Diszkrét matematika I. feladatok
Relációk II

Negyedik alkalom (2024.03.04-03.08.)

1. Legyen $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

   a) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

   b) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$

   c) $R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$

2. Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

   a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$

   b) $S = \{(M,N) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \exists P \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \det P \neq 0, M = P^{-1}NP\}$

   c) $T_X = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ ahol X adott halmaz

3. a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.

   b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.

4. Konstruáljon az $\{1,2,3,4\}$ halmazon olyan relációt, amely

   a) reflexív és nem irreflexív

   b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus

   c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus

   d) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm

5. Legyenek $R, S \subseteq A \times A$ szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy $R \circ S$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $R \circ S = S \circ R$.

6. Tekintsük a következő R relációt.

   - $A = \{1,2,3,4,5\}$ és
     $R = \{(1,1),(1,5),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,1),(5,5)\} \subset A \times A$
   - $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ és
     $R = \{(1,1),(1,5),(1,6),(1,8),(2,2),(2,4),(3,3),(3,7),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(5,6),$
     $(5,8),(6,1),(6,5),(6,6),(6,8),(7,3),(7,7),(8,1),(8,5),(8,6),(8,8)\} \subset A \times A$

   a) Mutassa meg, hogy az R reláció ekvivalenciareláció.

   b) Határozza meg az A halmaz osztályfelbontását (azaz az $\{[a] : a \in A\}$ halmazt).

7. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

   a) Adott $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.

   b) Legyen $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ egy nem-nulla vektor és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{u}^T\mathbf{z} = \mathbf{v}^T\mathbf{z}$.

   c) Legyen $m > 1$ egész és $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén $a \sim b$ ha $m \mid (a-b)$.

Szorgalmi feladatok

8. Írjon programot, mely adott R relációra ellenőrzi, hogy az ekvivalenciareláció-e. A program segítségével határozza meg az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz lehetséges ekvivalenciarelációi számát $n = 3,4,5,6$ esetén (**2 pont**)