Modele systemów dynamicznych

Ćwiczenia – lista zadań nr 4

Zad. 1.
Wykonaj 4 pierwsze iteracje schematu Eulera dla równań różniczkowych

a) $y'(t) = -y(t), \quad y(0) = 1$

b) $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

przyjmując w kolejnych symulacjach wielkość kroku całkowania $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.1$.

Zad. 2.
Wyznacz z definicji transformaty $\mathscr{Z}$ poniższych funkcji:

a) $x_n = \delta_n$

b) $x_n = 1_n$

c) $x_n = n$

d) $x_n = n^2$

Zad. 3.
Wyznacz z definicji transformaty $\mathscr{Z}$ poniższych funkcji, wykorzystując jej wybrane własności:

a) $x_n = n$

b) $x_n = n^2$

Zad. 4.
Wyznacz oryginały x_n podanych wyrażeń:

a) $X(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 1}$

b) $X(z) = \dfrac{0.5z}{(z-0.5)(z-1)}$

c) $X(z) = \dfrac{8z}{(2z-1)(4z+1)}$

f) $X(z) = \dfrac{1}{(z-1)}$

g) $X(z) = \dfrac{1}{(z+1)(3z-1)}$

Zad. 5.
Dla systemu opisanego równaniem różnicowym $x_n + 2x_{n-1} = 3u_n$ wyznacz odpowiedź na pobudzenie $u_n = \delta_n$ przy warunku początkowym $x_{-1} = 1$ na dwa sposoby: bez użycia transformaty $\mathscr{Z}$ oraz z jej wykorzystaniem. Porównaj oba podejścia.

Zadanie domowe

Zad. 1.

Wyznacz z definicji transformaty $\mathscr{Z}$ funkcji:

$x_n = a^n$

Zad. 2.

Wyznacz z definicji transformaty $\mathscr{Z}$ poniższych funkcji, wykorzystując jej wybrane własności:

a) $x_n = na^n$

b) $x_n = n^2 a^n$

c) $x_n = \sin \omega n$

d) $x_n = \cos \omega n$

Zad. 3.

Wyznacz oryginały x_n podanych wyrażeń:

a) $X(z) = \dfrac{2z}{z^2+1}$

b) $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$

Zad. 4.

Rozwiąż równanie różnicowe $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = u_n$ dla $u_n = n$ przy następujących warunkach początkowych $x_0 = 1$, $x_1 = 1$.

Zad. 5.

Dla systemu opisanego równaniem różnicowym $x_{n+1} - ax_n = bu_{n+1} + cu_n$ wyznacz odpowiedź na pobudzenie $u_n = \delta_n$ przy warunku początkowym y_0.

Zad. 6.

Układ liniowy dyskretny na wymuszenie $u_n = \begin{cases} n & \text{dla} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n < 0 \end{cases}$ odpowiedział sygnałem $y_n = e^{-n}$ dla $n \geq 0$. Wyznacz jego transmitancję.

DODATEK

Piękne i przydatne wzory:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Transformatą $\mathscr{Z}$ nazywamy następujące przekształcenie:

$$\mathscr{Z}[x_n] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad \text{gdzie } z \text{ jest zmienną zespoloną.}$$

Transformata $\mathscr{Z}$ posiada następujące własności:

1. $\mathscr{Z}\left[a_1 x_n + a_2 y_n\right] = a_1 X(z) + a_2 Y(z)$, gdzie $a_1, a_2 \in \mathscr{R}$.
2. $\mathscr{Z}[x_{n+m}] = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x_k z^{-k}\right]$ – przesunięcie w prawo
3. $\mathscr{Z}[x_{n-m}] = z^{-m} X(z) + \sum_{k=1}^{m} x_{-k} z^{-m+k}$ – przesunięcie w lewo
4. $\mathscr{Z}[n x_n] = -z \frac{d}{dz} X(z)$ - zmiana skali oryginału
5. $\mathscr{Z}[a^{-n} x_n] = X(az)$ - zmiana skali transformaty
6. $\sum_{i=0}^{n} x_i = \frac{z}{z-1} X(z)$
7. $\sum_{i=1}^{n} x_{n-i} y_i = X(z) Y(z)$ – transformata splotu

x_n	$\mathscr{Z}\left[x_n\right]$
δ_n	1
1_n	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$

x_n	$\mathscr{Z}\left[x_n\right]$
$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$\sin \omega n$	$\frac{z sin\omega}{z^2 - 2z cos\omega + 1}$
$\cos \omega n$	$\frac{z^2 - z cos\omega}{z^2 - 2z cos\omega + 1}$

Tablica 1: Tabela często używanych transformat $\mathscr{Z}$