

Modele systemów dynamicznych

Ćwiczenia – lista zadań nr 1

Zad. 1.

Wyznacz transformaty Laplace'a poniższych funkcji, korzystając z definicji:

a) $f(t) = 1(t)$

b) $f(t) = e^{at}$

c)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & 0 \leq t < b \\ -A & b \leq t < 2b \\ 0 & t \geq b \end{cases}$$

Zad. 2.

Wyznacz transformaty Laplace'a poniższych funkcji, korzystając z tabeli transformat:

a) $8 - 3e^{3t}$

b) $4 \sin 5t - 2e^{5t} + 5$

Zad. 3.

Rozwiąż równania różniczkowe:

a) $y^{(3)} + 3\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 6e^{-t}, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$

b) $\ddot{y} + 4y = \sin t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$

c) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 5 \cdot 1(t), \quad y(0) = -1, \quad \dot{y}(0) = 2$

Zadanie domowe

Zad. 1.

Wyznacz transformaty Laplace'a poniższych funkcji, korzystając z definicji:

a) $\cos at$

b) $\sin at$

Zad. 2.

Wyznacz transformaty Laplace'a poniższych funkcji, korzystając z tabeli transformat:

a) $\cos 5t - e^{-3t}$

b) $\frac{1}{2}(\sin 3t - t \cos t)$

Zad. 3.

Rozwiąż równania różniczkowe:

a) $2\dot{y} + y = t^2 + 2, \quad y(0) = 4$

b) $\ddot{y} + 4y = 3 \sin t + 10 \cos 3t, \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 3$

c) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 4e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 6$

d) $y^{(4)} + y^{(3)} = \cos t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = y^{(3)}(0) = 0$

Dodatek

Transformatą Laplace’a nazywamy następujące przekształcenie:

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad \text{gdzie } s \text{ jest zmienną zespoloną.}$$

Transformata Laplace’a posiada następujące własności:

1. $\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$, gdzie $a_1, a_2 \in \mathcal{R}$.
2. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.
3. $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)]$.
4. Jeśli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ to $\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s)$.
5. $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds$.
6. $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$, gdzie $a > 0$.
7. $\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s)$, gdzie $a > 0$.
8. $\mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)] = F(s - p_0)$, gdzie p_0 jest dowolną liczbą zespoloną.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\delta(t)$	1	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathcal{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$	$e^{at} \cdot \frac{t^n}{n!}, n \in \mathcal{N}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$
$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$		

Tablica 1: Tabela często używanych transformat Laplace’a