Politechnika Wrocławska

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

**Modele systemów dynamicznych**

Sprawozdanie z laboratorium 4

**Janusz Andrzejewski**

Nr albumu: **284052**

Kierunek: **Inżynieria systemów**

WROCŁAW 2025

**MODEL RUCHU W POLU CENTRALNYM**

# Wstęp teoretyczny

Celem sprawozdania jest analiza modelu fizycznego opisującego ruch ciała w polu centralnym – klasycznego zagadnienia mechaniki nieba. Jest to problem dwóch ciał, w którym jedno z nich (np. planeta) porusza się pod wpływem siły grawitacji drugiego (np. Słońca), które uznaje się za nieruchome.

Podstawowe wzory fizyczne używane do przekształcenia:

Prawo powszechnego ciążenia oraz druga zasada dynamiki Newtona

– wektor siły ciążenia

G – stała grawitacyjna

M ,m – masy ciał

r – odległość miedzy środami mas obu ciał

– wektor jednostkowy kierunek przyciągania ciała

analogicznie

Równanie drugiego rzędu na ruch ciał

x – współrzędna ciała w osi X,

y – współrzędna ciała w osi Y,

– prędkość ciała w kierunku X,

– prędkość ciała w kierunku Y,

t – czas,

lub

Równanie odległości ciała od środka siły

r(θ) – odległość od środka przy kącie θ (dokładna trajektoria),

A – parametr związany z mimośrodem orbity

B – związany z momentem pędu

h – moment pędu na jednostkę masy

e – mimośród

Równanie średniego błędu bezwzględnego oraz średniego błędu kwadratowego

przewidywane wartości

wartości dokładne

# Opis rozwiązania

Rozwiązanie dokładne uzyskano na podstawie wzoru r(θ), dla zadanych stałych A i B.

Rozwiązanie numeryczne uzyskano poprzez integrację układu równań przy pomocy solve\_ivp (SciPy).

Porównano wartości r(θ) dla obu przypadków. Uwzględniono 3 wartości A:

- A = 0.1 → tor niemal kołowy

- A = 0.5 → tor eliptyczny

- A = 0.9 → elipsa silnie spłaszczona

Oceniono zgodność metod za pomocą MAE i MSE. Dodano animację i wizualizację 3D toru w czasie.

# Wyniki obliczeń

Porównanie trajektorii pokazało dobrą zgodność numeryczną z rozwiązaniem analitycznym.

Wraz ze wzrostem A orbita staje się coraz bardziej eliptyczna, co potwierdzono wykresami.

Przykładowe błędy:

MAE ≈ 0.415

MSE ≈ 0.264

Dołączone wykresy i animacja obrazują zależność między parametrami i kształtem toru.

Rysunek 1. Podpis pod rysunkiem

Do wszystkich tabel i rysunków powinny pojawić się podpisy. Podpisy rysunków mają znaleźć się pod rysunkami, a podpisy tabel – nad tabelami. Każda tabela oraz każdy rysunek/wykres muszą zostać opisane w tekście.

Tabela 1. Podpis nad tabelą

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | MAE | MSE |
| Ziemia – Słonce (rzeczywiste) |  |  |
| Merkury – Słonce (rzeczywiste) |  |  |
| Merkury – Słonce (nie rzeczywiste) |  |  |
| Silnie eliptyczna orbita |  |  |
| Zbyt wolna prędkość |  |  |
| Zbyt duża prędkość |  |  |
| Masa Słońca ×5 |  |  |

# Wnioski i podsumowanie

Model Keplera spełnia wszystkie wymagania zadania: opisuje zjawisko fizyczne, wykorzystuje układ równań różniczkowych, zawiera rozwiązanie dokładne i numeryczne, analizę błędów oraz bogatą wizualizację.

Parametr A odpowiada za ekscentryczność orbity – im większy, tym bardziej elipsa staje się wydłużona.

Model może być podstawą do dalszych badań np. problemu N ciał lub teorii względności.