1. (35 points) Évaluez les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int \frac{6x^3+33x^2+36x-2}{3x^2+18x+24}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^5(\theta)\tan^3(\theta)\,d\theta$

(e) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arcsec}(x)\,dx$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+41}\,dx$

2. (6 points) Évaluez les limites suivantes. Si vous utilisez la règle de l'Hospital, justifiez pourquoi elle peut être utilisée.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x+1)^{\cot x}$

3. (5 points) Trouvez la surface de la région délimitée par les courbes $y=x^2-8x$ et $y=7-2x$.

4. (4 points) Établissez une intégrale pour trouver le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangulaire de dimensions b et $3b$. Évaluez l'intégrale.

5. (4 points) Résolvez l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y(1+x)}$ avec condition initiale $y(0)=-2$. Exprimez y explicitement en fonction de x et simplifiez complètement votre réponse.

6. (5 points) Une culture de bactéries croît à un taux proportionnel au nombre de bactéries présentes. Initialement, la culture contient 1000 bactéries. Après 3 heures, la population atteint 8000 bactéries.

(a) Établissez une équation différentielle avec les conditions initiales décrivant la croissance de la population.

(b) Trouvez une expression pour le nombre de bactéries en fonction du temps t.

(c) Trouvez le moment où la population atteint 100 000 bactéries.

7. (3 points) Trouvez la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+4^n}{7^n}$

8. (3 points) Déterminez si la suite avec terme général $a_n=\ln(n+1)-\ln(n)$ converge ou diverge. Justifiez votre réponse.

9. (9 points) Déterminez si chacune des séries suivantes converge ou diverge. Justifiez vos réponses.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^3+3n+7}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)^n}{7^{n^2}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin(n)}{n^4}$

10. (6 points) Déterminez si chacune des séries suivantes converge absolument, converge conditionnellement ou diverge. Justifiez vos réponses.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n+e^{-n}}$

11. (5 points) Trouvez le rayon et l'intervalle de convergence de la série de puissances (série entière) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-5)^n}{n\,2^n}$.

12. (5 points) Trouvez une représentation en série de puissances pour la fonction $f(x)=\arctan(x^2)$ en utilisant des séries connues et déterminez le rayon de convergence.

13. (4 points) Soit $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)^2}$. Écrivez les quatre premiers termes non nuls de la série de MacLaurin pour $f(x)$.

14. (6 points) (a) Utilisez une série de MacLaurin connue pour obtenir la série de MacLaurin de $f(x)=e^{3x^2}$

(b) Utilisez la partie (a) pour évaluer $\int e^{3x^2}\,dx$ en tant que série entière.

ANSWERS

1. (a) $x^2 - x + \frac{5}{3}\ln|3x+6| + \frac{1}{3}\ln|x+4| + C$
(b) $\frac{65}{2}$
(c) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$
(d) $\frac{12\sqrt{2}+2}{35}$
(e) $\dfrac{x^2\text{arcsec}(x)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$
(f) $2\arcsin(\frac{x}{2}) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$
(g) $\dfrac{1}{5}\arctan\left(\dfrac{x-4}{5}\right) + C$

2. (a) ∞
(b) e

3. $\frac{256}{3}$

4. $V = \displaystyle\int_0^h 3\frac{x^2b^2}{h^2}\,dx = b^2h$

5. $y = -\sqrt{2x - 2\ln|x+1| + 4}$

6. (a) $\frac{dN}{dt} = kN, \quad N(0) = 1000, \quad N(3) = 8000$
(b) $N(t) = 1000(2)^t$
(c) $t = \frac{\ln 100}{\ln 2}$

7. $\frac{35}{6}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, conv.

9. (a) div.
(b) conv.
(c) conv.

10. (a) converge conditionnellement
(b) converge absolument

11. $R = 2$, I de C $(3, 7]$

12. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$, $R = 1$

13. $\dfrac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27}x + \frac{3}{81}x^2 + \frac{4}{243}x^3 + \ldots$

14. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nx^{2n}}{n!} = 1 + \frac{3x^2}{1!} + \frac{9x^4}{2!} + \frac{27x^6}{3!} + \ldots$, $R = \infty$
(b) $C + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nx^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} = C + x + \frac{3x^3}{3\cdot 1!} + \frac{9x^5}{5\cdot 2!} + \frac{27x^7}{7\cdot 3!} + \ldots$, $R = \infty$