Mis à jour pour l'automne 2025 May 2023

1. Évaluez les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \cos^3(x)\sin^4(x)\, dx$

(d) $\displaystyle\int e^x \sin(2x)\, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 9x^2 - 5x + 7}{2x^2 - 5x - 3}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{81x^5}{\sqrt{3x^3 + 1}}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{x}{e^x}\, dx$

$\longrightarrow$ (h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{x^4}\, dx$

3. Évaluez $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\, dx$

2. Évaluez les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1 - \cos x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

~~**3.**~~ Trouvez la surface de la région délimitée par les courbes $y = x^2 - 4x$ et $y = -x^2 + 6x - 8$.

4. (a) Tracez la région $\mathcal{R}$ entre les graphes des fonctions $y = e^x$ et $y = -x$, de $x = 0$ à $x = 1$.

(b) Supposons que $\mathcal{R}$ soit la base d'un solide qui, lorsqu'il est coupé perpendiculairement à la base $\mathcal{R}$, et parallèlement à l'axe des y, forme des sections transversales carrées. Écrivez, **mais n'évaluez pas**, une intégrale pour le volume de ce solide.

5. Résolvez l'équation différentielle

$$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

étant donné que $y = -\sqrt{\pi}$ lorsque $x = 1/2$. Exprimez y en fonction de x.

6. L'équation de Bertalanffy est utilisée par les écologistes pour modéliser la croissance des organismes au fil du temps. Elle est dérivée de l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dt} = k(L - M)$$

où L est la longueur de l'organisme au temps t, M est la longueur maximale de l'organisme, et k est une constante de taux.

Supposons qu'à la première mesure, un saumon mesure 20 cm de longueur. 1 an plus tard, le saumon a grandi jusqu'à 50 cm de longueur. Si la longueur maximale M est de 80 cm, utilisez ce modèle pour prédire la longueur du poisson 2 ans après la première mesure.

7. Déterminez si la suite

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{e^n - n}{e^n + n}\right)$$

converge ou diverge. Si la suite converge, trouvez sa limite ; sinon, expliquez pourquoi elle diverge.

8. Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-3)^n}{5^n}$ est convergente ou divergente.

Si elle est convergente, trouvez sa somme.

9. Supposons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ soit une série convergente de termes positifs dont la somme est 10. Déterminez si les objets suivants convergent ou divergent, et **justifiez votre réponse**. **Si possible**, trouvez la valeur à laquelle ils convergent.

(a) La suite $\{a_n\}$

(b) La suite des sommes partielles $\{s_N\}$, où $s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$

(c) La série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n}$

10. Déterminez si les séries convergent ou divergent. Justifiez votre réponse.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n+5}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2+1)^n}{(n\pi)^{2n}}$

11. Déterminez si la série est ~~absolument~~ convergente, ~~conditionnellement convergente~~ ou divergente. Justifiez votre réponse.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n+1}$

(b) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-2\sqrt{n}}$

12. Trouvez l'intervalle de convergence de la série de puissances (série entière) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3\,5^n}$.

13. (a) Trouvez une représentation en série de puissances pour

$$f(x) = \frac{1}{4-3x}$$

et écrivez les quatre premiers termes non nuls de la série.

(b) Utilisez votre réponse de la partie (a) pour trouver une représentation en série de puissances pour

$$g(x) = \frac{x}{(4-3x)^2}$$

Answers

1. (a) $\pi/8$
   (b) $-\dfrac{1}{\ln x}+C$
   (c) $\dfrac{1}{5}\sin^5 x-\dfrac{1}{7}\sin^7 x+C$
   (d) $\dfrac{1}{5}e^x\left(\sin(2x)-2\cos(2x)\right)+C$
   (e) $\dfrac{1}{2}x^2-2x-\ln|2x+1|-5\ln|x-3|+C$
   (f) 8
   (g) $\dfrac{1-\ln 2}{2}$
   (h) $\cancel{-3\ln\left|\dfrac{3+\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right|+\sqrt{9-4x^2}+C}$ $-\dfrac{\left(\sqrt{9+4x^2}\right)^3}{8x^3}+C$

2. (a) 2
   (b) e^3

~~3.~~ $\cancel{\int_1^4 (-x^2+6x-8)-(x^2-4x)\,dx=9}$ 3. ln 2

4. $\displaystyle\int_0^1 \left(e^x+x\right)^2\,dx$

5. $y=-\sqrt{2\arcsin(x)+\dfrac{2\pi}{3}}$

6. $L(t)=-60\left(\dfrac{1}{2}\right)^t+80$. À $t=2$ ans, $L=65$ cm.

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$, donc la suite diverge oscillation.

8. Somme de séries géométriques convergentes : convergente. La somme est $\frac{1}{8}$.

9. (a) Converge vers 0.
   (b) Converge vers la somme de la série, 10.
   (c) Diverge par le test de divergence, puisque $e^{-a_n}\to 1\neq 0$.

10. (a) Diverge par le test de divergence.
    (b) Converge par le critère de d'Alembert (Ratio test).
    (c) Converge par le critère de Cauchy (Root test).

11. (a) Converge absolument par le test de comparaison. donc CV.
    (b) Converge ~~conditionnellement~~ par ~~le test de comparaison (ou le test de comparaison limite) et~~ le test des séries alternées.

I de C: [-8,2]

1. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}+\frac{3x}{16}+\frac{9x^2}{64}+\frac{27x^3}{256}+\dots$

2. Comme $g(x)=\dfrac{xf'(x)}{3}$, on obtient $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n-1}x^n}{4^{n+1}}$