DODATEK

Piękne i przydatne wzory:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Transformatą $\mathscr{Z}$ nazywamy następujące przekształcenie:

$$\mathscr{Z}[x_n] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad \text{gdzie } z \text{ jest zmienną zespoloną.}$$

Transformata $\mathscr{Z}$ posiada następujące własności:

1. $\mathscr{Z}\left[a_1 x_n + a_2 y_n\right] = a_1 X(z) + a_2 Y(z)$, gdzie $a_1, a_2 \in \mathscr{R}$.
2. $\mathscr{Z}[x_{n+m}] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x_k z^{-k}\right]$ – przesunięcie w prawo
3. $\mathscr{Z}[x_{n-m}] = z^{-m} X(z) + \sum_{k=1}^{m} x_{-k} z^{-m+k}$ – przesunięcie w lewo
4. $\mathscr{Z}[n x_n] = -z \frac{d}{dz} X(z)$ - zmiana skali oryginału
5. $\mathscr{Z}[a^{-n} x_n] = X(az)$ - zmiana skali transformaty
6. $\sum_{i=0}^{n} x_i = \frac{z}{z-1} X(z)$
7. $\sum_{i=1}^{n} x_{n-i} y_i = X(z) Y(z)$ – transformata splotu

x_n	$\mathscr{Z}\left[x_n\right]$
δ_n	1
1_n	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$

x_n	$\mathscr{Z}\left[x_n\right]$
$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$\sin \omega n$	$\frac{z sin\omega}{z^2 - 2z cos\omega + 1}$
$\cos \omega n$	$\frac{z^2 - z cos\omega}{z^2 - 2z cos\omega + 1}$

Tablica 1: Tabela często używanych transformat $\mathscr{Z}$

DODATEK

Podstawowe zadanie teorii sterowania jest następujące: dla danego opisu obiektu, stanu początkowego x_0 i stanu zadanego x^* należy wyznaczyć sterowanie, które w skończonym czasie przeprowadzi obiekt ze stanu x_0 do x^*. Jeżeli da danego obiektu rozwiązanie tego zadania istnieje dla dowolnych x_0 i x^*, to obiekt nazywamy ***sterowalnym***.

Sterowalność obiektu dyskretnego:

Dla liniowego obiektu dyskretnego o wielu wejściach:

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

konieczny i wystarczający warunek sterowalności jest następujący:

$$\mathrm{rz}M = k$$

gdzie: k jest rzędem obiektu (liczbą składowych wektora stanu), natomiast:

$$M = [A^{k-1}B, A^{k-2}B, \ldots, AB, B],$$

gdzie macierz $A^{k-i}B$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$ jest odpowiednią częścią macierzy M.

Jeżeli obiekt jest sterowalny, to odpowiednie sterowanie $\bar{u}_k = [u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}]^T$ dla N kroków wyznaczamy z zależności:

$$u_k = M^{-1}(x^* - A^k x_0)$$

Obiekt jest ***obserwowalny****, jeżeli każdy jego stan można wyznaczyć na podstawie pomiarów wyjścia dla skończonej liczby kroków N:* $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-N+1}$

Obserwowalność obiektu dyskretnego:

Dla liniowego obiektu dyskretnego o wielu wejściach:

$$x_{n+1} = Ax_n$$

$$y_n = Cx_n$$

konieczny i wystarczający warunek obserwowalności jest następujący:

$$\mathrm{rz}D = k$$

gdzie: k jest rzędem obiektu (liczbą składowych wektora stanu), natomiast macierz D jest postaci:

$$D = [(A^{k-1})^T C^T, (A^{k-2})^T C^T, \ldots, A^T C^T, C^T],$$

Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to wówczas:

$$x_n = A^{k-1}(D^T)^{-1}\bar{y}_n$$

gdzie:

$$\bar{y}_n = [y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}]^T.$$