Devoir Maison 1

Exercice 1. Soit H un sous-ensemble d'un groupe G. On considère la relation

$$x\mathcal{R}_H y \iff y^{-1}x \in H.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}_H$ est réflexive si et seulement si l'unité e de G est dans H.
2. Démontrer que $\mathcal{R}_H$ est symétrique si et seulement si pour tout $h \in H$, on a $h^{-1} \in H$.
3. Démontrer que $\mathcal{R}_H$ est transitive si et seulement si $\forall\, h, k \in H$ on a que $h \cdot k \in H$.

En déduire que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence si et seulement si H est un sous-groupe de G.

Exercice 2. Soit $n > 1$ un entier. On veut donner une formule pour l'ordre d'un élément dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On considère donc le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec sa loi $\overline{+}$ usuelle. On notera $[i]_n$ la classe d'un entier i dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On note $\mathrm{ord}([i]_n)$ l'ordre de $[i]_n$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

1. Démontrer qu'il existe un entier k tel que
$$i\,\mathrm{ord}([i]_n) = kn.$$
2. En déduire que $\mathrm{ord}([i]_n)$ est divisible par $\dfrac{n}{i \wedge n}$ (indic: utiliser le lemme de Gauss).
3. Démontrer que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a que
$$\mathrm{ord}([i]_n) \;=\; \frac{n}{i \wedge n}$$

Exercice 3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice de $2x2$ suivante : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On identifie $\mathbb{R}^2$ avec des vecteurs colonnes et on considère l'application $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par le produit matriciel $r(\theta, X) = R_\theta\, X$.

1. Démontrer que r est une action du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le stabilisateur de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et celui de 0.
3. Démontrer que l'orbite de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour cette action est le sous-ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, a^2 + b^2 = 1 \right\}$.
4. Démontrer que l'orbite de $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\left\{ \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$. et en déduire que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont dans la même orbite si et seulement si $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$.
5. Décrire géométriquement la collection des orbites de $\mathbb{R}^2$ pour cette action.