8. gyakorlat

VÉGTELEN SOROK 2.

Emlékeztető.

***Tétel.* (A Cauchy-féle gyökkritérium)** *Tekintsük a $\sum a_n$ végtelen sort, és tegyük fel, hogy létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. *$0 \le A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. *$A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,*
3. *$A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

***Tétel.* (A d'Alembert-féle hányadoskritérium)** *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor tagjai közül egyik sem 0 és létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. *$0 \le A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. *$A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,*
3. *$A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

Megjegyzés. A gyök- és a hányadoskritérium alkalmazása. A hányadoskritériumot könnyebb alkalmazni, mint a gyökkritériumot, hiszen általában könnyebb hányadost számolni, mint n-edik gyököt. A gyökkritérium használhatósági területe viszont tágabb. Pontosabban: ha a hányadoskritérium konvergenciát igazol, akkor a gyökkritérium is; ha a gyökkritérium hatástalan, akkor a hányadoskritérium is az. Tehát lehetséges, hogy a gyökkritérium alapján bizonyítani tudjuk a konvergenciát, míg a hányadoskritérium nem ad felvilágosítást, a fordított eset azonban nem lehetséges (l. a További feladatokat).

***Tétel.* (Összehasonlító kritériumok)** *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \ge N : 0 \le a_n \le b_n.$$

Ekkor

1. **Majoráns kritérium:** *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*
2. **Minoráns kritérium:** *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

1. Feladat. *Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?*

a) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{(-1)^n \cdot n!}{3n+2}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n+3^n}$, *e)* $\displaystyle\sum_{n=0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}$, *f)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2n+1}{(-3)^n}$.

Megoldás.

a) Használjuk a d'Alembert-féle hányadoskritériumot!

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{3n+2} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{3(n+1)+2} \cdot \frac{3n+2}{n!} = \frac{(n+1)(3n+2)}{3n+5} =$$

$$= n \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})}{3+\frac{5}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (+\infty) \cdot \frac{1\cdot 3}{3} = +\infty = A.$$

Mivel $A > 1$, így a hányadoskritérium alapján a sor divergens.

b) Használjuk a Cauchy-féle gyökkritériumot!

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} = A.$$

Mivel $A < 1$, így a gyökkritérium alapján a sor konvergens.

c) Használjuk a d'Alembert-féle hányadoskritériumot!

$$a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{2\cdot 2^n \cdot n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} =$$

$$= \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{e} = A.$$

Mivel $e > 2$, ezért $A = \frac{2}{e} < 1$, így a hányadoskritérium alapján a sor konvergens.

d) Elegendő igazolni, hogy a $\sum\limits_{n=1} \frac{n^2}{2^n}$ sor konvergens, hiszen

$$\frac{n^2}{2^n + 3^n} < \ (\text{mivel } 3^n > 0)\ < \frac{n^2}{2^n},$$

és így a majoráns kritérium szerint a sor konvergens. A $\sum\limits_{n=1} \frac{n^2}{2^n}$ sor konvergenciáját a Cauchy-féle gyökkritérium segítségével fogjuk igazolni.

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} = A.$$

Mivel $A < 1$, így a gyökkritérium alapján $\sum\limits_{n=1} \frac{n^2}{2^n}$ konvergens.

e) Használjuk a Cauchy-féle gyökkritériumot!

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1+\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}\ .$$

Egyrészt

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1},$$

hiszen $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ minden $x \in \mathbb{Q}$ esetén.

Másrészt

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

hiszen $x_n := \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}^+$ miatt $\sqrt[n]{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Ezért

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{e} = A.$$

Mivel $e > 2$, ezért $A = \frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1$, így a gyökkritérium alapján a sor konvergens.

f) Használjuk a d'Alembert-féle hányadoskritériumot!

$$a_n = \frac{2n+1}{(-3)^n} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n+1} = \frac{2n+3}{3\cdot 3^n}\cdot\frac{3^n}{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2n+3}{2n+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}\cdot\frac{2+0}{2+0} = \frac{1}{3} = A.$$

Mivel $A < 1$, így a hányadoskritérium alapján a sor (abszolút) konvergens.

Emlékeztető.

Tétel. **(A geometriai/mértani sor)** *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A (q^n) sorozatból képzett* $\sum\limits_{n=0} q^n$ **geometriai** *vagy* **mértani sor** *akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

Ha $q \geq 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0} q^n$ sornak van összege, és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.

2. Feladat. *Milyen $x \geq 0$ valós szám esetén konvergens a*

$$\sum_{n=0} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$$

sor, és akkor mi az összege?

Megoldás. Rögzített $x \geq 0$ esetén a sor a $q = \frac{\sqrt{x}}{2} - 1$ hányadosú mértani sor. Ez akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \frac{\sqrt{x}}{2} < 2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 < \sqrt{x} < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 16.$$

Ekkor a sor összege:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{x}}{2}} = \frac{2}{4 - \sqrt{x}} \qquad (0 < x < 16).$$

3. Feladat. *Az x valós szám milyen értéke mellett konvergens a*

$$\sum_{n=1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$$

végtelen sor?

Megoldás. Az $x \in \mathbb{R}$ paramétertől függően a következő eseteket fogjuk megkülönböztetni.

- Ha $-1 < x < 1$, azaz $x^2 < 1$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{(x^2)^n}{1+(x^4)^n} \leq (\text{mivel } x^4 \geq 0) \leq \frac{(x^2)^n}{1} = (x^2)^n.$$

  Ezért a $q := x^2 \in (0,1)$ érték mellett a $\sum\limits_{n=1} q^n$ konvergens mértani sor majorálja a vizsgált sorunkat, ami így a majoráns kritérium szerint konvergens.

- Ha $x < -1$ vagy $x > 1$, azaz $x^2 > 1$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{(x^2)^n}{1+(x^4)^n} < \frac{(x^2)^n}{(x^4)^n} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^n.$$

  Ezért a $q := 1/x^2 \in (0,1)$ érték mellett a $\sum\limits_{n=1} q^n$ konvergens mértani sor majorálja a vizsgált sorunkat, ami így a majoráns kritérium szerint konvergens.

- Ha $x = -1$ vagy $x = 1$, akkor a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{1+1} = \sum_{n=1} \frac{1}{2}$$

  divergens sort kapjuk. Azért divergens, mert a generáló sorozata nem nullsorozat.

Összefoglalva: a megadott sor $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ esetén konvergens, ha $x = 1$ vagy $x = -1$, akkor pedig divergens.

Emlékeztető. A $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ feltételt kielégítő sorozatból képzett

$$\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

váltakozó előjelű sort ***Leibniz-típusú*** sornak nevezzük.

Tétel. **(Leibniz-kritérium)** *A* $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ *Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

4. Feladat. *Az $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ paraméter milyen értékei mellett konvergens a*

$$(*) \qquad \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

végtelen sor?

Megoldás. Legyen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ rögzített és

$$a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

A d'Alembert-féle hányadoskritériumot szeretnénk alkalmazni. Ha $x = 1$, akkor a $(*)$ sor nyilván konvergens. Ha $x \neq 1$, akkor a $\sum a_n$ sor tagjai közül egyik sem 0. Nézzük, hogy az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatnak van-e határértéke:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n}\right|} = \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \cdot \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \left|\frac{1-x}{1+x}\right| =: A \ (\geq 0).$$

A szóban forgó határérték létezik, ezért a hányadoskritérium alkalmazható.

a) Mivel

$$A = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big) \quad \Longleftrightarrow \quad |1-x| < |1+x| \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1-x)^2 < (1+x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - 2x + x^2 < 1 + 2x + x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0,$$

így ha $x \in (0, +\infty)$, akkor a $(*)$ sor (abszolút) konvergens.

b) Az előzőek alapján

$$A = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1 \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big) \quad \Longleftrightarrow \quad x < 0 \ \text{ és } \ x \neq -1,$$

így ha $x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$, akkor a $(*)$ sor divergens.

c) Marad: $A = 1 \iff x = 0$. Ekkor a vizsgált sor

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-0}{1+0}\right)^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \sum_{n=1} (-1)^{n+1} b_n,$$

ahol $b_n := \frac{1}{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. Világos, hogy $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ és $(b_n) \searrow$, ti.

$$0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ezért $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} b_n$ egy Leibniz-típusú sor. Mivel $\lim(b_n) = 0$,
így ha $x = 0$, akkor a $(*)$ sor konvergens.

Összefoglalva: a $(*)$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $x \geq 0$.

Emlékeztető. (***A** p**-adikus törtek.***) Legyen $2 \le p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1]$ és $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,p-1\}$ olyan sorozat, amire

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy a $0,a_1a_2a_3\ldots_{(p)}$ felírás az α szám **p-*adikus tört alakja*** és ezt az $\alpha = 0,a_1a_2a_3\ldots_{(p)}$ egyenlőséggel fejezzük ki.

Ha $p=2$, akkor ***diadikus törtekről*** beszélünk.

A következő rekurzív algoritmus generálja a szám p-adikus tört alakját. Legyen $\alpha \in [0,1)$. Szorozzuk meg α-t p-vel. a_1 legyen a kapott szám egész része, a törtrésze egy $[0,1)$-beli szám, amivel az eljárás megismételhető. Ezzel egymás után kapjuk meg az a_2, a_3,… számjegyeket.

5. Feladat. *Adjuk meg az*

a) $\dfrac{1}{7}$, b) $0,1\overline{4}_{(6)}$

számok diadikus tört alakját!

Megoldás.

a) Alkalmazzuk az algoritmust!

$$\frac{1}{7} \overset{\times 2}{\to} \frac{2}{7} < 1 \ (a_1 = 0) \overset{\times 2}{\to} \frac{4}{7} < 1 \ (a_2 = 0) \overset{\times 2}{\to} \frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} \ (a_3 = 1) \to \frac{1}{7} \ \text{(ismétlés)}.$$

Ezért

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{001}_{(2)}.$$

Ellenőrzés:

$$0,\overline{001}_{(2)} = \left(\frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6}\right) + \left(\frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{1}{2^9}\right) + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{7}.$$

b) Először a szám $\frac{p}{q}$ alakját határozzuk meg:

$$0,1\overline{4}_{(6)} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} + \frac{4}{6^3} + \frac{4}{6^4} + \cdots = \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2}\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + +\frac{1}{6^3} \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{6} + \frac{4}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}.$$

Az algoritmust alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{3}{10} \overset{\times 2}{\to} \frac{6}{10} = \frac{3}{5} < 1 \ (a_1 = 0) \overset{\times 2}{\to} \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} > 1 \ (a_2 = 1) \to \frac{1}{5} \overset{\times 2}{\to} \frac{2}{5} < 1 \ (a_3 = 0) \overset{\times 2}{\to}$$

$$\overset{\times 2}{\to} \frac{4}{5} < 1 \ (a_4 = 0) \overset{\times 2}{\to} \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} > 1 \ (a_5 = 1) \to \frac{3}{5} \ \text{(ismétlés)}.$$

Ezért

$$0,1\overline{4}_{(6)} = 0,0\overline{1001}_{(2)}.$$

Ellenőrzés:

$$0,0\overline{1001}_{(2)} = \frac{0}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \left(\frac{1}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{1}{2^9}\right) + \cdots =$$
$$= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \frac{1}{2^8}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \cdots =$$
$$= \frac{9}{32} + \frac{1}{2^4}\cdot\frac{9}{32} + \frac{1}{2^8}\cdot\frac{9}{32} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9}{32}\left(\frac{1}{2^4}\right)^n = \frac{\frac{9}{32}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{9}{32}\cdot\frac{16}{15} = \frac{3}{10}.$$

Emlékeztető. (***Sorok Cauchy-szorzata.***) A $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok Cauchy-szorzata a

$$\sum_{n=0} c_n, \qquad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

végtelen sor.

Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor a két sor Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

6. Feladat. *A $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor önmagával vett Cauchy-szorzatának a felhasználásával igazoljuk, hogy minden $|q| < 1$ valós számra*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Megoldás. Legyen

$$\sum_{n=0} a_n := \sum_{n=0} q^n \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=0} b_n := \sum_{n=0} q^n.$$

A $\sum\limits_{n=0} q^n$ sor önmagával vett Cauchy-szorzata a $\sum\limits_{n=0} c_n$ végtelen sor, ahol

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = q^n \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

A $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor minden $q \in (-1, 1)$ esetén abszolút konvergens, és az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

Így az önmagával vett Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens, és a szorzatsor összege egyenlő a sorok összegének a szorzatával. Ezért minden $q \in (-1, 1)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big) = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Megjegyzés. Az előző eredményből azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n + \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n + \frac{1}{1-q}.$$

Ebből következik a korábban (más módszerrel) már meghatározott

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q} = \frac{1-(1-q)}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad (|q|<1)$$

sorösszeg.