

# Symulacja komputerowa

## Wykład 4: Modelowanie niedeterminizmu w symulacji

Dariusz Gąsior

Katedra Informatyki i Inżynierii Systemów

# Plan wykładu (część I)

1. Czym jest niedeterminizm i losowość w systemach.
2. Źródła i typy niedeterminizmu.
3. Matematyczny opis losowości: zmienne losowe i rozkłady.
4. Jak określamy rozkłady – estymacja parametrów.

# Pojęcie niedeterminizmu

- ▶ **Determinizm** – stan systemu jednoznacznie określony przez warunki początkowe:

$$x_{t+1} = F(x_t)$$

- ▶ **Niedeterminizm** – dla tych samych warunków początkowych możliwe są różne wyniki:

$$x_{t+1} = F(x_t, z_t)$$

gdzie:

$z_t$  – zakłócenie (efekt nieprzewidziany, czynnik losowy, błąd pomiaru).

# Zakłócenia w perspektywie inżynierii systemów

- ▶ **Zakłócenie** – wejście (parametr wejściowy) wpływający na system, na którego wartość nie mamy intencjonalnego wpływu.
- ▶ Może mieć różny charakter:
  1. **losowy** – naturalna zmienność lub fluktuacja.
    - ▶ Przykład: czas reakcji operatora w systemie sterowania zmienia się losowo w granicach 3–5s.
  2. **deterministyczny, ale nieznany** – wartość ustalona, ale nieznana w momencie projektowania lub symulacji.
    - ▶ Przykład: rezystor nominalnie  $100\Omega$ , faktycznie  $101\Omega$  – producent informuje o dopuszczalnej tolerancji, w praktyce rezystor ma  $101\Omega$ .
  3. **zależny od innego podmiotu** – wpływ decyzji zewnętrznych uczestników systemu.
    - ▶ Przykład: działania konkurencyjnego operatora w systemie logistycznym.

# Źródła niedeterminizmu

- ▶ **Naturalna losowość** – zjawiska fizyczne i biologiczne mają wbudowany element przypadkowości, który nie jest skutkiem niewiedzy, lecz natury procesów.
  - ▶ Przykład: liczba cząsteczek promieniowania beta zarejestrowanych w jednostce czasu w liczniku Geigera – zmienia się losowo zgodnie z rozkładem Poissona.
- ▶ **Niepełna wiedza o stanie lub parametrach systemu** – część parametrów jest znana tylko przybliżenie, albo nie możemy ich obserwować w czasie rzeczywistym.
  - ▶ Przykład: dokładna temperatura rdzenia procesora nie jest mierzona bezpośrednio; znamy jedynie odczyt z czujnika w pobliżu, obciążony błędem  $\pm 2$  °C.
- ▶ **Agregacja i uproszczenia modelu** – w modelu symulacyjnym zastępujemy złożone zjawiska prostszymi przybliżeniami, przez co wprowadzamy niepewność strukturalną.
  - ▶ Przykład: model ruchu pojazdu uwzględnia tylko prędkość średnią zamiast pełnej trajektorii i przyspieszeń chwilowych.
- ▶ **Błędy pomiarowe i numeryczne** – wynikają z ograniczeń przyrządów pomiarowych lub z niedoskonałości obliczeń komputerowych (zaokrąglenia, dyskretyzacja).
  - ▶ Przykład: na termometrze rtęciowym odczytano 37 °C, choć rzeczywista temperatura wynosiła 37,1 °C – błąd wynikał z kąta obserwacji i skali podziałki.

# Matematyczny opis niedeterminizmu

1. **Opis probabilistyczny** – gdy zakłócenie ma charakter losowy.
  - ▶ Zakłócenie modelowane jest zmienną losową  $Z$  o znanym (lub estymowanym) rozkładzie  $F_Z(z)$ .
  - ▶ Przykład: czas oczekiwania klienta w kolejce ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda$ .
2. **Opisy nieprobabilistyczne** – gdy brak danych statystycznych, ale dostępna jest wiedza ekspercka lub przedziały niepewności.
  - ▶ Stosuje się m.in. *zbiory rozmyte*, *zmienne przedziałowe*, *logiki niepewne*.
  - ▶ Przykład: temperatura oceniana jako „wysoka” w przedziale 35–38 °C zamiast konkretnej wartości.
3. **Modelowanie decyzji innych podmiotów** – gdy zakłócenie wynika z działań innych uczestników systemu.
  - ▶ Opis przez **teorię gier**.
  - ▶ Przypadek skrajny: *gry przeciwko naturze* (ang. *games against nature*), gdzie „natura” reprezentuje nieprzewidywalne środowisko.

# Jak opisujemy losowość w praktyce

- ▶ Wybieramy rodzinę rozkładów  $P(Z; \theta)$  z parametrami  $\theta$ ,
- ▶ Następnie określamy parametry na podstawie danych lub wiedzy eksperckiej.

# Jak opisujemy losowość w praktyce

- ▶ Wybieramy rodzinę rozkładów  $P(Z; \theta)$  z parametrami  $\theta$ ,
- ▶ Następnie określamy parametry na podstawie danych lub wiedzy eksperckiej.

## Dwa podejścia:

1. **Parametryczne** – zakładamy konkretny typ rozkładu (np. normalny, wykładniczy).
2. **Nieparametryczne** – nie zakładamy formy rozkładu, szacujemy go bezpośrednio z danych.



# Estymacja parametryczna

- ▶ Dane: próbka  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .
- ▶ Zakładamy:  $Z \sim P(Z; \theta)$ .
- ▶ Estymator parametru  $\hat{\theta}$  wyznaczamy metodami:
  - ▶ największej wiarygodności (MLE),
  - ▶ momentów,
  - ▶ bayesowskimi.

# Estymacja parametryczna

- ▶ Dane: próbka  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .
- ▶ Zakładamy:  $Z \sim P(Z; \theta)$ .
- ▶ Estymator parametru  $\hat{\theta}$  wyznaczamy metodami:
  - ▶ największej wiarygodności (MLE),
  - ▶ momentów,
  - ▶ bayesowskimi.

## Przykład:

Dla  $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ :

$$\hat{\mu} = \bar{z}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (z_i - \bar{z})^2$$

# Estymacja nieparametryczna

- ▶ Nie zakładamy żadnej konkretnej postaci rozkładu.
- ▶ Estymujemy gęstość  $f(z)$  bezpośrednio z danych.

# Estymacja nieparametryczna

- ▶ Nie zakładamy żadnej konkretnej postaci rozkładu.
- ▶ Estymujemy gęstość  $f(z)$  bezpośrednio z danych.

## Przykłady:

- ▶ Histogram – najprostsza aproksymacja gęstości.
- ▶ Estymator jądrowy:

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{z - z_i}{h}\right)$$

gdzie  $K$  – funkcja jądra,  $h$  – szerokość okna.

— Koniec części I —