Diszkrét matematika 1

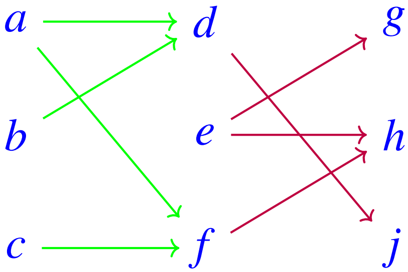
3. előadás
Relációk

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

Relációk



Relációk

Relációk: adat + köztük lévő kapcsolat

Példa

- Adott cég esetén legyenek A ,B, . . . , M az alkalmazottak. A cég két projekten dolgozik: BANK, JÁTÉK

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

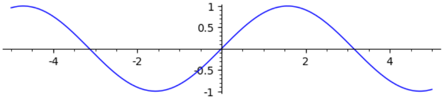
projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	2024.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	2024.03.31.

Relációk

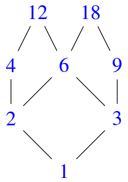
Relációk: adat + köztük lévő kapcsolat

Példa

- Függvények, „többértékű függvények”: $x \leftrightarrow \sin(x)$



- Egészek és $n \leftrightarrow m$, ha $n \mid m$



- Halmazok és $A \leftrightarrow B$, ha $A \subset B$

$\vdots$

Descarte szorzat

Relációk tárolása: rendezett páronként (ill. általában: rendezett n-esekként)

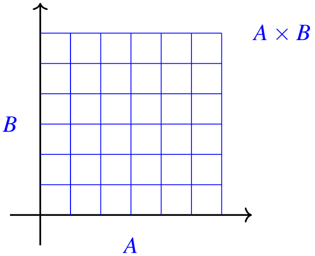
- IT cég: $\{(A, \text{'menedzser'}), (B, \text{'menedzser'}), (C, \text{'fejlesztő'}), \ldots\}$
- sin: $\{(0,0), (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}), (\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}2), (\frac{\pi}{2}, 1), \ldots\}$
- oszthatóság: $\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (2,6), (3,6), (3,12), \ldots\}$

Definíció

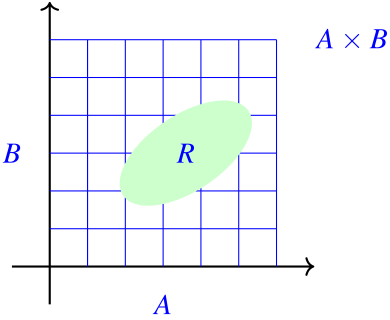
Adott A, B halmazok Descarte szorzata: $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

Figyelem:

- ha $a \neq b$, akkor $(a,b) \neq (b,a)$
- ha $A \neq B$, akkor $A \times B \neq B \times A$
- $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$, ...



Binér reláció



Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) reláció az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) reláció X-en.

Példa

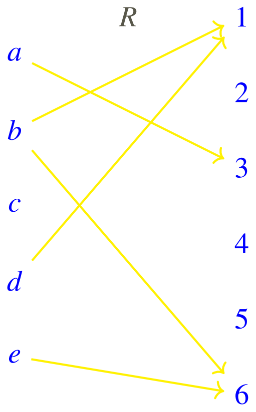
- egyenlőség reláció: $\mathbb{I}_X = \{(x, x) : x \in X\}$
- részhalmaz reláció X-en: $\{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \subset B : A, B \in 2^X\}$
- altér reláció: $\{(U, V) : U, V \leq \mathbb{R}^5, U \text{ altere } V\text{-nek}\}$
- sajátvektor reláció $\{(\mathbf{v}, M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists\lambda : M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$
- $\sin$ függvény relációja: $\{(x, \sin x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Értelmezési tartomány, értékkészlet

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor

- R éretelmezési tartománya ('domain'):
  $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R\}$.
- R értékkészlete ('range'):
  $\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in R\}$.



Példa

- Legyen $R \subset \{a, b, c, d, e\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  $\mathrm{dmn}(R) = \{a, b, d, e\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{1, 3, 6\}$.
- $N = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{dmn}(N) = \mathbb{R}_0^+$, $\mathrm{rng}(R) = \mathbb{R}$.

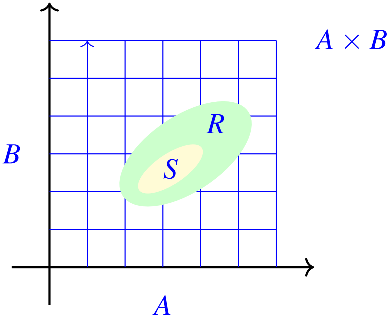
Relációk kiterjesztése, leszűkítése, inverze

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

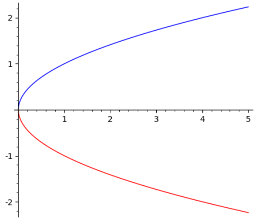
- R az S kiterjesztése (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való leszűkítése (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$



Példa

- $N = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $S = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$. Ekkor $S \subset N$
- $N|_{\mathbb{R}_0^+} = S$.



Reláció inverze

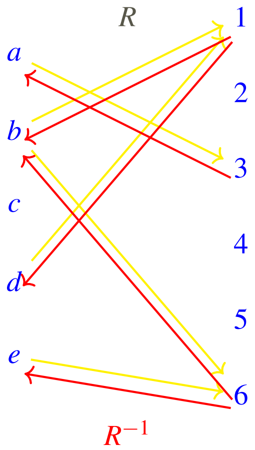
Definíció

Egy $R \subset X \times Y$ reláció inverze az

$$R^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}.$$

- $R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(d,1),(e,6)\}$ és
  $R^{-1} = \{(1,b),(1,d),(3,a),(6,b),(6,e)\}$

- Legyen $R = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ Ekkor
  $R^{-1} = \{(x^2,x) : x \in \mathbb{R}\} \neq \{(x,\sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$

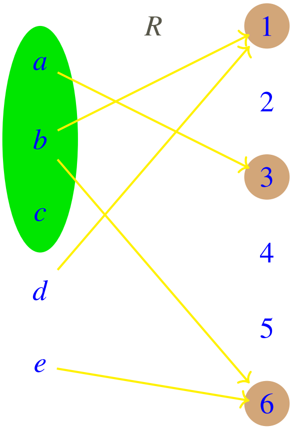


Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.



Példa

- $R = \{(a, 3), (b, 1), (b, 6), (d, 1), (e, 6)\}$. Ekkor $R(\{a, b, c\}) = \{1, 3, 6\}$
- Legyen $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Ekkor $R(\{2\}) = \{4\}$ (vagy ($R(2) = 4$)) és $R^{-1}(\{4\}) = \{-2, +2\}$ (vagy $R^{-1}(4) = \{-2, +2\}$).

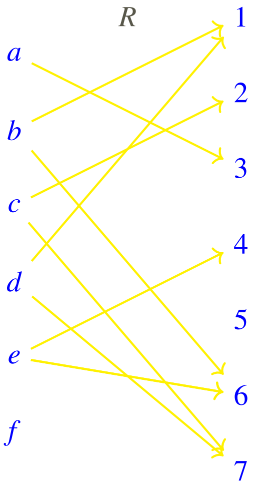
Példa

Legyen

$$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),(d,7),(e,4),(e,6)\}$$

Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a,3),(e,4),(e,6)\}$
- $R(\{a,b,c\}) = \{1,2,3,6,7\}$
- $R^{-1}(\{1,2,3\}) = \{a,b,c,d\}$



Relációk kompozíciója

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

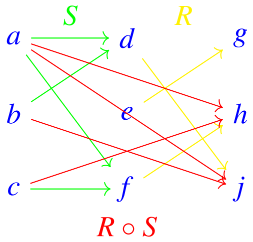
Figyelem! Kompozíció esetén a relációkat „jobbról-balra írjuk”:

Példa

- Legyen $R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
  $S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.

  Ekkor

  $$R_{\sin} \circ S_{\log} = \{(x, y) : \exists z : \log x = z, \sin z = y\}$$
  $$= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}.$$



Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? $P^{-1}(\text{BANK})$
- Kik a tesztelők? $B^{-1}(\text{tesztelő})$
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$
- Milyen határidejei vannak a tesztelőknek? $H \circ P \circ B^{-1}(\text{tesztelő})$

Relációk tulajdonságai 2/3.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció")

Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (Példa: $=, K$)
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (Példa: $=, \leq, \subset$)
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ (Példa: $<$)

Relációk tulajdonságai 2/3.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció”)

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$ (Példa: $=, \leq, \subset, |, K$)
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$ (Példa: $<$)

Definíció (tranzitivitás)

- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \land yRz \Rightarrow xRz$ (Példa: $=, \leq, \subset, |$)

Relációk tulajdonságai 3/3.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció")

Definíció (trichotóm, dichotróm)

- R reláció trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül (Példa: $<$)
- R reláció dichotróm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő „vagy"!) (Példa: $\leq$)

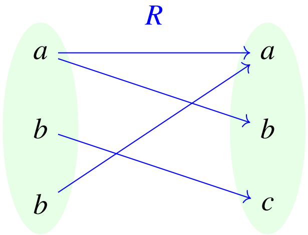
Relációk tulajdonságai, összefoglalás.

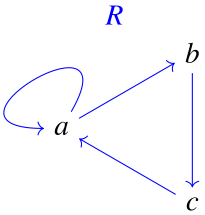
Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (Példa: $=, K$)
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (Példa: $=, \leq, \subset$)
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$ (Példa: $=, \leq, \subset, |, K$)
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (Példa: $=, \leq, \subset, |$)
- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül (Példa: $<$)
- R reláció dichotróm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő „vagy”!)
  (Példa: $\leq$)

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:





szimmetrikus	$\times$	aRb, $\neg(bRa)$	reflexív	$\times$	$\neg(aRa)$
antiszimmetrikus	$\checkmark$		irreflexív	$\times$	aRa
szig. antiszimmetrikus	$\times$	aRa	tranzitív	$\times$	$aRb, bRc, \neg(aRc)$
trichotóm	$\times$	aRa	dichotróm	$\times$	$\neg(cRc)$