

# Mis à jour pour l'automne 2025

1. (35 points) Évaluez les intégrales suivantes.

(a)  $\int \frac{6x^3 + 33x^2 + 36x - 2}{3x^2 + 18x + 24} dx$

(d)  $\int_0^{\pi/4} \sec^5(\theta) \tan^3(\theta) d\theta$

~~(g)~~  $\int \frac{1}{x^2 - 8x + 41} dx$

(b)  $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{\sqrt{x}} dx$

~~(e)~~  $\int x \arcsin(x) dx$

(c)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(f)  $\int \sqrt{4 - x^2} dx$

2. (6 points) Évaluez les limites suivantes. Si vous utilisez la règle de l'Hospital, justifiez pourquoi elle peut être utilisée.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\cot x}$

3.  $\int_9^\infty \frac{1}{x^2 - 8x + 41} dx$

3. (5 points) Trouvez la surface de la région délimitée par les courbes  $y = x^2 - 8x$  et  $y = 7 - 2x$ .

4. (4 points) Établissez une intégrale pour trouver le volume d'une pyramide de hauteur  $h$  et de base rectangulaire de dimensions  $b$  et  $3b$ . Évaluez l'intégrale.

5. (4 points) Résolvez l'équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y(1+x)}$  avec condition initiale  $y(0) = -2$ . Exprimez  $y$  explicitement en fonction de  $x$  et simplifiez complètement votre réponse.

6. (5 points) Une culture de bactéries croît à un taux proportionnel au nombre de bactéries présentes. Initialement, la culture contient 1000 bactéries. Après 3 heures, la population atteint 8000 bactéries.

- (a) Établissez une équation différentielle avec les conditions initiales décrivant la croissance de la population.

- (b) Trouvez une expression pour le nombre de bactéries en fonction du temps  $t$ .

- (c) Trouvez le moment où la population atteint 100 000 bactéries.

7. (3 points) Trouvez la somme de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + 4^n}{7^n}$

8. (3 points) Déterminez si la suite avec terme général  $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$  converge ou diverge. Justifiez votre réponse.

9. (9 points) Déterminez si chacune des séries suivantes converge ou diverge. Justifiez vos réponses.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{n^3 + 3n + 7}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)^n}{7^{n^2}}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{n^4}$

10. (6 points) Déterminez si chacune des séries suivantes converge absolument, converge conditionnellement ou diverge. Justifiez vos réponses.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+3}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n + e^{-n}}$

11. (5 points) Trouvez le rayon et l'intervalle de convergence de la série de puissances (série entière)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{n 2^n}$ .

12. (5 points) Trouvez une représentation en série de puissances pour la fonction  $f(x) = \arctan(x^2)$  en utilisant des séries connues et déterminez le rayon de convergence.

13. (4 points) Soit  $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$ . Écrivez les quatre premiers termes non nuls de la série de MacLaurin pour  $f(x)$ .

14. (6 points) (a) Utilisez une série de MacLaurin connue pour obtenir la série de MacLaurin de  $f(x) = e^{3x^2}$

- (b) Utilisez la partie (a) pour évaluer  $\int e^{3x^2} dx$  en tant que série entière.

## ANSWERS

1. (a)  $x^2 - x + \frac{5}{3} \ln|3x+6| + \frac{1}{3} \ln|x+4| + C$

(b)  $\frac{65}{2}$

(c)  $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$

(d)  $\frac{12\sqrt{2}+2}{35}$

(e)  ~~$\frac{x^2 \arcsin(x)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} + C$~~

$$\frac{x^2}{2} \arcsin(x) - \frac{1}{4} \arccos(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

(f)  $2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

~~X~~  $\frac{1}{5} \arctan\left(\frac{x-4}{5}\right) + C$

2. (a)  $\infty$

(b)  $e$

3.  ~~$\frac{256}{3}$~~   $\pi/20$

4.  $V = \int_0^h 3 \frac{x^2 b^2}{h^2} dx = b^2 h$

5.  $y = -\sqrt{2x - 2 \ln|x+1| + 4}$

6. (a)  $\frac{dN}{dt} = kN$ ,  $N(0) = 1000$ ,  $N(3) = 8000$

(b)  $N(t) = 1000(2)^t$

(c)  $t = \frac{\ln 100}{\ln 2}$

7.  $\frac{35}{6}$

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , conv.

9. (a) div.

(b) conv.

(c) conv.

10. (a) converge conditionnellement

(b) converge absolument donc converge.

11.  $R = 2$ , I de C (3, 7]

12.  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$ ,  $R = 1$

13.  $\frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27}x + \frac{3}{81}x^2 + \frac{4}{243}x^3 + \dots$

14. (a)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n!} = 1 + \frac{3x^2}{1!} + \frac{9x^4}{2!} + \frac{27x^6}{3!} + \dots$ ,  $R = \infty$

(b)  $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} = C + x + \frac{3x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{9x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{27x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$ ,  $R = \infty$