Mis à jour pour l'automne 2025

1. Évaluez les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int (x^2 - 2x)e^{x/3}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\csc^2(x)}{\sqrt{4-\cot^2(x)}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{4x+16}{(x-2)(x+1)(x-5)}\,dx$

3. Évaluez $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(3x+1)}\,dx$

2. Évaluez les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\arctan(x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3}$

~~**3.**~~ Établissez l'intégrale qui équivaut à la surface délimitée entre $y = x^2+1$ et $y = x+3$. Ne pas évaluer l'intégrale.

4. Trouvez le volume créé par la rotation de $f(x)$ autour de l'axe des x de $x=0$ à $x=4$, lorsque $f(x)$ est donné comme suit :

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & 0 < x < 2 \\ 2x-2 & 2 \le x \end{cases}$

5. Résolvez l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y}{\csc^2(x)}$ où $y(\pi)=0$. Donnez une solution explicite pour y.

6. Une tasse de café chaud à une température de 80°C est placée dans une pièce dont la température est constante à 20°C. Le café refroidit selon la loi de refroidissement de Newton, qui stipule que le taux de changement de température d'un objet (le café) est proportionnel à la différence de température entre l'objet et son environnement. Cinq minutes plus tard, le café a refroidi à 50°C.

(a) Écrivez une équation différentielle qui modélise le refroidissement du café.

(b) Résolvez l'équation différentielle pour trouver une expression explicite de la température en fonction du temps.

(c) Déterminez la température du café après 10 minutes. Simplifiez votre réponse.

7. Étant donné $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{3^{2n}}$

(a) Montrez que la série converge.

(b) Trouvez la somme de la série.

8. Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent. Justifiez vos réponses.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+4}{3n-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(n^3+1)}{n+1}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)+5}{\sqrt{16n-1}}$

9. Déterminez si les séries suivantes sont ~~absolument~~ convergentes, ~~conditionnellement convergentes~~ ou divergentes. Justifiez vos réponses.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{(n^2+3)e^{2n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10}$

10. Trouvez l'intervalle de convergence de la série de puissances suivante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{4^{n+1}\sqrt{n}}$$

11. Trouvez une représentation en série de puissances pour la fonction et déterminez l'intervalle de convergence pour $f(x) = \dfrac{9}{3x+2}$

12. Trouvez la série de MacLaurin pour $g(x) = \ln(7-x)$ en utilisant des séries connues et déterminez le rayon de convergence.

13. Utilisez la définition d'une série de Taylor pour trouver les trois premiers termes non nuls de la série pour $g(x) = \sqrt{x}$ centrée en $a = 4$.

14. Étant donné que f est continue sur $[0,3]$ et que $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 4$, évaluez l'intégrale définie suivante. Simplifiez votre réponse.

$$\int_1^{e^3} \frac{2+f(\ln(x))}{x}\,dx$$

15. Remplissez les blancs suivants avec le mot *doit*, *peut* ou *ne peut pas*, selon le cas.

(a) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum a_n$ _______________ converger.

(b) Si $a_n > 0$ et $\sum a_n$ converge, alors $\sum (-1)^n a_n$ _______________ converger.

(c) Si la suite $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ...\}$ diverge, alors la suite $\{a_2, a_4, a_6, a_8, ...\}$ _______________ diverger.

Réponses

1. (a) $(3x^2 - 24x + 72)e^{x/3} + C$

(b) $\pi/6$

(c) $\dfrac{2\cos^5(\sqrt{x})}{5} - \dfrac{2\cos^3(\sqrt{x})}{3} + c$

→ (d) $\dfrac{+x}{9\sqrt{4x^2+9}} + c$

(e) $\frac{1}{2}[x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)] + c$

(f) $\frac{-8}{3}\ln|x-2| + 2\ln|x-5| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + c$

2. (a) $-1/2$

(b) 1

3. $\cancel{\int_1^2 x^2 - x - 2\,dx}$ $\cancel{\int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2\,dx}$ 3. $\ln(4/3)$

4. (a) 8π

(b) $\dfrac{112\pi}{3}$

5. $y = -\ln\left(\dfrac{\sin(2x) - 2x + 4 + 2\pi}{4}\right)$

6. (a) $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 20)$

(b) $T = 60\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/5} + 20$

(c) $T = 35°C$

7. (a) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1/3 < 1$ Donc la série converge par le critère de d'Alembert (ratio test)

(b) $-1/36$

8. (a) Diverge par le test de divergence

(b) Converge par le critère de Cauchy (root test)

(c) Diverge par le test de comparaison

9. (a) Diverge par le critère de d'Alembert (ratio test)

(b) Converge ~~conditionnellement~~ par ~~le test de comparaison limite et~~ le test des séries alternées.

10. $[-5, 3)$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n 3^{2+n}}{2^{1+n}}$ quand $|x| < \dfrac{2}{3}$

12. $g(x) = \ln(7) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n n}\right)$ avec $R = 7$

13. $2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + ...$

14. 10

15. (a) peut

(b) doit

(c) peut