1. Évaluer les intégrales suivantes.

(a) (3 points) $\displaystyle\int \big(1+\tan(x)\big)^3 \sec^2(x)\,dx$

(b) (5 points) $\displaystyle\int x\sec^2(x)\,dx$

(c) (5 points) $\displaystyle\int \cos^8((2x))\ \sin^3((2x))\ dx$

(d) (6 points) $\displaystyle\int_0^{1/2} x\ \arcsin(x)\,dx$

(e) (6 points) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{x^2+2x-3}\,dx$

(f) (5 points) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9x^2-4}}$

(g) (5 points) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx$

2. Évaluer les limites suivantes.

(a) (4 points) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

(b) (4 points) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{3/x^2}$

3. (5 points) Trouver l'aire de la région délimitée par $y=-x$ et $y=2-x^2$.

4. (5 points) Résoudre l'équation différentielle suivante étant donné que $y=e$ quand $x=0$.
Exprimer y en termes de x.

$$\ln(y)\,\frac{dy}{dx}=x^3\,y$$

5. (6 points) Le sucre se dissout dans l'eau à un taux de variation proportionnel à la quantité restante de sucre **non-dissous**. Supposons qu'il y avait initialement 50 kg de sucre, et qu'après 5 heures, il ne restait que 20 kg.

(a) Écrire une équation différentielle (avec conditions initiales) qui modélise cette situation.

(b) Résoudre l'équation différentielle pour trouver une expression explicite de la quantité restante de sucre en fonction du temps.

(c) Combien de temps faudra-t-il pour qu'il ne reste que 8 kg de sucre ?

6. (4 points) Déterminer si la suite converge ou diverge. Si la suite converge, trouver sa limite ; sinon, expliquer pourquoi elle diverge.

(a) $a_n = n\,\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

(b) $b_n=(-1)^n\left(\dfrac{n^2+n}{3n^2+4}\right)$

7. (5 points) Trouver la somme de la série télescopique suivante.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$$

8. Déterminer si la série converge ou diverge. Justifiez votre réponse et indiquez le test que vous utilisez.

(a) (2 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (b) (3 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\,5^n}{(2n)!}$ (c) (2 points) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sec^2(n)}{n-1}$

9. Déterminer si la série est absolument convergente, conditionnellement convergente ou divergente. Justifiez votre réponse.

(a) (3 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4n^3-7}{5n^3+3n^2}\right)^n$ (b) (4 points) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+5}}$

10. (6 points) Trouver le rayon et l'intervalle de convergence de la série de puissances suivante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-1)^n}{7^n\,\sqrt{n+1}}$$

11. (6 points) (a) Trouver la série de MacLaurin et indiquer le rayon de convergence pour la fonction suivante.

$$f(x) = \frac{1}{1+4x}$$

(b) Écrire les quatre premiers termes non nuls de la série de la partie (a).

(c) Utilisez votre réponse de la partie (a) pour trouver la série de MacLaurin de la fonction suivante.

$$g(x) = \frac{1}{(1+4x)^2}$$

12. (3 points) Trouver la série de MacLaurin de la fonction suivante à partir de séries connues.

$$f(x) = x\sin(x^4)$$

13. (3 points) Déterminer si l'énoncé est **toujours vrai**, **toujours faux** ou **parfois vrai**.

(a) Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 5^n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$ converge. ______________

(b) Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 5^n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-5)^n$ converge. ______________

(c) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-a_n)^n$ converge. ______________

Réponses

1. (a) $\dfrac{(1+\tan(x))^4}{4} + C$

(b) $x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C$

(c) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos^{11}(2x)}{11} - \dfrac{\cos^9(2x)}{9}\right) + C$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{16} - \dfrac{\pi}{48}$

(e) $3x - 7\ln|x+3| + \ln|x-1| + C$

(f) $\dfrac{\sqrt{9x^2-4}}{4x} + C$

(g) $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right) - 2\arctan(x+2) + C$

2. (a) $-\dfrac{1}{2}$

(b) $e^{-3/2}$

3. $\dfrac{9}{2}$

4. $e^{\sqrt{x^4/2+1}}$

5. (a) $\dfrac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 50 \qquad y(5) = 20$

(b) $y = 50\left(\dfrac{2}{5}\right)^{t/5}$

(c) $t = 10$ heures

6. (a) π

(b) La suite diverge comme elle oscille entre $-1/3$ et $1/3$.

7. $\dfrac{3}{2}$

8. (a) La série diverge par le Test de Divergence.

(b) La série converge par le critère de d'Alembert (test du Ratio).

(c) La série diverge par le Test de Comparaison Direct.

9. (a) Absolument Convergente (critère de Cauchy, Test de la Racine)

(b) Conditionnellement Convergente

10. $R = \dfrac{7}{2}$ et I.C.=$(-3, 4]$

11. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^n$ avec $R = \dfrac{1}{4}$

(b) $f(x) = 1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \dots$

(c) $g(x) = -\dfrac{f'(x)}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n 4^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) 4^n x^n$ avec $R = \dfrac{1}{4}$

12. $x \sin(x^4) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{8n+5}}{(2n+1)!}$ avec $R = \infty$

13. (a) Toujours Vrai

(b) Parfois Vrai

(c) Toujours Vrai