11. előadás

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 3.

Szakadási helyek és osztályozásuk

Egy függvény ***szakadási helyeit*** úgy értelmeztük, mint az értelmezési tartománynak azon pontjai, ahol a függvény nem folytonos. Ezeket a pontokat az alábbi módon szokás osztályozni.

1. Definíció. *A szakadási helyeket a következőképpen osztályozzuk:*

0. *Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény* **megszüntethető szakadási helye**, *ha*

$$\exists \lim_a f \quad \textit{véges határérték, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

1. *Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény* **elsőfajú szakadási helye** (*vagy f-nek* **ugrása van** *a-ban*), *ha*

$$\exists \lim_{a+0} f \quad \textit{és} \quad \exists \lim_{a-0} f, \quad \textit{ezek végesek, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

2. *Minden más esetben, amikor a függvény nem folytonos egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, azt mondjuk, hogy az f függvény az a helyen* **másodfajú szakadása van**.

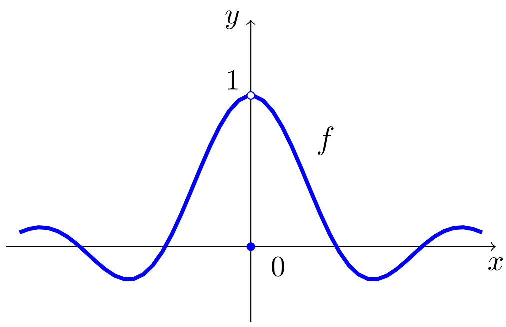
A „megszüntethető szakadás” elnevezés arra utal, hogy ebben az esetben az a pontban megváltoztatva az f függvény értékét ott folytonossá tehető, ui. ekkor az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (a \neq x \in \mathcal{D}_f) \\ \lim_a f & (x = a) \end{cases}$$

függvény már folytonos a-ban, hiszen $\widetilde{f}(a) = \lim_a f = \lim_a \widetilde{f}$.

Például az ábrán látható

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



függvénynek ***megszüntethető szakadása*** van a 0 pontban, mert

$$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0).$$

Ezért a 0 pontban felvett függvényérték megváltoztatásával kapott

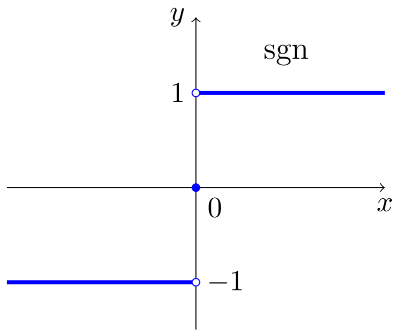
$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

függvény már folytonos a 0 pontban.

Világos, hogy $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mert f ezekben a pontokban a folytonos sin és az identitásfüggvény hányadosa.

Az ***elsőfajú szakadási*** helyeket legegyszerűbben a szignum függvénnyel tudjuk bemutatni.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \big(x \in (-\infty, 0)\big) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & \big(x \in (0, +\infty)\big). \end{cases}$$



Világos, hogy $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az $a = 0$ pont azonban a függvénynek elsőfajú szakadási helye, hiszen

$$\exists \lim_{0-0} \operatorname{sgn} = -1, \qquad \exists \lim_{0+0} \operatorname{sgn} = 1,$$

de ezek nem egyenlők.

Így nem tudjuk a szakadást „megszüntetni” a 0 pontban. Ha az $f(0)$ értéket -1-re vagy 1-re módosítjuk, akkor ezzel az egyik „oldali szakadást” megszüntetnénk. Ezzel kapcsolatosak a következő fogalmak.

2. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Az mondjuk, hogy*

- *az f függvény* **balról folytonos** *az a pontban, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ a - \delta < x \le a \colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

- *az f függvény* **jobbról folytonos** *az a pontban, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ a \le x < a + \delta \colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Világos, hogy egy függvény bal- vagy jobb oldali folytonossága a függvénynek a pont egy bal- vagy jobb oldali környezetére történő leszűkítésének a pontbeli folytonosságát jelenti.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ balról és jobbról is folytonos az } a \text{ pontban.}$$

Tekintsük például az

$$f_1(x) := \begin{cases} -1 & \big(x \in (-\infty, 0]\big) \\ 1 & \big(x \in (0, +\infty)\big) \end{cases} \qquad \text{és} \qquad f_2(x) := \begin{cases} -1 & \big(x \in (-\infty, 0)\big) \\ 1 & \big(x \in [0, +\infty)\big) \end{cases}$$

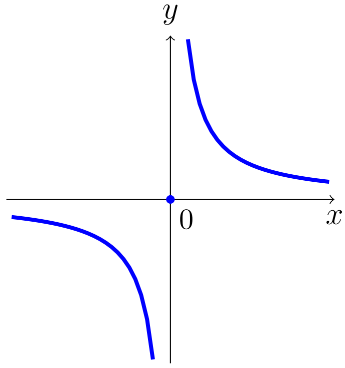
függvényeket. Az f_1 függvény balról folytonos a 0 pontban, mert a 0 minden $(-r, 0]$ baloldali környezetében $f|_{(-r,0]} \equiv -1$, ami folytonos a 0 pontban. f_1 folytonos (és így balról folytonos) minden más $a \neq 0$ pontban, hiszen ekkor az a-nak mindig van olyan környezetre, ahol f_1 állandó. Tehát f_1 balról folytonos minden értelmezési tartománybeli pontjában, amit úgy rövidíthetünk, ha csak annyit mondunk, hogy az f_1 függvény balról folytonos. Hasonlóan igazolhatjuk azt, hogy az f_2 függvény jobbról folytonos az értelmezési tartományának minden pontjában.

Megjegyzés. Az előző előadáson igazoltuk, hogy minden nyílt intervallumom értelmezett monoton függvénynek az intervallum minden pontjában létezik és véges a bal- és a jobb oldali határértéke. Ezért az ilyen függvény egy tetszőleges pontban vagy folytonos, vagy elsőfajú szakadása van. ■

Nem nehéz példát találni másodfajú szakadási helyre. Elegendő, ha a $\lim\limits_{a-0} f$ vagy a $\lim\limits_{a+0} f$ egyoldali határértékek közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik, de nem véges.

Például az

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



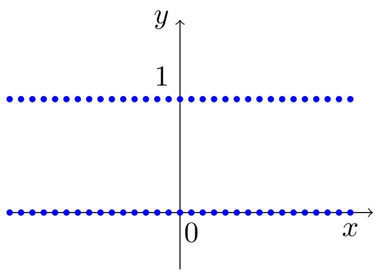
függvénynek másodfajú szakadási helye van a 0 pontban, mert a

$$\lim_{0-0} f = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{0+0} f = +\infty$$

egyoldali határértékek bár léteznek, nem végesek.

Más okokból, de az alábbi

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & \big(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big) \end{cases}$$



ún. **Dirichlet-függvény** minden $a \in \mathbb{R}$ helyen másodfajú szakadása van. Ez azért van, mert

$$\nexists \lim_{a-0} f \quad \text{és} \quad \nexists \lim_{a+0} f \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

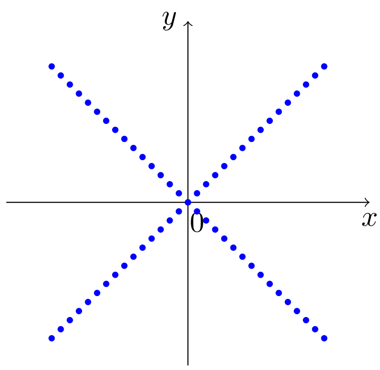
Ezt az állítást az átviteli elvvel igazoljuk. Ehhez felhasználjuk azt a tényt, hogy $\forall a \in \mathbb{R}$ és $\forall \delta > 0$ esetén az $(a-\delta, a)$ és az $(a, a+\delta)$ intervallumok végtelen sok racionális és irracionális számot tartalmaz. Ezért

$$\exists (x_n) : \mathbb{N} \to (a-\delta, a) \cap \mathbb{Q} \colon \ \lim(x_n) = a \quad \text{és} \quad \exists (y_n) : \mathbb{N} \to (a-\delta, a) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \colon \ \lim(y_n) = a.$$

Azonban $f(x_n) = 1$ és $f(y_n) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így az átviteli elv szerint $\nexists \lim\limits_{a-0} f$. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy $\nexists \lim\limits_{a+0} f$. Ezzel tehát olyan függvényt találtunk, amely intervallumon van értelmezve, de ***sehol sem folytonos***.

Egy másik hasonló példa az

$$f(x) := \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}) \\ -x & \big(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big) \end{cases}$$



függvény. Érdekes, hogy ez a függvény folytonos az $a = 0$ pontban. Valóban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ estén a $\delta := \varepsilon$ választás mellett

$$|x - 0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \big|f(x) - f(0)\big| = |x| < \delta = \varepsilon.$$

Másrészt minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pont a függvény másodfajú szakadási helye. Ezt a Dirichlet-függvénynél alkalmazott technikával lehet igazolni, ti.

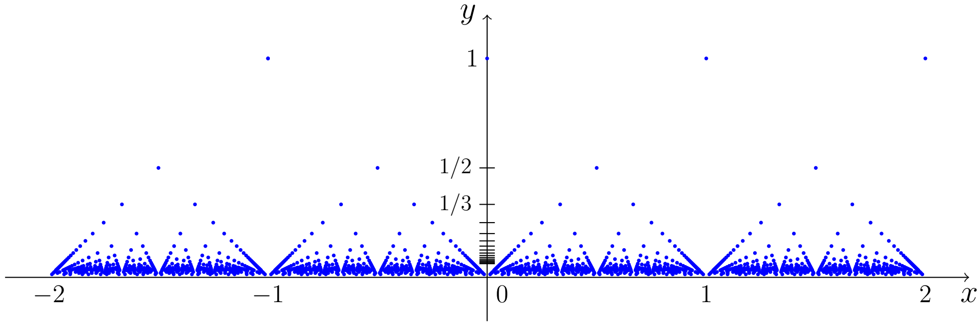
$$\exists (x_n) : \mathbb{N} \to (a-\delta, a) \cap \mathbb{Q} \colon \ \lim(x_n) = a \quad \text{és} \quad \exists (y_n) : \mathbb{N} \to (a-\delta, a) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \colon \ \lim(y_n) = a.$$

Ekkor $f(x_n) = x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ és $f(y_n) = -y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -a$, így az átviteli elv szerint, ha $a \neq -a$, azaz $a \neq 0$, akkor $\nexists \lim\limits_{a-0} f$. Hasonlóan igazolható, hogy $\nexists \lim\limits_{a+0} f$, ha $a \neq 0$.

Végül tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \left(x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N}^+,\ (p,q) = 1\right) \\ 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Ez az ún. ***a Riemann-függvény***, vagy ***Thomae-függvény***. Az alábbi ábra mutatja a függvény grafikonját:



Nézzük először a függvény néhány egyszerű tulajdonságát. Világos, hogy értékkészlete

$$\mathcal{R}_f = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots \right\} \bigcup \{0\},$$

illetve f periodikus és periódusa 1.

Ez a függvény a határérték és a folytonosság szempontjából a következő különös jelenséget mutatja:

i) A függvénynek minden $a \in \mathbb{R}$ helyen létezik határértéke és az 0 (pedig nem azonosan nulla!).

ii) A függvény minden irracionális helyen folytonos.

iii) A függvény egyetlen racionális helyen sem folytonos, ezek a pontok a függvény megszüntethető szakadási helyei.

<u>Az i) bizonyítása.</u> A periodicitás miatt feltehetjük, hogy $a \in [0, 1)$. Azt kell igazolni, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta \colon \left| f(x) - 0 \right| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Válasszunk egy $n > 1/\varepsilon$ egész számot. Az f függvény értelmezése miatt $|f(x)| < 1/n$ minden x irracionális számra, továbbá minden olyan $x = p/q$ racionális számra, amelyre $(p, q) = 1$ és $q > n$. Így $|f(x) - 0| \geq 1/n$ a $(-1, 1)$ intervallum pontjai közül kizárólag a

$$(\#) \qquad 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \ldots,\ \pm\frac{1}{n},\ \pm\frac{2}{n}, \ldots,\ \pm\frac{n-1}{n}$$

véges sok pontokban teljesül. Ezek között van olyan, amelyik a-tól különböző, és a-hoz legközelebb van. Legyen ez p_1/q_1 és legyen $\delta := \left|\frac{p_1}{q_1} - a\right|$. Az $(a - \delta, a + \delta)$ intervallumban tehát nincs a-tól különböző $(\#)$ alatti szám, ezért

$$\left| f(x) \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad 0 < |x - a| < \delta = \left| \frac{p_1}{q_1} - a \right|.$$

Ez azt jelenti, hogy adott $\varepsilon > 0$ esetén ezzel a δ értékkel $(*)$ teljesül. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért azt láttuk be, hogy

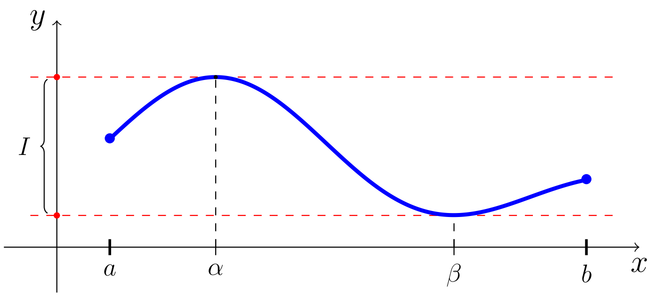
$$\forall a \in \mathbb{R}\colon \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

A ii) bizonyítása. Mivel egy a irracionális helyen $f(a) = 0$, ezért $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = f(a)$, tehát a függvény folytonos az a pontban.

A iii) bizonyítása. Mivel egy a racionális helyen $f(a) \neq 0$, de $\exists \lim_{x\to a} f(x) = 0 \neq f(a)$, ezért a racionális a pont f-nek megszüntethető szakadási helye.

Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Tekintsünk meg egy ilyen függvény grafikonjából készített ábrát!



Azt látjuk, hogy a függvény értékkészlete szintén egy I korlátos és zárt intervallum. Ebben a részben bizonyítani fogjuk, hogy ez a jelenség igaz minden ilyen típusú függvényre, nevezetesen azt igazoljuk, hogy egy $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény az $[a, b]$ intervallumon

1. korlátos,
2. felveszi a maximumát és a minimumát,
3. felvesz minden olyan értéket, ami a minimum és a maximum között van.

Fontosságuk miatt egyenként fogjuk ezeket a tulajdonságokat igazolni, illetve a velük kapcsolatos fogalmakat és jelenségeket tanulmányozni.

Feltesszük tehát, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < +\infty$, és $f \in C[a, b]$. Emlékeztetünk arra, hogy a $C[a, b]$ szimbólummal jelöltük a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmazát. A korábbi definíciónk szerint ez azt jelenti, hogy

$$f \in C[a,b] \qquad \iff \qquad \begin{cases} f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ [a,b] \subset \mathcal{D}_f, \\ \forall x \in (a,b)\colon f \in C\{x\}, \\ f \text{ jobbról folytonos } a\text{-ban}, \\ f \text{ balról folytonos } b\text{-ben}. \end{cases}$$

Vigyázat! $f \in C[a, b]$ azt jelenti, hogy az $f|_{[a,b]}$ függvény folytonos, ami *nem jelenti* azt, hogy az eredeti f függvény az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonos.

Először az 1. tulajdonságot igazoljuk.

2. Tétel. *Ha $f \in C[a,b]$, akkor f korlátos az $[a,b]$ intervallumon.*

Bizonyítás. Az f függvény korlátos $[a,b]$-n, ha

$$\exists K > 0,\ \forall x \in [a,b]\colon \big|f(x)\big| \le K.$$

Az állítást indirekt módon bizonyítjuk: tegyük fel, hogy f nem korlátos $[a,b]$-n, azaz

$$\forall K > 0\text{-hoz } \exists x \in [a,b]\colon \big|f(x)\big| > K.$$

Ekkor a $K = n \in \mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists x_n \in [a,b]\colon \big|f(x_n)\big| > n.$$

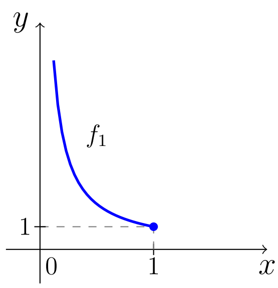
Az $\big(f(x_n)\big)$ sorozat tehát nem korlátos.

Mivel $x_n \in [a,b]$ korlátos sorozat, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint létezik ennek egy (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Legyen $\alpha := \lim(x_{n_k})$. Ekkor $\alpha \in [a,b]$. Ugyanakkor $f \in C\{\alpha\}$. Így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint létezik a

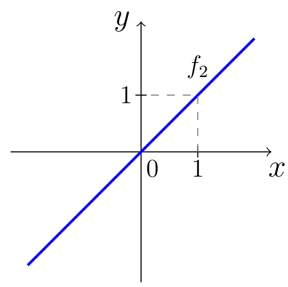
$$\lim\big(f(x_{n_k})\big) = f(\alpha)$$

véges határérték. Ebből következik az, hogy az $\big(f(x_{n_k})\big)$ sorozat korlátos, ami ellentmond $(*)$-nak. Ezzel a tétel állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A tételben lényeges feltétel az, hogy az f függvény egy *korlátos* és *zárt* intervallumon folytonos. Bármelyik feltételt elhagyva a tétel állítása nem lesz igaz. Például az alábbi függvények nem korlátosak:



$f_1(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (0,1])$



$f_2(x) := x \quad (x \in \mathbb{R})$

Az $f\big[[a,b]\big]$ képhalmaz korlátosságából következik, hogy

$$\inf\big\{f(x) \bigm| a \le x \le b\big\} \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \sup\big\{f(x) \bigm| a \le x \le b\big\} \in \mathbb{R},$$

de egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy van két $[a,b]$ intervallumbeli elem, ahol a függvény ezt a infimumot és szuprémumot felveszi. ■

Most rátérünk a 2. tulajdonság vizsgálatára. Az analízis alkalmazásai gyakran vezetnek ***szélsőérték-feladatokra***, amikor is egy valós értékű függvény legnagyobb, illetve legkisebb helyettesítési értékét keressük (ha egyáltalán ilyenek léteznek). Ezzel a feladattal kapcsolatosak következő fogalmak.

3. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathcal{D}_f$.*

1. *Azt mondjuk, hogy f-nek az α pontban* **abszolút maximuma van** (*vagy másképpen fogalmazva* **α abszolút maximumhelye f-nek**), *ha*
$$f(x) \le f(\alpha) \qquad (x \in \mathcal{D}_f).$$
Ekkor az $f(\alpha)$ függvényértéket f **abszolút maximumának** *nevezzük.*

2. *Ha*
$$f(\alpha) \le f(x) \qquad (x \in \mathcal{D}_f),$$
akkor f-nek α-ban **abszolút minimuma van** (*az* **α pont abszolút minimumhelye f-nek**) *és $f(\alpha)$ az f függvénynek* **abszolút minimuma**.

3. *Az α* **abszolút szélsőértékhelye** *f-nek (az $f(\alpha)$ függvényérték* **abszolút szélsőértéke** *f-nek), ha f-nek α-ban abszolút maximuma vagy abszolút minimuma van.*

Megjegyzés. Egy függvénynek több abszolút maximum-, illetve minimumhelye is lehet. ■

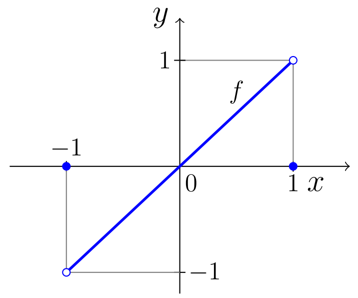
3. Tétel (Weierstrass tétele). *Egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye, azaz*
$$f \in C[a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \alpha, \beta \in [a,b],\ \forall x \in [a,b]\colon f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha).$$

Bizonyítás. Már igazoltuk, hogy ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor f korlátos $[a,b]$-n. Ezért
$$m := \inf\Big\{ f(x) \ \Big|\ x \in [a,b] \Big\} \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad M := \sup\Big\{ f(x) \ \Big|\ x \in [a,b] \Big\} \in \mathbb{R}.$$
Igazoljuk, hogy az f függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists \alpha \in [a,b]\colon f(\alpha) = M$.
A szuprémum definíciójából következik, hogy
$$\forall n \in \mathbb{N}^+\text{-hez } \exists y_n \in \mathcal{R}_f\colon M - \frac{1}{n} < y_n \le M.$$
Viszont:
$$y_n \in \mathcal{R}_f \ (n \in \mathbb{N}^+) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+\text{-hez } \exists x_n \in [a,b]\colon f(x_n) = y_n.$$
Az így értelmezett $(x_n) : \mathbb{N}^+ \to [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt a sorozatnak van (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Jelölje $\alpha := \lim(x_{n_k})$. Ekkor $\alpha \in [a,b]$. Ugyanakkor $f \in C\{\alpha\}$. Így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint
$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha).$$
Mivel minden n_k-ra
$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = y_{n_k} \le M$$
teljesül, ezért $\lim\limits_{k \to +\infty} y_{n_k} = M$, így $f(\alpha) = M$. Megmutattuk tehát azt, hogy α az f függvénynek egy maximumhelye. Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése.

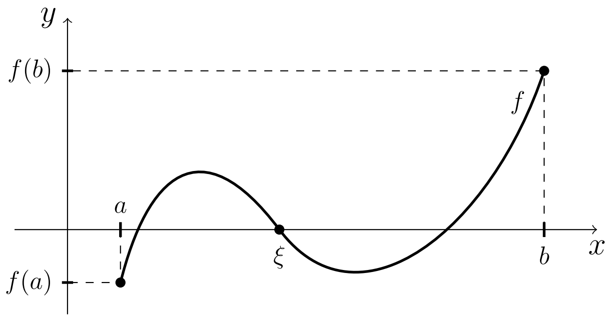
Megjegyzés. A folytonosság lényeges feltétel. Például az

$$f(x) := \begin{cases} x & \big(x \in (-1,1)\big) \\ 0 & (x = \pm 1) \end{cases}$$

korlátos, de nem folytonos függvénynek nincsenek abszolút szélsőértékei, pedig a $[-1,1]$ korlátos és zárt intervallumon van értelmezve. ■



A 3. tulajdonság vizsgálatát egy egyszerűbb eset tanulmányozásával kezdjük. Tegyük fel, hogy $f \in C[a,b]$ és f a két végpontban különböző előjelű értékeket vesz fel. A szemléletünk alapján ekkor „nyilvánvaló”, hogy f grafikonja metszi az x tengelyt, vagyis f-nek az $[a,b]$ intervallumban van zérushelye. Ezt szemlélteti a következő ábra abban az esetben, amikor $f(a) < 0 < f(b)$:



Az ábra azt is illusztrálja, hogy f-nek az intervallumban több zérushelye is lehet, és ezek az intervallumban bárhol elhelyezkedhetnek.

A szóban forgó állítást Bolzano-tételnek fogjuk nevezni.

4. Tétel (Bolzano tétele). *Ha egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény az intervallum két végpontjában különböző előjelű, akkor a függvénynek legalább egy zérushelye van, azaz*

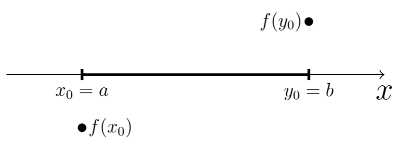
$$f \in C[a,b] \quad \textit{és} \quad f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \xi \in (a,b) \colon f(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. Az állítás bizonyításának az alapja az ún. ***Bolzano-féle felezési eljárás***. Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

Legyen

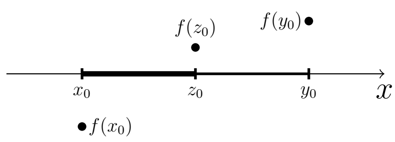
$$[x_0, y_0] := [a,b]$$



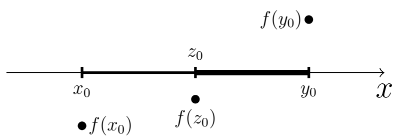
Az intervallumot megfelezzük. Legyen $z_0 := \dfrac{x_0 + y_0}{2}$.

Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ zérushelye f-nek.
2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen $[x_1, y_1] := [x_0, z_0]$.



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen $[x_1, y_1] := [z_0, y_0]$



Ha $f(z_0) \neq 0$, akkor olyan $[x_1, y_1]$ intervallumot sikerült megadni, amire

$$f(x_1) < 0 < f(y_1)$$

teljesül, ezért átveheti az $[x_0, y_0]$ intervallum szerepét, de a hossza ennek fele, azaz $\frac{b-a}{2}$.

Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is ugyanaz a három eset lehetséges. Ha a z_1 felezőpontban $f(z_1) \neq 0$, akkor az intervallumból azt a felét tartjuk meg, amelynek két végpontjában f különböző előjelű. Ez lesz az $[x_2, y_2]$ intervallum, amivel az eljárás megismételhető.

Folytassuk az eljárást! Ekkor vagy véges sok lépésben találunk olyan ξ-t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben olyan $[x_n, y_n]$ intervallumsorozatot kapunk, amire minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$,

ii) $f(x_n) < 0 \quad \text{és} \quad f(y_n) > 0$,

iii) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

A valós számok Cantor-tulajdonsága szerint az i) tulajdonságból következik, hogy a fenti egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres. A iii) tulajdonságból következik, hogy ez a metszet egyelemű halmaz, hiszen minden eleme x_n és y_n között található. Jelölje ξ a metszet egyedüli elemét, azaz

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n] = \{\xi\}.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Mivel f folytonos ξ-ben, ezért az átvételi elv szerint

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

De a ii) tulajdonságból következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to+\infty} f(y_n),$$

azaz $f(\xi) \leq 0$ és $f(\xi) \geq 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.

A bizonyítás hasonló, ha $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$.

Megjegyzés. A Bolzano-tétel bizonyításában szereplő intervallumfelezési eljárás azért is fontos, mert olyan numerikus módszert biztosít, amivel közelítőleg meg tudjuk keresni egy intervallumon folytonos f függvény egyik zérushelyét, vagyis az $f(x) = 0$ egyenletnek egy megoldását. Ehhez először két pontot kell találni, ahol a függvény előjelet vált, és ezután addig alkalmazunk az eljárást, amíg a zérushelyet tartalmazó $[x_n, y_n]$ intervallum hossza kisebb lesz, mint egy előre megadott hibakorlát. Ekkor az intervallum bármely értéke megfelelő közelítése lesz a keresett zérushelynek. ■

A Bolzano-tétel a következő módon általánosítható.

5. Tétel (A Bolzano–Darboux-tétel). *Ha egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értéke az intervallum két végpontjában különböző, akkor a függvény minden értéket felvesz, ami e két függvényérték között van, azaz*

$$f \in C[a,b] \quad \textit{és} \quad f(a) < f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall c \in \big(f(a), f(b)\big)\textit{-hez } \exists \xi \in (a,b)\colon\ f(\xi) = c,$$

illetve

$$f \in C[a,b] \quad \textit{és} \quad f(a) > f(b) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall c \in \big(f(b), f(a)\big)\textit{-hez } \exists \xi \in (a,b)\colon\ f(\xi) = c.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Bolzano-tételt az

$$\varphi(x) := f(x) - c \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

függvényre.

A Bolzano–Darboux-tételben szeplő tulajdonságot célszerű tetszőleges intervallumra általánosítani. Intervallumon mindig nem üres és nem egyetlen pontból álló $\mathbb{R}$-beli halmazt értünk, ami tartalmazza két $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem közé eső (vagy velük egyenlő) összes értékét. A továbbiakban gyakran használt „$I \subset \mathbb{R}$ (tetszőleges) intervallum" kijelentésen (hacsak mást nem mondunk) azt értjük, hogy I korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt intervallum.

4. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* **Darboux-tulajdonságú az *I* intervallumon***, ha minden $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz (a,b)-ben.*

A Bolzano–Darboux-tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény Darboux-tulajdonságú $[a,b]$-n.* Az előzőek felhasználásával igazolhatók a következő állítások:

6. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos I-n. Ekkor*

1. *f Darboux-tulajdonságú I-n.*
2. *$\mathcal{R}_f$ vagy egyelemű halmaz vagy intervallum.*

Bizonyítás.

1. Minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén $f \in C[a,b]$. Ezért az állítás azonnal következik a Bolzano–Darboux-tételből.
2. Legyen $m := \inf \mathcal{R}_f$ és $M := \sup \mathcal{R}_f$. Ha $m = M$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \{m\}$.

   Ha $m < M$, akkor először azt látjuk be, hogy $(m, M) \subset \mathcal{R}_f$.

Vegyünk egy tetszőleges $c \in (m, M)$ számot. Ekkor a szuprémum, illetve az infimum tulajdonságai alapján vannak olyan $a, b \in I$ helyek, amelyekre

$$f(a) < c < f(b)$$

teljesül. Nyilván $a \neq b$, és azt is feltehetjük, hogy $a < b$. Az 1. pontban igazoltuk, hogy f Darboux-tulajdonságú I-n, ezért

$$\exists \xi \in (a, b) \colon f(\xi) = c \qquad \Longrightarrow \qquad c \in \mathcal{R}_f.$$

Így az $(m, M) \subset \mathcal{R}_f$ állítást igazoltuk.

Ebből a tétel állítása már következik. Valóban,

- ha $m, M \in \mathcal{R}_f$, akkor $\mathcal{R}_f = [m, M]$,
- ha $m, M \notin \mathcal{R}_f$, akkor $\mathcal{R}_f = (m, M)$,
- ha $m \in \mathcal{R}_f$ és $M \notin \mathcal{R}_f$, akkor $\mathcal{R}_f = [m, M)$,
- ha $m \notin \mathcal{R}_f$ és $M \in \mathcal{R}_f$, akkor $\mathcal{R}_f = (m, M]$.

Megjegyzések.

1. A tétel az intervallumon folytonos függvényekről alkotott szemléletes képünket (miszerint az ilyen függvények grafikonját a ceruza felemelése nélkül megrajzolhatjuk) támasztja alá.

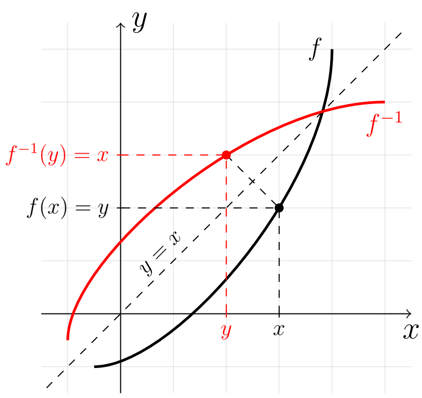
2. Egy intervallumon folytonos függvény tehát szükségképpen Darboux-tulajdonságú. Konstruálható azonban olyan Darboux-tulajdonságú függvény is, amelyik egyetlen pontban sem folytonos.

Az inverz függvény folytonossága

Emlékeztetünk arra, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *invertálható*, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékek tartoznak, azaz minden $y \in \mathcal{R}_f$ elemhez létezik egyetlen olyan $x \in \mathcal{D}_f$ elem, amelyre $f(x) = y$ teljesül. Ebben az esetben f *inverz függvénye*:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre} \quad f(x) = y.$$

Tegyük fel, hogy az f valós-valós függvény invertálható és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordinátarendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy *f és f^{-1} – geometriailag – egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan.*

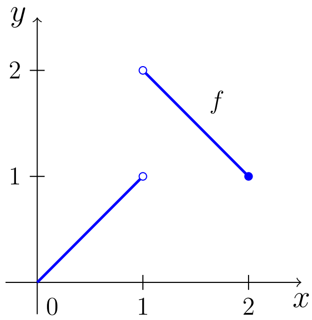


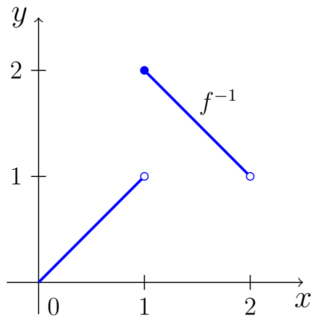
A következő egyszerű példa azt mutatja, hogy az f függvény folytonossága nem „öröklődik” az f^{-1} inverz függvényre.

Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 3 - x & (1 < x \le 2) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 3 - x & (1 \le x < 2). \end{cases}$$

A függvények grafikonjából látható, hogy ezek a függvények valóban egymás inverzei, hiszen grafikonjuk egymás tükörképei az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozóan.





A grafikonokból látható, hogy

- f folytonos a $\mathcal{D}_f = [0, 2] \setminus \{1\}$ halmaz minden pontjában,
- f invertálható és $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$,
- $f^{-1} \notin C\{1\}$.

A következő tétel azt állítja, hogy ha feltesszük, hogy f invertálható, az értelmezési tartománya korlátos és zárt intervallum, továbbá f folytonos $\mathcal{D}_f$ minden pontjában, akkor az inverz függvénye is folytonos $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ minden pontjában, ami az $\mathcal{R}_f$ halmazzal egyenlő.

7. Tétel (Az inverz függvény folytonossága). *Minden korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos és invertálható függvény esetében az inverz függvény folytonos, azaz*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \ f \in C[a, b], \ \exists f^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1} \in C(\mathcal{R}_f).$$

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to [a, b]$ függvény nem folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon, azaz

$$\exists y_0 \in \mathcal{R}_f \colon f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elvből következik, hogy

$$\exists (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{R}_f \colon \lim_{n \to +\infty} y_n = y_0, \qquad \text{de} \qquad \lim_{n \to +\infty} f^{-1}(y_n) \ne f^{-1}(y_0).$$

Legyen

$$x_n := f^{-1}(y_n) \quad \big(\text{azaz } f(x_n) = y_n\big) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
$$x_0 := f^{-1}(y_0) \quad \big(\text{azaz } f(x_0) = y_0\big).$$

Ekkor az indirekt feltétel alapján

$$\lim(x_n) \ne x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\delta > 0, \quad \text{hogy az} \quad \mathcal{N} := \Big\{ n \in \mathbb{N} \;\Big|\; |x_n - x_0| \geq \delta \Big\} \quad \text{halmaz végtelen.}$$

Vegyük egy $(\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ szigorúan monoton növekvő indexsorozatot. Az $\mathcal{N}$ értelmezése miatt az (x_{ν_n}) részsorozat csak olyan tagokat tart meg az eredeti (x_n) sorozatból, amire

$$(*) \qquad |x_{\nu_n} - x_0| \geq \delta \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

teljesül. Az $(x_{\nu_n}) : \mathbb{N} \to [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy van $(x_{\nu_{\mu_n}})$ konvergens részsorozata, ami az eredeti (x_n)-nek is részsorozata, hiszen

$$x_{\nu_{\mu_n}} = x_{(\nu\circ\mu)_n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban azt a részsorozatot (x_{n_k})-val fogjuk jelölni. Legyen $\alpha := \lim(x_{n_k})$. Ekkor $\alpha \in [a,b]$, és $(*)$ miatt

$$(\triangle) \qquad \alpha \neq x_0.$$

Mivel $f \in C\{\alpha\}$ és $\lim(x_{n_k}) = \alpha$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$\lim(y_{n_k}) = \lim\big(f(x_{n_k})\big) = f(\alpha).$$

Az $y_n = f(x_n)$ tagokból álló sorozat határértéke $y_0 = f(x_0)$, és ez igaz minden részsorozatára is, következésképpen

$$\lim(y_{n_k}) = f(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy $f(\alpha) = f(x_0)$. Az f függvény azonban invertálható, ezért $\alpha = x_0$, ami ellentmondásban van a $(\triangle)$ relációval.

Megjegyzések.

1. A Darboux-tulajdonságból következik, hogy ha $f : I \to \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett folytonos és invertálható függvény, akkor f szigorúan monoton. Valóban, ha f nem szigorúan monoton, de invertálható, azaz mindig különböző értékeket vesz fel, akkor $\exists a, b, c \in I$, $a < c < b$, hogy

   $$f(a) < f(c) \quad \text{és} \quad f(b) < f(c) \qquad \text{vagy} \qquad f(c) < f(a) \quad \text{és} \quad f(c) < f(b).$$

   Ekkor $\exists \eta \in \mathbb{R}$, hogy

   $$\eta \in \big(f(a), f(c)\big) \cap \big(f(b), f(c)\big) \qquad \text{vagy} \qquad \eta \in \big(f(c), f(a)\big) \cap \big(f(c), f(b)\big).$$

   Mivel az f intervallumon értelmezett folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak, így mindkét esetben $\exists \xi_1 \in (a,c)\colon f(\xi_1) = \eta$ és $\exists \xi_2 \in (c,b)\colon f(\xi_2) = \eta$, azaz $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, de $\xi_1 \neq \xi_2$, ami ellentmond az invertálhatóságnak.

   Az előbbiekből következik, hogy a tétel feltételeit kielégítő függvény csak szigorúan monoton lehet.

2. Ha $f : I \to \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett folytonos függvény szigorúan monoton, akkor a 6. Tétel szerint $\mathcal{R}_f$ szintén intervallum. Ha $y \in \operatorname{int} \mathcal{R}_f$, akkor $x = f^{-1}(y) \in \operatorname{int} I$. Ekkor $\exists a, b \in I\colon a < x < b$. Legyen $g := f|_{[a,b]}$. Ekkor g kielégíti a 7. Tétel feltételeit, és így $g^{-1} \in C\{\mathcal{R}_g\}$. Másrészt $\mathcal{R}_g$ olyan korlátos és zárt intervallum, amire $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{R}_f$ teljesül, ezért $g^{-1}(z) = f^{-1}(z)$ $(z \in \mathcal{R}_g)$. Mivel $y \in \operatorname{int} \mathcal{R}_g$ és $g^{-1} \in C\{y\}$, így $f^{-1} \in C\{y\}$.

Hasonlóan igazolható f^{-1} folytonosságát $\mathcal{R}_f$ lehetséges határpontjaiban. Ezért összefoglalva a következő állítás igaz:

Minden intervallumon értelmezett folytonos és invertálható függvény esetében az inverz függvény szintén folytonos függvény.