10. gyakorlat

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 1.

Emlékeztető.

$\boxed{\textbf{I.}}$ *Definíciók*

$\boxed{\mathbf{1^o}}$ Azt mondjuk, hogy a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ***torlódási pontja***, ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$ minden környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{esetén} \quad K_\varepsilon(a) \cap H \quad \text{végtelen halmaz.}$$

A H halmaz torlódási pontjainak a halmazát a $\boxed{H'}$ szimbólummal jelöljük.

Az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem akkor és csak akkor torlódási pontja a H halmaznak, ha a minden környezete tartalmaz a-tól különböző H-beli elemet.

Egy f valós-valós függvény határértékét a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartományának az a torlódási pontjaiban, vagyis az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontokban értelmezzük. Ekkor $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}_f$ is lehetséges. Ezért a határérték szempontjából érdektelen, hogy a függvény értelmezve van-e a-ban, és ha igen, akkor ott mi a függvény helyettesítési értéke. Így $a \in \mathcal{D}_f'$ lehet véges (vagyis $a \in \mathbb{R}$), de lehet $\pm\infty$ is. A függvény határértéke is lehet véges (ha $A \in \mathbb{R}$), de ez is lehet $\pm\infty$ is.

$\boxed{\mathbf{2^o}}$ Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban ***van határértéke***, ha

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A-t a függvény $a \in \mathcal{D}_f'$-beli ***határértékének*** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

A $\lim\limits_a f = A$ egyenlőség azt fejezi ki, hogy „az a-hoz közeli x pontokban felvett függvényértékek közel vannak A-hoz”.

$\boxed{\mathbf{3^o}}$ ***A határérték definíciójának speciális esetei.*** Függvényhatárértéket az alábbi $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontokban vizsgálhatjuk:

$$a \in \mathbb{R} \quad \text{(végesben)} \qquad \text{vagy} \qquad \left.\begin{matrix} a = +\infty \\ a = -\infty \end{matrix}\right\} \quad \text{(végtelenben)},$$

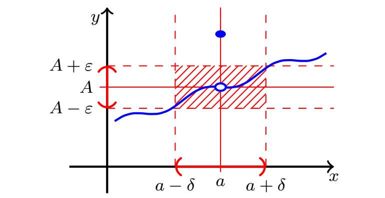
és ekkor az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték lehet:

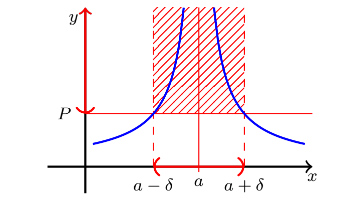
$$A \in \mathbb{R} \quad \text{(véges)} \qquad \text{vagy} \qquad \left.\begin{matrix} A = +\infty \\ A = -\infty \end{matrix}\right\} \quad \text{(végtelen)}.$$

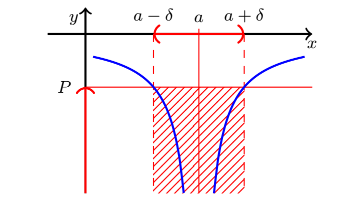
Ez összesen 9-féle lehetőséget jelent. A sorozatokhoz hasonlóan a

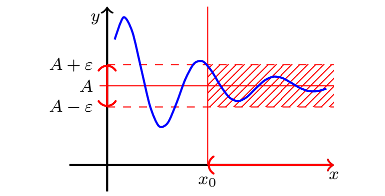
$$\lim_a f = A$$

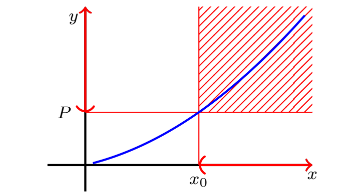
függvényhatárértékre környezetekkel megadott egységes definíciót a speciális esetekben ***egyenlőtlenségekkel*** is megfogalmazhatjuk:

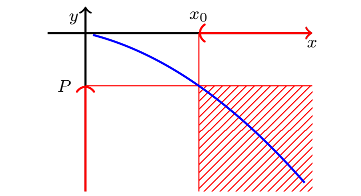
<table>
<tr><th>$A = \lim\limits_a f$</th><th>$A \in \mathbb{R}$</th><th>$A = +\infty$</th><th>$A = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{R}$</td>
<td>

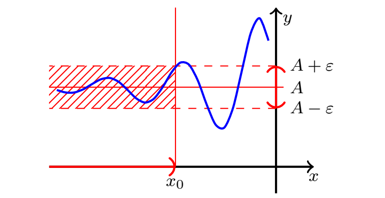
$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x-a| < \delta\colon |f(x) - A| < \varepsilon$</td>
<td>

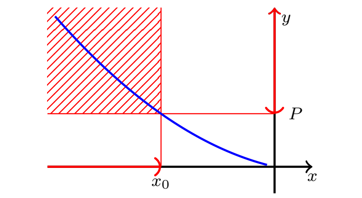
$\forall P > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x-a| < \delta\colon f(x) > P$</td>
<td>

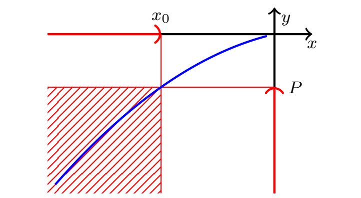
$\forall P < 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x-a| < \delta\colon f(x) < P$</td></tr>
<tr><td>$a = +\infty$</td>
<td>

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon |f(x) - A| < \varepsilon$</td>
<td>

$\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon f(x) > P$</td>
<td>

$\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon f(x) < P$</td></tr>
<tr><td>$a = -\infty$</td>
<td>

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0\colon |f(x) - A| < \varepsilon$</td>
<td>

$\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0\colon f(x) > P$</td>
<td>

$\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0\colon f(x) < P$</td></tr>
</table>

$\boxed{\mathbf{4^o}\ \boldsymbol{a)}}$ Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}$ és $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen (vagy a-ban) ***van jobb oldali határértéke***, ha

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ a < x < a + \delta\colon f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A egyértelmű, és ezt az f függvény a-ban vett ***jobb oldali határértékének*** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{a+0} f = A, \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = A, \qquad f(a+0) = A.$$

$\boxed{\mathbf{4^o}\ \boldsymbol{b)}}$ Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}$ és $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen (vagy a-ban) ***van bal oldali határértéke***, ha

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ a - \delta < x < a\colon f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A egyértelmű, és ezt az f függvény a-ban vett ***bal oldali határértékének*** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{a-0} f = A, \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = A, \qquad f(a-0) = A.$$

Egy függvény pontbeli bal és jobb oldali határértéke speciális függvények pontbeli határértéke. Ezért az új határértékre is alkalmazhatók a tanult alaptételeket a megfelelő módosításokkal.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és a jobb és bal oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek. Ekkor*

$$\exists \lim_a f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \quad \textit{és} \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f \ \big(= \lim_a f\big).$$

$\boxed{\textbf{II.}}$ *Felhasználható eredmények*

Tétel. **(Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv)** *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \ \ \textit{esetén} \ \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A.$$

Tétel. **(Függvényhatárértékre vonatkozó közrefogási elv)** *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $f, g, h\colon H \to \mathbb{R}$, $a \in H'$ és*

$$\exists K(a),\ \forall x \in \big(K(a) \setminus \{a\}\big) \cap H\colon f(x) \le h(x) \le g(x).$$

Ha

$$\exists \lim_a f, \quad \exists \lim_a g \quad \textit{és} \quad \lim_a f = \lim_a g = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor

$$\exists \lim_a h \quad \textit{és} \quad \lim_a h = A.$$

Tétel. **(A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata)** *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)'$ *és léteznek az* $A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$ *határértékek. Ekkor*

1. *az* $f + g$ *összegfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ *összeg értelmezve van,*

2. *az* $f \cdot g$ *szorzatfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B,$$

feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *szorzat értelmezve van,*

3. *az* f/g *hányadosfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $A/B \in \overline{\mathbb{R}}$ *hányados értelmezve van.*

Kritikus határértékekről beszélünk akkor, ha az előbbi tétel nem alkalmazható. A sorozatokhoz hasonlóan ilyenek például a

$$(+\infty) + (-\infty) \ \ (\text{vagy } (+\infty) - (+\infty)), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \quad \frac{c}{0} \ (c \in \overline{\mathbb{R}})$$

típusú kritikus határértékek.

III. *Néhány nevezetes határérték*

- minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x \to a} x^n = a^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & (n = 2, 4, 6, \ldots) \\ -\infty & (n = 1, 3, 5, \ldots), \end{cases}$
- minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} \nexists & (n = 1, 3, 5, \ldots) \\ = +\infty & (n = 2, 4, 6, \ldots). \end{cases}$

1. Feladat. *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Fogalmazzuk meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel is az alábbi állításokat!*

$$a) \quad \lim_{-2} f = 7, \quad b) \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty.$$

Megoldás.

a) Környezetekkel megfogalmazva: $-2 \in \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$ és

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \Big(K_\delta(-2) \setminus \{-2\}\Big) \cap \mathbb{R} \colon f(x) \in K_\varepsilon(7).$$

Egyenlőtlenségekkel:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - (-2)| < \delta \colon |f(x) - 7| < \varepsilon.$$

b) Környezetekkel megfogalmazva: $0 \in \Big(\mathbb{R} \cap (-\infty, 0)\Big)' \iff 0 \in (-\infty, 0]$ és

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \Big(K_\delta(0) \setminus \{0\}\Big) \cap (-\infty, 0) \colon f(x) \in K_\varepsilon(-\infty).$$

Egyenlőtlenségekkel:

$$\forall P < 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ -\delta < x < 0 \colon f(x) < P.$$

2. Feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1,$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = -8,$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2},$ *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \sqrt{2x+5} = 3.$

Megoldás.

a) A végesben vett véges függvényhatárérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ 0 < |x| < \delta \colon \left|\frac{1}{1+x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén

$$\left|\frac{1}{1+x} - 1\right| = \left|\frac{1 - (1+x)}{1+x}\right| = \frac{1}{|1+x|} \cdot |x|$$

A $|x| < \delta$ feltétel az jelenti, hogy egy 0 körüli környezetben vagyunk, ahol jó lenne tudni az $\frac{1}{|1+x|}$ kifejezést felülről becsülni. Meddig mehetünk a δ-val? A kifejezés a -1 pontban nem értelmezhető, ennek környezetében tetszőlegesen nagy értékeket vesz fel. A kifejezés azonban korlátos lesz, ha feltételezzük, hogy $|x| < \frac{1}{2}$. Ekkor

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} < x + 1 < \frac{3}{2} \implies \frac{1}{2} < |x+1| < \frac{3}{2} \implies \frac{1}{|x+1|} < 2.$$

Ekkor

$$\left|\frac{1}{1+x} - 1\right| = \frac{1}{|1+x|} \cdot |x| < \underbrace{2|x| < \varepsilon}_{|x| < \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Így a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választással $(*)$ teljesül.

b) Vegyük észre, hogy ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték. Azonban $(x-1)$-et ki lehet emelni a számlálóból és a nevezőből, azaz egyszerűsíteni tudunk, ami megkönnyíti a számításokat.

$$\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2} = \frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+3)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \frac{x^3+x^2+3x+3}{x-2}.$$

A végesben vett véges függvényhatárérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(\triangle)\ \ \forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\},\ 0<|x-1|<\delta\colon\ \left|\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}-(-8)\right|<\varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon>0$ egy rögzített valós szám. Ekkor $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ esetén

$$\left|\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}-(-8)\right| = \left|\frac{x^3+x^2+3x+3}{x-2}+8\right| = \left|\frac{x^3+x^2+11x-13}{x-2}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x^3-1)+(x^2-1)+11(x-1)}{x-2}\right| = \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)+11(x-1)}{x-2}\right| =$$

$$= |x-1|\cdot\left|\frac{x^2+2x+13}{x-2}\right| \le |x-1|\cdot\frac{x^2+2|x|+13}{|x-2|}.$$

Az $|x-1|<\delta$ feltétel az jelenti, hogy egy 1 pont körüli környezetben vagyunk. Az $x=2$ pont elkerüléséhez vesszük az $|x-1|<\frac{1}{2}$ szűkítést. Ekkor

$$-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{3}{2}<x-2<-\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}<|x-2|<\frac{3}{2}.$$

Másrészt

$$-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}<|x|<\frac{3}{2}$$

Ekkor

$$\left|\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}-(-8)\right| \le |x-1|\cdot\frac{x^2+2|x|+13}{|x-2|} \le |x-1|\cdot\frac{(3/2)^2+2\cdot(3/2)+13}{1/2} \le$$

$$\le |x-1|\cdot\frac{2^2+2\cdot 2+13}{1/2} \le \underbrace{42|x-1|<\varepsilon}_{|x-1|<\frac{\varepsilon}{42}}.$$

Így a $\delta:=\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{\varepsilon}{42}\right\}$ választással $(\triangle)$ teljesül.

c) A $(+\infty)$-ben vett véges függvényhatárérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(\#)\qquad \forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists x_0>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x>x_0\colon\ \left|\frac{x^2-1}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon>0$ egy rögzített valós szám. Ekkor $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(x^2-1)-(2x^2+1)}{2(2x^2+1)}\right| = \frac{3}{2(2x^2+1)} < \frac{3}{4x^2} < \frac{4}{4x^2} = \underbrace{\frac{1}{x^2}<\varepsilon}_{|x|>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Így az $x_0:=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ választással $(\#)$ teljesül.

d) A végesben vett véges függvényhatárérték definíciója szerint azt kell belátni, hogy

$$(\circ) \qquad \forall\varepsilon\text{-hoz } \exists\delta > 0,\ \forall x \geq -5/2,\ 0 < |x-2| < \delta\colon \left|\sqrt{2x+5} - 3\right| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor $\forall x \geq -5/2$ esetén

$$\left|\sqrt{2x+5} - 3\right| = \left|\left(\sqrt{2x+5} - 3\right) \cdot \frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}\right| = \frac{\left|(2x+5) - 3^2\right|}{\sqrt{2x+5}+3} = \frac{|2x-4|}{\sqrt{2x+5}+3}.$$

Az $|x-2| < \delta$ feltétel az jelenti, hogy egy 2 pont körüli környezetben vagyunk. Az $x \geq -5/2$ feltétel megtartásához vehetjük például az $|x-2| < 2$ szűkítést. Ekkor

$$\left|\sqrt{2x+5} - 3\right| = \frac{|2x-4|}{\sqrt{2x+5}+3} \leq \left(\ \sqrt{2x+5}+3 > 1\ \right) \leq \underbrace{2|x-2| < \varepsilon}_{|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}}$$

Így $\delta := \min\left\{2, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választással $(\circ)$ teljesül.

3. Feladat. *A nevezetes határértékek és a műveleti tételek felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket!*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x+1}{x^3+x+2}$, *b)* $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-3}{x^2+2x+1}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6}$, *d)* $\displaystyle\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6}$.

Megoldás. Racionális törtfüggvényekről, vagyis két polinom hányadosairól van szó. Polinomnak bármely véges helyen van határértéke, és az a helyettesítési értékkel egyenlő.

a) A határérték nem kritikus, a műveleti tétel átalakítások nélkül alkalmazható:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x+1}{x^3+x+2} = \frac{1^3+1+1}{1^3+1+2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$$

b) A számláló, illetve a nevező határértéke (-1)-ben -3, illetve 0, ezért most $-3/0$ típusú kritikus határértékről van szó.

$$\frac{x^2+x-3}{x^2+2x+1} = \frac{x^2+x-3}{(x+1)^2} = (x^2+x-3) \cdot \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Ezért

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-3}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2+x-3) \cdot \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = (-3)\cdot(+\infty) = \underline{\underline{-\infty}}.$$

c) A számláló, illetve a nevező határértéke 2-ben 1, illetve 0, ezért ugyanezek a 2-ben vett jobb oldali határértékek is. Most $1/0$ típusú határértékről van szó.

$$\frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} = \frac{x^2+2x-7}{(x-3)(x-2)} = \frac{x^2+2x-7}{x-3} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Ezért

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+2x-7}{x-3} \cdot \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-1} \cdot (+\infty) = \underline{\underline{-\infty}}.$$

d) Az előző gondolatmenetet követve

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+2x-7}{x-3}\cdot\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{-1}\cdot(-\infty)=\underline{\underline{+\infty}}\,.$$

4. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2+2x+7)$, *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x+2)$.

Megoldás. $(-\infty)+(+\infty)$ típusú kritikus határértékekről van szó, és így nem tudjuk átalakítás nélkül alkalmazni a műveleti tételt. De tudjuk alkalmazni a sorozatoknál látott kiemeléseket. Mivel $x\to+\infty$ vagy $x\to-\infty$, így feltehető, hogy $x\neq 0$.

a) Az x^2 kiemelésével, mivel $\frac{1}{x^n}\to 0$, ha $x\to+\infty$ $(n\in\mathbb{N}^+)$, így

$$\lim_{x\to+\infty}(-3x^2+2x+7)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=(+\infty)\cdot(-3+0+0)=\underline{\underline{-\infty}}.$$

b) Az x^3 kiemelésével, mivel $\frac{1}{x^n}\to 0$, ha $x\to-\infty$ $(n\in\mathbb{N}^+)$, így

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-x+2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=(-\infty)\cdot(1-0+0)=\underline{\underline{-\infty}}.$$

5. Feladat. *A „kiemelés/leosztás technikájával" határozzuk meg az alábbi határértékeket!*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}$, *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$.

Megoldás. Mindegyik esetben kritikus határértékről van szó. Azt a sorozatoknál látott módszert használjuk, hogy a számlálóból és a nevezőből kiemeljük a legmagasabb fokú hatványt. Egyszerűsítés után már nem kritikus határértékeket fogunk kapni.

Mivel $x\to+\infty$ vagy $x\to-\infty$, így feltehető, hogy $x\neq 0$.

Alkalmazni fogjuk azt, hogy $\frac{1}{x^n}\to 0$, ha $x\to+\infty$ vagy $x\to-\infty$ $(n\in\mathbb{N}^+)$.

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}\cdot\frac{\overbrace{2+\frac{3}{x}+\frac{23}{x^3}}^{\to 2}}{\underbrace{-3-\frac{5}{x}+\frac{31}{x^2}+\frac{1}{x^3}}_{\to -3}}=\underline{\underline{-\frac{2}{3}}}\,.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}\cdot\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\cdot\frac{\overbrace{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}^{\to 1}}{\underbrace{1-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}_{\to 1}}=\underline{\underline{0}}.$$

c)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{x}_{\to-\infty}\cdot\frac{\overbrace{1+\frac{2}{x}+\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}^{\to 1}}{\underbrace{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}_{\to 1}}=\underline{\underline{-\infty}}.$$

6. Feladat. *A „szorzatra bontás technikájával” vizsgáljuk meg a következő határértékeket!*

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10},\qquad b)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}.$$

Megoldás. A végesben vett határértékeknél alkalmazott módszerek már eltérnek a sorozatoknál látott módszerektől. Racionális törtfüggvények esetén érdemes szorzatra bontással próbálkozni. Ha az $a\in\mathbb{R}$ pontban keressünk határértéket, akkor emeljük ki $(x-a)$-t ott, ahol lehetséges. Ez csak olyan polinomoknál lehet megtenni, amelyeknek a az egyik zérushelye, azaz az a-ban vett helyettesítési értéke nulla.

a) $\frac{0}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó. Azonban $(x-2)$-t ki tudjuk emelni a számlálóból és a nevezőből. Másodfokú polinomok esetén a szorzatra bontás akár „ránézésre” is elvégezhető, de a gyöktényezős alakban szereplő gyökök meghatározásához a másodfokú egyenlet megoldóképletét is használhatjuk. Így

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-5}=\frac{2-3}{2-5}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

b) Most $\frac{6}{0}$ típusú kritikus határértékről van szó, mert az 5 pontban a számláló, illetve a nevező határértéke 6, illetve 0. Így a nevezőből tudunk $(x-5)$-t kiemelni ugyanúgy, ahogy az a) határértékél tettünk.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)(x-5)}\stackrel{?}{=}\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+6}{x-2}\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}$$

Sajnos a két határérték szorzatára való átalakítás nem járható út, mert $\nexists\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{x-5}$.

Más a helyzet, ha a bal és jobb oldali határértékeket nézzük:

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 5-0}\frac{x^2-5x+6}{x-2}\cdot\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{x-5}=\frac{6}{3}\cdot(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 5+0}\frac{x^2-5x+6}{x-2}\cdot\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{x-5}=\frac{6}{3}\cdot(+\infty)=+\infty$$

A két határérték különböző, ezért a keresett határérték nem létezik.