Diszkrét matematika I. feladatok
Kombinatorika III

Kilencedik alkalom (2024.04.15-04.19.)

1. Hány nullára végződik a $11^{100} - 1$ szám?

2. Egy 2x12-es sakktábla hányféleképpen fedhető le 2x1-es dominókkal (melyeket vízszintesen vagy függőlegesen tehetünk le)?

3. Artúr király Kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük haragban van a közvetlenül mellette ülőkkel. Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják a királylányt. Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek a lovagok között? És ha n lovagból kell k-t kiválasztani?

4. Hányféleképpen állhat föl 10 pár a körtánchoz, ha mindenki a saját párja oldalán táncol, de a Kiss és a Nagy pár nem táncol egymás mellett?

5. Egy fagyizóban puncs, vanília, csokoládé és eper fagyit árulnak. Hányféleképpen kérhetünk 6 gombócot a) tölcsérbe (azaz számít a gombócok sorrendje); b) kehelybe (nem számít a sorrend); c) + d) mindenképp szeretnénk két gombóc puncsot?

6. **a)** Egy 1 méter sugarú, kör**vonal** alakú céltáblára lövünk (pl. darts táblán csak a külső kört célozzuk). Belövünk 4 nyilat a 4 lehető legtávolabbi pozícióba (pl. legfelső, legalsó, jobb szélső, bal szélső pontok). Bizonyítsuk, hogy egy ötödik nyilat már nem tudunk úgy belőni, hogy a távolsága mindegyik nyíltól nagyobb legyen, mint 1 méter. **b)** Igaz-e tehát, hogy öt nyilat bárhogyan belőve a fenti körvonalra biztosan lesz köztük kettő, amelyek távolsága kisebb, mint 1 méter? **c)** Egy 2m×2m-es, négyzet alakú céltáblába belövünk öt golyót. Mutassuk meg, hogy lesz kettő, melyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$ m! **d)** És hány golyót kellene belelőni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább hat, melyek páronként legfeljebb $\sqrt{2}$ méterre vannak egymástól?

7. Legfeljebb hány természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható 8-cal?

8. Egy osztályban 37 gyerek tanul. Közülük angolul 27-en, németül 15-en, mindkét nyelven 10-en beszélnek. Hány olyan gyerek van, aki sem angolul, sem németül nem tud?

9. Hány olyan 20 hosszúságú kockadobás-sorozat van, amelyben
   a) van 1-es? b) van 1-es és 2-es is?
   c) van 1-es, 2-es és 3-as is? d)* az $1, 2, \ldots, 6$ számok mindegyike szerepel?

Gyakorló feladatok

10. Az 52 lapos francia kártyában négy szín mindegyikéből 13-13 darab van, minden színből egy ász van. Négy játékosnak osztunk 13-13 lapot. Hány különböző leosztás van? Hány olyan, amikor mindenkinek van ásza? Hány olyan, amikor minden ász egyvalakinél van?

11. Hányféleképpen lehet sorba rendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

12. Hányféleképpen állíthatunk sorba n különböző magasságú embert úgy, hogy senkit ne fogjon közre két nála magasabb ember?

13. Hány olyan húszjegyű szám van, melyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel?

14. Hány szelvényre van szükség a TOTÓ-n, hogy legalább 5/13 találatot érjünk el? (A TOTÓ-n 13 focimeccsnek kell megtippelni az eredményét, melyek mindegyike háromféle lehet: 1, 2, X.)

15. Hányféleképpen tehetünk be 20 szál virágot 4 különböző színű vázába, ha a virágok…
    a) egyformák; b) egyformák, és minden vázába kell jutnia legalább egynek;
    c) különbözők; d) különbözők, és minden vázába kell jutnia legalább egynek?

Szorgalmi feladatok

13. **a)** Egy ládában 10000 piros és 100 kék golyó van. Találomra kihúzunk 100-at. Mennyi az esélye, hogy van köztük kék? **b)** Az Atlanti-óceánba beleöntünk egy liter vizet. Jól megkeverjük az óceánt, majd a túlparton kiveszünk (találomra) egy liter vizet. Mennyi az esélye, hogy az eredetileg beleöntött liter víz egyik molekuláját újra kifogtuk? **c)** Mennyi az esélye, hogy a büfében vásárolt pizzaszelet egyik szénatomja a Földön élt utolsó T. rex bal combjában is járt már? Az adatoknak utánanézni, ill. a számoláshoz Wolfram Alphát használni SZABAD! (**2 pont**)

Elméleti összefoglaló

Skatulyaelv: Ha n darab skatulyába legalább $n+1$ darab tárgyat **bárhogyan** helyezünk el, akkor **biztosan** lesz **legalább egy** olyan skatulya, melybe **legalább** két tárgy kerül.
Általánosított skatulyaelv: Ha n darab skatulyába legalább $k \cdot n + 1$ darab tárgyat **bárhogyan** helyezünk el, akkor **biztosan** lesz **legalább egy** olyan skatulya, melybe **legalább** $k+1$ tárgy kerül.
A 6.c) feladatnál tipikus helytelen megoldási kísérlet: ,,LEGROSSZABB ESETBEN" a négy sarokba lövünk $1-1$ golyót, és akkor az ötödik valamelyikhez már közel lesz...
Probléma: a golyók helyét nem mi választjuk meg, bármely elrendezés esetén teljesülnie kell az állításnak. Ha egy konkrét elrendezésre bizonyítjuk, akkor az összes lehetséges elrendezésre is bizonyítanunk kellene. Ha valaki ezt nem akarja megtenni, és azt állítja, hogy ez az elrendezés a legrosszabb eset, akkor három dolog kell: egyrészt definiálni egy mérőszámot a ,,rosszaság"-ra , ami alapján összehasonlítjuk, hogy egy eset mikor rosszabb, mint a másik; másrészt bizonyítani, hogy ha egy esetre már igazoltuk az állítást, akkor abból az állítás következik a nála kevésbé rossz esetekre; harmadrészt igazolni kell, hogy tényleg ez az eset a legrosszabb.
Ha így szólna a kérdés: "Legfeljebb hány golyót lehet belelőni úgy, hogy nem lehet köztük kettő, melyek távolsága legfeljebb másfél méter?" Ekkor mutatnunk kell egy példát arra, hogy négyet még igen, a skatulyaelv segítségével pedig be kell látnunk, hogy ötöt már nem.

Logikai szitaformula: a „Dobjuk ki a rosszat!" ötlet általánosítása, amikor a megszámolandó ,,jó" elemek helyett a ,,rossz" elemeket számoltuk meg, majd ezt kivontuk az összes elemek számából. Általánosabban: előfordulhat, hogy több szempont is van, amely szerint egy elem ,,rossz" lehet. Ekkor lehetnek olyan többszörösen rossz elemek (sorrendek, kiválasztások stb.), amelyek egyszerre többféle szempont szerint is rossznak minősülnek. Azonban ezeket a többszörösen rossz elemeket is csak egyszer akarjuk kivonni az összes elemek számából. Erre ad megoldást a szitaformula.

Legyen $H = \{$ összes elem $\}$ az alaphalmaz, $A_1 = \{$1. szempont szerint rossz elemek $\}$, $A_2 = \{$2. szempont szerint rossz elemek $\}$ stb., $A_1 \subseteq H$, $A_2 \subseteq H$,...

Fölírjuk a formulát kettő, három, illetve négy ,,rossz" halmaz esetére:

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2)| = |H| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|)+$$
$$+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|)+$$
$$+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)-$$
$$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|)+$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Megjegyzés: A szitaformula általános alakja tetszőlegesen sok rossz részhalmazra vonatkozik.