Metody systemowe i decyzyjne w informatyce

Ćwiczenia – lista zadań nr 2

Zad. 1.
Wyznacz transmitancje obiektów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi:

a) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \dot{u} + u$,

b) $\dot{y} + 2y = u$.

Wyciągnij wnioski z otrzymanych rezultatów.

Zad. 2.
Dany jest układ ciągły o transmitancji $K(s) = \dfrac{1}{s+1}$. Wyznacz odpowiedź tego układu na skok jednostkowy.

Zad. 5.
Zlinearyzuj względem początku układu współrzędnych następujący proces:

a)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 + x_1 x_2 + x_2^2 - u^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + e^{-x_2} \sin x_1 + 2u \\ y = x_1 + u \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot \sin x_2 + x_2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 e^{-x_2} + u^2 \\ y = 2x_1 x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0 \end{cases}$$

Wyznacz wzór określający stany równowagi $\overline{\mathbf{x}}$ zlinearyzowanych procesów dla zadanych sterowań $\mathbf{u}(t) = \overline{\mathbf{u}}$.

Zadanie domowe

Zad. 1.

Przebieg zmian zawartości insuliny we krwi człowieka po podaniu dawki insuliny można modelować jako proces inercyjny II rzędu opisany równaniem różniczkowym:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u,$$

gdzie $u(t)$ oznacza dawkowanie insuliny w czasie a $y(t)$ jest przebiegiem zmian odchylenia zawartości insuliny.

Zakładając zerowe warunki początkowe, wyznacz jego transmitancję oraz odpowiedzi na impuls Diraca $u(t) = \delta(t)$ ($\mathscr{L}[\delta(t)] = 1(s)$) oraz na skok jednostkowy $u(t) = 1(t)$. Wykreśl przebiegi $y(t)$ dla obu pobudzeń. Zinterpretuj impuls Diraca i skok jednostkowy w kontekście dawkowania insuliny.

Zad. 2.

Układ liniowy ciągły na wymuszenie $u(t) = 1(t)$ odpowiedział sygnałem $y(t) = e^{-t}$. Wyznacz transmitancję tego układu.

DODATEK

Transmitancją liniowego procesu o zerowych warunkach początkowych nazywamy stosunek transformaty Laplace'a wyjścia do transformaty Laplace'a wejścia:

$$K(s) \equiv \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Opis w postaci **wektora stanu** ma formę układu:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \\ \mathbf{y}(t) = G\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \end{cases},$$

gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ to wektory o określonych wymiarach:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_R(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_S(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_L(t) \end{bmatrix}$$

Funkcje F i G są funkcjami wektorowymi o postaciach:

$$F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \\ f_2\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \\ \vdots \\ f_R\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \end{bmatrix}, \quad G\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) = \begin{bmatrix} g_1\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \\ g_2\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \\ \vdots \\ g_L\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \end{bmatrix}$$

W szczególnym przypadku, liniowy proces można opisać za pomocą układu:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases},$$

gdzie $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ to macierze o odpowiednich wymiarach:

$$\mathbf{A} \in \mathscr{R}^{R\times R}, \mathbf{B} \in \mathscr{R}^{R\times S}, \mathbf{C} \in \mathscr{R}^{L\times R}, \mathbf{D} \in \mathscr{R}^{L\times S}.$$

Metoda **linearyzacji** bazująca na rozwinięciu w szereg Taylora pozwala uzyskać dla opisu

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = F\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \\ \mathbf{y}(t) = G\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \end{cases}$$

opis liniowy

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases},$$

będący jego przybliżeniem w otoczeniu wybranego punktu:

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} \\ \overline{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_R \\ \overline{u}_1 \\ \vdots \\ \overline{u}_S \end{bmatrix}.$$

Macierze chodzące w skład przybliżenia liniowego mają postać:

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_R} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_R}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_R}{\partial x_R} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_S} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_R}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_R}{\partial u_S} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}}$$

$$\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_R} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_L}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_L}{\partial x_R} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}}$$

$$\mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{u})|_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_S} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_L}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial g_L}{\partial u_S} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}}}$$

Przyjmijmy, że **punkt równowagi** procesu opisanego za pomocą wektora stanu to taki punkt, w którym $\mathbf{x}'(t) = 0$ (dla procesu ciągłego) lub $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ (dla procesu dyskretnego).