8. előadás

VÉGTELEN SOROK 3.

Műveletek végtelen sorokkal 2.

Végtelen sorok szorzása.

Véges összegeket úgy szorzunk össze, hogy az egyik összeg minden tagját megszorozzuk a másik minden tagjával és a kapott szorzatokat összeadjuk:

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \cdots + b_m) = a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + \cdots + a_0\, b_m + a_1\, b_0 + \cdots + a_n\, b_m.$$

Soroknál hasonló lenne a helyzet, csakhogy végtelen számú szorzat keletkezik, ezért előre meg kell határozni milyen sorrendben adjuk össze ezeket a szorzatokat, illetve alkalmazunk-e zárójelezést. A $\sum a_n$ és a $\sum b_n$ végtelen sorok szorzatának az értelmezéséhez az $a_i\, b_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ szorzatokat egy „$\infty \times \infty$”-es mátrixba írjuk fel a következő módon:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \dots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\
b_3 & a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\
b_4 & a_0b_4 & a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Sokféleképpen képezhetünk végtelen sort

$$\Downarrow$$

Sorok szorzatát sokféleképpen értelmezhetjük

Speciális esetek: • ***téglányszorzat:*** • ***Cauchy-szorzat:***

1. Definíció. *A* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *sorok*

- **téglányszorzata** *a*

$$\sum_{n=0} t_n, \qquad t_n := \sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

- **Cauchy-szorzata** *pedig a*

$$\sum_{n=0} c_n, \qquad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

végtelen sor.

Megjegyzés. t_n olyan a_ib_j szorzatok összege, amelyeknél egyik index n, és a másik n-nél kisebb vagy egyenlő. c_n olyan a_ib_j szorzatok összege, amelyeknél a két index összege n. ■

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és a* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *végtelen sorok konvergensek. Ekkor a* $\sum\limits_{n=0} t_n$ *téglányszorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

azaz konvergens sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja a sorozatoknál tanult műveletek és határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel. Jelölje A_n, B_n és T_n rendre a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ és $\sum\limits_{n=0} t_n$ sorok n-edik részletösszegeit. Ekkor

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\max\{i,j\}=k} a_ib_j \right) = \sum_{\max\{i,j\}\leq n} a_ib_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) =$$

$$= A_nB_n \to \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right), \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a (T_n) sorozat konvergens, és így a $\sum t_n$ végtelen sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \lim(T_n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Az előző tétel Cauchy-szorzatra nem érvényes, de ha feltételezzük, hogy mindkét sor abszolút konvergens, akkor az állítás már igaz lesz. Vagyis két abszolút konvergens sor Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és a Cauchy-szorzat összege megegyezik a két sor összegének szorzatával. A következő tétel ezt állítja, de sokkal általánosabb formában.

2. Tétel (Abszolút konvergens sorok szorzatai). *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor*

1. *a* $\sum\limits_{n=0} t_n$ *téglányszorzat is abszolút konvergens,*
2. *a* $\sum\limits_{n=0} c_n$ *Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,*
3. *az összes* a_ib_j $(i, j \in \mathbb{N})$ *szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett* $\sum\limits_{n=0} d_n$ *végtelen sor is abszolút konvergens, és*

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Bizonyítás. Elég a 3. állítást igazolni. Mivel $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergensek, ezért

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} A \in \mathbb{R}, \qquad B_N := \sum_{n=0}^{N} |b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} B \in \mathbb{R}.$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\sum d_n$ sort, ahol $d_n = \sum a_i b_j$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Jelölje I, illetve J a maximális i, illetve j indexet a $d_0, \ddot{d}_1, \ldots, d_N$ összegekben. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{N} |d_n| \le \sum_{\substack{0\le i\le I\\ 0\le j\le J}} |a_i b_j| = \left(\sum_{n=0}^{I} |a_n|\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{J} |b_n|\right) \le A \cdot B,$$

és ez azt jelenti, hogy a $\sum |d_n|$ nemnegatív tagú sor konvergens, mert részletösszegei korlátosak. Tehát $\sum d_n$ abszolút konvergens.

A fentiek érvényesek $d_n = t_n$ esetén, így a $\sum t_n$ téglányszorzat is abszolút konvergens, tehát konvergens is. Ekkor az előző tétel szerint $(*)$ teljesül a $\sum t_n$ sorra, azaz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Legyen $\sum t_n^*$ az a sor, amelyet a $\sum t_n$ téglányszorzatban szereplő zárójelek elhagyásával kapunk. Mivel $\sum t_n^*$ is egy lehetséges $\sum d_n$ típusú sor, ezért $\sum t_n^*$ is abszolút konvergens, és így bármely zárójelezésével az összege nem változik, azaz $(*)$ teljesül a $\sum t_n^*$ sorra:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^* = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Azonban bármely $\sum d_n$ típusú sor megkapható a $\sum t_n^*$ sorból megfelelő átrendezéssel és csoportosítással. Ekkor a sor összege nem változik, tehát $(*)$ teljesül tetszőleges $\sum d_n$ sorra.

Megjegyzés. A Cauchy-szorzat konvergenciájához elegendő, ha az egyik sor abszolút konvergens miközben a másik sor csak feltételesen konvergens. Ezt állítja ***Mertens tétele***. ■

Hatványsorok

A korábbiakban több olyan végtelen sorral találkoztunk, amelyeknek a tagjai paraméterektől vagy változóktól függtek. Az ilyen végtelen sorokat ***függvénysoroknak*** nevezzük. Közöttük a legegyszerűbbek a legegyszerűbb függvénysorozatból, ti. hatványfüggvények sorozatából képzett végtelen sorok. Ezeket fogjuk hatványsoroknak nevezni.

2. Definíció. *Az adott $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénysort $a \in \mathbb{R}$ középpontú, (α_n) együtthatójú **hatványsornak** *nevezzük.*

Az első fontos kérdés az, hogy milyen $x \in \mathbb{R}$ érték mellett lesz a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor konvergens. Ezeknek a pontoknak a halmazát a szóban forgó hatványsor ***konvergenciahalmazának*** nevezzük, és így jelöljük:

$$\mathrm{KH}\Big(\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n\Big) := \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; \text{a } \sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n \text{ számsor konvergens}\Big\}.$$

Minthogy $x = a$ esetén a szóban forgó sor valamennyi 0-nál nagyobb indexű tagja 0, ezért az a középpont mindig eleme a konvergenciahalmaznak. Így ez nem üres halmaz.

Azt a függvényt, amely a konvergenciahalmaz minden eleméhez rendeli a sor összegét, a hatványsor ***összegfüggvényének*** nevezzük:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n, \qquad \text{ha} \qquad x \in \mathrm{KH}\Big(\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n\Big).$$

Az előzőek illusztrálására nézzünk egy példát!

1. Feladat. *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciahalmazát és az összegfüggvényét!

Megoldás. Az $a = 0$ középpontú és az $\alpha_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ együtthatójú hatványsorról van szó. Ez az x hányadosú geometriai sor, ami akkor és csak akkor konvergens, ha $|x| < 1$. Ez azt jelenti, hogy a sor konvergenciahalmaza

$$\mathrm{KH}\Big(\sum_{n=0} x^n\Big) = (-1, 1).$$

Azt is tudjuk azonban, hogy $x \in (-1, 1)$ esetén a geometriai sor összege $\frac{1}{1-x}$, ezért a $\sum\limits_{n=0} x^n$ hatványsor összegfüggvénye:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \big(|x| < 1\big).$$

Megjegyzések.

1. A $\mathrm{KH}\big(\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n\big)$ konvergenciahalmaz elemeit megkaphatjuk a $\mathrm{KH}\big(\sum\limits_{n=0} \alpha_n x^n\big)$ halmaz elemeiből úgy, hogy ez utóbbi minden eleméhez hozzáadjuk az a értéket. Ezért sokszor elegendő a 0 középpontú hatványsorokkal foglalkozni.

2. Hatványsor összegfüggvénye polinomok sorozatának a határértéke, ezért a helyettesítési értékeit általában nem tudjuk pontosan kiszámítani. A közelítő értékeit azonban (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk határozni a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával.

3. A végtelen számsorokhoz hasonlóan itt is megállapodunk abban, hogy időnként az

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \cdots$$

jelsorozattal fogjuk jelölni egyrészt magát a hatványsort, másrészt pedig a sor összegét is (amennyiben az létezik).

A következő alapvető jelentőségű tétel azt állítja, hogy minden hatványsor konvergenciahalmaza *intervallum.*

3. Tétel (Hatványsor konvergenciasugara). *Tetszőleges* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ *hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:*

1. $\exists\, 0 < R < +\infty$, *hogy a hatványsor* $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < R$ *pontban abszolút konvergens és* $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| > R$ *pontban divergens.*

2. *A hatványsor csak az* $x = a$ *pontban konvergens. Ekkor legyen* $R := 0$.

3. *A hatványsor abszolút konvergens* $\forall x \in \mathbb{R}$ *esetén. Ekkor legyen* $R := +\infty$.

R-et a hatványsor **konvergenciasugarának** *nevezzük.*

Bizonyítás. Az állítást elég $a = 0$ esetén igazolni.

Segédtétel. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ pontban. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| < |x_0|$ esetén a hatványsor abszolút konvergens az x pontban.

A segédtétel bizonyítása. Mivel a $\sum \alpha_n x_0^n$ végtelen sor konvergens, ezért $\lim(\alpha_n x_0^n) = 0$, így az $(\alpha_n x_0^n)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists M > 0\colon |\alpha_n x_0^n| \leq M < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, amire $|x| < |x_0|$ teljesül. Ekkor

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n =: Mq^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\sum |\alpha_n x^n|$ végtelen sor tehát majorálható a $\sum Mq^n$ mértani sorral, ami konvergens, mert $|q| = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |\alpha_n x^n|$ sor is konvergens, tehát a $\sum \alpha_n x^n$ végtelen sor abszolút konvergens.

A tétel bizonyítása. Tekintsük a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsort. Ez $x = 0$-ban nyilván konvergens, ezért $\mathrm{KH}\big(\sum \alpha_n x^n\big) \neq \emptyset$, és így

$$\exists \sup \mathrm{KH}\Big(\sum_{n=0} \alpha_n x^n\Big) =: R \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad R \geq 0. \tag{1}$$

A következő három eset lehetséges.

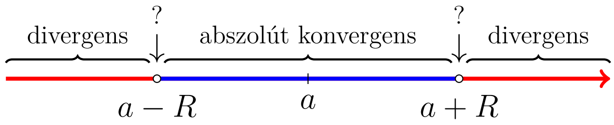
1. $\underline{0 < R < +\infty}$. Legyen $|x| < R$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definíciója szerint $\exists x_0 > 0\colon |x| < x_0 < R$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. Ha $|x| > R$ tetszőleges, akkor az R szám definíciója és a segédtétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ sor divergens.

2. $\underline{R = 0}$. A $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor az $x = 0$ pontban nyilván konvergens. Tegyük fel, hogy $x \neq 0$ olyan pont ahol $\sum \alpha_n x^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint a hatványsor konvergens az $\frac{|x|}{2} > 0$ pontban, ami nem lehetséges, mert $R = 0$. A hatványsor tehát csak az $x = 0$ pontban konvergens.

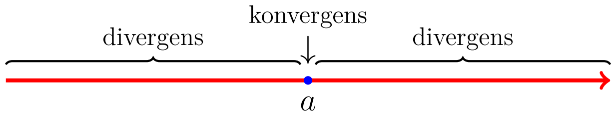
3. $\underline{R = +\infty}$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definíciója értelmében $\exists x_0 > 0\colon |x| < x_0$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.

Megjegyzés. A tétel állításait más alakban is megfogalmazhatjuk. Jelölje R a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugarát.

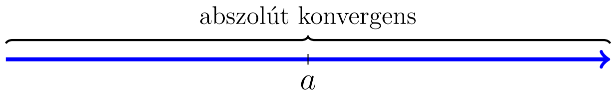
1. Ha $\underline{0 < R < +\infty}$, akkor $\quad (a-R, a+R) \subset \mathrm{KH}\Big(\sum \alpha_n(x-a)^n\Big) \subset [a-R, a+R]$.



2. Ha $\underline{R=0}$, akkor $\mathrm{KH}\Big(\sum \alpha_n(x-a)^n\Big) = \{a\}$.



3. Ha $\underline{R=+\infty}$, akkor $\mathrm{KH}\Big(\sum \alpha_n(x-a)^n\Big) = \mathbb{R}$.



A következő állítás azt fejezi ki, hogy hatványsor R konvergenciasugarának az (1) alatti definíciójában szereplő szuprémum bizonyos esetekben könnyen kiszámolható.

4. Tétel (A Cauchy–Hadamard-tétel.). *Tekintsük a* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy*

$$\exists \lim\Big(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\Big) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0,\ \ \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $A \geq 0$. Rögzítsük tetszőlegesen az $x \in \mathbb{R}$ számot, és alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ végtelen számsorra:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\big|\alpha_n(x-a)^n\big|} = \Big(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\Big) \cdot |x-a| = A|x-a|, \quad \text{és így}$$

$$A|x-a| < 1 \implies \text{a sor konvergens}, \qquad A|x-a| > 1 \implies \text{a sor divergens}.$$

1. Ha $\underline{0 < A < +\infty}$, akkor A-val lehet osztani, és ekkor

   $$x \in \left(a - \frac{1}{A},\, a + \frac{1}{A}\right) \implies \text{a sor konv.}, \qquad x \notin \left[a - \frac{1}{A},\, a + \frac{1}{A}\right] \implies \text{a sor div.},$$

   amiből következik, hogy $R = 1/A$.

2. Ha $\underline{A = +\infty}$, akkor $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq a\colon A|x-a| = (+\infty)\cdot|x-a| = +\infty > 1$.

   Ezért a hatványsor az $x = a$ pont kivételével divergens, azaz $R = 0$.

3. Ha $\underline{A = 0}$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}\colon A|x-a| = 0 \cdot |x-a| = 0 < 1$.

   Ezért a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, azaz $R = +\infty$.

Megjegyzés. A tételt csak akkor tudjuk alkalmazni, ha az $\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right)$ sorozatnak van határértéke. Számsorozatok „limesz szuperiorjának” a fogalmát felhasználva a Cauchy–Hadamard-tételnek igazolható egy olyan általánosítása, amelyik már *minden hatványsorra* érvényes. ■

A hatványsorok konvergenciasugarának a meghatározásához a számsorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritériumot alkalmaztuk. Emlékeztetünk a számsorok konvergenciájával kapcsolatos másik sokszor használható tételre, a d'Alembert-féle hányadoskritériumra. Ennek segítségével is sok esetben egyszerűen kiszámíthatjuk egy hatványsor konvergenciasugarát.

5. Tétel. *Tekintsük a* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy* $\alpha_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és*

$$\exists \lim \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor $A \geq 0$, *és a hatványsor konvergenciasugara*

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \ \ \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

Bizonyítás. A bizonyítás megegyezik a Cauchy–Hadamard-tétel bizonyításával azzal a különbsége, hogy gyökkritérium helyet a hányadoskritériumot alkalmazzuk.

Nézzük néhány példát!

- $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}\, x^n\right) = [-1,1)$, mert $a=0$; $\quad A = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \implies R = 1$, és így
$$(a-R, a+R) = (-1,1).$$
Másrészt $\quad x = 1$-re $\quad \sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ divergens, $\qquad x=-1$-re $\quad \sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens.
Hasonlóan: $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n\right) = (-1,1]$ és $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}\, x^n\right) = [-1,1]$.
- $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=1} n^n\, x^n\right) = \{0\}$, mert $a=0$; $\quad A = \lim\left(\sqrt[n]{n^n}\right) = \lim(n) = +\infty \implies R = 0$.
- $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^n}\, x^n\right) = \mathbb{R}$, mert $A = \lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \implies R = +\infty$.

Műveletek hatványsorokkal

A $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ és a $\sum\limits_{n=0} \beta_n(x-a)^n$ azonos középpontú hatványsorból képezzük az alábbi hatványsorokat:

- Egy ***hatványsor számszorosa***:
$$\sum_{n=0} \lambda\alpha_n(x-a)^n \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),$$
- Két ***hatványsor összege***:
$$\sum_{n=0} (\alpha_n + \beta_n)(x-a)^n$$
- Két ***hatványsor szorzata***:
$$\sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}\right)(x-a)^n$$

6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$, *illetve* $\sum_{n=0} \beta_n(x-a)^n$ *hatványsorok* R_α, *illetve* R_β *konvergenciasugarai pozitívak, és legyen*

$$R := \min\{R_\alpha, R_\beta\}.$$

Jelölje f, *illetve* g *az összegfüggvényeket:*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R_\alpha,\, a+R_\alpha)\big),$$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R_\beta,\, a+R_\beta)\big).$$

Ekkor a $\lambda \cdot f$, $f+g$ *és* $f \cdot g$ *függvények az* $(a-R, a+R)$ *intervallumon felírhatók az alábbi hatványsorok összegeként:*

1. $\lambda \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\alpha_n(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R, a+R)\big),$

2. $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n+\beta_n)(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R, a+R)\big),$

3. $f(x)\cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}\right)(x-a)^n \qquad \big(x \in (a-R, a+R)\big).$

Bizonyítás. Az első két állítás a sorok lineáris kombinációról szóló tétel következménye, hiszen

$$\lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\alpha_n(x-a)^n,$$

$$f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n+\beta_n)(x-a)^n$$

olyan x számokra, ahol a fenti sorok konvergensek.

A 3. állítás abból következik, hogy két abszolút konvergens sor Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és az összege a két hatványsor összegének a szorzata.

$$f(x)\cdot g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x-a)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \Big(\alpha_k(x-a)^k \cdot \beta_{n-k}(x-a)^{n-k}\Big)\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}\right)(x-a)^n.$$

olyan x számokra, ahol a fenti sorok abszolút konvergensek.

Megjegyzés. Két azonos középpontú hatványsor összegfüggvényeinek összege a két hatványsor összegéből adódó hatványsor összegfüggvénye. Két azonos középpontú hatványsor összegfüggvényeinek szorzata a két hatványsor Cauchy-szorzatából adódó hatványsor összegfüggvénye.

SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK 1.

A középiskolai tanulmányainkban már sokat foglalkoztunk az exponenciális- és trigonometrikus függvényekkel. Az értelmezésük azonban intuitív vagy geometriai jellegű volt, azok alapján a pontos függvényértékeket csak speciális esetekben tudtuk kiszámítani. Ezeket a tényeket elfogadva ismertük meg a függvények tulajdonságait, valamint a grafikonjaikat. A továbbiakban pontosan definiálni fogjuk a szóban forgó függvényeket, és megmutatjuk, hogy a tulajdonságaikat hogyan lehet precízen bebizonyítani.

Ebben a szakaszban hatványsorok összegfüggvényeként fogjuk értelmezni az exponenciális-, a szinusz- és a koszinuszfüggvényt, és felsoroljuk azokat a tulajdonságaikat, amelyeket az előző előadásokon ismertetett eredmények felhasználásával már be is tudunk bizonyítani.

Az exponenciális függvény

Adott $a > 0$ valós számra tekintsük az a^x hatványokat! Viszonylag könnyű meggondolni, hogy ha $x = \frac{p}{q}$ racionális szám, akkor akkor az $a^{\frac{p}{q}}$ hatványt így kell definiálni:

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

ha azt szeretnénk, hogy a természetes kitevőkre megismert hatványazonosságok érvényben maradjanak.

Irracionális x kitevőkre a hatványok értelmezése már jóval bonyolultabb feladat. Hogyan értelmezzük pl. a $2^{\sqrt{2}}$ hatványt? Első lépésben az e szám valós kitevős hatványait, vagyis az e^x $(x \in \mathbb{R})$ függvényt fogjuk értelmezni.

7. Tétel. *A* $\sum\limits_{n=0} \frac{x^n}{n!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **exponenciális függvénynek** *nevezzük.*

Bizonyítás. A hatványsor együtthatói

$$\alpha_n := \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az R konvergenciasugarát a következő módon számítjuk ki

$$A := \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad R = +\infty.$$

Ezért a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban abszolút konvergens.

Most igazoljuk a exponenciális függvény néhány tulajdonságát.

- A definícióból közvetlenül következik, hogy
$$\exp(0) = 1 \qquad \text{és} \qquad \exp(x) > 1 \quad (x > 0).$$
Azt is tudjuk már, hogy
$$\exp(1) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e.$$

- A számsorok Cauchy-szorzatának a felhasználásával igazolható az alábbi fontos képlet:
$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$
amit szokás az exp függvény ***függvényegyenletének***, vagy ***multiplikatív tulajdonságának*** nevezni. Valóban, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén az alábbi sorok abszolút konvergenciája miatt:
$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k\, y^{n-k}\right) =$$
$$= \text{ (binomiális tétel) } = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

- Alkalmazzuk a multiplikatív tulajdonságot az $x \in \mathbb{R}$, $y = -x \in \mathbb{R}$ szereposztással. Ekkor azt kapjuk, hogy
$$1 = \exp(0) = \exp\big(x + (-x)\big) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
így
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$
Mivel $x > 0$ esetén $\exp(x) > 0$, ezért a fenti egyenlőség szerint $\exp(-x) > 0$ is igaz. Tehát
$$\exp(x) > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- Az exp függvény szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en, azaz
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \quad \Longrightarrow \quad \exp(x) < \exp(y).$$
Valóban, legyen $x < y$. Ekkor $0 < y - x$, így
$$1 < \exp(y - x) = \exp\big(y + (-x)\big) = \exp(y) \cdot \exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)},$$
tehát $\exp(x) < \exp(y)$.

- A függvényegyenletet felhasználva igazolható az is, hogy ha $p, q \in \mathbb{N}$ és $q \geq 2$, akkor
$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}.$$
Valóban
$$e = \exp(1) = \exp\Bigg(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{q\text{-szor}}\Bigg) = \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q \quad \Longrightarrow \quad \exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{1/q},$$
és
$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\Bigg(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{p\text{-szor}}\Bigg) = \left(\exp\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(e^{1/q}\right)^p = e^{p/q}.$$
Kézenfekvő tehát, hogy az e szám hatványait tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetén így *értelmezzük*:
$$e^x := \exp(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A következő állításban összefoglaljuk az exp függvény eddig megismert tulajdonságait.

8. Tétel (Az exp függvény tulajdonságai).

1. $e^x := \exp x := \exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$,
2. $\exp(0) = 1, \quad \exp(1) = e$ *és* $\exp(x) > 0$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban,*
3. *a függvényegyenlet:* $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ $(x, y \in \mathbb{R})$,
4. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $(x \in \mathbb{R})$,
5. $\exp \uparrow$ $\mathbb{R}$-*en.*

A szinusz- és koszinuszfüggvény

A középiskolában már megismerkedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$ számok szemléletes definícióival. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságaikat. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerepelnek viszonylag bonyolult és definiálatlan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése" vagy a *körív hossza*. A π számot az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal $3{,}14$.

Most a szinusz- és a koszinuszfüggvényt bizonyos hatványsor összegfüggvényeként fogjuk értelmezni. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján bevezetésre kerülő szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használni fogjuk a „szokásos" sin és cos szimbólumokat.

9. Tétel. *A* $\sum\limits_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **szinuszfüggvénynek** *nevezzük.*

Bizonyítás. Világos, hogy a hatványsor konvergens, ha $x = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor

$$a_n := (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{|x^{2n+1}|} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1,$$

így a d'Alembert-féle hányadoskritérium szerint a sor abszolút konvergens.

10. Tétel. *A* $\sum_{n=0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\cos x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **koszinuszfüggvénynek** *nevezzük.*

Bizonyítás. Világos, hogy a hatványsor konvergens, ha $x = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor

$$a_n := (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{|x^{2n}|} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1,$$

így a d'Alembert-féle hányadoskritérium szerint a sor abszolút konvergens.

Most igazoljuk a szinusz- és koszinuszfüggvény néhány tulajdonságát.

11. Tétel (A sin és a cos függvény néhány tulajdonsága).

1. *A* sin *függvény páratlan, azaz* $\sin(-x) = -\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$,
   a cos *függvény páros, vagyis* $\cos(-x) = \cos x$ $(x \in \mathbb{R})$.
2. **Addíciós képletek**: *minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*
   $$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$
   $$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$
3. *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*
   $$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$
4. **Négyzetes összefüggés:**
   $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás.

1. Valóban,

$$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(-1)^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= (-1) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(-1)^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Az addíciós képletek hatványsorok Cauchy-szorzatának a felhasználásával igazolható. A részleteket csak a szinuszfüggvény addíciós képletére mutatjuk meg.

Legyen egyrészt

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad \cos y = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

A két sor abszolút konvergens, és így Cauchy-szorzatuk

$$\sin x \cdot \cos y = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

ahol

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^{n-k}\frac{y^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k}}{(2k+1)!(2n-2k)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}x^{2k+1}y^{2n+1-2k-1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ páratlan}}}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k y^{2n+1-k}.$$

Másrészt

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} d_n, \qquad \sin y = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} e_n.$$

A két sor abszolút konvergens, és így Cauchy-szorzatuk

$$\cos x \cdot \sin y = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n,$$

ahol

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} d_k e_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^{n-k}\frac{y^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k+1}}{(2k)!(2n-2k+1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}x^{2k}y^{2n-2k+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ páros}}}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k y^{2n+1-k}.$$

Ezért

$$\underline{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n + \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(c_n + f_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k y^{2n+1-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x+y)^{2n+1} = \underline{\sin(x+y)}.$$

3. A szinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletet az $x \in \mathbb{R}$, $y = x \in \mathbb{R}$ szereposztással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x.$$

A koszinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletet az $x \in \mathbb{R}$, $y = x \in \mathbb{R}$ szereposztással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

4. Ha a koszinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletet az $x \in \mathbb{R}$, $y = -x \in \mathbb{R}$ szereposztással alkalmazzuk, és felhasználjuk a függvények paritásaira vonatkozó állításokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$1 = \cos 0 = \cos\Big(x + (-x)\Big) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) =$$

$$= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x.$$