Diszkrét matematika 1

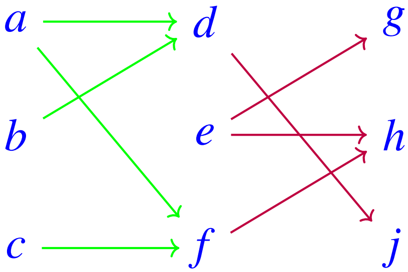
3. előadás
Relációk II.

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

Relációk II.



Kompozíció tulajdonságai 1

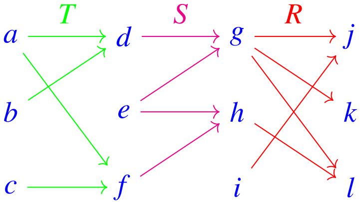
Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \mathrm{rng}(T) \cap \mathrm{dmn}(R \circ S)$:
  $(x, z) \in T \;\wedge\; (z, y) \in R \circ S$
- Ekkor $\exists w \in \mathrm{rng}(S) \cap \mathrm{dmn}(R)$:
  $(z, w) \in S \wedge (w, y) \in R$
- Ekkor $(x, z) \in T \wedge (z, w) \in S \Rightarrow (x, w) \in (S \circ T)$
- Ha $(x, w) \in S \circ T \;\wedge\; (w, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ (S \circ T)$



$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

$\square$

Kompozíció tulajdonságia 2

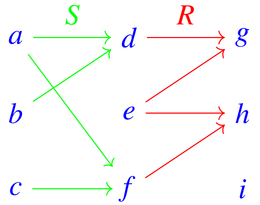
Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \iff (y, x) \in R \circ S$.
- $\iff \exists z : (y, z) \in S \ \wedge (z, x) \in R$
- $\iff (z, y) \in S^{-1} \ \wedge (x, z) \in R^{-1}$
- $\iff (x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$



$R \circ S$

$\square$

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció")

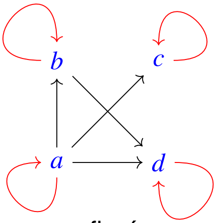
Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$
  Példa: $=, K$, ellenpélda: $\leq, <, \subset, |$
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
  Példa: $=, \leq, \subset$ ellenpélda: K
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

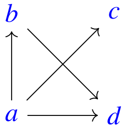
Relációk tulajdonságai 2/4.

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$



reflexív



irreflexív

Definíció (tranzitivitás)

- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, <$ ellenpélda: K

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

Relációk tulajdonságai 3/4.

Elemek összehasonlíthatósága:

Definíció

- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő ,,vagy”!)
  Példa: $\leq$ ellenpélda: $\subset, |$

$$\begin{tikzcd}
3 \\
2 \arrow[u] \\
1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \{a, b\} & \\
\{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 4 & \\
-2 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & 2 \arrow[ul] \\
 & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\leq$ reláció $\{1, 2, 3\}$-on dichotóm

$\subset$ reláció $2^{\{a,b\}}$-n nem dichotóm

$|$ reláció $\{1, \pm 2, 4\}$-en dichotóm

Relációk tulajdonságai 4/4.

Elemek összehason20:íthatósága:

Definíció

- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

$$\begin{tikzcd} 3 \\ 2 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & \{a,b\} & \\ \{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & 4 & \\ -2 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & 2 \arrow[ul] \\ & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

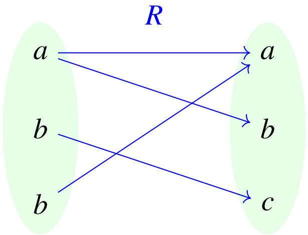
$<$ reláció $\{1, 2, 3\}$-on
trichotóm

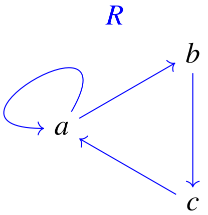
$\subset$ reláció $2^{\{a,b\}}$-n
nem trichotóm

$|$ reláció $\{1, \pm 2, 4\}$-en
nem trichotóm

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:





szimmetrikus	×	aRb, $\neg(bRa)$	reflexív	×	$\neg(bRb)$
antiszimmetrikus	✓		irreflexív	×	aRa
szig. antiszimmetrikus	×	aRa	tranzitív	×	$aRb, bRc, \neg(aRc)$
dichotóm	×	$\neg(cRc)$	trichotóm	×	aRa

Relációk tulajdonságai, összefoglalás.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (Példa: $=, K$)
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (Példa: $=, \leq, \subset$)
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$ (Példa: $=, \leq, \subset, |, K$)
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (Példa: $=, \leq, \subset, |$)
- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő ,,vagy”!) (Példa: $\leq$)
- R reláció trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül (Példa: $<$)

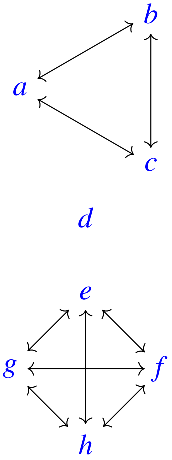
Speciális relációk

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk



R reláció hurokélek nélkül

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív; tranzitív és szimmetrikus.

Példa

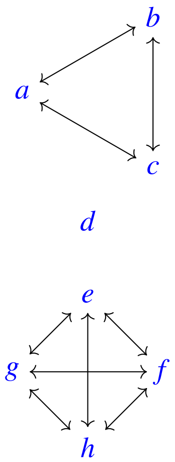
- $H_1 \sim H_2$, ha H_1 és H_2 évfolyamtársak
- $M_1 \sim M_2$, ha M_1 és M_2 beosztása megegyezik
- $\ell_1 \sim \ell_2$, ha ℓ_1 és ℓ_2 párhuzamosak

Ekvivalencia reláció, osztályozás 2

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét **osztályozásnak** nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.



R reláció hurokélek nélkül

Példa

- hallgatók:
  $\{$1. évf. hallgatók, 2. évf. hallgatók, 3. évf. hallgatók$\}$
- dolgozók: $\{$fejlesztők, marketing, tesztelők, HR, $\dots\}$
- egyenesek lehetséges irányai

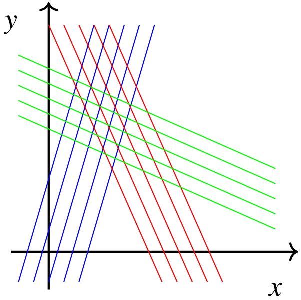
Ekvivalencia reláció és osztályozás 3

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen

$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

az x ekvivalencia osztályának nevezzük.



Példa

- $\{[\ell] : \ell$ a sík egyenese$\}$ az irányok halmaza.

Tétel

- Egy X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalencia reláció esetén $\{[x] : x \in X\}$ egy osztályozás.
- Tekintsük egy X halmaz $\mathcal{O}$ osztályozását. Ekkor az

$$R = \{(x, y) : \; x \text{ és } y \text{ ugyanazon } \mathcal{O} \text{ osztályban vannak}\}$$

egy ekvivalencia reláció.

Ekvivalencia reláció $\Rightarrow$ osztályozás

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{O} = \{[x] : x \in X\}$ ahol $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$

- 1. feltétel: $\cup\mathcal{O} = X$.
  Mivel $\sim$ reflexív $\Rightarrow$ $x \in [x]$ $\Rightarrow$ $\cup\{[x] : x \in X\} = X$.

- 2. feltétel: $\cup\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunktak.
  - Tegyük fel hogy $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $[x] = [y]$.
  - Legyen $z \in [x] \cap [y]$. Akkor (definíció szerint) $z \sim x$ és $z \sim y$.
  - Mivel $\sim$ szimmetrikus $\Rightarrow$ $x \sim z$.
  - Mivel $\sim$ tranzitív, ezért $x \sim z$ és $z \sim y$ $\Rightarrow$ $x \sim y$, azaz $x \in [y]$.
  - Ha $x' \in [x]$, akkor $x' \sim x$ és a tranzitivitás miatt $\Rightarrow$ $x' \sim y$, azaz $x' \in [y]$.
  - Tehát $[x] \subset [y]$.
  - x és y szerepének felcserélésével $[y] \subset [x]$, azaz $[x] = [y]$.