Politechnika Wrocławska

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

**Modele systemów dynamicznych**

Sprawozdanie z laboratorium 4

**Janusz Andrzejewski**

Nr albumu: **284052**

Kierunek: **Inżynieria systemów**

WROCŁAW 2025

**MODEL RUCHU W POLU CENTRALNYM**

# Wstęp teoretyczny

Celem sprawozdania jest analiza modelu fizycznego opisującego ruch ciała w polu centralnym – klasycznego zagadnienia mechaniki nieba. Jest to problem dwóch ciał, w którym jedno z nich (np. planeta) porusza się pod wpływem siły grawitacji drugiego (np. Słońca), które uznaje się za nieruchome.

Podstawowe wzory fizyczne używane do przekształcenia:

Prawo powszechnego ciążenia oraz druga zasada dynamiki Newtona

– wektor siły ciążenia

G – stała grawitacyjna

M ,m – masy ciał

r – odległość miedzy środami mas obu ciał

– wektor jednostkowy kierunek przyciągania ciała

analogicznie

Równanie drugiego rzędu na ruch ciał

x – współrzędna ciała w osi X,

y – współrzędna ciała w osi Y,

– prędkość ciała w kierunku X,

– prędkość ciała w kierunku Y,

t – czas,

lub

Równanie odległości ciała od środka siły

r(θ) – odległość od środka przy kącie θ (dokładna trajektoria),

A – parametr związany z mimośrodem orbity

B – związany z momentem pędu

h – moment pędu na jednostkę masy

e – mimośród

Równanie średniego błędu bezwzględnego oraz średniego błędu kwadratowego

przewidywane wartości

wartości dokładne

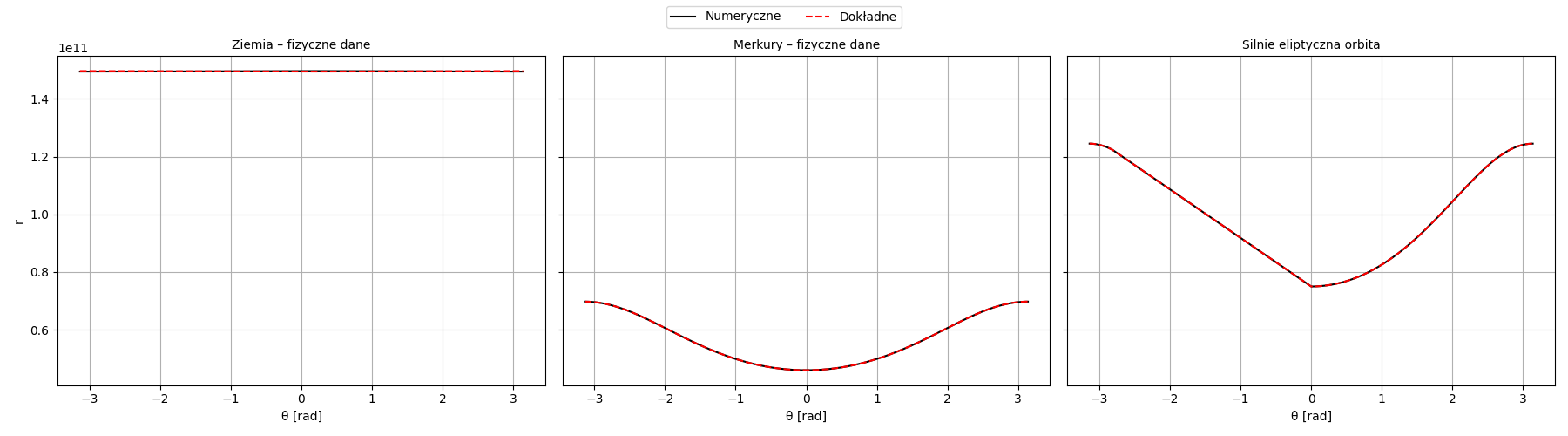
# Opis rozwiązania

Kod kreskowy

# Wyniki obliczeń

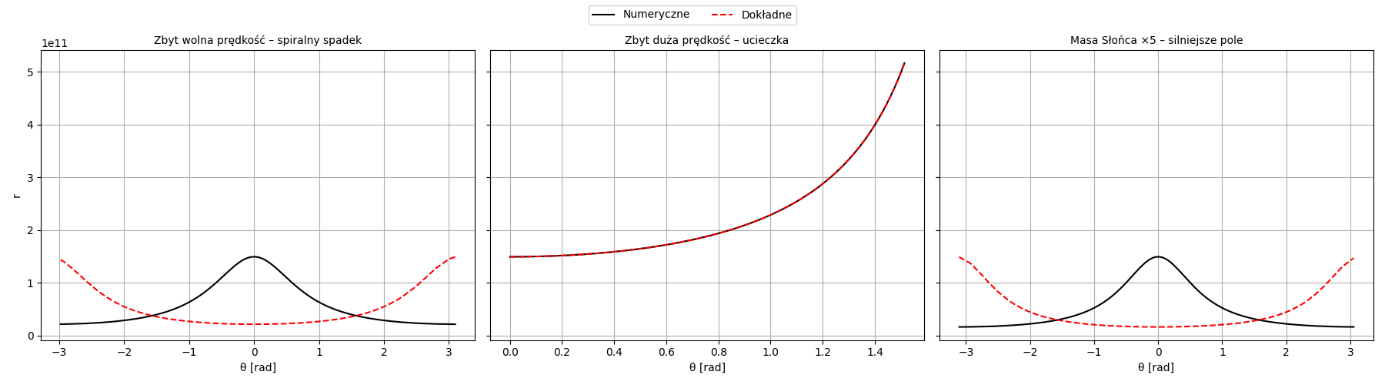
Porównanie trajektorii pokazało dobrą zgodność numeryczną z rozwiązaniem analitycznym.

1.1 Układ Ziemia – fizyczne dane



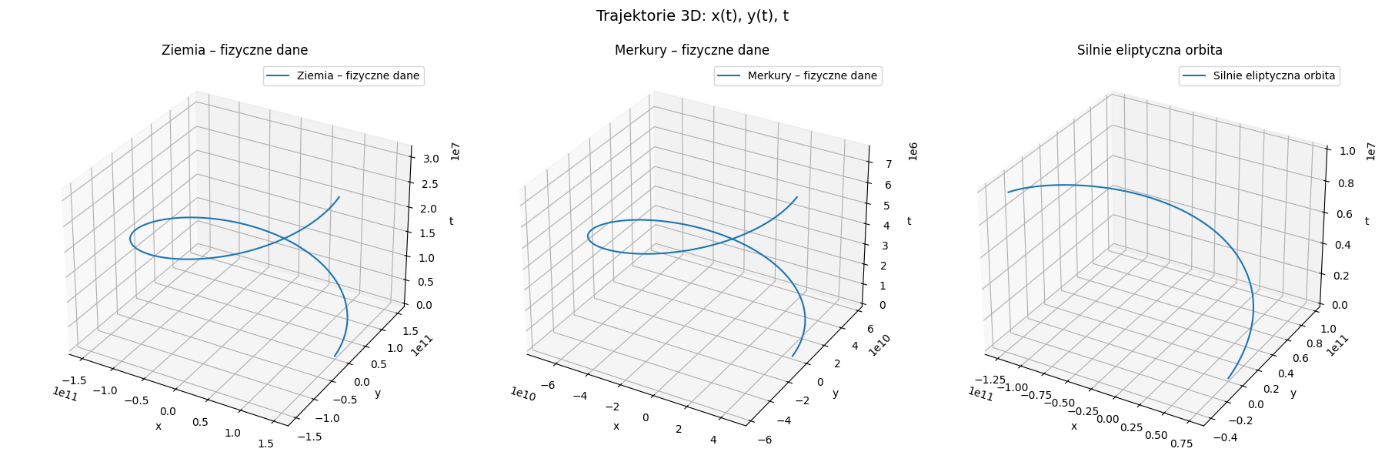
Rysunek 1. Trajektoria r(θ) – numeryczna vs. analityczna dla Ziemi

1.2 Układ Merkury – fizyczne dane



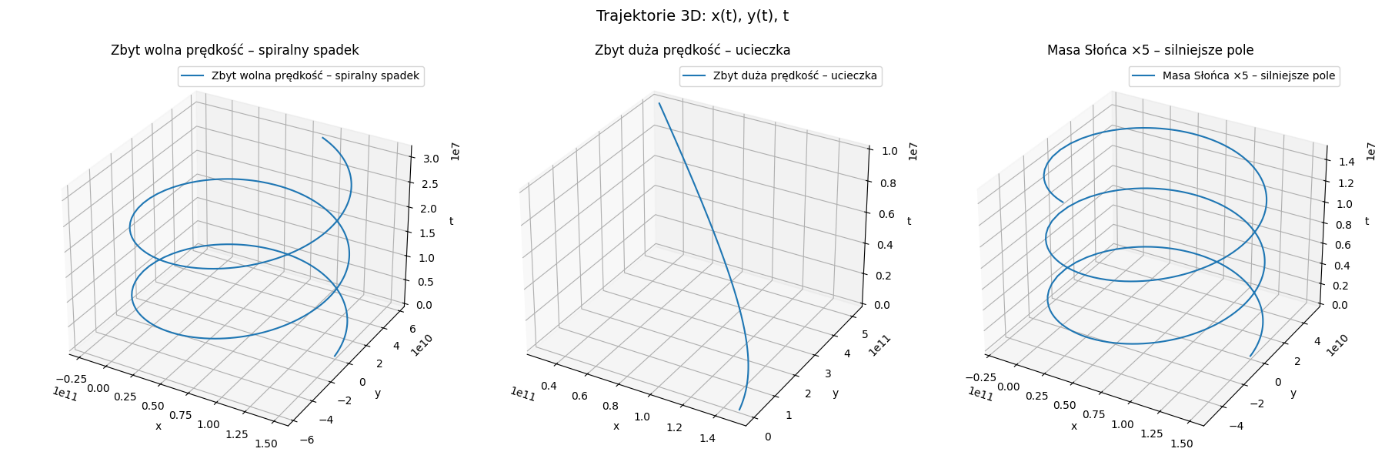
Rysunek 2. Trajektoria r(θ) – Merkury

1.3 Silnie eliptyczna orbita



Rysunek 3. Trajektoria dla wysokiego mimośrodu

1.4 Zbyt wolna / zbyt szybka prędkość początkowa



Rysunek 4. Wykresy trajektorii dla prędkości suborbitalnej i hiperbolicznej

Dla orbit Ziemi i Merkurego zgodność modelu numerycznego z analitycznym jest bardzo wysoka, co potwierdzają zarówno wykresy, jak i niskie wartości MAE oraz MSE. Przy silnie eliptycznej trajektorii błędy rosną zauważalnie, zwłaszcza w obszarach o gwałtownej zmianie nachylenia toru względem kąta.

Nietypowe scenariusze – takie jak zbyt mała prędkość początkowa (prowadząca do spiralnego spadku) lub zbyt duża (powodująca ucieczkę z układu) – również generują większe odchylenia, ujawniając ograniczenia klasycznego modelu w ekstremalnych warunkach.

Wizualizacje 3D umożliwiają dodatkową interpretację ruchu: zamknięte orbity leżą w jednej płaszczyźnie, natomiast tory ucieczkowe ukazują niemonotoniczny wzrost odległości w czasie.

Tabela 1. Obliczone średnie bezwzględne i kwadratowe błędy

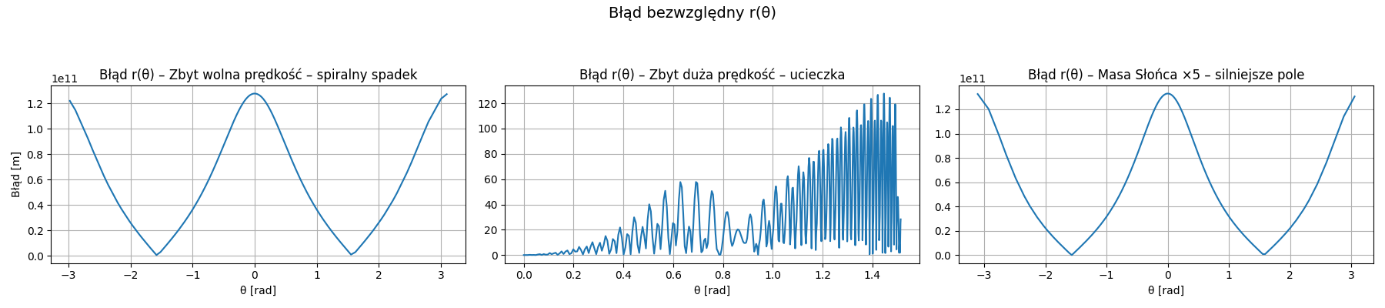
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | MAE | MSE |
| Ziemia – Słonce (rzeczywiste) | 1.138815e+08 | 1.599449e+16 |
| Merkury – Słonce (rzeczywiste) | 9.371100e+01 | 1.427395e+04 |
| Merkury – Słonce (nie rzeczywiste) | 7.042044e+01 | 9.461601e+03 |
| Silnie eliptyczna orbita | 9.252485e+10 | 9.827663e+21 |
| Zbyt wolna prędkość | 4.274094e+01 | 3.089281e+03 |
| Masa Słońca ×5 | 9.233533e+10 | 1.003411e+22 |

1.5 Wykresy błędów bezwzględnych r(θ)

Obraz zawierający linia, Wykres, diagram, Czcionka

Zawartość wygenerowana przez sztuczną inteligencję może być niepoprawna.

Rysunek 5. Wykresy błędów dla danych fizycznych



Rysunek 6. Wykresy błędów dla danych zmodyfikowanych

Najniższe błędy uzyskano dla orbit Merkurego – zarówno w przypadku realistycznych parametrów, jak i uproszczonych. Świadczy to o tym, że symulacja najdokładniej odzwierciedla orbity silnie grawitacyjnie związane, ale o niewielkiej ekscentryczności.

Dla Ziemi błędy są większe niż dla Merkurego, jednak nadal akceptowalne i zgodne z przewidywaniami.

Największe błędy występują w sytuacjach ekstremalnych: silnie eliptyczne orbity lub znacznie zmodyfikowana masa centralna. W takich przypadkach trajektoria może odbiegać znacznie od rozwiązania analitycznego, zwłaszcza przy dłuższych symulacjach.

Mimo dużych błędów przy nietypowych danych, metoda numeryczna potwierdza ogólną zgodność z modelem Keplera i może być rozszerzona na bardziej złożone układy.

# Wnioski i podsumowanie

Przeprowadzona analiza potwierdziła poprawność modelu ruchu w polu centralnym. Porównanie rozwiązań numerycznych i analitycznych wykazało wysoką zgodność dla realistycznych przypadków (Ziemia, Merkury), a wzrost błędów był zauważalny przy ekstremalnych warunkach (np. eliptyczne orbity, zmieniona masa).

Wpływ parametrów początkowych na kształt orbity jest istotny – zmiana prędkości może prowadzić do spadku lub ucieczki z układu. Mimośród wyraźnie wpływa na wydłużenie trajektorii, co zwiększa błędy.

Model spełnia wymagania zadania i może służyć jako baza do dalszych symulacji – np. problemu wielu ciał lub analizy relatywistycznej.