УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 5. ***Выборки и их характеристики***

Генеральная и выборочная совокупности

Задачами математической статистики являются оценивание законов распределения и основных характеристик случайных величин, проверка статистических гипотез, анализ зависимостей между входными и выходными параметрами систем, прогнозирование, планирование эксперимента и т.д.

Эти и другие статистические выводы относительно свойств полной совокупности данных (**генеральной совокупности**) делают на основе некоторой специальным образом сформированной части данных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

называемой **выборкой объема** n.

Свойства выборки

Выборка должна обладать следующими свойствами.

1. Необходимо, чтобы выборка была **репрезентативной**, т. е. достаточно полно, однородно, равномерно и равновероятно по отношению к другим возможным выборкам представляла всю генеральную совокупность.
2. Выборка должна быть **рандомизированной**, т. е. полученной случайным образом в одинаковых условиях в виде последовательности повторных независимых реализаций случайной величины X.
3. В рамках вероятностной математической модели, привлекаемой для анализа данных, выборка должна рассматриваться как реализация n-мерного случайного вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ с взаимно независимыми и одинаково распределенными компонентами.

Генеральная и выборочная совокупности

Пример 7.1. Десять абитуриентов проходят тестирование по математике. Каждый из них может набрать от 0 до 5 баллов включительно. Пусть X_k — количество баллов, набранных k-м ($k = 1, 2, \ldots, 10$) абитуриентом.

Тогда значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 — все возможные количества баллов, набранных одним абитуриентом, — образуют генеральную совокупность.

Выборка $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{10}$ - - результат тестирования 10 абитуриентов.

Реализациями выборки могут быть следующие наборы чисел: {5, 3, 0, 1, 4, 2. 5. 4. 1. 5} или {4, 4, 5, 3, 3, 1, 5, 5, 2, 5} или {3, 4, 5. 0. 1. 2. 3, 4, 5, 4} и т. д.

Вариационный ряд

Если элементы выборки расположить в порядке возрастания

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)},$$

то получим **вариационный ряд**, элементы которого называют **порядковыми статистиками**. Наименьшее значение в выборке называют **первой порядковой статистикой** $x_{(1)}$, а наибольшее значение n**-ой порядковой статистикой** $x_{(n)}$. Разность между наибольшим и наименьшим значениями называют **размахом выборки**, обозначают буквой w^* и вычисляют по формуле $w^* = x_{(n)} - x_{(1)}$.

Статистический ряд

Статистическим рядом называют систему пар чисел

$$(z_i, n_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где z_i различные элементы выборки, расположенные в порядке возрастания, n_i частота элемента в выборке, т. е. число повторений элемента. Обычно статистический ряд представляют в виде **таблицы**, где первая строка содержит элементы z_i, а вторая их частоты. Если в выборке нет одинаковых элементов, то статистический и вариационный ряды совпадают. По вариационному или статистическому ряду строится эмпирическая (выборочная) функция распределения $F_n^*(x)$, которая является оценкой функции распределения $F_X(x)$ случайной величины X, сформировавшей данную выборку.

Статистическое распределение выборки

Пусть изучается некоторая с. в. X. С этой целью над с. в. X производится ряд независимых опытов (наблюдений). В каждом из этих опытов величина X принимает то или иное значение.

Пусть она приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз — значение x_2, ..., n_k раз — значение x_k. При этом $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ — объем выборки. Значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *вариантами* с. в. X.

Вся совокупность значений с. в. X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, прежде всего — упорядочению.

Операция расположения значений случайной величины (признака) по неубыванию называется *ранжированием* статистических данных. Полученная таким образом последовательность $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ значений с. в. X (где $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ и $x_{(1)} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i, \ldots, x_{(n)} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$) называется *вариационным рядом*.

Статистическое распределение выборки

Числа n_i, показывающие, сколько раз встречаются варианты x_i в ряде наблюдений, называются *частотами*, а отношение их к объему выборки — *частостями* или *относительными частотами* (p_i^*), т. е.

$$p_i^* = \frac{n_i}{n},$$

где $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Перечень вариантов и соответствующих им частот или частостей называется *статистическим распределением выборки* или *статистическим рядом*.

Записывается статистическое распределение в виде таблицы. Первая строка содержит варианты, а вторая — их частоты n_i (или частости p_i^*).

Интервальный статистический ряд

В случае, когда число значений признака (с. в. X) велико или признак является непрерывным (т. е. когда с. в. X может принять любое значение в некотором интервале), составляют *интервальный статистический ряд*. В первую строку таблицы статистического распределения вписывают частичные промежутки $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, $\ldots$, $[x_{k-1}, x_k)$, которые берут обычно одинаковыми по длине: $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots$. Для определения величины интервала (h) можно использовать формулу Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n},$$

где $x_{\max} - x_{\min}$ — разность между наибольшим и наименьшим значениями признака, $m = 1 + \log_2 n$ — число интервалов ($\log_2 n \approx 3{,}322 \lg n$).

За начало первого интервала рекомендуется брать величину $x_{\text{нач}} = x_{\min} - \frac{h}{2}$. Во второй строчке статистического ряда вписывают количество наблюдений n_i ($i = \overline{1, k}$), попавших в каждый интервал.

Эмпирическая функция распределения

Эмпирической (статистической) функцией распределения называется функция $F_n^*(x)$, определяющая для каждого значения x частость события $\{X < x\}$:

$$F_n^*(x) = p^*\{X < x\}.$$

Для нахождения значений эмпирической функции удобно $F_n^*(x)$ записать в виде

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n — объем выборки, n_x — число наблюдений, меньших x ($x \in \mathbb{R}$).

Очевидно, что $F_n^*(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и истинная функция распределения $F(x)$ (см. п. 2.3).

При увеличении числа n наблюдений (опытов) относительная частота события $\{X < x\}$ приближается к вероятности этого события

Теорема Гливенко

Теорема (Гливенко). *Эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ при неограниченном увеличении объема выборки сходится по вероятности при любом значении $x \in \mathbb{R}$ к теоретической функции распределения $F_X(x)$ генеральной совокупности.*

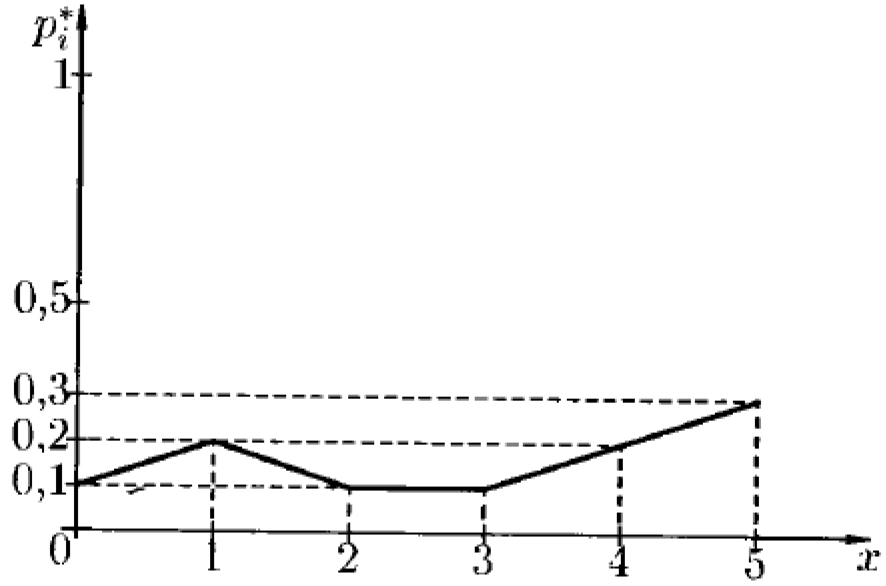
Таким образом, при большом объеме выборки эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$ является достаточно точным приближением для неизвестной заранее теоретической функции распределения $F_X(x)$.

Графическое изображение статистического распределения

Статистическое распределение изображается графически (для наглядности) в виде так называемых полигона и гистограммы. Полигон, как правило, служит для изображения дискретного (т. е. варианты отличаются на постоянную величину) статистического ряда.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$; *полигоном частостей* — с координатами $(x_1, p_1^*), (x_2, p_2^*), \ldots, (x_k, p_k^*)$.

Варианты (x_i) откладываются на оси абсцисс, а частоты и, соответственно, частости — на оси ординат.

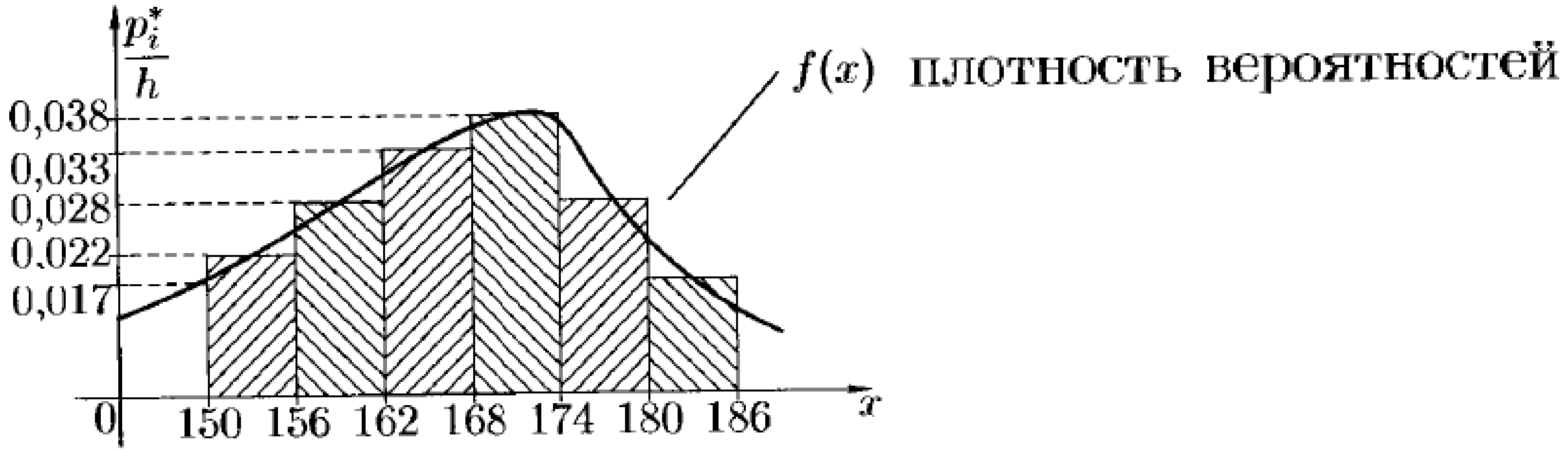


Графическое изображение статистического распределения

Для непрерывно распределенного признака (т. е. варианты могут отличаться один от другого на сколь угодно малую величину) можно построить полигон частот, взяв середины интервалов в качестве значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Более употребительна так называемая гистограмма.

Гистограммой частот (*частостей*) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ — плотность частоты ($\frac{p_i^*}{h}$ или $\frac{n_i}{n \cdot h}$ — плотности частости).

Очевидно, площадь гистограммы частот равна объему выборки, а площадь гистограммы частостей равна единице.



Числовые характеристики статистического распределения

Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	$\ldots$	n_k

Выборочным средним $\overline{x}_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i.$$

Выборочное среднее можно записать и так: $$\overline{x}_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i^*,$$

где $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$ — частость. Для обозначения выборочного среднего используют следующие символы: $\overline{x}$, $M^*(X)$, m_x^*.

Отметим, что в случае интервального статистического ряда в качестве x_i берут середины его интервалов, а n_i соответствующие им частоты.

Числовые характеристики статистического распределения

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x}_в$, т. е.

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_в)^2 \cdot n_i$$

или, что то же самое.

$$D_в = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_в)^2 \cdot p_i^*.$$

Можно показать. что $D_в$ может быть подсчитана также по формуле:

$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_1 - (\overline{x}_в)^2$, т. е.

$$D_в = \overline{x^2} - (\overline{x})^2,$$

здесь $\overline{x} = \overline{x}_в$.

Числовые характеристики статистического распределения

Выборочное среднее квадратическое отклонение выборки определяется формулой

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}.$$

Особенность выборочного с. к. о. ($\sigma_{\text{в}}$) состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и изучаемый признак.

При решении практических задач используется и величина

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 \cdot n_i,$$

т. е.

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}},$$

которая называется *исправленной выборочной дисперсией*

Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением.*

Для непрерывно распределенного признака формулы для выборочных средних будут такими же, но за значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ надо брать не концы промежутков $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \ldots$ а их середины

Числовые характеристики статистического распределения

Размахом вариации называется число $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, где $x_{(1)} = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$, $x_{(n)} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$ или $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ — наибольший, $x_{\min}$ — наименьший вариант ряда.

Модой M_o^* вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой M_e^* вариационного ряда называется значение признака (с. в. X), приходящееся на середину ряда.

Если $n = 2k$ (т. е. ряд $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \ldots, x_{(2k)}$ имеет четное число членов), то $M_e^* = \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$; если $n = 2k+1$, то $M_e^* = x_{(k+1)}$.