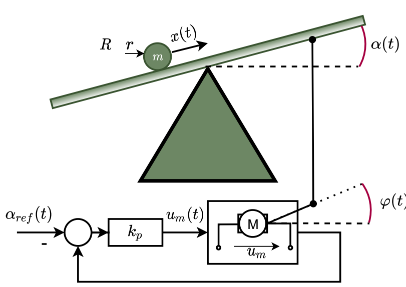
Gulička na tyči

Juraj Marušic, $marusjur@fel.cvut.cz$, CVUT FEL KYR

I. Úvod

Zadaním tejto prace bolo analyzovať, identifikovať a navrhnúť riadenie pre virtuálnu simuláciu fyzikálnej sústavy guličky na tyči. Všetky časti tejto úlohy boli vykonané a na zadanom MATLAB Simulink modeli systému gulička na tyči, ktorý bude v texte označovaný ako virtuálny model. Spolu so Simulink modelom, nám boli dodané diferenciálne rovnice systému. Diagram systému podľa písomného zadania, môže byť zakreslený ako na Obr. 1. Jedná sa o systém typu SIMO, s jednou vstupnou veličinou $\alpha_{ref}[°]$, ktorá značí požadovaný uhol naklonenia tyče. A dvoma výstupnými: skutočný uhol naklonenia tyče $\alpha[°]$ a poloha guličky $x[cm]$.

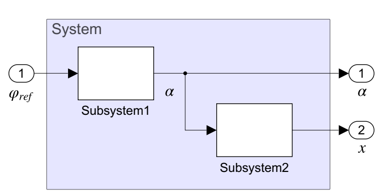
Virtuálny model je typu Black Box, takže nebolo možné nahliadnuť na jeho parametre. Preto boli použité rôzne metódy na jeho analýzu a identifikáciu, ktoré sa rozoberaju v v prvej polovici tejto práce. Zvyšok práce sa zaoberá návrhom regulátorov. Zadaním bolo navrhnúť tri regulátory, troma rôznymi metódami. Aspoň jeden regulátor by mal dosahovať nulovej regulačnej odchylky v ustálenom stave na virtuálnom modeli a u zvyšných je maximálna povolená odchylka 10% z referencie. Zároveň aspoň jeden regulátor by mal dosahovať nulovej ustálenej odchylky pri skoku poruchy na vstupe sústavy. Tieto podmienky boli splnené a pri návrhu sme sa snažili docieliť minimálnej doby ustálenia a minimálneho prekmitu pri skoku referencie.



Obr. 1: Diagram fyzikálneho modelu guličky na tyči podľa zadania.

II. Matematický model

Systém guličky na tyči je možné rozdeliť na dva podsystémy, znázornené na Obr. 2.



Obr. 2: Diagram modelu systému.

Pre polohový servopohon podľa zadania platia diferenciálne rovnice:

$$L\frac{di(t)}{dt} = -Ri(t) - k_e\dot{\varphi}(t) + k_p(\alpha_{ref}(t) - \alpha(t)) \tag{1}$$

$$J_m\ddot{\varphi}(t) = k_m i(t) - b\dot{\varphi}(t) \tag{2}$$

kde, $\alpha_{ref}[°]$ je vstupný požadovaný uhol naklonenia tyče, $\alpha[°]$ je uhol náklonu tyče, $k_\alpha[-]$ je pevný prevod prevod medzi uhlom natočenia hriadele motoru a ulhom náklonu tyče, $i[A]$ je prúd motoru, $\varphi[°]$ je výstupný uhol natočenia hriadele motoru, $\dot{\varphi}[rads^{-1}]$ je uhlová rýchlosť hriadele motoru, $\ddot{\varphi}[rads^{-2}]$ je uhlové zrýchlenie hriadele motoru, $R[\Omega]$ je odpor motoru, $L[H]$ je indukčnosť motoru, $J_m[kgm^2]$ je moment zotrvačnosti motoru, $b[Nmsrad^{-1}]$ je konštanta trenia motoru, $k_e[Vsrad^{-1}]$ je elektrická konštanta motoru, $k_m[NmA^{-1}]$ je mechanická konštanta motoru a $k_p[Vrad^{-1}]$ je zosilenie regulátora polohy servopohonu.

Pri identifikácii prenosu polohového servopohonu bolo zistené, že zadaná diferenciálna rovnica neodpovedá správaniu virtuálneho modelu. Vstupný požadovaný uhol náklonu nie je $\alpha_{ref}[°]$, ale $\varphi_{ref}[°]$, teda požadovaný uhol natočenia hriadele servopohonu. Analýza tejto problematiky je uvedená v Dodatku A a táto domnienka bola potvrdená cvičiacim Ing. D. Efremovom. Vďaka tomuto poznatku budem ďalej pracovať s upravenou diferenciálnou rovnicou (1), ako:

$$L\frac{di(t)}{dt} = -Ri(t) - k_e\dot{\varphi}(t) + k_p(\varphi_{ref}(t) - \varphi(t)) \tag{3}$$

Pre pohyb guličky po tyči platí podľa zadania diferenciálna rovnica:

$$\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right)\ddot{x}(t) = mg\sin\alpha(t) - b_k\dot{x}(t) - \operatorname{sign}\dot{x}(t)\xi_k\frac{mg}{r} \tag{4}$$

kde $r[m]$ je polomer guličky, $m[kg]$ je hmotnosť guličky, $J_b[kgm^2]$ je moment zotrvačnosti guličky, daný vzťahom:

$$J_b = \frac{2}{5}r^2 m \tag{5}$$

ďalej $g[ms^{-2}]$ je gravitačné zrýchlenie, dané tabuľkovou hodnotou $g = 9{,}80665ms^{-2}$, $b_k[kgs^{-1}]$ je odpor prostredia úmerný rýchlosti guličky, $\xi_k[m]$, je koeficient valivého odporu ramena.

Skúmaním virtuálneho modelu sa zistilo, že rovnica popisujúca pohyb guličky po tyči nie je úplne presná. Podľa zadanej diferenciálnej rovnice, by mala vzdialenosť $x[cm]$ stúpať pri kladnom uhle náklonu tyče, avšak opak je pravdou. Vzdialenosť guličky je inak zadefinovaná v zadaní než v Simulink modeli a pri kladnom referenčnom uhle vzdialenosť guličky klesá. Preto diferenciálna rovnica, ktorá popisuje chovanie virtuálneho modelu je:

$$\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right)\ddot{x}(t) = -mg\sin\alpha(t) - b_k\dot{x}(t) - \operatorname{sign}\dot{x}(t)\xi_k\frac{mg}{r} \tag{6}$$

Táto diferenciálna rovnica bola odvodená v Dodatku B.

Ďalej platí, že uhol α nie je priamo meratelný a medzi φ a uhlom α je pevný prevod:

$$\alpha(t) = k_\alpha\varphi(t) \tag{7}$$

III. Stavové rovnice

A. Polohový servopohon

Diferenciálne rovnice uvedené v predošlej časti, môžeme zjednodušiť pred vytvorením stavového popisu systému. Rovnicu (5) zjednodušíme na základe príkladu uvedeného v literatúre [2].

$$\begin{aligned} 0 &= -Ri(t) - k_e\dot{\varphi}(t) + k_p(\varphi_{ref}(t) - \varphi(t)) \\ &= -Ri(t) - k_e\dot{\varphi}(t) + u_m(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Kde u_m je napätie na servopohone, dané:

$$u_m = k_p(\varphi_{ref}(t) - \varphi(t)) \tag{9}$$

Z toho vyplýva, že diferenciálne rovnice popisujúce polohový servopohon môžu byť zjednodušené na:

$$J_m\ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{k_m k_e}{r} + b\right)\dot{\varphi}(t) = \frac{k_m u_m(t)}{R} \tag{10}$$

Diferenciálna rovnica pre uhol α bude mať následovný tvar:

$$\alpha = k_\alpha\varphi \tag{11}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{k_m k_p}{RJ_m}\varphi - \left(\frac{k_m k_e}{RJ_m} + \frac{b}{J_m}\right)\dot{\varphi} + \frac{k_m k_p}{RJ_m}\varphi_{ref} \tag{12}$$

Stavový popis je vyjadrený v základných veličinách, teda jednotka stupňov je rad a jednotka výstupnej veličiny x je v m. Bude používané následovné značenie:

$$u = \varphi_{ref}; \qquad y_1 = k_\alpha\varphi; \tag{13}$$

$$x_1 = \varphi; \qquad x_2 = \dot{\varphi} \tag{14}$$

Stavové rovnice pre polohový servopohon budú v tvare:

$$\dot{x_1} = x_2 \tag{15}$$

$$\dot{x_2} = -\frac{k_m k_p}{RJ_m}x_1 - \left(\frac{k_m k_e}{RJ_m} + \frac{b}{J_m}\right)x_2 + \frac{k_m k_p}{RJ_m}u \tag{16}$$

$$y_1 = x_1 \tag{17}$$

B. Gulička na tyči

Dosadením vzťahu pre moment zotrvačnosti (5) do vzťahu (4), je získaná rovnica pohybu guličky na tyči:

$$\frac{7}{5}m\ddot{x}(t) = -mg\sin\alpha(t) - b_k\dot{x}(t) - \operatorname{sign}\dot{x}(t)\xi_k\frac{mg}{r} \tag{18}$$

Diferenciálna rovnica pre polohu x bude mať následovný tvar:

$$\ddot{x} = -\frac{5}{7}g\sin\alpha - \frac{5}{7}\frac{b_k}{m}\dot{x} - \frac{5}{7m}\operatorname{sign}\dot{x}\xi_k\frac{g}{r} \tag{19}$$

Bude používané následovné značenie:

$$x_3 = x; \qquad x_4 = \dot{x}; \qquad y_2 = x \tag{20}$$

Stavové rovnice pohybu guličky na tyči budú v tvare:

$$\dot{x_3} = x_4 \tag{21}$$

$$\dot{x_4} = -\frac{5}{7}g\sin k_\alpha x_1 - \frac{5}{7}\frac{b_k}{m}x_4 - \frac{5}{7m}\operatorname{sign}x_4\xi_k\frac{g}{r} \tag{22}$$

$$y_2 = x_3 \tag{23}$$

IV. Linearizácia

Stavové rovnice odvodené v predošlej sekcii zlinearizujeme v pracovnom bode $P_{op} = [\varphi_0, \dot{\varphi}_0, x_0, \dot{x}_0] = [0, 0, 0, 0]$, takže stav, kedy tyč nie je naklonená a gulička sa nachádza v jej strede. Pracovný bod bol vybraný na základe toho, že pri nulových počiatočných podmienkach systému, je v tomto bode gulička stabilná a regulácia polohy guličky bude prebiehať práve v okolí tohoto bodu.

Pre linearizovaný stavový popis vytvorím matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{A} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{x}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\dot{x}_1}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\dot{x}_4}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\dot{x}_1}{\partial x_4} \end{pmatrix}\right|_{\mathrm{P}_{op}}; \quad \mathbf{B} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{x}_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial\dot{x}_4}{\partial u} \end{pmatrix}\right|_{\mathrm{P}_{op}};$$

$$\mathbf{C} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}\right|_{\mathrm{P}_{op}}; \quad \mathbf{D} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} \end{pmatrix}\right|_{\mathrm{P}_{op}} \tag{24}$$

Parciálne derivácie boli vyčíslené pre pracovný bod P_{op}.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{k_m\,k_p}}{\mathrm{J_m}\,R} & -\frac{b}{\mathrm{J_m}} - \frac{\mathrm{k_e\,k_m}}{\mathrm{J_m}\,R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5\,g\,\mathrm{k_\alpha}}{7} & 0 & 0 & -\frac{5\,\mathrm{b_k}}{7\,m} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{x21} & k_{x22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{x41} & 0 & 0 & k_{x44} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{k_m\,k_p}}{\mathrm{J_m}\,R} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{x2u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{k_\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Zároveň bola vykonaná aproximácia pre $\sin\alpha \approx \alpha$, ktorá platí pre malé hodnoty uhlov v radiánoch. Zlinearizovaný stavový popis systému je v tvare:

$$\Delta\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\Delta\vec{x}(t) + \mathbf{B}\Delta u(t) \tag{29}$$

$$\Delta\vec{y}(t) = \mathbf{C}\Delta\vec{x}(t) + \mathbf{D}\Delta u(t) \tag{30}$$

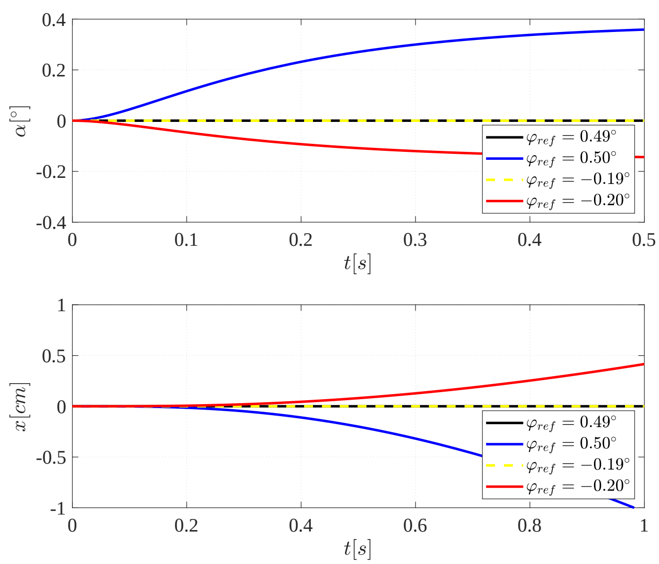
Kde $\vec{x}(t)$ je vektor stavových premenných a $\vec{y}(t)$ je vektor výstupných premenných stavového popisu.

V. STATICKÉ NELINEARITY

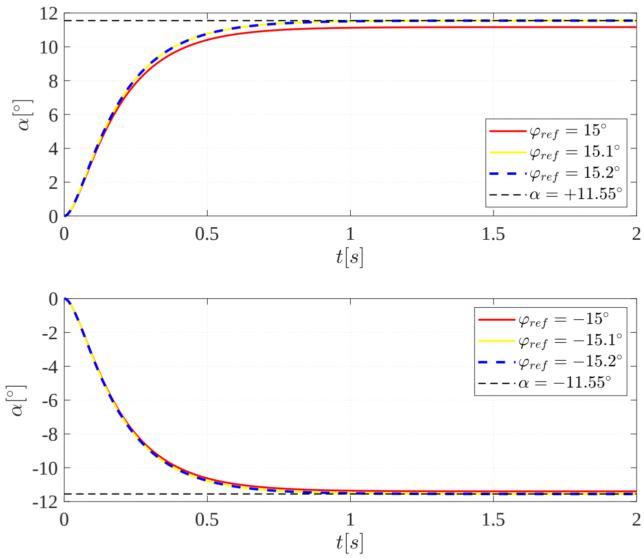
Každý fyzikálny systém má množstvo obmedzení, ktoré v rámci identifikácie a modelovania považujeme za nelinearity. Virtuálny model guličky na tyči je navrhnutý spoločne s týmito nelinearitami, aby reprezentoval reálnu fyzikálnu sústavu. Táto časť sa zaoberá identifikáciou statických nelinearít, teda obmedzení systému, ktoré sa časom nemenia.

A. *Pásmo necitlivosti*

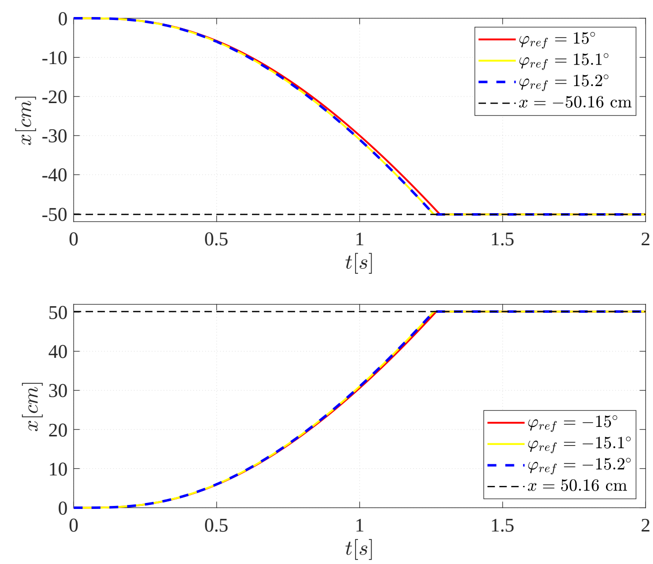
Pásmo necitlivosti je prirodzenou vlastnosťou mechanických systémov s trením. Určuje rozsah hodnôt vstupnej veličiny, ktoré nie sú dostatočne veľké na to aby systém prekonal odpor trenia. Pásmo necitlivosti bolo zistené sledovaním odozvy systému pre malé hodnoty vstupov $\varphi_{ref}[°]$.



Obr. 3: Porovnanie odoziev $x[cm]$, $\alpha[°]$ na skoky malých hodnôt $\varphi_{ref}[°]$.



Obr. 4: Porovnanie odoziev $\alpha[°]$ na skoky hodôt $\varphi_{ref}[°]$.



Obr. 5: Porovnanie odoziev $x[cm]$, na skoky hodôt $\varphi_{ref}[°]$.

Pásmo necitlivosti systému bolo identifikované pre vstup $\varphi_{ref} \in (-0{,}2; 0{,}5)\,[°]$. Vplyv pásma necitlivosti na vsup systému, môže byť zapísaný:

$$\varphi_{rref}(t) = \begin{cases} \varphi_{ref}(t) - 0{,}5°, & \text{ak } \varphi_{ref}(t) > 0{,}5° \\ \varphi_{ref}(t) + 0{,}2°, & \text{ak } \varphi_{ref}(t) < -0{,}2° \\ 0°, & \text{inak.} \end{cases} \tag{31}$$

B. *Saturácia na vstupe*

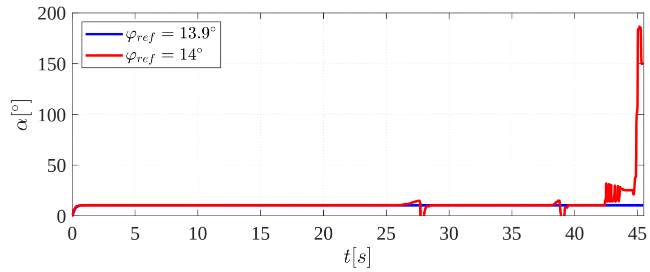
Saturácia na vstupe určuje rozsah vstupných hodnôt, ktoré neovplyvňujú výstupnú veličinu, kvôli fyzikálnym obmedzeniam, ktoré systém má. V našom prípade to môže byť maximálny rozsah prevodového systému z polohového servo motoru na tyč a jej dĺžka.

Saturácia na vstupe bola identifikovaná:

$$\varphi_{ref} \in (-\infty; -15) \cup (15; \infty)\,[°] \tag{32}$$

Skúmaním zadaného modelu bolo zistené, že pre $\varphi_{ref} \geq 14°$ sa systém chová veľmi zvláštne a uhol $\alpha[°]$ dosahuje hodnôt ťažko predstaviteľných na fyzikálnom modeli tak ako je vidno na Obr. 6. Z toho dôvodu bolo zvolené obmedzenie vstupu vo všetkých modeloch následovne:

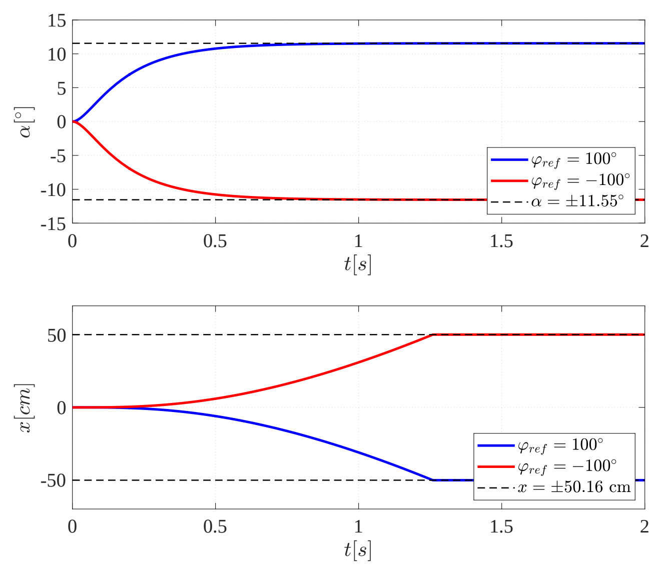
$$\varphi_{ref} \in (-14; 14)\,[°] \tag{33}$$



Obr. 6: Porovnanie odoziev $\alpha[°]$ na skoky referencie $\varphi_{ref}[°]$ s hodnotami blízkymi saturácii na vstupe.

C. Saturácia na výstupe

Saturácia na výstupe určuje maximálne a minimálne hodnoty, ktoré výstupy systému môžu dosiahnuť. V našom prípade sa jedná o maximálny uhol naklonenia tyče $\alpha[°]$, ktorý je obmedzený prevodovým systémom, ktorý tyč spája s pohonovým servomotorom a maximálnu vzdialenosť guličky od stredu tyče $x[cm]$, ktorá je daná jej dĺžkou. Tieto hodnoty boli určené sledovaním ustálenej hodnoty odozvy systému pre vstup o veľkosti presahujúcej fyzikálne možnosi fyzikálneho modelu.



Obr. 7: Odozva $\alpha[°]$ a $x[cm]$ na hodnotu vstupu presahujúci fyzikálne možnosti systému.

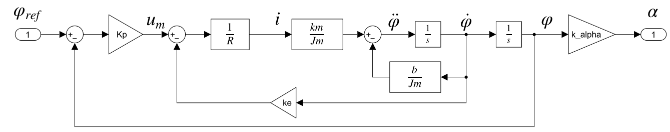
Saturácia na výstupe bola identifikovaná pre uhol naklonenia tyče $\alpha[°]$ a polohu guličky $x[cm]$:

$$\alpha \in (-\infty; -11{,}55) \cup (11{,}55; \infty)\, [°] \tag{34}$$

$$x \in (-\infty; -50{,}16) \cup (50{,}16; \infty)\, [cm] \tag{35}$$

VI. Identifikácia dynamiky polohového servopohonu

Pre identifikáciu dynamiky polohového servopohonu je potrebné najprv určiť prenos z φ_{ref} na α tohoto podsystému. Zjednodušená diferenciálna rovnica (12) pre servopohon má model:



Obr. 8: Simulink model polohového servopohonu.

Vypočítaním prenosu z φ_{ref} na α bola získaná prenosová funkcia v tvare:

$$G_1(s) = \frac{\alpha(s)}{\varphi_{ref}(s)} = \frac{k_\alpha k_m k_p}{J_m R s^2 + (k_e k_m + Rb)s + k_m k_p} \tag{36}$$

Prenosová funkcia $G_1(s)$ zo vstupu φ_{ref} na α bola vyjadrená aj z matíc zlinearizovaného stavového popisu:

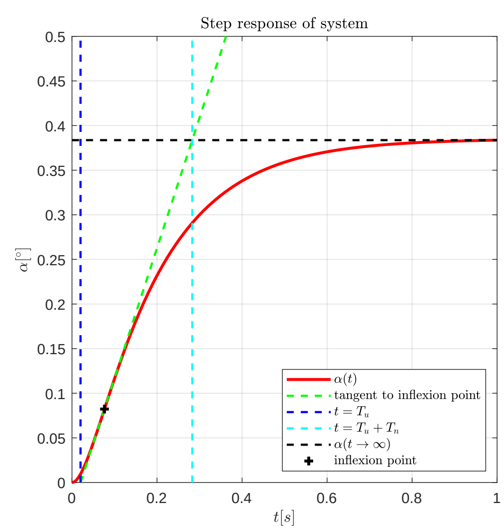
$$G_1(s) = \frac{\mathbf{C}\,\mathrm{adj}\,(\mathbf{s}\mathbb{1} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det\,(s\mathbb{1}\mathbf{s} - \mathbf{A})} = \frac{k_\alpha k_{x2u}}{s^2 - k_{x22}s - k_{x21}} \tag{37}$$

Obe vyjadrenia prenosovej funkcie sú totožné, ďalej sa bude pracovať s prenosom z rovnice (37), ktorý je vyjadrený združenými parametrami.
Jedná sa o nekmitavý prípad systému druhého rádu bez núl a prenos môže mať jeden z dvom tvarov:

$$G_{12}(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}; \qquad T_1 \neq T_2 \tag{38}$$

$$G_{11}(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)^2}; \qquad T_1 = T_2 \tag{39}$$

O ktorý prípad sa jedná, bolo určené na základe pomeru doby nábehu T_u a doby prieťahu T_n odozvy na skok.



Obr. 9: Identifikácia doby nábehu T_u a doby prieťahu T_n z odozvy na skok $\varphi_{ref} = 1°$

Hodnoty boli určené ako $T_u = 0{,}0201s$ a $T_n = 0{,}2629s$. Pomer $\tau = \frac{T_u}{T_n} = 0{,}076 < 0{,}1$. Takže prenos tohoto podsystému je v tvare:

$$G_1(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{40}$$

Na zistenie hodnôt koeficientov k, T_1, T_2 sa môže použiť Strejcova metóda, no jej vyhotovenie sa nepodarilo. Preto bol zvolený prístup hladania koeficientov v časovej doméne, metódou najmenších štvorcov (MATLAB Curve Fitting Toolbox). Koeficienty boli hladané tak, aby funkcia časového priebehu $\alpha(t)$, bola totožná s nameranými údajmi odozvy na skok. Predpis funkcie $\alpha(t)$ mohol byť získaný inverznou Laplaceovou transformáciou alebo vyriešením diferenciálnej rovnice (10). Pri tejto práci, som sa odkázal na prednáškové materialy, kde bol predpis uvedený.

$$\alpha(t) = k\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1}e^{-t/T_2}\right)\varphi_{rref}^{-1} \tag{41}$$

$$k = 0{,}385; \qquad T_1 = 0{,}169s; \qquad T_2 = 0.03948s$$

Parametre boli nájdené pre odozvu α na jednotkový skok. Kvôli statickému pásmu necitlivosti systému, bola hodnota vstupu 0,5, preto bolo potrebné výsledný prenos dodatočne znormovať tak, aby prenos predstavoval odozvu na jednotkový skok.

$$G_1(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\frac{1}{0{,}5} = \frac{115{,}3768}{s^2 + 31{,}24s + 149{,}84} \tag{42}$$

Z výsledného prenosu sa dajú identifikovať substitouvané združené parametre:

$$k_{x2u} = -k_{x21} = 149{,}84 \tag{43}$$
$$k_{x22} = -31{,}24 \tag{44}$$
$$\tag{45}$$

Keďže $k_\alpha k_{x2u} = 115{,}3768$ potom platí, že $k_\alpha = 0{,}77$.

Chovanie tohoto podsystému sa dá aproximovať systémom prvého rádu, ktorého prenos sa určí na základe hodnoty ustáleného stavu k a časovej konštanty T_x. Odozva systému na jednotkový skok sa ustáli na hodnote $k = 0{,}385$, časová konštanta bola určená približne ako čas T_x, pre ktorý má odozva hodnotu $0{,}63\alpha(t \to \infty)$. Jej hodnota je $T_x = 0{,}2124s$. Aproximovaný prenos je v tvare:

$$G_1'(s) = \frac{0{,}77}{0{,}2124s + 1} \tag{46}$$

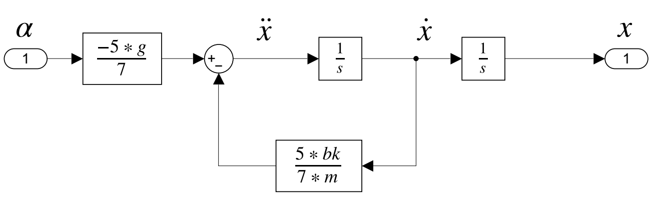
Oba identifikované prenosy, počítajú s statickým pásmom necitlivosti, kvôli ktorému sú normované, aby čo najlepšie aproximovali nelineárny systém.

VII. Identifikácia dynamiky guličky na tyči

Prenosová funkcia z α na x bola určená na základe zlinearizovanej diferenciálnej rovnice (19), ktorá je v tvare:

$$\ddot{x} = -\frac{5g}{7}\alpha - \frac{5}{7}\frac{b_k}{m}\dot{x} \tag{47}$$

Zjednodušený systém guličky na tyči môže byť vyjadrený schematicky ako:



Obr. 10: Zlinearizovaný Simulink model guličky na tyči.

Prenosová funkcia vyzerá následovne:

$$G_{2_1}(s) = \frac{x(s)}{\alpha(s)} = -\frac{5mg}{s(5b_k + 7ms)} \tag{48}$$

Prenosová funkcia $G_2(s)$ určuje prenos z α na x. Z matíc zlinearizovaného stavového popisu môže byť vyjadrený prenos:

$$G_{2_2}(s) = \frac{x(s)}{\varphi(s)} = \frac{\mathbf{C}\,\mathrm{adj}\,(\mathbf{s}\mathbb{1} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det\,(s\mathbb{1}\mathbf{s} - \mathbf{A})} \tag{49}$$
$$= \frac{k_{x41}}{s(s - k_{x44})} = -\frac{5gmk_\alpha}{s(5b_k + 7ms)} \tag{50}$$

Je vidno, že $G_{2_1}(s)$ a $G_{2_2}(s)$ nie sú totožné. To je spôsobené tým, že $G_{2_2}(s)$ bolo vyjadrené z matíc zlinearizovaného stavového popisu, kde vstupom tohoto podsystému je φ a nie α. Plná dynamika guličky na tyči je závislá na dynamike polohového servopohonu, ktorý určuje náklon tyče, tak ako znázornené na Obr. 2. Plná prenosová funkcia pre polohu guličky na tyči bola získaná spojením prenosu servopohonu $G_1(s)$ s prenosom $G_{2_1}(s)$ a bude značená ako $G(s)$, keďže na tejto prenosovej funkcii budeme navrhovať regulátory.

$$G(s) = \frac{x(s)}{\varphi_{ref}(s)} = G_1(s)\frac{1}{k_\alpha}G_{2_2}(s) \tag{51}$$
$$= \frac{k_{x41}k_{x2u}}{s(s - k_{x44})(s^2 - sk_{x22} + k_{x21})} \tag{52}$$

Jedná sa o prenos štvrtého rádu s integrátorom, bez núl. Presná identifikácia parametrov takéhoto systému je obťiažna a neboli dosiahnuté uspokojivé výsledky ani použitím MATLAB Curve Fitting Toolbox-om. Prenos $G_1(s)$ je známi z predošlej identifikácie. Pre parameter k_{x44} platí $k_{x41} = -\frac{5gk_\alpha}{7} = -5{,}3937$. Prenos preto môžeme upraviť na tvar:

$$G(s) = \frac{-808{,}19}{s(s - k_{x44})(s^2 + 31{,}24s + 149{,}84)} \tag{53}$$

Hodnotu parametru $k_{x44} = -\frac{5b_k}{7m}$ bola určená postupným skúšaním, malých záporných hodnôt, ktoré by mohli odpovedať fyzikálnej interpretácii parametru. Uspokojivé výsledky boli dosiahnuté pre $k_{x44} = -1{,}28$. Výsledný prenos je v tvare:

$$G(s) = \frac{-808{,}19}{s^4 + 32{,}52s^3 + 189{,}8272s^2 + 191{,}7952s} \tag{54}$$

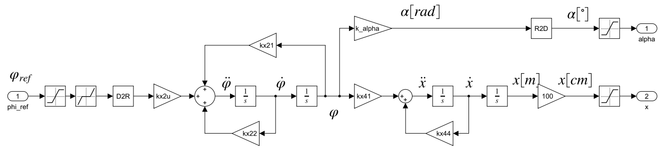
Lineárny model daný týmto prenosom bude ďalej označovaný ako lineárny model 1. Prenos $G(s)$ môžeme zjednodušiť, tým že namiesto $G_1(s)$ použijeme zjednodušený prenos $G_1'(s)$.

$$G'(s) = \frac{-5{,}394}{s(0{,}2124s^2 + 1{,}272s + 1{,}28)} \tag{55}$$

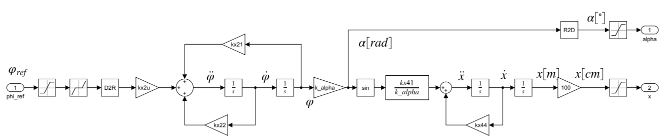
Lineárny model daný týmto prenosom budeme ďalej označovať ako lineárny model 2.

VIII. Simulink modely

Zlinearizovaný model systému bol vytvorený zo zlinearizovaných stavových rovníc a združených parametrov. Na Obr. 11 je lineárny model doplňený o statické nelinearity typu saturácie a pásmo necitlivosti.



Obr. 11: Simulink model zlinearizovaného systému-lineárny model 1. so statickými nelinearitami.

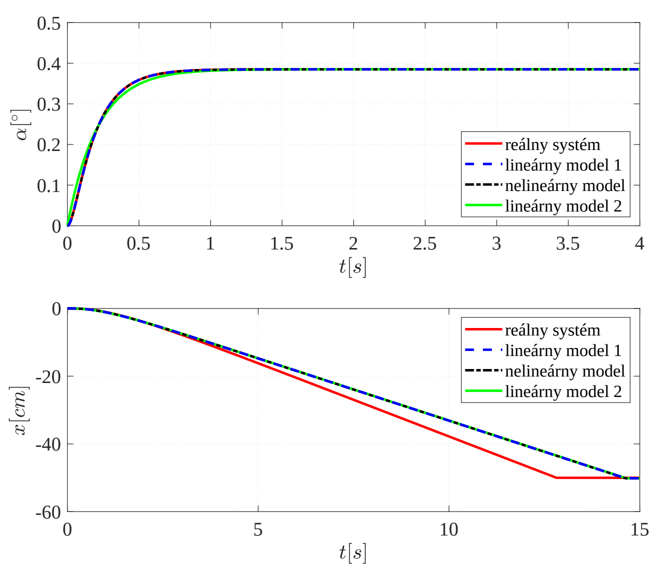


Obr. 12: Nelinearny Simulink model systému.

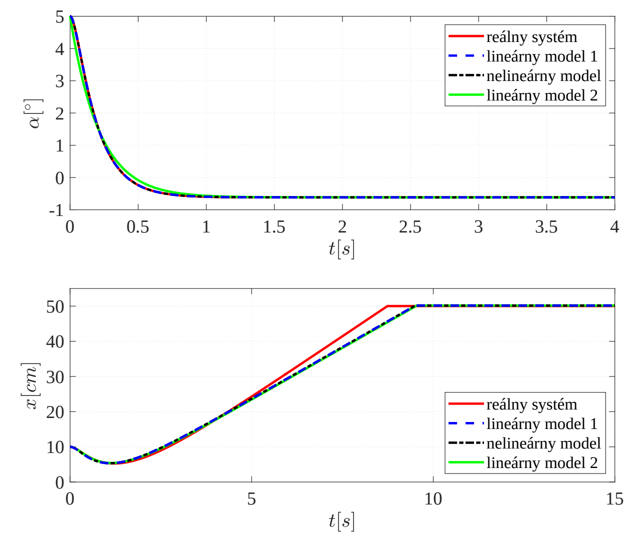
[1] Nelineárny model systému nie je úplne presný, keďže sa nepodarilo identifikovať parametre súvisiace s valivým trením guličky, no môžeme predpokladať, že vplyv tohoto trenia je zanedbateľný.

IX. Porovnanie modelov

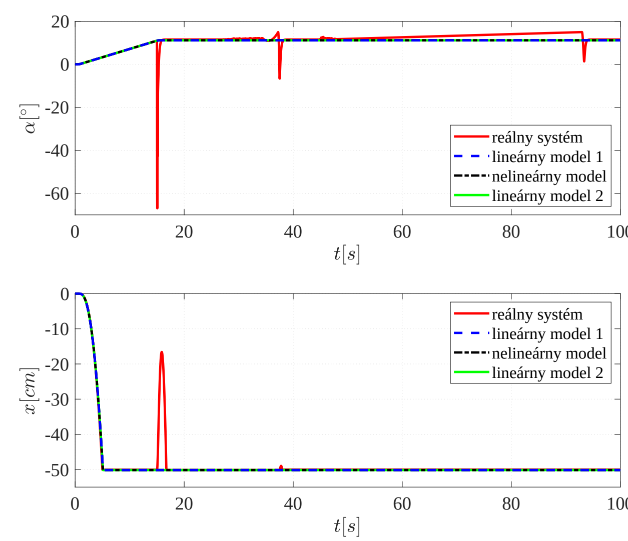
Boli prevedené porovnanie odoziev na rôzne typy referenčných signálov φ_{ref}. Reálny systém na grafoch označuje virtuálny zadaný model systému. Lineárny model 1. označuje plne linearizovaný model, daný prenosmi (42), (54). Lineárny model 2. označuje zjednodušený zlinearizovaný model systému, daný prenosmi (46), (55).



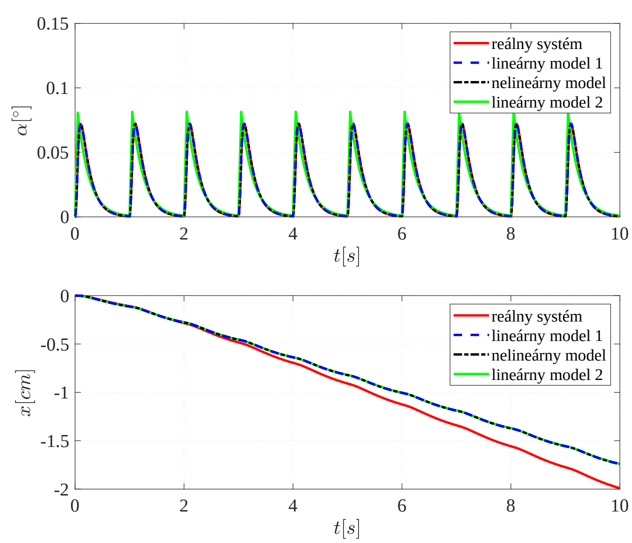
Obr. 13: Porovnanie doziev na skok $\varphi_{ref} = 1°$ v čase $t = 0s$.



Obr. 14: Porovnanie odoziev na skok $\varphi = -1°$ v čase $t = 0s$ pri nastavených počiatočných hodnotách: $\alpha_0 = 5°$, $x_0 = 10cm$.



Obr. 15: Porovnanie odoziev na rampu vstupu φ_{ref} so sklonom $1°$.



Obr. 16: Porovnanie odoziev na pulzný signál φ_{ref}, s amplitúdou $1°$ a frekvenciou $1Hz$.

[1]Implementované Simulink modely sa nachádza v súbore $models.slx$

Na základe porovnaní odoziev môžeme zhodnotiť, že nájdene modely dobre aproximujú zadaný virtuálny systém. Obzvlášť v okolí pracovného bodu. Dobre aproximuje aj zjednodušený zlinearizovaný systém (lineárny model 2.). Preto ho využijeme pri návrhu regulátorov. Na Obr. 14 je vidno, že pre zadaný virtuálny systém dochádza k zvláštnym, veľkým prekmitom. V tomto prípade sa môže jednať o poruchy, ktoré mohli byť naimplementované v rámci virtuálneho modelu.

V grafoch v tejto sekcii, *reálny systém* označuje virtuálny model.

X. REGULÁCIA

Cielom tejto časti je navrhnúť tri rôzne regulátory sústavy guličky na tyči a to troma rôznymi metódami. Regulovanou veličinou je poloha guličky na tyči $x[cm]$. Návrhy všetkých regulátorov boli prevedené na identifikovanom, zlinearizovanom systéme.

A. PD regulátor s filtrovanou D zložkou

Pre návrh PD regulátora s filtrovanou D zložkou, bola použitá metóda rozmiestnenia pólov. Túto úlohu budeme chcieť pre jednoduchosť vyriešiť najprv manuálne algebraicky, zostavením sústavy rovníc, ktoré porovnávajú koeficienty charakteristického polynómu regulátora so sústavou v vzpätnej väzbe a požadovaného charakteristického polynómu. Potom sa na problém pozrieme z trochu iného pohľadu, pri ktorom nebudeme hľadať priamo parametre PD regulátoru, ale polynóm regulátora a jeho koeficienty. V tomto prípade budeme hladať riešenie polynomiálnymi metódami.

V oboch prípadoch sa jedná o návrh paralélneho zapojenia PD regulátora a pri návrhu bola použitá zjednodušené prenosová funkcia lineárneho modelu 2. $G'(s)$ tretieho rádu, keďže sme zhodnotili, že dobre aproximuje systém a jej použitie nám výrazne zjednoduší výpočty. PD regulátor s filtrovanou D zložkou je v tvare:

$$C(s) = k_p + k_d s \frac{1}{1 + s\frac{1}{N}} = k_p + k_d s \frac{1}{1 + sT_d} \tag{56}$$

Filtrácia D zložky regulátoru označuje zapojenie filtru typu dolná priepusť, seriovo s derivačnou zložkou regulátoru. Jeho zapojenie odfiltruje frekvencie väčšie než medzná frekvencia f_m $[Hz]$. Keďže výstup derivačnej zložky je úmerný zmene regulačnej odchylky, vysoké frekvencie by boli zosilované viac. To je nežiadúce, keďže tým by boli zosilené všetky poruchy a šumy, preto je dôležité D zložku filtrovať. Tento filter je v tvare:

$$F(s) = \frac{\omega_m}{s + \omega_m} = \frac{2\pi f_m}{s + 2\pi f_m} \tag{57}$$

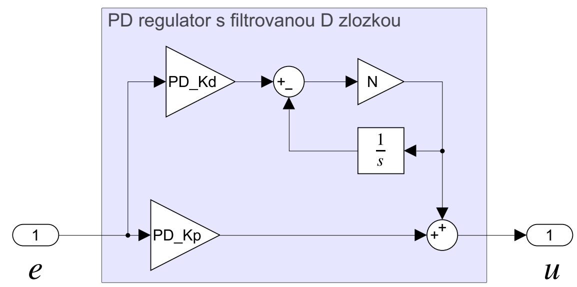
Medzná frekvencia f_m by sa mohla určiť napríklad na základe charakteristiky šumu senzorov polohy guličky a uhlu natočenia rotora. Keďže táto znalosť nebola pri simulačnej úlohe k dispozícii, bola stanovená medzná frekvencia na približne $f_m = 20Hz$. Preto parameter $N = \omega_m \approx 125 rad/s^2$ a $T_d \approx 0{,}008s$.

$$C(s) = k_p + k_d s \frac{1}{1 + 0{,}008s} \tag{58}$$

[2]Parameter N je totožný s parametrom N v Simulink PID bloku.

Týmto sme do regulátoru pridali pól v $s_p = -125$. Tento pól nebude mať výrazný vplyv na dynamiku, keďže najmenej dominantným pólom identifikovaného prenosu $G(s)$ je $s_p = -25{,}3$. Preto PD regulátor navrhneme samostatne.

Pri tomto regulátore sa budeme snažiť dosiahnuť čo najmenší prekmit a pri tom dostatočne krátku dobu ustálenia.



Obr. 17: Schéma PD regulátora s filtrovanou D zložkou.

1) Klasická metóda rozmiestnenia pólov: Bude používané značenie pre prenos $G'(s)$ ako $G(s)$ a pre prenos hladaného regulátoru bude značené $C_1(s)$.

$$G(s) = \frac{-5{,}394}{s(0{,}2124s^2 + 1{,}272s + 1{,}28)} = \frac{b(s)}{a(s)} \tag{59}$$

$$C_1(s) = k_p + k_d s \tag{60}$$

Prenos sústavy bez vzpätnej väzby je:

$$L(s) = C_1(s)G(s) = \frac{-5{,}394(k_p + k_d s)}{s(0{,}2124s^2 + 1{,}272s + 1{,}28)} \tag{61}$$

Prenos $L(s)$ je má astatizmus rádu 1. Z toho vyplýva, že je možné navrhnúť regulátor s nulovou ustálenou odchylkou na skokovú referenciu. Zapojením vzpätnej väzby získame prenos $T(s)$, ktorého charakteristický polynóm je:

$$c_1(s) = s^3 + 5{,}99s^2 + (6{,}03 - 25{,}39k_d)s - 25{,}39k_p \tag{62}$$

Požadovaný charakteristický polynóm je tretieho rádu s dvojicou komplexne združených pólov a jedným reálným pólom, kde ω_0 je vlastná uhlová rýchlosť, ζ je koeficient tlmenia a parametrom k určujeme hodnotu pridaného pólu:

$$\begin{aligned} c_p(s) &= (s + k\omega_0)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2) && (63)\\ &= s^3 + \omega_0(2\zeta + k)s^2 + \omega_0^2(1 + 2k\zeta)s + k\omega_0^3 && (64) \end{aligned}$$

Porovnaním koeficientov u mocninách s charakteristického polynómu $c_1(s)$ a požadovaného polynómu $c_p(s)$ získame tri rovnice o troch neznámych.

$$\begin{array}{lll} s^2: & 5{,}99 & = \omega_0(2\zeta + k) \\ s^1: & (6{,}03 - 25{,}39k_d) & = \omega_0^2(1 + 2k\zeta) \\ s^0: & -25{,}39k_p & = k\omega_0^3 \end{array} \tag{65}$$

Pri tomto návrhu chceme dosiahnuť minimálny prekmit tj. kritické tlmenie, preto priradíme hodnotu parametru $\zeta = 1$. Zároveň pokial $\zeta = 1$ a $k = 1$, potom požadovaný charakteristický polynóm $c_p(s)$ bude mať trojnásobný pól v $-\omega_0$.

$$c_p(s) = (s + \omega_0)^3 \tag{66}$$

Riešením sústavy rovníc bol identifikované parametre:

$$\omega_0 = 1{,}996; \qquad k_p = -0{,}3132; \qquad k_d = -0{,}2334 \tag{67}$$

2) Polynomálna metóda: Bude hladaný regulátor v tvare:

$$C_2(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \tag{68}$$

Charakteristický polynóm zapojenia prenosu $G(s)$ z rovnice (59) zapojený v vzpätnej väzbe s regulátorom $C_2(s)$ má charakteristický polynóm v tvare:

$$c_2(s) = a(s)p(s) + b(s)q(s) \tag{69}$$

Pre požadovaný charakteristický polynóm $c_p(s)$, je v rovnakom tvare ako v rovnici (64) a pre parametre platí: $\zeta = 1$, $k = 1, \omega_0 = 1{,}996$. Bude hladané riešenie minimálneho stupňa pre Diofantickú rovnicu:

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = c_p(s) \tag{70}$$

Kde $p(s)$ a $q(s)$ je riešenie tejto rovnice. Na to aby existovalo riešenie Diofantickej rovnice, systém nesmie mať skryté módy, tj. musí existovať spoločný deliteľ $g(s)$ pre polynómy $a(s)$ a $b(s)$. Polynóm $b(s)$ je nultého stupňa, takže spoločný deliteľ $g(s)$ existuje a je rovnako polynómom nultého stupňa. Ďalšou podmienkou riešiteľnosti je nutná deliteľnost polynómu $c(s)$ polynómom $g(s)$. Táto podmienka je v našom prípade splnená, keďže $g(s)$ je konštanta. PD regulátor je nerydzí, takže nie je potrebné sa zaoberať podmienkami pre rydzosť regulátora.

Rovnica (70) bola riešená za pomoci Matlab Toolboxu PolyX, metódou Sylvestrovej matice. Bolo nájdené riešenie minimálneho stupňa polynómov $p(s)$, $q(s)$:

$$p(s) = 4{,}7081; \qquad q(s) = -1{,}5 - 1{,}1s \tag{71}$$

PD regulátor je v tvare:

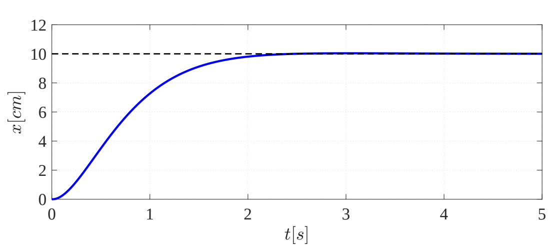
$$C_2(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = -0{,}3132 - 0{,}2334s \tag{72}$$

Parametre regulátora sú:

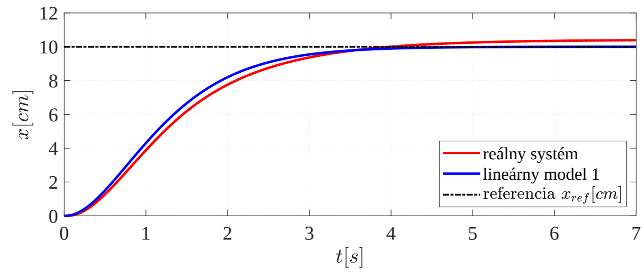
$$k_p = -0{,}3132; \qquad k_d = -0{,}2334 \tag{73}$$

3) Zhodnotenie: Nájdené parametre sú rovnaké pre obe metódy. PD regulátor s filtrovanou D zložkou je v tvare:

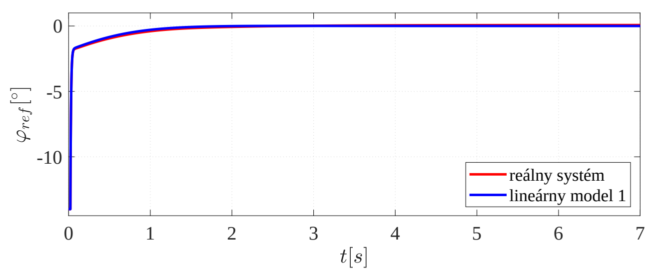
$$C(s) = -0{,}3132 - \frac{0{,}2334s}{1 + 0{,}008s} \tag{74}$$



Obr. 18: Odozva na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$, zjednodušeného prenosu bez saturácie akčného zásahu.

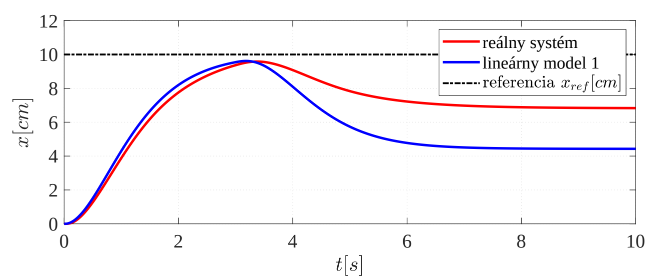


Obr. 19: Porovnanie odoziev regulovaných systémov na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$.

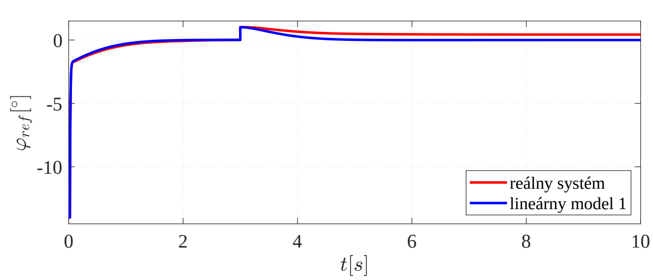


Obr. 20: Porovnanie akčných zásahov regulovaných systémov pre skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$.

Pre regulovaný lineárny model platí, že prekmit je 0% a doba ustálenia je $3{,}56s$. Pre regulovaný virtuálny model je prekmit 0% avšak hodnota odozvy sa neustáli na požadovanej hodnote a regulačná odchylka nie je rovná nule. Rozdiel medzi požadovanou hodnotou ustálenia a reálnou sú $4{,}1\%$. Dôvodom je, že akčný zásah je v intervale pásma necitlivosti systému. Po ustálení odozvy je derivácia regulačnej odchylky nulová, tým pádom D zložka regulátora ma nulový prínos. Hodnota k_p by sa dala vyladiť tak, aby regulačná odchylka bola nulová, avšak to sa nepovažuje za dobré riešenie, keďže pre iné situácie by mohla byť regulácia horšia.



Obr. 21: Porovnanie odoziev regulovaných systémov na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$ so skokom poruchy $\varphi_{ref} = 1°$ v čase $t = 3s$.



Obr. 22: Porovnanie akčných zásahov regulovaných systémov pre $x_{ref} = 10cm$ v $t = 0s$ so skokom poruchy $\varphi_{ref} = 1°$ v $t = 3s$.

Skok poruchy bol podľa zadania daný na vstup sústavy. Pre PD regulátor nie je možné dosiahnuť nulovú ustálenú odchylku pri skoku poruchy. Pre ustálenú odchylku platí:

$$e(t \to \infty) = e_r(t \to \infty) + e_d(t \to \infty) \tag{75}$$

Kde $e_r(t)$ je ustálená odchylka vzhľadom k vstupu a $e_d(t)$ je ustálená odchylka vzhľadom k poruche. Keďže prenos $L(s)$ má astatizmus rádu 1. je $e_r(t \to \infty) = 0$. Pre ustálenú odchylku vzhľadom k poruche na vstupe platí:

$$e_d(t \to \infty) = -\lim_{s\to 0} \frac{sG(s)}{1 + C(s)G(s)} d(s) \tag{76}$$

Kde $d(s)$ je porucha na vstupe sústavy. Pokiaľ sa jedná o skokovú poruchu: $d(s) = \frac{1}{s}$.

$$e_d(t \to \infty) = -\lim_{s\to 0} \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{6{,}904}{2{,}162} \neq 0 \tag{77}$$

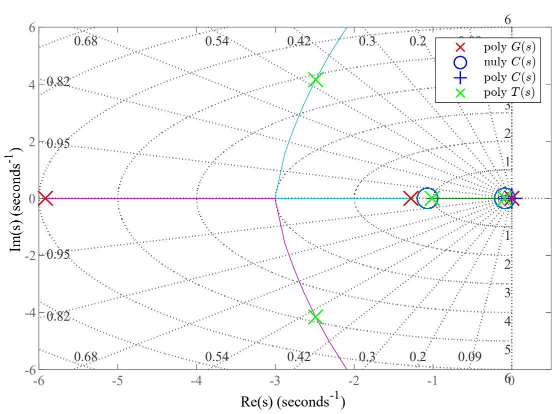
Z toho vyplýva, že nie je možné navrhnúť PD regulátor pre túto sústavu tak, aby ustálená odchylka pri skoku poruchy bola rovná nule.

B. PID regulátor s filtrovanou D zložkou a Anti-Windup

1) Návrh regulátora: PID regulátor bude navrhnutý v paralélnom zapojení. Filtrovanie D zložky bude totožné s predošlím príkladom. Návrh bude prevedený metódou Root Locus (geometrickým umiestnením koreňov). Pri návrhu budeme pracovať s identifikovaným prenosom lineárneho modelu 1. $G(s)$, ktorý je daný rovnicou (54). PID regulátor je v tvare:

$$C(s) = k_p + k_d s + k_i \frac{1}{s} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \tag{78}$$

Geometrickým návrhom budú nuly regulátora umiestnené tak, aby sme stabilizovali prenos vzpätnej väzby. Súčasne chceme ovplyvniť dynamiku sústavy tak, aby sme dosiahli čo najkratší čas ustálenia, za dodržania maximálneho prekmitu 20%.



Obr. 23: Root Locus - geometrické miesto koreňov dominantnej dynamiky.

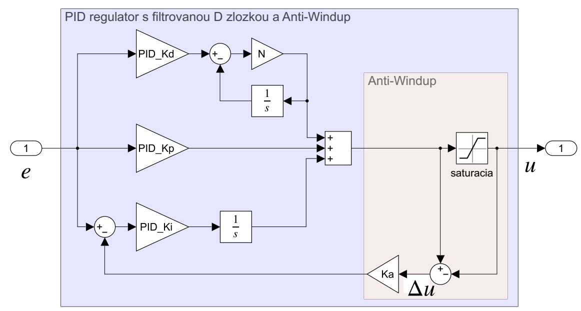
Návrh bol prevedený za pomoci nástroja Control System Designer. Póly regulovanej sústavy vo vzpätnej väzbe $T(s)$, sú zobrazené na Obr. 23. Nájdený PID regulátor je v tvare:

$$C(s) = -0{,}8646 - 0{,}7461s - 0{,}07093\frac{1}{s} \tag{79}$$

Nájdené parametre:

$$k_p = -0{,}8646; \quad k_d = -0{,}7461; \quad k_i = -0{,}07093 \tag{80}$$

U systémov so saturáciou akčného členu, spôsobuje integrálna zložka regulátora problém tzv. Windup. Pokiaľ dôjde k saturácii a regulačná odchyľka je dosť veľká, výstup integračného člena sa bude zvyšovať, no akčný zásah zostane rovnaký. Keď výstupná hodnota presiahne hodnotu referenčnú, zmení sa znamienko regulačnej odchylky a výstup integračnej zložky začne klesať. Táto doba trvá pokiaľ výstup integrálnej zložky sa nezníži pod hodnotu saturácie akčného člena. To môže mať za následok veľky prekmit pri skokových zmenách. Tento problém je riešený zapojením Anti-Windup obvodom, ktorý obmädzí integrálnu akciu akonáhle dôjde k saturácii.



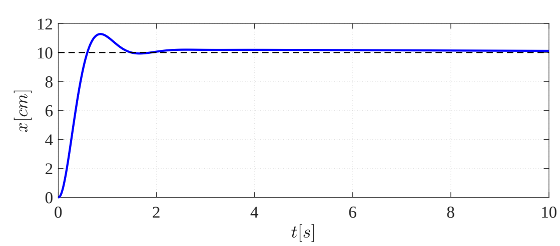
Obr. 24: Schéma PID regulátora s filtrovanou D zložkou a Anti-Windup.

Pre Anti-Windup bude použitá metóda vzpätného výpočtu (back-calculation). Na základe blokovej schémy na Obr. 24, je $\Delta u = 0$, pokiaĺ výstup regulátora je menší než saturácia na akčnom člene. Akonáhle dôjde k saturácii $\Delta u > 0$ a prenos regulátora je:

$$C_w(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s + k_A k_i} \tag{81}$$

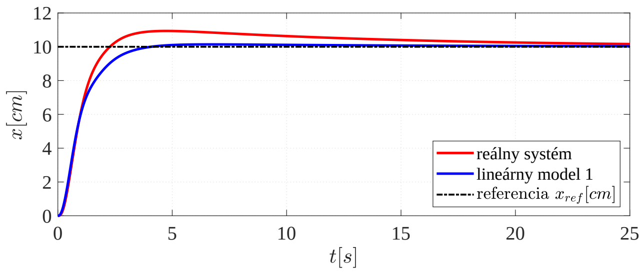
Hodnota parametru k_A bola stanovená ako $k_A = \frac{|s_{pd}|}{k_i}$, kde s_{pd} je dominantný pól regulovanej sústavy v vzpätnej väzbe $T(s)$. Týmto obmedzíme integračnú časť regulátora. [3]

2) Zhodnotenie: Odozva lineárneho modelu má výrazne nižšiu dobu ustálenia ako virtuálny systém. Navrhnutý PID regulátor má nulovú ustálenú odchylku a to aj pre skok poruchy na vstupe systému.

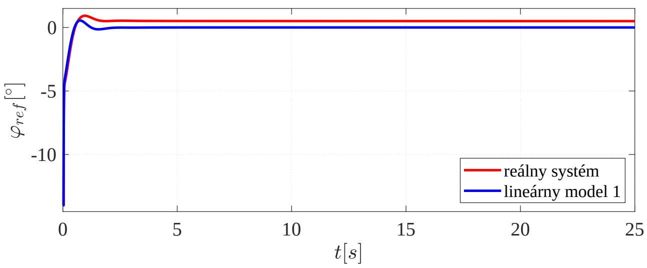


Obr. 25: Odozva na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$, zjednodušeného prenosu bez saturácie akčného zásahu a bez Anti-Windup.

[3]Vzťah na výpočet k_A je na základe materiálov z cvičení.

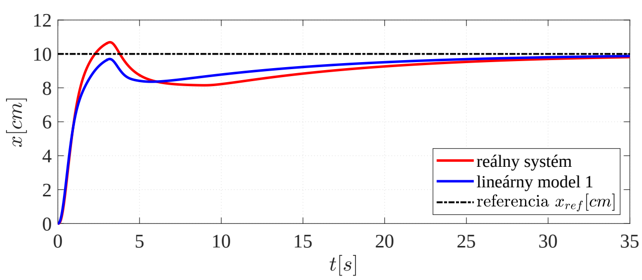


Obr. 26: Porovnanie odoziev regulovaných systémov na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$.

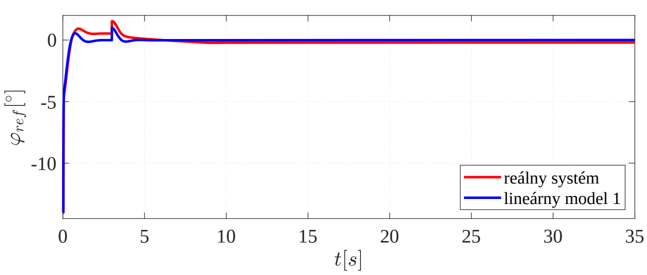


Obr. 27: Porovnanie akčných zásahov regulovaných systémov pre skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$.

Regulovaný lineárny model má prekmit $1{,}4\%$ a dobu ustálenia $3{,}34s$. Pre regulovaný virtuálny model je prekmit $9{,}4\%$ a doba ustálenia $22{,}67s$.



Obr. 28: Porovnanie odoziev regulovaných systémov na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$ so skokom poruchy $\varphi_{ref} = 1°$ v čase $t = 3s$.



Obr. 29: Porovnanie akčných zásahov regulovaných systémov pre $x_{ref} = 10cm$ v $t = 0s$ so skokom poruchy $\varphi_{ref} = 1°$ v $t = 3s$.

Pre navrhnutý PID regulátor platí, že ustálená odchylka pri skoku poruchy na vstupe je rovná nule, avšak za dlhej doby ustálenia.

C. Stavový regulátor s pozorovateľom

1) Návrh regulátora: Pre návrh stavového regulátoru bol použitý lineárny model 2. Z identifikovaného prenosu boli určené stavové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ na základe ktorých bol regulátor navrhnutý. Časť regulátoru zvaná pozorovateľ sa navrhuje, pokiaľ nie je možné merať stavové veličiny. To platí v našom prípade. Súčasťou návrhu, bolo doplnenie stavového regulátoru a integrálne riadenie na zaručenie nulovej ustálenej odchylky. Na základe prenosu:

$$G(s) = \frac{-5{,}394}{s(0{,}2124s^2 + 1{,}272s + 1{,}28)} \tag{82}$$

Boli vzpätne určené stavové matice v kanonickom tvare riaditeľnosti[4]:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5{,}989 & -6{,}026 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -25{,}4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \tag{83}$$

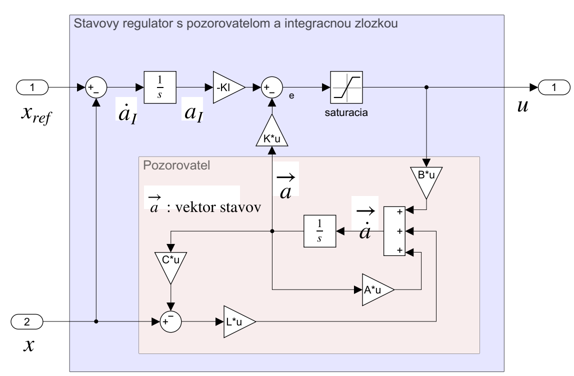
Pre návrh regulátoru tohoto typu je potrebné najprv overiť, či sú všetky stavové premenné riaditeľné. To môže byť určené hodnosťou matice riaditeľnosti:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A^2B} \end{pmatrix} \tag{84}$$

Hodnosť matice $\mathcal{C}$ je rovná 3, teda počtu stavov a všetky stavy sú riaditeľné. Pre návrh pozorovateľa je potrebné overiť, či sú všetky stavy pozorovateľné. To môže byť určené na základe hodnosti matice pozorovateľnosti:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{C^T} & \mathbf{A^TB} & \mathbf{(A^T)^2B} \end{pmatrix}^T \tag{85}$$

Hodnosť matice $\mathcal{O}$ je rovnako rovná 3, teda všetky stavy sú pozorovateľné a môžeme navrhnúť plnohodnotného pozorovateľa.



Obr. 30: Schéma stavového regulátora s pozorovateľom a integračnou zložkou.

Keďže premennou x označujeme polohu guličky (výstup sústavy), pre tento prípad bude vektor stavových premenných označený ako $\vec{a}$. Vstup bude značený ako akčný zásah u. Stavové riadenie bude doplnené integračnou zložkou, ktorá zaručí robustné sledovanie referencie. Tým vytvoríme rozšírený stavový popis s premennou a_I, tak ako je znázornené na Obr. 30. Pre popis vzniknú rovnice:

$$\dot{\vec{a}} = \mathbf{A}\vec{a} + \mathbf{B}u; \qquad y = \mathbf{C}\vec{a}; \tag{86}$$
$$\dot{a_I} = x_{ref} - \mathbf{C}\vec{a}; \qquad u = -\mathbf{K}\vec{a} - K_I a_I \tag{87}$$

[4]Použitím Matlab funkcie $tf2ss$.

Kde $\mathbf{K}$ je stavový regulátor a K_I je parameter integrálneho riadenia. Rovnice môžu byť prepísané do tvaru:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{a}} \\ \dot{a}_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ a_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} x_{ref}$$
$$= \boldsymbol{A}_{celk} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ a_I \end{pmatrix} + \boldsymbol{B}_{celk} u + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} x_{ref} \tag{88}$$

$$x = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ a_I \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_{celk} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ a_I \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$u = -\mathbf{K}\vec{a} - K_I a_I = -\mathbf{K}_{celk} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ a_I \end{pmatrix} \tag{90}$$

Kde $\boldsymbol{K}_{celk} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & K_I \end{pmatrix}$. Dosadením vzťahu (90) do vzťahu (88) získame rovnicu popisujúju rozšírený stavový popis:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{a}} \\ \dot{a}_I \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A}_{celk} - \boldsymbol{B}_{celk}\boldsymbol{K}_{celk}) \begin{pmatrix} \vec{a} \\ a_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} x_{ref} \tag{91}$$

Vlastné čísla matice $\boldsymbol{A}_{reg} = \boldsymbol{A}_{celk} - \boldsymbol{B}_{celk}\boldsymbol{K}_{celk}$ udávajú póly regulovanej sústavy. Pokial navrhneme požadovaný charakteristický polynóm $c(s)$ rozmiestením pólov, koeficienty $\boldsymbol{K}_{celk}$ môžeme vypočítať porovnaním polynómov:

$$\det\left(\mathbb{1}s - \boldsymbol{A}_{reg}\right) = c(s) \tag{92}$$

Pre návrh $c(s)$ platí: $\zeta = \frac{-\ln(OS/100)}{\pi^2 + \ln((OS/100)^2}$ a $\omega = \frac{4}{\zeta T_s}$. Kde OS je požadovaný maximálny prekmit 5% a T_s je požadovaná doba ustálenia $2s$. Bol pridaný pól $s_p = -100$, tak aby neovplyvnil dominantnú dynamiku.

$$c(s) = (s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)(s + 100) \tag{93}$$

Pre jednoduchosť, $\boldsymbol{K}_{celk}$ bolo vypočítané Ackermannovým vzorcom: [5]

$$\boldsymbol{K}_{celk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\mathcal{C}}_{celk}^{-1} c(\boldsymbol{A}_{celk}) \tag{94}$$

Kde $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{celk}$ je matica riaditelnosti, vytvorená z rozšírených matíc s označením $celk$. Výpočtom boli získané hodnoty regulačných parametrov:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & 104 & 408{,}4 \end{pmatrix}; \qquad K_I = 33{,}073 \tag{95}$$

Pre pozorovatela bude značený vektor aproximovaných stavových premenných ako $\vec{a}'$. Podľa schémy z Obr. 30 platí:

$$\dot{\vec{a}}' = \boldsymbol{A}\vec{a}' + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{L}(x - x') \tag{96}$$
$$x' = \boldsymbol{C}\vec{a}' \tag{97}$$

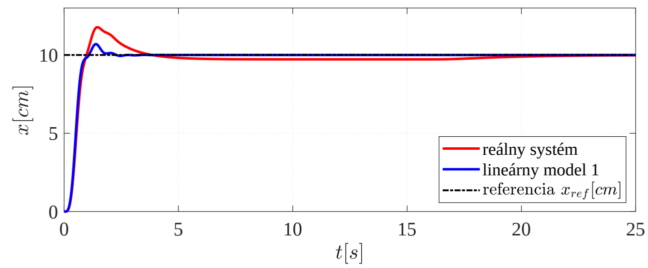
Kde $\boldsymbol{L}$ je vektor zosilenia pozorovateľa. Z duality kanonickej formy riaditeľnosti a kanonickej formy pozorovateľnosi, môžeme využiť Ackermannov vzorec pre pozorovateľa:

$$\boldsymbol{L} = c_{poz}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\mathcal{O}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \tag{98}$$

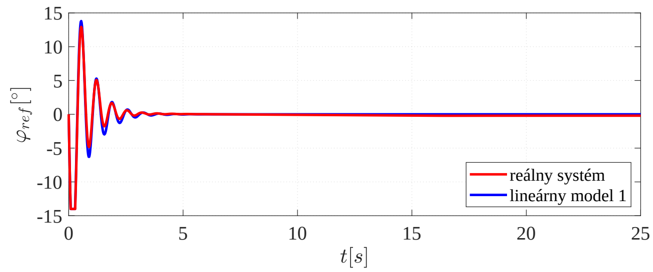
$\boldsymbol{\mathcal{O}}$ je matica pozorovateľnosti daná rovnicou (85). $c_{poz}(\boldsymbol{A})$ označuje dosadenie matice $\boldsymbol{A}$ do požadovaného charakteristického polynómu pozorovaťela. Póly pozorovateľa volíme dvakrát menšie než póly regulátora, aby pozorovatel nezpomaloval dynamiku.

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} -0{,}7860 & 0{,}1571 & -0{,}0394 \end{pmatrix}^T \tag{99}$$

[5]Za použitia Matlab Toolboxu PolyX.

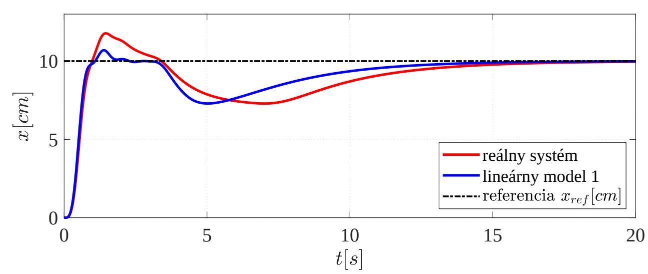


Obr. 31: Porovnanie odoziev regulovaných systémov na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$.

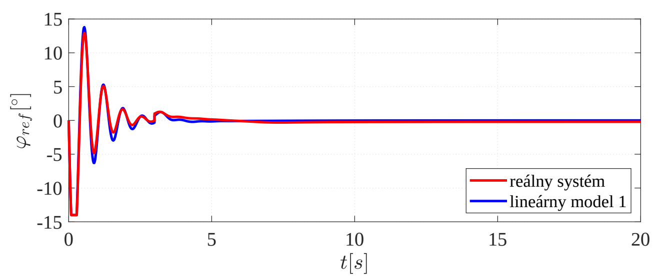


Obr. 32: Porovnanie akčných zásahov regulovaných systémov pre skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$.

2) Zhodnotenie: Regulovaný lineárny model má prekmit 6,9% a dobu ustálenia $1{,}69s$. Regulovaný virtuálny model má prekmit 17,75% a doba ustálenia odozvy na 2% referenčnej hodnoty je $18{,}65s$. Táto dlhá doba je zapríčinená pásmom necitlivosti systému. Doba ustálenia odozvy na 5% referenčnej hodnoty je $2{,}75s$.



Obr. 33: Porovnanie odoziev regulovaných systémov na skok $x_{ref} = 10cm$ v čase $t = 0s$ so skokom poruchy $\varphi_{ref} = 1°$ v čase $t = 3s$.



Obr. 34: Porovnanie akčných zásahov regulovaných systémov pre $x_{ref} = 10cm$ v $t = 0s$ so skokom poruchy $\varphi_{ref} = 1°$ v $t = 3s$.

Pre navrhnutý stavový regulátor je ustálená odchylka pri skoku poruchy na vstupe rovná nule a to za výrazne kratšiu dobu ako pri navrhnutom PID regulátore.

XI. ZÁVER

V tejto práci sa úspešne podarilo nájsť správne diferenciálne rovnice, ktoré popisujú zadaný Simulink model Guličky na tyči. Bol vytvorený stavový popis modelu a jeho lineárna aproximácia. V rámci identifikácie boli nájdené približné hodnoty združených parametrov. Nelineárny model nebol presne vytvorený, keďže neboli identifikované hodnoty parametrov súvisiacich s valivým trením guličky a bola predpokladaná zanedbateľnosť ich vplyvu. Avšak je možné, že nepresnoná aproximácia polohy guličky $x[cm]$ (Obr. 13) je spôsobená práve týmto zanedbaním.

Každý regulátor bol úspešne navrhnutý inou metódou tak, aby spĺňali zadané požiadavky. PID a stavový regulátor dosahujú nulovú ustálenú regulačnú odchylku a to aj pri skoku poruchy na vstupe sústavy. PD regulátor dosahuje nulového prekmitu za pomerne rýchlu dobu ustálenia. PID regulátor bol navrhnutý tak, aby stabilizoval guličku za čo najkratšiu dobu, avšak pri regulácii virtuálneho modelu je doba ustálenia najdlhšia zo všetkých regulátorov. Keďže sa jednalo o geometrický návrh metódou Root Locus a koreňe boli umiesňované manuálne na S-rovine, bolo by určite možné nájsť lepší PID regulátor. Kvôli blížiacemu sa termínu odovzdania tejto práce sme sa však uspokojili s uvedeným regulátorom. Stavový regulátor s pozorovateľom má najkratšiu dobu ustálenia odozvy a to aj na skok poruchy. Na druhú stranu, má najvyššie prekmity pri sledovaní skokovej referencie.

LITERATÚRA

[1] Ben Cazzolato. Derivation of the dynamics of the ball and beam system. 01 2007.

[2] Gene F. Franklin, David J. Powell, and Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall PTR, USA, 4th edition, 2001.

DODATOK A
PREČO SI MYSLÍM, ŽE V ZADANÍ JE CHYBA

V tejto sekcii sa budem venovať iba podsystému, ktorý zaručuje prenos referenčného uhlu na uhol naklonenia tyče α. Podľa zadania je vstupom systému referenčný uhol naklonenia tyče α_{ref} a diferenciálne rovnice systému následovné:

$$L\frac{di(t)}{dt} = -Ri(t) - k_e\dot{\varphi}(t) + k_p(\alpha_{ref}(t) - \alpha(t)) \tag{100}$$

$$J_m\ddot{\varphi}(t) = k_m i(t) - b\dot{\varphi}(t) \tag{101}$$

ktoré je možné zjednodušiť na:

$$J_m\ddot{\varphi}(t) + \left(\frac{k_m k_e}{r} + b\right)\dot{\varphi}(t) = \frac{k_m k_p(\alpha_{ref}(t) - \alpha(t))}{R} \tag{102}$$

Rovnice pre pohyb guličky na tyči sú totožné ako v sekcii II.
Pokial by som sa držal zadania, zostavil by som stavové rovnice a poprípade matice:

$$u = \alpha_{ref}; \qquad u = \alpha_{ref}; \tag{103}$$

$$x_1 = \varphi; \qquad \dot{x_1} = x_2; \tag{104}$$

$$x_2 = \dot{\varphi}; \qquad \dot{x_2} = -\frac{k_m k_p k_\alpha}{RJ_m}x_1 - \left(\frac{k_m k_e}{RJ_m} + \frac{b}{J_m}\right)x_2 + \frac{k_m k_p}{RJ_m}u; \tag{105}$$

$$y_1 = \alpha; \qquad y_1 = k_\alpha x_1 \tag{106}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mathrm{k_\alpha\,k_m\,k_p}}{\mathrm{J_m}\,R} & -\frac{b}{\mathrm{J_m}} - \frac{\mathrm{k_m\,k_p}}{\mathrm{J_m}\,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_{x21} & k_{x22} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{k}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{107}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{k_m\,k_p}}{\mathrm{J_m}\,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{x2u} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \tag{108}$$

Prenos tohoto podsystému vyjadrený napríklad z matíc stavového popisu je:

$$G(s) = \frac{\mathbf{C}\,\mathrm{adj}\,(\mathbf{s}\mathbb{1} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det\,(s\mathbb{1}\mathbf{s} - \mathbf{A})} = \frac{k_\alpha k_{x2u}}{s^2 - k_{x22}s - k_{x21}} \tag{109}$$

Tento systém bude mať zosilenie, pre $t \to \infty$:

$$k = \frac{k_\alpha k_{x2u}}{-k_{x21}} = \frac{k_\alpha \frac{k_m k_p}{RJ_m}}{\frac{k_m k_p k_\alpha}{RJ_m}} = 1 \tag{110}$$

Pokial zoberiem do úvahy, že systém má pásmo necitlivosti na intervale pre vstup: $\alpha_{ref} \in \langle -0{,}2, 0{,}5\rangle = \langle \alpha_{min+}, \alpha_{min-}\rangle[°]$, tak ustálená hodnota α by mala byť pri jednotkovom skoku α_{ref} rovná približne $0.5°$. V skutočnosti, ako je vidieť na grafoch v sekcii IX, je hodnota α z dodaného virtuálneho modelu systému rozdielna. To platí aj pre ostatné velkosti α_{ref}.
Výsledná ustálená hodnota α je daná vzťahom:

$$\alpha_{t\to\infty} = (\alpha_{ref} - \alpha_{min})\,0{,}77 \tag{111}$$

Takže existuje pevný prevod medzi α_{ref} a α. To môže nasvedčovať, že vstupom systému nie je referenčný uhol naklonenia tyče, ale referenčný úhol naklonenia hriadele polohového servopohonu. (Poprípade, že vstupom je referenčný uhol naklonenia tyče a výstupom je uhol naklonenia hriadele servopohonu φ).
Keďže je zadané, že medzi uhlom hriadele servopohonu a uhlom naklonenia tyče, je pevný vzťah, potom môžem predpokladať, že tento vzťah platí aj pre referenčné hodnoty.

$$\alpha_{ref} = k_\alpha \varphi_{ref} \tag{112}$$

To znamená, že by malo platiť: $k_\alpha = 0{,}77$. K tejto hodnote som dospel aj pri postupe uvedenom v tejto práci, v ktorej som považoval α_{ref} za φ_{ref} z uvedených dôvodov.

DODATOK B
SPRÁVNA DIFERENCIÁLNA ROVNICA POHYBU GULIČKY NA TYČI

V tejto časti bude odvodená diferenciálna rovnica popisujúca chovanie guličky na tyči pomocou Lagrangeových rovníc. Z odoziev Simulink modelu (Sekcia IX), ktorý bol zadaný, je znateľné, že pri kladných hodnotách uhlu náklonu tyče $\alpha[°]$, sa gulička pohybuje smerom k jej lavému okraju a vzdialenosť $x[cm]$ klesá do záporných hodnôt. Podľa diferenciálnych rovníc guličky na tyči, ktoré boli súčasťou zadania, by však mal platiť opak.

(a) Nákres podľa písomného zadania.

(b) Nákres podľa chovania zadaného Simulink modelu.

Obr. 35: Nákres fyzikálneho modelu guličky na tyči.

$$\sin\alpha = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad h = x\sin\alpha \tag{113}$$

Pre kinetickú energiu T platí:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_b\omega^2 \quad \text{,kde} \quad \dot{x} = r\omega \tag{114}$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right) \tag{115}$$

Kde ω je uhlová rýchlosť guličky. Poloha guličky, pre ktorú má nulovú potenciálnu energiu je na Obr. 35 označená ako U_0. Pokial je poloha guličky pod U_0, jej hodnota potenciálnej energie je záporná a naopak. Pre potenciálnu energiu U platí:

$$U_b = hmg = mgx\sin\alpha \tag{116}$$

Podľa chovania Simulink modelu (Obr. 35 (b)) je hodnota U záporná pokiaľ poloha guličky je pod osou U_0 (ak $\alpha > 0$, potom $x < 0$, teda $U < 0$ a ak $\alpha < 0$, potom $x > 0$, teda $U < 0$). Pre tento prípad zostavím Lagrangeové rovnicu $\mathcal{L} = T - U$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right) - mgx\sin\alpha; \qquad \frac{d\mathcal{L}}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) + b_k\dot{x} + \operatorname{sign}\dot{x}\xi_k\frac{mg}{r} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \tag{117}$$

Táto rovnica bola vytvorená za pomoci literatúry [1]. Jednotlivé derivácie boli vyjadrené: $\frac{d\mathcal{L}}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \ddot{x}\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right)$ a $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -mg\sin\alpha$. Diferenciálna rovnica popisujúca pohyb guličky po tyči pre zadaný Simulink model je v tvare:

$$\ddot{x}\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right) = -mg\sin\alpha - b_k\dot{x} - \operatorname{sign}\dot{x}\xi_k\frac{mg}{r} \tag{118}$$

V prípade písomného zadania (Obr. 35a (a)) avšak platí, že ak poloha guličky je pod osou U_0, jej potenciálna energia je kladná (ak $\alpha > 0$, potom $x > 0$, teda $U > 0$ a ak $\alpha < 0$, potom $x < 0$, teda $U > 0$). Z fyzikálnej podstaty potenciálnej energie by mal platiť opak. Preto $U_a = -mgx\sin\alpha$. Zostavením Lagrangeovej rovnice platí: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = mg\sin\alpha$. Diferenciálna rovnica popisujúca pohyb guličky po tyči, vypočítaná pre (Obr. 35a (a)):

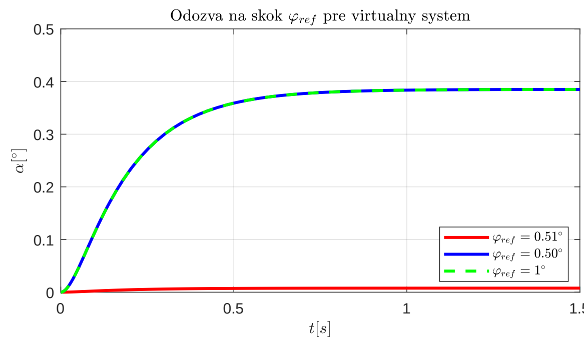
$$\ddot{x}\left(m + \frac{J_b}{r^2}\right) = mg\sin\alpha - b_k\dot{x} - \operatorname{sign}\dot{x}\xi_k\frac{mg}{r} \tag{119}$$

Táto rovnica je totožná s rovnicou danou v písomnom zadaní. Avšak neodpovedá virtuálnemu Simulink modelu, preto pri tejto semestrálnej práci bola používaná diferenciálna rovnica pohybu guličky (118).

DODATOK C
ĎALŠIE OBJAVENÉ ZVLÁŠTNOSTI VIRTUÁLNEHO MODELU

A. *"Zvláštna nelinearita"*

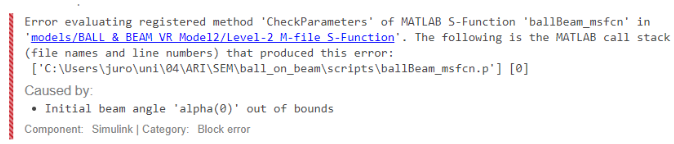
Bola pozorované zvláštne chovanie modelu pre vstupnú hodnotu $\varphi_{ref} = 0{,}5°$. Odozva virtuálneho modelu, je pre tento prípad totožná ako odozva na $\varphi_{ref} = 1°$.



Obr. 36: Porovnanie odoziev na skok v okolí pásma necitlivosti a jednotkového skoku.

B. *Problém s inicializačnými hodnotami*

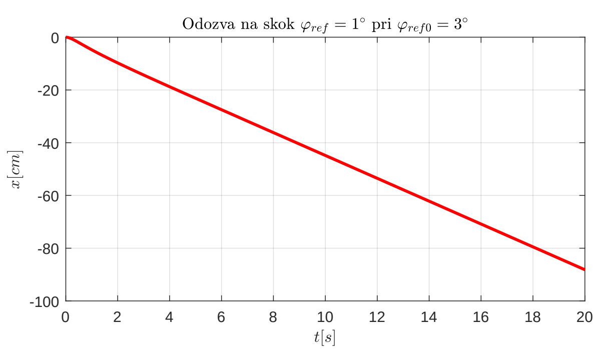
Nastavenie počiatočnej hodnoty uhla systému, by mala byť možná do hodnoty pásma saturácie, avšak testovaním sa zistilo, že hodnoty počiatočných podmienok pre φ_{ref} sú ohraničené na intervale $(-7, 7)$. Pri nastavení hodnôt mimo tento interval, model vypíše error:



Obr. 37: Error pri nastavení počiatočnej hodnoty pre $\varphi_{ref} > 7°$.

C. *Prerazenie pásma saturácie*

V špecifických situáciach, dochádza pre výstupnú hodnotu x virtuálneho systému k prerazeniu pásma saturácie, čo nie je fyzicky možné, keďže tyč by mala mať obmedzenú dĺžku $(1m)$. Tento jav som spozoroval napríklad pri nastavení počiatočných hodnôt uhlu φ_{ref} na hodnoty $\geq 3°$. Alebo keď bol MATLAB "unavený "(stretol som sa s tým aj, pokiaľ neboli zadané inicializačné hodnoty, avšak tento problém sa mi nepodarilo zreprodukovať).



Obr. 38: Odozva na jednotkový skok pri nastavení počiatočnej hodnoty pre $\varphi_{ref} = 3°$.