

Analízis I. (BSc)

Programtervező informatikus szak

Elméleti kérdések gyakorlatokhoz, röpdolgozatokhoz

2. gyakorlat.

- Mit mond ki a Dedekind-axióma vagy szétválasztási axióma?
- Írja le pozitív formában azt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos!
- Fogalmazza meg a szuprémum elvet!
- Mi a szuprémum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$!
- Mi az infimum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$!
- Mi a kapcsolat egy halmaz maximuma és a szuprémuma között?
- Mi a kapcsolat egy halmaz minimuma és az infimuma között?

3. gyakorlat.

- Hogyan értelmezi a függvényt?
- Mit jelent az $f \in A \rightarrow B$ szimbólum?
- Mit jelent az $f : A \rightarrow B$ szimbólum?
- Definiálja a halmaznak függvény által létesített képét!
- Definiálja a halmaznak függvény által létesített ősképét!
- Mikor nevez egy függvényt invertálhatónak (vagy injektívnek)?
- Definiálja az inverz függvényt!
- Mi a definíciója az összetett függvénynek?

4. gyakorlat.

- Mit ért azon, hogy egy számsorozat konvergens?
- Mit ért azon, hogy egy számsorozat divergens?
- Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy számsorozat divergens!
- Milyen állítást ismer sorozatok esetén a konvergencia és a korlátosság kapcsolatáról?
- Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $+\infty$ a határértéke?
- Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $-\infty$ a határértéke?
- Környezetekkel fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) valós számsorozatnak (tágabb értelemben) van határértéke.
- Hogyan definiálja egy sorozat részsorozatát?

5. gyakorlat.

- Mit tud mondani nullsorozatok összegéről?
- Mit tud mondani korlátos sorozat és nullsorozat szorzatáról?

- Mondjon példát olyan $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatokra, amelyekre $\lim(a_n) = 0$, $\lim(b_n) = 0$ és a $\lim(a_n/b_n)$ határérték nem létezik.
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok összegéről?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok hányadosáról?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok összegéről?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?
- Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?

6. gyakorlat.

- Adja meg az e számot definiáló sorozatot!
- Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet!
- Milyen tételt ismer monoton sorozatok határértékével kapcsolatban?
- Igaz-e az, hogy ha az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke és $a_n > b_n$ minden n -re, akkor $\lim(a_n) > \lim(b_n)$?
- Fogalmazza meg egy valós szám m -edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt, és adjon olyan eljárást, amivel ezek a számok nagy pontossággal előállíthatók.
- Hogyan szól a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel?
- Mikor nevez egy sorozatot Cauchy-sorozatnak?
- Mi a kapcsolat a konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok között?

7. gyakorlat.

- Mi a végtelen sor definíciója?
- Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?
- Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ geometriai sor konvergenciájáról?
- Mi a *teleszkopikus sor*, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?
- Mi a *harmonikus sor*, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?
- Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens? (A válaszát indokolja meg!)

8. gyakorlat.

- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat*!
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *Cauchy-féle gyökkritériumot*!
- Mit jelent az, hogy a Cauchy-féle gyökkritérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Illusztrálja példákkal mindezt!
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *d'Alembert-féle hányadoskritériumot*!

- Mit jelent az, hogy a d'Alembert-féle hányadoskritérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Illusztrálja példákkal mindezt!
- Mik a *Leibniz-típusú sorok* és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?
- Mit értünk egy $[0, 1]$ -beli szám diadikus tört alakján?

9. gyakorlat.

- Írja le a *hatványsor* definícióját!
- Hogyan szól a hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel?
- Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum!
- Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum!
- Definiálja az \exp függvényt!
- Definiálja a \sin függvényt!
- Definiálja a \cos függvényt!

10. gyakorlat.

- Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?
- Környezetek segítségével adja meg a függvényhatárérték egységes definícióját!
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a végesben vett véges határérték definícióját!
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a plusz végtelenben vett véges határérték definícióját!
- Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet!
- Hogyan szól a függvények hányadosának a határértékére vonatkozó tétel?
- Definiálja függvény jobb oldali határértékét!

11. gyakorlat.

- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?
- Mit tud mondani monoton függvények határértékéről?
- Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát!
- Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?
- Írja le a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet!
- Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?
- Milyen tételt ismer a folytonos függvények előjeltartásáról?
- Mondja ki az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt!

12. gyakorlat.

- Definiálja a megszüntethető szakadási hely fogalmát!
- Definiálja az elsőfajú szakadási hely fogalmát!

- Mit tud mondani korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény érték-készletéről?
- Hogyan szól a Weierstrass-tétel?
- Mit mond ki a Bolzano-tétel?
- Mit jelent az, hogy egy függvény Darboux-tulajdonságú?
- Hogy szól az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel?