Números perfectos y amigos

Juan Hernández Sánchez

May 2019

1 Números Perfectos y amigos

1.1 Definición de números perfectos

Antes de adentrarnos en su historia empecemos definiendo los conceptos de números superabundantes y deficientes, que más tarde llevarán a la concepción de números perfectos. Que un número sea superabundante está determinado por los divisores propios positivos del mismo, por ejemplo, tomamos el número 30 con divisores 1, 2, 3, 5, 6, 10 y 15. La suma de sus divisores propios es 42, por lo que decimos que el número 30 es superabundante, ya que la suma de sus divisores propios es mayor que 30. De esta manera ya se tiene una idea de lo que significa que un número sea deficiente; un número deficiente es aquel cuya suma de sus divisores propios es menor que él mismo. Un ejemplo de un número deficiente es 26, con divisores 1, 2 y 13 cuya suma es 16. Un número que no es deficiente ni superabundante será perfecto, es decir que la suma de sus divisores propios no es otro que él mismo. Ejemplos de estos números que parecen haberse conocido desde la antigüedad son:

$$\begin{aligned}
6 &= 1+2+3 \\
28 &= 1+2+4+7+14 \\
496 &= 1+2+4+8+16+31+62+124+248 \\
8128 &= 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064
\end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Historia de los números perfectos

Los números perfectos se remontan a la antigüedad. Se cree que los egipcios debieron encontrarse con estos, aunque no es seguro. Sin embargo, si queda prueba del estudio de estos números en la Antigua Grecia, la cuna de la cultura de occidente. Pitágoras decía "todas las cosas son números" imaginándose los números como figuras dando origen a los "cuadrados" y "cubos" de números, términos que proceden de él. Este filósofo y matemático griego, junto con sus discípulos, estudió propiedades de los números como los números impares, los triangulares o los números perfectos allá por el 525 antes de Cristo.

Desde luego estos números no escaparon al misticismo de la antigüedad donde se les atribuía un valor religioso o sobrenatural, pues 6 fueron los días que tardó Dios en crear la tierra y 28 son los días que tarda la luna en orbitar la tierra. Sin embargo, el estudio de los pitagóricos no fue de gran relevancia, doscientos años más tarde (alrededor del 300 a.C.) Euclides en su obra Los Elementos, en el libro IX, dará el primer gran paso hacía su estudio con la proposición 36 que dice:

> Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su suma total resulte un número

primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será un número perfecto.

— Euclides

Por "proporción duplicada" entendemos que cada número sea el doble del anterior. Para ilustrar esta proposición consideramos el número $1 + 2 + 4 = 7$ que es primo. Entonces:

$$(la\,suma) \cdot (\acute{u}ltimo\,n\acute{u}mero) = 7 \cdot 4 = 28$$

Siendo 28 un número perfecto. De esta manera podemos reescribir el teorema como:

Si $2^p - 1$ es primo, entonces $2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto.

Podemos probar esta fórmula con alguno de los números perfectos que ya conocemos:

$$6 = 2^1(2^2 - 1) \qquad 28 = 2^2(2^3 - 1) \qquad 496 = 2^4(2^5 - 1)$$

Gracias a esta fórmula podemos calcular números perfectos pares si somos capaces de hallar primos de la forma $2^p - 1$ (primos de Mersenne), por lo que el problema radica en nuestra capacidad para hallar números primos. Demostraremos más adelante la veracidad de esta fórmula para saber si es aplicable para números perfectos que todavía no hemos conocido.

En 1883 Pervushin demuestra que $2^{60}(2^{61} - 1)$ es un número perfecto. El siguiente autor relevante en el estudio de estos números es Nicómaco de Gerasa (100 DC), un filósofo y matemático neopitagórico quien estudia los números perfectos en su obra *Introducción a la aritmética*. Nicómaco dividirá los números en las tres categorías que ya hemos explicado (perfectos, superabundantes y deficientes). Este autor además añadirá reflexiones morales sobre los números y enunciará algunos resultados sobre los números perfectos que serán tomados a modo de dogma hasta comenzado el renacimiento en Europa; pese a que algunos de estos enunciados eran incorrectos. Un ejemplo de estos enunciados será la idea de que todo número perfecto debe acabar en 6 o en 8 alternativamente (observación que parecía evidente basándose en los 4 primeros números descubiertos y que, sin embargo, es incorrecta).

Durante de la Edad de Oro del Islam los musulmanes vuelven a interesarse por el conocimiento griego, y es en este periodo donde Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus (1194-1239) escribe un tratado basado en la *Introducción a la aritmética* de Nicómaco, pero obviando el apartado moral. En este trabajo Ibn Fallus muestra una tabla con diez números que él asegura, son perfectos. Cabe mencionar que de estos diez tan solo los siete primeros eran verdaderamente perfectos y que este estudio (como gran parte de la ciencia musulmana) permanecerá desconocido para Europa durante mucho tiempo. Debido a este desconocimiento, el quinto número perfecto vuelve a ser descubierto cerca de 1461, encontrado en manuscritos por un hombre anónimo; aunque Hudalrichus Regius también parece haber descubierto al quinto número durante esta época. Regius también demuestra que no todos los números de la forma $2^n - 1$ para todo primo n, son primos. Esta suposición hasta la época aceptada se hacía debido a que $2^2 - 1 = 3,\ 2^3 - 1 = 7,\ 2^5 - 1 = 31$ y así sucesivamente. Esto se torna falso cuando Regius demuestra que $2^{11} - 1 = 2047$ no es un número primo, pues es resultado de $23 \cdot 89$.

Hasta este punto los matemáticos todavía creían que los números perfectos acababan en 6 y 8 alternativamente (hecho que se ve reforzado pues el quinto número perfecto era 33550336). Sin embargo, esta tesis no durará mucho pues en 1603 Cataldi encuentra el sexto ($2^{16}(2^{17} - 1) = 8589869056$) y el séptimo ($2^{18}(2^{19} - 1) = 137438691328$) número perfecto. Se puede apreciar que el quinto y sexto número, ambos acaban en 6.

Por esta época los matemáticos ya empezaban a interesarse por los números perfectos, entre los cuales cabe destacar a Descartes quien escribe una carta a Mersenne en 1638 afirmando que se cree capaz de demostrar que ningún número par es perfecto a parte de aquellos de Euclides, aunque no llegó a demostrarlo.

La siguiente gran contribución vendrá de la mano de Fermat, quien en 1636 informa a Roberval que ya estaba trabajando en los números perfectos. En 1640 Fermat escribe a Mersenne mostrándole sus descubrimientos sobre los números perfectos, donde redacta tres proposiciones que, afirma Fermat, ha podido demostrar sin dificultad:

1. Si n es compuesto, $2^n - 1$ es compuesto.
2. Si n es primo, $2^n - 2$ es divisible entre 2n.
3. Si n es primo y p un divisor primo de $2^n - 1$, entonces $p - 1$ es múltiplo de n.

Los resultados de Fermat causaron una gran impresión en Mersenne y no tardó mucho en publicar *Cogitata physica mathematica* donde mantiene que $2^p - 1$ es primo y por tanto $2^{p-1}(2^p - 1)$ es un número perfecto, para p= 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 y solo para estos valores hasta 257. El propio Mersenne admitió no haber comprobado estos resultados alegando que "ni siquiera todo el tiempo del mundo bastaría para hacer la prueba". Desde entonces se llaman "Primos de Mersenne" a aquellos que tiene la forma $2^p - 1$.

El siguiente matemático en realizar una contribución al estudio de los números perfectos fue Leonhard Euler. En 1732 descubre el octavo número perfecto, siendo este $2^{30}(2^{31} - 1) = 2305843008139952128$; el primer número descubierto después de 125 años. Euler también demuestra que los números perfectos deben ser de la forma $2^{p-1}(2^p-1)$, además también demuestra que todos los números perfectos pares deben acabar en 6 o en 8 como dijo Nicómaco (aunque no alternativamente).

Con el fin de mostrar el arduo trabajo que se dedicaba al estudio de estos números (sin tener la tecnología actual) parece pertinente contar una anécdota de Frank N. Cole, quien se encargó en 1903 de factorizar $2^{67}-1$ demostrando que no era primo. Para ello, Cole dio una conferencia de una hora de duración donde comenzó escribiendo en la pizarra "$2^{67}-1 = 147573952589676412927$". Después al otro lado de la pizarra escribió "761838257287" y debajo "193707721". Sin decir una palabra procedió a multiplicar ambos números obteniendo como resultado exactamente $2^{67}-1$. Por extraña que fuera y después de una hora de silencio, esta conferencia fue recibida con un grandísmo aplauso de la audiencia.

1.3 Demostración de la Proposición 36 del Libro IX de los Elementos de Euclides.

"Sea 2^n-1 primo, entonces $(2^n-1)2^{n-1}$ es un número perfecto"

Primero debemos comprender la fórmula y su relación con los números primos. En la tabla siguiente encontramos la relación entre ambos términos del producto que da lugar a un número perfecto; observamos que el exponente de 2 siempre es n-1. Gracias a esta relación si encontramos un primo de Mersenne, por ejemplo el 8191 podemos hayar el número perfecto, pues el otro factor que multiplica al primo sabemos que será 2^{12}. También cabe destacar que solo vale cuando n es primo, pues sino no se cumple la relación.

n	2^n-1	2^{n-1}	Número Perfecto
2	3	2^1	6
3	7	2^2	28
5	31	2^4	496
7	127	2^6	8128
13	8171	?	?

Ahora vamos a analizar la composición de un número perfecto , por ejemplo el 496, cogiendo todos sus factores positivos (incluido 496) por lo que la suma será igual a $2\cdot 496$.

$$\begin{aligned} 496 : 1+2+4+8+16+31+62+124+248+496 \\ =&1+2+4+8+16+31(1+2+4+8+16) \\ =&(1+31)(1+2+4+8+16) \\ =&32\cdot 31 = 992 = 2(496) \end{aligned} \tag{2}$$

Podemos comprobar que la primera parte de la suma son potencias de 2 hasta llegar a 32, en este punto ya que 32 es 31+1 (número primo + 1), sustituimos

32 por el el número 31 y seguimos duplicando hasta llegar a 496. Reestructurando la ecuación a la forma $(2^n - 1)2^{n-1}$. Ahora vamos a aplicar la misma descomposición para un caso genérico, es decir, calcular la suma de los factores de $(2^n - 1)2^{n-1}$:

$$
\begin{aligned}
&(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1})(2^n - 1) + (2^n - 1) + 2^1(2^n - 1) \\
&+2^2(2^n - 1) + 2^3(2^n - 1) + ... + 2^{n-2}(2^n - 1) + 2^{n-1}(2^n - 1) \\
&=(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1}) + (2^n - 1)(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ...+ \\
&\quad 2^{n-2} + 2^{n-1}) \\
&=2^n(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1})
\end{aligned} \tag{3}
$$

Llegados hasta punto tenemos que hacer la suma de términos que desconocemos, así que lo primero que hacemos es nombrarlo:

$$T = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

Y por tanto:

$$2T = 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n$$

Restando ambos obtenemos:

$$2T - T = 2^n - 1 = T$$

Retomando la suma de los factores, ahora tenemos:

$$= 2^n(2^n - 1)$$

Considerando que hemos cogido el propio factor (al igual que hicimos en el ejemplo del 496), la suma será igual al doble del número perfecto, por lo que dividimos entre 2:

$$= 2^{n-1}(2^n - 1)$$

De esta manera queda demostrado que si cogemos cualquier número de la forma $(2^n - 1)2^{n-1}$, la suma de sus factores es él mismo, que es la definicón un número perfecto.

1.4 ¿Existen los números perfectos impares?

Con la invención de los ordenadores y el aumento de la capacidad computacional, la conferencia antes mencionada de Cole podría haberse resumido en 1 segundo de computación. Por este motivo durante el siglo XX se han encontrado gran cantidad de números perfectos, aunque todos ellos pares. Esto nos plantea una nueva incógnita **¿Existen los números perfectos impares?** Los matemáticos no tienen una respuesta certera a esta pregunta. Este es uno de los problemas más antiguos de las matemáticas y a día de hoy se han comprobado números hasta 10^{1500}, sin encontrar ningún número perfecto impar. El matemático inglés James Joseph Sylvester creía que la existencia de un número impar sería "poco menos de un milagro". A pesar de que no tenemos la certeza de la existencia de estos, en caso de existir, los números perfectos impares tendrían que cumplir una serie de condiciones: ser mayor que los números ya revisados (10^{1500}) y tener al menos 9 factores primos distintos.

1.5 Definición e historia de los números amigos

Una vez definidos los números perfectos y conocido su historia, no es difícil entender **¿Qué son los números amigos?** Si dado un número X y otro número Z, los factores propios de X suman Z y viceversa; entonces X y Z son amigos. Por ejemplo, 220 y 284 son amigos porque:

- Los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284.
- Los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220.

Por lo tanto, si un número es amigo de sí mismo, es un número perfecto. La historia de los números amigos es más breve y menos estudiada que la de los números perfectos. Los pitagóricos ya tenían constancia sobre la relación entre los números 220 y 284 a los que atribuían propiedades místicas (como era común entre los pitagóricos). Alrededor del año 850 Tabit ibn Qurra descubre una fórmula general de hallar números amigos, aunque al igual que pasó con los números perfectos, los descubrimientos del mundo árabe no fueron conocidos en Occidente. La fórmula dice, si se cumple:

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \qquad q = 3 \cdot 2^{n} - 1 \qquad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y p, q, r números primos; entonces $2npq$ y $2nr$ son números amigos. Esta fórmula puede usarse para hallar los pares (220, 284), (1184, 1210), (17 296, 18 416) y (9 363 584, 9 437 056). En 1636 Fermat redescubrió la pareja (17 296, 18 416) y Descartes en 1638 la pareja (9 363 584, 9 437 056) (Aunque ambas ya fueron descubiertas por los árabes).

Los números perfectos y amigos son todavía un área de estudio para las matemáticas que, a pesar de haber avanzado gracias a la computación moderna, aún presenta problemas sin resolver; además que guardan relación con un área de la matemática más enigmática, como son los números primos.

References

[1] John Derbyshire, *Prime Obsession.*

[2] Marcus du Sautoy, *The music of the primes.*

[3] Bertrand Russell, *Historia de la filosofía occidental. Traducción de Julio Gómez de la Serna y Antonio Dorta* 1947.

[4] Nicómaco de Gerasa, *Introducción a la aritmética de Nicómaco de Gerasa.*

[5] Dickson, L; *History of the theory of numbers*, New York: Chelsea Pub. Co. 1952.

[6] M Crubellier and J Sip, *Looking for perfect numbers, History of Mathematics: History of Problems* Paris, 1997.

[7] Cadavieco Castillo, Manuel J.; *Pitágoras y los números perfectos.*

[8] Numerentur.org, *Amigos.*

[9] Wolfram Alfa, *Odd Perfect Number.*

[10] *Perfect numbers.*

[11] Knill, O; *The oldest open problem in mathematics.*

[12] *Encyclopedia.com.*