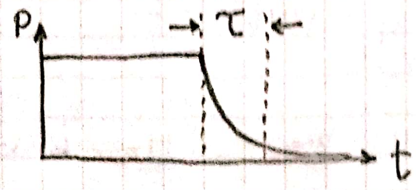
José David Jaimes Hernández 2018100113 Parcial II

(2) a) Todo inicia estudiando el fenómeno de la "relajación" el cuál consiste en someter a un material a un campo eléctrico y dejar que sus dipolos se reorienten gracias a esto. La manera de mirar fácilmente este fenómeno es viendo que ocurre si este campo eléctrico se apaga repentinamente luego de que los dipolos ya estuvieran organizados... Se espera que el momento dipolar o su polarización irá a 0, lo cuál no puede suceder inmediatamente, es decir que los dipolos se alaebricen de nuevo, por ejemplo, debido a la interacción entre los dipolos mismos. Esto es un evento estadístico debido a que el tiempo característico para cada dipolo no es el mismo, pero existe un "promedio" de esto tiempo qué se llamará "tiempo de relajación" τ.



Se espera que P entonces sea de la forma:

$$P(t) = P_0 \cdot \exp -\frac{t}{\tau}$$ Claramente para un sistema simple con dipolos ideales.

Y seguramente surge una relación donde el cambio del estado excitado al estado base de, por ejm, un conjunto de partículas u objetos en descomposición, necesita "ayuda" para superar alguna barrera energética, con una relación de la manera:

$$\frac{dn}{dt} \propto n = -\frac{1}{\tau} \cdot n$$

$$n = n_0 \cdot \exp -\frac{t}{\tau}$$

Cuando se activa un campo eléctrico, nuestro sistema dipolar con distribución aleatoria de orientaciones tiene demasiada energía en relación con lo que podría tener para una mejor distribución de orientación.

Sin embargo, interesa más la dependencia de P con la frecuencia que con el tiempo.

Y con la transformada de Fourier se puede alternar entre $P(\tau)$ y $P(\omega)$;

$$P(\omega) = \int_0^{\infty} P_0 \cdot \exp -\frac{t}{\tau} \cdot \exp -(i\omega t) \cdot dt$$

P_0 es la polarización estática → $P(\omega)$ para $\omega = 0\ Hz$; $i = \sqrt{-1}$

De la integral se obtiene:

$$P(\omega) = \frac{P_0}{\omega_0 + i \cdot \omega}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

$P(\omega)$ es la respuesta de polarización del sistema si lo mueve con un campo eléctrico dado por $E = E_0 \cdot \exp(i\omega t)$.

Se termina entonces con un "complejo de polarización". Conociendo la amplitud $(= E_0)$ y frecuencia ω del campo eléctrico en el material tenemos la polarización.

Para generalizar la ecuación anterior (a todos los fenómenos de polarización dependientes de la frecuencia) y queriendo mantener nuestra ecuación básica que combina la polarización y la intensidad de campo para campos alternos también requerimos que la susceptibilidad χ se vuelva dependiente de la frecuencia tendremos:

$$P(\omega) = \epsilon_0 \cdot \chi(\omega) \cdot E(\omega)$$

la amplitud de $P(\omega)$ será dada por $\chi(\omega)$.

Ahora buscaremos una función dieléctrica compleja en lugar de una susceptibilidad compleja pasando de la polarización P al desplazamiento eléctrico D.

Despejando $X(\omega)$ de la ec. anterior:

$$\varepsilon_0 \cdot X(\omega) = \frac{P(\omega)}{E(\omega)} = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 + i\omega} = X_s \cdot \frac{1}{1 + i \cdot \omega/\omega_0}$$

$X_s = \frac{P_0}{\varepsilon_0}$ es la susceptibilidad estática, osea el valor de frecuencia cero.

Nos interesa la parte real del número, lo descomponemos:

$$X(\omega) = \underbrace{X'(\omega)}_{\text{Parte real}} + i \cdot \overbrace{X''(\omega)}^{\text{Parte imaginaria}}$$

$$\underbrace{\varepsilon_0 \cdot X(\omega)}_{\text{Casi la función dieléctrica}} = \frac{X_s}{1 + (\omega/\omega_0)^2} - i \cdot \frac{X_s \cdot (\omega/\omega_0)}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

Para llegar a la función dieléctrica entra en juego Debye con sus razonamientos:

1. Lo anterior se puede hacer para la densidad de flujo D reemplazando P por D y X por ε_r obteniendo una constante dieléctrica dependiente de la frecuencia compleja $\varepsilon_r(\omega) = X(\omega) + 1$ con ε_s en vez de X_s.

2. Hasta ahora se supuso que a frecuencias altas la polarización es 0: el dipolo no puede seguir y $X(\omega \to 0) = 0$. Lo cual no es necesariamente cierto y lo tendremos en cuenta con un nuevo parámetro: $X(\omega \gg \omega_0) = X_\infty = \varepsilon_r(\omega \gg \omega_0) = \varepsilon_\infty$

2019

3. Como siempre tener $\epsilon_0 \cdot X(\omega)$ ó $\epsilon_0 \cdot \epsilon(\omega)$ se está haciendo engorroso, podemos incluirlo en una nueva "función dieléctrica $\epsilon(\omega)$ del material". Lo que significa que todos los ϵ_i son lo que son como la "constante" dieléctrica relativa y multiplicada por ϵ_0.

Con todo esto tenemos:

$$D(\omega) = \epsilon(\omega) \cdot E(\omega) = \left(\frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + i(\omega/\omega_0)} + \epsilon_\infty \right) \cdot E(\omega)$$

Y de nuevo separamos lo real y lo complejo:

$$\epsilon' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

$$\epsilon'' = \frac{(\omega/\omega_0)(\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

con: $\epsilon'(\omega = 0) = \epsilon_s$
$\epsilon'(\omega = 0) = 0$
$\epsilon'(\omega \to \infty) = \epsilon_\infty$

Los tiempos de relajación típicos están al rededor de 10^{-11} s, corresponde al rango de frecuencias de GHz (cm-ondas) por lo tanto se espera que los materiales típicos que exhiben polarización de orientación (por ejemplo, el agua) muestren un comportamiento peculiar en el rango de microondas del espectro electromagnético.

Seguramente el modelo no funcione muy bien para mezclas de materiales, o materiales complicados con varios dipolos distintos y tiempos de relajación diferentes, donde las cosas se vuelven más complicadas.

También τ varía bastante dependiendo el material y la temperatura, si tiene átomos pesados τ aumenta y viceversa.

b) $\varepsilon_r = \varepsilon_\infty + \underbrace{\dfrac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{1 + j\beta}}$, $\beta = \dfrac{\varepsilon_0 + 2}{\varepsilon_\infty + 2}\,\omega\tau$

$$= \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{1 + j\beta} \frac{(1 - j\beta)}{(1 - j\beta)}$$

$$= \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)(1 - j\beta)}{1 + \beta^2}$$

$$= \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) - j\beta(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{1 + \beta^2}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{1 + \beta^2} \qquad \varepsilon'' = \frac{j\beta(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{1 + \beta^2}$$

Debido a que ε'' es el término asociado a las pérdidas, debemos ver para que frecuencia ε'' se hace máximo.

Tenemos entonces que si hallamos cuando $\frac{d\varepsilon''}{d\omega} = 0$ tendremos el máximo

$$\frac{d\varepsilon''}{d\omega} = \frac{j\beta(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{1+\beta^2}$$

Usaremos β que contiene ω por practicidad

$$0 = \frac{j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)(1+\beta^2) - 2\beta^2 j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{(1+\beta^2)^2} \times \cdots$$

$$\cdots \frac{(\varepsilon_0+2)\tau}{(\varepsilon_\infty+2)}$$

$$0 = \frac{\left[j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)(1+\beta^2) - 2\beta^2 j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)\right](\varepsilon_0+2)\tau}{(1+\beta^2)^2(\varepsilon_\infty+2)}$$

$$0 = \frac{j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) + j\beta^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) - j2\beta^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)(\varepsilon_0+2)\tau}{(1+\beta^2)^2(\varepsilon_\infty+2)}$$

$$\frac{(1+\beta^2)^2(\varepsilon_\infty+2)}{(\varepsilon_0+2)\tau} \cdot 0 = j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) + j\beta^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) - j2\beta^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)$$

$$0 = j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) - j\beta^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)$$

$$0 = j(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)[1 - \beta^2]$$

$$0 = 1 - \beta^2$$

$$\beta = \pm 1 \rightarrow \frac{\varepsilon_0+2}{\varepsilon_\infty+2}\omega\tau = 1 \rightarrow \omega = \frac{\varepsilon_\infty+2}{(\varepsilon_0+2)\tau}$$

la frec. donde el material respondería presentando las mayores pérdidas

d) Por la formulacion de Debay tenemos

$$\varepsilon(\omega, T_{agua}) = \varepsilon_{\infty}(T_{agua}) + \frac{\varepsilon_0(T_{agua}) - \varepsilon_{\infty}(T_{agua})}{1 - i\omega\tau(T_{agua})}$$

con: i) $\varepsilon_0(T_{agua}) = a_1 + b_1 T_{agua} + c_1 T_{agua}^2 - d_1 T_{agua}^3$

ii) $\varepsilon_{\infty}(T_{agua}) = \varepsilon_0(T_{agua}) - a_2 e^{-b_2 T_{agua}}$

iii) $\tau(T_{agua}) = c_2 e^{\frac{d_2}{T_{agua} + T_0}}$

donde $a_1 = 87{,}9$

$b_1 = 0{,}404\ K^{-1}$

$c_1 = 9{,}59 \times 10^{-4}\ K^{-2}$

$d_1 = 1{,}33 \times 10^{-6}\ K^{-3}$

$a_2 = 80{,}7$

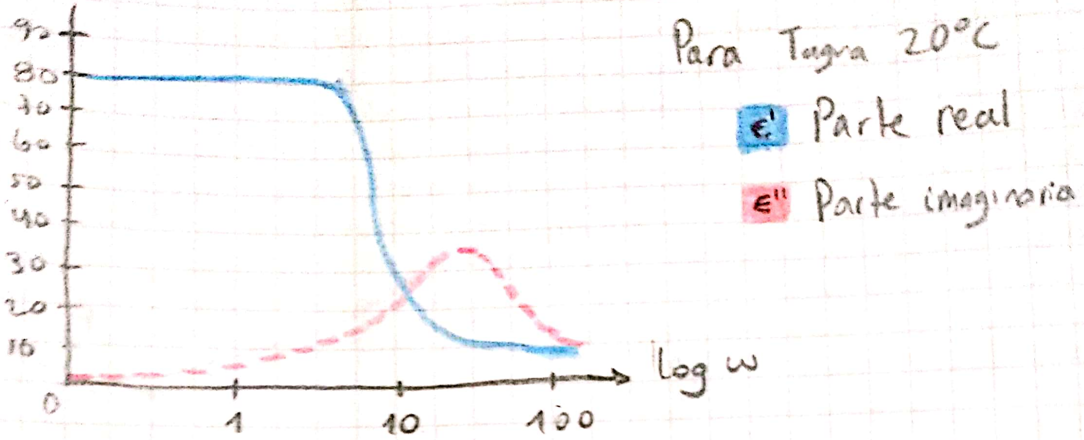
$b_2 = 4{,}42 \times 10^{-3}\ K^{-1}$

$c_2 = 1{,}37 \times 10^{-13}\ s$

$d_2 = 651\ °C$

$T_0 = 133\ °C$

T_{agua} = temperatura del agua en °C



Según un artículo que encontre sobre la dependencia del ε_r a la temperatura y frecuencia decía que la mayoría de pérdidas dieléctricas ocurren entre 5 GH y 100GHz para varias temperaturas.

Y la mayoría de Hornos microondas funcionan a 2,45 GHz, muy por debajo de la región de pérdidas máximas. Lo cual tiene todo el sentido del mundo porque así se aseguran de que la radiación no sea totalmente absorbida por la primera capa de agua que encuentra, sino que puede penetrar aún más en el alimento, calentándolo más uniformemente.

① Hallamos la impedancia de cada medio, tenemos:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,73\ \Omega$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{9\varepsilon_0}} = 125,57\ \Omega$$

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 188,36\ \Omega$$

1 | 2 | 3

R: reflexión

T: Transmisión

Tendremos varias reflexiones y transmisiones de onda en este problema, de la siguiente manera:

	Para el medio 1	medio 2	medio 3
$t=1$	→ Inicia E_0	→ $E_0 T_1$ Primera transmisión	→ $E_0 T_1 T_2$ Segunda transmisión
$t=2$	$E_0 R_1$	$E_0 T_1 R_2$	
$t=3$	$E_0 T_1 T_3 R_2$	$E_0 T_1 R_2 R_3$	→ $E_0 T_1 T_2 R_2 R_3$
$t=4$	$E_0 T_1 T_3 R_1 R_2 R_3$	$E_0 T_1 R_1 R_2 R_3$	
$t=5$		$E_0 T_1 R_1 R_2 R_2 R_3$	→ $E_0 T_1 T_2 R_1 R_2 R_2 R_3$
	$E_0 T_1 T_3 R_1 R_2 R_1 R_2 R_3$	$E_0 T_1 R_1 R_2 R_1 R_2 R_3$	

Superposiciones

1) Para las reflexiones y transmisiones del medio 1 tenemos

$$E_0 T_1 T_2 R_1 (1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots) + E_0 R_1 + E_0$$

2) Para las transmisiones del medio 1 al medio 2 y reflexiones dentro de este, tenemos:

$$E_0 T_1 (1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 \dots)$$

3) Para las reflexiones en el medio 2 y transmisiones del 2 al medio 1 tenemos:

$$E_0 T_1 R_1 (1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots)$$

4) Para transmisiones del medio 2 al medio 3 (en el medio 3) tenemos:

$$E_0 T_1 T_3 (1 + R_1 R_2 + (R_1 R_2)^2 + \dots)$$

Pero para hallar estas superposiciones primero debemos hallar los indices de reflexión y transmisión:

$$R_{12} = \frac{(n_2 - n_1)}{(n_2 + n_1)} = \frac{(125,57 - 376,73)}{(125,57 + 376,73)} = -0,5 = R_1$$

$$R_{23} = \frac{(n_2 - n_1)}{(n_2 + n_1)} = 0,2 = R_2$$

$$R_{21} = \frac{(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)} = 0,2 = R_3$$

2010

$$T_{12} = \frac{2n_2}{(n_2+n_1)} = 0{,}5 = T_1$$

$$T_{23} = \frac{2n_3}{(n_3+n_2)} = 1{,}2 = T_2$$

$$T_{21} = \frac{2n_1}{(n_1+n_2)} = 1{,}5 = T_3$$

Ahora retomando la superposición tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n = \frac{1}{1-R_1R_2}$$

$$= \frac{1}{1-0{,}1}$$

$$= \frac{1}{0{,}9}$$

Entonces tenemos:

1. $E_1 = E_0[(0{,}5)(1{,}5)^{(0{,}2)}(1/0{,}99) - 0{,}5+1]$

$$E_1 = \cdot E_0 \cos(wt-kz) + \frac{1}{3} E_0 \cos(wt+kz)$$

$$E_1 = E_0\, e^{jwt}\left(e^{-jkz} - \frac{1}{3} e^{jkz}\right)$$

$$E_1 = \cos(kz) - i\,\mathrm{sen}(kz) - \frac{1}{3}\cos(kz) - \frac{1}{3} i\,\mathrm{sen}(kz)$$

$$E_1 = \frac{2}{3}\cos(kz) - i\frac{4}{3}\mathrm{sen}(kz)$$

$$|z| = \sqrt{(2/3)^2 + (4/3)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-4/3\, sen(kw)}{2/3 \cos(kw)}\right) = \tan^{-1}(-1/2 \tan(kw))$$

$$E_1\, Re\left\{\frac{2\sqrt{5}}{3} E_0 e^{jwt}\left(e^{j(wt+\phi)}\right)\hat{e}_x\right\}$$

$$B = \frac{E_1'}{c} = Re\left\{\frac{2\sqrt{5}}{3c}\left(E_0 e^{jwt}\left(e^{i(wt+\phi)}\right)\hat{e}_y\right)\right\}$$

(2) $$E_2 = \left(\left(0{,}5 \cdot \frac{1}{0{,}9}\right) E_0 + (0{,}5)(0{,}2)\frac{1}{0{,}9}\right) E_0$$

$$E_2 = \frac{5}{9} E_0 \cos(wt - 3kz) + \frac{1}{9} E_0 \cos(wt + 3kz)$$

$$E_2 = E_0 e^{jwt}\left(\frac{5}{9} e^{-j3kz} + \frac{1}{9} e^{j3kz}\right)\hat{e}_x$$

$$E_2 = \frac{5}{9}\cos(3kz) - \frac{5}{9} i\, sen(3kz) + \frac{1}{9}\cos(3kz) + \frac{1}{9} i\, sen(3kz)$$

$$E_2 = \frac{6}{9}\cos(3kz) - \frac{4}{9} i\, sen(3kz)$$

$$|z| = \sqrt{(6/9)^2 + (4/9)^2} = \frac{2\sqrt{13}}{9}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-4/9\, sen(3kz)}{6/9 \cos(3kz)}\right) = (-2/3 \tan(3kz))$$

2019

$$E_2 = Re\left\{\frac{2\sqrt{13}}{9} E_0\, e^{j\omega t} (e^{j(\omega t\, \phi)})\, \hat{e}_x.\right.$$

$$B = R_e\left\{\frac{2\sqrt{13}}{9c} E_0 e^{j\omega t} (e^{j(\omega t + \phi)})\, \hat{e}_y\right.$$

3 $E_3 = E_0 (0,5)(1,2)\left(\frac{1}{0,9}\right)$

$$E_3 = \frac{2}{3} E_0 \cos(\omega t - kz)\, \hat{e}_x$$

$$E_3 = E_0 \frac{2}{3} e^{j\omega t} (e^{jkz})\, \hat{e}_x$$

$$E_3 = \frac{2}{3}\cos(\omega t - kz) + i\frac{2}{3}\operatorname{sen}(\omega t - kz)$$

$$|z| = \sqrt{(2/3)^2 + (2/3)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2/3\ \operatorname{Sen}(\omega t - kz)}{2/3\ \cos(\omega t - kz)}\right) = \omega t - kz$$

$$k = 2\pi \rightarrow \phi = \omega t - 2\pi z$$

$$E_3 = Re\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3} E_0 e^{j\omega t} (e^{j(\omega t + \phi)})\, \hat{e}_x\right\}$$

$$B = Re\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3c} E_0 e^{j\omega t} (e^{j(\omega t + \phi)})\, \hat{e}_y\right\}$$

3) Hallamos la constante de propagación

De la ecuación de onda para $\vec{E}$:

$$\nabla^2 \vec{E} + \underbrace{\omega^2 \mu \varepsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}_{\text{Cuadrado de la constante de propagación } \gamma} \vec{E} = 0$$

y como sabemos que $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \tan\delta$ tenemos:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1 - j\tan\delta)} \quad , \tan\delta = 0,1 \quad \mu = \mu_0 \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \underbrace{\varepsilon_r}_{3}$$

$$\gamma = j\frac{\overset{\to 2\pi f}{\omega}}{1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{3(1 - j(0,1))}$$

$$\gamma = j\frac{2\pi(3\times10^{10})}{3\times10^8}\sqrt{3(1-j(0,1))}$$

$$\gamma = 54,34 - j1089,63 = \alpha + j\beta$$

Por otro lado tenemos a la impedancia del medio:

$$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = 217,50$$

Tenemos que la densidad de potencia que incide está dada por:

$$S_i = \mathrm{Re}\left\{ \vec{E}_{i(z=0)} \times \vec{H}_i(z=0)\ \hat{z} \right\}$$

$$S_i = \mathrm{Re}\left\{ \frac{(\vec{E}_i(z=0))^2}{\eta} \right\}$$

$$S_i \approx 45{,}98 \, W/m^2$$

Ahora necesitamos $\vec{E}_r$ para calcular S_r

$$\vec{E}_r = \Gamma \, \vec{E}_i(z=l)\, e^{\gamma(z-l)} \qquad z = l = 20\text{cm}$$

en $z=20$ vemos un conductor perfecto y el coeficiente de reflexión $\Gamma = -1$

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_i(z=20)\, e^{\gamma(z-l)}$$

Entonces:

$$S_r = 6{,}038 \times 10^{-18} \, W/m^2$$

b) La potencia de entrada S_{in} es

$$S_{in} = Re\left\{\vec{E}_{(z=0)} \times H^{*}_{(z=0)}\, \hat{z}\right\}$$

donde E es la superposición de E_i y E_r en $z=0$

$$\vec{E}_{(z=0)} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 100(1-e^{-2\gamma l})\,\hat{x}$$

$$H^{*}_{(z=0)} = \frac{100}{\eta}(1+e^{-2\gamma l})\,\hat{y}$$

$\therefore S_{in} = 45{,}987\ W/m^2$

En el mundo teórico se diría que no son iguales y no se cumple que $S_{in} = S_i - S_r$

Pero en el mundo de la práctica es muy buena aproximación decir que se cumple $S_{in} = S_i - S_r$