

Diszkrét matematika I. feladatok

Halmazok

Második alkalom (2024.02.19-23.)

1. Keressen olyan A, B, C halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

2. Legyenek $x = \{\text{alma, szilva}\}$ és $y = \{\text{kutya, macska}\}$ halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy x eleme, x részhalmaza, x se nem eleme, se nem részhalmaza: $\{\{x\}, y\}$, x , $\{\emptyset\} \cap x$, $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$, $\{x\} \cup x$, $\{x\} \cup \{\emptyset\}$?

3. Legyen $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ és

$$A = \{\mathbf{v} : M\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad B = \{\mathbf{v} : M^2\mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \quad C = \left\{ \mathbf{v} : M\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Adja meg a következő halmazokat

$$A \cup B; \quad A \cap B; \quad A \triangle B \quad A \cup C, \quad A \cap C \quad A \triangle C.$$

4. Fejezze ki a \triangle és \cap segítségével a következő halmazokat: $A \setminus B$ és $A \cup B$.
5. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.
6. Bizonyítsa be, hogy
- | | |
|---|---|
| a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; | d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; |
| b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; | e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| c) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; | f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
7. Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazokra:
 $(A \cup B) \setminus A = B$; $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

8. Bizonyítsa be a következő összefüggéseket: $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C)} \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

9. Legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ és $C = \{2, 3, 4\}$. Határozza meg a következő halmazokat
- | | |
|-------------------|--|
| a) $A \times A$; | g) $A \triangle B$; |
| b) $A \times B$; | h) $A \triangle C$; |
| c) $B \times A$; | i) $(A \times B) \triangle (C \times B)$ |

Szorgalmi feladatok

10. Tekintsünk tetszőleges A, B, C halmazok az \cap, \cup, \triangle és komplementer segítségével definiált halmazokat, például $A \cap B$, $(A \cup \overline{C}) \triangle B$, ...

Írjon programot, mely kettő ilyen kifejezés esetén eldönti, hogy az tetszőleges A, B, C halmazok esetén megegyeznek-e? Például $A \cap B$ és $A \cup B$ bemenetekre *hamis*, míg $\overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cup B}$ bemenetekre *igaz* értékkel tér vissza. (2 pont)