Politechnika Wrocławska

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

**Modele systemów dynamicznych**

Sprawozdanie z laboratorium 4

**Janusz Andrzejewski**

Nr albumu: **284052**

Kierunek: **Inżynieria systemów**

WROCŁAW 2025

**MODEL RUCHU W POLU CENTRALNYM**

# Wstęp teoretyczny

Celem sprawozdania jest analiza modelu fizycznego opisującego ruch ciała w polu centralnym – klasycznego zagadnienia mechaniki nieba. Jest to problem dwóch ciał, w którym jedno z nich (np. planeta) porusza się pod wpływem siły grawitacji drugiego (np. Słońca), które uznaje się za nieruchome.

Podstawowe wzory fizyczne używane do przekształcenia:

Prawo powszechnego ciążenia oraz druga zasada dynamiki Newtona

– wektor siły ciążenia

G – stała grawitacyjna

M ,m – masy ciał

r – odległość miedzy środami mas obu ciał

– wektor jednostkowy kierunek przyciągania ciała

analogicznie

Równanie drugiego rzędu na ruch ciał

x – współrzędna ciała w osi X,

y – współrzędna ciała w osi Y,

– prędkość ciała w kierunku X,

– prędkość ciała w kierunku Y,

t – czas,

lub

Równanie odległości ciała od środka siły

r(θ) – odległość od środka przy kącie θ (dokładna trajektoria),

A – parametr związany z mimośrodem orbity

B – związany z momentem pędu

h – moment pędu na jednostkę masy

e – mimośród

Równanie średniego błędu bezwzględnego oraz średniego błędu kwadratowego

przewidywane wartości

wartości dokładne

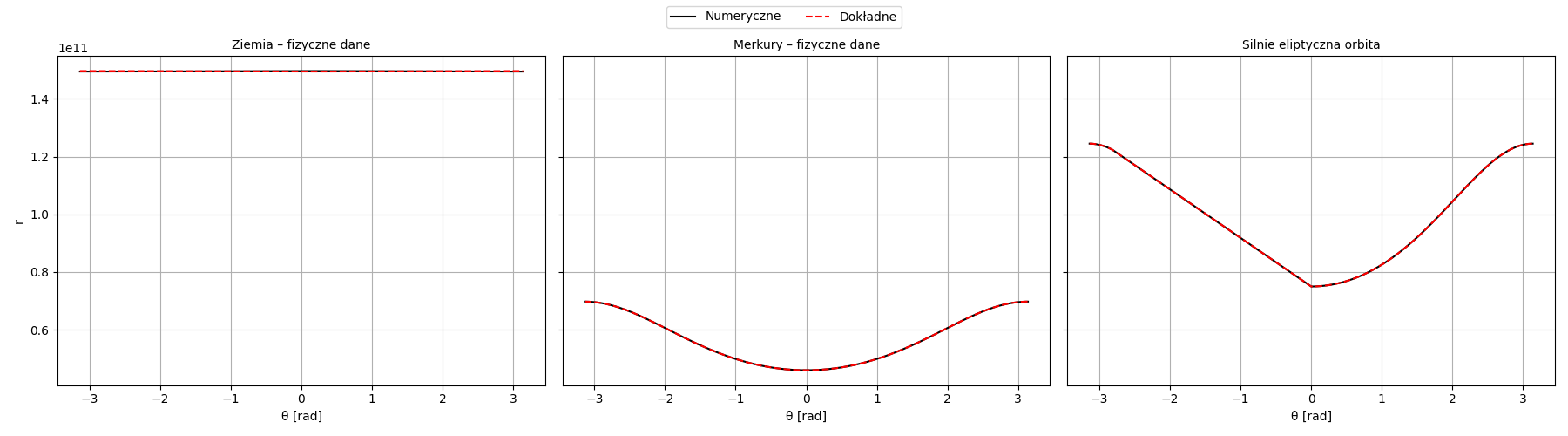
# Opis rozwiązania

Kod kreskowy

# Wyniki obliczeń

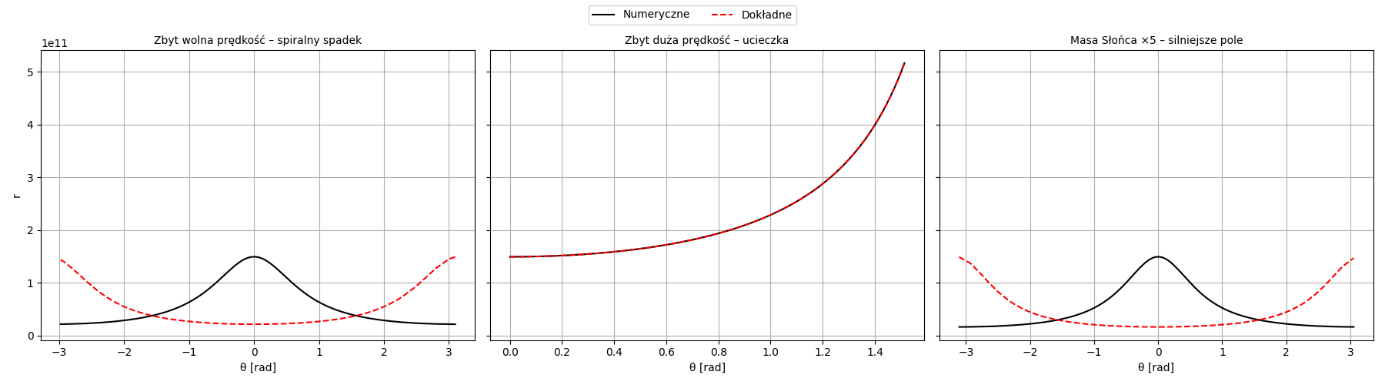
Porównanie trajektorii pokazało dobrą zgodność numeryczną z rozwiązaniem analitycznym.

1.1 Układ Ziemia – fizyczne dane



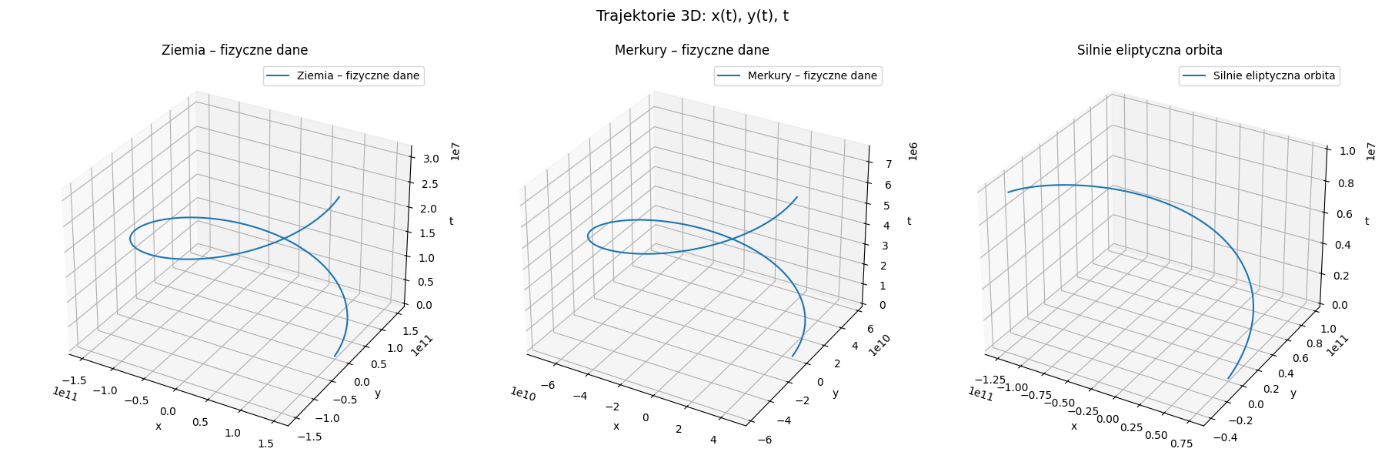
Rysunek 1. Trajektoria r(θ) – numeryczna vs. analityczna dla Ziemi

1.2 Układ Merkury – fizyczne dane



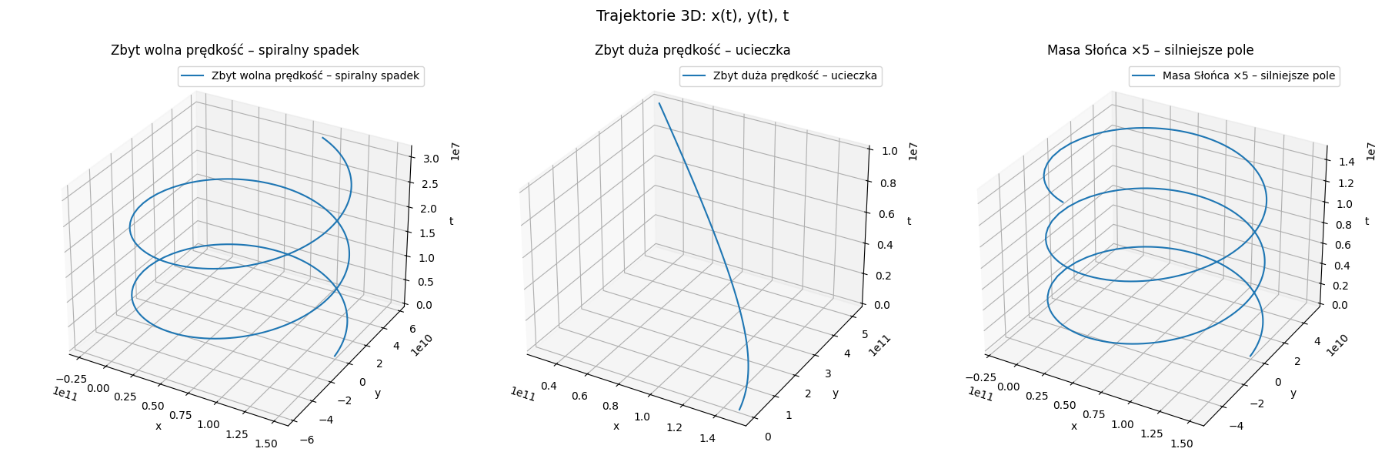
Rysunek 2. Trajektoria r(θ) – Merkury

1.3 Silnie eliptyczna orbita



Rysunek 3. Trajektoria dla wysokiego mimośrodu

1.4 Zbyt wolna / zbyt szybka prędkość początkowa



Rysunek 4. Wykresy trajektorii dla prędkości suborbitalnej i hiperbolicznej

Dla orbit Ziemi i Merkurego zgodność modelu numerycznego z analitycznym jest bardzo wysoka, co potwierdzają zarówno wykresy, jak i niskie wartości MAE oraz MSE. Przy silnie eliptycznej trajektorii błędy rosną zauważalnie, zwłaszcza w obszarach o gwałtownej zmianie nachylenia toru względem kąta.

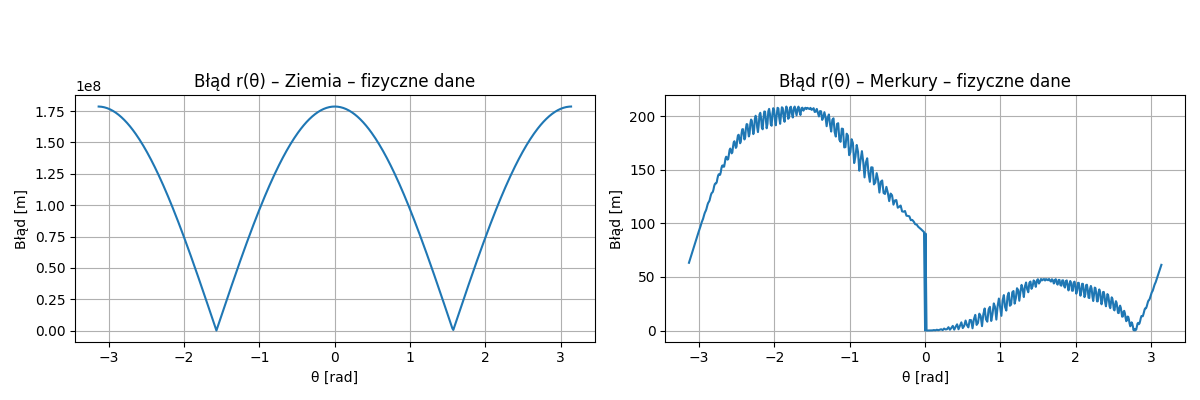
Nietypowe scenariusze – takie jak zbyt mała prędkość początkowa (prowadząca do spiralnego spadku) lub zbyt duża (powodująca ucieczkę z układu) – również generują większe odchylenia, ujawniając ograniczenia klasycznego modelu w ekstremalnych warunkach.

Wizualizacje 3D umożliwiają dodatkową interpretację ruchu: zamknięte orbity leżą w jednej płaszczyźnie, natomiast tory ucieczkowe ukazują niemonotoniczny wzrost odległości w czasie.

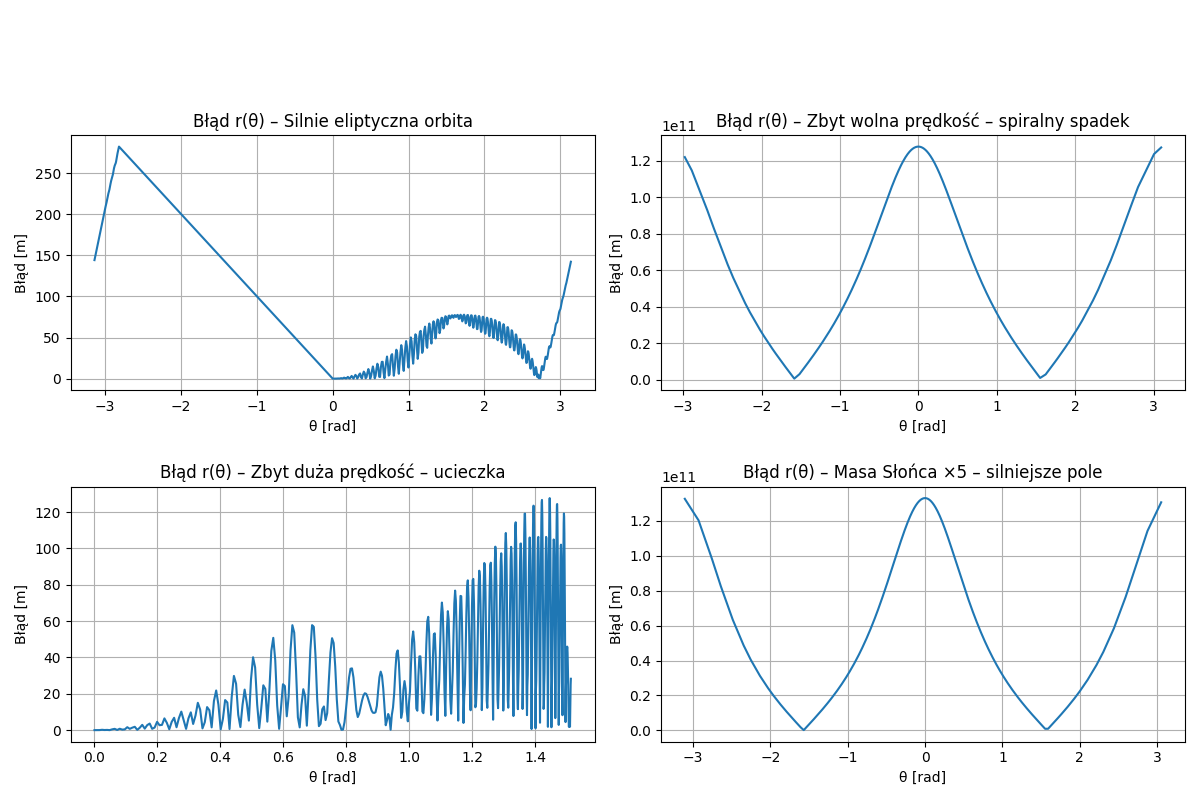
Tabela 1. Obliczone średnie bezwzględne i kwadratowe błędy

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | MAE | MSE |
| Ziemia – Słonce (rzeczywiste) | 1.138815e+08 | 1.599449e+16 |
| Merkury – Słonce (rzeczywiste) | 9.371100e+01 | 1.427395e+04 |
| Merkury – Słonce (nie rzeczywiste) | 7.042044e+01 | 9.461601e+03 |
| Silnie eliptyczna orbita | 9.252485e+10 | 9.827663e+21 |
| Zbyt wolna prędkość | 4.274094e+01 | 3.089281e+03 |
| Masa Słońca ×5 | 9.233533e+10 | 1.003411e+22 |

1.5 Wykresy błędów bezwzględnych r(θ)



Rysunek 5. Wykresy błędów dla danych fizycznych



Rysunek 6. Wykresy błędów dla danych zmodyfikowanych

Analiza błędów bezwzględnych r(θ) wykazała, że najmniejszy błąd występuje dla orbity Merkurego – zarówno w wersji realistycznej, jak i uproszczonej. Świadczy to o dużej dokładności metody numerycznej w przypadku orbit o małym mimośrodzie.

Dla Ziemi błąd jest nieco większy, ale wciąż stabilny i akceptowalny.

Największe błędy pojawiają się w warunkach ekstremalnych: przy silnie eliptycznych orbitach, skrajnych prędkościach początkowych oraz zwiększonej masie centralnej. Największe odchylenia występują w pobliżu peryhelium lub w miarę oddalania się obiektu.

Wykresy błędu r(θ) pozwalają precyzyjnie zlokalizować miejsca na orbicie, w których rozwiązanie numeryczne odbiega od analitycznego. Natomiast przedstawione w tabeli wartości MAE i MSE są średnimi statystycznymi tych błędów — podsumowują globalnie rozkład widoczny na wykresach.

Podsumowując, metoda numeryczna jest wiarygodna w typowych warunkach, lecz wymaga ostrożności przy dynamicznych i niestandardowych orbitach, gdzie lokalne błędy mogą istotnie wzrosnąć.

# Wnioski i podsumowanie

Przeprowadzona analiza potwierdziła poprawność modelu ruchu w polu centralnym. Porównanie rozwiązań numerycznych i analitycznych wykazało wysoką zgodność dla realistycznych przypadków (Ziemia, Merkury), a wzrost błędów był zauważalny przy ekstremalnych warunkach (np. eliptyczne orbity, zmieniona masa).

Wpływ parametrów początkowych na kształt orbity jest istotny – zmiana prędkości może prowadzić do spadku lub ucieczki z układu. Mimośród wyraźnie wpływa na wydłużenie trajektorii, co zwiększa błędy.

Model spełnia wymagania zadania i może służyć jako baza do dalszych symulacji – np. problemu wielu ciał lub analizy relatywistycznej.