CONTRÔLE CONTINU

NOM, Prénom :		

Question 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Prouver que l'ensemble U_n des racines n-ièmes de l'unité forme un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

(b) Quels sont les ordres possibles des éléments de U_n ?

(c) Donner (sans justification) un élément d'ordre 4 et un élément d'ordre 6 de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Question 2.

Soient G et G' deux groupes, et f une application de G dans G'.

(a) Rappeler la définition du fait que f est un morphisme de groupes.

(b) Donner (sans justification) deux morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

(c) Montrer que l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ qui à un entier n associe la classe de $3n$ (que vous pourrez noter $\mathcal{C}_{3n}$ ou $[3n]$ ou $\overline{3n}$) est un morphisme de groupes.

(d) Montrer dans l'exemple ci-dessus que la classe de 1 a un antécédent par l'application f.

Question 3.

Soit $(G, *)$ un groupe et X un ensemble.

(a) Donner la définition d'une action à gauche de G sur X.

On considère maintenant $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $X = \mathbb{C}$. On définit l'application $\varphi : G \times X \to X$ définie par $\varphi(n, z) = in + z$.

(b) Démontrer que cette application définit une action à gauche.

(c) Pour $z \in \mathbb{C}$, donner son stabilisateur et son orbite.

(d) Dessiner l'orbite du point $z = 1$.