1. (30 points) Évaluer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int (x+1)\sin(3x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int (6x-1)\sqrt{3x+1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x^2+10x+6}{x(x-3)(2x+1)}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \cos^2(4x)\sin^3(4x)\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{x^2+4}}\,dx$

2. (8 points) Évaluer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{(1/e^x)}$

3. (5 points) Évaluer l'intégrale impropre suivante: $\displaystyle\int_2^\infty \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx$

4. (5 points) Résoudre l'équation différentielle suivante étant donné que $y=\frac{1}{2}$ quand $x=0$. **Exprimer y en termes de x.**

$$\frac{dy}{dx}=y^2\,e^{-x}$$

5. (8 points) Un isotope radioactif ayant une masse initiale de 100 mg se désintègre à un taux proportionnel à sa masse. Cinq ans plus tard, sa masse est de 60 mg.

(a) Écrire une équation différentielle (avec conditions initiales) qui modélise cette situation.

(b) Résoudre l'équation différentielle pour trouver une expression explicite de la quantité restante d'isotope en fonction du temps.

(c) Quelle est la quantité d'isotope restante après 10 ans ?

6. (6 points) Déterminer si la suite converge ou diverge. Si la suite converge, trouver sa limite ; sinon, expliquer pourquoi elle diverge.

(a) $a_n=(-1)^n e^{\frac{n^2+1}{2n^2-1}}$

(b) $b_n=\dfrac{(\ln n)^2}{n}$

7. (5 points) Trouver le volume du solide dont la base est la région délimitée par les courbes $y=1-x^2$ et $y=0$, et dont les sections transversales perpendiculaires à l'axe des y sont des carrés.

8. (4 points) Trouver la somme de la série suivante: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-3}{3^{2n+1}}$

9. (12 points) Déterminer si la série converge ou diverge. Justifiez votre réponse et indiquez le test que vous utilisez.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \arctan\left(\frac{n}{n-1}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{(n+1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{2n^3+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5}}$

10. (7 points) Trouver le rayon et l'intervalle de convergence de la série de puissances suivante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ n(x+1)^n}{2^n\ (n+1)}$$

11. (7 points) (a) Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction suivante et déterminer le rayon de convergence.

$$f(x) = \ln(2-x)$$

(b) Utiliser votre réponse de la partie (a) pour évaluer l'intégrale indéfinie sous forme de série entière :

$$\int x^2 \ln(2-x)\,dx$$

12. (3 points) Trouver la série de MacLaurin de la fonction suivante à partir de séries connues.

$$f(x) = xe^{x^2}$$

Réponses

1. (a) $-\dfrac{1}{3}(x+1)\cos(3x) + \dfrac{1}{9}\sin(3x) + C$

(b) $\dfrac{4}{15}(3x+1)^{5/2} - \dfrac{2}{3}(3x+1)^{3/2} + C$

(c) $-2\ln|x| + 3\ln|x-3| + \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

(d) $-\dfrac{1}{12}\cos^3(4x) + \dfrac{1}{20}\cos^5(4x) + C$

(e) $\dfrac{5\pi}{6}$

(f) $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + C$

2. (a) $\dfrac{1}{2}$

(b) 1

3. $\dfrac{5}{6}$

4. $y = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$

5. (a) $\dfrac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 100 \qquad y(5) = 60$

(b) $y(t) = 100\left(\dfrac{3}{5}\right)^{t/5}$

(c) 36 mg

6. (a) La suite diverge comme elle oscille entre $e^{1/2}$ et $-e^{1/2}$.

(b) La suite converge vers 0

7. 2

8. $-\dfrac{39}{56}$

9. (a) La série diverge par le Test de Divergence.

(b) La série converge par le critère de d'Alembert (test du Ratio).

(c) La série diverge par le Test de Comparaison Directe.

(d) La série converge par le Test des Séries Alternées.

10. $R =$ 2 et I.C.$= (-3, 1]$

11. (a) $\ln 2 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$ avec $R = 2$

(b) $C + \ln 2 \cdot \dfrac{x^3}{3} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+4}}{2^{n+1}\cdot(n+1)(n+4)}$

12. $xe^{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$