Feuille 5: géométrie affine

Exercice 1. On considère le plan affine canonique $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$. On rappelle qu'une droite affine est un sous-espace affine de dimension 1.

1. Rappeler quelle est sa structure affine.
2. On choisit le point $X = (1,1)$ comme origine et on note $\tilde{+}$ l'addition de la structure vectorielle sur $\mathcal{P}$ d'origine X et $+$ pour celle usuelle d'origine $(0,0)$.
   (a) Quel est le neutre de $\tilde{+}$? Que vaut $X + X$?
   (b) Que vaut $0\tilde{+}0$? Soit $A = (1,0)$. Que vaut $3A$ pour la structure vectorielle d'origine X ?
3. Démontrer que si $\mathcal{D}$ est une droite affine de $\mathcal{P}$, alors il existe des réels a, b, c avec (a,b) tels que
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, ax + by = c.\}$$
4. A quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ a-t-on que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, ax + by = c.\}$ est une droite affine ? Vectorielle ?
5. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by = c$. Pour quelles valeurs de (a', b', c') a-t-on que $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a'x + b'y = c'.\}$?
6. Soit M, N deux points distincts dans $\mathcal{P}$. Démontrer qu'il existe une unique droite affine qui passe par M et N. Déterminer une de ses équations pour $M = X$ et $N = X\tilde{+}X$.
7. On note $T = \{t_u,\, u \in \mathbb{R}^2\}$ le groupe des translations de $\mathcal{P}$.
   (a) Démontrer que l'image d'une droite affine $\mathcal{D}$ par une translation t_u est une droite affine (notée $t_u(\mathcal{D})$) et en déduire une action de T sur l'ensemble des droites affines de $\mathcal{P}$.
   (b) Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines de $\mathcal{P}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un vecteur u tel que $\mathcal{D}'$ et $t_u(\mathcal{D})$.
   (c) Soit $\mathcal{D}_0$ la droite d'équation $x - y = 1$. Déterminer $\mathrm{Stab}_{\mathcal{D}_0}$ ainsi que l'orbite de $\mathcal{D}_0$ pour l'action de T.

Exercice 2. On considère l'espace affine canonique $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On considère $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues avec second membre.
   (a) Démontrer que les solutions du système forment un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Est-ce que les solutions du système forment un sous-espace linéaire ?
   (c) Quelle est le type de sous-espace affines formé par les solutions (selon M) ?
2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3. Démontrer que $\mathcal{E}$ est affinement isomorphe à l'espace affine $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ deux plans affines dans $\mathcal{E}$ de direction P_1 et P_2. Déterminer la nature possible de l'intersection $P_1 \cap P_2$.

Exercice 3. On considère l'ensemble

$$X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x) + 1\}$$

.

1. Pourquoi l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un espace affine ?
2. Démontrer que X est un (sous-)espace affine et déterminer un point et sa direction.

Exercice 4. Soit $(\mathcal{E}, E, *)$ un espace affine de dimension finie. On rappelle que le centre d'un groupe est le sous-ensemble de ses éléments qui commutent avec tous les autres.

1. Quel est l'espace des isomorphismes affines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui commutent avec les translations ?
2. Démontrer que le centre de $GL(E)$ est constitué des homothéties $x \mapsto \lambda x$ (avec $\lambda \neq 0$).
3. Quel est le centre du groupe affine $\mathbf{Aff}(\mathcal{E})$?