Contrôle continu à faire à la maison

Exercice 1 (Groupes à isomorphismes près)**.** . On admettra le théorème de Cauchy suivant: *si G est un groupe de cardinal fini n, alors, pour tout diviseur premier p de n, il existe un élément d'ordre p dans G.*

1. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 11. On justifiera soigneusement la réponse.
2. Vérifier l'énoncé du théorème de Cauchy pour le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
3. Soit $(G, *)$ un groupe *abélien* de cardinal 14.
   (a) Démontrer qu'il existe un élément a d'ordre 7 et un élément $b \neq a$ d'ordre 2.
   (b) Calculer l'ordre de l'élément $a * b$ dans G (Justifier *soigneusement* la réponse).
   (c) En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$. Qu'est-ce qui ne marche pas dans le raisonnement précédent si G n'est pas supposé abélien ?

Exercice 2. 1. Parmi les éléments de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, lesquels engendrent $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?

2. Démontrer que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (indication: on pourra utiliser l'ordre des éléments).
3. Existe-t-il $\sigma \in S_3$ tel que $S_3 = \langle \sigma \rangle$? (Justifier la réponse bien-sûr).

Exercice 3 (Ordre, morphismes.)**.** 1. Donner deux groupes commutatifs non-isomorphes de cardinal 20. On répondra **impérativement** en donnant une justification.

2. Donner deux morphismes de groupes **distincts** de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. *Justifier*
3. Donner deux morphismes de groupes **distincts** de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ (Justifier la réponse !).

Exercice 4. On appelle $X = \{D_c, c \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des droites D_c d'équation $x + y = c$ (avec c un réel).

1. Montrer que l'application $\mathbb{R} \times X \to X$ qui envoie $(\lambda, D_c = \{(x, y), x + y = c\})$ sur $\lambda \cdot D = \{(x, y), x + y = c + \lambda\}$ est une action du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur X.
2. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le stabilisateur Stab_{D_t}.
3. Déterminer l'orbite de D_0.

Exercice 5. On considère $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et l'application $\rho : \mathbb{R}^* \times X \to X$ définie par $(\lambda, f) \mapsto \big(t \mapsto f(\lambda t)\big)$.

1. Démontrer que ρ est une action à gauche de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur X.
2. Déterminer $\mathrm{Fix}(-1)$.
3. Justifier qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\mathrm{Stab}_f =]-\infty, 0[$ (on pourra utiliser les propriétés d'un stabilisateur).
4. Construire une fonction f telle que Stab_f est $]0, +\infty[$.