3. gyakorlat

FÜGGVÉNYEK

Emlékeztető. Legyen $f: A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor ***a C halmaz f által létesített képén*** az

$$f[C] := \{f(x) \mid x \in C\} = \{y \in B \mid \exists x \in C\colon y = f(x)\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

1. Feladat. *Határozzuk meg a $C := [-2, 2]$ halmaz*

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

Megoldás. Halmaz függvény által létesített képének a definíciója szerint

$$f\Big[[-2,2]\Big] = \Big\{3 + 2x - x^2 \mid x \in [-2,2]\Big\} = \Big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-2,2]\colon y = 3 + 2x - x^2\Big\}.$$

Tekintsük az

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

átalakítást, valamint az alábbi következtetés-láncot:

$$-2 \le x \le 2 \implies -3 \le x - 1 \le 1 \implies 0 \le (x-1)^2 \le 9 \implies -9 \le -(x-1)^2 \le 0 \implies$$
$$\implies -5 \le -(x-1)^2 + 4 \le 4.$$

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in [-2, 2]$ esetén $-(x-1)^2 + 4 \in [-5, 4]$, azaz

$$(*) \qquad f\Big[[-2,2]\Big] \subset [-5,4].$$

Sejthető, és most meg is fogjuk mutatni, hogy a fordított irányú

$$(\#) \qquad [-5,4] \subset f\Big[[-2,2]\Big]$$

tartalmazás is igaz. Ehhez azt kell belátni, hogy

$$(\#') \qquad y \in [-5,4] \implies \exists x \in [-2,2]\colon y = -(x-1)^2 + 4.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása

$$x_1 = 1 - \sqrt{4-y} \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{4-y}.$$

Mivel

$$y \in [-5,4] \iff -5 \le y \le 4 \iff -4 \le -y \le 5 \iff 0 \le 4 - y \le 9 \iff$$
$$\iff 0 \le \sqrt{4-y} \le 3,$$

ezért

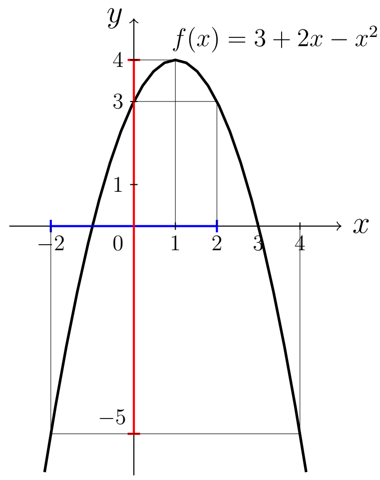
$$-2 = 1 - 3 \le x_1 = 1 - \sqrt{4-y} \le 1 + 0 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \in [-2, 1] \subset [-2, 2].$$

Így a ($\#'$) állítást, következésképpen a ($\#$) tartalmazást bebizonyítottuk. (Ezek után az x_2 megoldással már nem is kell foglalkoznunk. Ennek ellenére megjegyezzük, hogy az előzőekhez hasonlóan adódik az, hogy $x_2 \in [1, 4]$, ha $y \in [-5, 4]$, de $x_2 \in [-2, 2]$ is igaz, ha $y \in [3, 4]$.)

($*$) és ($\#$) alapján a szóban forgó halmazok egyenlők, ezért azt láttuk be, hogy

$$f\Big[[-2, 2]\Big] = [-5, 4].$$

Megjegyzés. A megoldást szemlélteti az alábbi ábra:



Emlékeztető. Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $D \subset B$. Ekkor ***a D halmaz f által létesített ősképén*** az

$$f^{-1}[D] := \big\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\big\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

2. Feladat. *Számítsuk ki a $D := [1, 2]$ halmaz*

$$f(x) := |x - 1| - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét!

Megoldás. Halmaz függvény által létesített ősképének a definíciója szerint

$$f^{-1}\Big[[1, 2]\Big] = \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; |x-1| - 1 \in [1, 2]\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; 1 \le |x-1| - 1 \le 2\Big\} =$$
$$= \Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; 2 \le |x-1| \le 3\Big\}.$$

Azok az $x \in \mathbb{R}$ számok elégítik ki a

$$2 \le |x - 1| \le 3$$

egyenlőtlenség-rendszert, amikre igaz, hogy

$$-3 \le x - 1 \le -2 \qquad \text{vagy} \qquad 2 \le x - 1 \le 3,$$

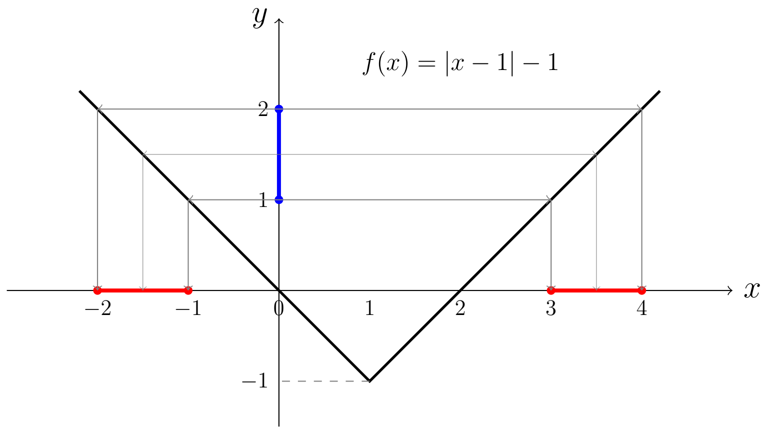
azaz

$$-2 \le x \le -1 \qquad \text{vagy} \qquad 3 \le x \le 4.$$

Ezért

$$f^{-1}\Big[[1, 2]\Big] = [-2, -1] \cup [3, 4].$$

Megjegyzés. A megoldást szemlélteti az alábbi ábra:



Emlékeztető. Akkor mondtuk, hogy egy $f : A \to B$ függvény ***invertálható***, ha $\mathcal{D}_f$ $(= A)$ értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe különböző, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\forall x, t \in \mathcal{D}_f, \text{ esetén } \qquad f(x) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad x = t$$

Tehát, az invertálhatóság eldöntéséhez induljunk ki az $f(x) = f(t)$ egyenletből. Ha ebből ekvivalens átalakítások során azt kapjuk, hogy az egyenlőség csak $x = t$ esetén teljesül, akkor a függvény invertálható, az ellenkező esetben pedig nem invertálható.

Ekkor az f ***inverz függvényét*** (vagy röviden ***inverzét***) így értelmeztük:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \text{ amelyre } f(x) = y.$$

A definíció szerint tehát

$$\boxed{\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f}.$$

Megjegyzések:

1. Az f^{-1} értelmezési tartományának, vagyis f értékkészletének a meghatározása általában nem egyszerű feladat. Bizonyos esetekben (csak ilyen feladatokat fogunk tekinteni) a függvény értékkészlete a függvényértékeket megadó képletekből egyszerűen *megsejthető*.
2. A feladatokban az inverz utasítás meghatározása az $f(x) = y$ egyenlet (tetszőleges $y \in \mathcal{R}_f$ értéket tekintve) megoldását jelenti az ismeretlen x-re nézve (x-et kifejezzük az y segítségével).
3. Itt hívjuk fel a figyelmet egy, a jelölésekkel kapcsolatos látszólagos következetlenségre. Az $f^{-1}[D]$ szimbólum *tetszőleges* f függvény esetén a D halmaz f által létesített ősképét jelölte. Azonban, ha f *invertálható* függvény, akkor ugyanezzel jelöltük – a fogalmilag igencsak különböző dolgot, nevezetesen – a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képét. Ez azért nem vezet félreértéshez – sőt némiképp egyszerűsíti a bevezetett jelöléseket –, mert minden invertálható f függvény és minden $D \subset \mathcal{R}_f$ esetén a D halmaz f által létesített ősképe – azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\}$ halmaz – megegyezik a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével – azaz az $\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} \mid y \in D\}$ halmazzal.

3. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x) := \frac{1}{1 + |x - 1|} \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)$$

*függvény **nem** invertálható!*

Megoldás. Az f függvény *nem invertálható*, ha az értelmezési tartományának van két olyan különböző pontja, amelynek képe egyenlő, azaz

$$\exists x,t \in \mathcal{D}_f, x \neq t\colon\ f(x) = f(t).$$

Elég tehát megadni *két* olyan különböző x és t pontot, amelyekben felvett függvényértékek megegyeznek. Világos, hogy ha például $x = 0$ és $t = 2$, akkor

$$f(0) = \frac{1}{1+|0-1|} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+|2-1|} = f(2).$$

Így beláttuk azt, hogy f nem invertálható.

4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x) := \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 \qquad \big(x \in (-1,1)\big)$$

függvény invertálható, és számítsuk ki az inverzét!

Megoldás. Az invertálhatóság igazolása: Legyen $x,t \in (-1,1)$. Ekkor

$$f(x) = f(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 = \left(\frac{t-1}{1+t}\right)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|\frac{x-1}{1+x}\right| = \left|\frac{t-1}{1+t}\right|.$$

Mivel $x,t \in (-1,1)$, ezért

$$\left|\frac{x-1}{1+x}\right| = \frac{1-x}{1+x} \ \ (>0) \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{t-1}{1+t}\right| = \frac{1-t}{1+t} \ \ (>0),$$

így

$$f(x) = f(t) \iff \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-t}{1+t} \iff (1-x)(1+t) = (1-t)(1+x) \iff$$
$$\iff 1+t-x-xt = 1+x-t-tx \iff 2t = 2x \iff x = t,$$

ami azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítása: Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $x \in (-1,1)$ esetén $f(x) > -1$, és ez azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \mathcal{R}_f \subset (-1,+\infty)\,.$$

Nem nehéz kialakítani azt a *sejtést*, hogy a fordított irányú

$$(**) \qquad (-1,+\infty) \subset \mathcal{R}_f$$

tartalmazás is igaz (ui. $f(x)$ a (-1)-hez közeli pontokban tetszőlegesen nagy értékeket vesz fel). Ennek *bizonyításához* azt kell megmutatni, hogy

$$\forall y \in (-1,+\infty)\text{-hez } \ \exists x \in (-1,1)\colon\ \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 = y.$$

Vegyünk tehát egy tetszőleges $y \in (-1, +\infty)$ számot, és vizsgáljuk meg, hogy ehhez van-e olyan $x \in (-1, 1)$, hogy $f(x) = y$. Nézzük:

$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 = y \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{x-1}{1+x}\right| = \sqrt{y+1} \quad \overset{x \in (-1,1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{x \in (-1,1)}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1-x}{x+1} = \sqrt{y+1} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}.$$

Mivel $y \in (-1, +\infty)$, ezért

$$-1 < x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}} < 1$$

is teljesül, ui. ez egyenértékű a nyilvánvaló

$$-1 - \sqrt{y+1} < 1 - \sqrt{y+1} < 1 + \sqrt{y+1}$$

egyenlőtlenség-rendszerrel. Megmutattuk tehát azt, hogy a $(**)$ tartalmazás is igaz.

Így $(*)$ és $(**)$ alapján

$$\mathcal{R}_f = (-1, +\infty)\,.$$

Mivel $x = f^{-1}(y)$, ezért az inverz függvény:

$$f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}} \qquad \big(y \in (-1, +\infty)\big)\,.$$

Emlékeztető. Tegyük fel, hogy $f : A \to B$ és $g : C \to D$ olyan függvények, amelyekre

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ebben az esetben az f (***külső***) és a g (***belső***) függvény ***összetett függvényét*** (vagy más szóval f és g ***kompozícióját***) $f \circ g$ szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:

$$f \circ g \,:\, \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \qquad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya tehát a

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$$

halmaz. Szavakkal megfogalmazva: „$\mathcal{D}_{f \circ g}$ a belső függvény értelmezési tartományának azon pontjait tartalmazza, amelyekben felvett függvényértékek benne vannak a külső függvény értelmezési tartományában.”

A korábban bevezetett fogalmakat felhasználva egyszerűen belátható, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = g^{-1}\left[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f\right].$$

Ha még a $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ tartalmazás is fennáll, akkor $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g$.

Ha $\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \emptyset$, akkor f és g kompozícióját nem értelmezzük.

5. Feladat. *Határozzuk meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha*

a) $f(x) := \sqrt{x+1} \quad \big(x \in [-1, +\infty)\big), \qquad g(x) := x^2 - 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$

b) $f(x) := \dfrac{1}{2x+1} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\right), \qquad g(x) := x^2 + 3x + \dfrac{3}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Megoldás.

a) A definíció szerint

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 1 \in [-1, +\infty)\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 1 \geq -1\}.$$

$\mathbb{R}$-en kell tehát megoldani az $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenséget:

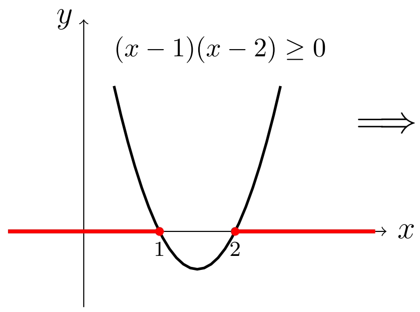
$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)(x-2) \geq 0.$$

(Az $x^2 - 3x + 2$ polinom gyöktényezős alakját most „ránézésre” írtuk fel. Használhatjuk azonban a másodfokú egyenletek megoldóképletét is:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1 \text{ és } x_2 = 2,$$

így $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.)

Az $(x-1)(x-2) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát „grafikus módszerrel” is meghatározhatjuk:



$$\Longrightarrow \quad x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

(„Algebrai módszert” is használhatunk: az $(x-1)(x-2)$ szorzat pontosan akkor ≥ 0, ha

• mindegyik tényező ≥ 0 $\quad \Longrightarrow \quad x - 1 \geq 0$ **és** $x - 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 2$,

vagy

• mindegyik tényező ≤ 0 $\quad \Longrightarrow \quad x - 1 \leq 0$ **és** $x - 2 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 1$.

Így $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)\big)$.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 1 \geq -1\} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty).$$

Az $f \circ g$ függvény helyettesítési értéke az $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ pontban:

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x) + 1} = \sqrt{\big(x^2 - 3x + 1\big) + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Így

$$\big(f \circ g\big)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \qquad \big(x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)\big).$$

b) A definíció szerint

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + \tfrac{3}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}\Big\} =$$
$$= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + \tfrac{3}{2} \neq -\tfrac{1}{2}\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 2 \neq 0\Big\} =$$
$$= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x+2) \neq 0\Big\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}.$$

Az $f \circ g$ függvény helyettesítési értéke az $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ pontban:

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{1}{2g(x)+1} = \frac{1}{2\big(x^2+3x+\frac{3}{2}\big)+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

Így

$$\big(f \circ g\big)(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+3x+2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}\big).$$

6. Feladat. *Legyen*

$$f(x) := \sqrt{2x+1} \quad \Big(x \in \big[\tfrac{1}{2}, +\infty\big)\Big) \quad \textit{és} \quad g(x) := \frac{1}{x^2-2} \quad \big(x \in (2, +\infty)\big).$$

Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket!

Megoldás. $\boxed{f \circ g}$ A definíció szerint:

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x > 2 \;\middle|\; \frac{1}{x^2-2} \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Ha $x > 2$, akkor $x^2 - 2 > 0$, így

$$\frac{1}{x^2-2} \geq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2 \geq x^2 - 2 \quad \Longrightarrow \quad 4 \geq x^2 \quad \Longrightarrow \quad |x| \leq 2,$$

és ez ellentmond az $x > 2$ feltételünknek, következésképpen $\mathcal{D}_{f\circ g} = \emptyset$. Ebben az esetben tehát az $f \circ g$ kompozíciót nem értelmezzük.

$\boxed{g \circ f}$ A definíció szerint:

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \geq \frac{1}{2} \;\middle|\; \sqrt{2x+1} > 2\right\} =$$
$$= \left\{x \geq \frac{1}{2} \;\middle|\; 2x+1 > 4\right\} = \left\{x \geq \frac{1}{2} \;\middle|\; x > \frac{3}{2}\right\} = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

A $g \circ f$ függvény helyettesítési értéke az $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$ pontban:

$$\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{f^2(x)-2} = \frac{1}{\big(\sqrt{2x+1}\big)^2 - 2} = \frac{1}{2x-1}.$$

Így

$$\big(g \circ f\big)(x) = \frac{1}{2x-1} \qquad \left(x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right).$$