Lista 5

STEROWALNOŚĆ i OBSERWOWALNOŚĆ

zad. 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = [A^2B, AB, B] \quad k = 3$$

$$AB = A \cdot B =$$

$$A^2B = A \cdot AB$$

$$M = [B, AB, A^2B]$$

sprawdzanie rzędu macierzy

TEORIA

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \\ y_n = Cx_n + Du_n \end{cases}$$

sterowalność:

$rz\, M = k$

jeżeli są równe to obiekt jest sterowalny następo

rząd macierzy musi być równy rzędowi obiektu

$$M = [A^{k-1}B, A^{k-2}B, \dots, AB, B]$$

$$u_N = M^{-1}(x^* - A^k x_0)$$

x_0 - stan początkowy

x^* - stan pożądany (docelowy)

zad. 1.

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Czy obiekt jest sterowalny?

$$r_z M = n$$

$$k = 3$$

$$M = [A^2 B, AB, B]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{array}{c} \begin{matrix} A^2B & AB & B \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\det M \neq 3$$

układ nie jest sterowalny

Obserwowalność

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n \\ y_n = Cx \end{cases}$$

$rz\, D = k$

$$D = \left[(A^{k-1})^T C^T, (A^{k-2})^T C^T, \dots, A^T C^T, C^T \right]$$

$$x_n = A^{k-1} (D^T)^{-1} \bar{y}_n$$

$\bar{y}_n$ - pomiary wyjścia

zad. 3.

$$x_{n+1} = Ax_n$$

$$y_n = Cx_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [(A^2)^T C^T, A^T C^T, C^T]$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^T \cdot C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

mocerny

macierzy
jeżeli wyznacznik $^{\vee}$ jest równy 0 to rząd macierzy
jest mniejszy niż 3

jeżeli jest różny od 0 to wiemy, że
jest równy 3

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(D) = 1 \neq 0$$

↳ jest obserwowalny