FEUILLE 1: QUELQUES EXEMPLES DE GROUPES ET APPLICATION À $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exemples de Groupes

Exercice 1. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}, \mathbb{C}^*, S^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ munis des lois $+$ ou $\times$ sont-ils des groupes ? Si oui, sont-ils abéliens ?

Exercice 2. On considère les ensemble suivants:

1. E est l'ensemble de toutes les applications $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$;
2. F est le sous-ensemble de E constitué des bijections;
3. G est le sous-ensemble de E constitué des applications telles que $f(1) = 1$;
4. G' est le sous-ensemble de E constitué des applications telles que $f(1) = 3$;
5. $H = G \cap F$.

Ces ensembles munis de la composition sont-ils des groupes ? Si oui, sont-ils abéliens ?

Exercice 3. Soit X un ensemble et $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, on définit l'application $f + g$ par

$$\forall x \in X, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Montrer que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ muni de la loi $+$ est un groupe abélien.

Exercice 4. Soient G, H deux groupes. On munit $G \times H$ de l'opération

$$\forall g, g' \in G, \forall h, h' \in H, (g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh').$$

Montrer que $G \times H$ muni de la loi $\cdot$ est un groupe. On l'appelle le *groupe produit*.

Exercice 5. Déterminer si les ensembles et lois suivantes forment un groupe. Et si oui, s'il est abélien.

1. L'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n muni de l'addition.
2. L'ensemble $M_n(\mathbb{R}) - \{0\}$ muni de la multiplication des matrices.
3. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant non-nul muni de la multiplication des matrices.
4. l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant non-nul muni de l'addition des matrices.
5. L'ensemble des matrices de déterminant 1 muni de la multiplcation.

Exercice 6. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ muni de la loi de composition des applications est-il un groupe ?

Exercice 7. On considère l'ensemble des applications bijectives $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui préservent le bord du carré : $f(\partial[0,1]^2) = \partial[0,1]^2$.

1. Démontrer que c'est un groupe pour la loi de compositon des applications.
2. En considérant des rotation et symétries, donner des exemples d'éléments de ce groupe.
3. En déduire que ce groupe n'est pas abélien.

Quelques propriétés

Exercice 8. Soit G un groupe.

1. Montrer que G est abélien si et seulement si pour tout $a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2 b^2$.
2. On suppose que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Exercice 9. Soit H un sous-ensemble d'un groupe G. On considère la relation

$$x \mathcal{R}_H y \iff y^{-1} x \in H.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}_H$ est réflexive si et seulement si l'unité e de G est dans H.
2. Démontrer que $\mathcal{R}_H$ est symétrique si et seulement si pour tout $h \in H$, on a $h^{-1} \in H$.
3. Démontrer que $\mathcal{R}_H$ est transitive si et seulement si $\forall\ h, k \in H$ on a que $h \cdot k \in H$.

En déduire que $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence si et seulement si H est un sous-groupe de G.

Cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 10. Soit H un sous-groupe d'un groupe *abélien* G muni de la relation d'équivalence $\mathcal{R}_H$ de l'exercice précédent. On note G/H l'ensemble quotient de G par la relation $\mathcal{R}_H$.

1. Démontrer que pour tout $g \in G$, la classe d'équivalence C_g de g est égale à $g \cdot H$. À quelle condition $C_x = C_y$?
2. Démontrer la règle $C_x \star C_y := C_{x \cdot y}$ est bien définie et munit l'ensemble G/H des classes d'équivalence d'une structure de groupe abélien.
3. Démontrer que l'application quotient $g \mapsto C_g$ est un morphisme de groupes $G \to G/H$ et est surjectif. Quel est son noyau ?
4. Soit $d \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $d\mathbb{Z}$ muni de la loi d'addition des entiers relatifs est un groupe et en déduire une structure de groupe abélien sur $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. A quelle structure vue en arithmétique cette structure de groupe correspond-elle ?

Exercice 11. Écrire les tables d'additions de $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 12. Comparer les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.