Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

По дисциплине

Вычислительная математика

Вариант № 7

Выполнил:

студент группы P3213

Нягин Михаил Алексеевич

Проверила:

Машина Екатерина

Алексеевна

г. Санкт-Петербург

2024 год

Цель работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами

Рабочие формулы:

Метод левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

Метод правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Метод средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

Метод трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Метод Симпсона:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1+y_3+\dots+y_{n-1}) + 2(y_2+y_4+\dots+y_{n-2}) + y_n)\right]$$

Листинг программы

Метод левых прямоугольников

```
    @Override
    public Double solve(Function<Double, Double> function, Double a, Double b, int n,boolean isNeedToPrint) throws MalformedTableException {
        if (isNeedToPrint)
            printMethodName();
        var builder = MonospaceTable.build();
        builder.columns("i","xi","fi","currentSum");
        double h = (b-a)/n;
        double currentX = a;
        Double previousFun;
        double result = 0;

builder.row("0",String.format("%.3f",currentX),String.format("%.3f",function.apply(currentX)), result +"");
        for (int i = 1; i < n + 1; i++) {
            previousFun = function.apply(currentX);
            if(previousFun.isInfinite()){
                return null;
            }
            currentX += h;
            result += previousFun*h;

builder.row(i+"",String.format("%.3f",currentX),String.format("%.3f",function.apply(currentX)), String.format("%.3f",result));
        }
        if(isNeedToPrint){
            System.out.println(builder.getTable());
        }
        return result;
    }
}
```

Метод правых прямоугольников

```
@Override
    public Double solve(Function<Double, Double> function, Double a, Double b, int n,boolean isNeedToPrint) throws MalformedTableException {
        if(isNeedToPrint)printMethodName();
        var builder = MonospaceTable.build();
        builder.columns("i","xi","fi","currentSum");
        var xCurrent = a;
        var fCurrent = function.apply(xCurrent);
        var h = (b-a)/n;
        var result = 0d;
        for (int i = 0; i < n ; i++) {
            xCurrent += h;
            fCurrent = function.apply(xCurrent);
            if(fCurrent.isInfinite())
                return null;
            result += fCurrent*h;

builder.row(i+"",String.format("%.3f",xCurrent),String.format("%.3f",fCurrent),String.format("%.3f",result));
        }
        if(isNeedToPrint)

System.out.println(builder.getTable().toStringHorizontal());
        return result;
    }
```

Метод средних прямоугольников

```
public Double solve(Function<Double, Double> function, Double a, Double b, int n,boolean isNeedToPrint) throws MalformedTableException
{
        if(isNeedToPrint)
            printMethodName();
        var h = (b-a)/n;
        var builder = MonospaceTable.build();
        builder.columns("i","xi","fi","x_{i-1/2}","y_{i-1/2}","current result");
        var result = 0d;
        double xPrev = a;
        Double fMiddle;

builder.row("0",String.format("%.3f",xPrev),String.format("%.3f",function.apply(xPrev)),"-","-","0");
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            var xMiddle = xPrev + h/2;
            xPrev += h;
            fMiddle = function.apply(xMiddle);
            if(fMiddle.isInfinite() ||
function.apply(xPrev).isInfinite()){
                return null;
            }
            result+= h*fMiddle;
            builder.row("" +(i + 1),
String.format("%.3f",xPrev),String.format("%.3f",function.apply(xPrev)),String.format("%.3f",xMiddle),

String.format("%.3f",fMiddle),String.format("%.3f",result));
        }
        if(isNeedToPrint)

System.out.println(builder.getTable().toStringHorizontal());
        return result;
    }
```

Метод трапеций

```
@Override
    public Double solve(Function<Double, Double> function, Double a, Double b, int n,boolean isNeedToPrint) throws MalformedTableException
{
        if(isNeedToPrint)printMethodName();
        var builder = MonospaceTable.build();
        var h = (b-a)/n;
        var y0 = function.apply(a);
        var yLast = function.apply(b);
        //сумма yi, исключая 0 и последний
        var sumYi = 0d;
        var result = 0d;
        builder.columns("i","xi","fi","result");

builder.row("0",String.format("%.3f",a),String.format("%.3f",y0),"-");
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            Double functionValue = function.apply(a + h*i);
            if(functionValue.isInfinite())
                return null;
            sumYi += functionValue;

builder.row(i+"",String.format("%.3f",a+h*i),String.format("%.3f",function.apply(a + h*i)),"-");
        }
        result += h*((y0+yLast)/2 + sumYi);
```

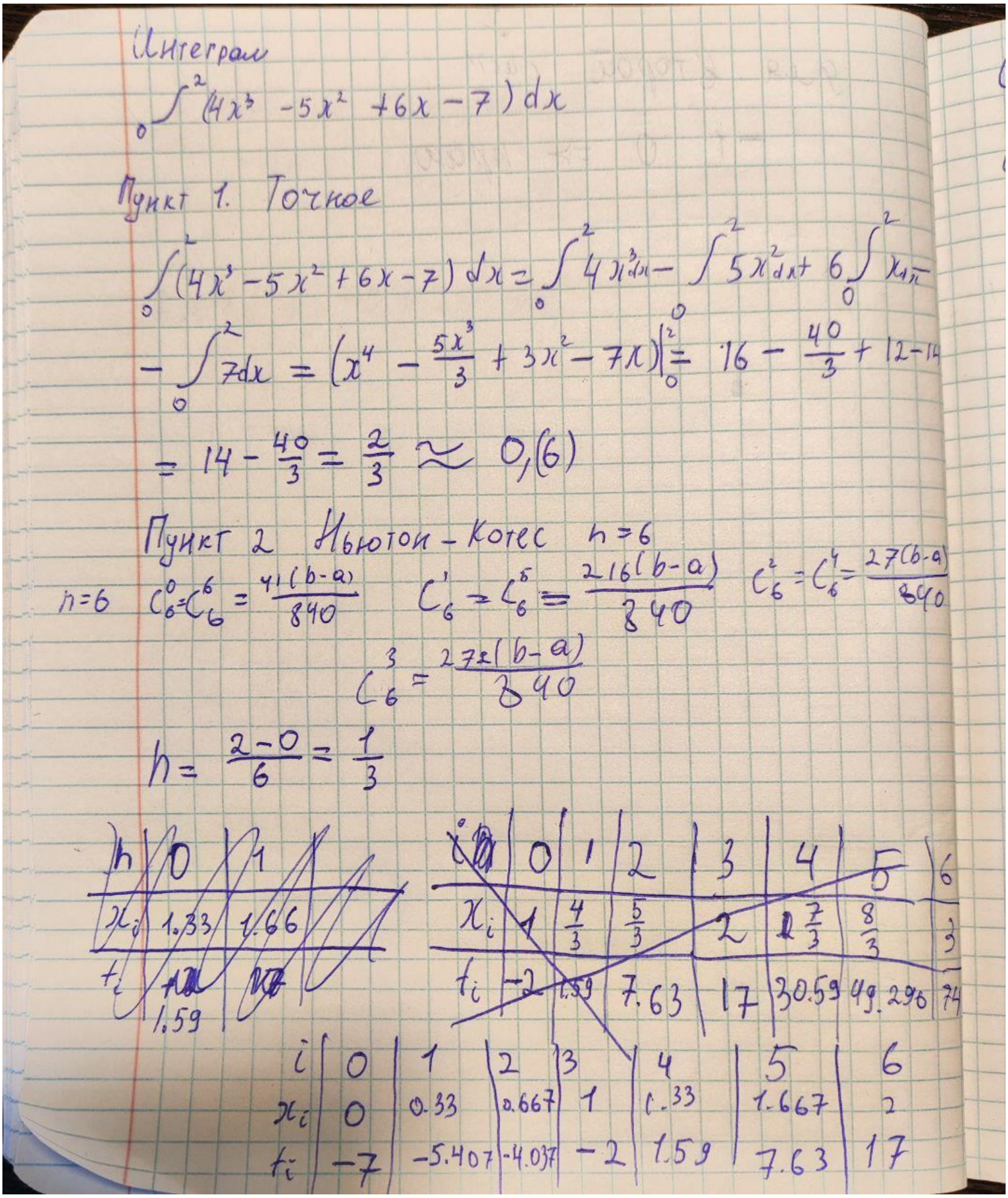
```
builder.row(n+"",String.format("%.3f",b),String.format("%.3f",yLast),String.format("%.3f",result));
        if(isNeedToPrint)
System.out.println(builder.getTable().toStringHorizontal());
        return result;
    }
```

Метод Симпсона

```
@Override
    public Double solve(Function<Double, Double> function, Double a, Double b, int n,boolean isNeedToPrint) throws MalformedTableException
{
        if (n % 2 != 0){
            throw new IllegalArgumentException("n должен быть четным для работы метода Симпсона!");
        }
        JTablesBuilder<MonospaceTable> builder = MonospaceTable.build();
        if(isNeedToPrint)
            printMethodName();
        var h = (b-a)/n;
        var sumaFromY1ToYLast = 0d;
        var sumaFromY2ToYPreLast = 0d;
        builder.columns("result");
        for (int i = 1; i < n; i+=2) {
            Double functionValue =function.apply(a + i * h);
            if(functionValue.isInfinite()){
                return null;
            }
            sumaFromY1ToYLast += functionValue;
        }
        for (int i = 2; i < n-1; i+=2) {
            Double functionValue =function.apply(a + i * h);
            if(functionValue.isInfinite()){
                return null;
            }
            sumaFromY2ToYPreLast +=functionValue;
        }
        var result = (h/3) * (function.apply(a) + 4*sumaFromY1ToYLast + 2*sumaFromY2ToYPreLast + function.apply(b));
        builder.row(String.format("%.3f",result));
        if(isNeedToPrint) {
            System.out.println("n=" + n);
            System.out.println(builder.getTable());
        }
        return result;
    }
```

Вычислительная реализация

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)dx$$



Интеграл

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\,dx$$

Пункт 1. Точное

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\,dx = \int_0^2 4x^3dx - \int_0^2 5x^2dx + 6\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 7dx = \left(x^4 - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 7x\right)\Big|_0^2 = 16 - \frac{40}{3} + 12 - 14$$

$$= 14 - \frac{40}{3} = \frac{2}{3} \simeq 0,(6)$$

Пункт 2 Ньютон-Котес $n = 6$

$n=6$ $\quad C_6^0 = C_6^6 = \frac{41(b-a)}{840}$ $\quad C_6^1 = C_6^5 = \frac{216(b-a)}{840}$ $\quad C_6^2 = C_6^4 = \frac{27(b-a)}{840}$

$$C_6^3 = \frac{272(b-a)}{840}$$

$$h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}$$

n	0	1
x_i	1.33	1.66
t_i	1.59	

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3
t_i	-2	1.59	7.63	17	30.59	49.296	74

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0.33	0.667	1	1.33	1.667	2
t_i	-7	-5.407	-4.037	-2	1.59	7.63	17

$$C_6^0 = C_6^6 = \frac{41(2-0)}{840} = 0.098$$

$$C_6^1 = C_6^5 = \frac{216(2-0)}{840} = 0,514$$

$$C_6^2 = C_6^4 = \frac{27(2-0)}{840} = 0.064$$

$$C_6^3 = \frac{272(2-0)}{840} = 0.648$$

$$\int_a^b f(x)dx = C_6^0 f(x_0) + C_6^1 f(x_1) + C_6^2 f(x_2) +$$
$$+ C_6^3 f(x_3) + C_6^4 f(x_4) + C_6^5 f(x_5) + C_6^6 f(x_6)$$

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\,dx \approx 0.098 \cdot (-7) +$$
$$+ 0.514 \cdot \overset{(-5.407)}{\cancel{1.59}} + 0.064 \cdot \overset{(-4.037)}{\cancel{7.63}} + 0.648 \cdot \overset{(-2)}{\cancel{17}} +$$
$$+ 0.064 \cdot \overset{1.59}{\cancel{30.59}} + 0,514 \cdot \overset{7.63}{\cancel{49,296}} + 0.098 \cdot \overset{17}{\cancel{74}} \approx$$

$$\approx 0,670014$$

Погрешность: $\left| \frac{\frac{2}{3} - 0.670014}{\frac{2}{3}} \right| = 0.005$

№3 $n=10$ средн. прямоуг

$$h = \frac{2-0}{10} = 0.2$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i:	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1.6	1.8	2
y_i:	−7	−5.968	−5.144	−4.336	−3.39	−2	−0.09	2.57	6.18	10.92	17
~~$x_{i-1/2}$:~~	~~0.1~~	~~0.3~~	~~0.5~~	~~0.7~~	~~0.9~~	~~1.1~~	~~1.3~~	~~1.5~~	~~1.7~~	~~1.9~~	~~2~~

~~$y_{i-\frac{1}{2}}$:~~

		1	2	3	4	5	6
$x_{i-\frac{1}{2}}$	—	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1
$y_{i-\frac{1}{2}}$	—	−6.946	−5.542	−4.75	−3.678	−2,734	−1.126

	7	8	9	10
$x_{i-\frac{1}{2}}$	1.3	1.5	1.7	1.9
$y_{i-\frac{1}{2}}$	1.138	4.25	8.402	13.786

$$h \sum f(x_{i-\frac{1}{2}}) = h \cdot 3.1 = 0.62$$

Погрешность $\left| \dfrac{0.62 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \right| = 0.07$

КЗ Трапеций

$h = 0.2 \quad n = 10$

$$I_{трап} = \int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\,dx =$$

$$= h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 0.2\left(\frac{-7+17}{2} +\right.$$

$$\left. + (-5.968 + \dots + 10.928)\right) \approx 0.76$$

Погрешность:

$$\left|\frac{\frac{2}{3} - 0.76}{2/3}\right| = 0.14$$

КЗ Симпсон

$$I = \int_0^2 f(x) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots +\right.$$

$$\left. + y_{n-2}) + y_n\right) = \frac{0.2}{3}\left(-7 + 4(-5.968 + \dots + 10.97) +\right.$$

$$\left. + 2(-0.5144 + \dots + 6.18) + 17\right) = 0.(6)$$

Погрешность $\left|\frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right| = 0$

$$C_6^0 = C_6^6 = \frac{41(2-0)}{840} = 0.098$$

$$C_6^1 = C_6^5 = \frac{216(2-0)}{840} = 0,514$$

$$C_6^2 = C_6^4 = \frac{27(2-0)}{840} = 0.064$$

$$C_6^3 = \frac{272(2-0)}{840} = 0.648$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = C_6^0 f(x_0) + C_6^1 f(x_1) + C_6^2 f(x_2) + C_6^3 f(x_3) + C_6^4 f(x_4) + C_6^5 f(x_5) + C_6^6 f(x_6)$$

$$\int_0^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)\,dx \approx 0.098\cdot(-7) + 0.514\cdot \overset{(-5.407)}{\cancel{1.59}} + 0.064\cdot \overset{(-4.037)}{\cancel{7.63}} + 0.648\cdot \overset{(-2)}{\cancel{17}} + 0.064\cdot \overset{1.59}{\cancel{30.59}} + 0,514\cdot \overset{7.63}{\cancel{49,296}} + 0.098\cdot \overset{17}{\cancel{74}} \approx$$

$$\approx 0,670014$$

Погрешность: $\left| \dfrac{\frac{2}{3} - 0.670014}{\frac{2}{3}} \right| = 0.005$