1. előadás

A FÜGGVÉNY FOGALMA

A matematika egy olyan tudományág, ahol „deduktív” módon, helyes logikai következtetésekkel tudunk fogalmakból és állításokból további állításokat levezetni, újabb fogalmakat létrehozni. Nem lehet vita mit értünk egy adott fogalom alatt. Ha szeretnénk egy új fogalmat értelmezni (vagy idegen szóval a definícióját megadni), akkor kizárólag már ismert, értelmezett fogalmakat alkalmazhatunk. Ez nyilvánvalóan azt a helyzetet teremti, hogy lennie kell induló alapfogalmaknak, nem lehet a „végtelenségig” visszatekinteni a definíciókban. Ahhoz, hogy az analízisben előforduló fogalmakat értelmezni tudjuk, alapfogalomnak tekintjük a ***halmazt***, az ***elemet*** és az ***elem halmazhoz való tartozását***.

A matematikai analízis fontos feladata az általános függvényfogalom megalkotása és vizsgálata. Középiskolából tudjuk, hogy a függvény két halmaz közötti egyértelmű hozzárendelés. Hogyan tudjuk ezt összefüggésbe hozni az alapfogalmakkal? Mivel nincs akadálya annak, hogy egy halmaz elemei szintén halmazok lehessenek, így induljuk ki a rendezett pár fogalmából. Tetszőleges a, b „objektum” esetén az

$$(a,b) := \Big\{\{a\},\{a,b\}\Big\}$$

halmazt ***rendezett párnak*** nevezzük.

A nemüres A és B halmazok ***Descartes-szorzatát*** így értelmezzük:

$$A \times B := \Big\{(a,b) \;\Big|\; a \in A \;\text{ és }\; b \in B\Big\}.$$

Ennek a halmaznak nemüres r részhalmazait ***relációknak*** vagy ***hozzárendeléseknek*** hívjuk. Ha $(a,b) \in r \subset A \times B$, akkor azt mondjuk, hogy az a elem az r relációban van b-vel. A

$$\mathcal{D}_r := \Big\{a \in A \;\Big|\; \exists b \in B \colon (a,b) \in r\Big\},$$

halmazt az r reláció ***értelmezési tartományának***, az

$$\mathcal{R}_r := \Big\{b \in B \;\Big|\; \exists a \in A \colon (a,b) \in r\Big\}$$

halmazt pedig az r reláció ***értékkészletének*** nevezzük.

1. Definíció. *Legyen A és B tetszőleges nemüres halmaz. A*

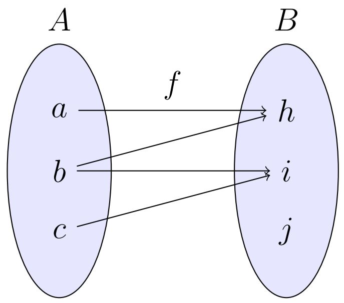
$$\emptyset \neq f \subset A \times B$$

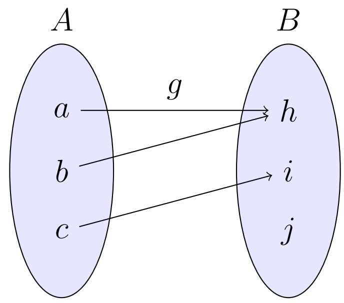
hozzárendelést **függvénynek** *nevezzük, ha*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \text{esetén} \quad \exists!\, y \in \mathcal{R}_f \colon (x,y) \in f.$$

Az y elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékének** *nevezzük és az $f(x)$ szimbólummal jelöljük. Ekkor azt is mondjuk, hogy az f függvény x-hez az $f(x)$ függvényértéket* **rendeli**.

Példa: Legyen $A=\{a,\,b,\,c\}$, $B=\{h,\,i,\,j\}$, és tekintsük az alábbi hozzárendeléseket.





$f:=\Big\{(a,h),\,(b,h),\,(b,i),\,(c,i)\Big\}$ $\qquad$ $g:=\Big\{(a,h),\,(b,h),\,(c,i)\Big\}$

Az f hozzárendelés nem függvény, hiszen $(b,h)\in f$, $(b,i)\in f$, de $h\neq i$. Ezzel szemben a g hozzárendelés már függvény.

Megjegyzés. Az előző definíció azt fejezi ki, hogy a függvény nem más, mint két halmaz közötti egyértelmű hozzárendelés, hiszen minden értelmezési tartománybeli elem egyetlen egyszer szerepelhet a hozzárendelés elemeinek (rendezett párjainak) első komponensében. Más szavakkal, ha a hozzárendelés minden rendezett párját „nyílnak” tekintjük, akkor az értelmezési tartomány minden eleméből egyetlen nyíl indul. ■

A halmazok egyenlőségére vonatkozó megállapodásból következik, hogy az $f\subset A\times B$ és a $g\subset C\times D$ függvények pontosan akkor ***egyenlők*** (jelben $f=g$), ha

$$\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_g \qquad \text{és} \qquad \forall x\in\mathcal{D}_f=\mathcal{D}_g\colon\, f(x)=g(x).$$

Alkalmazott jelölések:

$\boxed{f\in A\to B}$ $\quad :\iff \quad f\subset A\times B$ függvény és $\mathcal{D}_f\subset A$.

$\boxed{f:A\to B}$ $\quad :\iff \quad f\subset A\times B$ függvény és $\mathcal{D}_f=A$.

Megjegyzés. Előfordulhat, hogy $\mathcal{R}_f=B$, és azt is, hogy $\mathcal{R}_f\subsetneq B$, de ez nem befolyásolja a fenti jelöléseket. ■

2. Definíció. *Legyenek A,B,C adott halmazok, $C\subset A$, továbbá $f\colon A\to B$ és $g\colon C\to B$ úgy, hogy $f(x)=g(x)$ minden $x\in C$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy a g függvény az* ***f függvény C halmazra való leszűkítése****. Jele:* $\boxed{f|_C}$.

Invertálható függvények

Ha egy $r\subset A\times B$ hozzárendelésben szereplő minden rendezett pár komponenseit felcseréljük, azaz a hozzárendelésben szereplő minden nyíl irányát megváltoztatjuk, akkor általában más hozzárendelést kapunk. Ezt fogjuk ***inverz hozzárendelésnek*** nevezni, nevezetesen

$$r^{-1}:=\Big\{(b,a)\in B\times A\colon\,(a,b)\in r\Big\}.$$

Elfordulhat, hogy az r hozzárendelés függvény, de az r^{-1} inverz hozzárendelése már nem függvény. Ez látható az előző

$$g:=\Big\{(a,h),\,(b,h),\,(c,i)\Big\}$$

példában, hiszen $g^{-1}=\Big\{(h,a),\,(h,b),\,(i,c)\Big\}$ nem függvény. Lényegében akkor mondjuk, hogy egy f függvény invertálható, ha az f^{-1} inverz hozzárendelése függvény. Ez a fogalom az inverz hozzárendelés fogalmának bevezetése nélkül is megadható.

3. Definíció. *Az* $f : A \to B$ *függvényt* **invertálhatónak** (**egy-egyértelműnek** *vagy* **injektívnek**) *nevezzük akkor, ha a* $\mathcal{D}_f = A$ *értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe különböző, azaz*

$$(\triangle) \qquad \forall x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \neq t \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(t).$$

Gyakran használjuk a $(\triangle)$ alábbi ekvivalens átfogalmazásait:

- f invertálható $\iff$ $\forall x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) = f(t) \Longrightarrow x = t$,
- f invertálható $\iff$ $\forall y \in \mathcal{R}_f$-hez $\exists!\, x \in \mathcal{D}_f : f(x) = y$.

4. Definíció. *Legyen* f *egy invertálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\forall y \in \mathcal{R}_f\text{-hez } \exists!\, x \in \mathcal{D}_f : f(x) = y.$$

Ekkor az f ***inverz függvényét*** (*vagy röviden* ***inverzét***) *így értelmezzük:*

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre} \quad f(x) = y.$$

A definícióból látható, hogy $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, és könnyű meggondolni, hogy $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

5. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az* $f : A \to B$ *invertálható függvény* **bijektív** *vagy* **kölcsönösen egyértelmű**, *ha* $B = \mathcal{R}_f$.

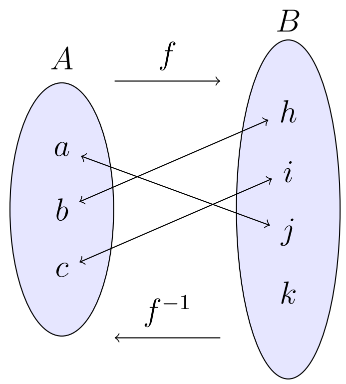
Példa: Az ábrán látható

$$f := \big\{(a, j),\ (b, h),\ (c, i)\big\}$$

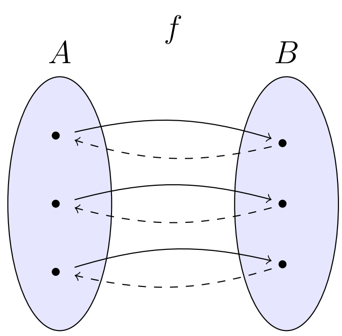
függvény invertálható, és inverze az

$$f^{-1} := \big\{(j, a),\ (h, b),\ (i, c)\big\}$$

függvény, de az $f : A \to B$ függvény nem bijektív.



Megjegyzés. Egy $f : A \to B$ bijektív leképezés párba állítja az A és B halmaz elemeit, ami azt sugallja, hogy a két halmaz „elemszáma” megegyezik. Ekkor azt mondjuk, hogy az A és B halmaz ***azonos számosságú***. ■



A VALÓS SZÁMOK STRUKTÚRÁJA

A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere

A számfogalom kialakulása igen hosszú fejlődési folyamat eredményeként a XIX. század végére alakult ki. A valós számok halmaza nem csak egy halmaz, hanem egy összetett struktúra, amit az $\mathbb{R}$ szimbólummal fogjuk jelölni. Felépítése nem olyan egyszerű, ha szeretnénk teljes precizitással értelmezni. Igazolható, hogy „lényegében" egyetlen struktúra létezik, amire az alábbi axiómák teljesülnek, és ezt a ***valós számok halmazának*** fogjuk nevezni.

I. ***Testaxiómák:***

$\mathbb{R}$-en értelmezve van az ***összeadás*** és a ***szorzás*** művelete, és ezekre nézve $\mathbb{R}$ ***testet*** alkot. Ez azt jelenti, hogy:

I.1. értelmezve van egy

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad +(x, y) =: x + y$$

függvény (az **összeadás művelete**), amelyre a következők teljesülnek:

i) *kommutativitás*: $x + y = y + x$ $(x, y \in \mathbb{R})$,

ii) *asszociativitás*: $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$,

iii) *nullelem létezése*: létezik olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + 0 = x$,

iv) *ellentett létezése*: minden x valós számhoz létezik olyan $\tilde{x}$ valós szám úgy, hogy $x + \tilde{x} = 0$, ezt $-x$-szel fogjuk jelölni,

I.2. értelmezve van továbbá egy

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cdot(x, y) =: x \cdot y =: xy$$

függvény (a **szorzás művelete**), amelyre a következők teljesülnek:

i) *kommutativitás*: $x \cdot y = y \cdot x$ $(x, y \in \mathbb{R})$,

ii) *asszociativitás*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$,

iii) *egység létezése*: létezik olyan $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ elem, hogy $1 \cdot x = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén,

iv) *reciprok létezése*: minden nullától különböző x valós számhoz létezik olyan $\hat{x}$ valós szám, hogy $x \cdot \hat{x} = 1$, ezt $\frac{1}{x}$-szel fogjuk jelölni.

I.3. *Disztributivitás*: Minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

II. **Rendezési axiómák:**

$\mathbb{R}$-en értelmezve van egy $\leq$ (**kisebb-egyenlőnek** nevezett) reláció, amelyre a következők teljesülnek:

II.1. A $\leq$ reláció teljes lineáris rendezés $\mathbb{R}$-en, azaz

i) *reflexív*: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$,

ii) *antiszimmetrikus*: ha $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$,

iii) *tranzitív*: ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$,

iv) *dichotóm*: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq y$ vagy $y \leq x$.

II.2. A $\leq$ rendezést a műveletekkel az alábbi szabályok kapcsolják össze:

i) $x \leq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$,

ii) $0 \leq x$ és $0 \leq y \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{III.}}$ **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**):

Tegyük fel, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra a következők teljesülnek:

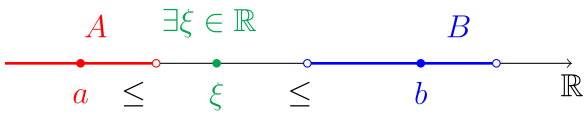
- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$,
- minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$.

Ekkor

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén } a \leq \xi \leq b.$$

Megjegyzések.

1. A „szétválasztási axióma” elnevezést támasztja alá az alábbi ábra:



Azt is mondhatjuk, hogy a ξ valós szám „szétválasztja” az A és a B halmazt. A „teljességi axióma” szóhasználatot hamarosan megindokoljuk.

2. Mindhárom axióma szükséges a valós számok egyértelmű értelmezésére. Pl. a testaxiómák nem elegendőek a valós számok struktúrájának pontos megadására, hiszen tudunk olyan testet megadni, amelynek csak két eleme van. Ehhez vegyük az $F := \{0,\, 1\}$ halmazt az alábbi műveletekkel:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Továbbá, a $\mathbb{Q}$ racionális számok halmaza olyan test, amire igazak a rendezési axiómák, de nem igaz a teljességi axióma. Ezt később látni fogjuk.

3. A testaxiómákból levezethetők olyan ismert tulajdonságok, mint a nevezetes azonosságok, a nullelem, egység, ellentett és reciprok egyértelmű létezése, $-x = (-1) \cdot x$ $(x \in \mathbb{R})$, és a zérusosztómentesség vagyis

$$xy = 0 \quad \iff \quad x = 0 \text{ vagy } y = 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

A rendezési axiómáknak köszönhetően tudjuk a valós számokat egy számegyenesen ábrázolni és az egyenlőtlenségekre vonatkozó, ismert szabályokat igazolni. A teljességi axióma garantálni fogja, hogy a számegyenesen történő ábrázoláskor a számegyenes egyik pontja sem maradjon ki.

4. Az összeadás és a szorzás mellett további műveleteket is értelmezhetünk: A ***kivonás*** művelete az

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x - y := x + (-y)$$

függvény. Az $x - y$ számot x és y ***különbségének*** nevezzük. Az ***osztás*** művelete a következő függvény:

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni (x, y) \mapsto \frac{x}{y} := x/y := x \cdot \frac{1}{y}.$$

Az $\frac{x}{y}$ számot x és y ***hányadosának*** mondjuk. Az axiómákból a valós számok jól ismert és sokszor alkalmazott tulajdonságai mind levezethetők.

5. A $\leq$ rendezési reláció mellett további relációkat is értelmezhetünk:

   $<$ („kisebb”): $x < y \iff x \leq y$ és $x \neq y$,

   $\geq$ („nagyobb vagy egyenlő”): $x \geq y \iff y \leq x$,

   $>$ („nagyobb”): $x > y \iff x \geq y$ és $x \neq y$.

   A rendezés egyéb jól ismert tulajdonságait is ismertnek tekintjük.

A természetes számok halmaza

6. Definíció. *A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz* **induktív halmaz**, *ha*

- $0 \in H$,
- *minden $x \in H$ esetén $x + 1 \in H$.*

Nem nehéz igazolni, hogy

1. $\mathbb{R}$ induktív halmaz,
2. induktív halmazok közös része is induktív halmaz.

7. Definíció. *Az $\mathbb{R}$ halmaz összes induktív részhalmazának a közös részét a* **természetes számok halmazának** *nevezzük, és az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük, azaz*

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{H \subset \mathbb{R} \\ H \text{ induktív}}} H \,.$$

A rendezési axiómákból igazolható, hogy $0 < 1$. Ebből következik, hogy a megszokott tízes számrendszerben alkalmazott

$$2 := 1 + 1, \qquad 3 := 2 + 1, \qquad 4 := 3 + 1, \quad \text{stb.}$$

jelölés mindig különböző számokat generál. Tehát $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

A pozitív egész számok halmaza az $\mathbb{N}^+ := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ halmazt jelenti.

Most megmutatjuk azt, hogy a valós számok axiómarendszeréből hogyan vezethető le a teljes indukciós bizonyítási módszernek a „létjogosultsága”.

1. Tétel (A teljes indukció elve). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

i) *$A(0)$ igaz,*

ii) *ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

Bizonyítás. Legyen
$$S := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; A(n) \text{ igaz} \right\}.$$
Ekkor $\underline{S \subset \mathbb{N}}$ és S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz, ezért $n+1 \in S$ teljesül, következésképpen S induktív halmaz. Mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\underline{\mathbb{N} \subset S}$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az állítás minden n természetes számra igaz.

Teljes indukcióval igazolható, hogy két természetes szám összege is természetes szám. Valóban, ha az $A(n)$ állítás azt jelenti, hogy $n + m \in \mathbb{N}$ minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, akkor

i) $A(0)$ igaz, mert $0 + m = m \in \mathbb{N}$.

ii) Ha $A(n)$ igaz, azaz $n + m \in \mathbb{N}$ minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $A(n+1)$ is igaz, mert $(n+1) + m = n + (m+1) \in \mathbb{N}$, mivel $m + 1 \in \mathbb{N}$, hiszen $\mathbb{N}$ induktív halmaz.

Így $A(n)$ igaz minden n természetes számra, tehát $n + m \in \mathbb{N}$ minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén.

Hasonlóan igazolható, hogy két természetes szám szorzata is természetes szám. Azonban két természetes szám különbsége nem biztos, hogy természetes szám. Ezért vezetjük be az ***egész számok*** halmazát:
$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -x \in \mathbb{N} \right\}.$$
Igazolható, hogy két egész szám összege, különbsége és szorzata továbbra is egész szám.

A valós számok kibővített struktúrája

Több szempontból is hasznos, ha a valós számokat kibővítjük a $+\infty$ (plusz végtelen) és a $-\infty$ (mínusz végtelen) szimbólumokkal. Ezt a halmazt a ***kibővített valós számok halmazának*** nevezzük, és így jelöljük:
$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$
$\overline{\mathbb{R}}$ is egy összetett struktúra. Ki fogjuk terjeszteni az $\mathbb{R}$-beli műveleteket és a rendezést a kibővített valós számokra megőrizve az $\mathbb{R}$-en kialakított struktúrát. A műveletekről csak később lesz szó. A $<$ relációt az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazra úgy terjesztjük ki, hogy
$$-\infty < x < +\infty$$
legyen igaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha hangsúlyozni akarjuk a különbséget a valós számok, valamint a $+\infty$ és a $-\infty$ szimbólumok között, akkor az előbbieket ***végesnek*** nevezzük. Ezt az elnevezést nem szabad összetéveszteni a véges halmaz fogalmával. Azt mondjuk, hogy egy halmaz ***véges*** (másként fogalmazva a halmaz ***véges számosságú***, ha a halmaz üres, vagy van olyan $n \in \mathbb{N}^+$ pozitív egész szám, hogy létezik egy bijekció a halmaz és az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz között. Ekkor n-et a halmaz ***elemszámának*** nevezzük. Ha egy halmaz nem véges, akkor ***végtelennek*** vagy ***végtelen számosságúnak*** mondjuk. Egyszerű meggondolni pl. azt, hogy $\mathbb{N}$ egy végtelen halmaz. Fontos megjegyezni, hogy a végtelen, mint számosság, mást jelent, mint a kibővített valós számok halmazánál szereplő végtelen szimbólum.

A szuprémum elv

8. Definíció. *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak van*

- **maximuma** *vagy* **legnagyobb eleme**, *ha*

$$\exists \alpha \in H, \ \textit{hogy} \ \forall x \in H \ \textit{esetén} \ x \leq \alpha.$$

Ekkor α-t a H **maximumának** *nevezzük, és a* $\boxed{\max H}$ *szimbólummal jelöljük.*

- **minimuma** *vagy* **legkisebb eleme**, *ha*

$$\exists \beta \in H, \ \textit{hogy} \ \forall x \in H \ \textit{esetén} \ \beta \leq x.$$

Ekkor β-t a H **minimumának** *nevezzük, és a* $\boxed{\min H}$ *szimbólummal jelöljük.*

Nem minden nemüres H halmaznak van legnagyobb vagy legkisebb eleme. Világos, hogy

$$\nexists \max H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \alpha \in H\text{-hoz} \ \ \exists x \in H : \ x > \alpha \\ (\text{„bármely } H\text{-beli } \alpha \text{ elemnél van nagyobb } H\text{-beli } x \text{ elem”}), \end{cases}$$

$$\nexists \min H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \beta \in H\text{-hoz} \ \ \exists x \in H : \ \beta > x \\ (\text{„bármely } H\text{-beli } \beta \text{ elemnél van kisebb } H\text{-beli } x \text{ elem”}). \end{cases}$$

Például, ha $H := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$, akkor $\max H = 1$, hiszen $1 \in H$ és $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $\frac{1}{n} \leq 1$, de

$$\nexists \min H, \quad \text{mert } \forall x \in H\text{-hoz } \exists n \in \mathbb{N}^+ : x = \tfrac{1}{n} > \tfrac{1}{n+1} \in H.$$

Hasonlóan, ha $H := \left\{ 1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$, akkor $\min H = 0$, de $\nexists \max H$.

9. Definíció. *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz*

- **felülről korlátos**, *ha*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \ \textit{hogy} \ \forall x \in H \ \textit{esetén} \ x \leq K.$$

Az ilyen K számot a H halmaz egy **felső korlátjának** *nevezzük.*

- **alulról korlátos**, *ha*

$$\exists k \in \mathbb{R}, \ \textit{hogy} \ \forall x \in H \ \textit{esetén} \ k \leq x.$$

Az ilyen k számot a H halmaz egy **alsó korlátjának** *nevezzük.*

- **korlátos**, *ha alulról is, felülről is korlátos, azaz*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \ \textit{hogy} \ \forall x \in H \ \textit{esetén} \ |x| \leq K.$$

Megjegyzés. Ha K a H halmaznak felső korlátja, akkor $\forall K' > K$ valós szám is felső korlát lesz. Hasonlóan, ha k a H-nak alsó korlátja, akkor $\forall k' < k$ valós szám is alsó korlát lesz. ■

A következő, alapvető fontosságú tétel azt mondja ki, hogy egy nemüres felülről korlátos halmaz felső korlátjai között van legkisebb, vagyis a ***felső korlátok halmazának van minimuma***.

2. Tétel (A szuprémum elv). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

i) $H \neq \emptyset$ és

ii) H felülről korlátos.

Ekkor

$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$A := H \quad \text{és} \quad B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq K.$$

A teljességi axiómából következik, hogy

$$\exists \xi \in \mathbb{R}\colon a \leq \xi \leq K \qquad (a \in A,\ K \in B).$$

Erre a ξ-re az teljesül, hogy

- ξ felső korlátja H-nak, hiszen $a \leq \xi$ minden $a \in A$ esetén,
- ξ a legkisebb felső korlát, ui. ha K egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja.

A fenti bizonyítás értelemszerű módosításával megkapjuk az előző tételnek az alsó korlátokra vonatkozó párját.

3. Tétel. *Minden nemüres és alulról korlátos halmaznak van legnagyobb alsó korlátja.*

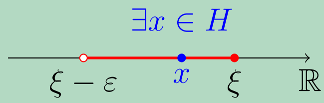
10. Definíció.

- *A felülről korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját H* **szuprémumának** *nevezzük, és a* $\boxed{\sup H}$ *szimbólummal jelöljük.*
- *Az alulról korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját H* **infimumának** *nevezzük, és az* $\boxed{\inf H}$ *szimbólummal jelöljük.*

A szuprémum és infimum fogalmát egyenlőtlenségekkel is ki tudjuk fejezni

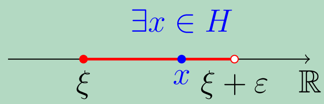
4. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \sup H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{ felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ x \leq \xi; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{ a legkisebb felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \ \exists x \in H: \ \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$



5. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \inf H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{ alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ \xi \leq x; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{ a legnagyobb alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \ \exists x \in H: \ x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$



A szuprémum és az infimum értelmezését kiterjesztjük nem korlátos halmazokra is:

- ha a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a ***szuprémuma plusz végtelen***, és ezt úgy jelöljük, hogy
$$\sup H := +\infty.$$
- ha a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy az ***infimuma mínusz végtelen***, és ezt úgy jelöljük, hogy
$$\inf H := -\infty.$$

Megjegyzés. A fentiek alapján tehát minden nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz estén beszélhetünk szuprémumról és infimumról. Világos, hogy

- $\exists \max H \quad \Longleftrightarrow \quad \sup H \in H$ és ekkor $\sup H = \max H$,
- $\exists \min H \quad \Longleftrightarrow \quad \inf H \in H$ és ekkor $\inf H = \min H$.

A szuprémum a maximum általánosításaként fogható fel. Láttuk, hogy egy $\mathbb{R}$-beli halmaznak általában nincsen maximuma. Ilyenkor ennek szerepét a szuprémum veszi át. Hasonló érvényes a minimum általánosításának tekinthető infimumra. ■

A szuprémum elvet a teljességi axióma alapján bizonyítottuk be, azaz azt mondhatjuk, hogy a szuprémum elv a teljességi axiómából következik. Ez az állítás megfordítható abban az értelemben, hogy ha egy struktúra rendelkezik a test- és a rendezési axiómákkal, illetve igaz még a szuprémum elv, akkor a teljességi axiómában szereplő tulajdonság szintén teljesül. Ez utóbbi fordított állítást nem fogjuk igazolni.

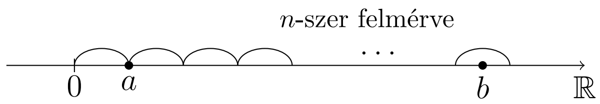
6. Tétel. *A teljességi axióma ekvivalens a szuprémum elvvel.*

Az arkhimédészi tulajdonság és a Cantor-tulajdonság

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor egy szám n-szerese úgy tekinthető, mint a szám önmagával vett n-szeres összege. Ha $a > 0$, akkor a számegyenesen ábrázolva látható, hogy az

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-szer}}$$

alakú számok nagyon nagy értékek vehetnek fel, amelyek bármely b valós számnál is nagyobbak.



Ezt állítja az arkhimédészi tulajdonság.

7. Tétel (Az arkhimédészi tulajdonság). *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall a > 0 \quad \text{és} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \ \text{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists a > 0 \ \text{ és } \ \exists b \in \mathbb{R}, \ \text{hogy } \forall n \in \mathbb{N} : \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és H felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A szuprémum elv szerint

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja H-nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n_0 \cdot a > \xi - a \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Azonban $(n_0 + 1) \cdot a \in H$, tehát $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$, hiszen ξ felső korlátja a H halmaznak. Így ellentmondáshoz jutottunk.

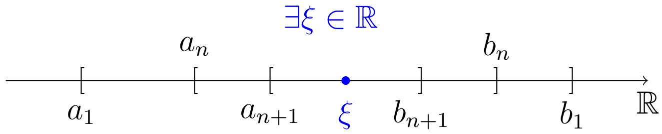
Következmények.

1. $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$. $\qquad (\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n \in \mathbb{N}$: $1 < n \cdot \varepsilon)$
2. Az $\mathbb{N}$ halmaz felülről nem korlátos, $\qquad (\forall b \in \mathbb{R}$-hez $\exists n \in \mathbb{N}$: $b < n \cdot 1 = n)$.

Az intervallumokat a eddigi tanulmányainkban megszokott módon fogjuk értelmezni és jelölni. Pl. ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$, akkor az a és b számok által határolt zárt intervallum:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

A következő, ún. Cantor-tulajdonságot úgy szoktuk szavakba foglalni, hogy *egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumok közös része nem üres.* Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



8. Tétel (A Cantor-tulajdonság). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Először belátjuk, hogy

$$(*) \qquad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért $(*)$ miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists \xi \in \mathbb{R}: \ a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi \in [a_n, b_n] \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

9. Tétel. *Az arkhimédészi- és a Cantor-tulajdonság együtt ekvivalens a teljességi axiómával.*

A racionális és az irracionális számok halmaza

Már említettük, hogy az összeadás, a kivonás és a szorzás műveletek nem vezetnek ki az egész számok köréből. Az osztás pedig igen, ezért vezetjük be a ***racionális számok*** halmazát:

$$\mathbb{Q} := \left\{ p/q \in \mathbb{R} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Igazolható, hogy egyik alapművelet sem vezet ki a racionális számok köréből, ezért teljesülnek benne a test- és a rendezési axiómák. Egy másik fontos tulajdonság, hogy a racionális számok „mindenütt sűrűn” helyezkednek el a számegyenesen.

10. Tétel. *Bármely két különböző valós szám között van racionális szám.*

Jogos kérdés, hogy van-e olyan valós szám, ami nem racionális. Igazolható, hogy ha van olyan $\alpha > 0$ valós szám, amire $\alpha^2 = 2$ teljesül, akkor α nem lehet racionális szám. Ellenkező esetben α felírható p/q „leegyszerűsített tört” alakban, vagyis feltételezhetjük, hogy p vagy q páratlan szám. Mivel $\alpha^2 = (p/q)^2 = 2$, így átalakítás után:

$$p^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad p^2 \text{ páros szám} \quad \Longrightarrow \quad p \text{ páros szám.}$$

Ekkor $\exists k \in \mathbb{N}$: $p = 2k$. Ezt visszahelyettesítve a $p^2 = 2q^2$ egyenlőségbe azt kapjuk, hogy

$$q^2 = 2k^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2 \text{ páros szám} \quad \Longrightarrow \quad q \text{ páros szám.}$$

Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy p vagy q páratlan szám volt.

De mi garantálja azt, hogy van olyan $\alpha > 0$ valós szám, amire $\alpha^2 = 2$ teljesül? A valós számok axiómarendszeréből igazolható, hogy minden nemnegatív valós számnak van ún. n-edik gyöke minden $n \geq 2$ természetes szám estén.

11. Tétel (Gyökvonás). *Minden $A \geq 0$ valós számhoz és minden $n \geq 2$ természetes számhoz létezik egyetlen olyan $\alpha \geq 0$ valós szám, amelyre $\alpha^n = A$. Ezt a nemnegatív α számot az A nemnegatív szám* ***n*-edik gyökének** *nevezzük, és az $\sqrt[n]{A}$ vagy az $A^{\frac{1}{n}}$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.*

Bizonyítás. Egy nemnegatív A szám n-edik gyökének létezését csak később fogjuk igazolni, ahol egy konstruktív eljárást is adunk az $\sqrt[n]{A}$ közelítő kiszámítására. Az egyértelműség abból következik, hogy

$$(**) \qquad 0 \leq \alpha < \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha^n < \beta^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Így ha $\alpha, \beta \geq 0$ és $\alpha^n = \beta^n = A$, akkor $\alpha = \beta$. $(**)$ könnyen igazolható teljes indukcióval a rendezési axiómák segítségével.

Megjegyzés. Ha elfogadjuk, hogy minden szakasz hossza pozitív valós szám, akkor van olyan $\alpha > 0$ valós szám, amire $\alpha^2 = 2$ teljesül. Elegendő a Pitagorasz-tételt alkalmazni egy olyan derékszögű egyenlő szárú háromszögben, amelynek két befogójának hossza 1. Ekkor az átfogó hossza $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. ■

Már említettük, hogy $\mathbb{Q}$-ban a teljességi axióma nem teljesül. Valóban, ha

$$A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \;\text{ és }\; a^2 < 2\} \qquad \text{és} \qquad B := \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \;\text{ és }\; b^2 > 2\},$$

akkor $\forall a \in A$ és $\forall b \in B$ esetén $a \leq b$. Azonban $\sqrt{2}$ az egyetlen olyan valós szám, amelyik szétválasztja az A és a B halmazt, csak hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

Ha egy valós szám nem racionális, akkor azt ***irracionális számnak*** nevezzük. Az irracionális számok halmaza:

$$\mathbb{Q}^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Az alapműveletek már kivezetnek az irracionális számok halmazából, pl. $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$ vagy $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$. Az irracionális számok szintén „mindenütt sűrűn” helyezkednek el a számegyenesen.

12. Tétel. *Bármely két különböző valós szám között van irracionális szám.*

Megjegyzés. Az a tény, hogy $\mathbb{Q}$-ban a III. axiómában megfogalmazott tulajdonság nem teljesül azt jelenti, hogy a számegyenesen a racionális számok között bizonyos „hézagok" vannak, annak ellenére, hogy bármely két racionális szám között van racionális szám. Az irracionális számok kitöltik ezeket a „hézagokat". A III. axiómát ezért nevezzük „teljességi axiómának". ■

Néhány megjegyzés a halmazok számosságáról

Fontos különbség a racionális és az irracionális számok között az, hogy az utóbbiakból „lényegesen több" van. Első hallásra ez a kijelentés meglepőnek tűnik, hiszen könnyű meggondolni, hogy mindkettőből végtelen sok van, és a korábbi tanulmányaikban „általában" racionális számokkal találkoztak, továbbá csak „néhány" irracionális számot (pl. $\sqrt{2}$-őt) ismertek meg.

A halmazelmélet megalapozója Georg Cantor (1845–1918) német matematikus fedezte fel azt, hogy végtelen elemszámú halmazok között is értelmezhetők az ugyanakkora, a kisebb, ill. a nagyobb fogalmak. (Cantor előtt a matematika azt az álláspontot követte, hogy a végtelenek között nem lehet értelmesen különbséget tenni.) Elsőként azt a gondolatot vetette fel, hogy két halmaz azonos számosságú (más szóval ekvivalens), ha a két halmaz között bijekció létesíthető, vagyis az elemeik párba állíthatók.

Azonban a halmazok ekvivalenciájának van egy furcsának tűnő tulajdonsága. Minden végtelen halmaz ekvivalens egy valódi részhalmazával. Nem nehéz meggondolni pl., hogy a természetes számok halmaza ekvivalens a P nemnegatív páros számok halmazával, hiszen $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in P$ egy bijekció. A végtelen halmazok ilyen „viselkedése" olyan paradoxonokhoz vezet, mint a híres Hilbert szállodája (lásd `https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY`). A $\mathbb{Q}^+$ és az $\mathbb{N}^+$ halmazok is ekvivalensek, hiszen az a leképzés, ami minden p/q pozitív racionális számhoz rendeli a $2p(2q+1)$ természetes számot, egy bijekció $\mathbb{Q}^+$ és $\mathbb{N}^+$ között. Nem nehéz meggondolni, hogy a $\mathbb{Q}$ és az $\mathbb{N}^+$ halmazok is ekvivalensek.

Az $\mathbb{N}^+$ halmazzal ekvivalens halmazokat ***megszámlálhatóan végtelen halmaznak*** nevezzük. Ez azt jelenti, hogy van olyan eljárás, ami előállítja a halmaz elemeit úgy, hogy egy tetszőleges halmazbeli elem véges sok lépés után sorra kerül. Ezzel szemben Q^* nem megszámlálhatóan végtelen halmaz, és természetesen nem is véges. Igazolható, hogy a Q^* és az $\mathbb{R}$ halmazok között bijekció létesíthető. Az $\mathbb{R}$-rel ekvivalens halmazokat ***kontinuum számosságúnak*** nevezzük. Ilyen halmazok pl. az intervallumok.