

Examen VWO

2023

tijdvak 2
tijdsduur: 3 uur

wiskunde A

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd.

Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
verschilregel	$v(x) = f(x) - g(x)$	$v'(x) = f'(x) - g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^g \log(a) + {}^g \log(b) = {}^g \log(ab)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log(a) - {}^g \log(b) = {}^g \log\left(\frac{a}{b}\right)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g \log(a^p) = p \cdot {}^g \log(a)$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g \log(a) = \frac{{}^p \log(a)}{{}^p \log(g)}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

Herbouwkosten in Amsterdam

De **herbouwkosten** zijn de kosten waarvoor een woning na afbraak opnieuw gebouwd kan worden. De herbouwkosten zijn voornamelijk afhankelijk van het **vloeroppervlak**, dat is het totale oppervlak van alle verdiepingen met een stahoogte van ten minste 1,5 meter.

De gemeente Amsterdam gebruikt voor verschillende woningtypen verschillende rekenmodellen om de herbouwkosten te berekenen¹⁾.

twee-onder-een-kapwoningen

Voor twee-onder-een-kapwoningen hanteert Amsterdam het volgende lineaire model:

$$H_{\text{twee}} = -5,63V + 2366,67 \text{ met } 30 \leq V \leq 250$$

Hierin zijn H_{twee} de herbouwkosten voor een twee-onder-een-kapwoning in euro's per m² vloeroppervlak en is V het vloeroppervlak van de woning in m².

- 2p 1 Toon aan dat de herbouwkosten van een twee-onder-een-kap-woning met een vloeroppervlak van 180 m² (afgerond) 243 600 euro zijn.

portiekflats

Voor portiekflats met $30 \leq V \leq 180$ wordt ook een lineair model voor de herbouwkosten per m² vloeroppervlak (H_{portiek}) gehanteerd. Dit model is gebaseerd op de volgende gegevens:

V (in m ²)	50	90
H_{portiek} (in euro's per m ²)	2429	2080

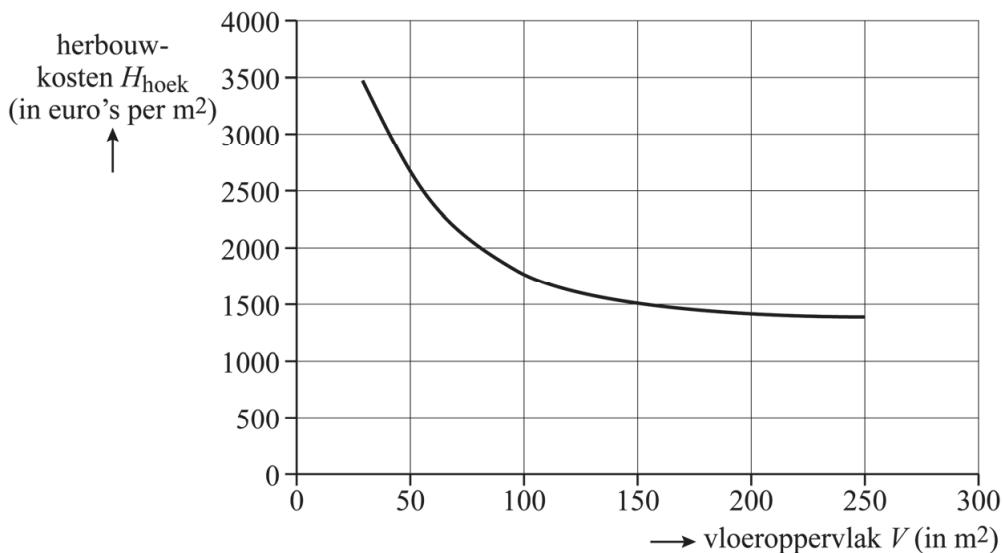
- 5p 2 Bereken met behulp van deze gegevens de maximale herbouwkosten voor een portiekflat met $30 \leq V \leq 180$. Geef je antwoord in honderden euro's.

noot 1 In deze opgave wordt uitgegaan van de regels die in 2017 in Amsterdam golden.

hoekwoningen

Voor hoekwoningen bestaan de herbouwkosten per m² vloeroppervlak uit een vast bedrag van 1375 euro, met daarbovenop een variabel bedrag dat exponentieel afneemt naarmate het vloeroppervlak groter wordt. Zie de figuur.

figuur



De formule die wordt gebruikt is van de vorm $H_{\text{hoek}} = b \cdot g^V + 1375$ met $30 \leq V \leq 250$.

- 4p 3 Op de grafiek in de figuur liggen de punten (30, 3480) en (250, 1387).
- Bereken de waarden van b en g die uit deze gegevens volgen. Geef de waarde van b in gehelen en de waarde van g in vier decimalen.

In de regelgeving hanteert men ook de volgende (nauwkeuriger) formule voor hoekwoningen:

$$H_{\text{hoek}} = e^{-0,02359V+8,36} + 1375 \text{ met } 30 \leq V \leq 250$$

Hierin zijn H_{hoek} de herbouwkosten voor een hoekwoning in euro's per m² vloeroppervlak en is V het vloeroppervlak van de woning in m².

De herbouwkosten van een hoekwoning zijn soms lager dan die van een twee-onder-een-kapwoning met hetzelfde vloeroppervlak.

- 4p 4 Bereken voor welke vloeroppervlakken in gehele m² dit het geval is.

De formule $H_{\text{hoek}} = e^{-0,02359V+8,36} + 1375$ is te herleiden tot de vorm

$$H_{\text{hoek}} = b \cdot g^V + 1375.$$

- 3p 5 Geef deze herleiding. Geef de waarde van b in gehelen en de waarde van g in vier decimalen.

tussenwoningen

De formule die men voor tussenwoningen gebruikt, is:

$$H_{\text{tussen}} = e^{-0,02398V+8,144} + 1144 \text{ met } 30 \leq V \leq 250$$

Hierin zijn H_{tussen} de herbouwkosten voor een tussenwoning in euro's per m² vloeroppervlak en is V weer het vloeroppervlak van de woning in m².

In elk model gaat men ervan uit dat de herbouwkosten per m² afnemen naarmate het vloeroppervlak groter is. De mate waarin de herbouwkosten per m² afnemen, verschilt per model.

- 4p 6 Stel de afgeleiden van H_{hoek} en H_{tussen} op en onderzoek met behulp van een schets van beide afgeleiden bij welke van deze twee woningtypen de mate van afname het grootst is. Licht je antwoord toe.

Groeimodellen

In de 18e eeuw werd algemeen aangenomen dat de toename van een populatie dieren kan worden beschreven met behulp van een meetkundige rij. Een model uit die tijd is:

$$\begin{cases} P_n = r \cdot P_{n-1} \\ P_0 = c \end{cases} \quad \text{model 1}$$

In dit model geldt:

- P_n is de **populatiefractie** na n jaar. Dat is de grootte van de populatie als deel van de maximale populatie. P_n is dus een getal tussen 0 en 1.
- c is de **startpopulatiefractie**. Ook dit getal wordt uitgedrukt als een deel van de maximale populatie (en dus geldt $0 < c < 1$).
- r is de **reproductiefactor**: een getal dat aangeeft hoe snel een populatie zich per jaar uitbreidt.

Neem aan dat in een bepaald bosrijk gebied een populatie van 165 vossenleeft. De reproductiefactor van de vossen in dit gebied is 1,28 en in het gebied is plaats voor maximaal 500 vossen.

- 3p 7 Bereken met behulp van model 1 na hoeveel jaar dit maximale aantal bereikt zal zijn.

In model 1 wordt ervan uitgegaan dat een populatie altijd even snel groeit. Dit komt echter niet overeen met de werkelijkheid: als de populatie groeit wordt de ruimte per dier namelijk steeds kleiner, waardoor het moeilijker wordt om voedsel te vinden. Hierdoor zal een populatie steeds minder snel gaan groeien naarmate deze toeneemt.

Een verbeterde versie van model 1 is het **logistische model**:

$$\begin{cases} P_n = r \cdot P_{n-1} \cdot (1 - P_{n-1}) \\ P_0 = c \end{cases} \quad \text{model 2}$$

De variabelen in dit model hebben dezelfde betekenis als in model 1.

De Oostvaardersplassen is een natuurgebied in de buurt van Lelystad. In 2020 leefden er in dit gebied een groot aantal edelherten. Door dit grote aantal konden andere diersoorten, voornamelijk vogels, zich niet meer goed ontwikkelen. Mede daarom wordt sinds 2021 de populatie door het afschieten van de dieren stabiel gehouden op 500 edelherten.

Neem aan dat er maximaal 2000 edelherten in de Oostvaardersplassen kunnen leven. Er geldt vanaf 2021 dat $r = 1,58$ en $c = 0,25$.

- 3p 8 Bereken met behulp van model 2 hoeveel edelherten er in de periode 2021-2023 bij zouden komen als er geen dieren zouden worden afgeschoten.

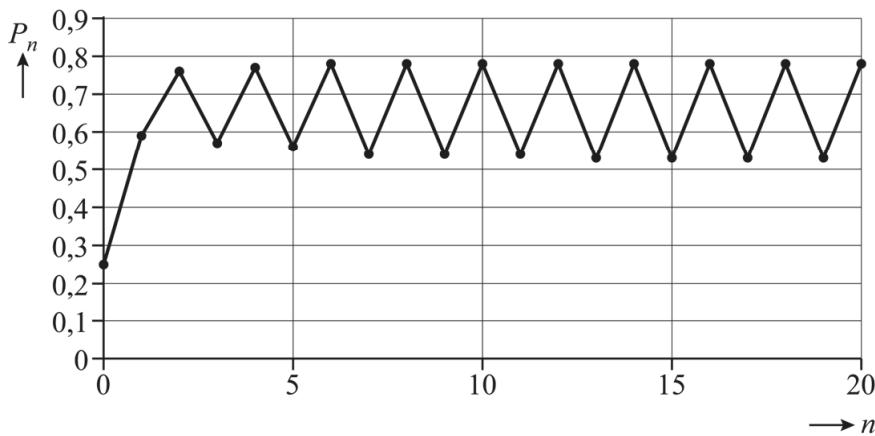
In de rest van deze opgave gaan we bekijken hoe model 2 zich gedraagt bij verschillende waarden van r .

Als je voor r een getal tussen de 0 en 1 invult, dan nadert P_n voor iedere startwaarde c (met $0 < c < 1$) naar 0. Je kunt dat berekenen met de formule voor P_n .

- 3p 9 Geef een redenering waaruit blijkt dat wanneer r tussen de 0 en 1 is, P_n altijd naar 0 nadert.

Voor waarden van r groter dan 1 wordt het model erg onvoorspelbaar.

figuur



In de figuur is de grafiek getekend voor $r = 3,15$ en $c = 0,25$. Er is te zien dat de waarde van P_n op den duur heen en weer gaat springen tussen twee vaste waarden.

- 3p 10 Onderzoek tussen welke twee waarden P_n heen en weer gaat springen voor $r = 3,15$ en $c = 0,25$. Geef deze waarden in twee decimalen.

Unieke woorden

Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend. Dat wil zeggen dat ze niet allemaal uniek zijn. Hoe meer unieke woorden je naar verhouding tegenkomt, hoe moeilijker de tekst is.

In deze opgave kijken we naar het percentage unieke woorden in een tekst. Dit percentage wordt bepaald aan de hand van twee grootheden:

U : het aantal unieke woorden in een stuk tekst;

T : het totaal aantal woorden in dat stuk tekst.

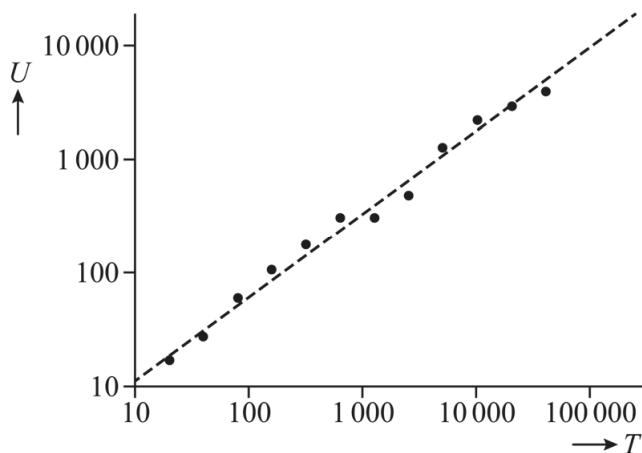
We bekijken de eerste twee zinnen van deze opgave:

Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend.

- 2p 11 Bepaal het percentage unieke woorden in de eerste twee zinnen van deze opgave samen. Geef je antwoord als geheel getal.

Van het boek *On The Origin of Species* van Charles Darwin is het verband tussen U en T bepaald. Zie figuur 1.

figuur 1



In figuur 1 is op beide assen een logaritmische schaal gebruikt. De gestippelde lijn geeft een benadering van het verband tussen U en T . Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

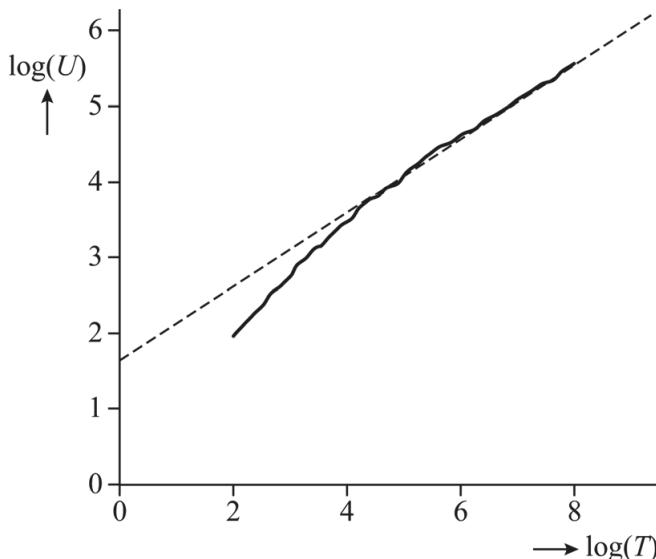
On The Origin of Species bevat in totaal 191 740 woorden en er komen 8842 unieke woorden in voor. Naarmate je verder leest, kom je steeds minder nieuwe unieke woorden tegen. Als je een kwart van dit boek hebt gelezen, ben je al meer dan de helft van het totaal aantal unieke woorden tegengekomen.

- 5p 12 Bereken met behulp van de gestippelde lijn in de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel procent van het totaal aantal unieke woorden je dan al bent tegengekomen. Geef je antwoord als geheel getal.

De taalkundige Gustav Herdan ontdekte een algemeen verband tussen U en T voor grotere teksten. Dit verband werd door Harold Stanley Heap bekendgemaakt en wordt de **wet van Herdan-Heap** genoemd.

De internationale nieuwsdienst Reuters heeft een database – de zogeheten **RCV1** – beschikbaar gesteld ten behoeve van taalonderzoek. Onderzoekers hebben voor RCV1 het verband tussen U en T bepaald. Zie figuur 2, waarin $\log(U)$ tegen $\log(T)$ is uitgezet.

figuur 2



De grafiek in figuur 2 geeft het werkelijke verband tussen U en T in RCV1 en de gestippelde lijn geeft een benadering volgens de wet van Herdan-Heap.

Iemand leest een tekst die bestaat uit de eerste 7432 woorden uit RCV1.

- 2p **13** Ga met behulp van figuur 2 na of deze tekst voldoet aan de wet van Herdan-Heap.

Een formule voor de gestippelde lijn in figuur 2 is

$$\log(U) = 0,49\log(T) + 1,64$$

- 3p **14** Benader met behulp van deze formule het aantal unieke woorden in de eerste 1 000 000 woorden in RCV1. Geef je antwoord in duizenden.

De formule $\log(U) = 0,49\log(T) + 1,64$ kan worden herleid tot de vorm $U = c \cdot T^n$. Na afronding van c op gehelen geldt $U = 44 \cdot T^{0,49}$.

- 4p **15** Geef deze herleiding en bepaal daarmee c in één decimaal.

Naarmate je vanaf het begin onafgebroken verder leest in RCV1, komen er steeds minder unieke woorden bij. Vanaf een bepaald totaal aantal woorden komt er (gemiddeld) minder dan één uniek woord per 50 woorden bij.

- 4p **16** Onderzoek bij welk totaal aantal woorden dit het geval is. Geef je antwoord in duizenden.

London Eye

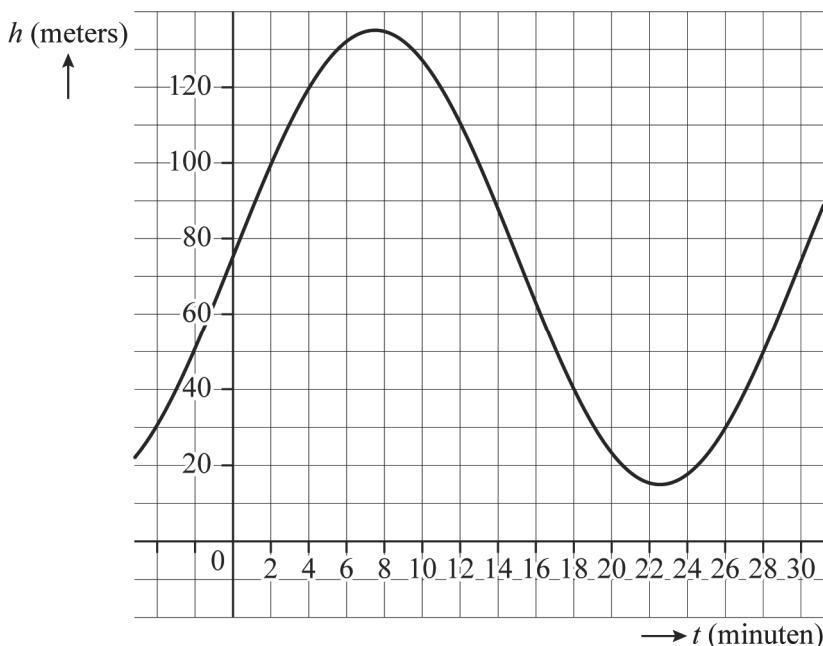
De London Eye is een reuzenrad in Londen. Zie de foto.

Een toerist heeft een kaartje gekocht waarmee hij zelf een dagprogramma kan samenstellen. Zo'n dagprogramma bestaat uit een bezoek aan de London Eye en aan nog twee andere attracties. Die twee andere attracties mag hij kiezen uit vijf bekende attracties in Londen. De toerist mag zelf bepalen in welke volgorde hij de drie attracties bezoekt.

- 3p 17 Bereken hoeveel verschillende dagprogramma's de toerist kan maken.

De London Eye heeft 32 gondels, waarin de bezoekers plaatsnemen. Eén rondgang van een gondel duurt precies 30 minuten. De grafiek in de figuur hoort bij de hoogte van een van de gondels.

figuur



Bij deze grafiek hoort de formule $h = 75 + 60 \cdot \sin(0,209t)$. Hierbij is h de hoogte van de gondel boven de grond in meters en t de tijd in minuten met $t = 0$ om 11.00 uur 's ochtends.

Deze grafiek hoort echter niet bij de gondel die zich om 11.00 uur bij het instapplatform in het laagste punt bevindt. De grafiek van de gondel die zich om 11.00 uur in het laagste punt bevindt, heeft een formule van de vorm $h = 75 + 60 \cdot \sin(0,209(t - d))$.

- 2p 18 Bereken een mogelijke waarde van d .

foto



De gondels draaien met een dusdanig lage constante snelheid dat bij het in- en uitstappen het reuzenrad niet hoeft te worden stilgezet. Deze constante snelheid is even groot als de maximale snelheid waarmee h toeneemt of afneemt.

- 5p **19** Bereken deze constante snelheid in km/uur. Geef je antwoord in twee decimalen.

Hoe hoger je in het reuzenrad komt, hoe verder je kunt kijken. Met de formule $a = \sqrt{h^2 + 12742000h}$, waarbij a de maximale kijkafstand in meters is en h de hoogte boven de grond in meters, kun je benaderen hoe ver je kunt kijken vanaf een bepaalde hoogte boven de grond.

Windsor Castle ligt hemelsbreed 40 kilometer van de London Eye vandaan. Op een heldere dag kun je vanuit de London Eye Windsor Castle zien liggen.

- 5p **20** Bereken hoelang je per rondgang vanuit de London Eye op een heldere dag Windsor Castle kunt zien. Geef je antwoord in gehele minuten.

NS Flex

Voor reizigers met het openbaar vervoer verkoopt de NS de zogenaamde NS Flex-abonnementen. Je kunt dan voor elke maand opnieuw het abonnement kiezen waarmee je in die maand in totaal de laagste kosten hebt.

Drie van deze Flex-abonnementen zijn **Dal Voordeel**, **Altijd Voordeel** en **Dal Vrij**. In de tabel staan voor deze abonnementen de kosten per maand aangegeven en de kortingen die bij deze abonnementen gegeven worden. In deze opgave beperken we ons tot deze drie abonnementen.

tabel

Dal Voordeel	Altijd Voordeel	Dal Vrij
€ 5,- per maand	€ 23,- per maand	€ 105,- per maand
40% korting in het weekend	40% korting in het weekend	onbeperkt reizen in het weekend
40% korting buiten de spits	40% korting buiten de spits	onbeperkt reisen buiten de spits
geen korting in de spits	20% korting in de spits	geen korting in de spits

Eefje woont in Enschede en werkt in Deventer. Ze reist altijd met de trein naar haar werk. Het aantal dagen dat ze per maand moet reizen is verschillend. Eefje wil een schema maken waaruit ze voor elk mogelijk aantal reisdagen per maand kan aflezen welk abonnement voor haar het voordeligst is.

Voor het maken van dit schema moet rekening gehouden worden met de volgende gegevens:

- Eefjes werkdagen zijn van maandag tot en met donderdag.
- Eefjes heenreis is met de trein van 6.16 uur vanuit Enschede.
- Eefjes terugreis is met de trein van 17.30 uur vanuit Deventer.
- Eefje reist altijd 2^e klas en via de goedkoopste route.
- Eefje reist alleen voor haar werk met de trein.
- De spits is op werkdagen van 6.30 tot 9.00 uur en van 16.00 tot 18.30 uur.
- Het tijdstip waarop je incheckt, bepaalt de korting die wordt berekend voor de hele reis.
- Een enkele reis Enschede-Deventer vol tarief 2e klas kost € 12,10.

- 7p 21 Maak met behulp van berekeningen een schema waaruit Eefje voor elk mogelijk aantal reisdagen per maand kan aflezen welk abonnement voor haar het voordeligst is.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.