Modele systemów dynamicznych

Ćwiczenia – lista zadań nr 5

Zad. 1.
Sprawdź sterowalność obiektu dyskretnego opisanego modelem: $x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zad. 2.
Dla obiektu opisanego równaniem: $x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć ciąg sterowań $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ przeprowadzający obiekt ze stanu $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ do stanu $x^* = [4 \quad 1 \quad 1]^T$ w $N = 3$ krokach.

Zad. 3.
Sprawdzić obserwowalność obiektu:

$$x_{n+1} = Ax_n$$

$$y_n = Cx_n$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zad. 4.

W obiekcie opisanym równaniem:

$$x_{n+1} = Ax_n$$

$$y_n = Cx_n$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zaobserwowano wartości $y_0 = 3$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$. Wyznacz stan x_2.

DODATEK

Podstawowe zadanie teorii sterowania jest następujące: dla danego opisu obiektu, stanu początkowego x_0 i stanu zadanego x^* należy wyznaczyć sterowanie, które w skończonym czasie przeprowadzi obiekt ze stanu x_0 do x^*. Jeżeli da danego obiektu rozwiązanie tego zadania istnieje dla dowolnych x_0 i x^*, to obiekt nazywamy ***sterowalnym***.

Sterowalność obiektu dyskretnego:
Dla liniowego obiektu dyskretnego o wielu wejściach:

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

konieczny i wystarczający warunek sterowalności jest następujący:

$$\mathrm{rz}M = k$$

gdzie: k jest rzędem obiektu (liczbą składowych wektora stanu), natomiast:

$$M = [A^{k-1}B, A^{k-2}B, \ldots, AB, B],$$

gdzie macierz $A^{k-i}B$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ jest odpowiednią częścią macierzy M.

Jeżeli obiekt jest sterowalny, to odpowiednie sterowanie $\bar{u}_k = [u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}]^T$ dla N kroków wyznaczamy z zależności:

$$u_k = M^{-1}(x^* - A^k x_0)$$

Obiekt jest ***obserwowalny****, jeżeli każdy jego stan można wyznaczyć na podstawie pomiarów wyjścia dla skończonej liczby kroków N: $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-N+1}$*

Obserwowalność obiektu dyskretnego:
Dla liniowego obiektu dyskretnego o wielu wejściach:

$$x_{n+1} = Ax_n$$

$$y_n = Cx_n$$

konieczny i wystarczający warunek obserwowalności jest następujący:

$$\mathrm{rz}D = k$$

gdzie: k jest rzędem obiektu (liczbą składowych wektora stanu), natomiast macierz D jest postaci:

$$D = [(A^{k-1})^T C^T, (A^{k-2})^T C^T, \ldots, A^T C^T, C^T],$$

Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to wówczas:

$$x_n = A^{k-1} (D^T)^{-1} \bar{y}_n$$

gdzie:

$$\bar{y}_n = [y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}]^T.$$