5. előadás

VALÓS SOROZATOK 4.

Nevezetes sorozatok 2.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Sorozatok nagyságrendje.

1. Tétel.

1. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$ valós szám, akkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

2. Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

3.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Bizonyítás.

1. Adott $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$ valós számra értelmezzük az

$$a_n := \frac{n^k}{a^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozatot! A sorozat alulról korlátos, mert $a_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Másrészt

$$(*) \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{(n+1)^k}{n^k} \cdot \frac{n^k}{a^n} = \frac{1}{a} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = 1 \quad \text{és} \quad a > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < a,$$

így $(*)$ miatt $\forall n > n_0\colon a_{n+1} < a_n$. Ez azt jelenti, hogy (a_n) egy index után monoton csökkenő. Ha figyelembe vesszük azt is, hogy (a_n) alulról korlátos, akkor azt kapjuk, hogy (a_n) konvergens. Jelölje $A := \lim(a_n)$.

(a_{n+1}) részsorozata az (a_n) sorozatnak, és ezért $\lim(a_{n+1}) = A$. Ekkor $(*)$ miatt

$$A \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}_{\to 1} \cdot \underbrace{a_n}_{\to A} \to \frac{A}{a}, \qquad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

A határérték egyértelműsége miatt $A = A/a$, ami csak akkor lehetséges, ha $A = 0$, hiszen $a \neq 1$.

2. Adott $a \in \mathbb{R}$ valós számra értelmezzük az

$$a_n := \frac{a^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \qquad \text{és} \qquad b_n := \frac{|a|^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozatokat! A (b_n) sorozat alulról korlátos, mert $b_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Másrészt

$$(**) \qquad b_{n+1} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|a|}{n+1} \cdot \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{n+1} \cdot b_n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon \frac{|a|}{n+1} < 1,$$

így $(**)$ miatt $\forall n > n_0 \colon b_{n+1} < b_n$. Ez azt jelenti, hogy (b_n) egy index után monoton csökkenő. Ha figyelembe vesszük azt is, hogy (b_n) alulról korlátos, akkor azt kapjuk, hogy (b_n) konvergens. Jelölje $B := \lim(b_n)$.

(b_{n+1}) részsorozata az (b_n) sorozatnak, és ezért $\lim(b_{n+1}) = B$. Ekkor $(**)$ miatt

$$B \leftarrow b_{n+1} = \underbrace{\frac{|a|}{n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{b_n}_{\to B} \to 0 \cdot B = 0, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

A határérték egyértelműsége miatt $B = 0$, tehát (b_n) nullsorozat. Mivel

$$b_n := |a_n| \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ezért (a_n) is nullsorozat.

3. Ha $2 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, ezért a közrefogási szerint $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

A tételben olyan hányados-sorozatokat látunk, amelyek nullához tartanak, és tagjainak számlálója és nevezője pozitívak (a 2. sorozatnál csak $a > 0$ esetén). Ezért a számlalóban lévő sorozat értéke kisebb, mint a nevezőben lévő sorozat értéke „elég nagy” indexekre. Az első sorozatnál például

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon \frac{n^k}{a^n} < 1, \quad \text{azaz} \quad n^k < a^n$$

rögzített $k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$ értékek esetén. Legyen pl. $k := 1000$ és $a := 1,0001$. Ekkor a fentiek szerint van olyan n_0 index, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$n^{1000} < 1,0001^n$$

teljesül. A már bevezetett szóhasználattal azt mondhatjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség majdnem minden n indexre, vagy elég nagy n indexekre teljesül. De a határérték értelmezése szerint ennél erősebb állítás igaz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall c > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon \frac{n^k}{a^n} < \frac{1}{c}, \quad \text{azaz} \quad c\,n^k < a^n,$$

tehát (a^n) úgy tart $+\infty$-hez, hogy elég nagy n indexekre a sorozat tagjai nagyobbak, mint az (n^k) tagjainak akárhányszorosára, bár (n^k) is tart $+\infty$-hez.

Általában: ha az (a_n) és a (b_n) sorozatnak is $+\infty$ a határértéke, akkor azt mondjuk, hogy (b_n) ***erősebben*** (vagy ***sokkal gyorsabban***) ***tart*** $+\infty$***-hez***, mint (a_n), ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy „b_n ***sokkal nagyobb***, mint a_n, ha n elég nagy” (másként fogalmazva: „a_n ***sokkal kisebb***, mint b_n, ha n elég nagy”), és ezt így jelöljük:

$$a_n \ll b_n, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

A most bevezetett jelöléssel a tétel állításait így fejezhetjük ki: ha $a > 1$ rögzített valós szám és k rögzített pozitív természetes szám, akkor

$$n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ Az e szám bevezetése.

2. Tétel (Az e szám értelmezése). *Az*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Bizonyítás. Az állítást a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség „ötletes” felhasználásaival bizonyítjuk.

- ***A monotonitás*** igazolásához az egyenlőtlenséget az $(n+1)$ darab

  $$1, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1 + \frac{1}{n}$$

  számra alkalmazzuk. Mivel ezek nem mind egyenlők, ezért

  $$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

  Mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

  $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

  amivel beláttuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő.

- ***A korlátosság*** bizonyításához most az $(n+2)$ darab

  $$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1 + \frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n\in\mathbb{N}^+),$$

ezért a sorozat felülről korlátos.

A monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételből következik, hogy a sorozat konvergens.

Megjegyzések.

1. A tétel állítását a sorozat néhány tagja kiszámításával illusztráljuk:

n	1	2	3	4	5	8	100	1 000	10 000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,57	2,7048	2,71692	2,71815

2. Hiba lenne arra gondolni, hogy mivel $1+\frac{1}{n}\to 1$, ezért $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1^n = 1$, hiszen a kifejezésnek csak az egyik részének vettük a határértékét. Másrészt a szorzás művelet és a határérték kapcsolatára vonatkozó tétel nem használható, hiszen az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{-szer}}$$

felírásban a tényezők száma nem állandó, függ az n-től.

3. Általában: az 1-hez közeli a_n számok nagy kitevőjű b_n hatványaira az a_n és b_n megválasztásától függően minden eset előfordulhat. Ezt illusztrálják az alábbi példák:

$$a_n := \sqrt[n]{c}\to 1 \quad (c>0), \qquad b_n := n\to+\infty, \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^{b_n} = c,$$

$$a_n := \sqrt[n]{n}\to 1, \qquad b_n := n\to+\infty \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^{b_n} = n\to+\infty,$$

$$a_n := \begin{cases}1, & \text{ha } n=1,3,5,\ldots\\ \sqrt[n]{2}, & \text{ha } n=2,4,6,\ldots\end{cases} \to 1, \qquad b_n := n\to+\infty, \qquad \Longrightarrow \qquad \nexists \lim\left(a_n^{b_n}\right).$$

Ilyen esetekben „$1^{+\infty}$" típusú kritikus határértékről beszélünk.

4. Az e szám a matematika egyik legfontosabb állandója, amit *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus vezetett be 1748-ban.

5. Az $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ sorozat határértékére külön szimbólum bevezetésének indoka a következő: később meg fogjuk mutatni, hogy e *irracionális* szám, közelítő értéke $e\approx 2,718$.

   Az is igaz, hogy e ún. ***transzcendens szám***. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom, aminek ez a szám gyöke lenne. ($\sqrt{2}$ például irracionális, de nem transzcendens szám, mert $\sqrt{2}$ gyöke az $x^2-2=0$ egyenletnek.) Azokat a valós számokat, amelyek valamely egész együtthatós polinomnak a gyökei ***algebrai számnak*** nevezzük. ($\sqrt{2}$ tehát algebrai szám.)

$\boxed{7.}$ Az $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ sorozat határértéke.

3. Tétel. *Ha x tetszőleges racionális szám, akkor*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Bizonyítás. „$1^{+\infty}$" típusú kritikus határértékről van szó. Az állítást különböző esetekre fogjuk bontani:

- $\boxed{x = p \in \mathbb{N}}$: teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $p \in \mathbb{N}$ esetén

  $$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n = e^p.$$

  – Az állítás igaz $p = 0$-ra, hiszen $\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1 = e^0$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. ✓

  – Ha van olyan $p \in \mathbb{N}$, amire $(*)$ teljesül (indukciós feltétel), akkor

  $$\begin{aligned}\left(1+\frac{p+1}{n}\right)^n &= \left(\frac{n+p+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1+p}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \left(\frac{n+1+p}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1+p}{n+1}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \underbrace{\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^p}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{-1}}_{\to 1^{-1}=1}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{p+1},\end{aligned}$$

  hiszen $\left(\left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{n+1}\right)$ részsorozata az $\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^n\right)$ sorozatnak, ami az indukciós feltétel miatt tart e^p-hez, és így minden részsorozata is e^p-hez tart.

  Ez azt jelenti, hogy az állítás, ha p-re igaz, akkor $(p+1)$-re is igaz. ✓

  A teljes indukcióra vonatkozó tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért a tétel állítása valóban fennáll minden $x = p$ természetes számra.

- $\boxed{x = p/q \in \mathbb{Q}^+}$: ebben az esetben feltételezhető, hogy $p, q \in \mathbb{N}^+$. Ha $q = 1$, akkor a már igazolt, előző esetet kapjuk. Tegyük fel tehát, hogy $q \geq 2$. Ekkor

  $$\left(1+\frac{p/q}{n}\right)^n = \left(1+\frac{p}{qn}\right)^n = \sqrt[q]{\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q},$$

  hiszen $\left(\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}\right)$ részsorozata az $\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^n\right)$ sorozatnak ($\nu_n = qn \in \mathbb{N}^+$ indexsorozattal), amiről az előző esetből tudjuk, hogy tart e^p-hez, és így minden részsorozata is e^p-hez tart. Az állítás tehát fennáll minden x pozitív racionális számra.

- $\boxed{x = -r \text{ ahol } r \in \mathbb{Q}^+}$: minden $\mathbb{N} \ni n \neq r$ esetén

  $$(\#) \qquad \left(1+\frac{-r}{n}\right)^n = \left(1-\frac{r}{n}\right)^n = \left(\frac{n-r}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-r}\right)^{-n} = \left[\left(1+\frac{r}{n-r}\right)^n\right]^{-1}.$$

Legyen $p > r$ egy rögzített pozitív egész szám. Ekkor $\forall n > p$ esetén

$$\underbrace{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}_{\to e^r} < \left(1+\frac{r}{n-r}\right)^n < \left(1+\frac{r}{n-p}\right)^n = \underbrace{\left(1+\frac{r}{n-p}\right)^{n-p}}_{\to e^r} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{r}{n-p}\right)^p}_{\to 1^p=1},$$

hiszen $\left(\left(1+\frac{r}{n-p}\right)^{n-p}\right)$ $(\mathbb{N}^+ \ni n > p)$ részsorozata az $\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right)$ sorozatnak (a $\nu_n = n-p \in \mathbb{N}^+$ indexsorozattal), amiről az előző esetből tudjuk, hogy tart e^r-hez, és így minden részsorozata is e^r-hez tart. Így a közrefogási elvből következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{r}{n-r}\right)^n = e^r,$$

tehát (#) miatt

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-r}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n-r}\right)^n\right]^{-1} = (e^r)^{-1} = e^{-r}.$$

Az állítás tehát fennáll minden x negatív racionális számra.

Azt igazoltuk, hogy a tétel állítása igaz $x = 0$-ra és minden x pozitív és negatív racionális számra. Tehát az állítás minden $x \in \mathbb{Q}$ esetén teljesül.

Megjegyzések.

1. Később általánosítani fogjuk a hatványozást valós kitevőkre is. Igazolható, hogy a tétel állítása minden x valós számra is igaz.

2. Megmutatjuk az
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
határértéknek egy pénzügyi alkalmazását. Ha x_0 forintot évi p%-os kamatra helyezzük a bankba, akkor egy év után
$$x_0\,(1+p/100)$$
forintot kapunk vissza. Ha havi kamattal számítjuk az évi p%-os kamatot, akkor a visszakapott összeg
$$x_0\left(1+\frac{p/100}{12}\right)^{12}$$
forint lesz egy év után. Megpróbálhatunk napi kamattal számolni, vagy akár még jobban növelni a kamatfizetési gyakoriságot. Ha a betett összegünk egy évben egyenletesen n-szer kamatozik p%-os évi kamattal, akkor az év végén
$$x_0\left(1+\frac{p/100}{n}\right)^n$$
forintot kapunk vissza. Elég nagy n esetén az előbbi képlet helyet használhatjuk az
$$x_0 \cdot e^{p/100}$$
képletet, ami a sorozat határértéke. Ez olyan, mint ha a kamatfizetés technikailag minden időpillanatban történne. Ezért ezt ***folytonos kamatozásnak*** nevezik.

Rekurzív sorozatok határértéke

A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételt egyszerű feltételei miatt már több esetben is alkalmaztuk. A tételt számos, rekurzióval megadott sorozatok konvergencia-vizsgálatánál is jól használhatjuk. A módszer alkalmazása során bebizonyítjuk, hogy a sorozat konvergens; a határértékét pedig a rekurzív képletből nyerhető egyenlet gyökeiből választjuk ki. A módszer hatékonyságát mutatja, hogy a sorozatok nagyságrendjéről szóló részben a határértékek kiszámításához két esetben is felírtuk a sorozatot rekurzív alakban.

Most ennek a módszernek a felhasználásával igazoljuk pozitív valós számok m-edik gyökének a létezését, és egy egyszerű konstruktív eljárást adunk ezek közelítő kiszámítására.

Emlékeztetünk arra, hogy ha $A > 0$ tetszőleges valós szám és $m \geq 2$ természetes szám, akkor az $\sqrt[m]{A}$ szimbólummal jelöljük (és az ***A szám m-edik gyökének*** nevezzük) azt a pozitív valós számot, amelynek az m-edik hatványa A, azaz $\alpha^m = A$. A következő tételből következik, hogy ilyen α szám mindig létezik.

4. Tétel (Newton-féle iterációs eljárás *m*-edik gyökök keresésére). *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós szám,} \\[2ex] a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) sorozat konvergens, és az $\alpha := \lim(a_n)$ határértékére igaz, hogy $\alpha > 0$ és

$$\alpha^m = A.$$

Bizonyítás. Az állítást több lépésben igazoljuk.

1. lépés. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy az (a_n) sorozat „jól definiált” és $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. lépés. Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens. A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételt fogjuk alkalmazni.

A sorozat *alulról korlátos* és 0 egy triviális alsó korlát (az 1. lépés alapján).

Most megmutatjuk azt, hogy az (a_n) sorozat *a második tagtól kezdve monoton csökkenő*, azaz

$$a_{n+1} \leq a_n \quad\iff\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \qquad \text{ha } n = 1, 2, \ldots.$$

A rekurzív képlet szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^m} + m - 1\right) \leq 1 \qquad\iff\qquad a_n^m \geq A.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolására a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség következő alakját fogjuk alkalmazni: ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tetszés szerinti nemnegatív valós számok, akkor

$$(\triangle) \qquad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m,$$

és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$. Fontos hangsúlyozni, hogy lényegében ezt az alakot igazoltuk gyakorlaton, és csak az m-edik gyök egyértelmű létezése után írhatjuk fel az egyenlőtlenséget a megszokott alakban.

Vegyük észre, hogy a rekurzív képlet jobb oldalán álló összeg az m darab

$$x_1 := \frac{A}{a_n^{m-1}}, \quad x_2 := a_n, \quad x_3 := a_n, \quad \ldots \quad , \quad x_m := a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

pozitív szám számtani közepe. Ezért ($\triangle$) miatt

$$a_{n+1}^m = \left(\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + \underbrace{a_n + \cdots + a_n}_{m-1 \text{ darab}}\right)\right)^m = \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m \geq$$

$$\geq x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m = \frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \ldots \cdot a_n}_{m-1 \text{ darab}} = A \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Sikerült igazolnunk tehát, hogy $a_n^m \geq A$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, ezzel azt, hogy az (a_n) sorozat a második tagtól kezdve monoton csökkenő.

Az (a_n) sorozat tehát monoton csökkenő a második tagtól kezdve és alulról korlátos, ezért a monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel alapján (a_n) konvergens.

3. lépés. Kiszámítjuk a sorozat határértékét. Legyen

$$\alpha := \lim(a_n).$$

Az eddigiekből az következik, hogy $\alpha \geq 0$. Fontos észrevétel azonban az, hogy az $\alpha > 0$ egyenlőtlenség is igaz. Ez az állítás a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből, valamint a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik, hiszen

$$a_n^m \geq A, \quad a_n \to \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad a_n^m \to \alpha^m \geq A > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha > 0.$$

Az (a_n) sorozatot megadó rekurzív összefüggésben az $n \to \infty$ határátmenetet véve az α határértékre egy egyenletet kapunk. Valóban, ha alkalmazzuk a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (itt használjuk az $\alpha > 0$ egyenlőtlenséget), akkor az adódik, hogy

$$\alpha \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{m}\left(\underbrace{\frac{A}{a_n^{m-1}}}_{\to \frac{A}{\alpha^{m-1}}} + (m-1) \cdot \underbrace{a_n}_{\to \alpha}\right) \to \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right).$$

A határérték egyértelműsége miatt

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\alpha\right).$$

Innen már egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$m\,\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^m = A.$$

Megjegyzések.

1. Az előző tételből következik a pozitív számok m-edik gyökének létezését. Az egyértelműségről már korábban szó eset. Ez nem volt nehéz igazolni, hiszen $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \implies \alpha_1^m < \alpha_2^m$, ezért legfeljebb egy olyan pozitív α szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$. Így már teljes joggal alkalmazhatjuk az $\sqrt[m]{A}$ jelölést.

2. A tétel bizonyítását azzal kezdtük, hogy a sorozat „jól-definiáltságát” vizsgáltuk. Nem minden rekurzió generál egy egyértelmű sorozatot. Előfordulhat pl., hogy az egyik lépésben nem tudjuk a kapott értéket behelyettesíteni a rekurziós képletben, és így a rekurzió megszakad. Ezért ezzel a problémával foglalkoznunk kell.

   Legyen $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$, $f : D \to D$, és tekintsük az

   $$a_0 := a, \qquad a_{n+1} := f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

   egylépéses rekurziót. Egy ilyen rekurzió mindig „jól definiált”, hiszen egyértelműen olyan (a_n) sorozatot generál, amelynek értékkészlete része a D halmaznak. Ez a ***rekurzív definíció tételének*** legegyszerűbb változata, ami teljes indukcióval könnyen igazolható. A Newton-féle iteráció „jól-definiált”, hiszen ekkor $D = \mathbb{R}^+$ és

   $$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f(x) := \frac{1}{m}\left(\frac{A}{x^{m-1}} + (m-1)x\right)$$

3. A tételből egy igen egyszerű konstruktív eljárást kapunk irracionális számok racionális számokkal való megközelítésére, ha a keresett $\sqrt[m]{A}$ irracionális gyökben szereplő A szám racionális. Alkalmazzuk például az iterációt a $\sqrt{2}$ irracionális szám racionális számokkal való megközelítésére. Induljuk ki az $a_0 := 2$ értéktől. Mivel $A = 2$ és $m = 2$, akkor a következő rekurzív formulát kapjuk:

   $$a_0 := 2 \qquad \text{és} \qquad a_{n+1} := \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

   Világos, hogy $a_n \in \mathbb{Q}$ minden n-re. A tételből következik, hogy (a_n) konvergens és $\sqrt{2}$ a határértéke. Ez azt jelenti, hogy nagy n indexekre a_n közel van $\sqrt{2}$-höz:

   $$a_n \approx \sqrt{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

   Az iterációs sorozat első 7 tagja:

   $$\begin{aligned}
   a_0 &= 2;\\
   a_1 &= 1,5;\\
   a_2 &= 1,416\,666\ \ldots;\\
   a_3 &= 1,414\,215\ \ldots;\\
   a_4 &= 1,414\,213\,562\,374\,689\ \ldots;\\
   a_5 &= 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,689\,623\ \ldots;\\
   a_6 &= 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\ \ldots.
   \end{aligned}$$

   Az eredményekből úgy tűnik, hogy a szóban forgó konvergencia elég gyors. Az $a_n \approx \sqrt{2}$ közelítésre az

   $$(*) \qquad \left|a_n - \sqrt{2}\right| \le \frac{3}{2^{2^n}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   egyenlőtlenség (az ún. **hibabecslés**) igazolható, és ez bizonyítja is a számítógépes kísérletekből sejthető gyors konvergenciát.

   Figyeljük meg, hogy $(*)$ felhasználásával meg tudnánk határozni olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, amelyre a_N és $\sqrt{2}$ (például) első 37 tizedesjegye megegyezik.

4. Rekurzív módon megadott (a_n) sorozatok konvergenciájának a vizsgálatánál sokszor (de nem mindig!) használható az előző tétel bizonyításában követett módszer.

   Először megmutatjuk azt, hogy (a_n) *konvergens.* „Szerencsés esetekben” a sorozat *monoton* és *korlátos* (ezeket a tulajdonságokat meg lehet sejteni, majd a sejtéseket például teljes indukcióval be lehet bizonyítani), következésképpen (a_n) konvergens.

   Ezután a rekurzív képletben vesszük az $n \to +\infty$ határátmenetet. Ekkor a határérték egyértelműsége alapján a sorozat határértékére egy egyenletet kapunk, aminek több megoldása lehet. Ezekből egyedi megfontolások alapján (pl. egy pozitív tagú sorozat határértéke nem lehet negatív) választjuk ki az (a_n) sorozat (egyértelműen meghatározott) határértékét.

A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel és a Cauchy-kritérium

Most két, elsősorban elméleti szempontból alapvető fontosságú eredményt ismertetünk.

A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel

5. Tétel (A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. A tétel az alábbi, már igazolt állítások azonnali következménye:

- minden sorozatnak van monoton részsorozata,
- minden monoton és korlátos sorozat konvergens.

Ha ui. a sorozat korlátos, akkor minden részsorozata is korlátos, így lesz monoton és korlátos részsorozata, következésképpen ez a részsorozat konvergens.

Megjegyzések.

1. A későbbiekben többször alkalmazzuk azt az állítást:

   > *Ha $[a, b]$ egy véges zárt intervallum, és $(x_n) : \mathbb{N} \to [a, b]$ egy intervallumbeli sorozat, akkor (x_n)-nek van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke eleme az $[a, b]$ intervallumnak.*

   Ez azért igaz, mert a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel garantál egy konvergens (x_{ν_n}) részsorozat létezését. Ha $\alpha := \lim(x_{\nu_n})$, akkor a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik, hogy $a \le \alpha \le b$, hiszen $a \le x_{\nu_n} \le b$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

2. Nem korlátos sorozatok esetén igazolhatók az alábbi állítások:
   - Ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor van $+\infty$-hez tartó monoton növekvő részsorozata.
   - Ha egy sorozat alulról nem korlátos, akkor van $-\infty$-hez tartó monoton csökkenő részsorozata.

Cauchy-sorozatok és a Cauchy-féle konvergenciakritérium

A számsorozatokkal kapcsolatos vizsgálatok egyik központi kérdése annak eldöntése, hogy a szóban forgó sorozat konvergens-e. A konvergencia definíciójában azonban szerepel egy, a sorozat tagjain „kívüli” dolog is, nevezetesen: a sorozat határértéke. Ezért a definíció alkalmazásához a határértéket „meg kell sejteni”, de ez igen sok esetben nem egyszerű feladat.

Néhány, már megismert eredmény azonban egyszerűsíti a helyzetet. Például, ha egy sorozat nem korlátos, akkor nem konvergens. Ennél lényegesebb a monoton és korlátos sorozatokra vonatkozó tétel. Ebben az esetben tehát akkor is eldönthető egy sorozat konvergenciája, ha nem ismerjük a határértékét. A szóban forgó tétel azonban nem egyenértékű a konvergenciával, annak „csak” egy elégséges feltétele. Ezért alapvető jelentőségű az a tény, hogy a konvergenciára megadható egy olyan *szükséges és elégséges* feltétel is, amely kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a sorozat konvergens vagy divergens voltáról.

Nem nehéz szemléletesen meggondolni, hogy ha egy sorozat konvergens, és így minden tagja egy pont körül sűrűsödik, akkor a sorozat elég nagy indexű tagjai tetszőlegesen közel kerülnek egymáshoz. Ez utóbbi tulajdonságot a következő definíció precízen írja le.

1. Definíció. *Az (a_n) valós sorozatot* **Cauchy-sorozatnak** *nevezzük, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n > n_0\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Megjegyzés. Pongyolán, de szemléletesen fogalmazva: „egy sorozat akkor Cauchy-sorozat, ha az elég nagy indexű tagjainak távolsága kisebb, mint bármely előre meghatározott kicsi szám”. Látható tehát, hogy az ún. ***Cauchy-tulajdonságban*** kizárólag a sorozat tagjai játszanak szerepet. ■

A következő tétel azt állítja, hogy a Cauchy-tulajdonság szükséges és elégséges feltétele a sorozat konvergenciájának.

6. Tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens, és $A := \lim(a_n)$ a határértéke. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A konvergencia definíciója szerint

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $\forall m, n > n_0$ index esetén

$$|a_n - a_m| = \Big|(a_n - A) + (A - a_m)\Big| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy (a_n) Cauchy-sorozat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) Cauchy-sorozat. Több lépésen keresztül látjuk be, hogy (a_n) konvergens.

1. lépés. Igazoljuk, hogy (a_n) korlátos sorozat.

A Cauchy-sorozat definíciójában $\varepsilon = 1$-hez van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\forall m, n > n_1 \colon |a_n - a_m| < 1.$$

Legyen $m = n_1 + 1$. Ekkor minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n| = \Big|(a_n - a_{n_1+1}) + a_{n_1+1}\Big| \leq |a_n - a_{n_1+1}| + |a_{n_1+1}| < 1 + |a_{n_1+1}|.$$

Következésképpen az

$$|a_n| \leq \max\Big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_1}|,\ 1 + |a_{n_1+1}|\Big\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, azaz a sorozat valóban korlátos.

2. lépés. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy (a_n)-nek létezik egy (a_{ν_n}) konvergens részsorozata. Jelölje

$$A := \lim(a_{\nu_n}) \in \mathbb{R}.$$

3. lépés. Belátjuk, hogy $\lim(a_n) = A$ is igaz.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor A definíciójából következik, hogy

$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_2 \colon \Big|a_{\nu_n} - A\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az (a_n) Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon/2$-höz

$$\exists n_3 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_3 \colon |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $(\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (vagyis (ν_n) szigorúan monoton növekvő), ezért $\nu_n \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$, amit teljes indukcióval lehet igazolni.

Ha $n > n_0 := \max\{n_2, n_3\}$, akkor $\nu_n > n_0$, ezért n és $m := \nu_n$ is nagyobb, mint n_2 és n_3, tehát alkalmazhatók a fenti egyenlőtlenségek. Ekkor

$$|a_n - A| = \Big|(a_n - a_{\nu_n}) + (a_{\nu_n} - A)\Big| \leq |a_n - a_m| + |a_{\nu_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat valóban konvergens, és $\lim(a_n) = A$.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy az iménti tétel *konvergens* (tehát véges határértékű) sorozatokról szól. Végtelen határértékekre az analóg állítás nem igaz: például az (n) sorozatnak a határértéke $+\infty$, de ez nem Cauchy-sorozat. A sok hasonlóság mellett ez az egyik leglényegesebb különbség a konvergens, ill. a $\pm\infty$-hez tartó sorozatok között. ■