$

Így,

$$\text{ha } n > n_0 \text{ páratlan} \implies a_n = (-1)^n = -1 \implies |(-1) - A| = |1 + A| < 1,$$

$$\text{ha } n > n_0 \text{ páros} \implies a_n = (-1)^n = 1 \implies |1 - A| < 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az A határértékre $|1 + A| < 1$ és $|1 - A| < 1$ is teljesül. Ebből az következik, hogy

$$2 = |(1 - A) + (A + 1)| \leq |1 - A| + |A + 1| < 1 + 1 = 2, \text{ azaz } 2 < 2.$$

Ez az ellentmondás azt bizonyítja, hogy az (a_n) sorozat divergens.

Konvergens sorozatok néhány alaptulajdonsága

2. Tétel. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatokra igaz a következő:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > N \text{ indexre } a_n = b_n.$$

Ekkor az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha (b_n) is konvergens, továbbá az utóbbi esetben $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

Bizonyítás. \Rightarrow Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A$. Ekkor

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1: a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Tekintsünk egy rögzített $\varepsilon > 0$ valós számot, és legyen $n_0 := \max\{n_1, N\}$. Ha $n > n_0$, akkor $b_n = a_n \in K_\varepsilon(A)$ is igaz, ezért a (b_n) sorozat is konvergens, és $\lim(b_n) = A$.

\Leftarrow Hasonlóan igazolható.

Megjegyzések.

1. Az állítás azt fejezi ki, hogy egy sorozat konvergenciáját és a határértékét a sorozat „első néhány” (akár az első százezer) tagja nem befolyásolja. Másként fogalmazva: ha egy sorozat (legfeljebb) véges sok tagját megváltoztatjuk, akkor ez sem a konvergencia tényén, sem pedig (ha konvergens sorozatból indulunk ki) a határértékén nem változtat.
2. A fentiek motiválják az alábbi elnevezések bevezetését. Ha valamely sorozat tagjaira vonatkozó állítás a sorozat véges sok tagját kivéve teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó állítás a sorozat **majdnem minden tagjára** (vagy majdnem minden indexre) teljesül. Ha tehát minden $n \in \mathbb{N}$ -re $T(n)$ egy állítás, akkor megállapodunk abban, hogy a „ $T(n)$ majdnem minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz” megfogalmazás azt jelenti, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > N \text{ indexre } T(n) \text{ igaz.}$$

A „majdnem minden” kitételt a legtöbbször így rövidítjük: **m.m.**

Ezt a tényt egy másik szóhasználatával úgy fejezhetjük ki, hogy $T(n)$ **minden elég nagy n -re teljesül**. Például az előző tétel feltételét röviden így írhatjuk le: *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatokra*

$$a_n = b_n \quad (m.m. \ n \in \mathbb{N}),$$

vagy

$$a_n = b_n \quad \text{minden elég nagy } n\text{-re}.$$

A következő állítás a konvergencia és a korlátosság kapcsolatára vonatkozik. Azt fejezi ki, hogy a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.

3. Tétel. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. Válasszuk a konvergencia definíciója szerinti jelöléssel ε -t 1-nek. Ehhez a hibakorláthoz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - A| < 1.$$

Így

$$|a_n| = |(a_n - A) + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \quad (n > n_0).$$

Ha $n \leq n_0$, akkor

$$|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|\}.$$

Legyen

$$K := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |A|\}.$$

Ekkor $|a_n| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat korlátos.

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz. Például a $((-1)^n)$ sorozat korlátos, de nem konvergens. A konvergenciának tehát a korlátosság *szükséges, de nem elégséges* feltétele. ■

Tágabb értelemben vett határérték

A környezet fogalmát kiterjesztettük $+\infty$, ill. $-\infty$ esetére:

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \quad \text{illetve} \quad K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

Ezzel tudjuk kiterjeszteni a

$$\lim(a_n) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n \in K_\varepsilon(A)$$

környezetekkel megfogalmazott határérték értelmezését $A = +\infty$, ill. $A = -\infty$ esetére is. De hogyan tudjuk ezt most egyenlőtlenségekkel megfogalmazni?

Legyen $A = +\infty$ és $P = 1/\varepsilon$. Ekkor

$$K_\varepsilon(A) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) = (P, +\infty), \quad \text{és így} \quad a_n \in K_\varepsilon(A) \Longleftrightarrow a_n > P.$$

Tehát

$$\lim(a_n) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n > P.$$

Ez azt jelenti, hogy (a_n) olyan divergens sorozat, ami azt a tendenciát mutatja, hogy „nagy” indexekre „nagy” pozitív értékeket vesz fel. Pontosabban: tetszőlegesen nagy pozitív P szám esetén legfeljebb véges sok sorozatbeli tag van, ami P -nél kisebb. Ilyen pl. az (n^2) sorozat.

Hasonlóan $A = -\infty$ és $P = -1/\varepsilon$ megválasztásával látható, hogy

$$\lim(a_n) = -\infty \iff \forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n < P,$$

ami azt jelenti, hogy (a_n) divergens sorozat, és azt a tendenciát mutatja, hogy „nagy” indexekre „nagy” negatív értékeket vesz fel. Pontosabban: tetszőlegesen nagy negatív P szám esetén legfeljebb véges sok sorozatbeli tag van, ami P -nél nagyobb. Ilyen pl. a $(-n^2)$ sorozat.

2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat

- **határértéke $+\infty$ (vagy a sorozat $+\infty$ -hez tart), ha**

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n > P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim(a_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \quad a_n \rightarrow +\infty, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

- **határértéke $-\infty$ (vagy a sorozat $-\infty$ -hez tart), ha**

$$\forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n < P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim(a_n) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty, \quad a_n \rightarrow -\infty, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Környezetekkel a konvergencia, illetve a $\pm\infty$ -hez tartás fogalmakat egységes formában is megadhatjuk.

3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak **van határértéke**, ha

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}, \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Vigyázzunk! A konvergencia és a határértékkel rendelkező sorozatok fogalma között alig van különbség, ha ezt környezetekkel írjuk le. Csak annyi a különbség, hogy konvergencia sorozatoknál $A \in \mathbb{R}$, és határértékkel rendelkező sorozatoknál pedig $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ugyanezt tapasztáljuk, ha szavakkal körülírjuk a fogalmak jelentését: „az (a_n) sorozatnak van határértéke, ha van olyan $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elem (nem feltétlenül valós szám), hogy ennek tetszőleges környezete tartalmazza a sorozat minden, alkalmas küszöbindex utáni tagját” vagy „az (a_n) sorozatnak van határértéke, ha van olyan $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elem (nem feltétlenül valós szám), hogy ennek tetszőleges környezetéből legfeljebb véges sok sorozatbeli tag marad ki”.

Tehát, **a határértékkel rendelkező sorozatok halmaza tágabb a konvergens sorozatok halmazánál.** Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor a sorozat tarthat egy valós számhoz, $+\infty$ -hez, vagy $-\infty$ -hez, így nem biztos, hogy konvergens, azaz lehet divergens. Ha egy sorozat konvergens, akkor van határértéke, és ez a határérték csak valós szám lehet.

A konvergenciához hasonlóan erre a tágabb fogalomra is igaz az egyértelműség.

4. Tétel (A tágabb értelemben vett határérték egyértelműsége). Ha az (a_n) sorozatnak van határértéke, akkor a fenti definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem egyértelműen létezik, ezt a sorozat **határértékének** nevezzük, és így jelöljük:

$$\lim(a_n) := A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n := A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad a_n \rightarrow A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Megjegyzés. A továbbiakban

$$\boxed{\lim(a_n) \in \mathbb{R}}$$

jelöli azt, hogy az (a_n) sorozat **konvergens**, vagyis véges a határértéke, a

$$\boxed{\lim(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}}$$

jelölés pedig azt fejezi ki, hogy az (a_n) sorozatnak **van határértéke**, azaz a sorozat vagy konvergens, vagy $+\infty$ vagy pedig $-\infty$ a határértéke. ■

3. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty.$$

Megoldás. Azt kell bebizonyítani, hogy

$$(*) \quad \forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P.$$

Legyen $P > 0$ egy adott valós szám, és vizsgáljuk az

$$(\Delta) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P$$

egyenlőtlenséget. Azt kell megmutatni, hogy ez bizonyos n_0 küszöbindextől kezdve minden n indexre igaz. A bizonyításhoz a következő „ötletet” alkalmazzuk: a bal oldalnál *kisebb*, de jóval egyszerűbb kifejezésről mutatjuk meg, hogy az P -nél nagyobb bizonyos indextől kezdve. A bal oldalt a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával *csökkentjük*:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n > n.$$

Így (Δ) helyett a következőt kapjuk:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > n > P.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilván teljesül, ha $n > n_0 := [P]$, és ez azt jelenti, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P, \quad \text{ha } n > n_0 = [P].$$

Következésképpen P -hez (például) $n_0 = [P]$ egy jó küszöbindex. Mivel P tetszőleges, ezért a fentiekből $(*)$ következik.

4. Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7 - 2n^2}{n + 10} = -\infty.$$

Megoldás. Azt kell bizonyítani, hogy

$$(*) \quad \forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: \frac{7 - 2n^2}{n + 10} < P.$$

Legyen $P < 0$ egy adott valós szám, és vizsgáljuk a

$$(\triangle) \quad \frac{7 - 2n^2}{n + 10} < P$$

egyenlőtlenséget. Azt kell megmutatni, hogy ez bizonyos n_0 küszöbindextől kezdve minden n indexre igaz. Szorozzunk be (-1) -gyel:

$$(\circ) \quad \frac{2n^2 - 7}{n + 10} > -P,$$

így a folytatás hasonló lesz az előző példánál leírtakhoz. Ezt az egyenlőtlenséget most meg tudnánk oldani. Jóval egyszerűbb azonban, ha az előző példánál alkalmazott ötletet követjük, ti. a bal oldalt *csökkentjük*:

$$\begin{aligned} \frac{2n^2 - 7}{n + 10} &= \frac{n^2 + (n^2 - 7)}{n + 10} > \quad (\text{ha } n > 2, \text{ akkor } n^2 - 7 > 0) > \\ &> \frac{n^2}{n + 10} > \quad (\text{ha } n > 10) > \frac{n^2}{n + n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Így (\circ) helyett azt kapjuk, hogy

$$\frac{2n^2 - 7}{n + 10} > \frac{n}{2} > -P, \quad \text{ha } n > 10.$$

Az $\frac{n}{2} > -P$, azaz az $n > -2P$ egyenlőtlenség igaz minden olyan n indexre, amelyre $n > [-2P]$.

A fentieket összefoglalva (\circ) , illetve a vele ekvivalens (\triangle) egyenlőtlenségre az adódik, hogy

$$\frac{7 - 2n^2}{n + 10} < P, \quad \text{ha } n > 10 \text{ és } n > [-2P].$$

Következésképpen P -hez (például) $n_0 := \max\{10, [-2P]\}$ egy jó küszöbindex. Mivel $P < 0$ tetszőleges, ezért a fentiekből $(*)$ következik.

Részsorozatok

Most bevezetjük a *részsorozat* fogalmát. Egy sorozat részsorozatát úgy kapjuk, hogy az eredeti sorozatból elhagyunk néhány (esetleg végtelen sok) tagot, végtelen sokat megtartva az eredeti sorrendben.

4. Definíció. Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ egy valós sorozat és $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekvő sorozat (röviden: ν egy **indexsorozat**). Ekkor az $a \circ \nu$ függvény is sorozat, amelyet az (a_n) sorozat ν indexsorozat által meghatározott **részsorozatának** nevezünk. Az $a \circ \nu$ sorozat n -edik tagja:

$$(a \circ \nu)(n) = a(\nu_n) = a_{\nu_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$a \circ \nu = (a_{\nu_n}).$$

Megjegyzések.

1. A függvények kompozíciójának a definíciója alapján

$$\mathcal{D}_{a \circ \nu} = \{n \in \mathcal{D}_\nu \mid \nu(n) \in \mathcal{D}_a\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \nu(n) \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

ezért az $a \circ \nu$ függvény valóban sorozat.

2. Szemléletesen szólva, az $a = (a_n)$ sorozatból az $a \circ \nu = (a_{\nu_n})$ részsorozatot úgy kapjuk, hogy az $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ sorozatból kiválasztjuk (kiszedjük) az egyre nagyobb indexű $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots$ tagokat. Az (a_{ν_n}) jelölésben az is tükröződik, hogy a_{ν_n} az $a \circ \nu$ sorozat n -edik tagja, az „eredeti” $a = (a_n)$ sorozatnak pedig ν_n -edik tagja. Például, ha

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots)$$

és

$$\nu = (2, 4, 6, 8, \dots),$$

akkor

$$a \circ \nu = (a_2, a_4, a_6, a_8, \dots).$$

Más szavakkal, részsorozathoz jutunk, ha egy sorozatból az index szerint növekvő sorrendben választunk ki végtelen sok tagot, azaz ha kiválasztunk egy tagot, akkor ezután csak magasabb indexű tagokból választhatunk. Részsorozatot kapunk akkor is, ha egy sorozatból kihagyunk tagokat úgy, hogy végtelen sok tagot megtartunk az eredeti sorrendben.

Nézzük még egy példát! Az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatnak

$$b_n := a_{n^2} = \frac{2n^2-1}{n^2+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{és} \quad c_n := a_{2n-1} = \frac{4n-3}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

két különböző részsorozata, amelyet a $\nu_n = n^2$ és a $\nu_n = 2n-1$ indexsorozatok generálják.

3. Felvetődik a kérdés, hogy a részsorozatok öröklík-e az eredeti sorozat tulajdonságait. Aból a tényből, hogy egy részsorozat tagjai az eredeti sorozattal azonos sorrendben követik egymást nyilvánvalóan következik, hogy a részsorozatok monotonitása azonos az eredeti sorozat monotonitásával. Másrészt, a $\mathcal{R}_{a \circ \nu} \subset \mathcal{R}_a$ tartalmazásból következik, hogy minden felülről vagy alulról korlátos sorozat bármely részsorozata is ugyanilyen korlátosságú. Azonban a részsorozat infimuma, ill. szuprimuma már nem feltétlenül egyezik meg az eredeti sorozat infimumával, ill. szuprimumával.

5. Tétel. Egy sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha minden részsorozatának van határértéke és mindegyike ugyanahhoz a határértékhez tart.

Bizonyítás. \Rightarrow Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak van határértéke, és $\lim(a_n) = A$, ahol $A \in \mathbb{R}$. Ekkor a definíció szerint

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén a } \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \notin K_\varepsilon(A)\} \text{ halmaz véges.}$$

Tetszőleges $a \circ \nu$ részsorozat esetén $\mathcal{R}_{a \circ \nu} \subset \mathcal{R}_a$. Emiatt igaz, hogy

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_{\nu_n} \notin K_\varepsilon(A)\} \text{ halmaz is véges,}$$

és ez azt jelenti, hogy az $a \circ \nu$ részsorozat is van határértéke, és $\lim a \circ \nu = A$.

\Leftarrow Az állítás azonnal következik abból, hogy minden (a_n) sorozat saját magának részsorozata a $\nu_n = n$ indexsorozat megválasztása mellett.

Az előző állításból következik, hogy ha van olyan ν és μ indexsorozat, amelyre

$$\lim(a_{\nu_n}) \neq \lim(a_{\mu_n}),$$

akkor az (a_n) sorozatnak nincs határértéke. Ez a állítás jól alkalmazható a gyakorlatban. Pl. már igazoltunk, hogy az

$$a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat divergens. Az előzőek szerint ezt jóval egyszerűbben is meg tudjuk mutatni. Valóban, (a_n) páros indexű részsorozata $a_{2n} = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), azaz $(1, 1, 1, \dots)$, az 1-hez konvergál. A páratlan indexű részsorozata pedig $a_{2n+1} = -1$ ($n \in \mathbb{N}$), azaz $(-1, -1, -1, \dots)$, a -1 -hez konvergál. Tehát a sorozatnak nincs határértéke, és így divergens.

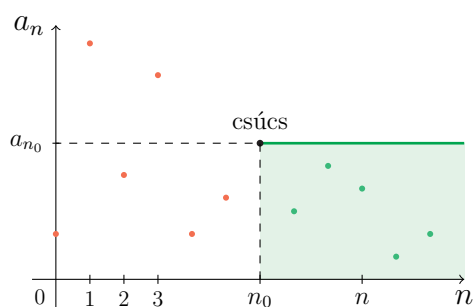
6. Tétel. Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik monoton részsorozata, azaz létezik olyan $\nu = \nu_n$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.

Bizonyítás.

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy a_{n_0} az (a_n) sorozat **csúcsa** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall n \geq n_0 \text{ indexre } a_n \leq a_{n_0}.$$

Két eset lehetséges.



1. eset. A sorozatnak **végtelen** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists \nu_0 \in \mathbb{N}: a_{\nu_0} \text{ csúcselem, azaz } \forall n \geq \nu_0: a_n \leq a_{\nu_0},$$

$$\exists \nu_1 > \nu_0: a_{\nu_1} \text{ csúcselem, azaz } \forall n \geq \nu_1: a_n \leq a_{\nu_1} (\leq a_{\nu_0}),$$

\vdots

Ezek a lépések folytathatók, mert végtelen sok csúcselem van. Így olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} \geq a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq \dots,$$

ezért a csúcsok (a_{ν_n}) sorozata (a_n) -nek egy monoton csökkenő részsorozata.

2. eset. A sorozatnak legfeljebb **véges** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ esetén } a_n \text{ már nem csúcs.}$$

Mivel a_N nem csúcselem, ezért

$$\exists \nu_0 > N: a_{\nu_0} > a_N.$$

Azonban a_{ν_0} sem csúcselem, ezért

$$\exists \nu_1 > \nu_0: a_{\nu_1} > a_{\nu_0} (> a_N).$$

Az eljárást folytatva most olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} < a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < \dots.$$

Ebben az esetben tehát (a_{ν_n}) sorozat (a_n) -nek egy (szigorúan) monoton növekvő részsorozata.

A rendezés és a határérték kapcsolata

7. Tétel (A közrefogási elv). Tegyük fel, hogy az (a_n) , (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:

- $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N: a_n \leq b_n \leq c_n,$
- az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás. Három eset lehetséges.

1. eset: $A \in \mathbb{R}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. $\lim(a_n) = \lim(c_n) = A$ azt jelenti, hogy (a_n) és (c_n) azonos A határértékkel rendelkező konvergens sorozatok. A konvergencia definíciója szerint tehát

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1: A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2: A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|b_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > n_0,$$

azaz a (b_n) sorozat konvergens, tehát van határértéke, és $\lim(b_n) = A$.

2. eset: $A = +\infty$ Tegyük fel, hogy $P > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(a_n) = +\infty$ értelmezése szerint

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1: a_n > P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$P < a_n \leq b_n,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = +\infty$.

3. eset: $A = -\infty$ Tegyük fel, hogy $P < 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim(c_n) = -\infty$ értelmezése szerint

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1: c_n < P.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$, akkor $\forall n > n_0$ indexre

$$P > c_n \geq b_n.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = -\infty$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a bizonyítás 2. esetében a (c_n) sorozat nem játszik szerepet. Ezért ebben az esetben közrefogás helyett egy *minoráns* jellegű tulajdonságot kapunk:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N: a_n \leq b_n \quad \text{és} \quad \lim(a_n) = +\infty \quad \implies \quad \lim(b_n) = +\infty.$$

Hasonlóan, a bizonyítás 3. esetében az (a_n) sorozat nem játszik szerepet. Ezért ebben az esetben közrefogás helyett egy *majoráns* jellegű tulajdonságot kapunk:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N: b_n \leq c_n \quad \text{és} \quad \lim(c_n) = -\infty \quad \implies \quad \lim(b_n) = -\infty.$$

■

A következő tétel azt állítja, hogy a határértékek közötti nagyságrendi kapcsolatok öröklődnek a sorozatok elég nagy indexű tagjaira. Sőt, bizonyos értelemben „fordítva”: a tagok nagyságrendi kapcsolataiból következtethetünk a határértékek közötti nagyságrendi viszonyokra.

8. Tétel. Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

$$1. \quad A < B \quad \implies \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N: a_n < b_n.$$

$$2. \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N: a_n \leq b_n \quad \implies \quad A \leq B.$$

Bizonyítás.

1. Azt már tudjuk, hogy bármely két különböző $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel:

$$\forall A, B \in \overline{\mathbb{R}}, A \neq B \text{-hez } \exists r_1, r_2 > 0, K_{r_1}(A) \cap K_{r_2}(B) = \emptyset.$$

Világos, hogy ha $A < B$, akkor $\forall x \in K_{r_1}(A), \forall y \in K_{r_2}(B): x < y$.

Mivel $\lim(a_n) = A$ és $\lim(b_n) = B$, így a definíció értelmében

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1: a_n \in K_{r_1}(A),$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2: b_n \in K_{r_2}(B).$$

Legyen $N := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > N$ esetén

$$a_n \in K_{r_1}(A) \quad \text{és} \quad b_n \in K_{r_2}(B) \quad \implies \quad a_n < b_n.$$

2. Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor a már igazolt 1. állítás szerint $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy tétel állításai „majdnem” egymás megfordításai, de egyik sem fordítható meg.

- Az 1. állítás megfordítása nem igaz, azaz az $a_n < b_n$ feltételből nem következtethetünk az $A < B$ egyenlőtlenségre. Tekintsük például az

$$a_n := -\frac{1}{n} \quad \text{és} \quad b_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozatokat.

- A 2. állítás megfordítása sem igaz. Legyen például

$$a_n := \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad b_n := -\frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

■