Diszkrét matematika I. feladatok
Komplex számok I
Ötödik alkalom (2024.03.11-03.15.)

1. Fejezze ki algebrai alakban a következő számokat:

   a) $(3+i)(2+3i)$; b) $(1-2i)(5+i)$; c) $(2-5i)^2$; d) $(1-i)^3$.

2. Oldja meg a következő egyenleteteket a komplex számok halmazán:

   a) $\dfrac{z+i-3i\overline{z}}{z-4} = i-1$; b) $(z+3-i)(\overline{z}-4+3i) = 1$; c) $\dfrac{z+i-\overline{z}}{\overline{z}-3+z} = i$

3. Legyenek $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}, B \in \mathbb{C}^{3\times 2}, C \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ a következő mátrixok

$$A = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 3-i \\ 3-i & 2-i \\ -1+2i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3+i & i \\ 3i & 2i & 3-4i \\ 2i & 2 & -i \end{pmatrix}$$

   Számítsa ki a következő szorzatok közül amelyiket lehet: $A^2, B^2, AB, BA, AC, CA, BC, CB$.

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 2+i & 2-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}.$$

   Számolja ki a $\det A, \det B, \det A^2, \det AB, \det BA, \det B^2$ determinánsokat.

5. Rajzolja le a komplex számsíkon a következő halmazokat:

   a) $\{z : \ \mathrm{Re}(z+2i) \leq 0\}$;

   b) $\{z : \ \mathrm{Re}(z+1) \geq \mathrm{Im}(z-3i)\}$;

   c) $\{z : \ |z-i-1| \leq 3\}$;

   d) $\{z : \ |z-3+2i| = |z+4-i|\}$;

   e) $\{z : \ z = 1/\overline{z}\}$

   f) $\{z : \ z+\overline{z} = 0\}$.

6. Adja meg az a és b valós számok értékét, ha:

   a) $(a+bi)(2-i) = a+(3+b)i$; b) $(a+bi)(-1-2i) = \dfrac{2+i}{a-bi}$; c) $\overline{(a+bi)(3-4i)} = 2i$;

7. Adja meg a következő számokat trigonometrikus alakban:

   a) $\sqrt{3}+i$; b) $1-i$; c) $4i$; d) -3; e) $\dfrac{10}{\sqrt{3}-i}$; f) $\dfrac{2+3i}{5+i}$; g) $3-4i$; h) $-2+i$.

Szorgalmi feladatok

8. Old meg a következő harmadfokú egyenleteteket a *Cardano-képlet* segítségével (ld. Wikipédia):

   a) $x^3-7x+6=0$; b) $x^3-13x-12=0$; (**2 pont**)

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0