

清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：K3 曲面微分同胚群的代数与
拓扑结构

系 别：数学科学系

专 业：数学与应用数学

姓 名：林毓杰

指导教师：林剑锋 副教授

2023 年 6 月 15 日

中文摘要

在本文中，我们解释 Baraglia-Konno[1] 对 $\pi_1(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(X))$ 不是满射的证明。我们还将介绍如下定理的证明： $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ 的像是一个指标为 2 的子群。这一定理首先由 Matumoto[2] 和 Donaldson[3] 证明，但我们介绍的证明由 Friedman-Morgan 在专著 [4] 中给出。

关键词：K3 曲面；微分同胚群；椭圆曲面；嵌入球面；反射

ABSTRACT

In this thesis, we explain the non-surjectivity of $\pi_1(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(X))$ proved by Baraglia-Konno[1]. We also introduce the proof of the following theorem: the image of $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ is a subgroup of index 2. This theorem was first proved by Matumoto[2] and Donaldson[3], but the proof we introduce was given by Friedman and Morgan in [4].

Keywords: K3 surface; diffeomorphism group; elliptic surface; embedded 2-sphere; reflection

目 录

| | |
|---|----|
| 第 1 章 引论 | 1 |
| 1.1 微分同胚群的同伦类 | 1 |
| 1.2 微分同胚群与拓扑同胚群的比较 | 2 |
| 1.3 本文主要内容和框架 | 3 |
| 第 2 章 K3 曲面微分同胚群与拓扑同胚群的基本群 | 5 |
| 2.1 K3 曲面的 Torelli 定理 | 5 |
| 2.2 截面的构造 | 8 |
| 2.3 环面上不可光滑化的 K3 丛 | 9 |
| 2.4 定理 1.1 的证明 | 12 |
| 第 3 章 K3 曲面中自相交数为 -2 的嵌入球面 | 14 |
| 3.1 椭圆曲面简介 | 14 |
| 3.2 椭圆曲面 $E(n)$ 中自相交数为 -2 的嵌入球面 | 16 |
| 3.3 定理 1.2 的证明 | 24 |
| 第 4 章 总结与展望 | 27 |
| 插图索引 | 28 |
| 参考文献 | 29 |
| 致 谢 | 33 |
| 声 明 | 35 |
| 附录 A 外文资料的调研阅读报告 | 37 |

主要符号表

| | |
|---------------------------------|--|
| $\text{Aut}(L)$ | 格 L 保持二次型的自同构群 |
| $c_k(\xi)$ | 复向量丛 ξ 的第 k 个陈类 |
| $\text{Char}(M)$ | $H^2(M; \mathbb{Z})$ 中所有特征元素的集合 |
| $D(\xi)$ | 向量丛 ξ 的圆盘丛 |
| $\text{Diff}(X)$ | X 的微分同胚群 |
| $\text{Diff}_0(X)$ | X 在边界附近不动的微分同胚群 |
| $\text{Diff}^+(X)$ | X 保持定向的微分同胚群 |
| $\text{Ein}(X)$ | X 上的单位体积 Einstein 度量构成的空间 |
| $\mathcal{F}(\xi)$ | ξ 的标架丛 |
| $Gr_3(\mathbb{R}^{3,19})$ | $\mathbb{R}^{3,19}$ 中正定的 3 维子空间构成的 Grassmann 流形 |
| $H_g^+(X)$ | (X, g) 的自对偶调和形式构成的向量空间 |
| $\text{Homeo}(X)$ | X 的拓扑同胚群 |
| $\text{Homeo}_0(X)$ | X 在边界附近不动的拓扑同胚群 |
| $\text{Homeo}^+(X)$ | X 保持定向的拓扑同胚群 |
| $\text{Isom}(X)$ | X 的等距同构群 |
| l | $-E_8$ 的长向量 |
| $\text{MCG}(X)$ | X 的映射类群 |
| $O(n)$ | n 阶正交群 |
| $\text{PD}(x)$ | x 的 Poincaré 对偶或 Lefschetz 对偶 |
| Q_X | 闭四维流形 X 的相交形式 |
| $\text{rad}(Q)$ | 二次型 Q 的根 |
| r_λ | 关于平方-2 的同调类 λ 的反射 |
| $Sk_n(X)$ | 胞腔复形 X 的 n 维骨架 |
| $\text{SO}(n)$ | n 阶特殊正交群 |
| $\text{SpinTop}(n)$ | $\text{STop}(n)$ 的万有覆叠 |
| $\text{STop}(n)$ | \mathbb{R}^n 保持原点不动且保定向的拓扑同胚群 |
| $\text{SW}(X, s, \mathfrak{o})$ | X 配备 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ 结构 s 与同调定向 \mathfrak{o} 的 Seiberg-Witten 不变量 |
| S_X | X 上所有 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ 结构的集合 |
| $\text{TDiff}(X)$ | $\text{Diff}(X)$ 中在 $H_2(X; \mathbb{Z})$ 上作用平凡子群 |
| \mathcal{T}_{Ein} | $\text{Ein}(X)$ 商去 $\text{TDiff}(X)$ 作用得到的 Teichmüller 空间 |

| | |
|------------------|---|
| $\text{Top}(n)$ | \mathbb{R}^n 保持原点不动的拓扑同胚群 |
| $w_k(X)$ | TX 的第 k 个 Stiefel-Whitney 类 |
| $\Delta(\omega)$ | 消没弧 ω 上的一个消没圆盘 |
| Γ | $p : \pi_0(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \text{Aut}(H^2(K3; \mathbb{Z}))$ 的像 |
| Γ_Δ | 关于 $\Delta \subset L$ 中元素反射生成的 $\text{Aut}(L)$ 的子群 |
| Σ_g | 亏格为 g 的可定向闭曲面 |
| ΩX | X 的环路空间 |
| ν^1 | \mathbb{CP}^n 上的 Hopf 线丛 |
| $\sigma(X)$ | X 的相交形式的符号差 |
| τX | X 的微观切丛 |
| $\tau(E/B)$ | $E \rightarrow B$ 的垂直微观切丛 |
| $X \simeq Y$ | X 与 Y 同伦等价 |

第 1 章 引论

在数学中, 当我们研究某个对象时, 一个重要的思想是研究这一对象上保持某种结构的自同构. 在几何拓扑中, 流形是主要研究对象. 一个拓扑流形上可能没有光滑结构 [5], 也可能有不可数多种光滑结构 [6]. 拓扑范畴和光滑范畴之间的差异是上世纪 50 年代以来驱动着流形拓扑学发展的中心问题之一, 研究这两个范畴中对象的自同构群——流形的微分同胚群和拓扑同胚群——有助于理解这种差异. 在这一章中, 我们回顾历史上关于光滑流形微分同胚群与拓扑同胚群的同伦类的研究.

记号: 设 X 是一个 n 维光滑 (带边) 流形, 记 X 的微分同胚群为 $\text{Diff}(X)$, 在赋予 C^∞ 拓扑后它成为一个拓扑群. 定义 $\text{Diff}_\partial(X) = \{f \in \text{Diff}(X) | f \text{ 在 } \partial X \text{ 的某个邻域上为恒同映射}\}$. 类似地, 记 X 的拓扑同胚群为 $\text{Homeo}(X)$, 其上赋予 C^0 拓扑. 定义 $\text{Homeo}_\partial(X) = \{f \in \text{Homeo}(X) | f \text{ 在 } \partial X \text{ 的某个邻域上为恒同映射}\}$. 记 $\text{MCG}(X) = \pi_0(\text{Diff}(X))$, 称为 X 的映射类群 (mapping class group).

1.1 微分同胚群的同伦类

$\text{Diff}(X)$ 的同伦类可以决定它的上同调 $H^*(\text{Diff}(X); \mathbb{Z})$. 因此, 通过对如下纤维化应用谱序列:

$$\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{EDiff}(X) \rightarrow \text{BDiff}(X)$$

可以决定 $H^*(\text{BDiff}(X); \mathbb{Z})$, 这有助于分类光滑 X -纤维丛. 历史上对于 $\text{Diff}(X)$ 的同伦类有过不少研究, 特别地, 对 $X = S^n$ 有著名的 Smale 猜想:

$$\text{Diff}(S^n) \simeq O(n+1)$$

由于有分裂

$$\text{Diff}(S^n) \simeq O(n+1) \times \text{Diff}_\partial(D^n)$$

以及纤维化

$$\text{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \text{Diff}(D^n) \rightarrow \text{Diff}(S^{n-1})$$

故

$$\text{Diff}(S^n) \simeq O(n+1) \iff \text{Diff}_\partial(D^n) \simeq * \iff \text{Diff}(D^{n+1}) \simeq O(n+1)$$

$n = 1$ 的情形容易证明, Smale[7] 在 1959 年证明了 $n = 2$ 的情形, Hatcher[8] 在 1983 年证明了 $n = 3$ 的情形, $n \geq 5$ 时猜想不成立 [9][10], Watanabe[11] 在 2018 年证否了 $n = 4$ 的情形. Smale 猜想的解决有助于揭示球面的微分同胚群和等距同构群之间的关系. 除了球面以外, 关于其他流形的微分同胚群的同伦类也有一些研究, 比如:

1. 令 Σ_g 表示亏格为 g 的可定向闭曲面, K 表示 Klein 瓶. Earle 和 Eells[12] 证明了:

$$\text{Diff}(\Sigma_1) \simeq \text{MCG}(\Sigma_1) \times \Sigma_1$$

$$\text{Diff}(K) \simeq \text{MCG}(K) \times \text{SO}(2)$$

$$\text{Diff}(\Sigma_g) \simeq \text{MCG}(\Sigma_g) \quad (g \geq 2)$$

进一步, Gramain[13] 还给出了其他不可定向或者带边的紧曲面的微分同胚群的同伦类.

2. Hatcher[14] 证明了: $\text{Diff}(S^1 \times S^2) \simeq O(2) \times O(3) \times \Omega \text{SO}(3)$
3. 设 M 为闭的三维双曲流形, Gabai[15] 证明了: $\text{Diff}(M) \simeq \text{Isom}(M)$.
4. Farrell 和 Hsiang[16] 证明了: 对任意 $0 < i < \frac{n}{6} - 7$,

$$\pi_i(\text{Diff}_0(D^n)) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & i = 4k - 1 \text{ 且 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

但是对于 4 维流形微分同胚群的同伦类, 仍然有很多未知的问题.

1.2 微分同胚群与拓扑同胚群的比较

从 $\text{Diff}(X)$ 到 $\text{Homeo}(X)$ 有自然的含入映射 i , 它诱导了同伦群之间的同态 $i_{k,*} : \pi_k(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_k(\text{Homeo}(X))$. $\text{Diff}(X)$ 和 $\text{Homeo}(X)$ 之间的差异是许多奇异现象 (exotic phenomena) 的来源, 所以我们关心 i 是否为同伦等价. Cerf[17] 利用三维的 Smale 猜想证明了: 对任意 3 维光滑闭流形 X , 如上含入映射 i 为弱同伦等价. 若 $\dim X \geq 4$, 人们已经对很多情形证明了 i 不是弱同伦等价. 特别地, 通过运用规范场论的工具, 可以找到许多 4 维流形的例子使得 i 不是弱同伦等价, 比如:

- 对 $X = K3$, Matumoto[2] 和 Donaldson[3] 证明了 $i_{0,*}$ 不是满射.
- 对 $X = K3$, Baraglia 和 Konno[1] 证明了 $i_{1,*}$ 不是满射.

- Ruberman[18] 证明了存在 X 使得 $i_{0,*}$ 不是单射.
- Auckly 和 Ruberman[19] 证明了: 任意 $k \geq 1$, 存在 4 维流形 X 使得 $i_{k,*}$ 不是单射.
- Watanabe[11] 证明了: 对于 $X = S^4$, 存在无穷多个 k , 使得 $i_{k,*}$ 不是单射.
- Baraglia[20] 证明了: 对任意 4 维单连通不定光滑闭流形 X , 若 $|\sigma(X)| > 8$, 则 i 不是同伦等价.

1.3 本文主要内容和框架

约定: 在这之后, 除非特殊说明, 我们都记 $X = K3$.

本文的主题是 $K3$ 曲面的微分同胚群和拓扑同胚群的比较. 为了研究 $K3$ 曲面微分同胚群和拓扑同胚群的差距, 一个自然的想法是考虑它们在格 (lattice) $L = (H^2(K3; \mathbb{Z}), Q_X)$ 上的作用. 我们有如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Diff}(X) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Diff}(X)) & \xrightarrow{p} & \Gamma \\
 \downarrow i & & \downarrow i_{0,*} & \searrow \tilde{p} & \downarrow \\
 \text{Homeo}(X) & \longrightarrow & \pi_0(\text{Homeo}(X)) & \xrightarrow{\cong} & \text{Aut}(L)
 \end{array}$$

其中, $\Gamma = \text{Im}(\tilde{p})$, $\text{Aut}(L)$ 是 L 保持相交形式的自同构群, Freedman[21] 和 Quinn[22] 对所有 4 维单连通闭流形 X 证明了右下角的映射是同构.

在本文中, 我们将介绍如下两个定理的证明:

定理 1.1 (Baraglia-Konno[1]): $i_{1,*} : \pi_1(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(X))$ 不是满射.

定理 1.2 (Matumoto[2], Donaldson[3], Friedman-Morgan[4]): Γ 是 $\text{Aut}(L)$ 的一个指标为 2 的子群. 特别地, $i_{0,*} : \pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ 不是满射.

定理 1.2 最早由 Matumoto 和 Donaldson 证明, 但本文中的证明来自于 Friedman 和 Morgan 的专著 [4].

本文的框架如下:

第二章的目标是证明定理 1.1. 2.1 节将介绍 $K3$ 曲面的一些性质以及 Torelli 定理. 在 2.2 节中我们将使用 Torelli 定理构造 p 的一个截面 s . 在 2.3 节中我们构造一个不可光滑化的环面上的 $K3$ 丛 E . 在 2.4 节中我们利用截面 s 构造一个环面上的光滑 $K3$ 丛 E' , 使得它和 E 在环面的一维骨架上的限制同构, 但在整个环面上不同构. 最后, 通过比较 E 和 E' , 我们可以用反证法证明定理 1.1.

第三章的目标是证明定理 1.2. 3.1 节是对椭圆曲面的简单介绍. 3.2 节将构造

K3 中的 27 个自相交数为 -2 的嵌入球面，它们的同调类张成 $H_2(X; \mathbb{Z})$ ，且满足一定的相交关系. 还可以定义关于自相交数为 -2 的嵌入球面的反射，这些反射不只是二维同调中的反射，而且可以实现为 X 的微分同胚. 3.3 节将证明：关于上述 27 个球面的反射生成了 $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \text{Aut}(H^2(X; \mathbb{Z}))$ 的像 Γ ，并且 Γ 是 $\text{Aut}(H^2(X; \mathbb{Z}))$ 的一个指标为 2 的子群.

在第四章中，我们将对于不使用 Torelli 定理来证明定理 1.1 提出初步的想法，希望通过将 Γ 中的元素实现为关于一些具体的嵌入球面的反射，来替代定理 1.1 证明中截面 s 起到的作用.

第 2 章 K3 曲面微分同胚群与拓扑同胚群的基本群

2.1 K3 曲面的 Torelli 定理

在这一小节中, 我们介绍 K3 曲面的一些性质, 包括著名的 Torelli 定理, 这些性质将在定理 1.1 的证明中起到关键的作用。

定义 2.1: K3 曲面是典范丛平凡的单连通紧复曲面。

定义 2.2: 一个复流形 (M, J) 称为 Kähler 流形, 若其上有一个和复结构 $J : TM \rightarrow TM$ 相容的 Riemann 度量 g , 也即存在 M 上的一个闭的 2-形式 ω , 满足 $g(X, Y) = \omega(X, J(Y))$, $\forall X, Y \in TM$. ω 称为 M 上的 Kähler 形式 (Kähler form), 它是一个自对偶的调和 2-形式 (self-dual harmonic 2-form)。

定义 2.3: 一个 $4k$ 维 Riemann 流形 (M, g) 称为超 Kähler 的 (hyperkählerian), 若其上有三个复结构 I, J, K 满足 $I^2 = J^2 = K^2 = -id_{TM}$, $IJ = -JI = K$, 且 g 关于 I, J, K 都是 Hermite 度量。

定义 2.4: 设 (M, g) 为一个 n 维 Riemann 流形, 若 $Ric = \frac{R}{n}g$, 其中 Ric 为 Ricci 张量, R 为数量曲率 (scalar curvature), 则称 g 为 M 上的一个 Einstein 度量。

注释 2.1: 以下列出 K3 曲面的一些重要性质:

1. K3 曲面是一类复曲面, 作为复流形并不互相等价, 但是所有 K3 曲面作为实 4 维光滑流形都是微分同胚的 [23]. 另一方面, 作为一个拓扑流形, K3 曲面上有无穷多的奇异微分结构 [24].
2. K3 曲面有很多种构造方式, 比如著名的 Fermat 四次曲线, 我们在第三章将会介绍 K3 作为椭圆曲面 $E(2)$ 的构造以及 Kummer K3 的构造.
3. 在附录 A 中我们计算了 K3 的二维同调和相交形式, 结论如下:

$$b_2 = 22, b_2^+ = 3, b_2^- = 19, Q_X = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus 2(-E_8)$$

故由 Freedman 的定理 A.2, K3 曲面同胚于 $3(S^2 \times S^2) \# 2(-E_8)$.

4. K3 曲面都是 Kähler 流形.[25]
5. 由 [26], K3 曲面上 Einstein 度量的数量曲率都为 0, 所以在 K3 曲面上 Einstein 度量等价于 Ricci 平坦度量.
6. 由 [27] 的定理 6.40, K3 曲面配备 Einstein 度量后成为一个超 Kähler 流形.
7. K3 曲面的 Hodge 菱形 (Hodge diamond) 如下:

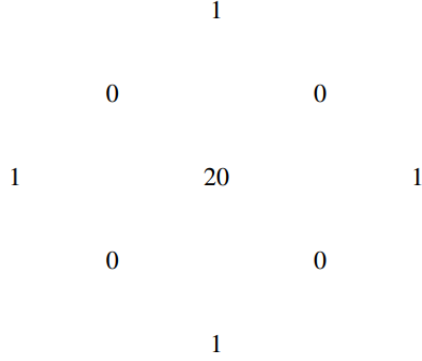


图 2.1 K3 曲面的 Hodge diamond

设 (X, I, J, K) 为一个超 Kähler 流形, 则 Kähler 形式 $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ 是 $H_g^+(X)$ 的一组基, 因而给出 $H_g^+(X)$ 的一个定向. 设 $S(H_g^+)$ 为 (X, g) 上单位自对偶调和 2-形式的集合, S_g^2 为 X 上与 g 相容的复结构的集合, 则有如下对应:

$$S_g^2 \rightarrow S(H_g^+), \quad J \mapsto \omega_J : (Y, Z) \mapsto g(Y, J(Z))$$

由于 $b_2^+(X) = 3$, 故 $S_g^2 \cong S(H_g^+) \cong S^2$. (I, J, K) 在相差一个 $SO(3)$ 变换的意义下由 g 唯一决定, 因此 $H_g^+(X)$ 上的定向由 g 决定.

引理 2.1: 设 g, g' 是 X 上的两个 Einstein 度量, 且作为 $H^2(X; \mathbb{R})$ 的子空间有 $H_g^+(X) = H_{g'}^+(X)$, 则 g 和 g' 在 $H_g^+(X)$ 上诱导相同的定向.

证明 不妨设 g, g' 都有单位体积. 假设 $H_g^+(X) = H_{g'}^+(X)$, 但是 g 和 g' 在 $H_g^+(X)$ 上诱导相反的定向. 设 (I, J, K) 是 X 上与 g 相容的超 Kähler 结构, 则 $H^{2,0}(X, I)$ 由 $\omega_J + i\omega_K$ 张成. 定义 $P_{(X, I)} = \mathbb{R}\omega_J \oplus \mathbb{R}\omega_K$. 通过适当旋转 (I, J, K) , 可设 $\forall \delta \in H^2(X; \mathbb{Z}), \langle \delta, \delta \rangle = -2$, 都有 $\delta \notin P_{(X, I)}^\perp$. 定义

$$\mathcal{K}_{(X, I)} = \{x \in H^2(X; \mathbb{R}) | x \perp P_{(X, I)}, \langle x, x \rangle > 0, \langle x, \delta \rangle \neq 0, \forall \delta \in \Delta_{(X, I)}\}$$

其中 $\Delta_{(X, I)} = \{\delta \in H^2(X; \mathbb{Z}) | \delta \perp P_{(X, I)}, \langle \delta, \delta \rangle = -2\} = \emptyset$. 因此 $\mathcal{K}_{(X, I)} = \{x \in P_{(X, I)}^\perp | \langle x, x \rangle > 0\}$. 相交形式 Q_X 限制在 $P_{(X, I)}^\perp$ 上的符号为 $(1, 19)$, 故 $\mathcal{K}_{(X, I)}$ 有两个连通分支 $\mathcal{K}_{(X, I)}^+, \mathcal{K}_{(X, I)}^-$. 由 [27] 的 12.110 节, (X, I) 的任一 Kähler 类都落在 $\mathcal{K}_{(X, I)}$ 之中; 又因为 (X, I) 的 Kähler 类的集合是 $H^2(X; \mathbb{R})$ 中的凸集, 所以 (X, I) 的所有 Kähler 类都落在 $\mathcal{K}_{(X, I)}$ 的一个连通分支中, 该分支称为 (X, I) 的 Kähler chamber. 不妨设 (X, I) 的 Kähler chamber 是 $\mathcal{K}_{(X, I)}^+$.

设 (I', J', K') 是 X 上与 g' 相容的一个超 Kähler 结构, 由于 $H_g^+(X) = H_{g'}^+(X)$, 但其上诱导定向相反, 故适当旋转后不妨设 $[\omega_{I'}] = -[\omega_I], [\omega_{J'}] = [\omega_J], [\omega_{K'}] = [\omega_K]$, 从而 $P_{(X, I)} = P_{(X, I')}$, $\mathcal{K}_{(X, I)} = \mathcal{K}_{(X, I')}$, 且 (X, I') 的 Kähler chamber 是

$\mathcal{K}_{(X,I)}^-$.

令 $\phi : H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$, $x \mapsto -x$. 则 $\phi \in \text{Aut}(H^2(X; \mathbb{Z}))$, 将 $H^{2,0}(X, I)$ 映为 $H^{2,0}(X, I')$, 将 $\mathcal{K}_{(X,I)}^+$ 映为 $\mathcal{K}_{(X,I)}^-$, 故由 [28] 知存在唯一的全纯自同构 $f : X \rightarrow X$ 使得 $f^* = \phi$. 因而 f 是一个反 $H^+(X)$ 定向的微分同胚, 但由命题 3.3 这是不可能的. 因此假设不成立, 也即 g 和 g' 在 $H_g^+(X)$ 上诱导的定向必定相同. ■

令 $\text{Ein}(X)$ 表示 K3 曲面 X 上的单位体积 Einstein 度量构成的空间, 其上赋予 C^∞ 拓扑. 令 $\text{TDiff}(X) = \{\phi \in \text{Diff}(X) | \phi_* = \text{id} \in \text{Aut}(L)\}$ 表示 $\text{Diff}(X)$ 中在 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 上作用平凡的元素构成的子群. 则我们有短正合列:

$$1 \longrightarrow \text{TDiff}(X) \longrightarrow \text{Diff}(X) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

$\text{TDiff}(X)$ 通过拉回作用在 $\text{Ein}(X)$ 上, 记 $\mathcal{T}_{\text{Ein}} = \text{Ein}(X)/\text{TDiff}(X)$. 记 $\mathbb{R}^{3,19} = (\mathbb{R}^{22}, Q)$, 其中 $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - \dots - x_{22}^2$. 令 $Gr_3(\mathbb{R}^{3,19})$ 为 $\mathbb{R}^{3,19}$ 中正定的 3 维子空间构成的 Grassmann 流形, 则 $Gr_3(\mathbb{R}^{3,19}) \cong O(3, 19)/(O(3) \times O(19))$ 是可缩的 57 维流形. 固定一个等距同构 $(H^2(X; \mathbb{R}), Q_X) \cong (\mathbb{R}^{22}, Q)$, 则可定义周期映射 (period map):

$$P : \mathcal{T}_{\text{Ein}} \longrightarrow Gr_3(\mathbb{R}^{3,19}), \quad [g] \mapsto H_g^+(X)$$

容易验证这一映射是良好定义的. 令 $\Delta = \{\delta \in H^2(X; \mathbb{Z}) | \langle \delta, \delta \rangle = -2\}$, $W = \{\tau \in Gr_3(\mathbb{R}^{3,19}) | \tau^\perp \cap \Delta = \emptyset\}$, $A_\delta = \{\tau \in Gr_3(\mathbb{R}^{3,19}) | \delta \in \tau^\perp\}$, 则 $W = Gr_3(\mathbb{R}^{3,19}) - \bigcup_{\delta \in \Delta} A_\delta$. A_δ 为 $Gr_3(\mathbb{R}^{3,19})$ 中余维数为 3 的子流形.

引理 2.2: W 连通而且单连通.

证明 任取 $\gamma : S^1 \rightarrow W$, $\gamma(1) = x_0$, 由于 $Gr_3(\mathbb{R}^{3,19})$ 是一个可缩光滑流形, 故存在光滑同伦 $\gamma_t : S^1 \rightarrow Gr_3(\mathbb{R}^{3,19})$, $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_1 \equiv x_0$. 由 [29] 的定理 3.2.5, 可设 γ_t 与 $A_\delta (\forall t \in [0, 1], \forall \delta \in \Delta)$ 横截 (transverse). 由于 A_δ 的余维数是 3, 所以 γ_t 与 A_δ 不交, 因此 W 单连通. 类似地, 由横截性以及 $Gr_3(\mathbb{R}^{3,19})$ 连通可得 W 连通. ■

引理 2.3: $\text{Im}(P) \subset W$

证明见 [30] 的 4.3 节.

定理 2.1 (Torelli): $P : \mathcal{T}_{\text{Ein}} \longrightarrow W$ 是同胚.

证明见 [27] 的 12.K 节.

注释 2.2: 在 [30] 和 [27] 中定义的周期映射 P 取值在正定定向三维子空间的 Grassmann 流形 $Gr_3^+(\mathbb{R}^{3,19})$ 中, 但是由引理 2.1 知它的像和上述定义的周期映射没有差别.

引理 2.4: $\text{TDiff}(X)$ 在 $\text{Ein}(X)$ 上的作用是自由且恰当的.

证明 回忆: $S(H_g^+)$ 为 (X, g) 上单位自对偶调和 2-形式的集合, S_g^2 为 X 上与 g 相容的复结构的集合, 有如下——对应:

$$S_g^2 \rightarrow S(H_g^+), \quad J \mapsto \omega_J : (X, Y) \mapsto g(X, J(Y))$$

设 $g \in \text{Ein}(X)$, $\phi \in \text{TDiff}(X)$ 满足 $\phi^*g = g$, 则 $\phi^* : S(H_g^+) \rightarrow S(H_g^+)$ 为正交变换, 因此有不动点 ω_J . 从而 $\phi^*J = J$, 即 ϕ 是 X 的全纯自同构, 且在 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 上作用平凡, 故由 [28] 中的命题 1.1 得 $\phi = \text{id}_X$.

恰当性的证明见 [30] 的引理 4.5. ■

推论 2.1: $\text{Ein}(X) \rightarrow \mathcal{T}_{\text{Ein}}$ 是一个主 $\text{TDiff}(X)$ -丛.

2.2 截面的构造

在这一小节中, 我们来构造之前提到的同态 p 的一个截面 s .

定理 2.2 ([1]): 存在群同态 $s : \Gamma \rightarrow \text{MCG}(X)$ 使得 $p \circ s = \text{id}$.

证明 由 Torelli 定理 2.1 以及引理 2.2, \mathcal{T}_{Ein} 连通且单连通. 令

$$\mathcal{M}_{\text{Ein}} = \text{Ein}(X) \times_{\text{Diff}(X)} \text{EDiff}(X) = \text{Ein}(X) \times \text{EDiff}(X) / \text{Diff}(X)$$

其中 $\text{Diff}(X)$ 在 $\text{Ein}(X) \times \text{EDiff}(X)$ 上的作用为: $\phi \cdot (g, x) = (g \cdot \phi, \phi^{-1} \cdot x)$. 由引理 2.4, $\mathcal{M}_{\text{Ein}} = \mathcal{T}_{\text{Ein}} \times_{\Gamma} E\Gamma$. 因此, 我们有纤维化:

$$\mathcal{T}_{\text{Ein}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\text{Ein}} \longrightarrow B\Gamma$$

故有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \pi_0(B\Gamma) = \Gamma & & \\
 & & & & \uparrow = & & \\
 1 = \pi_1(\mathcal{T}_{\text{Ein}}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{M}_{\text{Ein}}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(B\Gamma) & \longrightarrow & \pi_0(\mathcal{T}_{\text{Ein}}) = 1 \\
 & & \searrow s & & \uparrow p & & \\
 & & & & \pi_1(\text{BDiff}(X)) & & \\
 & & & & \uparrow = & & \\
 & & & & \pi_0(\text{Diff}(X)) & &
 \end{array}$$

其中中间一行是同伦群的长正合列, $\pi_1(B\Gamma) = \pi_0(B\Gamma)$ 以及 $\pi_1(\text{BDiff}(X)) = \pi_0(\text{Diff}(X))$ 是因为 $E\Gamma$ 和 $\text{EDiff}(X)$ 可缩, $\pi_0(B\Gamma) = \Gamma$ 是因为 $\Gamma \subset \text{Aut}(L)$ 离散. 由上图知 (复合一个同构之后) s 是 p 的一个截面. ■

2.3 环面上不可光滑化的 K3 丛

在这一小节中，我们构造环面上的一个不可光滑化的 K3 丛，该构造来自 Baraglia 和 Konno 的另一篇文章 [31].

定义 2.5: 设 B 为一个拓扑流形， B 上的一个 n 维微观丛 (n -microbundle) 为 $\xi = \{B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B\}$ ，其中：

- E 是一个拓扑空间， i, p 是连续映射，且 $p \circ i = id$.
- $\forall b \in B$ ，存在 b 的一个邻域 $U \subset B$ ， $i(b)$ 的一个邻域 $V \subset E$ 和一个同胚 $V \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ ，使得如下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

$i : B \rightarrow E$ 称为零截面 (zero-section). 称两个微观丛 $\xi = \{B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B\}, \xi' = \{B \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} B\}$ 同构，若存在零截面 $i(B), i'(B)$ 的邻域 N, N' 之间的同胚使得如下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ i \swarrow & & \searrow i' \\ N & \xrightarrow{\cong} & N' \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

定义 2.6: 设 X 为一个拓扑流形，则 $\tau X = \{X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{\pi_1} X\}$ 称为 X 的微观切丛 (tangent microbundle)，其中 Δ 为对角映射， π_1 为到第一个因子的投影。

定理 2.3 (Kister-Mazur[32]): 设 $\xi = \{B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B\}$ 为一个 n 维微观丛，则存在零截面的一个邻域 $U \subset E$ 使得 $p|_U : U \rightarrow B$ 是一个以 \mathbb{R}^n 为纤维的拓扑纤维丛。且这一纤维丛在同构的意义下唯一。

这一定理说明任意 n 维微观丛 ξ 都可以被一个有零截面的 \mathbb{R}^n -纤维丛代表，进而得到一个主 $\text{Top}(n)$ -丛 $\mathcal{F}(\xi)$ ，称为 ξ 的标架丛 (frame bundle)，在同构的意义下唯一。类似地，对于可定向的 n 维微观丛 ξ ，可定义定向标架丛 (oriented frame bundle) $\mathcal{F}^+(\xi)$ 。

定义 2.7: 设 B, X 为光滑流形。

1. 一个以 X 为纤维的拓扑纤维丛 $E \rightarrow B$ 称为 B 上的一个连续 X -丛。

2. 一个以 X 为纤维的拓扑纤维丛 $E \rightarrow B$ 称为 B 上的一个光滑 X -丛, 若可选取一族局部平凡化, 使得其转移函数的取值都在 $\text{Diff}(X)$ 中.
3. 称一个连续 X -丛可光滑化 (smoothable), 若存在另一光滑 X -丛 (作为拓扑纤维丛) 与之同构.

注释 2.3: 若 $E \rightarrow B$ 为 B 上的一个光滑 X -丛, 则存在一个与之同构的纤维丛 $E' \rightarrow B$ 使得 E' 是一个光滑流形, 且从 E' 到 B 的投影为浸没 [33]. 因此如上定义的光滑 X -丛确实同构于一个以 X 为纤维的光滑纤维丛.

定义 2.8: 1. 设 $E \rightarrow B$ 为一个连续 X -丛, 则 $\tau(E/B) = \{E \xrightarrow{\Delta} E \times_B E \xrightarrow{\pi_1} E\}$ 称为 $E \rightarrow B$ 的垂直微观切丛 (vertical tangent microbundle), 其中 $E \times_B E$ 为纤维积.

2. 由于含入映射 $\text{SO}(n) \rightarrow \text{STop}(n)$ 诱导基本群的同构 [34][35], 且 $\text{SO}(n)$ 和 $\text{STop}(n)$ 均连通, 故对于 $n \geq 3$, 存在唯一的二重覆叠 $\phi: \text{SpinTop}(n) \rightarrow \text{STop}(n)$. 一个可定向 n 维微观丛 ξ 上的一个自旋结构 (spin structure) 是一个二重覆叠 $\tilde{F}^+(\xi) \rightarrow F^+(\xi)$, 其在每一个纤维上作为覆叠映射与 ϕ 同构.
3. 设 $E \rightarrow B$ 为一个连续 X -丛, 称 $\tau(E/B)$ 上的一个自旋结构为 $E \rightarrow B$ 上的一族拓扑自旋结构 (families topological spin structure).

由 Freedman 的定理 A.2, $X = K3$ 在拓扑上同胚于 $3(S^2 \times S^2) \# 2(-E_8)$, 我们将三个 $S^2 \times S^2$ 分量标号, 记为 $(S^2 \times S^2)_i, i = 1, 2, 3$. 令 r 为 $S^2 \times S^2$ 的微分同胚, 在两个分量上都关于赤道作反射, 由同痕扩张定理, r 同痕于一个微分同胚 f , 在 r 的某个不动点的邻域上为恒同映射. 在连通和分解 $3(S^2 \times S^2) \# 2(-E_8)$ 中, 不妨假定每一个 $S^2 \times S^2$ 都挖掉一个被 f 固定的圆盘, 和 $2(-E_8)$ 挖去三个不交的圆盘 B_1, B_2, B_3 沿边界粘起来. 于是可构造如下两个交换的保定向同胚:

$$f_1 = f \# f \# \text{id} \# \text{id}_{2(-E_8)}, \quad f_2 = \text{id} \# f \# f \# \text{id}_{2(-E_8)}$$

定义 2.9: 给定拓扑流形 X 的两个拓扑同胚 ϕ_1, ϕ_2 , 满足 $\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2 \circ \phi_1$, 则可以构造 $E_{\phi_1, \phi_2} = \mathbb{R}^2 \times X / \sim$, 模去的 \mathbb{Z}^2 作用为 $(m, n) \cdot (x_1, x_2, x) = (x_1 + m, x_2 + n, \phi_1^m \circ \phi_2^n(x))$. $E_{\phi_1, \phi_2} \rightarrow T^2$ 为 T^2 上的连续 X -丛, 称为由 ϕ_1, ϕ_2 给出的映射环面 (mapping torus). 类似地, 可以定义由 n 个互相交换的 X 的拓扑同胚 ϕ_1, \dots, ϕ_n 给出的映射环面 $E_{\phi_1, \dots, \phi_n} \rightarrow T^n$.

引理 2.5: 令 $E = E_{f_1, f_2} \rightarrow T^2$ 为由 f_1, f_2 给出的映射环面, 则其上有一族拓扑自旋结构.

证明 令 $h_1 = f \# id \# id \# id_{2(-E_8)}$, $h_2 = id \# f \# id \# id_{2(-E_8)}$, $h_3 = id \# id \# f \# id_{2(-E_8)}$, 则 $f_1 = h_1 h_2$, $f_2 = h_2 h_3$, E_{f_1, f_2} 是映射环面 $E_{h_1, h_2, h_3} \rightarrow T^3$ 在映射 $\iota : T^2 \rightarrow T^3$, $(x, y) \mapsto (x, x + y, y)$ 下的拉回, 故只需证明 $E_{h_1, h_2, h_3} \rightarrow T^3$ 上有一族拓扑自旋结构.

由于 $S^2 \times S^2$ 与 $-E_8$ 上均有自旋结构, 且 f 保持 $S^2 \times S^2$ 的自旋结构, 所以如上构造的 $X = 3(S^2 \times S^2) \# 2(-E_8)$ 上也有自旋结构, 而且 h_1, h_2, h_3 均保持 X 上的自旋结构. X 上的自旋结构对应了 X 上的一个主 $\text{Spin}(4)$ -丛 $\tilde{F}r^+(X)$. 将结构群由 $\text{Spin}(4)$ 扩张至 $\text{SpinTop}(4)$ 得 $\tilde{F}^+(X) = \tilde{F}r^+(X) \times_{\text{Spin}(4)} \text{SpinTop}(4)$.

取 h_i 的切映射得到主 $\text{SO}(4)$ -丛的同构 $h_{i*} : Fr^+(X) \rightarrow Fr^+(X)$, 它可以唯一地提升为主 $\text{Spin}(4)$ -丛的同构 $\tilde{h}_{i*} : \tilde{F}r^+(X) \rightarrow \tilde{F}r^+(X)$, 使得 \tilde{h}_i 在 $B_0 \subset 2(-E_8) - (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ 上为恒等映射. 进一步, \tilde{h}_i 还可以扩张为 $\tilde{F}^+(X)$ 的自同构. 注意到, 由于 $[h_i, h_j] = 1$, 故 $[h_{i*}, h_{j*}] = 1$, 从而 $[\tilde{h}_i, \tilde{h}_j] = \pm 1$. 又因为在 B_0 上方 $[\tilde{h}_i, \tilde{h}_j] = 1$, 故 \tilde{h}_i, \tilde{h}_j 交换. 因此可以构造 $E_{h_1, h_2, h_3} \rightarrow T^3$ 上的一族拓扑自旋结构. ■

注释 2.4: 以上提到的“自旋结构”指的是拓扑 $\text{Spin}(4)$ -丛, 所有的“主丛”都只是拓扑纤维丛, 所有的同构也只是拓扑上的同构. 由于 $X = 3(S^2 \times S^2) \# 2(-E_8)$ 只是拓扑上的连通和, 故 h_i 并非 X 的微分同胚, 上面取 h_i 的切映射是在 $h_i = id$ 的地方用恒等映射, 在这之外用 h_{i*} . 我们只能说 $E = E_{f_1, f_2}$ 是一个连续 K3 丛, 事实上, 下面将证明 E 不可光滑化.

定义 2.10: 设 $E \rightarrow B$ 为一个连续 X -丛, 则有以 $H^2(X; \mathbb{R})$ 为纤维的连续向量丛 $H^2 \rightarrow B$, 它的极大正定子丛在同构的意义下唯一, 记为 $H^+ \rightarrow B$.

引理 2.6: 设 $E \rightarrow B$ 为一个连续 X -丛, 且其上有一族拓扑自旋结构. 若对于 X 上的某一光滑结构, $E \rightarrow B$ 可光滑化, 则 $w_2(H^+) = 0$.

这一引理的证明见 Baraglia 和 Konno 的论文 [31] 的命题 4.21, 其中需要用到该论文中推导的计算模 2 族 Seiberg-Witten 不变量 (mod 2 families Seiberg-Witten invariants) 的 Steenrod 平方 (Steenrod square) 的公式.

定理 2.4 (Baraglia-Konno[31]): 如上构造的连续 K3 丛 $E \rightarrow T^2$ 不可光滑化.

证明 令 $E_i \in H^2((S^2 \times S^2)_i; \mathbb{Z})$ 表示对角嵌入子流形 $S^2 \rightarrow S^2 \times S^2$ 的同调类的 Poincaré 对偶, 则 E_1, E_2, E_3 构成 (某一个) $H^+(X)$ 的一组基, 且

$$f_1^*(E_1) = -E_1, f_1^*(E_2) = -E_2, f_1^*(E_3) = E_3$$

$$f_2^*(E_1) = E_1, f_2^*(E_2) = -E_2, f_2^*(E_3) = -E_3$$

记由 E_1, E_2, E_3 张成的 T^2 上的线丛为 L_1, L_2, L_3 , 则 $H^+ = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$. 令 $x, y \in H^1(T^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 表示 T^2 两个 S^1 分量同调类的 Poincaré 对偶. 下面来计算 $w(E_1)$, 考虑如下图表, 其中 i_1 是到第一个分量的嵌入:

$$\begin{array}{ccc} i_1^* L_1 & \longrightarrow & L_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \xhookrightarrow{i_1} & T^2 \end{array}$$

由 $f_1^*(E_1) = -E_1$ 可知 $i_1^* L_1$ 同构于将 $[0, 1]$ 上的平凡线丛左右边界用乘上 -1 的同构粘起来得到的线丛, 也即一个 Möbius 丛. 同理, 由 $f_2^*(E_1) = E_1$ 可知 $i_2^* L_1$ 是 S^1 上的平凡丛, 故 $w(L_1) = 1 + x$. 同理可得 $w(L_2) = 1 + x + y$, $w(L_3) = 1 + y$. 因此 $w(H^+) = (1 + x)(1 + x + y)(1 + y) = 1 + xy$, $w_2(H^+) \neq 0$. 由引理2.6, E 不可光滑化. ■

2.4 定理 1.1 的证明

在这一节中, 我们介绍 Baraglia 和 Konno 在 [1] 中对定理1.1的证明. 由如下交换图表, 只需要证明 $i'_* : \pi_2(\text{BDiff}(X)) \rightarrow \pi_2(\text{BHomeo}(X))$ 不是满射.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\text{Diff}(X)) & \xrightarrow{i_{1,*}} & \pi_1(\text{Homeo}(X)) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \pi_2(\text{BDiff}(X)) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_2(\text{BHomeo}(X)) \end{array}$$

在定理 2.4 的证明中, 我们构造了一个不可光滑化的 K3 丛 $E \rightarrow T^2$, 其中 $E = E_{f_1, f_2}$. 由于 f_1, f_2 均保持 $H^+(X)$ 的定向, 而由定理3.4知 Γ 是 $\text{Aut}(L)$ 中保持 $H^+(X)$ 定向的元素构成的指标为 2 的子群, 故 $f_1^*, f_2^* \in \Gamma$. 令 $g_1, g_2 \in \text{Diff}(X)$ 分别为 $s(f_1^*), s(f_2^*) \in \pi_0(\text{Diff}(X))$ 的代表元, 则它们在同痕的意义下交换. 不妨设 $g_1 g_2 = g_2 g_1$, 定义 $E' = E_{g_1, g_2} \rightarrow T^2$, 则 E' 是环面上的光滑 K3 丛. 令 $\phi, \phi' : T^2 \rightarrow \text{BHomeo}(X)$ 分别为 E, E' 作为连续 K3 丛的分类映射. 于是, 我们有如下两个提升问题, 左图不存在提升, 右图存在提升:

$$\begin{array}{ccc} & \text{BDiff}(X) & \\ \nearrow \exists & \downarrow i' & \nearrow \exists \\ T^2 & \xrightarrow{\phi} \text{BHomeo}(X) & T^2 \xrightarrow{\phi'} \text{BHomeo}(X) \end{array}$$

用反证法, 假设 $i'_* : \pi_2(\text{BDiff}(X)) \rightarrow \pi_2(\text{BHomeo}(X))$ 是满射, 目标是构造上

方左图的一个提升, 从而得到矛盾. 由于 S^1 上 X -纤维丛的同构类与粘贴映射的同痕类一一对应, 且 $f_{1*} = g_{1*}, f_{2*} = g_{2*} \in \text{Aut}(L) = \pi_0(\text{Homeo}(X))$, 故 E, E' 限制在环面的一维骨架 $Sk_1 = Sk_1(T^2)$ 上是同构的, 因此不妨设 $\phi|_{Sk_1} = \phi'|_{Sk_1}$. 从而当限制在二维胞腔上, $\phi|_{D^2}, \phi'|_{D^2}$ 在边界 ∂D^2 上是相等的, 因此可以将它们沿着边界粘贴得到 $\psi : S^2 \rightarrow \text{BHomeo}(X)$. 由假设知, 在相差一个同伦的意义下, ψ 存在提升 $\tilde{\psi} : S^2 \rightarrow \text{BDiff}(X)$.

在相差一个同伦的意义下, 不妨设 $\phi'|_{D^2}$ 在小圆盘 $D_\epsilon \subset D^2$ 上为常值映射. 于是可以将 $\phi'|_{D_\epsilon} : D_\epsilon \rightarrow \text{BHomeo}(X)$ 替换为 ψ , 得到的映射记为 $\phi' + \psi : T^2 \rightarrow \text{BHomeo}(X)$, 它同伦于 ϕ , 如下图所示:

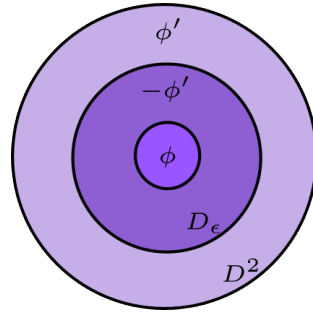


图 2.2 $\phi' + \psi$ 同伦于 ϕ

由于 ϕ' 与 ψ 分别有提升 $\tilde{\phi}'$ 与 $\tilde{\psi}$, 故 $\phi' + \psi$ 有提升 $\tilde{\phi}' + \tilde{\psi}$. 由于 $\phi' + \psi$ 同伦于 ϕ , 且 $i' : \text{BDiff}(X) \rightarrow \text{BHomeo}(X)$ 为纤维化 (fibration), 故由同伦提升性质, ϕ 也有提升 $\tilde{\phi} : T^2 \rightarrow \text{BDiff}(X)$, 这与条件矛盾, 所以假设不成立, 也即 i'_* 不是满射.

第 3 章 K3 曲面中自相交数为 -2 的嵌入球面

3.1 椭圆曲面简介

设 X 为一个复曲面, X 的椭圆纤维化 (elliptic fibration) 是一个解析满射 $\pi : X \rightarrow B$, 其中 B 是一条复曲线, 使得这一映射的一般纤维 (generic fiber) 均为非奇异的椭圆曲线 (微分同胚于环面). 若 X 有一个椭圆纤维化, 则称 X 为一个椭圆曲面 (elliptic surface). 需要注意的是, 椭圆纤维化不一定是纤维化, 因为它可能有一些奇异纤维 (singular fiber).

定义 3.1: 设 $\pi : X \rightarrow B$ 是一个椭圆曲面, $x \in B$. $\pi^{-1}(x)$ 称为一个多重纤维 (multiple fiber), 若作为除子 (divisor) 有 $\pi^{-1}(x) = mD$, 其中 m 为大于 1 的整数. 在本文中, 我们只考虑无多重纤维的椭圆曲面.

定义 3.2: 一个椭圆纤维化称为节点的 (nodal), 若它的所有奇异纤维均为带有一个节点的不可约有理曲线. 这种奇异纤维也称为节点纤维 (nodal fiber), 它是最常见的奇异纤维, 记为 I_1 型纤维.

注释 3.1: Kodaira 对椭圆曲面的奇异纤维作了分类 [36], 其中 II 型纤维也称为尖点纤维 (cusp fiber), II^* 型纤维也称为 $-\tilde{E}_8$ 纤维, 我们将在有理椭圆曲面 $E(1)$ 的构造中碰到这两种奇异纤维.

爆破 (blow-up) 是代数几何中的一种常见操作, 以下介绍它的局部模型. 设 S 为一个复曲面, 则 $\forall x \in S$, x 的一个小邻域全纯等价于 \mathbb{C}^2 中的开集. 故以下我们考虑 \mathbb{C}^2 在原点 0 处的爆破. 定义如下映射:

$$p : \mathbb{C}^2 - 0 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \quad (x, y) \mapsto [x : y]$$

考虑这一映射的图象 (graph) $\Gamma_p \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$, 取其闭包 $\overline{\Gamma_p}$, 则投影 $\pi : \overline{\Gamma_p} \rightarrow \mathbb{C}^2$ 在原点之外是同构, 在原点处将 \mathbb{CP}^1 收缩至一点. π 称为 \mathbb{C}^2 在原点 0 处的爆破. 从拓扑上看, 爆破前局部上是 \mathbb{CP}^1 上典范向量丛 ν^1 的圆盘丛 $D(\nu^1)$ 将所有圆心等同起来, 爆破后就得到了 $D(\nu^1)$, 因而爆破的过程中可视为挖掉 0 的单位球邻域, 用反定向的圆盘丛 $\overline{D(\nu^1)}$ 代替. 因此, 零截面 $\mathbb{CP}^1 \subset \overline{D(\nu^1)}$ 是一个自相交数 -1 的嵌入球面. 另一方面, 由于 ν^1 同构于 $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ 的法丛, 故爆破后的曲面微分同胚于 $S \# \mathbb{CP}^2$.

下面我们利用爆破这种操作来构造一类最简单的椭圆曲面——有理椭圆曲面 (rational elliptic surface). 取 \mathbb{C}^3 中两个一般的三次齐次多项式 P, Q , 它们定义了

\mathbb{CP}^2 中的两条三次曲线, 交于九个点 $\{p_1, \dots, p_9\}$. 定义过这九个点的三次曲线铅笔 (cubic pencil): $\{sP + tQ | [s : t] \in \mathbb{CP}^1\}$. 于是我们有纤维化:

$$\mathbb{CP}^2 - \{p_1, \dots, p_9\} \longrightarrow \mathbb{CP}^1, \quad x \in \{sP + tQ = 0\} \mapsto [s : t]$$

在九个交点处爆破后我们可以将如上映射延拓为:

$$\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2} \longrightarrow \mathbb{CP}^1$$

我们称 $\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$ (配备任意一个椭圆纤维化) 为有理椭圆曲面, 记为 $E(1)$.

正如我们可以对两个四维流形作连通和得到新的四维流形, 我们也可以对两个椭圆曲面作纤维和 (fiber sum) 得到新的椭圆曲面, 接下来我们介绍这一常用操作. 对于两个椭圆曲面 $\pi_1 : X_1 \rightarrow B_1, \pi_2 : X_2 \rightarrow B_2$, 各取一个一般的纤维 $F_1 = \pi_1^{-1}(x_1), F_2 = \pi_2^{-1}(x_2)$, 以及 x_1, x_2 同胚于单位圆盘的小邻域 D_1, D_2 . 则 $\partial(\pi_1^{-1}(D_1)) = \partial(\pi_2^{-1}(D_2)) = T^2 \times S^1$, 因此可以将 $X_1 - \pi_1^{-1}(D_1)$ 和 $X_2 - \pi_2^{-1}(D_2)$ 沿着边界粘起来 (通过边界之间的微分同胚, 在 T^2 分量上保定向, 在 S^1 分量上反定向), 得到一个新的光滑四维流形 $X = X_1 \#_f X_2$, 且有映射 $\pi : X \rightarrow B = B_1 \# B_2$. 可以证明 X 的微分同胚型与纤维、邻域以及边界之间微分同胚的选取无关. 需要注意的是, 以上操作是在光滑范畴中的操作, 不能保证 X 仍然是复曲面. 为了解决这一问题, 需要引入纤维和的全纯构造, 鉴于这与本文的内容关系不大, 就不在此介绍了. 有了纤维和这一操作, 我们就可以由 n 个有理椭圆曲面 $E(1)$ 作纤维和, 得到椭圆曲面 $E(n) \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

一个重要的事实是: $E(2)$ 与 $K3$ 曲面微分同胚. 接下来我们介绍 $K3$ 的另一种构造, 这将给出 $K3$ 的另一种椭圆纤维化. 考虑 $T^4 = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ 上的作用 $\sigma(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$, 这一作用有 16 个不动点, 故商空间有 16 个奇点, 即局部上不同胚于欧氏空间. 这些奇点的邻域是 \mathbb{RP}^3 上的锥. 故我们可以挖去这些奇点的邻域, 它们都以 \mathbb{RP}^3 为边界, 代之以 16 个 $D(T^*S^2)$, 我们将这一操作称为去奇异化 (desingularization). 可以证明我们得到的曲面 X 为 $K3$ 曲面. 另一方面, 也可以在商去 σ 的作用之前先对 T^4 在 σ 的 16 个不动点处作爆破, 相当于用 16 个自相交数为 -1 的球面代替了 16 个不动点, σ 的作用可以延拓至爆破后得到的曲面上, 在 16 个新增的球面上作用平凡. 商去 σ 的作用之后我们得到的曲面与 X 微分同胚, 且 16 个球面的自相交数变为 -2 .

考虑 T^4 到前两个因子的投影 $p : S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$, 在商去 σ 作用后得到 $p : T^4/\sigma \rightarrow T^2/\sigma = S^2$, 在 S^2 上有四个点处的纤维是 S^2 , 这四个奇异纤维中各有四个 T^4/σ 的奇点. 去奇异化之后 p 可延拓为 $p : X \rightarrow S^2$, 有四个奇

异纤维，均为 I_0^* 型纤维，由五个嵌入球面构成，相交关系如下图所示：

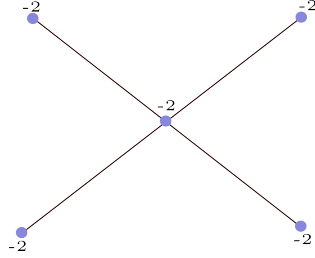


图 3.1 I_0^* 纤维 Dynkin 图

约定：在本文出现的 Dynkin 图中，顶点代表球面，如未特殊说明，每个球面的自相交数均为 -2 ，两个顶点之间有一条边相连代表两个球面的相交数为 1 ，没有边相连代表相交数为 0 ，有两条边相连代表相交数为 -2 。

3.2 椭圆曲面 $E(n)$ 中自相交数为 -2 的嵌入球面

在这一节中，我们在无多重纤维的椭圆曲面 $E(1), E(2)$ 中（去掉 1 或 2 个光滑纤维）构造一系列自相交数为 -2 的嵌入球面，并证明它们的同调类张成了二维同调。

首先，我们来具体构造一个 $E(1)$. 在 \mathbb{CP}^2 中取三次曲线 $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid x^2 z = y^3\}$, $[1, 0, 0]$ 是它的一个拐点 (inflection point), 设 L 为 C 在该点处切线, 则 $3L$ 也是一条三次曲线, $[1, 0, 0]$ 是它和 C 的一个九重的交点. 考虑 C 和 $3L$ 生成的三次曲线铅笔, 在 $[1, 0, 0]$ 处作九次爆破后我们得到一个椭圆曲面 $\pi : X' \rightarrow \mathbb{CP}^1$, 它有两个奇异的纤维, 一个是曲线 C , 它有一个尖点; 另一个是 $-\tilde{E}_8$ 纤维 F , 它是九个自相交数 -2 的二维球面的并, 这些球面之间的相交关系满足 Dynkin 图 $-\tilde{E}_8$:

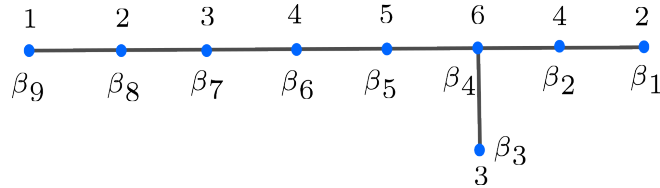


图 3.2 $-\tilde{E}_8$ 纤维 Dynkin 图

顶点旁边标注的数字代表该球面的重数, $\beta_1, \dots, \beta_9 \in H_2(X'; \mathbb{Z})$ 表示这些球面的同调类, 则 $[F] = \beta_9 + l$, 其中 $l = 2\beta_8 + 3\beta_7 + 4\beta_6 + 5\beta_5 + 6\beta_4 + 3\beta_3 + 4\beta_2 + 2\beta_1$ 称为长向量 (long vector). 我们可以对 $\pi : X' \rightarrow \mathbb{CP}^1$ 作微小的形变 (deformation), 使其变成一个节点椭圆曲面 $\pi_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, 也即只有 I_1 一种奇异纤维. 由于椭圆曲面的欧拉示性数等于纤维的欧拉示性数之和, 可以计算得一共有 12 个这样的奇异纤维 $f_1 = \pi_0^{-1}(x_1), \dots, f_{12} = \pi_0^{-1}(x_{12})$.

不妨设 $0, \infty \in \mathbb{CP}^1$ 处纤维 f_0, f_∞ 都是光滑纤维. 在 \mathbb{CP}^1 中选取 12 段不相交的消没弧 (vanishing arc) $\omega_1^0, \dots, \omega_{12}^0$ 连接 0 与 x_i . 对任一消没弧 ω_i^0 , 0 处纤维中存在同痕的意义下唯一的一个非平凡环路 δ_i^0 , 称为消没圈 (vanishing cycle), 使得在 ω_i^0 每一点的纤维中都有一个环路, 它们构成一个单参数族, 光滑地收缩至 f_i 中的奇点. 这些环路的并是一个光滑嵌入的圆盘 $\Delta(\omega_i^0)$, 称为一个消没圆盘 (vanishing disk). 这是一个自相交数为 -1 的圆盘, 它和扰动后得到的圆盘只在奇点处横截相交, 如下图所示:

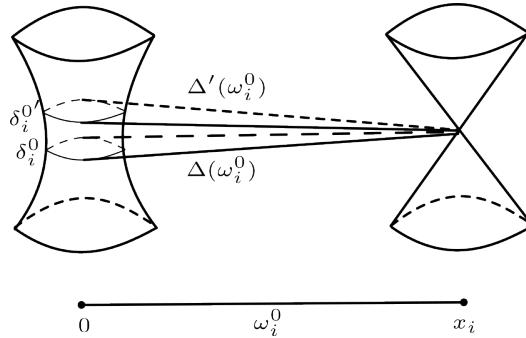


图 3.3 自相交数为 -1 的消没圆盘

根据 Friedman 和 Morgan[4] 书中的定理 2.3.6 与引理 2.5.2, 对于任意两个张成 $H_1(f_0; \mathbb{Z})$ 的环路 c_1^0, c_2^0 , 我们可以适当选取 $\omega_1^0, \dots, \omega_{12}^0$, 使得:

$$\delta_i^0 = \begin{cases} c_1^0 & i \equiv 1 \pmod{2} \\ c_2^0 & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (3.1)$$

类似地, 对 f_∞ 中任意两个张成 $H_1(f_\infty)$ 的环路 c_1^∞, c_2^∞ , 可以选取从 ∞ 到 x_i 的消没弧 ω_i^∞ , 以及 ω_i^∞ 上的消没圆盘 $\Delta(\omega_i^\infty)$, 使得它们与 f_∞ 的交 δ_i^∞ 满足:

$$\delta_i^\infty = \begin{cases} c_1^\infty & i \equiv 1 \pmod{2} \\ c_2^\infty & i \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

如上构造的消没圆盘将在定理3.1和3.2的证明中起到关键作用.

定理 3.1: 设 $\pi : M \rightarrow \mathbb{CP}^1$ 为无多重纤维的有理椭圆曲面, f_∞ 为它的一个光滑纤维, 则存在 11 个 $M - f_\infty$ 中的自相交数 -2 的嵌入球面, 满足如下性质:

1. 这些球面的同调类张成了 $H_2(M - f_\infty)$.
2. 这些球面的相交关系如下图所示.

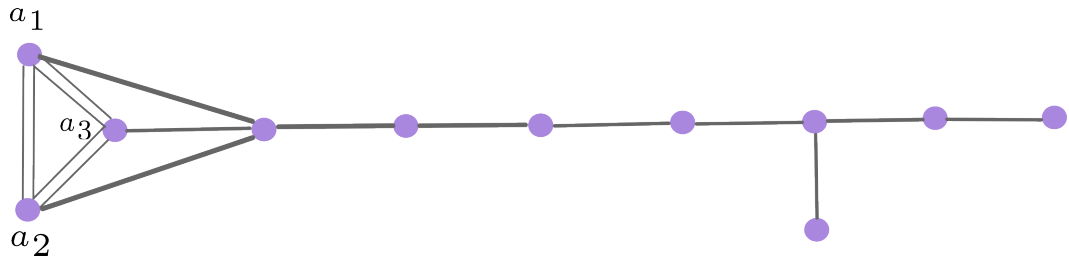


图 3.4 11 个球面的 Dynkin 图

3. 可以恰当选取 a_1, a_2, a_3 使得 $l + a_1, l + a_2, l + a_3$ 为 $H_2(M - f_\infty)$ 上相交形式的根 (radical) 的任何一组基底.

定理 3.2: 设 $\pi : M \rightarrow \mathbb{CP}^1$ 为无多重纤维的有理椭圆曲面, f_0, f_∞ 为它的两个光滑纤维, 则存在 13 个 $M - (f_0 \cup f_\infty)$ 中的自相交数 -2 的嵌入球面, 满足如下性质:

1. 这些球面的同调类张成了 $H_2(M - (f_0 \cup f_\infty))$.
2. 这些球面的相交关系如下图所示.

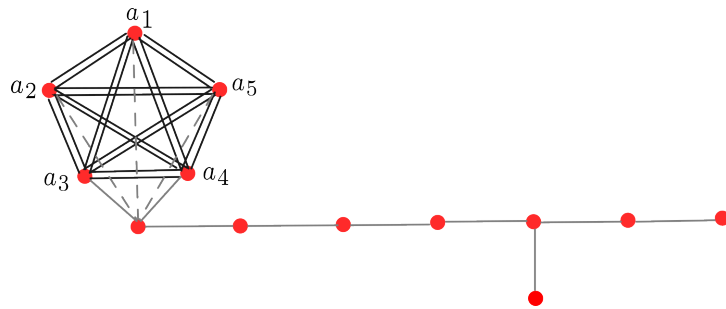


图 3.5 13 个球面的 Dynkin 图

3. 可以恰当选取 a_1, \dots, a_5 使得 $l + a_1, \dots, l + a_5$ 为 $H_2(M - (f_0 \cup f_\infty))$ 上相交形式的根的任何一组基底.

这两个定理的证明方法是完全类似的，下面我们仿照 [4] 的 2.5 节中对定理 3.1 的证明，给出定理 3.2 的证明. 由 [4] 第一章的推论 5.14，我们只要对 $M = X_0$ 证明定理 3.2 即可.

引理 3.1: $H_2(X_0 - (f_0 \cup f_\infty))$ 是一个秩为 13 的自由 Abel 群，且配备相交形式后同构于 $-\tilde{E}_8 \oplus K$ ，其中 K 是一个秩为 4 的自由 Abel 群，其上二次型平凡.

证明 首先，我们运用 Mayer-Vietoris 序列来计算 $H_2(X_0 - (f_0 \cup f_\infty))$. 取 f_0, f_∞ 附近的管状邻域 $N(f_0), N(f_\infty)$ ，由于 X_0 限制在光滑纤维附近同构于 D^2 上的平凡 T^2 -丛，故 $N(f_0) - f_0, N(f_\infty) - f_\infty$ 均同伦等价于 T^3 . 对开覆盖 $X_0 = (X_0 - (f_0 \cup f_\infty)) \cup (N(f_0) \cup N(f_\infty))$ ，运用 Mayer-Vietoris 序列得：

$$\begin{aligned} & \cdots \longrightarrow 0 = H_3(X_0) \\ & \longrightarrow H_2(T^3) \oplus H_2(T^3) \longrightarrow H_2(X_0 - f_0 \cup f_\infty) \oplus H_2(f_0 \cup f_\infty) \longrightarrow H_2(X_0) \\ & \longrightarrow H_1(T^3) \oplus H_1(T^3) \xrightarrow{i_*} H_1(X_0 - f_0 \cup f_\infty) \oplus H_1(f_0 \cup f_\infty) \longrightarrow H_1(X_0) = 0 \end{aligned}$$

因为 i_* 是满射，且 $H_1(S^2 - \{0, \infty\}) \cong \mathbb{Z}$ ，故 i_* 将两个 $H_1(T^3)$ 分量中环绕纤维 f_0, f_∞ 一圈的环路都送到 $H_1(X_0 - f_0 \cup f_\infty)$ 中的同一个生成元 (至多相差一个正负号)，所以 $H_1(X_0 - f_0 \cup f_\infty) \cong \mathbb{Z}$. 通过计算上述 MV 序列中各项的秩，并利用正合性，易得 $H_2(X_0 - (f_0 \cup f_\infty)) \cong \mathbb{Z}^{13}$.

嵌入 $F \hookrightarrow X' \rightarrow X_0$ 诱导同调群的同态: $-\tilde{E}_8 = H_2(F) \rightarrow H_2(X_0)$. 另一方面，由上面的 MV 序列可知同态 $H_2(X_0 - f_0 \cup f_\infty) \rightarrow H_2(X_0)$ 的像 G 秩为 9，核 K 秩为 4，且 $H_2(X_0)$ 上的相交形式在该同态下拉回成为 $H_2(X_0 - f_0 \cup f_\infty)$ 上的相交形式 Q' . 我们有如下交换图表：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \hookrightarrow & H_2(X_0 - f_0 \cup f_\infty) & \twoheadrightarrow & G \longrightarrow H_2(X_0) \\ & & & & \uparrow & \nearrow \cong & \\ & & & & H_2(F) & & \end{array}$$

故 $H_2(X_0 - f_0 \cup f_\infty) = K \oplus G = K \oplus -\tilde{E}_8$ ，且 K 上的相交形式平凡. 故引理得证. ■

令 $M = X_0 - N(f_0) \cup N(f_\infty)$ ，则 M 是一个带边四维流形， $\partial M = T^3 \cup T^3$.

由 Poincaré 对偶以及 Lefschetz 对偶, 有同调与上同调构成的正合梯:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_3(M, \partial M) & \xrightarrow{\partial_3} & H_2(\partial M) & \xrightarrow{i_2} & H_2(M) & \xrightarrow{j_2} & H_2(M, \partial M) & \xrightarrow{\partial_2} & H_1(\partial M) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H^1(M) & \xrightarrow{i'_1} & H^1(\partial M) & \xrightarrow{\delta_1} & H^2(M, \partial M) & \xrightarrow{j'_2} & H^2(M) & \xrightarrow{i'_2} & H^2(\partial M)
 \end{array}$$

在 $\text{Im}(j_2) \subset H_2(M, \partial M)$ 上有非退化的相交形式, 通过 j_2 拉回到 $H_2(M)$ 上, 记为 Q_M . 则 Q_M 的根 $\text{rad}(Q_M) = \text{Ker}(j_2) = \text{Im}(i_2)$. 记 $[M] \in H_4(M, \partial M)$ 为带边流形 M 的基本类. 对任意 $x \in H_2(\partial M), y \in H_2(M, \partial M)$, 用 PD 表示 Poincaré 对偶或 Lefschetz 对偶, 则

$$\begin{aligned}
 Q_M(i_2(x), y) &= \langle \text{PD}(i_2(x)) \smile \text{PD}(y), [M] \rangle \\
 &= \langle \delta_1(\text{PD}(x)) \smile \text{PD}(y), [M] \rangle \\
 &= \langle \text{PD}(x) \smile \text{PD}(\partial_2(y)), [\partial M] \rangle \\
 &= Q_{\partial M}(x, \partial_2(y))
 \end{aligned}$$

因此根和相对闭链 (relative cycle) 之间有对偶关系. 由于 $\text{Ker}(i_2) = \text{Im}(\partial_3) \cong \mathbb{Z}$, 故 $\text{rank}(\text{rad}(Q_M)) = \text{rank}(\text{Im}(i_2)) = 5$. 由 $M \simeq X_0 - N(f_0) \cup N(f_\infty)$ 以及切除公理 (excision axiom), 有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_2(X_0) & & \\
 & \nearrow i_* & & \searrow & \\
 H_2(X_0 - f_0 \cup f_\infty) & \xrightarrow{\quad} & H_2(X_0, f_0 \cup f_\infty) & & \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \\
 H_2(M) & \xrightarrow{j_2} & H_2(M, \partial M) & &
 \end{array}$$

因此, $K = \text{Ker}(i_*) \subset \text{rad}(Q_M) = \text{rad}(Q')$.

引理 3.2: 存在 13 个 $M - (f_0 \cup f_\infty)$ 中的自相交数 -2 的嵌入球面, 它们的同调类包含 $-\tilde{E}_8$ 的一组基以及 μ_1, \dots, μ_4 , 使得 $p_2(\mu_1), \dots, p_2(\mu_4)$ 构成 K 的一组基, 其中 p_2 是由分解 $-\tilde{E}_8 \oplus K$ 决定的到 K 上的投影.

证明 取 $x_0 \in \mathbb{CP}^1 - \{0, \infty\}$ 使得 x_0 处纤维是光滑纤维, 可以取从 x_0 到 x_1, \dots, x_{12} 的消没弧 $\omega_1, \dots, \omega_{12}$ (与 $\omega_1^0, \dots, \omega_{12}^0, \omega_1^\infty, \dots, \omega_{12}^\infty$ 在 x_1, \dots, x_{12} 之外没有交点) 以及其上的消没圆盘 $\Delta(\omega_1), \dots, \Delta(\omega_{12})$ (满足与(3.1)类似的条件). 则 $\Delta(\omega_5) - \Delta(\omega_1), \dots, \Delta(\omega_8) - \Delta(\omega_4)$ 是 $X_0 - f_0 \cup f_\infty$ 中四个自相交

数为 -2 的嵌入球面, 且它们与 $\Delta(\omega_1^0), \Delta(\omega_2^0), \Delta(\omega_3^\infty), \Delta(\omega_4^\infty)$ 的相交数分别为 $(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)$. 记这四个球面的同调类分别为 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in H_2(X_0)$, 则由根与相对闭链的对偶关系知 $p_2(\mu_1), \dots, p_2(\mu_4)$ 是 K 的一组基. ■

对于这些自相交数为 -2 的球面, 可以定义关于它们的同调类的反射, 一般地, 我们有如下定义:

定义 3.3: 设 $(\Lambda, \langle, \rangle)$ 是一个格, $\lambda \in \Lambda$ 且 $\langle \lambda, \lambda \rangle = -2$. 则可定义关于 λ 的反射 $r_\lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda, x \mapsto x + \langle x, \lambda \rangle \lambda$, 显然 $r_\lambda \in \text{Aut}(\Lambda)$ 保持二次型 \langle, \rangle .

给定一组自相交数为 -2 的向量 $\Delta \subset \Lambda$, 记关于 Δ 中所有向量的反射生成的 $\text{Aut}(\Lambda)$ 的子群为 Γ_Δ . 记 Γ 作用在 Δ 上得到的所有 Λ 中的元素的集合为 $\Gamma \cdot \Delta$. 由于有恒等式:

$$\phi \circ r_\lambda \circ \phi^{-1} = r_{\phi(\lambda)}, \forall \phi \in \text{Aut}(\Lambda)$$

故 $\Gamma_{\Gamma \cdot \Delta} = \Gamma_\Delta$.

接下来我们考虑关于自相交数 -2 的嵌入球面的反射, 这些反射不仅是代数层面上的反射, 即 $\text{Aut}(L)$ 中的元素, 在几何上也可以实现为微分同胚.

命题 3.1: 设 M 是一个可定向 4 维闭流形, $\lambda \in H_2(M; \mathbb{Z})$ 且 $Q_M(\lambda, \lambda) = -2$. 若 λ 可由一个光滑嵌入球面 S 代表, 则 $r_\lambda : H_2(M) \rightarrow H_2(M)$ 可以实现为 M 的一个微分同胚, 并且对于 S 的任意小邻域, 可以适当选取这一微分同胚使其在该邻域外为恒等映射.

证明 我们的证明来自 Friedman 和 Morgan 1988 年的论文 [37] 的命题 2.4. 由于嵌入球面 S 的自相交数为 -2 , 故它的法丛的 Euler 数为 -2 . 而二维球面的切丛的 Euler 数等于球面的 Euler 示性数 2. 由于 $\pi_1(\text{SO}(2)) \cong \mathbb{Z}$, 球面上的二维向量丛可以由 Euler 数分类. 因此存在一个反定向的微分同胚 $N(S) \rightarrow D(TS^2)$, 其中 $N(S)$ 是 S 的管状邻域, $D(TS^2)$ 是 TS^2 的单位圆盘丛, 可以实现为:

$$D(TS^2) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1, \|v\| \leq 1, x \cdot v = 0\}$$

构造

$$\phi(x, v) = \begin{cases} (\cos(t\pi)x + \sin(t\pi)\frac{v}{\|v\|}, -\|v\|\sin(t\pi)x + \cos(t\pi)v) & \text{若 } v \neq 0 \\ (-x, 0) & \text{若 } v = 0 \end{cases}$$

其中 $t = 1 - \|v\|$.

则 ϕ 是 $D(TS^2) \cong N(S)$ 到自身的微分同胚, 在 $\partial D(TS^2)$ 上为恒同映射, 在零截面

上为球面的对径映射. 在 $M - N(S)$ 上将其延拓为恒同映射, 并在边界附近作光滑化, 即可得到一个 M 的微分同胚 ϕ' , 与 ϕ 同痕. 因此在 $H_2(M)$ 上有 $\phi'_*(\lambda) = -\lambda$. 另一方面, 由于可以选取 ϕ' 使其只在 S 的一个任意小的管状邻域内非平凡, 故 ϕ'_* 固定 $H_2(M)$ 中所有与 λ 正交的元素, 从而 $\phi'_* = r_\lambda$. ■

引理 3.3: 令 $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_8\}$ 为 $-E_8$ 的一组标准基底, 相交关系由 $-E_8$ 的 Dynkin 图给出, 则 Γ_Δ 在 $-E_8$ 中所有平方 -2 的元素上的作用是传递的.

引理 3.3 的证明见 [38].

引理 3.4: 设 $\Lambda = E \oplus N$ 是格的正交分解, Λ 上的二次型限制在 E 上是幺模的 (unimodular), N 是该二次型的根. 设 $\Delta \subset \Lambda$ 是一组平方 -2 的元素, 满足:

1. Δ 张成 Λ .

2. $\Gamma_{\Delta \cap E} \cdot (\Delta \cap E)$ 是一个 $\Gamma_{\Delta \cap E}$ -轨道, 而且是 E 中所有平方 -2 的元素.

则 Δ 包含在一个 Γ_Δ -轨道中, 且 $\Gamma_\Delta \cdot \Delta$ 是 Λ 中所有平方 -2 的向量.

引理 3.4 的证明见 [4] 中的引理 2.5.9.

命题 3.2: $H_2(X_0 - (f_0 \cup f_\infty))$ 中所有平方 -2 的元素都可以实现为 $X_0 - (f_0 \cup f_\infty)$ 中的光滑嵌入球面.

证明 在引理 3.4 中, 取 $\Lambda = H_2(X_0 - (f_0 \cup f_\infty))$, $E = -E_8$, $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_8, \mu_1, \dots, \mu_4\}$, 则由引理 3.2 知 Δ 张成 Λ , 即条件 1 满足, 由引理 3.3 知条件 2 也满足. 因此由引理 3.4 得 $\Gamma_\Delta \cdot \Delta$ 是 Λ 中所有平方 -2 的向量. 又由命题 3.1 知 Γ_Δ 中的元素都可以实现为微分同胚, 嵌入球面在微分同胚下的像还是嵌入球面, 故命题得证. ■

有了前面这些引理和命题的准备, 我们终于可以来证明定理 3.2.

证明 对于 $H_2(X_0 - (f_0 \cup f_\infty))$ 的相交形式的根的任意一组基底 $\{b_1, \dots, b_5\}$, 令 $a_i = b_i - l$. 则 $a_1, \dots, a_5, \beta_1, \dots, \beta_8$ 张成 $H_2(X_0 - (f_0 \cup f_\infty))$, 且满足定理 3.2 中要求的相交关系. 最后, 由命题 3.2, a_1, \dots, a_5 自相交数均为 -2 , 所以都可以实现为光滑嵌入球面, 因此定理 3.2 得证. ■

定理 3.3: 令 $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ 为椭圆曲面 $E(2)$ 且没有多重纤维, $f \subset X$ 为一个光滑的纤维, 则存在 26 个自相交数为 -2 的 $X - f$ 中的光滑嵌入球面, 它们张成了 $H_2(X - f)$ 且相交关系如下图所示:

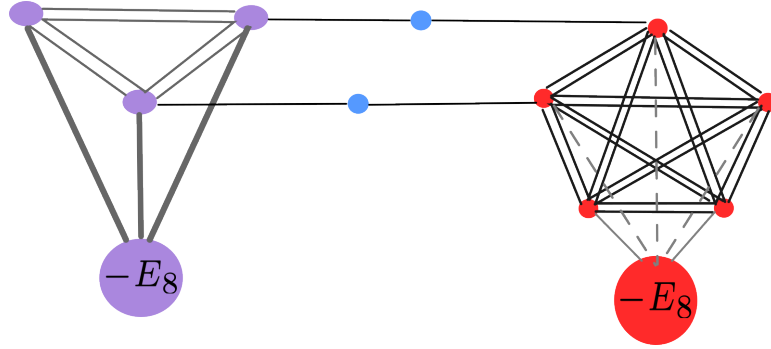


图 3.6 26 个球面的 Dynkin 图

证明 不妨设 X 是由 $A_1 = X_0 - f_0$ 与 $A_2 = X_0 - f_0 \cup f_\infty$ 在 f_0 附近粘贴得到, $A_1 \cap A_2 \simeq S^1 \times f$. 则可取两个非平凡环路 $\alpha \subset \{1\} \times f, \beta \subset \{-1\} \times f$, 使得 $[\alpha], [\beta] \in H_1(S^1 \times f)$ 生成纤维方向的同调 $H_0(S^1) \otimes H_1(f)$. 如前, 可构造 A_1, A_2 中分别以 α, β 为边界的四个消没圆盘 $\Delta_1(\alpha), \Delta_2(\alpha), \Delta_1(\beta), \Delta_2(\beta)$, 拼接得到 $X_0 - f$ 中两个不相交的球面 S_α, S_β , 且它们的自相交数均为 -2 .

因为带边流形上相交形式的根是相对闭链的对偶, 由定理3.1与3.2, 我们可以选取 A_1 中的 11 个球面以及 A_2 中的 13 个球面使得它们分别张成 $H_2(A_1)$ 与 $H_2(A_2)$, 与 S_α, S_β 的相交关系如上图所示. 最后, 我们有如下的 MV 序列:

$$H_2(A_1) \oplus H_2(A_2) \longrightarrow H_2(X - f) \xrightarrow{\partial} H_1(T^3) \xrightarrow{i_*} H_1(A_1) \oplus H_1(A_2)$$

因为 S_α, S_β 与 $S^1 \times f$ 的交生成 $\text{Im}(\partial) = \text{Ker}(i_*)$, 故上面取定的 26 个球面的同调类张成了 $H_2(X - f)$. ■

在 X' 的构造中, 我们在 \mathbb{CP}^2 的九个点作了爆破, 这给我们九个自相交数为 -1 的全纯嵌入球面. 它们到底空间 \mathbb{CP}^1 的投影是解析同构, 也即椭圆纤维化 $X' \rightarrow \mathbb{CP}^1$ 有九个全纯截面, 称为例外除子 (exceptional divisor). 任取其中一个, 记为 σ' . 则它和所有纤维均只交于一点, 特别地, 它和 $-\tilde{E}_8$ 纤维 F (一共由九个球面组成) 中的某个球面 S 的相交数是 ± 1 . σ' 在微小形变之后仍然是一个截面, 记为 σ_0 , 且相交数在微分同胚下保持不变. 在作纤维和时, 可以将两个 $E(1)$ 的光滑截面 σ_0 拼成一个 $E(2)$ 的光滑截面 σ . σ 是 $E(2)$ 中自相交数为 -2 的嵌入球面, 且和第一个 $E(1)$ 的 $-\tilde{E}_8$ 纤维中的球面 S 的相交数为 ± 1 .

3.3 定理 1.2 的证明

在这一节中, 我们运用上一节中构造的 K3 曲面中的 27 个自相交数为 -2 的嵌入球面来证明定理 1.2. 首先, 我们运用 Seiberg-Witten 不变量来证明 K3 曲面的微分同胚都保持 $H^+(X)$ 的定向. Seiberg-Witten 不变量的定义以及相关前置知识在附录 A 中给出, 此处不再赘述.

定义 3.4: 设 M 为一个可定向 4 维闭流形, 若 $x \in H^2(M; \mathbb{Z})$ 满足

$$\forall a \in H^2(M; \mathbb{Z}), Q_M(x, a) \equiv Q_M(a, a) \pmod{2}$$

则称 x 为一个特征元素. 记 $H^2(M; \mathbb{Z})$ 中所有特征元素的集合为 $\text{Char}(M)$.

定义 3.5: 一个四维流形 M 的同调定向指 $H^0(M; \mathbb{R}) \oplus H^1(M; \mathbb{R}) \oplus H_+^2(M; \mathbb{R})$ 上的一个定向, 其中 $H_+^2(M; \mathbb{R})$ 是 $H^2(M; \mathbb{R})$ 的一个极大正定子空间. 由于 $H^2(M; \mathbb{R})$ 的所有极大正定子空间构成的 Grassmann 流形是可缩的, 故同调定向不依赖于子空间 $H_+^2(M; \mathbb{R})$ 的选取.

注释 3.2: 对于 K3 曲面 X , $H^1(X) = 0$, 且 $H^0(X)$ 上有自然的定向, 所以 X 的同调定向等价于 $H_+^2(X)$ 的定向.

对任一 4 维可定向光滑闭流形 X , 由复线丛分类定理, 有一一对应 $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(X) \cong H^2(X; \mathbb{Z})$, $L \mapsto c_1(L)$. 任取 X 上的一个 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ 结构 s . 记它的正旋量丛为 S_+ . 任取 $h \in H^2(X; \mathbb{Z})$, 它对应了 X 上的一个复线丛 E , 满足 $c_1(E) = h$. 定义 $s + h$ 为 X 上以 $S_+ \otimes E$ 为正旋量丛的 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ 结构. 由定理 A.5, 可定义函数 $c_1 : S_X \rightarrow \text{Char}(X) \subset H^2(X; \mathbb{Z})$, $s \mapsto c_1(S_+)$. 则 $c_1(s + h) = c_1(S_+ \otimes E) = c_1(\Lambda^2(S_+ \otimes E)) = c_1(S_+) + 2h$. 因此, 若 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 无挠, 则如上定义的 c_1 为单射, 从而有一一对应 $c_1 : S_X \rightarrow \text{Char}(X)$.

命题 3.3 (Donaldson[3]): 任一 K3 曲面的微分同胚均保持同调定向.

证明 设 \mathfrak{o} 为 X 上的一个同调定向, $f : X \rightarrow X$ 为反同调定向的微分同胚, 即 $f^*(\mathfrak{o}) = \bar{\mathfrak{o}}$.

首先, $w_2(TX) = 0$, 故 K3 曲面上存在 Spin 结构 s_0 , $c_1(s_0) = 0$. 事实上, 由定理 A.8, s_0 可以选取为 K3 上典范的 $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ 结构, 也即它的行列式线丛 (determinant line bundle) 为 K3 的典范丛的共轭 $\Lambda_{\mathbb{C}}^2 TX$. 其次, $\pi_1(X) = 1$, 故由万有系数定理知 $H^2(X; \mathbb{Z})$ 无挠. 因此 c_1 是单射, 从而 $f^*(s_0) = s_0$. 则 $\text{SW}(X, s_0, \mathfrak{o}) = \text{SW}(X, f^*(s_0), f^*\mathfrak{o}) = -\text{SW}(X, s_0, \mathfrak{o})$. 故 $\text{SW}(X, s_0, \mathfrak{o}) = 0$, 这与定理 A.8 的结果 $\text{SW}(X, s_0, \mathfrak{o}) = \pm 1$ 矛盾. ■

注释 3.3: Donaldson 对命题 3.3 的证明 [3] 使用的是 Donaldson 不变量, 这里使

用 Seiberg-Witten 不变量证明更为简单.

定义 3.6: 设 (L, \langle, \rangle) 是一个幺模格, 实旋量范数 (real spinor norm) $\sigma : \text{Aut}(L) \rightarrow \{\pm 1\}$ 如下定义: $\forall g \in \text{Aut}(L)$, 令 \bar{g} 为 g 在 $L \otimes \mathbb{R}$ 上诱导的同构. 则 $\bar{g} = r_{v_1} \circ \cdots \circ r_{v_k}$ 可表示成一系列反射的复合. 定义:

$$\sigma(g) = \begin{cases} 1 & \text{若如上分解中有偶数个 } i \text{ 满足 } \langle v_i, v_i \rangle > 0 \\ -1 & \text{否则} \end{cases}$$

在定理 1.2 的证明中, 我们需要用到如下引理, 这是一个代数上的结果, 证明见 [39].

引理 3.5: 令 (L, \langle, \rangle) 是一个幺模偶格, $\Delta \subset L$ 是一组平方为 -2 的元素. 若 Δ 满足以下三个条件:

1. Δ 张成 L .
2. Δ 包含在 Γ_Δ 的一条轨道中.
3. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \Delta$, 相交关系如下图所示:

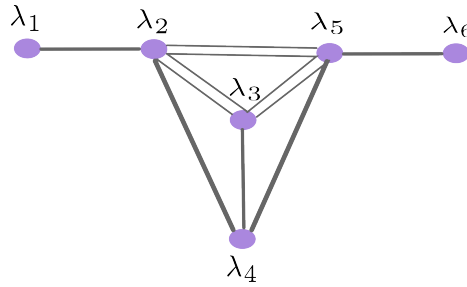


图 3.7 引理 3.5 插图

则 Γ_Δ 是 $\text{Aut}(L)$ 中所有实旋量范数为 1 的元素构成的子群, 且 $\Gamma_\Delta \cdot \Delta$ 是 L 中所有平方为 -2 的向量.

我们还需要如下简单的引理.

引理 3.6: 设 L 是一个对称格 (即配备的二次型是对称的), $\Delta \subset L$ 是一组平方为 -2 的向量. 设 $\alpha, \beta \in \Delta$ 满足 $\langle \alpha, \beta \rangle = \pm 1$, 则 $\exists R \in \Gamma_\Delta$ 使得 $\beta = R(\alpha)$.

证明 $\langle \alpha, \beta \rangle = \pm 1 \Rightarrow r_\alpha \circ r_\beta(\alpha) = \pm \beta$. 若 $r_\alpha \circ r_\beta(\alpha) = -\beta$, 则再复合上 r_β 即可. ■

记号:

- 将 K3 曲面中所有关于自相交数 -2 的嵌入球面的反射生成的 $\text{Aut}(L)$ 中的子群记为 Γ' .

- 将 K3 曲面上所有微分同胚诱导的 $\text{Aut}(L)$ 中的元素构成的子群记为 Γ .
- 将 $\text{Aut}(L)$ 中所有保 $H^+(X)$ 定向的元素构成的子群记为 $\text{Aut}^+(L)$.

定理 3.4 (Friedman-Morgan[4]): $\Gamma' = \Gamma = \text{Aut}^+(L)$.

证明 由命题3.1和3.3, 有包含关系: $\Gamma' \subset \Gamma \subset \text{Aut}^+(L) \subset \text{Aut}(L)$. 因此只要证明 Γ' 是 $\text{Aut}(L)$ 中指标为 2 的子群.

$L = (H^2(X; \mathbb{Z}), Q_X)$ 是一个幺模偶格, Δ 为定理3.3中构造的 26 个球面, σ 是上一节的末尾构造的 $E(2)$ 的截面, 则 $\Delta' = \Delta \cup \{\sigma\} \subset L$ 是一组平方为 -2 的元素, 且都可以实现为 X 中光滑嵌入的球面. 接下来, 我们要对 Δ' 应用引理3.5. 由定理3.3知 Δ 张成了 $H_2(X - f)$, 又因为 $H_2(X - f) \xrightarrow{i_*} H_2(X)$ 的像是那些与 f 的同调类相交数为 0 的元素, 而截面 σ 与 f 的相交数为 1, 因此 Δ' 张成了 $H_2(X)$, 满足引理3.5的第一个条件. 由于 σ 与 Δ 中的一个元素相交数为 1, 且 Δ 中元素用相交数为 1 的边连接起来得到的图是连通的, 故由引理3.6知 Δ' 包含在 $\Gamma_{\Delta'}$ 的一条轨道中, 第二个条件满足. 因为 Δ 的 Dynkin 图包含引理3.5中要求的子图, 所以第三个条件也满足. 故由引理3.5, 定理得证. 作为推论, 我们得到定理1.2. ■

第 4 章 总结与展望

定理1.1的证明依赖于代数几何中的 Torelli 定理, 我们能否不使用 Torelli 定理, 而是用纯拓扑的方法证明定理1.1? 在定理1.1的证明中, 截面 s 发挥了关键作用, 因为它能够将代数上的 $\Gamma \subset \text{Aut}(L)$ 中的自同构实现为几何上的 $\text{MCG}(X)$ 中的映射类, 而且保持乘法的交换性. 而定理1.2的证明中构造的一系列球面以及关于这些球面的反射也提供了一种将自同构实现为微分同胚的途径. 回到刚才的问题, 以下是一种可能的方案:

1. 首先, 找到 K3 曲面 X 中若干自相交数 -2 的嵌入球面 $\Delta = \{s_1, \dots, s_k\}$, 满足:
 - (a) 它们的同调类 $[s_1], \dots, [s_k]$ 张成 $H_2(X; \mathbb{Z})$.
 - (b) $\Gamma_\Delta \cdot \Delta = \{x \in H_2(X; \mathbb{Z}) \mid \langle x, x \rangle = -2\}$
 - (c) $|s_i \cap s_j| = |\langle [s_i], [s_j] \rangle|, \forall i \neq j$
2. 令 $R_\Delta \subset \pi_0(\text{Diff}(X))$ 为关于 Δ 中球面反射 (如命题3.1中构造) 的同痕类生成的子群, 则我们有如下图表, 其中由定理3.4知 p' 为满射:

$$\begin{array}{ccc}
 R_\Delta & \xrightarrow{p'} & \Gamma \hookrightarrow \text{Aut}(L) \\
 \downarrow & \nearrow p & \\
 \pi_0(\text{Diff}(X)) & &
 \end{array}$$

猜想: p' 为单射, 也即: 设 $R_s \in \text{Diff}(X)$ 为关于球面 s 的反射, 要证明若

$$(R_{s_{i_1}} \circ \dots \circ R_{s_{i_l}})_* = r_{s_{i_1}} \circ \dots \circ r_{s_{i_l}} = \text{id}_L, \text{ 则 } R_{s_{i_1}} \circ \dots \circ R_{s_{i_l}} \text{ 同痕于 } \text{id}_X.$$

假如我们能够构造符合如上条件的球面并证明上述猜想, 那么我们就能够将定理1.1证明中的 $f_1^*, f_2^* \in \Gamma$ 分别实现为关于 Δ 中球面反射的复合, 且由 p' 是单射知它们在同痕的意义下交换. 从而在定理1.1的证明中避开截面 s 的构造, 得到一个纯拓扑的证明. 因此上述方案是之后可能的研究方向.

插图索引

| | | |
|-------|----------------------------------|----|
| 图 2.1 | K3 曲面的 Hodge diamond | 6 |
| 图 2.2 | $\phi' + \psi$ 同伦于 ϕ | 13 |
| 图 3.1 | I_0^* 纤维 Dynkin 图 | 16 |
| 图 3.2 | $-\tilde{E}_8$ 纤维 Dynkin 图 | 16 |
| 图 3.3 | 自相交数为 -1 的消没圆盘 | 17 |
| 图 3.4 | 11 个球面的 Dynkin 图 | 18 |
| 图 3.5 | 13 个球面的 Dynkin 图 | 18 |
| 图 3.6 | 26 个球面的 Dynkin 图 | 23 |
| 图 3.7 | 引理 3.5 插图 | 25 |

参考文献

- [1] BARAGLIA D, KONNO H. A note on the nielsen realization problem for $k3$ surfaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2019.
- [2] MATUMOTO T. On diffeomorphisms of a $K3$ surface[M]//Algebraic and topological theories (Kinosaki, 1984). Kinokuniya, Tokyo, 1986: 616-621.
- [3] DONALDSON S K. Polynomial invariants for smooth four-manifolds[J/OL]. Topology, 1990, 29(3): 257-315. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(90\)90001-Z](https://doi.org/10.1016/0040-9383(90)90001-Z).
- [4] FRIEDMAN R, MORGAN J W. Ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete (3) [results in mathematics and related areas (3)]: volume 27 smooth four-manifolds and complex surfaces[M/OL]. Springer-Verlag, Berlin, 1994: x+520. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03028-8>.
- [5] KERVAIRE M A. A manifold which does not admit any differentiable structure[J/OL]. Commentarii Mathematici Helvetici, 1960, 34(1): 257-270. <https://doi.org/10.1007/BF02565940>.
- [6] GOMPFF R E. An infinite set of exotic \mathbf{R}^4 's[J/OL]. J. Differential Geom., 1985, 21(2): 283-300. <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214439566>.
- [7] SMALE S. Diffeomorphisms of the 2-sphere[J/OL]. Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10: 621-626. <https://doi.org/10.2307/2033664>.
- [8] HATCHER A E. A proof of the Smale conjecture, $\text{Diff}(S^3) \simeq O(4)$ [J/OL]. Ann. of Math. (2), 1983, 117(3): 553-607. <https://doi.org/10.2307/2007035>.
- [9] KERVAIRE M A, MILNOR J W. Groups of homotopy spheres. I[J/OL]. Ann. of Math. (2), 1963, 77: 504-537. <https://doi.org/10.2307/1970128>.
- [10] CROWLEY D, SCHICK T. The Gromoll filtration, KO -characteristic classes and metrics of positive scalar curvature[J/OL]. Geom. Topol., 2013, 17(3): 1773-1789. <https://doi.org/10.2140/gt.2013.17.1773>.
- [11] WATANABE T. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$ [A]. 2019. arXiv: 1812.02448.
- [12] EARLE C J, EELLS J. A fibre bundle description of Teichmüller theory[J/OL]. J. Differential Geometry, 1969, 3: 19-43. <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214428816>.
- [13] GRAMAIN A. Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte [J/OL]. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 1973, 6: 53-66. http://www.numdam.org/item?id=ASSENS_1973_4_6_1_53_0.

- [14] HATCHER A. On the diffeomorphism group of $S^1 \times S^2$ [J/OL]. Proc. Amer. Math. Soc., 1981, 83(2): 427-430. <https://doi.org/10.2307/2043543>.
- [15] GABAI D. The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds: $\text{Isom}(M^3) \simeq \text{Diff}(M^3)$ [J/OL]. J. Differential Geom., 2001, 58(1): 113-149. <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090348284>.
- [16] FARRELL F T, HSIANG W C. On the rational homotopy groups of the diffeomorphism groups of discs, spheres and aspherical manifolds[C]/Proc. Sympos. Pure Math., XXXII: Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 1. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978: 325-337.
- [17] CERF J. Lecture notes in mathematics, no. 53: Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$)[M]. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968: xii+133.
- [18] RUBERMAN D. An obstruction to smooth isotopy in dimension 4[J/OL]. Math. Res. Lett., 1998, 5(6): 743-758. <https://doi.org/10.4310/MRL.1998.v5.n6.a5>.
- [19] AUCKLY D, RUBERMAN D. Exotic phenomena in dimension four: diffeomorphism groups and embedding spaces, preprint[Z]. 2020.
- [20] BARAGLIA D. Constraints on families of smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants [J/OL]. Algebr. Geom. Topol., 2021, 21(1): 317-349. <https://doi.org/10.2140/agt.2021.21.317>.
- [21] FREEDMAN M H. The topology of four-dimensional manifolds[J/OL]. J. Differential Geometry, 1982, 17(3): 357-453. <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214437136>.
- [22] QUINN F. Isotopy of 4-manifolds[J/OL]. J. Differential Geom., 1986, 24(3): 343-372. <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214440552>.
- [23] KODAIRA K. On the structure of compact complex analytic surfaces. I[J/OL]. Amer. J. Math., 1964, 86: 751-798. <https://doi.org/10.2307/2373157>.
- [24] FINTUSHEL R, STERN R J. Knots, links, and 4-manifolds[J/OL]. Invent. Math., 1998, 134(2): 363-400. <https://doi.org/10.1007/s002220050268>.
- [25] SIU Y T. Every $K3$ surface is Kähler[J/OL]. Invent. Math., 1983, 73(1): 139-150. <https://doi.org/10.1007/BF01393829>.
- [26] HITCHIN N. Compact four-dimensional Einstein manifolds[J/OL]. J. Differential Geometry, 1974, 9: 435-441. <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214432419>.
- [27] BESSE A L. Ergebnisse der mathematik und ihrer grenzgebiete (3) [results in mathematics and related areas (3)]: volume 10 einstein manifolds[M/OL]. Springer-Verlag, Berlin, 1987: xii+510. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74311-8>.
- [28] BURNS D, Jr., RAPOPORT M. On the Torelli problem for kählerian $K - 3$ surfaces[J/OL]. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 1975, 8(2): 235-273. http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_2_235_0.

- [29] HIRSCH M W. Graduate texts in mathematics: volume 33 differential topology[M]. Springer-Verlag, New York, 1994: x+222.
- [30] GIANIRACUSA J. Corrigendum: The diffeomorphism group of a $K3$ surface and Nielsen realization[J/OL]. J. Lond. Math. Soc. (2), 2019, 99(3): 965-966. <https://doi.org/10.1112/jlms.12194>.
- [31] BARAGLIA D, KONNO H. On the Bauer-Furuta and Seiberg-Witten invariants of families of 4-manifolds[J/OL]. J. Topol., 2022, 15(2): 505-586. <https://doi.org/10.1112/topo.12229>.
- [32] KISTER J M. Microbundles are fibre bundles[J/OL]. Ann. of Math. (2), 1964, 80: 190-199. <https://doi.org/10.2307/1970498>.
- [33] MÜLLER C, WOCKEL C. Equivalences of smooth and continuous principal bundles with infinite-dimensional structure group[J/OL]. Adv. Geom., 2009, 9(4): 605-626. <https://doi.org/10.1515/ADVGEOM.2009.032>.
- [34] FREEDMAN M H, QUINN F. Topology of 4-manifolds (pms-39), volume 39[M/OL]. Princeton: Princeton University Press, 1990. <https://doi.org/10.1515/9781400861064>. DOI: doi:10.1515/9781400861064.
- [35] KIRBY R C, SIEBENMANN L C. Annals of mathematics studies, no. 88: Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations[M]. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977: vii+355.
- [36] KODAIRA K. On compact analytic surfaces: Ii[J/OL]. Annals of Mathematics, 1963, 77(3): 563-626[2023-05-19]. <http://www.jstor.org/stable/1970131>.
- [37] FRIEDMAN R, MORGAN J W. On the diffeomorphism types of certain algebraic surfaces. I[J/OL]. J. Differential Geom., 1988, 27(2): 297-369. <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214441784>.
- [38] BOURBAKI N. Groupes et algèbres de lie, chapitres 4, 5 et 6[M/OL]. Springer Berlin, Heidelberg, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34491-9>.
- [39] EBELING W. Lecture notes in mathematics: volume 1293 the monodromy groups of isolated singularities of complete intersections[M/OL]. Springer-Verlag, Berlin, 1987: xiv+153. <https://doi.org/10.1007/BFb0078929>.

附录 A 外文资料的调研阅读报告

Donaldson's Diagonalizability Theorem

The main purpose of this survey is to explain the proof of Donaldson's diagonalizability theorem via Seiberg-Witten theory. As preliminaries, we will introduce the intersection form and Seiberg-Witten equations in section A.1 and A.2 respectively. Then we will prove Donaldson's diagonalizability theorem in section A.3. After that some interesting applications will be presented, including a construction of exotic \mathbb{R}^4 .

Contents

| | | |
|-------|---|----|
| A.1 | Intersection Form | 38 |
| A.1.1 | Definitions and examples | 38 |
| A.1.2 | Some important results on intersection forms | 39 |
| A.1.3 | Intersection form of a K3 surface | 40 |
| A.2 | Seiberg-Witten Equations | 41 |
| A.2.1 | Preliminaries | 41 |
| A.2.2 | Seiberg-Witten equations and moduli space | 47 |
| A.2.3 | Seiberg-Witten Invariants | 48 |
| A.3 | Donaldson's Diagonalizability Theorem | 49 |
| A.3.1 | Proof of Donaldson's diagonalizability theorem | 49 |
| A.3.2 | Applications of Donaldson's diagonalizability theorem | 50 |

A.1 Intersection Form

A.1.1 Definitions and examples

Definition A.1: Let X be a simply connected oriented closed 4-manifold. Its **intersection form** on the second integer cohomology is defined to be:

$$Q_X : H^2(X; \mathbb{Z}) \times H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}, (\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha \smile \beta, [X] \rangle$$

We can also define the intersection form on de Rham cohomology:

$$\tilde{Q}_X : H^2(X; \mathbb{R}) \times H^2(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

Remark A.1: • Via Poincaré duality, the intersection form can also be defined on $H_2(X; \mathbb{Z})$.

- Any $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ can be represented by $[\Sigma]$ for some smoothly embedded surface $\Sigma \subset X$ since we can construct Σ as the zero set of a generic section of a complex line bundle E over X with $c_1(E) = \alpha$. For any $\alpha_1, \alpha_2 \in H_2(X; \mathbb{Z})$, we may pick embedded surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset X$ such that $[\Sigma_1] = \alpha_1, [\Sigma_2] = \alpha_2$ and Σ_1, Σ_2 intersect transversely. Then $Q_X(\alpha_1, \alpha_2) = \text{counting } \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \text{ with signs}$. This explains the name “intersection form”.

Since X is simply connected, by universal coefficient theorem and Poincaré duality we know that $H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_2(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ and $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong H^2(X; \mathbb{Z})$ are free \mathbb{Z} -modules. Denote $b_2 = \text{rank } H_2(X; \mathbb{Z})$. Then Q_X is a symmetric unimodular bilinear form and can be represented by a $b_2 \times b_2$ symmetric matrix with integer entries and determinant ± 1 . We say Q_X is **even** if $Q_X(a, a)$ is even for any $a \in H^2(X; \mathbb{Z})$, otherwise we say Q_X is **odd**. If $a \in H^2(X; \mathbb{Z})$ satisfies $Q_X(a, b) \equiv Q_X(b, b) \pmod{2}$ for any $b \in H^2(X; \mathbb{Z})$, then a is called a **characteristic element**.

Example A.1: 1. $X = \mathbb{S}^4, Q_X = 0$.

2. $X = \mathbb{CP}^2, Q_X = (1); X = \overline{\mathbb{CP}^2}, Q_X = (-1)$.

3. $X = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, Q_X = H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $Q_{X_1 \# X_2} = Q_{X_1} \oplus Q_{X_2}$

A.1.2 Some important results on intersection forms

The following theorem tells us that intersection form determines the homotopy type of a closed simply-connected topological 4-manifold.

Theorem A.1 (Whitehead[1], Milnor[2]): Let X_1, X_2 be two closed simply-connected topological 4-manifolds. Then X_1 is homotopy equivalent to X_2 if and only if Q_{X_1} is similar to Q_{X_2} over \mathbb{Z} .

Let X be a connected closed simply-connected topological 4-manifold. The **Kirby-Siebenmann invariant** $KS_X \in H^4(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^0(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ can detect the smoothability of X . When $KS_X \neq 0$, X does not admit a smooth structure. If Q_X is even, $KS_X = 0$; if Q_X is odd, $KS_X = 0$ or 1 .

The following theorem of Freedman tells us that intersection form and Kirby-Siebenmann invariants can determine the homeomorphism type of a closed simply-connected topological 4-manifold.

Theorem A.2 (Freedman[3]): For any unimodular symmetric bilinear form Q ,

1. If Q is even, there exists a unique (up to homeomorphism) simply-connected closed topological 4-manifold X with $Q_X = Q$. And $KS_X = 0$.
2. If Q is odd, there are exactly two simply-connected closed topological 4-manifolds X, X' with $Q_X = Q'_{X'} = Q$. And $KS_X \neq KS_{X'}$.

Corollary A.1: Intersection form determines the homeomorphism type of a closed simply-connected smooth 4-manifold.

However, intersection form, as a topological invariant, is far from determining the diffeomorphism type of a manifold. For example, Akhmedov and Park proved that $\mathbb{C}P^2 \# k \overline{\mathbb{C}P^2}$ ($k \geq 2$) admit countably many smooth structures. In fact, we have not constructed any closed smooth 4-manifold admitting only finitely many smooth structures.

In algebra, we have the following classification for unimodular symmetric indefinite bilinear forms over $\mathbb{Z}[4]$:

- Q is even, then $Q = m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus nE_8$, for $m \geq 0, n \in \mathbb{Z}$.
- Q is odd, then $Q = m(1) \oplus n(-1)$, for $m, n > 0$.

where

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2I - A$$

A is the adjacency matrix of the Dynkin diagram of the Lie group E_8 .

However, for the definite case, the classification problem becomes much more complicated.

Freedman's theorem tells us that all unimodular symmetric bilinear forms over \mathbb{Z} can be realized as the intersection form of a simply-connected closed **topological** 4-manifold. Nevertheless, not all unimodular symmetric bilinear forms over \mathbb{Z} can be realized as the intersection form of a simply-connected closed **smooth** 4-manifold.

1. For Q indefinite and odd, $X = m(\mathbb{CP}^2) \# n(\overline{\mathbb{CP}^2})$ realizes Q .
2. For Q indefinite and even, and $|m| \leq \frac{2}{3}n$, $Q = m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus nE_8$ is realized by

X being a connected sum of K_3 surfaces (see section 1.3) and copies of $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

3. For Q definite, we have the following theorem:

Theorem A.3 (Donaldson[5]): Let X be a simply connected closed connected smooth 4-manifold. If Q_X is definite, then it's diagonal, i.e. $Q_X = \pm I$.

The original proof used the Yang-Mills equations, while subsequent proofs used the Seiberg-Witten equations. We will introduce the latter approach in section 3.1.

A.1.3 Intersection form of a $K3$ surface

By Freedman's theory, $K3$ surfaces are important building blocks of topological 4-manifolds. In this section we explain how to work out the intersection form of $K3$ surfaces using characteristic classes. As an important type of algebraic surfaces, $K3$ surfaces are diffeomorphic to one another, but algebraically different. Let $X = Z_3 = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 \mid z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$. Then X is a $K3$ surface. By

the Lefschetz hyperplane theorem (proved on pages 156-159 in [6]), we can prove that X is simply-connected. So Poincaré duality implies that $b_1 = b_3 = 0$. Therefore, b_2 is determined by the Euler characteristic number χ . Let $a \in H^2(\mathbb{CP}^3; \mathbb{Z})$ be the Poincaré dual of \mathbb{CP}^2 , that is, the generator of $H^2(\mathbb{CP}^3; \mathbb{Z})$ such that $\langle a, [\mathbb{CP}^1] \rangle = 1$. To compute χ , note that $T\mathbb{CP}^3|_X = TX \oplus NX$, and $c(T\mathbb{CP}^3|_X) = (1 + a|_X)^4$, $c_2(TX)[X] = e(TX)[X] = \chi$. So we need to compute $c(NX)$.

The **hyperplane line bundle** H over \mathbb{CP}^3 is defined as the dual bundle of the tautological bundle γ_3^1 . It can also be defined via open covering $U_i = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{CP}^3 | z_i \neq 0\}$ with transition functions $g_{ij} = \frac{z_j}{z_i}$. Thus $\sigma_j = (\frac{z_0}{z_j})^4 + \dots + (\frac{z_3}{z_j})^4$ are local representatives for a section σ of H^4 . And the zero set Z_σ is exactly X . So by the adjunction formula (see page 146 in [6]), $NX = H^4|_X$. Thus $c_1(NX) = 4c_1(H|_X) = -4c_1(\gamma_3^1|_X) = 4a|_X$, and $c(NX) = 1 + 4a|_X$. Hence, solving the equation $(1 + a|_X)^4 = c(TX) \smile (1 + 4a|_X)$, we get $c_1(TX) = 0$, $c_2(TX) = 6a^2|_X$. By a theorem of Wirtinger (page 171 and 172 in [6]), $\langle a^2, [X] \rangle = 4$. So $\chi(X) = c_2(TX)[X] = 24$ and $b_2 = \chi - b_0 - b_4 = 22$.

By Hirzebruch signature theorem for 4-manifolds (page 71 in [7]), $\sigma(X) = \frac{1}{3}p_1(TX)[X] = -\frac{2}{3}c_2(TX \otimes \mathbb{C})[X] = -\frac{2}{3}c_2(TX \oplus T^*X)[X]$. Since $c_i(T^*X) = (-1)^i c_i(TX)$, this yields $\sigma(X) = -16$. So $b_2^+ = 3$, $b_2^- = 19$.

Finally, since X is a complex manifold, $w_1(TX) = 0$, $w_2(TX) = c_1(TX) = 0 \pmod{2}$. So X is spin and Q_X is even (see corollary A.2). By the classification of unimodular symmetric indefinite bilinear forms over \mathbb{Z} , $Q_X = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus 2(-E_8)$.

A.2 Seiberg-Witten Equations

A.2.1 Preliminaries

The following preliminaries are necessary for the introduction of Seiberg-Witten equations.

Denote the universal cover of $SO(n)$ by $Spin(n)$. By the long exact sequence for homotopy groups of fiber bundle, we know that $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ for $n \geq 3$, so $Spin(n)$ is a double cover of $SO(n)$.

Definition A.2: Let (M, g) be an n -dimensional oriented Riemannian manifold and Fr

be its frame bundle. A **Spin structure** on M is a principal $\text{Spin}(n)$ -bundle \hat{F} on M together with a map $\hat{F} \rightarrow Fr$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \hat{F} \times \text{Spin}(n) & \longrightarrow & \hat{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Fr \times \text{SO}(n) & \longrightarrow & Fr \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

There is a \mathbb{Z}_2 action on $\text{Spin}(n) \times U(1)$, i.e. \mathbb{Z}_2 acts on the $\text{Spin}(n)$ factor by the deck transformation of the cover $\pi : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ and on the $U(1)$ factor by multiplying -1 . So we can define $\text{Spin}^\mathbb{C}(n) := (\text{Spin}(n) \times U(1))/\mathbb{Z}_2$.

Definition A.3: Let (M, g) be an n -dimensional oriented Riemannian manifold and Fr be its frame bundle. A $\text{Spin}^\mathbb{C}$ **structure** on M is a principal $\text{Spin}^\mathbb{C}(n)$ -bundle \hat{F} on M together with a map $\hat{F} \rightarrow Fr$ such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \hat{F} \times \text{Spin}^\mathbb{C}(n) & \longrightarrow & \hat{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Fr \times \text{SO}(n) & \longrightarrow & Fr \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

When $n = \dim M = 4$, $\text{Spin}^\mathbb{C}$ structures always exist:

Theorem A.4: On any 4-dimensional oriented Riemannian manifold X , $\text{Spin}^\mathbb{C}$ structures exist and the set \mathcal{S}_X of $\text{Spin}^\mathbb{C}$ structures on X is an affine space modelled on $H^2(X; \mathbb{Z})$.

See section 3.1 of [8] for a proof.

In order to obtain associated vector bundles of a principal $\text{Spin}^\mathbb{C}(4)$ -bundle, we're going to construct representations of $\text{Spin}^\mathbb{C}(4)$. Denote the quaternion algebra by V . Then there is an isomorphism of \mathbb{R} -algebra:

$$V \cong \left\{ Q = \begin{pmatrix} t + iz & -x + iy \\ x + iy & t - iz \end{pmatrix} \mid t, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}_\mathbb{R}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$$

where

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be the standard inner product on \mathbb{R}^4 . Then through the above isomorphism, $\langle Q, Q \rangle = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \det Q$. By linear algebra we know that $SU(2) = \{Q \in V \mid \langle Q, Q \rangle = 1\}$. We have a representation:

$$\rho_0 : SU(2) \times SU(2) \rightarrow GL(V), \quad \rho_0(A_+, A_-)(Q) = A_- Q (A_+)^{-1}$$

Note that $\langle A_- Q (A_+)^{-1}, A_- Q (A_+)^{-1} \rangle = \det(A_- Q (A_+)^{-1}) = \det Q = \langle Q, Q \rangle$, and $SU(2) \times SU(2)$ is connected. So ρ_0 can be reduce to $\rho : SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4) \subset GL(V)$.

We can realize $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ as:

$$\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} \mid A_+, A_- \in SU(2), \lambda \in U(1) \right\}$$

The representation ρ then extends to the representation $\rho^{\mathbb{C}} : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow SO(4) \subset GL(V)$ given by:

$$\rho^{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} \right) (Q) = (\lambda A_-) Q (\lambda A_+)^{-1}$$

We also have the following three important representations:

$$\rho_+ : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow U(2), \quad \rho_+ \left(\begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} \right) (w) = \lambda A_+ w, \quad \forall w \in \mathbb{C}^2$$

$$\rho_- : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow U(2), \quad \rho_- \left(\begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} \right) (w) = \lambda A_- w, \quad \forall w \in \mathbb{C}^2$$

$$\pi : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow U(1), \quad \pi \left(\begin{pmatrix} \lambda A_+ & 0 \\ 0 & \lambda A_- \end{pmatrix} \right) = \lambda^2$$

Definition A.4: Let M be an oriented Riemannian 4-manifold with a $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ structure. The \mathbb{C}^2 bundle S_+ (*resp.* S_-) associated to the representation ρ_+ (*resp.* ρ_-) is called the **positive (resp. negative) spinor bundle**. The complex line bundle L associated to the representation π is called the **determinant line bundle**. These three complex vector

bundles can all be equipped with Hermitian metric.

Theorem A.5: If X is a smooth 4-manifold with a $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ structure, then $c_1(L)$ is a characteristic element. Conversely, any characteristic element is $c_1(L)$ for some $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ structure on X .

Corollary A.2: Q_X is even if and only if X has a spin structure.

See pages 95-96 on [7] for proofs.

Next, we're going to define the Clifford multiplication and the quadratic map. Let $V \subset \text{End}(\mathbb{C}^2)$ be the quaternion algebra. We have a complex linear map:

$$\theta : V \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^4), \quad \theta(Q) = \begin{pmatrix} 0 & -Q^* \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$

Then $(\theta(Q))^2 = \begin{pmatrix} -Q^*Q & 0 \\ 0 & -QQ^* \end{pmatrix} = -\det(Q) \cdot I = -\langle Q, Q \rangle I$. So according to the universal property of Clifford algebra, $\text{End}(\mathbb{C}^4)$ is the Clifford algebra generated by $(V \otimes \mathbb{C}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. To write down a basis of $\text{End}(\mathbb{C}^4)$ explicitly, we take:

$$e_1 = \theta(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \theta(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \theta(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \theta(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Then

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} I = \begin{cases} -2I & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Note that $I, e_i, e_i e_j (i < j), e_i e_j e_k (i < j < k), e_1 e_2 e_3 e_4$ form a basis of $\text{End}(\mathbb{C}^4)$. Therefore, we can regard the Clifford algebra as the complexified exterior algebra of V with a new multiplication. In fact, $\forall v \in V, \forall \omega \in \Lambda^k V$, we have the following useful

formula:

$$v \cdot \omega = v \wedge \omega - \iota(v)\omega$$

where the interior product $\iota(v) : \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^{k-1} V$ is defined as the adjoint of wedge product via:

$$\langle \iota(v)\omega, \theta \rangle = \langle \omega, v \wedge \theta \rangle, \quad \forall \theta \in \Lambda^{k-1} V$$

We have the decomposition $\Lambda^2 V = \Lambda_+^2 V \oplus \Lambda_-^2 V$, and $\Lambda_+^2 V$ has a basis:

$$\begin{aligned} e_1 e_2 + e_3 e_4 &= \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & e_1 e_3 + e_4 e_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_1 e_4 + e_2 e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hence $\Lambda_+^2(V)$ corresponds to trace-free skew-Hermitian endomorphisms of $\mathbb{C}^2 \oplus 0$, which is isomorphic to $\mathfrak{su}(2)$. Similarly, $\Lambda_-^2(V)$ corresponds to trace-free skew-Hermitian endomorphisms of $0 \oplus \mathbb{C}^2$.

Since θ is a $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ -module homomorphism, it induces a bundle homomorphism (called **Clifford multiplication**) $cl : T^* M \cong TM \rightarrow \text{End}(S_+ \oplus S_-)$. This also induces bundle homomorphisms $cl : T^* M \oplus S_+ \rightarrow S_-$ and $cl : T^* M \oplus S_- \rightarrow S_+$. Moreover, we can extend Clifford multiplication to $cl : \Lambda^2 T^* M \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(S_+ \oplus S_-)$. And it restricts to the positive Clifford multiplication $cl_+ : \Lambda_+^2 T^* M \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(S_+)$.

Now we can define the **quadratic map** $q : S_+ \rightarrow i\Lambda_+^2 T^* X$, $\psi \mapsto cl_+^\dagger(\psi \otimes \psi^\dagger)$. In local coordinate, if $\psi = (a, b)^T$, then

$$\psi \otimes \psi^\dagger = (a, b)^T \otimes (\bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} |a|^2 & a\bar{b} \\ \bar{a}b & |b|^2 \end{pmatrix}$$

whose trace free part is

$$\psi \otimes \psi^\dagger - \frac{1}{2} \text{tr}(\psi \otimes \psi^\dagger) I$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2a\bar{b} \\ 2b\bar{a} & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{4}(|a|^2 - |b|^2) cl_+(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + \frac{i}{2} \text{Im}(a\bar{b}) cl_+(e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2) \\
&\quad + \frac{i}{2} \text{Re}(a\bar{b}) cl_+(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
q(\psi) &= cl_+^\dagger(\psi \otimes \psi^\dagger) \\
&= cl_+^\dagger(\psi \otimes \psi^\dagger - \frac{1}{2} \text{tr}(\psi \otimes \psi^\dagger) I) \\
&= i(|a|^2 - |b|^2) (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + 2i \text{Im}(a\bar{b}) (e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2) \\
&\quad + 2i \text{Re}(a\bar{b}) (e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)
\end{aligned}$$

The Levi-Civita connection on the frame bundle and a connection on the determinant line bundle determine a connection on the $\text{Spin}^\mathbb{C}$ -bundle, called a $\text{Spin}^\mathbb{C}$ connection. The representations:

$$\begin{array}{ccc}
& \text{Spin}^\mathbb{C}(4) & \\
\rho \swarrow & & \searrow \pi \\
\text{SO}(4) & & U(1)
\end{array}$$

induce an isomorphism of Lie algebras: $\text{Lie}(\text{Spin}^\mathbb{C}(4)) \cong \text{Lie}(\text{SO}(4)) \oplus \text{Lie}(U(1))$. Let \mathcal{L} be the principal $U(1)$ -bundle corresponding to the determinant line bundle L , then we have maps between principal bundles:

$$\begin{array}{ccc}
& \hat{F} & \\
\swarrow & & \searrow \\
Fr & & \mathcal{L}
\end{array}$$

The Levi-Civita connection on TM gives a canonical connection on Fr . Let A be a unitary connection on L , which gives a connection on \mathcal{L} . Pull these two connections back to \hat{F} , add them and apply the isomorphism $\text{Lie}(\text{Spin}^\mathbb{C}(4)) \cong \text{Lie}(\text{SO}(4)) \oplus \text{Lie}(U(1))$, then we obtain a connection on \hat{F} . This is called a $\text{Spin}^\mathbb{C}$ **connection** on \hat{F} , it induces $\text{Spin}^\mathbb{C}$ connections on spinor bundles S_+ and S_- .

Denote the $\text{Spin}^\mathbb{C}$ connection induced by the unitary connection A on L by d_A . In local coordinates, $(d_A \sigma)_\alpha = d\sigma_\alpha + \phi_\alpha \sigma_\alpha$, where $\phi_\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \text{Lie}(\text{Spin}^\mathbb{C}(4))) =$

$\Gamma(T^*M \otimes (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus i\mathbb{R}))$. So $\phi_\alpha = \frac{1}{2}aI + \frac{1}{2}\sum_{i < j} \omega_{ij}e_i \cdot e_j$ where 1-forms $\omega_{ij} = -\omega_{ji} \in \Omega^1(M)$ are local representatives for the Levi-Civita connection and $a \in i\Omega^1(M)$ is the local representative for the unitary connection on L .

Finally, let's define the Dirac operator.

Definition A.5: Let A be a unitary connection on L . The **Dirac operator** D_A is the composition:

$$\Gamma(S_+ \oplus S_-) \xrightarrow{\nabla_A} \Gamma(T^*M \otimes (S_+ \oplus S_-)) \xrightarrow{cl} \Gamma(S_+ \oplus S_-)$$

Explicitly, if we pick a local orthonormal frame $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ of TM , then

$$\forall \psi \in \Gamma(S_+ \oplus S_-), \quad D_A(\psi) = cl\left(\sum_{i=1}^4 \nabla_{e_i}^A \psi \otimes e_i^*\right) = \sum_{i=1}^4 e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \psi$$

By the theory of elliptic operators, the kernels of $D_A^+ : \Gamma(S_+) \rightarrow \Gamma(S_-)$ and $D_A^- : \Gamma(S_-) \rightarrow \Gamma(S_+)$ are finite dimensional, then we may define $\text{ind } D_A^+ := \dim_{\mathbb{C}}(\text{Ker}(D_A^+)) - \dim_{\mathbb{C}}(\text{Ker}(D_A^-))$.

Theorem A.6 (Atiyah-Singer Index Theorem for the Dirac Operator):

$$\text{ind } D_A^+ = \frac{1}{8} \int_M c_1(L)^2 - \frac{1}{8} \tau(M)$$

where $\tau(M) = b_2^+(M) - b_2^-(M)$ is the signature of M .

See section 13 of [9] for a proof.

A.2.2 Seiberg-Witten equations and moduli space

Let (M, g) be a closed oriented 4-dimensional Riemannian manifold with a $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ structure. The following equations are called the **Seiberg-Witten equations**:

$$\begin{aligned} D_A^+ \psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi) + i\phi \end{aligned} \tag{A.1}$$

where A is a unitary connection on L , $\psi \in \Gamma(S_+)$, F_A^+ is the self-dual part of F_A , $q : S_+ \rightarrow i\Lambda_+^2 T^*M$ is the quadratic map, $\phi \in \Lambda_+^2 T^*M$ is a prescribed self-dual two form, called the **perturbation term**.

Define the **configuration space** $\mathcal{A} = \{(A, \psi) | A \text{ is a unitary connection on } L, \psi \in \Gamma(S_+)\} = \{(d_{A_0} + a, \psi) | a \in i\Omega^1(M), \psi \in \Gamma(S_+)\}$, where d_{A_0} is a fixed unitary connection on L . Let $\mathcal{G} = C^\infty(M, S^1)$ be the **group of gauge transformations**, which acts on \mathcal{A} by $g \cdot (d_{A_0} + a) = (d_{A_0} + a + gd(g^{-1}), g\psi)$. For any fixed $p_0 \in M$, let

$\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G} | g(p_0) = 1\}$ be the **group of based gauge transformations**. Note that \mathcal{G}_0 acts freely on \mathcal{A} but \mathcal{G} doesn't.

Let $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ and $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_0$. Constant gauge transformations fix the points $(d_{A_0} + a, 0)$ (called the **reducible elements**), so \mathcal{B} has singularities at these points.

Now we can define the moduli spaces of the Seiberg-Witten equations: $\mathcal{M}_\phi = \{[A, \psi] \in \mathcal{B} | D_A^+ \psi = 0, F_A^+ \psi = q(\psi) + i\phi\}$ and $\tilde{\mathcal{M}}_\phi = \{[A, \psi] \in \tilde{\mathcal{B}} | D_A^+ \psi = 0, F_A^+ \psi = q(\psi) + i\phi\}$. These two moduli spaces are endowed with the following merits.

Theorem A.7: (Basic Properties of the Moduli Space)

1. \mathcal{M}_ϕ is compact.
2. For generic ϕ , $\tilde{\mathcal{M}}_\phi$ is a finite-dimensional orientable smooth manifold with a smooth $U(1)$ -action. If $b_2^+ > 0$, then for generic ϕ , \mathcal{M}_ϕ is smooth and $\tilde{\mathcal{M}}_\phi \rightarrow \mathcal{M}_\phi$ is a principal S^1 -bundle.
3. For generic ϕ , $\dim(\mathcal{M}_\phi) = b_1 - b_2^+ - 1 + \frac{c_1^2 - \tau}{4}$, where $\tau = b_2^+ - b_2^-$ is the signature of M , $c_1^2 = \mathcal{Q}(c_1(L), c_1(L))$, \mathcal{Q} is the intersection form of M .
4. If $(g_0, \phi_0), (g_1, \phi_1)$ are generic (g_0, g_1 are Riemannian metrics, ϕ_0, ϕ_1 are perturbation terms in the Seiberg-Witten equations), then for a generic path (g_t, ϕ_t) connecting them, $\tilde{W} = \{t, \tilde{\mathcal{M}}_{g_t, \phi_t}\}$ is an oriented compact smooth manifold with boundary $-\tilde{\mathcal{M}}_{g_0, \phi_0} + \tilde{\mathcal{M}}_{g_1, \phi_1}$.
5. A choice of orientation of $H_0(M; \mathbb{R}) \oplus H_1(M; \mathbb{R}) \oplus H_2^+(M)$, called a homology orientation, determines an orientation of the moduli space $\tilde{\mathcal{M}}_\phi$.

Proofs of the above properties can be found in [8].

A.2.3 Seiberg-Witten Invariants

The nice properties of the moduli space allow us to define the Seiberg-Witten invariants, a series of diffeomorphism invariants introduced by Seiberg and Witten in 1990s. These invariants will not be put into use in this survey, but they play an important role in the main body of the thesis.

Definition A.6: Let X be a closed oriented smooth 4-manifold with $b_2^+ > 1$. We define the **Seiberg-Witten invariant** $\text{SW}_X : S_X \rightarrow \mathbb{Z}$ as follows:

1. If $b_2^+ - b_1$ is even, then $\text{SW}_X := 0$.
2. If $b_2^+ - b_1$ is odd, then $\dim(\mathcal{M}_{s, \phi}) = b_1 - b_2^+ - 1 + \frac{c_1^2 - \tau}{4} = b_1 - b_2^+ - 1 + 2 \text{ind}(D_A^+)$ is even. Let $d(s) = \frac{1}{2} \dim(\mathcal{M}_{s, \phi})$.

- If $d(s) < 0$, then $\text{SW}_X(s) := 0$
- If $d(s) = 0$, then $\mathcal{M}_{s,\phi}$ is a finite set of points with orientations $\text{sgn}(p) = \pm 1$.

$$\text{SW}_X(s) := \sum_{p \in \mathcal{M}_{s,\phi}} \text{sgn}(p).$$
- If $d(s) > 0$, $\text{SW}_X(s) := \int_{\mathcal{M}_{s,\phi}} e^d$, where $e \in H^2(\mathcal{M}; \mathbb{Z})$ is the first Chern class of the associated line bundle of $\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$.

Remark A.2: • The Seiberg-Witten invariants are well-defined, not depending on the choice of metric g and perturbation term ϕ . The proof depends on the last property in Theorem A.7 and $b_2^+ > 1$ which allows us to perturb ϕ_t in order to avoid the emergence of reducible solutions.

- There is a charge conjugation involution $s \mapsto \bar{s}$ on S_X which sends $c_1(L)$ to $-c_1(L)$, and $\text{SW}(\bar{s}) = (-1)^{b_2^+ - b_1 + 1} \text{SW}(s)$.

Theorem A.8: Let X be a simply-connected Kähler surface with $b_2^+ > 1$, $K = \Lambda^2 T^* M$ be its canonical bundle. Then X has a canonical $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ structure s_0 , whose determinant line bundle $L \cong K^{-1}$. And $\text{SW}(X, s_0) = \pm 1$.

See section 3.9 in [7] for a proof.

A.3 Donaldson's Diagonalizability Theorem

A.3.1 Proof of Donaldson's diagonalizability theorem

Theorem A.9 (Donaldson[5]): Let X be a simply connected closed connected smooth 4-manifold, then if Q_X is definite, it's diagonal, i.e. $Q_X = \pm I$.

Proof Suppose Q_X is negative definite, otherwise we can reverse the orientation of X . So $b_2^+ = 0$. So for generic ϕ , $\dim(\mathcal{M}_\phi) = \frac{c_1^2 - \sigma}{4} + b_1 - b_2^+ - 1 = \frac{c_1^2 - \sigma}{4} - 1 = 2 \bmod 2$ and $D_A^+ - 1 = 2m - 1$.

Step 1: Show that there is a unique reducible solution $(A, 0)$ (modulo gauge) to the Seiberg-Witten equation.

Fix a connection A_0 on L . Write $A = A_0 + a$. By the second Seiberg-Witten equation, $F_A^+ = F_{A_0}^+ + d^+ a = i\phi$. We have an elliptic complex:

$$0 \rightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d^+} \Omega_+^2(X) \rightarrow 0$$

And by Hodge theory, the homology groups are: $\mathcal{H}^0(X), \mathcal{H}^1(X), \mathcal{H}_+^2(X)$ respectively. In this case, $H^1 = H_+^2 = 0$, so $d^+ a = i\phi - F_{A_0}^+$ has a unique solution a such that $\delta a = 0$.

Thus $x = [A_0 + a, 0]$ is the unique reducible solution.

Step 2: Assume that $m \geq 1$. Study the geometry of \mathcal{M}_ϕ .

Away from the reducible solution, it's a smooth manifold of dimension $2m - 1$. Near the reducible solution x in $\tilde{\mathcal{M}}_\phi$, the \mathbb{S}^1 -action fixes x and rotates irreducible solutions, so the local model is a cone on \mathbb{CP}^{m-1} . Let U be a neighborhood of x in \mathcal{M}_ϕ with $\partial U = \mathbb{CP}^{m-1}$. Then the \mathbb{S}^1 -bundle $\tilde{\mathcal{M}}_\phi - \{x\} \rightarrow \mathcal{M}_\phi - \{x\}$ restricted to $\partial U = \mathbb{CP}^{m-1}$ is the sphere bundle of the tautological bundle γ_{m-1}^1 over \mathbb{CP}^{m-1} . Let u be the first Chern class of the \mathbb{S}^1 -bundle, $i : \mathbb{CP}^{m-1} \rightarrow \mathcal{M}_\phi - \{x\}$ be the inclusion. Then $\langle u, i_*[\mathbb{CP}^{m-1}] \rangle = \langle u|_{\mathbb{CP}^{m-1}}, [\mathbb{CP}^{m-1}] \rangle = \pm 1 \neq 0$. So $[\mathbb{CP}^{m-1}] \in H_{2m-2}(\mathcal{M}_\phi - \{x\}; \mathbb{Z})$ is nonzero. However, $\mathbb{CP}^{m-1} = \partial U = \partial(\mathcal{M}_\phi - U)$. Contradiction!

Step 3: By Step 2 we must have $m = \frac{c_1^2 + b_2}{8} \leq 0$, and $\tilde{M} = \{x\}$. Since we can pick the Spin^c structure on X arbitrarily, $Q(k, k) \leq -b_2$ for any characteristic element $k \in H^2(X; \mathbb{Z})$. Finally we can apply the following theorem of Elkies to obtain the desired result:

Theorem A.10 (Elkies[10]): If $Q : \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}$ is a symmetric unimodular bilinear form such that $Q(k, k) + r \leq 0$ for any characteristic element k , then Q is diagonal.

A.3.2 Applications of Donaldson's diagonalizability theorem

Rokhlin's theorem tells us that E_8 is not smoothable.

Theorem A.11 (Rokhlin): Let M be a closed oriented smooth spin 4-manifold. Then $\sigma(Q_M) \equiv 0 \pmod{16}$

A proof can be found on page 68 in [7].

Since E_8 is even, it is spin. But its signature is 8, thus not smoothable by Rokhlin's theorem. However, what about $E_8 \oplus E_8$? It has signature 16 and Rokhlin's theorem doesn't work. As a corollary of Donaldson's theorem, $E_8 \oplus E_8$ is not smoothable as well.

Corollary A.3: The closed simply-connected topological 4-manifold with intersection form $E_8 \oplus E_8$ admits no smooth structure.

Proof $E_8 \oplus E_8$ is positive definite and even. But I is odd. ■

Another interesting application of Donaldson's theorem is to show the existence of exotic smooth structures on \mathbb{R}^4 . Let $X = \mathbb{CP}^2 \# 9 \overline{\mathbb{CP}^2}$. Then $Q_X = (1) \oplus 9(-1) \cong (-E_8) \oplus (-1) \oplus (1)$. Let $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ be an element that spans the $(+1)$ -component. By using

Casson handles (see section 2.1 in [11]) we can represent α by a topologically embedded 2-sphere Σ in X . Moreover, the Casson handles also yield a nice neighborhood U of Σ in X . U is homeomorphic to a 2-disk bundle over Σ and we may assume that U is homeomorphic to an open subset in \mathbb{CP}^2 . Denote $\mathbb{CP}^2 - \Sigma$ by Σ^c . The following proposition tells us that Σ^c , with the smooth structure inherited from \mathbb{CP}^2 , is an exotic \mathbb{R}^4 .

Proposition A.1: Σ^c is homeomorphic to \mathbb{R}^4 , but not diffeomorphic to standard \mathbb{R}^4 .

Proof 1. For the first part, we need to use Freedman's theorem for open 4-manifolds (see Corollary 2.1 in [3]). By this theorem, it suffices to show the following two things:

- Σ^c is contractible. This is because $\pi_1(\Sigma^c) = 1$ by Van-Kampen theorem and $\tilde{H}_*(\Sigma^c; \mathbb{Z}) = 0$ by Mayer-Vietoris sequence. Then it follows from Hurewicz's theorem that $\pi_i(\Sigma^c) = 0$ for all i . So by Whitehead's theorem Σ^c is contractible.
- Σ^c is "simply connected at infinity", that is, for any compact subset $C \subset \Sigma^c$, there exists another compact subset D with $C \subset D \subset \Sigma^c$ such that the homomorphism $\pi_1(\Sigma^c - D) \rightarrow \pi_1(\Sigma^c - C)$ is trivial. This is because $U - \Sigma$ is homeomorphic to $\mathbb{S}^3 \times (0, 1)$, which is simply-connected.

2. For the second part, note that in standard \mathbb{R}^4 , every compact subset can be surrounded by some smooth 3-sphere. If Σ^c is diffeomorphic to standard \mathbb{R}^4 , then there exists some smoothly embedded 3-sphere $Z \subset U$ which surrounds the compact subset $\mathbb{CP}^2 - U \subset \Sigma^c$. Then we can transport $Z \subset U$ back to X , cut out the neighborhood U' of Σ with $\partial U' = Z$ and replace it by a standard 4-ball. Then we obtain a simply-connected closed smooth 4-manifold Y with $Q_Y = (-E_8) \oplus (-1)$, which is impossible by Donaldson's theorem. ■

参考文献

- [1] J. H. C. Whitehead. On simply connected, 4-dimensional polyhedra. In *Topologie algébrique, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, no. 12, pages 103–106. Centre de la Recherche Scientifique, Paris, 1949.
- [2] John Milnor. On simply connected 4-manifolds. In *Symposium internacional de topología algebraica International symposium on algebraic topology*, pages 122–128. Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958.

- [3] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geometry*, 17(3):357–453, 1982. ISSN 0022-040X. URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214437136>.
- [4] John Milnor and Dale Husemoller. *Symmetric bilinear forms*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [5] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.*, 18(2):279–315, 1983. ISSN 0022-040X. URL <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214437665>.
- [6] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. ISBN 0-471-32792-1.
- [7] John Douglas Moore. *Lectures on Seiberg-Witten invariants*, volume 1629 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001. ISBN 3-540-41221-2.
- [8] John W. Morgan. *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, volume 44 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. ISBN 0-691-02597-5.
- [9] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. ISBN 0-691-08542-0.
- [10] Noam D. Elkies. A characterization of the \mathbf{Z}^n lattice. *Math. Res. Lett.*, 2(3):321–326, 1995. ISSN 1073-2780. doi: 10.4310/MRL.1995.v2.n3.a9. URL <https://doi.org/10.4310/MRL.1995.v2.n3.a9>.
- [11] Alexandru Scorpan. *The wild world of 4-manifolds*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. ISBN 0-8218-3749-4.