1. gyakorlat

EGYENLŐTLENSÉGEK

1. Feladat (A háromszög-egyenlőtlenség). *Egy valós szám abszolút értékét a következő módon értelmezzük:*

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy minden a és b valós számra

a) $|a+b| \leq |a| + |b|$, *b)* $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

Megoldás.

a) Az abszolút érték definíciója alapján

$$-|a| \leq a \leq |a| \qquad \text{és}$$
$$-|b| \leq b \leq |b|.$$

Az egyenlőtlenségek összeadásából

$$(*) \qquad -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

adódik. Mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ esetén

$$(**) \qquad |x| \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad -y \leq x \leq y,$$

ezért ennek felhasználásával a $(*)$ alatti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti.

b) Az a) alatti egyenlőtlenség alapján

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b| \quad \Longrightarrow \quad |a| - |b| \leq |a-b|,$$
$$|b| = |(b-a) + a| \leq |b-a| + |a| \quad \Longrightarrow \quad |b| - |a| \leq |a-b|.$$

Tehát

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|,$$

és így ismét a $(**)$ felhasználásával kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|.$$

Emlékeztető.

Tétel. **(A teljes indukció elve)** *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

i) *$A(0)$ igaz,*

ii) *ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

Ha a teljes indukció elvében a 0 számot egy másik – m-mel jelölt – természetes számmal helyettesítjük, akkor az elv alkalmas annak bizonyítására, hogy a szóban forgó állítások m-től kezdve minden természetes számra igazak.

2. Feladat (A Bernoulli-egyenlőtlenség). *Igazoljuk, hogy minden $h \geq -1$ valós számra és minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra*

$$(1+h)^n \geq 1+nh.$$

Megoldás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. Rögzítsünk egy tetszőleges $h \geq -1$ valós számot.

i) Ha $n=1$, akkor $(1+h)^1 = 1+1\cdot h$, ezért az állítás ebben az esetben igaz. ✓

ii) Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely tetszőlegesen rögzített $1 \leq n \in \mathbb{N}$ természetes számra (indukciós feltétel), azaz

$$(*) \qquad (1+h)^n \geq 1+n\,h,$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy igaz $(n+1)$-re is. Így

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n\cdot(1+h) \geq \ (1+h\geq 0 \text{ és } (*) \text{ miatt}) \ \geq \\ &\geq (1+nh)\cdot(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2 \geq \\ &\geq \ (nh^2 \geq 0 \text{ miatt}) \ \geq 1+(n+1)h.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az állítás, ha n-re igaz, akkor $(n+1)$-re is igaz. ✓

A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért az egyenlőtlenség valóban fennáll minden $n \geq 1$ természetes számra.

3. Feladat (A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség). *Legyen $n \geq 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti nemnegatív valós számok. Igazoljuk, hogy*

$$(*) \qquad \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Megoldás. Az

$$S_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad \text{illetve az} \quad M_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

számot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok ***számtani közepének***, illetve ***mértani közepének*** nevezzük. Elegendő feltételezni, hogy minden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ szám pozitív, hiszen ha az egyik nulla, akkor $M_n = 0$, és így az állítás nyilvánvalóan igaz. A feltétel mellett $S_n > 0$.

Először a $(*)$ egyenlőtlenséget fogjuk igazolni n szerinti teljes indukcióval.

i) Ha $n = 2$, akkor tetszőleges $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$S_2^2 - M_2^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 = \frac{a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2}{4} = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ezért $M_2^2 \leq S_2^2 \implies M_2 \leq S_2$, azaz $n = 2$ esetében az állítás igaz. ✓
Vegyük még észre, hogy a fentiből az is következik, hogy az $M_2 = S_2$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2$.

ii) Tegyük fel, hogy a $(*)$ egyenlőtlenség igaz egy rögzített $n \geq 2$ természetes számra (indukciós feltétel), azaz $M_n \leq S_n$ minden $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ esetén, és bizonyítsuk be, hogy ekkor $(n+1)$-re is igaz, azaz $M_{n+1} \leq S_{n+1}$ minden $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ esetén. Vegyünk tehát $(n+1)$ darab pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ valós számot. Az $a_1, \ldots, a_n$-re vonatkozó indukciós feltételt a következő alakban írjuk fel:

$$(\triangle) \qquad S_n^n = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n = M_n^n.$$

Tekintsük most az $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ számokra az alábbi átalakításokat:

$$S_{n+1}^{n+1} = \left(\frac{\overbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}^{nS_n} + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)S_n + a_{n+1} - S_n}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(S_n + \frac{a_{n+1} - S_n}{n+1}\right)^{n+1} = \text{(hiszen } S_n \neq 0) = S_n^{n+1} \cdot \Bigg(1 + \underbrace{\frac{a_{n+1} - S_n}{(n+1)S_n}}_{h}\Bigg)^{n+1}.$$

Mivel

$$h := \frac{a_{n+1} - S_n}{(n+1)S_n} \geq -1 \iff a_{n+1} - S_n \geq -nS_n - S_n \iff a_{n+1} + nS_n \geq 0,$$

nyilvánvalóan teljesül, ezért a Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazható:

$$S_{n+1}^{n+1} = S_n^{n+1} \cdot (1+h)^{n+1} \geq S_n^{n+1} \cdot \big(1 + (n+1)h\big) =$$

$$= S_n^{n+1} \cdot \left(1 + (n+1) \cdot \frac{a_{n+1} - S_n}{(n+1)S_n}\right) = S_n^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{a_{n+1} - S_n}{S_n}\right) = S_n^{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{S_n} =$$

$$= S_n^n \cdot a_{n+1} \geq \text{(a } (\triangle) \text{ ind. felt. miatt)} \geq a_1 a_2 \ldots a_n \cdot a_{n+1} = M_{n+1}^{n+1}.$$

Ezért $M_{n+1} \leq S_{n+1}$. Ez azt jelenti, hogy ha az állításban szereplő egyenlőtlenség egy rögzített $2 \leq n \in \mathbb{N}$ számra igaz, akkor $(n+1)$-re is igaz.

A teljes indukcióra vonatkozó tétel szerint tehát a feladat állításának az egyenlőtlenségre vonatkozó részét bebizonyítottuk.

Most igazoljuk az egyenlőségre vonatkozó állítást.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, akkor az állítás nyilvánvaló, mert

$$M_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \sqrt[n]{a^n} = a \qquad \text{és} \qquad S_n^n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy valamely $2 \le n \in \mathbb{N}$ mellett bizonyos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ esetén fennáll az $M_n = S_n$ egyenlőség, és az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok nem egyenlők egymással, azaz van közöttük legalább két különböző. Feltehetjük például azt, hogy $a_1 \ne a_2$. Ekkor i) szerint $M_2^2 < S_2^2$, azaz $a_1 a_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$. Ezért

$$M_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot a_3 \cdots a_n} \le$$

$$\le \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = S_n,$$

ami ellentmond az $M_n = S_n$ feltételünknek.

A feladat állítását tehát maradéktalanul igazoltuk.

Következmény: *Legyen $2 \le n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy az $a_1, \ldots, a_n$ nemnegatív számok nem mind egyenlők egymással. Ekkor*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden $a \ge -1/2$ valós számra fennáll az*

$$(1-a)^5 \cdot (1+a) \cdot (1+2a)^2 \le 1$$

egyenlőtlenség!

Megoldás. Ha $a > 1$, akkor az egyenlőtlenség nyilvánvaló, hiszen a bal oldalán negatív, a jobb oldalán pedig pozitív szám áll.

Ha $-1/2 \le a \le 1$, akkor az állítást a következő *ötlet* felhasználásával igazoljuk. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget az

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1 - a, \quad a_6 = 1 + a, \quad a_7 = a_8 = 1 + 2a$$

szereposztással. Ekkor

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = (1-a)^5 \cdot (1+a) \cdot (1+2a)^2 \le$$

$$\le \left(\frac{5 \cdot (1-a) + (1+a) + 2 \cdot (1+2a)}{8}\right)^8 = \left(\frac{8}{8}\right)^8 = 1.$$

Így az állítást minden $a \ge -1/2$ valós számra bebizonyítottuk.

5. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$2\sqrt{n+1}-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Megoldás. A feladat állítását n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

i) Ha $n=1$, akkor

$$2\sqrt{1+1}-2<\frac{1}{\sqrt{1}} \iff 2\sqrt{2}-2<1 \iff 2\sqrt{2}<3 \iff 8<9,$$

ezért az állítás ebben az esetben igaz. ✓

ii) Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely rögzített $1\le n\in\mathbb{N}$ számra (indukciós feltétel), azaz

$$(*) \qquad 2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}},$$

és ezt felhasználva lássuk be, hogy $(n+1)$-re is igaz, azaz

$$(\#) \qquad 2\sqrt{n+2}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a *jobb oldalából* indulva, a $(*)$ indukciós feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\underbrace{2\sqrt{n+1}-2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ha igazoljuk, hogy

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2}-2,$$

akkor ezzel belátjuk a bizonyítandó $(\#)$ egyenlőtlenséget. Az utóbbi egyenlőtlenségből ekvivalens átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2} \iff 2(n+1)+1>2\sqrt{(n+1)(n+2)} \iff$$

$$\iff 2n+3>2\sqrt{(n+1)(n+2)} \iff (2n+3)^2>4(n+1)(n+2) \iff$$

$$\iff 4n^2+12n+9>4n^2+12n+8 \iff 9>8.$$

Az utolsó egyenlőtlenség igaz, és ez azt jelenti, hogy $(\#)$ valóban fennáll. Beláttuk tehát azt, hogy ha az egyenlőtlenség igaz valamely $1\le n\in\mathbb{N}$ számra, akkor $(n+1)$-re is igaz.

A teljes indukcióra vonatkozó tétel szerint tehát az egyenlőtlenség minden $1\le n\in\mathbb{N}$ számra fennáll.