

Universidad Mariano Gálvez de Guatemala

Facultad de Ingeniería

Ingeniería en sistemas de Información

Estadística 1

Sección "A"

Ingeniero Marvin Roberto Salguero



**Distribuciones de probabilidad
continuas y discretas**

NOMBRE	NUMERO DE CARNE
Víctor Rene Flores López	7691-22-11359
Wualter Augusto Hernández	7691-21-13807
Brayan Ronaldo Solís Del Cid	7691-22-19473
Oliver Alexander Pérez Silvestre	7691-22-7225
Joshua Alexandro López Gutiérrez	7691-22-3915

Guatemala 22 de octubre de 2023

INDICE

Introducción	4
Distribuciones de probabilidad continuas y discretas	5
¿Qué es una distribución continua?	5
Ejemplo de la distribución de pesos	5
Gráfica de distribución del peso de hombres adultos.....	6
Algunos modelos de distribuciones continuas.....	6
Distribución gamma	6
Gráfica de la distribución gamma	7
Características de la distribución gamma.....	8
La Distribución t de Student	11
Distribuciones continuas MinStable	13
La Distribución Rayleigh	15
Distribución Stable	17
Distribución Regresión logística.....	18
Distribución Moyal	22
Distribución normal	22
Distribución Log-Logística	27
Distribución Nakagami (Nakagami-m).....	31
Distribución De Pareto	33
Distribución Sech.....	39
Distribución Suzuki.....	41
Distribución De Poisson	42
Distribución Log Normal.....	44
Distribución beta no central.....	49
Distribución De Pearson.....	53
Distribución Singh Maddala	56
Distribución triangular	57
Distribución Max Stable	60
Distribución Non Central Chi Square.....	61
Distribución Pert	63
Distribución Skew Normal	64

Distribución Tukey-Lambda	66
Distribución Maxwell-Boltzmann	68
Distribucion NoncentralFRatic o Distribucion F no central	70
Distribución U-Power	71
Distribución Stable	73
Distribución Uniforme	77
Distribución de arroz (RICE)	81
Distribución t de Student no central	81
Distribuciones de probabilidad discretas	82
Distribución uniforme discreta (a,b)	82
Distribución binomial (n,p)	83
Distribución Poisson (λ)	85
Distribución geométrica (p)	88
Distribución binomial negativa (r,p)	90
Distribución hipergeométrica (N,R,n)	92
RESUMEN DISTRIBUCIONES CONTINUAS	94
RESUMEN DISTRIBUCIONES DISCRETAS	95
Conclusión	96
Recomendaciones	97
Bibliografía	98

Introducción

Las distribuciones de probabilidad son modelos matemáticos que se utilizan para describir la probabilidad de ocurrencia de diferentes eventos. Estas distribuciones se pueden clasificar en dos tipos: continuas y discretas. A continuación, se describen cada una de ellas y sus aplicaciones en el campo de la ingeniería y otras áreas relacionadas

Distribuciones de probabilidad continuas y discretas

Las distribuciones de probabilidad son distribuciones de probabilidad continuas o distribuciones de probabilidad discretas, dependiendo de si definen probabilidades para variables continuas o discretas.

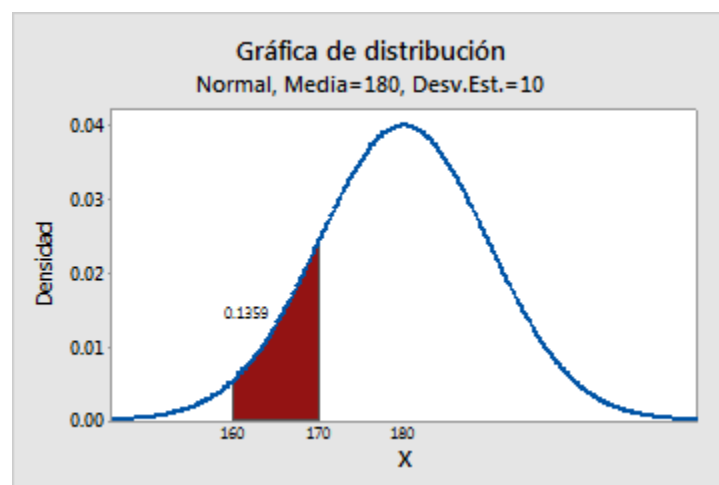
¿Qué es una distribución continua?

Una distribución continua describe las probabilidades de los posibles valores de una variable aleatoria continua. Una variable aleatoria continua es una variable aleatoria con un conjunto de valores posibles (conocido como rango) que es infinito y no se puede contar.

Las probabilidades de las variables aleatorias continuas (X) se definen como el área por debajo de la curva. Por lo tanto, solo los rangos de valores pueden tener una probabilidad diferente de cero. La probabilidad de que una variable aleatoria continua equivalga a algún valor siempre es cero.

Ejemplo de la distribución de pesos

La distribución normal continua puede describir la distribución del peso de hombres adultos. Por ejemplo, usted puede calcular la probabilidad de que un hombre pese entre 160 y 170 libras.



El área sombreada debajo de la curva en este ejemplo representa el rango de 160 a 170 libras. El área de este rango es 0.136; por lo tanto, la probabilidad de que un hombre seleccionado aleatoriamente pese entre 160 y 170 libras es de 13.6%. Toda el área por debajo de la curva equivale a 1.0.

Sin embargo, la probabilidad de que X sea exactamente igual a algún valor siempre es cero, porque el área por debajo de la curva en un punto individual, que no tiene anchura, es cero. Por ejemplo, la probabilidad de que un hombre pese exactamente 190 libras es cero. Podría calcular una probabilidad diferente de cero de que un hombre pese más de 190 libras, menos de 190 libras o entre 189.9 y 190.1 libras, pero la probabilidad de que pese exactamente 190 libras es cero.

Algunos modelos de distribuciones continuas

Distribución gamma

Es una distribución de probabilidad continua definida por dos parámetros característicos, α y λ . Es decir, la distribución gamma depende del valor de sus dos parámetros: α es el parámetro de forma y λ es el parámetro de escala.

El símbolo de la distribución gamma es la letra griega mayúscula Γ . Por lo tanto, si una variable aleatoria sigue una distribución gamma se escribe de la siguiente manera:

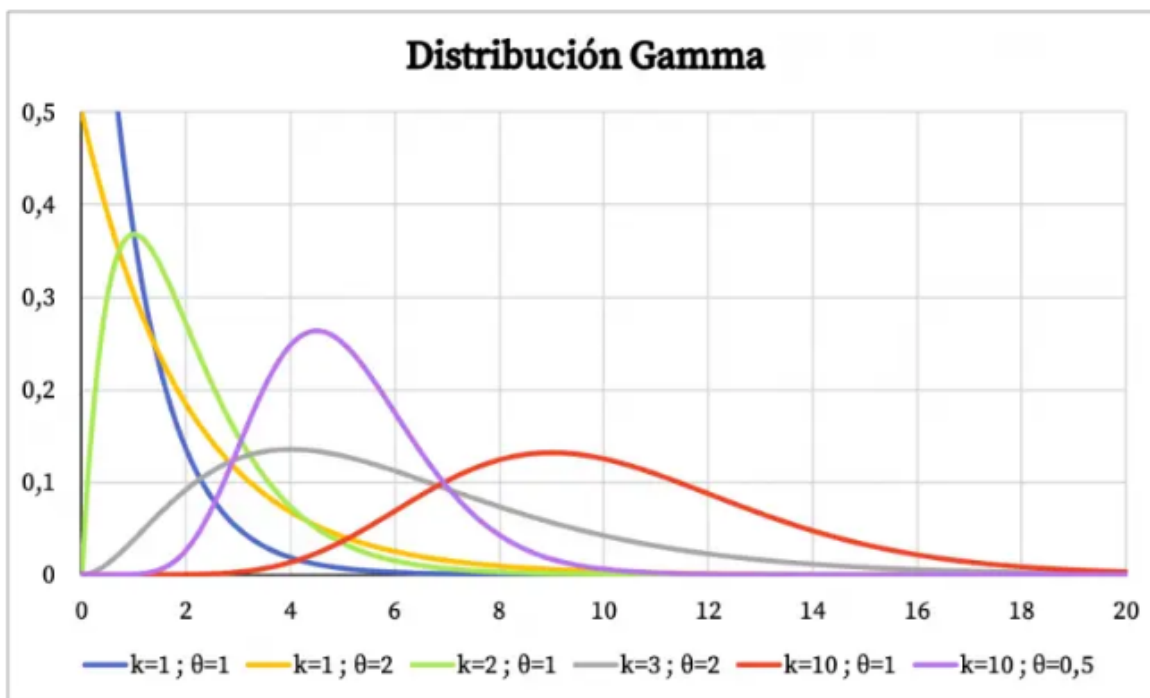
$$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

La distribución gamma también se puede parametrizar usando el parámetro de forma $k=\alpha$ y el parámetro inverso de escala $\theta=1/\lambda$. En cualquier caso, los dos parámetros que definen la distribución gamma son números reales positivos.

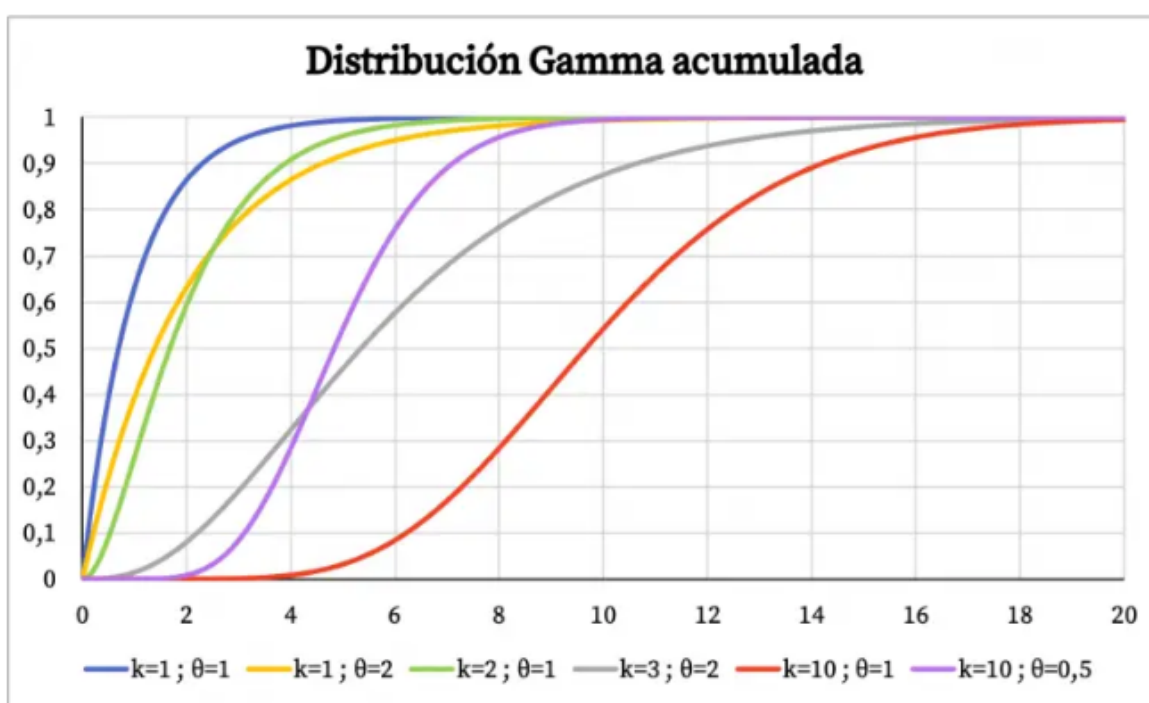
En general, la distribución gamma se utiliza para modelar conjuntos de datos que son asimétricos a la derecha, de manera que existe una mayor concentración de datos en la parte izquierda de la gráfica. Por ejemplo, la distribución gamma se usa para modelar la fiabilidad de componentes eléctricos.

Gráfica de la distribución gamma

La gráfica de la distribución gamma depende de los valores de sus parámetros característicos. A continuación, puedes ver cómo varía la función de densidad de la distribución gamma según el parámetro de forma y el parámetro de escala.



Por otro lado, abajo puedes ver la gráfica de la función de probabilidad acumulada de la distribución gamma:



Características de la distribución gamma

A continuación, vamos a ver cuáles son las características de la distribución gamma. La gráfica de la distribución gamma queda definida completamente por sus dos parámetros característicos: α es el parámetro de forma y λ es el parámetro de escala.

$$\alpha, \lambda > 0$$

El dominio de la distribución gamma son todos los números positivos.

$$x \in (0, +\infty)$$

La media de la distribución gamma es igual al cociente entre el parámetro de forma y el parámetro de escala, esto es, α/λ .

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

La varianza de la distribución gamma es equivalente al parámetro de forma partido por el cuadrado del parámetro de escala.

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Para valores de α menores que 1, la moda es 0. Pero si α es igual o mayor que 1, la moda de la distribución gamma se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$Mo = 0 \quad \text{para } \alpha < 1$$

$$Mo = \frac{\alpha - 1}{\lambda} \quad \text{para } \alpha \geq 1$$

La fórmula de la función de densidad de la distribución gamma es la siguiente:

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

Donde Γ es la función gamma, que se define como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

La fórmula de la distribución acumulada de una variable aleatoria definida por una distribución gamma es la siguiente:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\lambda(\lambda y)^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)} dy$$

Si el parámetro de forma α es 1, entonces la distribución gamma es equivalente a una distribución exponencial con el mismo parámetro de escala λ .

Cuando el parámetro de escala λ es un medio, entonces la distribución gamma es un caso particular de la distribución chi-cuadrado.

$$X \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ con } n \in \mathbb{N} \longrightarrow X \sim \chi_n^2$$

Ejemplo

El número de pacientes que llegan a la consulta de un médico sigue una distribución de Poisson de media 3 pacientes por hora. Calcular la probabilidad de que transcurra menos de una hora hasta la llegada del segundo paciente. Debe tenerse en cuenta que la variable aleatoria “tiempo que transcurre hasta la llegada del segundo paciente” sigue una distribución Gamma (6, 2).

Datos:

Distribución gamma (a, p)

Parámetros:

a: Escala

6

p: Forma

2

Resultados:

Punto x	Cola izquierda $Pr[X \leq x]$	Cola derecha $Pr[X > x]$
1	0,9826	0,0174

Media	Mediana	Moda	Varianza	Asimetría	Curtosis
0,3333	0,2797	0,1667	0,0556	1,4142	3

La probabilidad de que transcurra menos de una hora hasta que llegue el segundo paciente es 0,98.

Ejemplo

Suponiendo que el tiempo de supervivencia, en años, de pacientes que son sometidos a una cierta intervención quirúrgica en un hospital sigue una distribución gamma con parámetros $a = 0,81$ y $p = 7,81$, interesa saber:

1. El tiempo medio de supervivencia.
2. Los años a partir de los cuales la probabilidad de supervivencia es menor que 0,1.

Datos:

Distribución gamma (a, p)

Parámetros:

a: Escala

0,81

p: Forma

7,81

Cola izquierda $Pr[X \leq x]$:

0,9

Cola derecha $Pr[X > x]$:

0,1

Resultados:

Punto x
14,2429

Media	Mediana	Moda	Varianza	Asimetría	Curtosis
9,642	9,2337	8,4074	11,9037	0,7157	0,7682

El tiempo medio de supervivencia es de, aproximadamente, 10 años, y a partir de 14,2 años, la probabilidad de supervivencia es menor de 0,1.

La Distribución t de Student

Desarrollada por el estadístico británico William Sealy Gosset en el siglo XX. Debido a restricciones en la publicación de datos de la empresa cervecera Guinness, donde trabajaba Gosset, él desarrolló esta distribución bajo el seudónimo "Student". Esta distribución se utiliza ampliamente en estadísticas e inferencia debido a su relevancia en la estimación y comparación de medias de poblaciones, especialmente cuando se trabaja con muestras pequeñas.

Cuando el tamaño de la muestra (n) es grande, la Distribución t se aproxima a la Distribución Normal Estándar (Z). Esto significa que, para muestras grandes, las pruebas y los intervalos de confianza basados en la Distribución t y la Distribución

Z tienden a dar resultados similares. Sin embargo, en muestras pequeñas, la Distribución t es esencial para una inferencia estadística precisa.

La Distribución t se utiliza en pruebas de hipótesis para comparar medias de dos muestras, evaluar la significancia de coeficientes de regresión en análisis de regresión y realizar otras pruebas estadísticas. Por ejemplo, la prueba t de Student es una de las pruebas más comunes utilizadas para determinar si hay una diferencia significativa entre las medias de dos grupos.

La Distribución es relevante en una amplia gama de campos, desde la ciencia y la ingeniería hasta las ciencias sociales y la medicina. Se utiliza siempre que sea necesario hacer inferencias a partir de muestras pequeñas o cuando se desconoce la varianza poblacional.

Ejemplo

La distribución t de Student se aproxima a la normal a medida que aumentan los grados de libertad. 1. Calcular, para una distribución $N(0,1)$, el punto que deja a la derecha una cola de probabilidad 0,05. 2. Calcular, para una distribución t de Student, la probabilidad de que la variable tome un valor a la derecha de ese punto. Tomar como grados de libertad sucesivamente $n = 10$ y $n = 150$. Para el primer apartado hay que seleccionar en la lista de distribuciones la normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Datos:

Distribución normal (μ , σ)
Parámetros:

μ : Media

0

σ : Desviación estándar

1

Cola izquierda $Pr[X \leq x]$:

0,95

Cola derecha $Pr[X > x]$:

0,05

Dos colas $1-Pr[|X| \leq x]$:

0,1

Resultados:

Punto x
1,6449

Media	Mediana	Moda	Varianza	Asimetría	Curtosis
0	0	0	1	0	0

En el segundo apartado se ejecutará dos veces Epidat 4: la primera vez para una distribución t de Student con 10 grados de libertad y la segunda vez con 150 grados de libertad.

Datos:

Distribución t de Student (n)

Parámetros:

n: Grados de libertad10

Resultados:

Punto x	Cola izquierda $Pr[X \leq x]$	Cola derecha $Pr[X > x]$	Dos colas $1 - Pr[X \leq x]$
1,6449	0,9345	0,0655	0,131

Media	Mediana	Moda	Varianza	Asimetría	Curtosis
0	0	0	1,25	0	1

Datos:

Distribución t de Student (n)

Parámetros:

n: Grados de libertad150

Resultados:

Punto x	Cola izquierda $Pr[X \leq x]$	Cola derecha $Pr[X > x]$	Dos colas $1 - Pr[X \leq x]$
1,6449	0,949	0,051	0,1021

Media	Mediana	Moda	Varianza	Asimetría	Curtosis
0	0	0	1,0135	0	0,0411

Se aprecia claramente que, al aumentar los grados de libertad de la t de Student, la probabilidad se acerca a la calculada con la distribución normal.

Distribuciones continuas MinStable

Modelado de Valores Mínimos, las distribuciones MinStable se utilizan principalmente para modelar los valores mínimos en un conjunto de datos. Esto es útil en situaciones en las que estamos interesados en entender y predecir eventos extremos o inusuales, como inundaciones catastróficas, temperaturas mínimas récord o caídas drásticas en los precios de las acciones.

Características de los Parámetros:

El parámetro de forma (α) determina la forma de la cola de la distribución. Un α alto hace que la cola sea más pesada, lo que significa que los valores mínimos extremos son más probables de ocurrir.

El parámetro de escala (β) controla la ubicación y la dispersión de la distribución. A medida que β aumenta, la distribución se desplaza hacia la derecha y se vuelve más ancha.

Aplicaciones en Hidrología: En hidrología, las distribuciones MinStable se utilizan para modelar eventos como crecidas mínimas de ríos. Esto es esencial para la gestión de recursos hídricos, la planificación de infraestructuras y la evaluación de riesgos de inundaciones.

Climatología y Meteorología: En climatología y meteorología, las distribuciones MinStable son útiles para modelar temperaturas mínimas extremas, lo que ayuda en la predicción de eventos climáticos inusuales y peligrosos, como olas de frío extremo.

Finanzas y Gestión de Riesgos: En finanzas, estas distribuciones se aplican a los precios de activos para modelar los precios mínimos históricos y calcular riesgos extremos en el mercado de valores. Esto es importante para la gestión de carteras y la toma de decisiones financieras.

Estimación de Parámetros: Para utilizar la distribución MinStable en análisis de datos reales, se deben estimar los parámetros α y β a partir de los datos observados. Esto se puede hacer mediante técnicas de ajuste de distribuciones, como el método de máxima verosimilitud.

Software y Herramientas: Se pueden utilizar programas de software estadístico como R, Python con bibliotecas como SciPy, o software especializado en análisis de extremos para trabajar con distribuciones MinStable. Estos programas permiten ajustar la distribución a los datos, calcular probabilidades y realizar análisis detallados.

La Distribución Rayleigh

Es una distribución de probabilidad continua que se utiliza combinada para modelar magnitudes de valores absolutos de vectores con componentes aleatorios que siguen una distribución normal (gaussiana).

Esta distribución toma su nombre del británico Lord Rayleigh, quien la utilizó por primera vez para analizar la distribución de la intensidad de la luz de una lámpara de arco. La Distribución Rayleigh se caracteriza por su función de densidad de probabilidad, que está definida de la siguiente manera: $f(x; \sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2 / (2\sigma^2)}$ Donde: - x es la variable aleatoria no negativa. σ es el parámetro de escala, que determina la dispersión de la distribución. Algunas características claves de la Distribución Rayleigh incluyen:

Forma de Campana: tiene una forma de campana y es asimétrica positiva (sesgada hacia la derecha). La mayoría de los valores se concentran en la parte inferior de la campana.

La Distribución Rayleigh se utiliza en una variedad de campos, como comunicaciones inalámbricas (para modelar el desvanecimiento de señales), análisis de confiabilidad (para estimar la vida útil de productos), ingeniería (para modelar errores de medición) y más. Amplitud de Señales: En comunicaciones, es común usar la Distribución Rayleigh para modelar la variabilidad en la amplitud de una señal inalámbrica debido a interferencias.

Ejemplo

La vida útil, en años, de cierto tipo de instrumental médico quirúrgico sigue una distribución de Weibull con parámetros $a=2$ y $b=1,75$. 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el instrumental dure menos de 3 años? 2. Representar la función de densidad y de distribución de su vida útil.

Datos:

Distribución Weibull (a, b)

Parámetros:

a: Forma 2
b: Escala 1,75

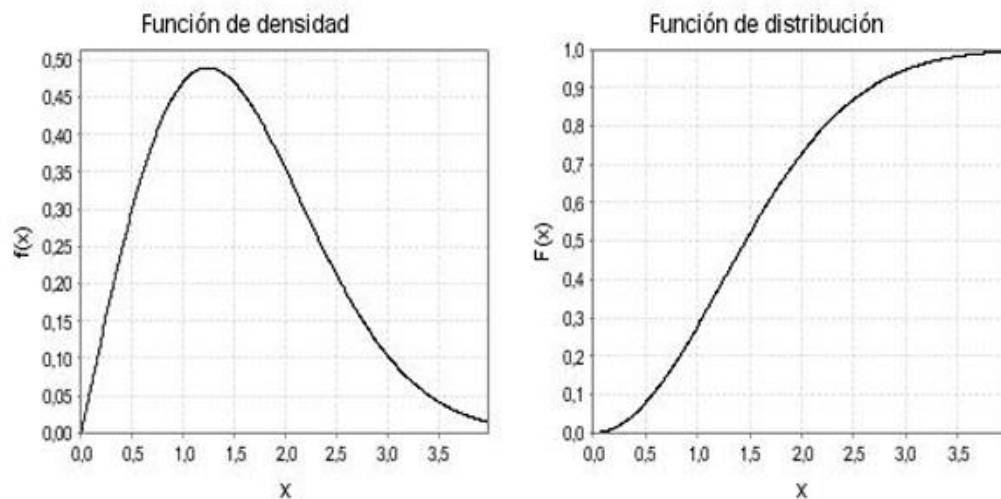
Resultados:

Punto x	Cola izquierda $Pr[X \leq x]$	Cola derecha $Pr[X > x]$
2	0,7291	0,2709

Media	Mediana	Moda	Varianza	Asimetría	Curtosis
1,5509	1,457	1,2374	0,6572	0,6311	0,2451

La probabilidad de que el instrumental dure menos de 3 años, es decir que dure 2 años o menos, es 0,73.

Las funciones de densidad y distribución de la vida útil del instrumental médico son:

Gráficos:

Distribución Stable

Las Distribuciones Stable se originaron a finales del siglo XIX a través de los trabajos de matemáticos y estadísticos como Augustin Cauchy y Hendrik Lorentz. El término "estable" refleja su propiedad de mantener su forma subyacente bajo ciertas transformaciones.

Colas Pesadas y Eventos Extremos: Las Distribuciones Stable son especialmente relevantes en aplicaciones donde las colas pesadas son críticas, lo que significa que pueden manejar valores extremos o atípicos. Esto es fundamental en la modelización de eventos raros en finanzas, climatología, procesos de comunicación y otras áreas donde los eventos extremos pueden tener un impacto significativo.

Parámetro de Estabilidad: El parámetro α es central en las Distribuciones Estable. Cuando $\alpha < 2$, la distribución no tiene media ni varianza definidas, lo que la hace especialmente adecuada para modelar situaciones con variabilidad extrema y falta de regularidad estadística.

Aplicaciones en Finanzas: En el ámbito financiero, las Distribuciones Stable se utilizan para modelar rendimientos de activos, ya que pueden capturar mejor las colas pesadas y los movimientos extremos en los precios de los activos financieros. Esto es esencial para la gestión de riesgos y la valoración de opciones financieras.

Estimación de Parámetros: Estimar los parámetros de una Distribución Estable a partir de datos observados puede ser un desafío. Se utilizan técnicas como el método de máxima verosimilitud o el método de momentos para estimar α , b , γ , δ .

Propiedades Matemáticas: Las Distribuciones Stable tienen propiedades matemáticas interesantes, como la propiedad de estabilidad, que significa que la suma de variables aleatorias independientes con distribuciones Stable también sigue una distribución Stable. Esto hace que las Distribuciones Stable sean útiles en modelos matemáticos y estadísticos complejos.

Distribución Cauchy: La Distribución Cauchy es un caso especial de las Distribuciones Stable con $\alpha=1$. Es conocida por su falta de media y varianza, lo que puede dar lugar a resultados inesperados en análisis estadísticos.

Teoría de Valores Extremos: Las Distribuciones Stable se utilizan en la teoría de valores extremos, que se centra en el estudio y la modelización de eventos raros y extremos. Esto es fundamental en la evaluación de riesgos y la toma de decisiones en situaciones con alta incertidumbre.

Ejemplo

Supongamos que tienes una moneda justa, y cada vez que lanzas la moneda, avanzas un paso hacia adelante si sale cara y retrocede un paso si sale cruz. Realiza 10 lanzamientos de la moneda y registra los resultados para realizar una caminata aleatoria. Supongamos que comienzas en el punto cero. Después de 10 lanzamientos, ¿en qué posición te encuentras? ¿Cuál es la probabilidad de estar a una distancia específica del punto de inicio?

Este ejercicio ilustra un proceso de caminata aleatoria simple, que es un ejemplo de un proceso estocástico. Las caminatas aleatorias y los procesos de Lévy son fundamentales en la teoría de probabilidad y se utilizan en una variedad de aplicaciones, desde la modelización de precios de activos financieros hasta la descripción de fenómenos físicos.

Distribución Regresión logística

En estadística, la regresión logística es un tipo de análisis de regresión utilizado para predecir el resultado de una variable categórica (una variable que puede adoptar un número limitado de categorías) en función de las variables independientes o predictoras. Es útil para modelar la probabilidad de un evento ocurriendo en función de otros factores. El análisis de regresión logística se enmarca en el conjunto de Modelos Lineales Generalizados (GLM por sus siglas en inglés) que usa como función de enlace la función logit. Las probabilidades que

describen el posible resultado de un único ensayo se modelan como una función de variables explicativas, utilizando una función logística.

La regresión logística es usada extensamente en las ciencias médicas y sociales. Otros nombres para regresión logística usados en varias áreas de aplicación incluyen modelo logístico, modelo logit, y clasificador de máxima entropía.

La regresión logística analiza datos distribuidos binomialmente de la forma:

$$Y_i \sim B(p_i, n_i), \text{ para } i = 1, \dots, m,$$

donde los números de ensayos Bernoulli n_i son conocidos y las probabilidades de éxito p_i

son desconocidas. Un ejemplo de esta distribución es el porcentaje de semillas (p_i) que germinan después de que n_i son plantadas.

El modelo es entonces obtenido a base de lo que cada ensayo (valor i) y el conjunto de variables explicativas/independientes puedan informar acerca de la probabilidad final. Estas variables explicativas pueden pensarse como un vector X_i k -dimensional y el modelo toma entonces la forma

$$p_i = E\left(\frac{Y_i}{n_i} \middle| X_i\right).$$

Los logits de las probabilidades binomiales desconocidas (*i.e.*, los logaritmos de la razón de momios) son modeladas como una función lineal de los X_i .

$$\text{logit}(p_i) = \ln\left(\frac{p_i}{1 - p_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_k x_{k,i}.$$

elemento particular de X_i puede ser ajustado a 1 para todo i obteniéndose una constante independiente en el modelo. Los parámetros desconocidos β_j son usualmente estimados a través del método de máxima verosimilitud.

La interpretación de los estimados del parámetro β_j es como los efectos aditivos en el logaritmo de la razón de momios para una unidad de cambio en la j ésima variable explicativa. En el caso de una variable explicativa dicotómica, por ejemplo, género, e^{β} es la estimación de la razón de momios (odds ratio) de tener el resultado para, por decir algo, hombres comparados con mujeres. El modelo tiene una formulación equivalente dada por:

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_k x_{k,i})}}$$

Esta forma funcional es comúnmente identificada como un "perceptrón" de una capa simple o red neuronal artificial de una sola capa. Una red neuronal de una sola capa calcula una salida continua en lugar de una función definida a trozos. La derivada de p_i con respecto a $X = x_1 \dots x_k$ es calculada de la forma general:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-f(X)}}$$

donde $f(x)$ es una función analítica en X . Con esta elección, la red de capa simple es idéntica al modelo de regresión logística. Esta función tiene una derivada continua, la cual permite ser usada en propagación hacia atrás. Esta función también es preferida pues su derivada es fácilmente calculable:

$$y' = y(1 - y) \frac{df}{dX}$$

Implementación práctica:

La regresión logística unidimensional puede usarse para tratar de correlacionar la probabilidad de una variable cualitativa binaria (asumiremos que puede tomar los valores reales "0" y "1") con una variable escalar x . La idea es que la regresión logística aproxime la probabilidad de obtener "0" (no ocurre cierto suceso) o "1" (ocurre el suceso) con el valor de la variable explicativa x . En esas condiciones, la

probabilidad aproximada del suceso se aproximará mediante una función logística del tipo:1

$$\pi(x) = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 x)}}{e^{(\beta_0 + \beta_1 x)} + 1} = \frac{1}{e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)} + 1},$$

que puede reducirse al cálculo de una regresión lineal para la función [logit](#) de la probabilidad:

$$g(x) = \ln \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)} = \beta_0 + \beta_1 x,$$

o una regresión exponencial:

$$\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)} = e^{(\beta_0 + \beta_1 x)}.$$

Ejemplo

Sea $p(x)$ la probabilidad de éxito cuando el valor de la variable predictora es x entonces sea

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}} = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}.$$

Después de algunas operaciones se prueba que

$$\frac{p(x)}{1 - p(x)} = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$$

Donde $\frac{p(x)}{1 - p(x)}$ son las posibilidades en favor de éxito

Si tomamos un valor de ejemplo, digamos $p(50) = 2/3$, entonces

$$\frac{p(50)}{1 - p(50)} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2.$$

Distribución Moyal

La distribución de Moyal, a veces llamada distribución de Laplace doble, es una distribución de probabilidad continua que se utiliza en estadísticas y teoría de probabilidad. Fue propuesta por el matemático estadounidense John N. Moyal. Esta distribución se utiliza para modelar eventos en los que la variable aleatoria tiene una forma de campana asimétrica y se utiliza comúnmente en aplicaciones relacionadas con la física, la ingeniería y la astronomía, entre otros campos.

La función de densidad de probabilidad de la distribución de Moyal se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{(x-\beta)}{\alpha}} \cdot \left[1 + e^{-\frac{(x-\beta)}{\alpha}} \right]$$

Donde α y β son parámetros que afectan la forma de la distribución.

Para trazar una gráfica de la distribución de Moyal, puedes utilizar software de estadísticas o matemáticas como R, Python con bibliotecas como Matplotlib o cualquier otra herramienta de visualización que prefieras. Debes proporcionar valores adecuados para los parámetros α y β y luego trazar la función de densidad de probabilidad en un rango específico de valores de X . Esto te permitirá visualizar la forma de la distribución de Moyal.

Distribución normal

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss, distribución gaussiana, distribución de Laplace-Gauss o normalidad estadística a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en estadística y en la teoría de probabilidades.¹

La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico. Esta curva se conoce como campana de Gauss y es el gráfico de una función gaussiana.

La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos.³ Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la enorme cantidad de variables incontrolables que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes.

De hecho, la estadística descriptiva solo permite describir un fenómeno, sin explicación alguna. Para la explicación causal es preciso el diseño experimental, de ahí que al uso de la estadística en psicología y sociología sea conocido como método correlacional.

La distribución normal también es importante por su relación con la estimación por mínimos cuadrados, uno de los métodos de estimación más simples y antiguos.

Algunos ejemplos de variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal son:

- caracteres morfológicos de individuos como la estatura;
- caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco;
- caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos;
- caracteres psicológicos como el cociente intelectual;
- nivel de ruido en telecomunicaciones;
- errores cometidos al medir ciertas magnitudes;
- etc.

La distribución normal también aparece en muchas áreas de la propia estadística. Por ejemplo, la distribución muestral de las medias muestrales es aproximadamente normal, cuando la distribución de la población de la cual se extrae la muestra no es normal. Además, la distribución normal maximiza la entropía entre todas las distribuciones con media y varianza conocidas, lo cual la convierte en la elección natural de la distribución subyacente a una lista de datos resumidos en términos de media muestral y varianza. La distribución normal es la más extendida

en estadística y muchas pruebas estadísticas están basados en una "normalidad" más o menos justificada de la variable aleatoria bajo estudio.

En probabilidad, la distribución normal aparece como el límite de varias distribuciones de probabilidad continuas y discretas.

La distribución normal fue presentada por primera vez por Abraham de Moivre en un artículo del año 1733,5 que fue reimpreso en la segunda edición de su *The Doctrine of Chances*, de 1738, en el contexto de cierta aproximación de la distribución binomial para grandes valores de n . Su resultado fue ampliado por Laplace en su libro *Teoría analítica de las probabilidades* (1812), y en la actualidad se llama Teorema de De Moivre-Laplace.

Laplace usó la distribución normal en el análisis de errores de experimentos. El importante método de mínimos cuadrados fue introducido por Legendre en 1805. Gauss, que afirmaba haber usado el método desde 1794, lo justificó rigurosamente en 1809 asumiendo una distribución normal de los errores. El nombre de Gauss se ha asociado a esta distribución porque la usó con profusión cuando analizaba datos astronómicos y algunos autores le atribuyen un descubrimiento independiente del de De Moivre. Esta atribución del nombre de la distribución a una persona distinta de su primer descubridor es un claro ejemplo de la ley de Stigler.

El nombre de "campana" viene de Esprit Jouffret que usó el término "bell surface" (superficie campana) por primera vez en 1872 para una distribución normal bivalente de componentes independientes. El nombre de "distribución normal" fue otorgado independientemente por Charles S. Peirce, Francis Galton y Wilhelm Lexis hacia 1875.[cita requerida] A pesar de esta terminología, otras distribuciones de probabilidad podrían ser más apropiadas en determinados contextos; véase la discusión sobre incidencia, más abajo.

Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$

Máximo: $\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$

P. inflexión: en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$

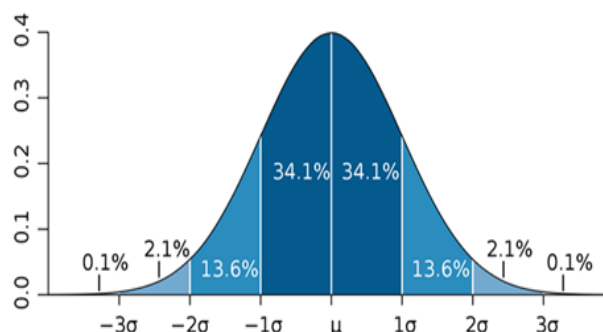
Asíntotas: el eje OX es una asíntota horizontal

Simetrías: respecto a la recta $x = \mu$

Monotonía: creciente $(-\infty, \mu)$, decreciente $(\mu, +\infty)$

Signo: es siempre positiva

P. Corte: $OY \rightarrow \left(0, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$



Ejemplo

Distribución normal aplicada a la temperatura ambiental

En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°

Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27° .

Utilizando la formula $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

sustituir el valor de la media 23, y la desviación típica 5.

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 27) &= P\left(\frac{(21 - 23)}{5} \leq Z \leq \frac{(27 - 23)}{5}\right) \\ &= P(-0.4 \leq Z \leq 0.8) \\ &= P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq -0.4) \\ &= P(Z \leq 0.8) - (1 - P(Z \leq 0.4)) \end{aligned}$$

Buscamos los valores correspondientes en la tabla de distribución normal:

$$P(Z \leq 0.8) = 0.7881 \quad \text{y} \quad P(Z \leq 0.4) = 0.6554$$

$$\begin{aligned} 30 \cdot P(21 \leq X \leq 27) &= 30 \cdot P\left(\frac{(21 - 23)}{5} \leq Z \leq \frac{(27 - 23)}{5}\right) \\ &= (30)(0.7881 - (1 - 0.6554)) \\ &= (30)(0.4435) \\ &= 13 \end{aligned}$$

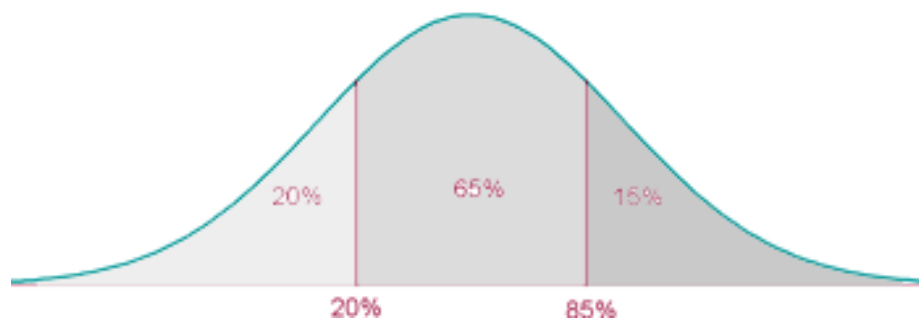
Esto quiere decir, que, en todo el mes, solo 13 días alcanzarán temperaturas entre 21 y 27grados.

Ejemplo 2

Tras una prueba de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución $N(65,18)$.

Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero.

¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?



Localizamos en nuestra tabla el parámetro correspondiente a la probabilidad 0.2 (20%), el cual es -0.84

$$P(Z \leq Z_1) = 0.2 \quad \Rightarrow \quad Z_1 \approx -0.84$$

Por lo que, $Z_1 = \frac{X_1 - 65}{18}$

entonces $\frac{X_1 - 65}{18} = -0.84$

$$X_1 = (-0.84)(18) + 65$$

$$X_1 = 49.88$$

$$X_1 \approx 50$$

Ahora localizamos en la tabla el parámetro para la probabilidad de, el cual es, lo que significa que: $P(Z \leq Z_2) = 0.85 \Rightarrow Z_2 \approx 1.04$

Si; $Z_2 = \frac{X_2 - 65}{18}$

Entonces; $\frac{X_2 - 65}{18} = 1.04$

$$X_2 = (1.04)(18) + 65$$

$$X_2 = 83.72$$

$$X_2 \approx 84$$

Baja cultura hasta 50 puntos.

Cultura aceptable entre 50 y 84

Excelente cultura a partir de 84 puntos.

Distribución Log-Logística

La distribución logística se utiliza para los modelos de crecimiento y en una regresión logística. Tiene colas más largas y una curtosis mayor que la distribución normal.

Función de densidad de probabilidad, La función de densidad de probabilidad es

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{\exp\left\{\frac{x - \mu}{\sigma}\right\}}{\sigma \left(1 + \exp\left\{\frac{x - \mu}{\sigma}\right\}\right)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty.$$

Relación con otras distribuciones: La distribución logística está muy relacionada con la distribución logística. Si x se distribuye de forma log logística con los parámetros μ y σ , $\log(x)$ se distribuye de forma logística con los parámetros μ y σ .

En la teoría de la probabilidad y estadística, la distribución logística es una distribución de probabilidad continua cuya función de distribución es la función

logística, que aparece en el contexto de la regresión logística y determinados tipos de redes neuronales. Es similar a la distribución normal en forma, pero tiene colas más pesadas (mayor curtosis).

Momentos y cocientes L muestrales. Son un sistema alternativo para describir las formas de las funciones de distribución de probabilidades (FDP). Históricamente aparecen como modificaciones de los momentos de probabilidad pesada (MPP) desarrollados por Greenwood et al. (1979). Los momentos L son combinaciones lineales de los MPP, de manera que (Hosking y Wallis, 1997):

$$\lambda_1 = \beta_0$$

$$\lambda_2 = 2 \cdot \beta_1 - \beta_0$$

$$\lambda_3 = 6 \cdot \beta_2 - 6 \cdot \beta_1 + \beta_0$$

$$\lambda_4 = 20 \cdot \beta_3 - 30 \cdot \beta_2 + 12 \cdot \beta_1 - \beta_0$$

Además, se definen los cocientes (τ) de momentos L, comenzando con L–Cv que es análogo al coeficiente de variación y después los de similitud con los coeficientes de asimetría (Cs) y de curtosis (Ck):

$$\tau_2 = \lambda_2 / \lambda_1$$

$$\tau_3 = \lambda_3 / \lambda_2$$

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2$$

En una muestra de tamaño n, con sus elementos arreglados en orden ascendente ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$) los estimadores insesgados de β_r son:

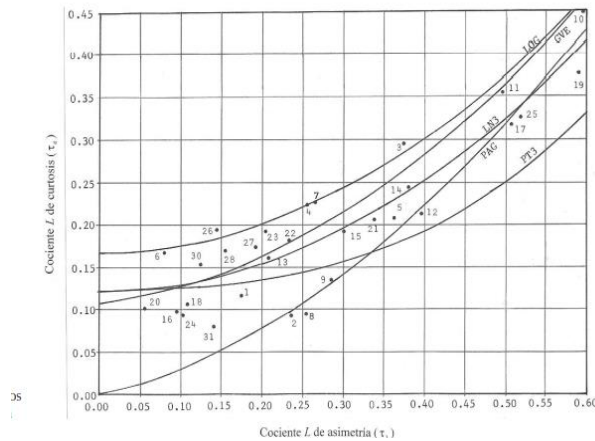
$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} x_j$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=3}^n \frac{(j-1) \cdot (j-2)}{(n-1) \cdot (n-2)} x_j$$

$$b_3 = \frac{1}{n} \sum_{j=4}^n \frac{(j-1) \cdot (j-2) \cdot (j-3)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)} x_j$$

Los estimadores muestrales de λr serán l_r estando definidos por las ecuaciones 1 a 4 y los de los cocientes serán t_2 , t_3 y t_4 , según las ecuaciones 5 a 7.



Ajuste de la distribución Logística Generalizada mediante optimización numérica. Las distribuciones generales de valores extremos (GVE) y Log-Pearson tipo III (LP3) se ajustaron mediante optimización numérica para minimizar el error cuadrático medio y el error absoluto medio. Los resultados muestran (Campos, 2001; 2002b) similitud en las predicciones alcanzadas con cada enfoque, además de que se observa una correspondencia numérica entre los valores mínimos de tales errores que son alcanzados en cada registro. Debido a lo anterior, se consideró suficiente contrastar la distribución logística generalizada (LOG) minimizando únicamente el error cuadrático medio, usualmente conocido como error estándar de ajuste (EEA). Nuevamente, este proceso se realizó con base en el algoritmo de múltiples variables no restringidas de Rosenbrock, considera como variables a optimizar sus tres

parámetros de ajuste, al igual que en el modelo GVE, cuyos valores iniciales fueron los del método de momentos L. En cambio, en la distribución LP3 tales variables de ajuste corresponden a los estadísticos logarítmicos, media, desviación estándar y coeficiente de asimetría corregido, es decir: Y_m , S_y y g_c .

La distribución Logística Generalizada es la más reciente cuya aplicación ha sido establecida bajo precepto, por ello es importante su contraste con las otras dos que le precedieron, la Log–Pearson tipo III en USA y la General de Valores Extremos en Inglaterra. Se comenzó por destacar la importancia en la estimación de las crecientes de diseño, de los análisis probabilísticos y de las distribuciones citadas. Para la más reciente se describe con detalle la estimación de sus tres parámetros de ajuste por el método de momentos L. Además se propone su ajuste por minimización del error cuadrático medio a través optimización numérica. Los resultados de la aplicación de esta distribución en 31 registros de eventos máximos anuales, con base en los dos métodos citados, se contrastan con los óptimos obtenidos previamente con los modelos General de Valores Extremos y Log–Pearson tipo III. Se concluye que la distribución Logística Generalizada (LOG) es una opción conveniente para registros que muestran grandes cocientes L de curtosis y que en general sus resultados conducen a las predicciones más severas en los periodos de retorno extremos, en registros con valores dispersos.

Ejemplo

El tiempo que un usuario ve una página en un sitio web de ir a otra página es una variable aleatoria lognormal con parámetro $\theta=0.5$ y $w^2=1$

¿Cuál es la probabilidad de que una página sea vista por más de 10 segundos?

cuál es el tiempo que el 50% del usuario vea la página?

¿Cuál es la media y la desviación del tiempo hasta que un usuario se va de la página?

$$P(X > 10) = 1 - P(X < 10)$$

$$z = \frac{\ln(x) - \theta}{\omega}$$

$$z = \frac{\ln(10) - 0.5}{1}$$

$$z = 1.8$$

$$1 - P(Z < 1.8)$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55966	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
...										
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670

Distribución Nakagami (Nakagami-m)

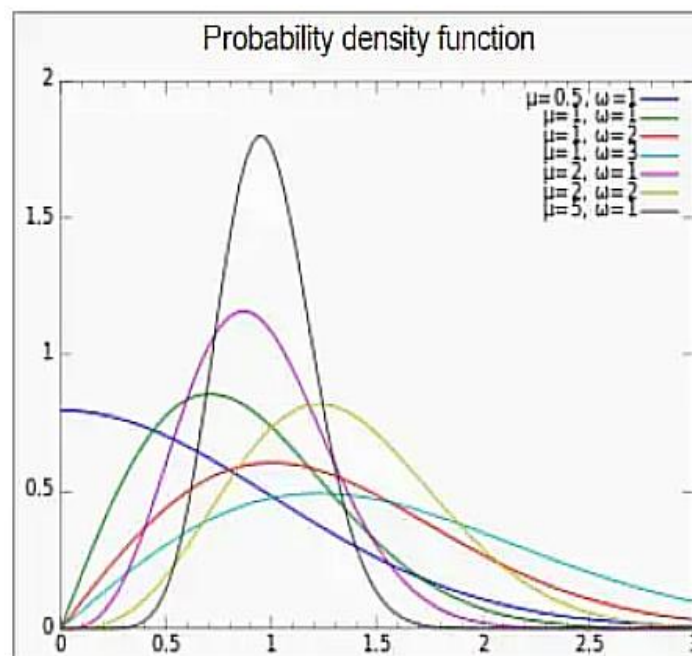
La distribución de Nakagami (también llamada distribución de Nakagami – m o Nakagami- μ) es una distribución de probabilidad bastante nueva, que apareció por primera vez en 1960. Es una forma generalizada de modelar el desvanecimiento a pequeña escala para señales dispersas densas y es una de las distribuciones más comunes. para modelar conjuntos de datos positivos sesgados a la derecha. Las aplicaciones del mundo real incluyen el modelado de señales inalámbricas y la propagación de ondas de radio, la caracterización de tumores de mama mediante imágenes de ultrasonido y en meteorología.

La fórmula de la función de densidad de probabilidad es: Donde:

$$2 \left(\frac{\mu}{\omega} \right)^{\mu} \frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{(2\mu-1)} e^{\frac{-\mu x^2}{\omega}}$$

- μ es el parámetro de forma.
- ω es el parámetro de escala ($\omega > 0$ para todo $x > 0$). Este parámetro controla la dispersión de la distribución.

Los dos parámetros combinados determinan la altura, la inclinación y la concavidad de la curva de densidad de probabilidad. La distribución solo es válida en el intervalo $(0, \infty)$. En otras palabras, si $x \leq 0$, entonces la probabilidad es cero.



Ejemplo

Comunicación Inalámbrica: Una de las aplicaciones más significativas de la distribución Nakagami es en el modelado de la atenuación de señales en canales de comunicación inalámbrica. La atenuación de señales es causada por diversos factores, como la distancia entre el transmisor y el receptor, la presencia de

obstáculos y la interferencia. La distribución Nakagami se utiliza para modelar la variabilidad en la amplitud de la señal recibida.

Ejemplo:

En un sistema de comunicación móvil, los dispositivos inalámbricos, como teléfonos móviles, se comunican con torres de telefonía celular. La señal transmitida desde el dispositivo móvil experimenta atenuación debido a la distancia y la presencia de obstáculos. La distribución Nakagami se utiliza para modelar esta atenuación y permite diseñar sistemas de comunicación robustos y eficientes.

Ejemplo:

Imágenes Médicas y Procesamiento de Señales Biomédicas: La distribución Nakagami también encuentra aplicaciones en tecnología biomédica, especialmente en el procesamiento de imágenes médicas y el análisis de señales biomédicas. Se utiliza para modelar la estadística de texturas y características en imágenes médicas, como imágenes de ultrasonido y resonancia magnética. Esta aplicación es útil para cuantificar y caracterizar las estructuras y propiedades de los tejidos en imágenes médicas.

Ejemplo

En el procesamiento de imágenes de ultrasonido, la distribución Nakagami se utiliza para modelar la variabilidad en la textura de los tejidos. Esto permite a los radiólogos y médicos analizar y diagnosticar patologías en los tejidos, como tumores o anomalías, en función de la distribución Nakagami de las imágenes.

Distribución De Pareto

En teoría de la probabilidad y en estadística, la distribución Pareto es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros, que tiene aplicación en disciplinas como la sociología, la geofísica y la economía.¹ Fue formulada por el ingeniero civil, economista y sociólogo Vilfredo Pareto, aunque en ciertas áreas de

estudio se hace referencia a la ley de Bradford. Cabe señalar que el equivalente discreto de la distribución Pareto es la distribución zeta (la ley de Zipf). Cuando la distribución de Pareto es usada en un modelo sobre la distribución de riqueza, el parámetro alfa es conocido como índice de Pareto.

Notación:

Si x es una variable aleatoria continua con distribución Pareto con parámetros

$\alpha > 0$ y $x_m > 0$, entonces escribimos

$x \sim \text{Pareto}(\alpha, x_m)$.

Función de densidad

La función de densidad de una variable aleatoria $x \sim \text{pareto}(\alpha, x_m)$ es:

$$f_X(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

Probabilidad acumulada

La función de distribución de una variable aleatoria $x \sim \text{pareto}(\alpha, x_m)$ es, para $x_m < x$.

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_m}{x} \right)^\alpha$$

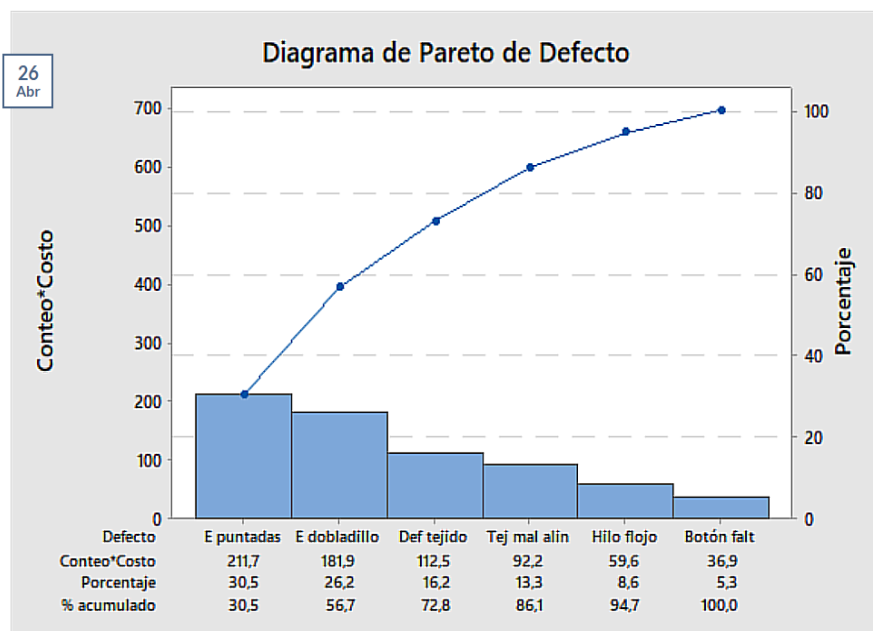
$$f_{(\xi, \mu, \sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} \right)^{\left(-\frac{1}{\xi}-1\right)}.$$

o

$$f_{(\xi, \mu, \sigma)}(x) = \frac{\sigma^{\frac{1}{\xi}}}{(\sigma + \xi(x - \mu))^{\frac{1}{\xi}+1}}.$$

de nuevo, para $x \geq \mu$, y $x \leq \mu - \sigma/\xi$ si $\xi < 0$

Supongamos que la variable aleatoria Z tiene la distribución básica de Pareto con el parámetro shape $\alpha \in (0, \infty)$. Debido a que la distribución es de cola pesada, la media, la varianza y otros momentos de Z son finitos solo si el parámetro shape α es suficientemente grande.



El diagrama de Pareto es una herramienta de gestión de calidad muy utilizada, la cual complementa muy bien al resto de las herramientas lean . Este diagrama se basa en el principio del mismo nombre, el cual establece que el 20% de las causas generar el 80% de los efectos o resultados. Por ejemplo, de todos los problemas de una determinada empresa, el 20% de ellos genera el 80% de sobrecostos. Esto ayuda mucho a la hora de priorizar esfuerzos porque permite dedicar energía en las

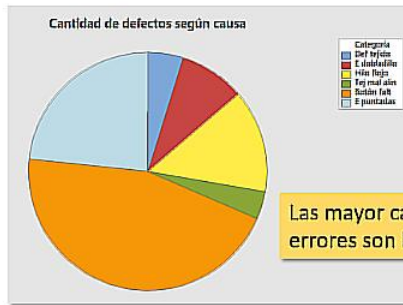
causas que tienen mayor influencia en el resultado. Existen diversos diagramas que ayudan a mejorar la gestión, los diagramas de barra tradicionales pueden mostrar una tendencia respecto a los defectos obtenidos o el impacto de estos efectos en un proceso, el diagrama de Pareto además de ver cuanto contribuye cada causa de los defectos en el resultado final. Existen otros diagramas más complejos como el Jack knife que muestra en una coordinada la frecuencia y en la otra el impacto, que enriquece aún más los análisis, todo dependerá de lo que se espera gestionar.

Ejemplo

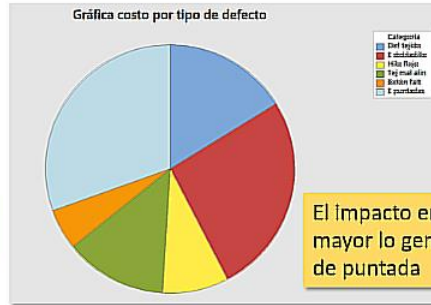
Utilizando los datos del centro de recursos de Minitab. Un inspector que trabaja para un fabricante de ropa investiga las fuentes de defectos de la ropa para definir la prioridad de los proyectos de mejora. El inspector da seguimiento al número y tipo de defectos en el proceso, de acuerdo con la siguiente información.

Defecto	Cantidad de veces que se repite	Costo unitario del error	Costo total del error (usd)
Botón falt	217	0,17	36,89
Hilo flojo	67	0,89	59,63
Tej mal alin	18	5,12	92,16
Def tejido	23	4,89	112,47
E puntadas	112	1,89	211,68
E dobladillo	43	4,23	181,89

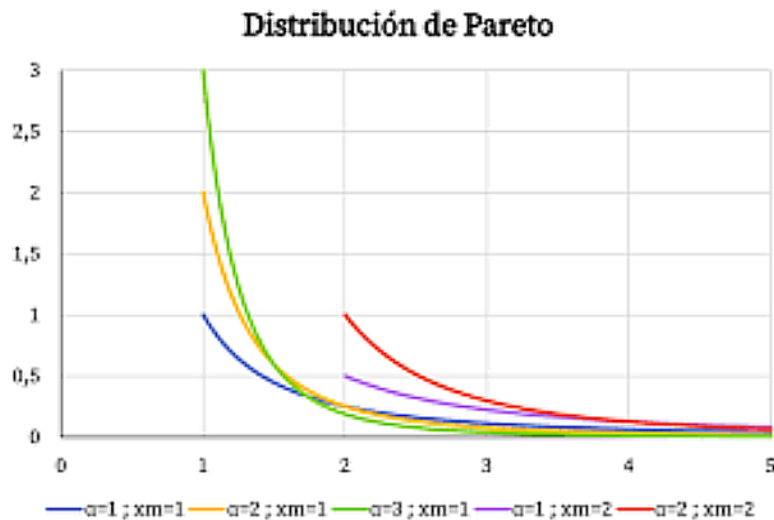
Si quisiéramos ver la mayor cantidad de defectos se da por la falta de botones, no obstante, el costo de los errores de puntadas es mayor. Si vemos un gráfico de torta podemos ver en la primera figura la cantidad de errores y en la segunda el impacto en el costo que estos errores generan. Si quisiéramos ver el efecto combinado deberíamos integrarlo en un solo gráfico, ahí toma sentido el diagrama de Pareto que muestra la causa y el impacto de cada uno de estos errores.



Las mayor causas de errores son botón faltante



El impacto en costos mayor lo generan Errores de puntada



Ejemplo

El análisis y el pago de las reclamaciones a un seguro es un complejo proceso que puede llevar a tramitar incorrectamente algunas reclamaciones. Estos errores provocan un aumento del tiempo que dedica el personal a obtener la información correcta y posiblemente a pagar indemnizaciones indebidas. El beneficiario normalmente detecta los errores cuando cobra una indemnización menor de la debida y a menudo puede pasar por alto las indemnizaciones superiores a las debidas. Estos errores pueden incrementar considerablemente los costes, además de afectar negativamente a las relaciones con los clientes. Se realizan considerables esfuerzos para analizar la actividad de presentación y de tramitación de las reclamaciones con el fin de poder desarrollar métodos para reducir lo más posible los errores. Una importante compañía de seguros médicos se fijó el objetivo de reducir un 50 % los errores.

Se puso en marcha una auditoría completa de una muestra aleatoria de 1.000 reclamaciones y se encontraron los siguientes errores

Tipo de Error	Frecuencia
Códigos de atención	40
Información del proveedor	9
Información del paciente	6
Tablas de precios	17
Solicitudes de contratos	37
Ajustes de los proveedores	7
Otros	4

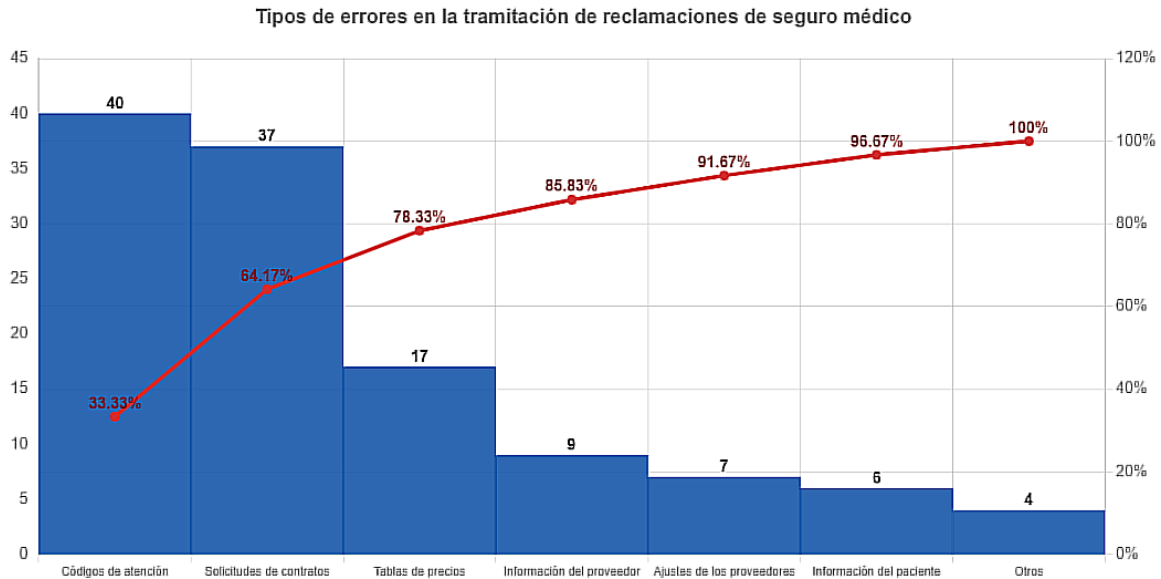
Muestre cómo utilizaría el análisis de Pareto para ayudarla a averiguar los factores relevantes que contribuyen a eliminar los errores

A continuación, elaboramos nuestro diagrama de Pareto.

De acuerdo con nuestro diagrama de Pareto, se verifica que los errores relacionados con los códigos de procedimientos y diagnósticos y con las solicitudes de contratos son las principales causas de los errores y representan más del 60 % de ellos. Solucionando estos problemas, se podría lograr el objetivo de reducir en 50 % los errores.

Si agregamos el tercer error (tabla de precios), entonces nos aproximamos al 80 % que establece la ley de Pareto. Atendiendo estos tres problemas, la empresa puede mejorar en gran medida la presentación y tramitación de las reclamaciones.

Se sugiere que, para analizar las causas y posibles soluciones de los 3 principales errores, se emplee otra herramienta de calidad como el diagrama de Ishikawa.



Distribución Sech

La distribución hiperbólica secante, comúnmente representada como sech o sech (x), es una distribución de probabilidad que se encuentra en varios campos de las matemáticas, la física y la ingeniería. Está definida por su función de densidad de probabilidad (PDF), que se expresa como:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sech}(\pi x)$$

donde $-\infty < x < \infty$. La distribución sech es simétrica y en forma de campana, similar a la distribución normal estándar, y tiene varianza finita

En la mecánica cuántica, la distribución sech desempeña un papel en la descripción de la forma de una función de onda cuántica. Las funciones de onda son conceptos fundamentales en la mecánica cuántica que describen la distribución de probabilidad de encontrar una partícula en una posición particular. La distribución sech puede utilizarse para modelar la distribución de probabilidad de encontrar una partícula dentro de un pozo de potencial o en un nivel de energía específico. La forma de la distribución sech puede surgir en las funciones de onda debido al comportamiento de las partículas en espacios confinados o en interacción con barreras de potencial. La distribución sech puede utilizarse en el campo de las

telecomunicaciones y el procesamiento de señales para modelar la función de densidad de probabilidad del ruido en los canales de comunicación. Por ejemplo, en sistemas de comunicación digital, es común encontrarse con ruido, y la distribución sech puede usarse para modelar la distribución de probabilidad del ruido. Los ingenieros e investigadores utilizan esta distribución para estudiar y diseñar sistemas de comunicación que sean resistentes a los efectos del ruido. La distribución sech es particularmente útil cuando el ruido tiene una distribución simétrica en forma de campana.

Ejemplo

Supongamos que estás estudiando una partícula atrapada en un pozo de potencial unidimensional y deseas encontrar la distribución de probabilidad de la posición de la partícula dentro del pozo. La distribución sech podría usarse para describir esta distribución de probabilidad, teniendo en cuenta los niveles de energía y las formas de las barreras de potencial.

Ejemplo

En un sistema de comunicación digital, deseas evaluar el impacto del ruido en la fiabilidad de la transmisión de datos. Modelas el ruido en el canal de comunicación con una distribución sech. Al comprender las características de esta distribución, puedes calcular la tasa de errores de bits (BER) y diseñar códigos de corrección de errores o esquemas de modulación para mitigar los efectos del ruido. En resumen, la distribución sech es una distribución de probabilidad versátil que encuentra aplicaciones en la física, la ingeniería y diversos campos. Se utiliza para modelar distribuciones de probabilidad simétricas y en forma de campana y es especialmente valiosa al tratar fenómenos que presentan características similares

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-(x-\mu)/s}}{s(1 + e^{-(x-\mu)/s})^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4s} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\mu}{2s}\right) dx \end{aligned}$$

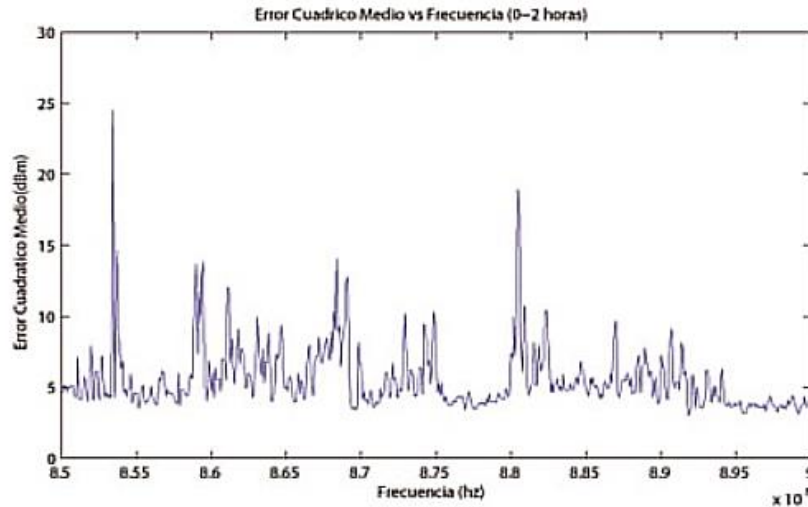
Distribución Suzuki

Una distribución de muestreo se refiere a la distribución de los diferentes valores que una estadística muestral, o estimador, podría adoptar en muchas muestras del mismo tamaño. Así, aunque por lo general disponemos únicamente de una muestra aleatoria o subgrupo racional, reconocemos que la estadística muestral particular que determinamos, como la media o mediana de la muestra, no es exactamente igual al respectivo parámetro de la población. Más aún, el valor de una estadística muestral variará de una muestra a otra, a causa de la variabilidad del muestreo aleatorio, o error de muestreo. Esta es la idea en la que se apoya el concepto de que toda estadística muestral de hecho un tipo de variable cuya distribución de valores está

Muestreo Simple Aleatorio: procedimiento probabilístico de selección de muestras más sencillo y conocido, no obstante, en la práctica es difícil de realizar debido a que requiere de un marco muestral y en muchos casos no es posible obtenerlo. Puede ser útil cuando las poblaciones son pequeñas y por lo tanto, se cuenta con listados. Cuando las poblaciones son grandes, se prefiere el muestreo en etapas. Se Utiliza ampliamente en los estudios experimentales, además, de ser un procedimiento básico como componente de métodos más complejos (muestreo estratificado y en etapas).

Es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño

Ejercicio Un fabricante de focos afirma que us producto durará un promedio de 500 horas de trabajo. Para conservar este promedio esta persona verifica 25 focos cada mes. Si el valor y calculado cae entre $t_{0.05}$ y $t_{0.05}$, él se encuentra satisfecho con esta afirmación. ¿Qué conclusión deberá él sacar de una muestra de 25 focos cuya duración fue?:520 521 511 513 510 $\mu=500$ h513 522 500 521 495 $n=25$



Distribución De Poisson

es una distribución de probabilidad que describe el número de eventos que ocurren dentro de un intervalo fijo de tiempo o espacio cuando estos eventos suceden con una tasa media constante conocida y son independientes del tiempo desde el último evento. Se utiliza ampliamente en diversas aplicaciones tecnológicas donde los eventos ocurren de manera aleatoria e independiente.

Modelado de Tráfico de Red: Una de las principales aplicaciones de la distribución de Poisson en tecnología es en el modelado del tráfico de redes. Los ingenieros y administradores de redes utilizan la distribución de Poisson para modelar la llegada de paquetes de datos, solicitudes o tráfico en redes de computadoras. La distribución ayuda a comprender y predecir la congestión de la red, estimar los requisitos de ancho de banda y optimizar el rendimiento de la red.

Ejemplo

Considera un servidor de red que recibe solicitudes web. Si las solicitudes siguen un proceso de Poisson, los administradores de redes pueden utilizar esta distribución para estimar los requisitos de capacidad del servidor para manejar las solicitudes entrantes sin sobrecargar el sistema.

Análisis de Fallas en Semiconductores: En la fabricación de semiconductores, la distribución de Poisson se emplea para analizar defectos o fallos en obleas o chips

de semiconductor. La distribución modela la ocurrencia aleatoria de defectos en el proceso de fabricación. Se asume que cada defecto es independiente y ocurre con una tasa constante.

Ejemplo

Al fabricar microchips, pueden ocurrir defectos, como transistores que no funcionan según lo previsto, debido a impurezas o errores en el proceso de fabricación. Los fabricantes de semiconductores utilizan estadísticas de Poisson para modelar la probabilidad de un cierto número de defectos por unidad de área. Esta información es valiosa para el control de calidad, la mejora del proceso y la predicción del rendimiento de un proceso de fabricación de semiconductores.

Reporte de Errores de Software: En ingeniería de software y control de calidad, la distribución de Poisson se puede utilizar para modelar la llegada de informes de errores o problemas de software. En un sistema de software grande, los informes de errores pueden llegar al equipo de desarrollo de manera independiente y a una tasa promedio constante a lo largo del tiempo. Al comprender la distribución de informes de errores, los equipos de desarrollo de software pueden asignar recursos de manera efectiva para corregir errores y priorizar problemas críticos.

Ejemplo

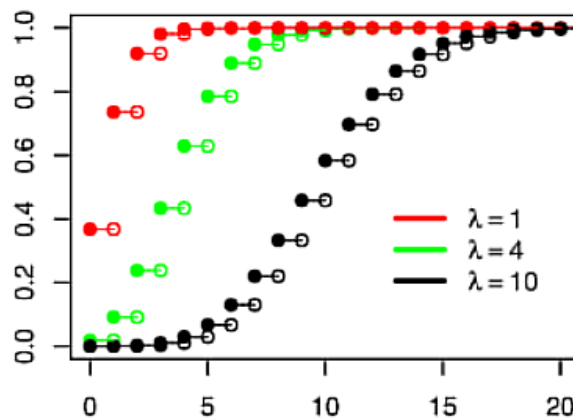
Un equipo de desarrollo de software podría utilizar la distribución de Poisson para modelar la tasa de llegada de informes de errores para una aplicación de software en particular. Esta información puede ayudarles a planificar sus esfuerzos de corrección de errores y asegurarse de que tienen suficientes recursos disponibles para manejar los informes entrantes.

Distribución de Poisson

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x$$



Distribución Log Normal

Se obtiene cuando los logaritmos de una Variable se describen mediante una distribución normal. Es el caso en el que las variaciones en la fiabilidad de una misma clase de componentes técnicos se representan considerando la tasa de fallos λ aleatoria en lugar de una variable constante. Es la distribución natural para utilizar cuando las desviaciones a partir del valor del modelo están formadas por factores, proporciones o porcentajes más que por valores absolutos como es el caso de la distribución normal. La distribución lognormal tiene dos parámetros: m^* (media aritmética del logaritmo de los datos o tasa de fallos) y σ (desviación estándar del logaritmo de los datos o tasa de fallos).

En probabilidad y estadística, la distribución normal logarítmica es una distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente

distribuido. Es decir, si X es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces $\exp(X)$.

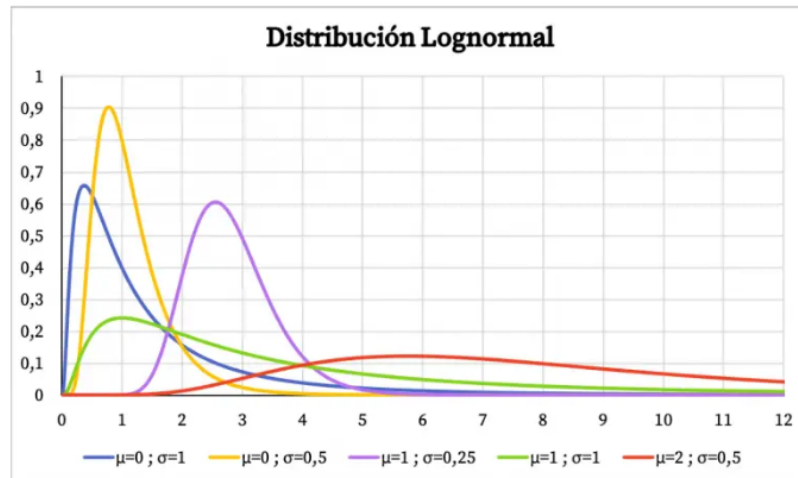
$$e^X \sim \text{Lognormal}(\mu_x, \sigma_x^2)$$

Una distribución lognormal (log-normal o Galton) es un tipo de distribución de probabilidad que se utiliza para describir variables que tienen valores que están distribuidos de manera asimétrica y que pueden tomar valores muy grandes. La distribución lognormal se caracteriza por dos parámetros: el promedio y la desviación estándar de la variable original (no transformada). La distribución lognormal se obtiene al aplicar la transformación logarítmica a una distribución normal

La distribución normal logarítmica es una distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente distribuido. Es decir, si X es una variable aleatoria con una distribución normal, entonces $\exp(X)$ tiene una distribución log-normal. La base de una función logarítmica no es importante, ya que $\log_a X$ está distribuida normalmente si y solo si $\log_b X$ está distribuida normalmente, solo se diferencian en un factor constante. Log-normal también se escribe log normal o lognormal o distribución de Tiaut. Una variable puede ser modelada como log-normal si puede ser considerada como un producto multiplicativo de muchos pequeños factores independientes. Un ejemplo típico es un retorno a largo plazo de una inversión: puede considerarse como un producto de muchos retornos diarios. La distribución log-normal tiende a la función densidad de probabilidad.

¿Como Utilizamos La Distribución Log Normal?

se utiliza a menudo para describir variables que crecen de manera exponencial, como el tamaño de las empresas o la concentración de una sustancia en un medio. También se utiliza en finanzas para modelar la distribución del rendimiento de los activos financieros. También se entiende una distribución lognormal (log-normal o Galton) como una distribución de probabilidad con un logaritmo distribuido normalmente. Una variable aleatoria se distribuye lognormalmente si su logaritmo se distribuye normalmente.



La distribución log-normal tiene varios usos en ingeniería y ciencias aplicadas debido a su capacidad para modelar variables que son siempre positivas y tienen una asimetría positiva en sus distribuciones. Aquí hay algunos ejemplos de cómo se utiliza en ingeniería:

Modelado de Variables Positivas: La distribución log-normal se utiliza para modelar variables que no pueden ser negativas en la realidad, como tamaños de partículas, duraciones de vida útil, tasas de crecimiento de poblaciones, y otras variables relacionadas con cantidades físicas.

Fiabilidad y Confiabilidad: En ingeniería, es común utilizar la distribución log-normal para modelar la vida útil de componentes y sistemas. Puede utilizarse para estimar la probabilidad de fallo o la duración esperada antes de un fallo.

Economía y Finanzas: En ingeniería financiera, la distribución log-normal se usa para modelar el comportamiento de precios de activos financieros y rendimientos. Por ejemplo, el modelo de Black-Scholes para valorar opciones se basa en el supuesto de que los rendimientos siguen una distribución log-normal.

Hidrología: En ingeniería civil e hidrología, la distribución log-normal se emplea para modelar variables como los caudales de ríos, precipitaciones, y tasas de flujo, ya que estas variables suelen ser positivas y asimétricas.

Distribución de Tamaño de Partículas: En la industria química, farmacéutica, y de alimentos, la distribución log-normal se utiliza para describir la distribución de tamaño de partículas en suspensiones y emulsiones.

Ingeniería Ambiental: En la evaluación de la calidad del aire y del agua, así como en el análisis de datos ambientales, la distribución log-normal se utiliza para modelar concentraciones de contaminantes y otras variables relacionadas con el medio ambiente.

Estimación de Costos de Proyectos: En la estimación de costos de proyectos de ingeniería y construcción, la distribución log-normal puede utilizarse para modelar los costos de proyectos, ya que los costos suelen ser positivos y pueden variar de manera asimétrica.

Ingeniería de Sistemas de Comunicación: En sistemas de comunicación inalámbrica, la distribución log-normal a menudo se utiliza para modelar la atenuación de la señal, que es una variable que afecta la calidad de la comunicación inalámbrica.

Ejemplo

Cálculo de la media y la desviación estándar de una distribución log-normal. Supongamos que tenemos una variable aleatoria X que sigue una distribución log-normal con $\mu = 2$ y $\sigma = 0.5$. Queremos calcular la media y la desviación estándar de X .

Paso 1: Recordemos la fórmula para la media y la desviación estándar de una distribución log-normal:

$$\text{Media } (\mu_{\ln}) = e^{(\mu + (\sigma^2)/2)}$$

$$\text{Desviación Estándar } (\sigma_{\ln}) = e^{(\mu + (\sigma^2)/2)} * \sqrt{(e^{(\sigma^2)} - 1)}$$

Paso 2: Sustituimos los valores μ y σ en las fórmulas:

$$\text{Media } (\mu_{\ln}) = e^{(2 + (0.5^2)/2)}$$

$$\text{Desviación Estándar } (\sigma_{\ln}) = e^{(2 + (0.5^2)/2)} * \sqrt{(e^{(0.5^2)} - 1)}$$

Paso 3: Calculamos los valores:

$$\text{Media } (\mu_{\ln}) = e^{(2 + 0.125)} = e^{2.125} \approx 8.38$$

$$\begin{aligned} \text{Desviación Estándar } (\sigma_{\ln}) &= e^{(2 + 0.125)} * \sqrt{(e^{(0.25)} - 1)} \approx 8.38 * \sqrt{(1.284 - 1)} \approx \\ &8.38 * \sqrt{0.284} \approx 3.19 \end{aligned}$$

Entonces, la media de la distribución log-normal es aproximadamente 8.38 y la desviación estándar es aproximadamente 3.19.

Ejemplo

Cálculo de la probabilidad en una distribución log-normal. Supongamos que queremos calcular la probabilidad de que X esté por debajo de un valor de 10 en la misma distribución log-normal del ejemplo anterior

Paso 1: Utilizamos la función de distribución acumulativa (CDF) de la distribución log-normal:

$$\text{CDF}(X \leq x) = \Phi[(\ln(x) - \mu) / \sigma]$$

Paso 2: Sustituimos los valores $\mu = 2$, $\sigma = 0.5$ y $x = 10$:

$$\text{CDF}(X \leq 10) = \Phi[(\ln(10) - 2) / 0.5]$$

Paso 3: Calculamos el valor utilizando tablas de distribución normal estándar o software estadístico:

$$\text{CDF}(X \leq 10) \approx \Phi[(\ln(10) - 2) / 0.5] \approx \Phi[(2.3026 - 2) / 0.5] \approx \Phi[0.6052] \approx 0.7257$$

Entonces, la probabilidad de que X esté por debajo de 10 es aproximadamente 0.7257.

Distribución beta no central

La distribución beta no central es una distribución de probabilidad continua que es una generalización no central de la distribución beta (central).

La distribución no central beta, también conocida como la distribución no central beta de Fisher o distribución F no central, es una distribución de probabilidad que generaliza la distribución de Fisher-Snedecor (F) al permitir que los parámetros de no centralidad tomen valores distintos de cero. Esta distribución es utilizada en estadísticas y teoría de probabilidad para modelar variables aleatorias que siguen una distribución F no central. La distribución F no central es especialmente útil en contextos donde se comparan varianzas de dos poblaciones o grupos. Al igual que la distribución F estándar, la distribución F no central se utiliza para realizar pruebas de hipótesis en las que se compara la varianza de dos poblaciones.

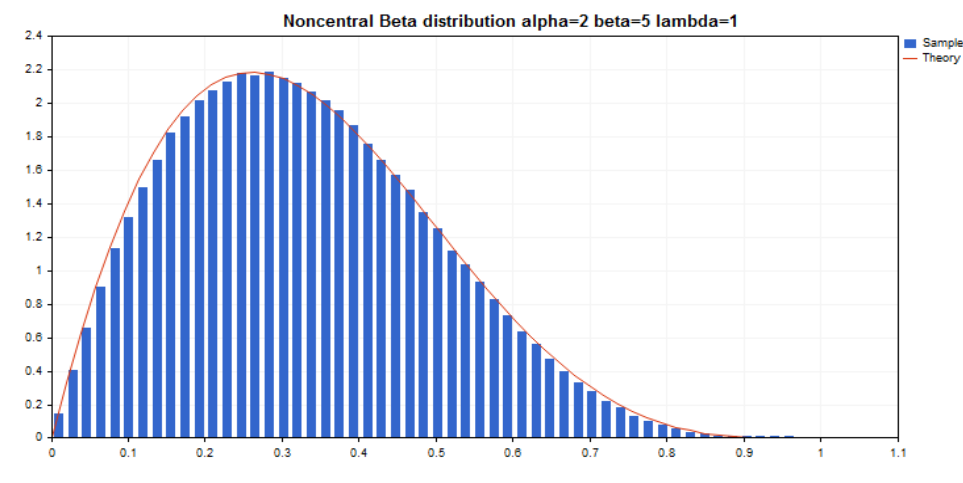
Los parámetros clave de la distribución F no central son:

Grados de libertad (df_1 y df_2): Al igual que en la distribución F estándar, la distribución F no central depende de dos conjuntos de grados de libertad, denotados como df_1 y df_2 , que corresponden a los grados de libertad de dos muestras o grupos que se están comparando.

Parámetro de no centralidad (λ): Este parámetro representa la no centralidad de la distribución. Cuando λ es igual a cero, la distribución F no central se reduce a la distribución F estándar. Sin embargo, cuando λ es distinto de cero, indica la presencia de sesgo o asimetría en la distribución, lo que significa que no sigue una distribución F estándar.

La distribución F no central se utiliza en pruebas de hipótesis para comparar varianzas cuando se sospecha que las poblaciones de las cuales provienen las muestras tienen diferentes parámetros de no centralidad. En resumen, la distribución no central beta, o distribución F no central, es una generalización de la distribución F que permite la inclusión de un parámetro de no centralidad, lo que la hace adecuada para aplicaciones estadísticas en las que se deben tener en cuenta efectos no centrales en la comparación de varianzas entre grupos o poblaciones.

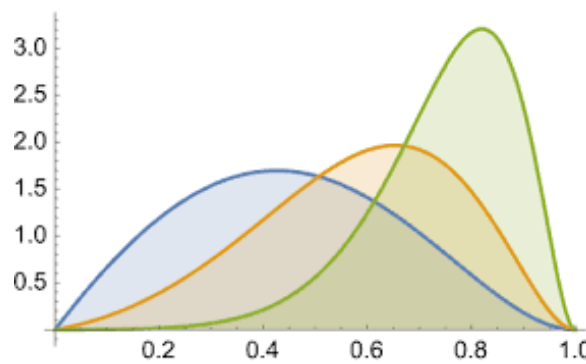
La distribución beta no central (Tipo I) es la distribución de la ratio.



$$X = \frac{\chi_m^2(\lambda)}{\chi_m^2(\lambda) + \chi_n^2},$$

Formula:

$$f_{\text{NoncentralBeta}}(x|a,b,\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r}{r!} \frac{x^{a+r-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+r,b)}$$



Uso Que Tiene La Distribución No Central Beta;

- **Diseño de Experimentos:** En ingeniería, se utilizan diseños de experimentos para evaluar y mejorar procesos o sistemas. La distribución F no central se utiliza en análisis de varianza (ANOVA) y pruebas de hipótesis para comparar varianzas de diferentes grupos o tratamientos. Esto es esencial en la optimización de procesos y la toma de decisiones basadas en datos experimentales.
- **Calidad y Control de Procesos:** La distribución F no central se aplica en el control de calidad para monitorear la variabilidad en la producción. Ayuda a determinar si hay cambios significativos en la variabilidad del proceso, lo que puede ser fundamental para garantizar la calidad del producto y la eficiencia de la producción.
- **Ingeniería de Comunicaciones:** En sistemas de comunicaciones, como redes inalámbricas y telecomunicaciones, la distribución F no central se utiliza para modelar la relación señal-ruido en canales de comunicación. Esto es esencial para diseñar sistemas de comunicaciones eficientes y confiables.
- **Fiabilidad y Mantenimiento de Equipos:** En ingeniería de confiabilidad, la distribución F no central se emplea para modelar el tiempo hasta el fallo o la duración de vida útil de componentes y equipos. Esto es crucial para planificar el mantenimiento preventivo y predictivo de sistemas y equipos.
- **Ingeniería Eléctrica y Electrónica:** En el diseño de circuitos electrónicos y sistemas eléctricos, la distribución F no central se usa para evaluar la relación señal-ruido en sistemas de comunicación, así como para analizar la eficiencia y la variabilidad en la producción de componentes electrónicos.
- **Ingeniería de Materiales:** La distribución F no central es útil en la caracterización de materiales y la evaluación de propiedades físicas, como la resistencia, la elasticidad y la durabilidad de materiales compuestos.
- **Ingeniería Civil:** En la ingeniería civil, la distribución F no central se utiliza para comparar varianzas en pruebas de materiales de construcción, para evaluar la

resistencia de estructuras y para el análisis de carga en puentes y otras infraestructuras.

Ejemplo

Prueba de hipótesis con distribución no central beta. Supongamos que deseas realizar una prueba de hipótesis sobre la varianza de dos poblaciones, A y B, utilizando la distribución F no central. Tienes las siguientes informaciones:

- Grupo A: $n_1 = 15$ y varianza $s_1 = 5$
- Grupo B: $n_2 = 20$ y varianza $s_2 = 8$
- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$

Paso 1: Calcula los grados de libertad de ambas muestras y la relación de varianza.

$$\text{Grados de libertad (df1)} = n_1 - 1 = 15 - 1 = 14$$

$$\text{Grados de libertad (df2)} = n_2 - 1 = 20 - 1 = 19$$

$$\text{Relación de varianza} = (s_1^2 / s_2^2) = 5 / 8$$

Paso 2: Calcula el estadístico F:

$$F = (s_1^2 / s_2^2) = 5 / 8$$

Paso 3: Calcula el valor crítico de la distribución F no central con los grados de libertad y el parámetro de no centralidad. Esto suele hacerse con software estadístico o tablas de distribución.

Supongamos que obtienes un valor crítico F con $df_1 = 14$, $df_2 = 19$ y parámetro de no centralidad $\lambda = 3.0$ para $\alpha = 0.05$.

Paso 4: Compara el estadístico F con el valor crítico F. Si $F > \text{valor crítico F}$, rechaza la hipótesis nula; de lo contrario, no la rechaces.

En este ejemplo, si $F > \text{valor crítico } F$, rechazarías la hipótesis nula.

Ejemplo

Cálculo de probabilidades en una distribución F no central. Supongamos que tienes una distribución F no central con $df1 = 10$, $df2 = 15$ y parámetro de no centralidad $\lambda = 4$. Calcula la probabilidad de que F sea menor o igual a 2.

Paso 1: Utiliza software estadístico o tablas de distribución para calcular la probabilidad acumulativa $P(F \leq 2)$ con los parámetros dados.

Supongamos que $P(F \leq 2) \approx 0.231$ (valor hipotético).

Entonces, la probabilidad de que F sea menor o igual a 2 es aproximadamente 0.231.

Distribución De Pearson

Es una familia de funciones de distribución de probabilidad continua unimodal que satisfacen la siguiente ecuación diferencial: Pearson describió doce familias de distribuciones como soluciones a la ecuación. Su artículo original (1895, p. 360) identificó cuatro (numerados del I al IV), así como el tipo V, ahora conocido como distribución gamma inversa: los tipos VI al XII se identificaron en artículos posteriores. La familia ahora incluye la distribución normal.

$$f'(x) = (x - d) \frac{f(x)}{(ax^2 + bx + c)}.$$

El sistema Pearson fue originalmente ideado en un esfuerzo para modelar observaciones visiblemente asimétricas. Era bien conocido en aquel tiempo cómo ajustar un modelo teórico para acomodar los primeros dos cumulantes o los momentos de observados datos: Cualquier distribución de probabilidad puede estar extendida directamente para formar una familia de escala de posición. Excepto en los casos patológicos, una familia de escala de posición puede estar hecha para

acomodar la media (primer cumulante) y la varianza (segundo cumulante) arbitrariamente bien. Sin embargo, no era conocido cómo construir distribuciones de probabilidad en las cuales la asimetría (tercer cumulante estándar) y la curtosis (cuarto cumulante estándar) pudieron estar ajustados igualmente. Esta necesidad surgió al intentar acomodar modelos teóricos conocidos a datos observados que exhibieron asimetría. Los ejemplos de Pearson incluyen datos de supervivencia, cuáles son usualmente asimétricos. En su escrito original, Pearson (1895, p. 360) identificó cuatro tipos de distribuciones (numeradas del I al IV) además de la distribución normal (la cual era originalmente conocida como tipo V). La clasificación dependió en si las distribuciones estaban definidas en un intervalo definido, en una semirrecta, o en los reales y si estaban potencialmente asimétricas o necesariamente simétricas. Un segundo escrito (Pearson 1901) arregló dos omisiones: Redefinió la distribución de tipo V (originalmente incluía la distribución normal, ahora incorporaba la distribución gamma inversa) e introdujo la distribución de tipo VI. Conjuntamente los primeros dos documentos de identificación cubren los cinco tipos principales del sistema Pearson (I, III, VI, V y IV). En un tercer escrito, Pearson (1916) introdujo aún más casos especiales y subtipos (del VII al XII).

Rhind (1909, pp. 430–432) ideó una forma sencilla de visualizar el espacio de parámetros del sistema Pearson, el cual fue adoptado por Pearson (1916, plate 1 and pp. 430ff., 448ff.). Los tipos de Pearson son caracterizados por dos cantidades, comúnmente referidas como β_1 y β_2 . El primero es el cuadrado de la asimetría: $\beta_1 = \gamma_1^2$ donde γ_1 es la asimetría o el tercer momento estandarizado. El segundo es la curtosis tradicional o cuarto momento estandarizado: $\beta_2 = \gamma_2 + 3$. Tratamientos modernos definen kurtosis γ_2 en términos de cumulant en vez de momentos, por lo tanto, una distribución normal tenemos $\gamma_2 = 0$ y $\beta_2 = 3$. Aquí seguimos el precedente histórico y usamos β_2 . EL diagrama a la derecha muestra dada una distribución concreta a qué tipo de Pearson pertenece (identificado por el punto (β_1, β_2)).

Ejemplo

Distribución Normal. Supongamos que tienes un conjunto de datos que sigue una distribución normal con una media (μ) de 50 y una desviación estándar (σ) de 10. Calcula la probabilidad de que una observación seleccionada al azar sea menor que 60.

Paso 1: Formula la probabilidad utilizando la función de distribución acumulativa (CDF) de la distribución normal:

$$P(X < 60) = \Phi((60 - \mu) / \sigma)$$

Paso 2: Sustituye los valores conocidos:

$$P(X < 60) = \Phi((60 - 50) / 10) = \Phi(1.0)$$

Paso 3: Utiliza tablas de distribución normal estándar o software estadístico para encontrar el valor correspondiente a $\Phi(1.0)$. Supongamos que $\Phi(1.0) \approx 0.8413$.

Entonces, la probabilidad de que una observación seleccionada al azar sea menor que 60 es aproximadamente 0.8413.

Ejemplo

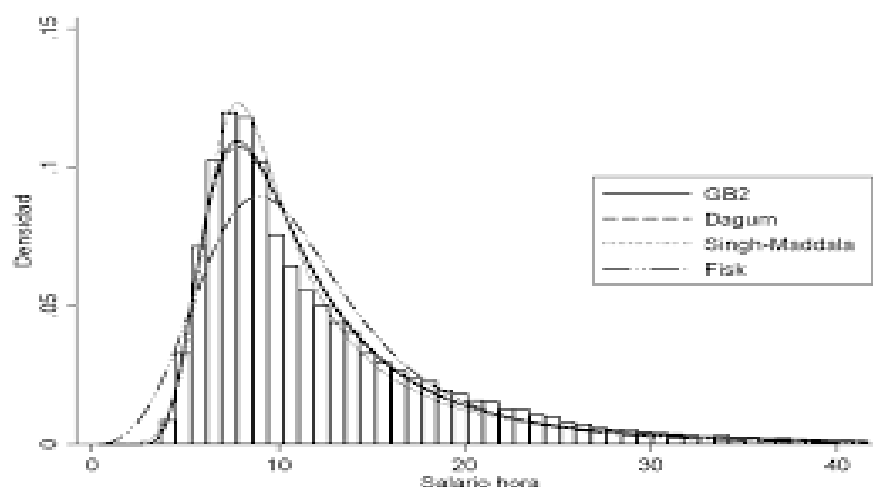
Distribución t de Student. Supongamos que tienes dos conjuntos de datos, cada uno con 15 observaciones. Quieres probar si las medias de estos conjuntos son iguales utilizando la distribución t de Student. Los datos siguen una distribución t de Student con 14 grados de libertad. Calcula el valor crítico para un nivel de significancia del 0.05 ($\alpha = 0.05$).

Paso 1: Determine los grados de libertad (df) y el nivel de significancia α . Grados de libertad (df) = 14 (para datos con 15 observaciones, $df = n - 1$) Nivel de significancia (α) = 0.05.

Paso 2: Utiliza tablas de distribución t de Student o software estadístico para encontrar el valor crítico t correspondiente al nivel de significancia α con $df = 14$. Supongamos que el valor crítico t es aproximadamente ± 2.145 (dos colas) para $\alpha = 0.05$. Entonces, el valor crítico t para probar la igualdad de las medias es ± 2.145 .

Distribución Singh Maddala

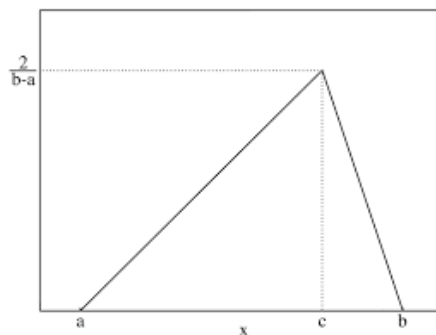
Es popular para analizar datos sobre ingresos, gastos, estudios actuariales, ambientales y de confiabilidad. Para mejorar su alcance y aplicación, proponemos cuatro parámetros transmutados en la distribución de Singh-Maddala en este estudio. La distribución propuesta es relativamente más flexible que la distribución principal para modelar una variedad de conjuntos de datos. Se derivan sus propiedades estadísticas básicas, función de confiabilidad y comportamientos de la función de riesgo. La función de riesgo mostró la forma de bañera decreciente e invertida que se requiere en varios análisis de supervivencia. También se exploran las estadísticas de orden y los momentos TL generalizados con sus casos especiales, como los momentos L, TL, LL y LH. Además, la estimación de máxima verosimilitud se utiliza para estimar los parámetros desconocidos de la distribución de Singh-Maddala transmutada. Se considera que los conjuntos de datos reales ilustran la utilidad y el potencial del modelo propuesto. Los resultados indican que la distribución Singh-Maddala transmutada modela los conjuntos de datos mejor que su distribución principal.



Distribución triangular

Una distribución triangular es una distribución continua que se describe por sus valores mínimos, máximos y su moda. La distribución tiene una forma triangular. Comienza en el valor mínimo, aumenta de manera lineal hasta alcanzar el valor pico en la moda y luego disminuye de manera lineal hasta alcanzar el valor máximo. La forma del triángulo puede ser simétrica o asimétrica. Por ejemplo, la siguiente gráfica ilustra una distribución triangular con parámetros mínimo = 10, moda = 50 y máximo = 150. Se denomina triangular cuando viene definida por dos parámetros, que representan el valor mínimo y el valor máximo de la variable. En este caso el triángulo es equilátero. Se denomina triangular (triangular general), cuando viene dada por tres parámetros, que representan el valor mínimo y el valor máximo de la variable, y el valor del punto en el que el triángulo toma su altura máxima. En este caso el triángulo no es necesariamente equilátero.

La distribución triangular se utiliza normalmente como una descripción subjetiva de una población a lo que solo hay datos de la muestra limitada y sobre todo en los casos en los que la relación entre variables se conoce. Pero los datos son escasos (posiblemente debido al costo de la recaudación). Se basa en el conocimiento de la cantidad mínima y máxima y una "conjetura inspirada" sobre el valor modal. Y es de uso frecuente en la toma de decisiones empresariales, sobre todo en las simulaciones. En general, cuando no se sabe mucho acerca de la distribución de un resultado, (por ejemplo, sólo sus valores y de mayor a menor), es posible utilizar la distribución uniforme. Pero si el resultado más probable es que también se conoce, entonces el resultado puede ser simulado por una distribución triangular.



A continuación, se presentan algunos usos comunes de la distribución triangular en ingeniería:

Estimación de Duración de Proyectos: En la gestión de proyectos, se utiliza la distribución triangular para estimar la duración de actividades o proyectos en situaciones en las que no se dispone de datos históricos precisos. Los valores mínimo, máximo y más probable se utilizan para definir la incertidumbre en la estimación de tiempo.

Estimación de Costos de Proyectos: Similar a la estimación de la duración de proyectos, la distribución triangular se utiliza para estimar costos de proyectos en ingeniería. Esto permite modelar la variabilidad en los costos de mano de obra, materiales y otros recursos.

Evaluación de Riesgos en Ingeniería: La distribución triangular se utiliza en análisis de riesgos para modelar incertidumbre en variables, como la demanda futura de un producto, la resistencia de materiales o la variabilidad de las condiciones ambientales. Esto ayuda a evaluar la probabilidad de que ocurran ciertos eventos no deseados.

Ingeniería de Tráfico: En la ingeniería de tráfico, la distribución triangular se usa para modelar la variabilidad en la demanda de tráfico en ciertas rutas o carreteras. Esto es útil para el diseño de sistemas de transporte y la planificación de la capacidad.

Evaluación de Propiedades de Materiales: En ingeniería de materiales, se utiliza la distribución triangular para modelar propiedades materiales como la resistencia, elasticidad y densidad cuando la información es limitada o se requiere una representación simplificada.

Optimización de Diseño: La distribución triangular a menudo se aplica en la optimización de diseño cuando se buscan valores óptimos para múltiples parámetros, considerando la variabilidad en cada uno de ellos.

La distribución triangular es especialmente útil cuando se desconoce la forma exacta de la distribución de una variable, pero se dispone de información limitada

sobre sus valores extremos y su valor más probable. Permite introducir la incertidumbre en modelos de ingeniería, lo que es fundamental para tomar decisiones basadas en riesgos y gestionar proyectos y procesos de manera efectiva.

Ejemplo

Estimación de la Duración de un Proyecto. Supongamos que estás gestionando un proyecto de construcción. Estimamos que la duración del proyecto puede oscilar entre 10 y 20 meses, con un valor más probable de 15 meses.

Paso 1: Define los parámetros de la distribución triangular:

- Valor mínimo (a) = 10 meses
- Valor máximo (b) = 20 meses
- Valor más probable (c) = 15 meses

Paso 2: Calcula la media (μ) de la distribución triangular:

$$\mu = \frac{a + b + c}{3} = \frac{10 + 20 + 15}{3} = 15 \text{ meses}$$

La media representa la estimación puntual de la duración del proyecto.

Ejemplo

Estimación de Costos de Producción. Supongamos que estás estimando los costos de producción de un componente. Estimamos que los costos pueden variar entre \$200 y \$400, con un costo más probable de \$300.

Paso 1: Define los parámetros de la distribución triangular:

- Valor mínimo (a) = \$200
- Valor máximo (b) = \$400
- Valor más probable (c) = \$300

Paso 2: Calcula la media (μ) de la distribución triangular:

$$\mu = \frac{a + b + c}{3} = \frac{200 + 400 + 300}{3} = \$300$$

La media representa la estimación puntual de los costos de producción.

Distribución Max Stable

El término "máxima estabilidad" no está claro en el contexto de las estadísticas. Es posible que se refiera a un valor máximo de una distribución estable. Una distribución estable es un tipo de distribución de probabilidad que tiene ciertas propiedades, incluido el hecho de que la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esta distribución también se distribuye según la misma distribución. El parámetro más significativo de una distribución estable es el parámetro de estabilidad, α , que satisface $0 < \alpha \leq 2$, correspondiendo el valor máximo a una distribución normal.

El valor $\alpha = 1$ corresponde a la distribución de Cauchy. Las distribuciones estables no tienen una varianza finita si $\alpha < 2$, y no tienen una media finita si $\alpha \leq 1$.

Ejemplo

- El recorrido:

$$R = (x)_{\max} - (x)_{\min} = 0,22 - 0,06 = 0,16$$

- La varianza:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 x_i^2 n_i - a^2 = \frac{0,1586}{8} = 0,125^2 = 0,0042$$

- De la misma forma la desviación típica se obtiene haciendo la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,0042} = 0,06481$$

- La cuasivarianza:

Ejemplo

$$S^2 = \frac{ns^2}{n-1} = \frac{8 * 0,0042}{7} = 0,0048$$

- De la misma forma la cuasidesviación típica:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0,0048} = 0,06928$$

- El coeficiente de variación de Pearson:

$$V_p = \frac{s}{a} * 100 = \frac{0,06481}{0,125} * 100 = 51,848$$

- El coeficiente de asimetría de pearson:

$$A_p = \frac{a - M_d}{s} = \frac{0,125 - 0,06}{0,06481} = 1,00293$$

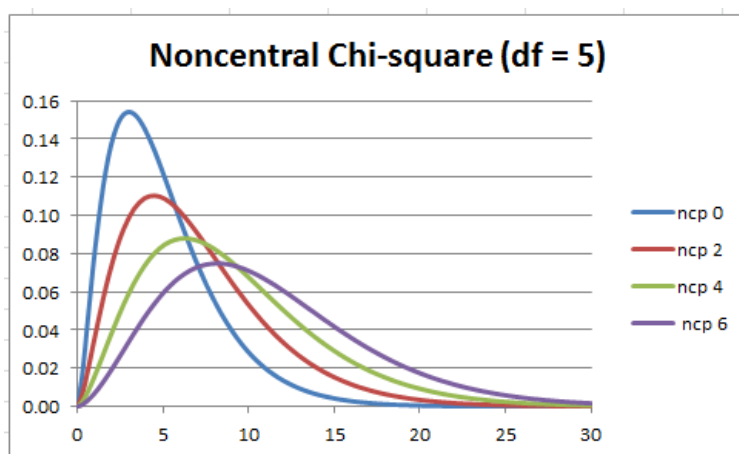
- Por ultimo el coeficiente de asimetría de Fisher:

$$A_f = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - a)^3 * n_i}{n * S^3} = \frac{0,000423}{8 * 0,0003325} = 0,159$$

Distribución Non Central Chi Square

La distribución chi-cuadrado no central es una generalización de la distribución chi-cuadrado que surge en el análisis de poder de pruebas estadísticas en las que la distribución nula es una distribución chi-cuadrado. La distribución chi-cuadrado no central está definida por dos parámetros: los grados de libertad y el parámetro de no centralidad. Los grados de libertad especifican el número de variables aleatorias independientes que se elevan al cuadrado y se suman para formar la distribución chi-cuadrado. El parámetro de no centralidad es la suma de los cuadrados de las medias de cada variable aleatoria normal subyacente independiente. La distribución chi-cuadrado no central tiene varias aplicaciones científicas, incluida la termodinámica y el procesamiento de señales. También se conoce como distribución de Rayleigh generalizada o distribución de Rician. Algunas de las fórmulas equivalentes para la función de distribución chi-cuadrado no central incluyen una función de Bessel modificada del primer tipo y una función límite

hipergeométrica confluyente regularizada. La media de la distribución chi-cuadrado no central es $k + \lambda$ y la varianza es $2(k + 2\lambda)$. Cuando $\lambda = 0$, la distribución chi-cuadrado no central es igual a la distribución chi-cuadrado central, es decir, $\chi^2(k,0) = \chi^2(k)$. La distribución de chi-cuadrado no central se puede utilizar para calcular la potencia de varias pruebas de chi-cuadrado.



Ejemplo

Una fábrica cuenta con tres máquinas para la producción de un mismo producto. Durante la última semana de producción se han producido 135 artículos. El jefe de producción cree que las máquinas no producen en cantidades similares. Por lo que ha solicitado clasifiquen cada producto según la máquina que la ha producido. A continuación se presenta la tabla de frecuencia de las cantidades producidas por cada máquina:

Máquina	A	B	C
Producción	43	53	39

Use nivel de significación 5% para probar si la cantidad producida es la misma en las 3 máquinas.

RESOLUCION:

1P) PLANEAMIENTO DE HIPÓTESIS:

H_0 : La cantidad producida es la misma en las tres máquina.

H_1 : La cantidad producida es distinta en las tres máquinas.

2P) NIVEL DE SIGNIFICACIÓN:

5%

3P) CALCULO ESTADÍSTICO DE PRUEBA:

$$X_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

N°	Categoría variable	O_i	π_i	e_i	$\frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$
1	A	43	0.3333	45	0.08888889
2	B	53	0.3333	45	1.42222222
3	C	39	0.3333	45	0.8
	TOTAL	135	1.0000	135	2.31111111

4P) CRITERIOS DE DECISIÓN:

$$X_c^2 = 2.3111$$

$X_c^2 < X_{crit}^2$ por lo tanto no se rechaza la hipótesis nula.

$$X_{crit}^2 = 5.9915$$

5P) CONCLUSIÓN

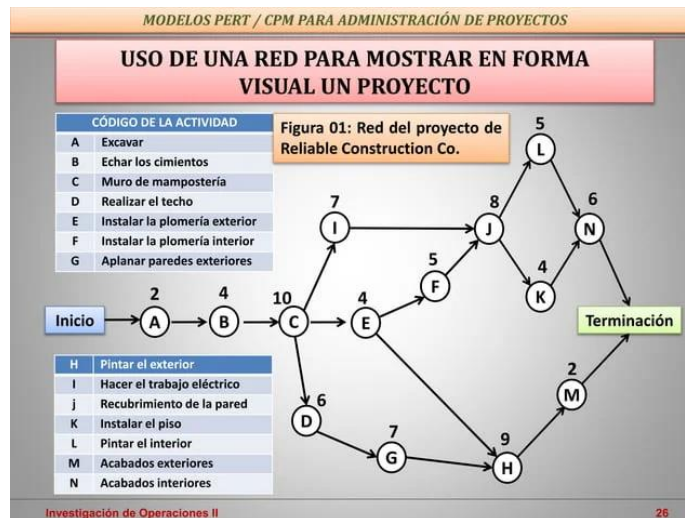
A un nivel de significación del 5%, no se puede rechazar que la cantidad producida es la misma en las 3 máquinas.

Con un nivel de significación de 5% no existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, es decir no se puede afirmar que las tres máquinas no producen lo mismo.

Distribución Pert

Se ilustra, la distribución beta proporciona una forma razonable de repartir los tiempos de actividad, incluido el tener dos extremos <<o y p>> y un solo punto más elevado <<m>> que corresponde a las definiciones de los tres tiempos estimados.

El método de la ruta crítica representa el plan de un proyecto en un diagrama o red, que se describe la secuencia e interrelación de los componentes, así como el análisis lógico y la manipulación de esta red, para la determinación del mejor programa de la operación, el PERT expone la ruta crítica de un proyecto; que las actividades que son de tardarse más de lo programado, atrasan el proyecto total.



Ejemplo

1. Aplicando la fórmula de la Estimación $PERT = [O + (4 \times M) + P] / 6$; obtenemos la duración media esperada.

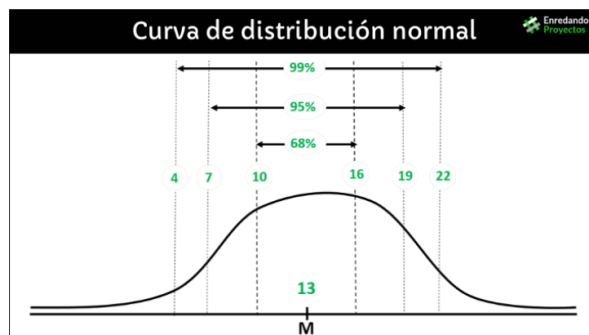
$$PERT = [6 + (4 \times 12) + 24] / 6 = [6 + 48 + 24] / 6 = 78 / 6 = 13. \text{ La estimación para completar esta actividad es de 13 días.}$$

2. Aplicando la fórmula $SD = (P - O) / 6$; obtenemos la desviación estándar (o típica)

$$SD = (24 - 6) / 6 = (18 / 6) = 3. \text{ El rango de variación de la duración de la tarea oscila en 3 días.}$$

Por tanto, la duración de la tarea estará comprendida dentro de los siguientes intervalos:

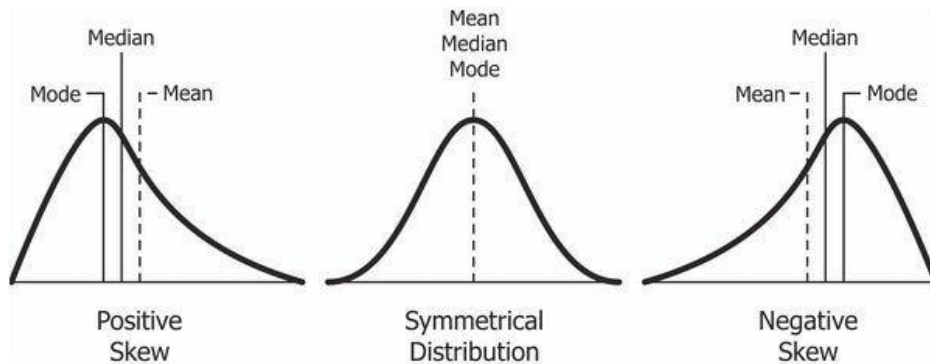
- Entre 10 y 16 días días a un nivel de confianza del 68%
- Entre 7 y 19 días con un nivel de confianza del 95%
- Entre 4 y 22 días con un nivel de confianza del 99%



Distribución Skew Normal

La distribución normal sesgada es una distribución de probabilidad continua que generaliza a la distribución normal. Por otro lado, la distribución skew normal es una distribución de probabilidad continua que generaliza a la distribución normal para permitir asimetría no nula. A continuación, se presenta la definición de distribución skew normal: En teoría de probabilidad y estadística, la distribución skew normal es una distribución de probabilidad continua que generaliza la distribución normal para permitir asimetría no nula. La distribución skew normal se define mediante una

función de densidad de probabilidad que depende de tres parámetros: la media, la desviación estándar y el parámetro de asimetría. El parámetro de asimetría controla la forma de la distribución y puede ser positivo o negativo, lo que indica si la distribución está sesgada hacia la derecha o hacia la izquierda, respectivamente. La distribución skew normal se utiliza en diversas aplicaciones, como en finanzas, ingeniería y ciencias sociales.



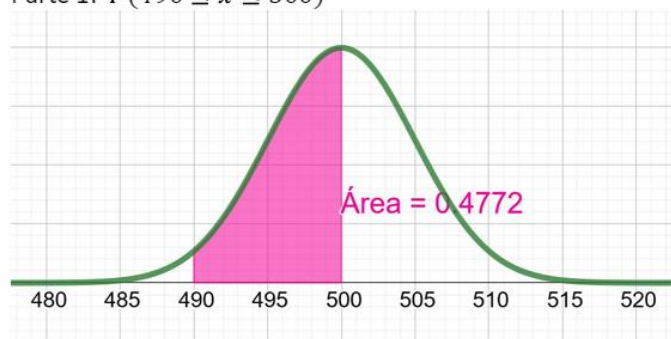
Ejemplo

7. Una fábrica de producción de agua embotellada, cuenta con una máquina de envasado automático, la cual vierte en cada botella una cierta cantidad de agua que sigue una distribución normal con media de 500 mililitros y una varianza de 25 mililitros. ¿Qué porcentaje de las botellas se llenan con agua entre 490 y 507 mililitros?

Solución:

$$\mu = 500 ; \sigma = 25$$

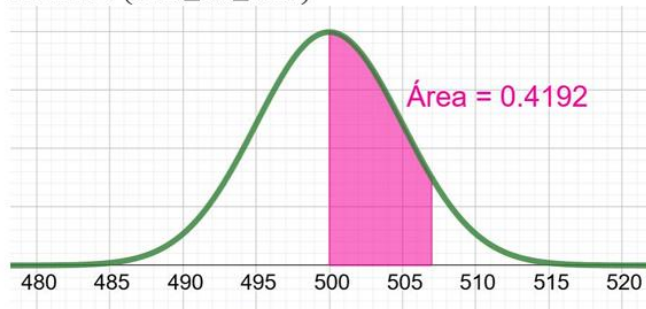
Parte 1: $P(490 \leq x \leq 500)$



$$z_1 = \frac{490 - 500}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$z_1 = -2 \rightarrow z = 2 \rightarrow A = 0.4772$$

Parte 2: $P(500 \leq x \leq 507)$



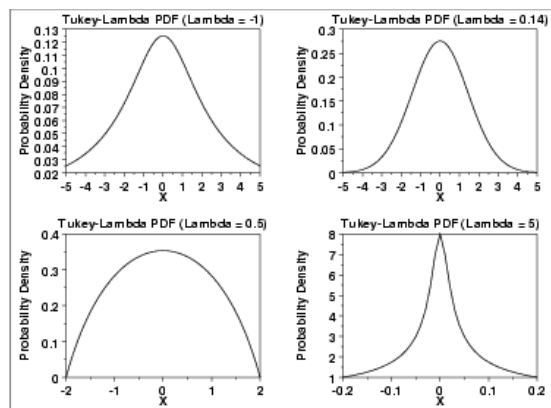
$$z_2 = \frac{507 - 500}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$z_2 = 1,4 \rightarrow A_2 = 0,4192$$

Sumando ambas probabilidades: $0.4772 + 0.4192 = 0.8964$ (respuesta)

Distribución Tukey-Lambda

tiene el parámetro de forma λ . Al igual que con otras distribuciones de probabilidad, la distribución de Tukey-Lambda se puede transformar con un parámetro de ubicación, μ , y un parámetro de escala, σ . Dado que la forma general de las funciones de probabilidad se puede expresar en términos de la distribución estándar de la función. La distribución Tukey-Lambda se utiliza normalmente para identificar una distribución adecuada (consulte los comentarios a continuación) y no se utiliza directamente en modelos estadísticos. Por esta razón, omitimos las fórmulas y los gráficos de las funciones de riesgo, riesgo acumulativo, supervivencia y supervivencia inversa. También omitimos las secciones comunes de estadística y estimación de parámetros.



Ejemplo

La convección es una forma de transferencia de calor por los fluidos debido a sus variaciones de densidad por la temperatura; las partes calientes ascienden y las frías descienden formando las corrientes de convección que hacen uniforme la temperatura del fluido. Se ha realizado un experimento para determinar las modificaciones de la densidad de fluido al elevar la temperatura en una determinada zona. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

ANOVA

T1	T2	T3	T4						
21,8	21,7	21,9	21,9		0,005719141	0,00	0,03084414	0,03084414	
21,9	21,4	21,8	22,1		0,030844141	0,11	0,00571914	0,14109414	
21,7	21,5	21,8	21,85		0,000594141	0,05	0,00571914	0,01578164	
21,6	21,4	21,6	21,9		0,015469141	0,11	0,01546914	0,03084414	
21,7		21,5			0,000594141		0,05034414		
21,74	21,5	21,72	21,9375	21,72	0,053220703	0,26	0,1080957	0,21856406	SCT 0,64125703

N = 18

K = 4

0,001220703	0,201376563	9,57031E-05	0,181689062	SCF 0,384382031
0,0036	0,04	0,0324	0,00140625	
0,0256	0,01	0,0064	0,02640625	
0,0016	0	0,0064	0,00765625	
0,0196	0,01	0,0144	0,00140625	
0,0016		0,0484		SCR 0,256875
0,052	0,06	0,108	0,036875	

SCF+SCR
0,64125703

TABLA RESUMEN ANOVA

ORIGEN VARIACION	SUMA DE CUADRADOS	GDL	CUADRADO MEDIO (CUASIVARIANZAS)	ESTADISTICO F		
TOTAL	0,64125703 1	17		Fexp =	SE2/SD 2	6,9830961 1
ENTRE TRATAMIENTOS	0,38438203	3	SE2 = SCF/k-1 0,12812734	Fteo = F _{3,16}	3,344	

Distribución Maxwell-Boltzmann

Esta distribución se aplica al caso clásico, esto es, cuando las partículas se encuentran separadas distancias considerables y son distinguibles. Desde el punto de vista cuántico, las funciones de onda no se traslapan considerablemente.

El número de partículas n con una energía dada E estará dado por

$$n(E) = g(E)f(E)$$

dónde $g(E)$ es el número de estados de energía E y corresponde al peso estadístico de la energía E . $f(E)$, es la función de distribución y corresponde al número promedio de partículas en cada estado de energía E , así como la probabilidad de ocupar cada estado de dicha energía. La función de distribución en términos de la temperatura absoluta es:

$$f_{MB}(E) = Ae^{\frac{-E}{kT}}$$

Combinando estas expresiones se obtiene que

$$n(E) = Ag(E)e^{\frac{-E}{kT}}$$

Al aplicar estos resultados a un gas ideal, se considera que el número de moléculas es muy grande, y entonces la distribución de energías puede considerarse continua. El término $n(E)dE$, corresponde a las moléculas cuyas energías se encuentren entre E , y $E+dE$.

Para encontrar el factor de peso $g(E)$ es necesario conocer el número de estados con energías en el intervalo E y $E+dE$. Al utilizar el espacio de momentum con $V=4\pi p^2 dp$, el número de estados de momentum estará dado por:

$$g(p)dp = Bp^2 dp$$

donde la constante B corresponde a $\frac{4\pi V}{h^3}$. [?, 213]

Dado que cada magnitud de momentum corresponde a una energía determinada, el número de estados de energía $g(E)dE$ es el mismo para el número de estados de momentum $g(p)dp$, lo que permite no utilizar la función de partición

$$Z = \int_0^\infty \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}$$

para integrar en términos de momentum, sino utilizar la energía, β corresponde al término $\frac{1}{kT}$ y $p^2 = 2mE$. Esta función es descrita en el capítulo 3, tal que

$$g(E)dE = 2m^{\frac{3}{2}} B \sqrt{E} dE = 8 \left(\frac{m^{\frac{3}{2}} \pi V}{h^3} \right) \sqrt{E} dE$$

El número de moléculas con energías

entre E y $E + dE$ será: $n(E)dE = C\sqrt{E}e^{-\beta E}dE$, para encontrar la constante se utiliza la condición de normalización donde

$$N = \int_0^\infty n(E)dE$$

y representa el número total de moléculas. Entonces

$$N = \int_0^\infty n(E)dE = cN = \int_0^\infty \sqrt{E}e^{-\beta E}dE = \frac{C}{2}\sqrt{\pi}(\beta)^{-\frac{3}{2}}$$

despejando C obtenemos

$$C = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} = 2m^{\frac{3}{2}} A \left(\frac{4\pi V}{h^3} \right)$$

y la distribución molecular de energía queda como:

$$n(E)dE = \frac{2\pi N}{(\pi kt)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{E}e^{-\beta E}dE.$$

Con estos datos es posible ahora calcular la **energía total** del sistema y luego encontrar la energía promedio por molécula:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^{\infty} E n(E) dE = \\
 &= - \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} (E)^{3/2} e^{-\beta E} dE \\
 E &= \frac{3}{2} NkT
 \end{aligned}$$

y para calcular la **energía promedio en un gas ideal** (E/N)

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT$$

lo que es independiente de la masa de las moléculas. Esto corresponde solamente a la energía traslacional del estado s de las moléculas.

Distribucion NoncentralFRatic o Distribucion F no central

En teoría de probabilidad y estadística , la distribución F no central es una distribución de probabilidad continua que es una generalización no central de la distribución F (ordinaria) . Describe la distribución del cociente $(X / n_1) / (Y / n_2)$, donde el numerador X tiene una distribución chi-cuadrado no central con n_1 grados de libertad y el denominador Y tiene una distribución chi-cuadrado central con n_2 grados de libertad. También se requiere que X e Y sean estadísticamente independientes entre sí.

Es la distribución del estadístico de prueba en problemas de análisis de varianza cuando la hipótesis nula es falsa. La distribución F no central se utiliza para encontrar la función de potencia de dicha prueba.

Si X es una variable aleatoria chi-cuadrado no central con parámetro de no centralidad Lambda y v_1 grados de libertad y Y es una variable aleatoria chi cuadrado con v_2 grados de libertad que son estadísticamente independientes de X, entonces:

$$F = \frac{X/\nu_1}{Y/\nu_2}$$

es una variable aleatoria distribuida F no central. La función de densidad de probabilidad para la distribución F no central es:

$$p(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda/2} (\lambda/2)^k}{B\left(\frac{\nu_2}{2}, \frac{\nu_1}{2} + k\right) k!} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2} + k} \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + \nu_1 f}\right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + k} f^{\nu_1/2 - 1 + k}$$

cuando $f \geq 0$ y cero en caso contrario. Los grados de libertad ν_1 y ν_2 son positivos. El término $B(x, y)$ es la función beta, donde

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

La función de distribución acumulativa para la distribución F no central es

$$F(x | d_1, d_2, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^j}{j!} e^{-\lambda/2} \right) I\left(\frac{d_1 x}{d_2 + d_1 x} \middle| \frac{d_1}{2} + j, \frac{d_2}{2}\right)$$

dónde I es la función beta incompleta regularizada.

La media y la varianza de la distribución F no central son

$$E[F] = \begin{cases} = \frac{\nu_2(\nu_1 + \lambda)}{\nu_1(\nu_2 - 2)} & \text{if } \nu_2 > 2 \\ \text{does not exist} & \text{if } \nu_2 \leq 2 \end{cases}$$

y

$$\text{Var}[F] = \begin{cases} = 2 \frac{(\nu_1 + \lambda)^2 + (\nu_1 + 2\lambda)(\nu_2 - 2)}{(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 & \text{if } \nu_2 > 4 \\ \text{does not exist} & \text{if } \nu_2 \leq 4. \end{cases}$$

Distribución U-Power

La distribución de energía en U es una familia de distribuciones en forma de U basada en una familia simple de funciones de potencia.

La distribución de potencia U estándar con parámetro de forma $k \in \mathbb{N}^+$ es una distribución continua $[-1, 1]$ con función de densidad de probabilidad g dada por:

$$g(x) = \frac{2k+1}{2} x^{2k}, \quad x \in [-1, 1]$$

La forma algebraica de la función de densidad de probabilidad explica el nombre de la distribución. La más común de las distribuciones de potencia U estándar es la distribución cuadrática U, que corresponde $k=1$.

La función estándar de densidad de probabilidad de potencia U g satisface las siguientes propiedades:

g es simétrico sobre $x=0$

g disminuye y luego aumenta con el valor mínimo en $x=0$

Los modos son $x=\pm 1$

g es cóncavo hacia arriba.

La función de distribución G dada por

$$G(x) = \frac{1}{2} (1 + x^{2k+1}), \quad x \in [-1, 1]$$

La función cuantil G^{-1} dada por $G^{-1}(p) = (2p - 1)^{1/(2k+1)}$ for $p \in [0, 1]$.

1. $G^{-1}(1 - p) = -G^{-1}(p)$ para $p \in [0, 1]$.

2. El primer cuartil es $q_1 = -\frac{1}{2^{1/(2k+1)}}$.

3. La mediana es 0.

4. El tercer cuartil es $q_3 = \frac{1}{2^{1/(2k+1)}}$.

Supongamos que Z tiene la distribución de potencia U estándar con parámetro $k \in \mathbb{N}^+$. Los momentos (aproximadamente 0) son fáciles de calcular.

Vamos $n \in \mathbb{N}$. El momento del orden $2n + 1$ es $\mathbb{E}(Z^{2n+1}) = 0$. El momento del orden $2n$ es

$$\mathbb{E}(Z^{2n}) = \frac{2k + 1}{2(n + k) + 1}$$

Como la media es 0, los momentos alrededor de 0 son también los momentos centrales.

La media y varianza de Z son:

$$\begin{aligned} 1. \mathbb{E}(Z) &= 0 \\ 2. \text{var}(Z) &= \frac{2k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $\text{var}(Z) \rightarrow 1$ como $k \rightarrow \infty$

La asimetría y curtosis de Z son:

$$\begin{aligned} 1. \text{skew}(Z) &= 0 \\ 2. \text{kurt}(Z) &= \frac{(2k+3)^2}{(2k+5)(2k+1)} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $\text{kurt}(Z) \rightarrow 1$ como $k \rightarrow \infty$. El *exceso de curtosis* es

$$-3 = \frac{(2k+3)^2}{(2k+5)(2k+1)} - 3 \text{ y así } \text{kurt}(Z) - 3 \rightarrow -2 \text{ como } k \rightarrow \infty.$$

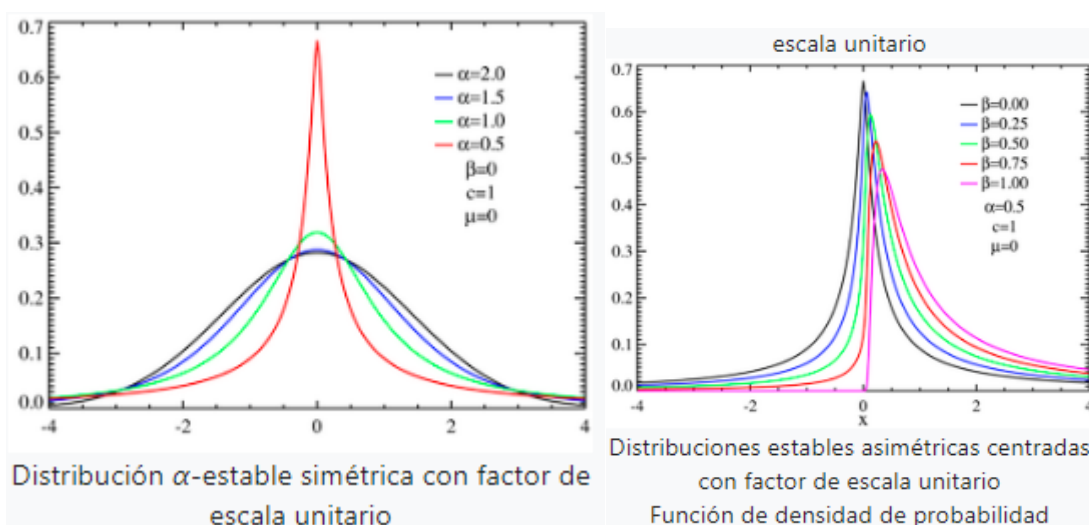
Distribución Stable

En teoría de la probabilidad, una distribución se denomina estable (o una variable aleatoria se denomina estable) si es una combinación lineal de dos o más copias independientes de una muestra aleatoria que tiene la misma distribución de probabilidad, salvo por quizá algún parámetro de localización o factor de escala.

La familia de distribuciones estables a veces se denomina también distribución α -estable de Lévy, en honor a Paul Lévy, el primero en estudiar este tipo de distribuciones.

De los cuatro parámetros que definen una distribución estable, el más significativo es el parámetro de estabilidad, α . Las distribuciones estables satisfacen que $0 < \alpha \leq 2$, correspondiendo el valor máximo con una distribución normal (que es el caso más sencillo de distribución estable). El valor $\alpha = 1$ corresponde a la distribución de Cauchy. Las distribuciones estables no tienen una varianza finita si $\alpha < 2$, más aún si $\alpha \leq 1$ ni siquiera tienen media finita. La importancia práctica de las distribuciones estables es que son "atractores" para la distribución de sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (que además pertenecen

a espacios L_p). La distribución normal define una subfamilia de distribuciones estables. Por el clásico teorema del límite central la suma de un conjunto de variables con idéntica distribución e independientes y que además tenga varianza finita, tenderá a una distribución normal a medida que el número de variables que interviene en la suma crece. Sin la restricción de varianza finita, el teorema del límite central no será aplicable, pero la suma de esas variables tenderá hacia una distribución estable ($\alpha < 2$).



Una distribución no degenerada es estable si satisface la siguiente propiedad:

Sean X_1 y X_2 dos copias de una variable aleatoria X (es decir, dos instancias de variables aleatorias independientes, de variables que tienen la misma distribución que X). Entonces X se denomina **estable** si existen dos constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que la nueva variable aleatoria $aX_1 + bX_2$ tenga la misma distribución que $cX + d$ para otras dos constantes $c > 0$ y d . La distribución se llama *estictamente estable* si esto sigue siendo cierto aún con $d = 0$. [6]

Puesto que la distribución normal, la distribución de Cauchy y la distribución de Lévy satisfacen esta propiedad, son casos particulares de distribuciones estables. Más aún, Lévy demostró que el conjunto de todas las distribuciones estables puede representarse como una familia dada por cuatro parámetros de distribuciones

continuas. Dos de los parámetros representan el parámetro de localización μ y el factor de escala c , mientras que los otros dos β y α , se corresponden con el grado de asimetría y concentración (ver gráficas de la ficha lateral).

Aunque la densidad de probabilidad de estas distribuciones estables no admite una fórmula analítica cerrada (expresable en términos de funciones elementales), sin embargo, su función característica si admite una fórmula analítica cerrada. Cualquier distribución de probabilidad dada por la transformada de Fourier de una función característica $\varphi(t)$ del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt$$

Una variable aleatoria X es estable si su función característica puede escribirse como

$$\varphi(t; \alpha, \beta, c, \mu) = \exp[it\mu - |ct|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)\Phi)]$$

donde $\operatorname{sgn}(t)$ es simplemente la función signo de t y Φ viene dada por

$$\Phi = \tan(\pi\alpha/2)$$

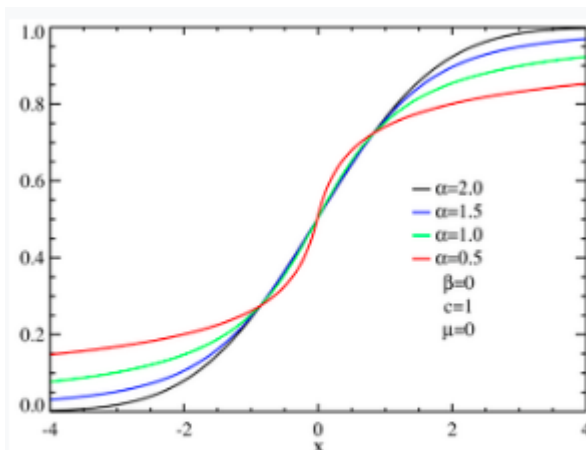
para todo α , excepto $\alpha = 1$, en cuyo caso:

$$\Phi = -\frac{2}{\pi} \log |t|.$$

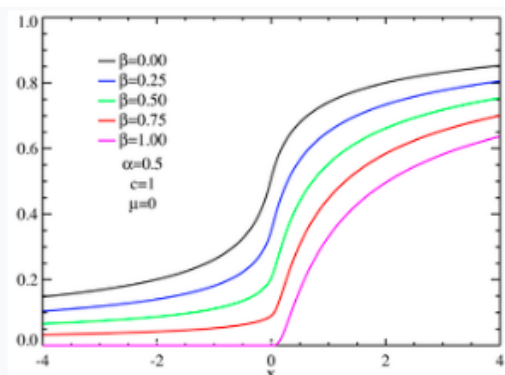
$\mu \in \mathbf{R}$ es un parámetro de localización y $\beta \in [-1, 1]$ se denomina *parámetro de asimetría*. Nótese que en este contexto la asimetría "usual" no está bien definida, cuando $\alpha < 2$ ya que la distribución no admite momentos de segundo orden ni superiores (pero la asimetría usual usa en su definición el tercer momento central).

La razón de que una distribución que satisface las condiciones anteriores sea estable es que la función característica para la suma de dos variables aleatorias es igual al producto de las correspondientes funciones características. Al sumar dos variables aleatorias que tienen una distribución estable se obtiene otra variable con los mismos valores de α y β , pero posiblemente valores diferentes de μ y c (cambia la localización y la escala, pero no la el parámetro de estabilidad ni el parámetro de asimetría).

No cualquier función es la función característica de una distribución de probabilidad legítima, ya que una función de distribución real varía entre 0 y 1 son decrecer, pero la función característica dada anteriormente podría no ser adecuada si los parámetros no están dentro del rango adecuado. El valor de la función característica para cierto valor t es el complejo conjugado de su valor en $-t$ como debería ser para que una función de distribución sea real. En el caso más sencillo $\beta = 0$, la función característica es simplemente una función exponencial estirada, la distribución es simétrica alrededor de μ y en ese caso se denomina **distribución α -estable simétrica de Lévy**, frecuentemente abreviada como S α S. Cuando $\alpha < 1$ y $\beta = 1$, la distribución tiene un soporte en $[\mu, \infty)$. El parámetro $c > 0$ es un factor de escala que mide el ancho típico de la distribución mientras que α es el exponente o índice de la distribución que especifica el comportamiento asintótico de dicha distribución.



Función de distribución para las distribuciones α -estables simétricas



Función de distribución para distribuciones estables asimétricas
Función de distribución de probabilidad

Distribución Uniforme

La distribución uniforme es una distribución de probabilidad en la que es igualmente probable que ocurra todo valor entre un intervalo de a a b .

Si una variable aleatoria X sigue una distribución uniforme, entonces la probabilidad de que X tome un valor entre x_1 y x_2 se puede encontrar mediante la siguiente fórmula:

$$P(x_1 < X < x_2) = (x_2 - x_1) / (b - a)$$

dónde:

x_1 : el valor de interés más bajo

x_2 : el valor superior de interés

a : el valor mínimo posible

b : el valor máximo posible

Por ejemplo, suponga que el peso de los delfines se distribuye uniformemente entre 100 libras y 150 libras.

Si seleccionamos al azar un delfín al azar, podemos usar la fórmula anterior para determinar la probabilidad de que el delfín elegido pese entre 120 y 130 libras:

$$P(120 < X < 130) = (130 - 120) / (150 - 100)$$

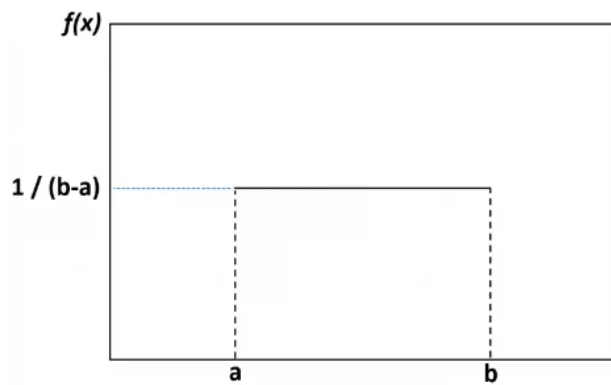
$$P(120 < X < 130) = 10/50$$

$$P(120 < X < 130) = 0,2$$

La probabilidad de que el delfín elegido pese entre 120 y 130 libras es 0,2.

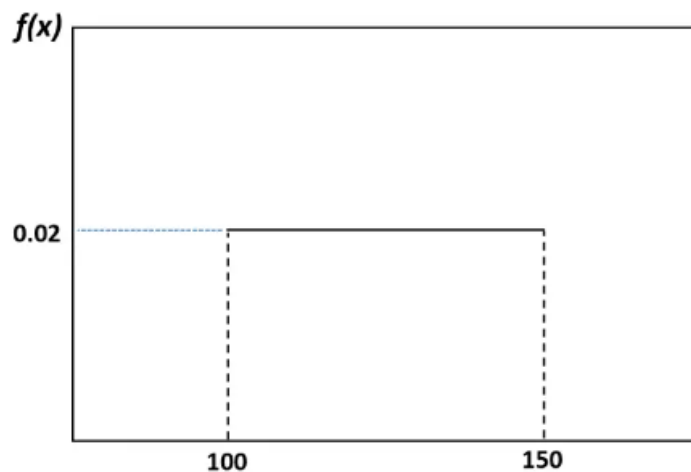
Visualización de la distribución uniforme

Si creamos una gráfica de densidad para visualizar la distribución uniforme, se vería como la siguiente gráfica:

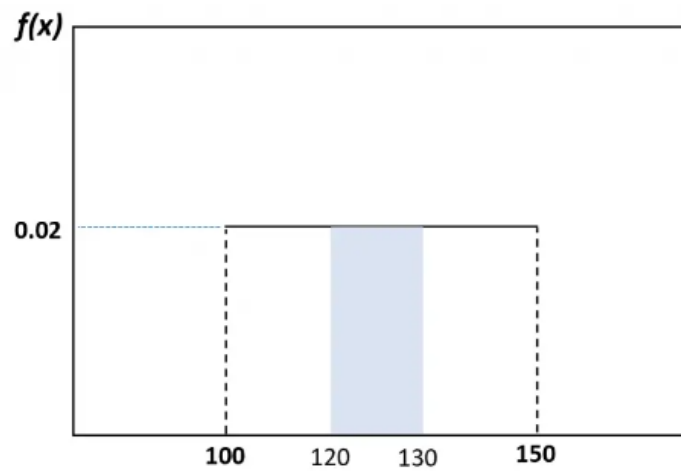


Cada valor entre el límite inferior de una y límite superior b es igualmente probable que ocurra y cualquier valor fuera de esos límites tiene una probabilidad de cero.

Por ejemplo, en nuestro ejemplo anterior dijimos que el peso de los delfines se distribuye uniformemente entre 100 libras y 150 libras. A continuación, le mostramos cómo visualizar esa distribución:



Y la probabilidad de que un delfín seleccionado al azar pese entre 120 y 130 libras se puede visualizar de la siguiente manera:



Propiedades de la distribución uniforme

La distribución uniforme tiene las siguientes propiedades:

Media: $(a + b) / 2$

Mediana: $(a + b) / 2$

Desviación estándar: $\sqrt{(b - a)^2 / 12}$

Varianza: $(b - a)^2 / 12$

Por ejemplo, suponga que el peso de los delfines se distribuye uniformemente entre 100 libras y 150 libras.

Podríamos calcular las siguientes propiedades para esta distribución:

Peso medio: $(a + b) / 2 = (150 + 100) / 2 = 125$

Peso medio: $(a + b) / 2 = (150 + 100) / 2 = 125$

Desviación estándar de peso: $\sqrt{(150 - 100)^2 / 12} = 14,43$

Varianza de peso: $(150 - 100)^2 / 12 = 208,33$

Problemas de práctica de distribución uniforme

Utilice los siguientes problemas de práctica para evaluar su conocimiento de la distribución uniforme.

Pregunta 1: Un autobús aparece en una parada de autobús cada 20 minutos. Si llega a la parada del autobús, ¿cuál es la probabilidad de que el autobús llegue en 8 minutos o menos?

Solución 1: La cantidad mínima de tiempo que tendrías que esperar es 0 minutos y la cantidad máxima es 20 minutos. El valor más bajo de interés es 0 minutos y el valor más alto de interés es 8 minutos.

Por lo tanto, calcularíamos la probabilidad como:

$$P(0 < X < 8) = (8-0) / (20-0) = 8/20 = 0,4 .$$

Pregunta 2: La duración de un partido de la NBA se distribuye uniformemente entre 120 y 170 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que un partido de la NBA seleccionado al azar dure más de 155 minutos?

Solución 2: El tiempo mínimo es de 120 minutos y el tiempo máximo es de 170 minutos. El valor más bajo de interés es de 155 minutos y el valor más alto de interés es de 170 minutos.

Por lo tanto, calcularíamos la probabilidad como:

$$P(155 < X < 170) = (170-155) / (170-120) = 15/50 = 0,3 .$$

Pregunta 3: El peso de una determinada especie de rana se distribuye uniformemente entre 15 y 25 gramos. Si selecciona una rana al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la rana pese entre 17 y 19 gramos?

Solución 3: El peso mínimo es de 15 gramos y el máximo de 25 gramos. El valor más bajo de interés es de 17 gramos y el valor superior de interés es de 19 gramos.

Por lo tanto, calcularíamos la probabilidad como:

$$P(17 < X < 19) = (19-17) / (25-15) = 2/10 = 0,2$$

Distribución de arroz (RICE)

Donde $I_0(z)$ es una función de Bessel modificada de primer tipo y $Z > 0$. Para una derivación. Para $|v| = 0$, esto se reduce a la distribución de Rayleigh .

$$P(Z) = \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2 + |V|^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Z|V|}{\sigma^2}\right),$$

Distribución t de Student no central

Una generalización de la distribución de Student t conocida como t distribución de Student no central viene dada por:

$$P(x) = \frac{n^{n/2} n!}{2^n e^{\lambda^2/2} (n+x^2)^{n/2} \Gamma(\frac{1}{2}n)} \left\{ \frac{\sqrt{2} \lambda x {}_1F_1\left(\frac{1}{2}n+1; \frac{3}{2}; \frac{\lambda^2 x^2}{2(n+x^2)}\right)}{(n+x^2) \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1)\right]} + \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}(n+1); \frac{1}{2}; \frac{\lambda^2 x^2}{2(n+x^2)}\right)}{\sqrt{n+x^2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)} \right\},$$

Donde $\Gamma(z)$ es la función gamma y ${}_1F_1(a;b;z)$ es una función hipergeométrica confluyente de primer tipo. Esta distribución se implementa en Wolfram Language como NoncentralStudentTDistribution [n , lambda].

La media y la varianza están dadas por

$$\mu = \lambda \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-1))}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\lambda^2 + 1)n}{n-2} - \frac{\lambda^2 n [\Gamma(\frac{1}{2}(n-1))]^2}{2 [\Gamma(\frac{1}{2}n)]^2}.$$

Distribuciones de probabilidad discretas

Distribución uniforme discreta (a,b)

La distribución uniforme discreta describe el comportamiento de una variable discreta que puede tomar n valores distintos con la misma probabilidad cada uno de ellos. Un caso particular de esta distribución, que es la que se incluye en este módulo de Epidat 4, ocurre cuando los valores son enteros consecutivos. Esta distribución asigna igual probabilidad a todos los valores enteros entre el límite inferior y el límite superior que definen el recorrido de la variable. Si la variable puede tomar valores entre a y b , debe ocurrir que b sea mayor que a , y la variable toma los valores enteros empezando por a , $a+1$, $a+2$, etc. hasta el valor máximo b .

Por ejemplo, cuando se observa el número obtenido tras el lanzamiento de un dado perfecto, los valores posibles siguen una distribución uniforme discreta en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y la probabilidad de cada cara es $1/6$. Valores: $k: a, a+1, a+2, \dots, b$, números enteros Parámetros: a : mínimo, a entero b : máximo, b entero con $a < b$ Ejemplo El temario de un examen para un proceso selectivo contiene 50 temas, de los cuales se elegirá uno por sorteo. Si una persona no ha estudiado los 15 últimos temas ¿cuál es la probabilidad de que salga un tema que haya estudiado? La variable que representa el número del tema seleccionado para el examen sigue una distribución uniforme con parámetros $a = 1$ y $b = 50$. La persona ha estudiado los temas del 1 al 35; por tanto, la probabilidad que se pide es la cola a la izquierda de 35. Para obtener los resultados en Epidat 4 basta con proporcionarle los parámetros de la distribución, y seleccionar la opción de calcular probabilidades para el punto 35.

Resultados con Epidat 4:

Datos:

Distribución uniforme discreta (a, b)

Parámetros:

a: Mínimo

1

b: Máximo

50

Resultados:

Punto k	Probabilidad punto k	Cola izquierda $Pr[X \leq k]$	Cola derecha $Pr[X > k]$
35	0,02	0,7	0,3

Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
25,5	208,25	0	-1,201

La persona tiene una probabilidad del 70% de que el tema elegido sea uno de los que haya estudiado.

Distribución binomial (n,p)

Es una distribución discreta muy importante que surge en muchas aplicaciones bioestadísticas. Fue obtenida por Jakob Bernoulli (1654-1705) y publicada en su obra póstuma *Ars Conjectandi* en 1713. Esta distribución aparece de forma natural al realizar repeticiones independientes de un experimento que tenga respuesta binaria, generalmente clasificada como “éxito” o “fracaso”; este experimento recibe el nombre de experimento de Bernoulli. Ejemplos de respuesta binaria pueden ser el hábito de fumar (sí/no), si un paciente hospitalizado desarrolla o no una infección, o si un artículo de un lote es o no defectuoso. La variable discreta que cuenta el número de éxitos en n pruebas independientes de ese experimento, cada una de ellas con la misma probabilidad de “éxito” igual a p , sigue una distribución binomial de parámetros n y p , que se denota por $(Bi(n,p))$. Este modelo se aplica a poblaciones finitas de las que se toman elementos al azar con reemplazo, y también a poblaciones conceptualmente infinitas, como por ejemplo las piezas que produce una máquina, siempre que el proceso de producción sea estable (la proporción de piezas defectuosas se mantiene constante a largo plazo) y sin memoria (el resultado de cada pieza no depende de las anteriores). Un ejemplo de variable binomial puede ser el número de pacientes con cáncer de pulmón ingresados en una unidad hospitalaria. Un caso particular se tiene cuando $n=1$, que da lugar a la distribución de Bernoulli. En Epidat 4 el número de pruebas de la distribución binomial está

limitado a 1.000; para valores superiores no es posible realizar el cálculo. Esta restricción no debe ser considerada un inconveniente dado que, cuando se tiene un número de pruebas “grande”, la distribución binomial se aproxima a una distribución normal de media np y varianza np .

Valores:

k : 0, 1, 2, ..., n

Parámetros:

n : número de pruebas, $n \geq 1$ entero

p : probabilidad de éxito, $0 < p < 1$

Ejemplo En un examen formado por 20 preguntas, cada una de las cuales se responde declarando “verdadero” o “falso”, el alumno sabe que, históricamente, en el 75% de los casos la respuesta correcta es “verdadero” y decide responder al examen tirando dos monedas: pone “falso” si ambas monedas muestran una cara y “verdadero” si al menos hay una cruz. Se desea saber cuál es la probabilidad de que tenga más de 14 aciertos. Hay que proporcionarle a Epidat 4 los parámetros de la distribución binomial y el punto k a partir del cual se calculará la probabilidad. En este caso $n = 20$, $p = 0,75$ y el punto $k = 14$.

Resultados con Epidat 4:

Datos:

Distribución binomial (n, p)

Parámetros:

n: Número de pruebas

20

p: Probabilidad de éxito

0,75

Resultados:

Punto k	Probabilidad punto k	Cola izquierda $Pr[X \leq k]$	Cola derecha $Pr[X > k]$
14	0,1686	0,3828	0,6172

Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
15	3,75	-0,2582	-0,0333

La probabilidad de que el alumno tenga más de 14 aciertos es del 62%. El programa, además de calcular probabilidades, proporciona los valores característicos de la distribución (media, varianza, asimetría y curtosis) como información complementaria. Esta información depende solo de los parámetros de la distribución, no se ve influida por la opción elegida a la hora de realizar el cálculo (probabilidades o puntos) ni por el punto o probabilidad sobre el que se realiza dicho cálculo. En este ejemplo, la media indica que 15 es el número medio de aciertos mediante la técnica de tirar dos monedas.

Distribución Poisson (λ)

La distribución de Poisson debe su nombre al matemático francés Simeón Denis Poisson (1781-1840), aunque ya había sido introducida en 1718 por Abraham De Moivre (1667-1754) como una forma límite de la distribución binomial que surge cuando se observa un evento raro después de un número grande de repeticiones [12]. En general, la distribución de Poisson de parámetro λ se puede utilizar como una aproximación de la binomial, $\text{Bin}(n, p)$, si el número de pruebas n es grande, pero la probabilidad de éxito p es pequeña, siendo $\lambda = np$; podemos considerar que la aproximación Poisson-binomial es “buena” si $n \geq 20$ y $p \leq 0,05$ y “muy buena” si $n \geq 100$ y $p \leq 0,01$. La distribución de Poisson también surge cuando un evento o suceso “raro” ocurre aleatoriamente en el espacio o el tiempo. La variable asociada es el número de ocurrencias del evento en un intervalo o espacio continuo, por tanto, es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros de 0 en adelante (0, 1, 2,...). Así, el número de pacientes que llegan a un consultorio en un lapso dado, el número de llamadas que recibe un servicio de atención a urgencias durante 1 hora, el número de células anormales en una superficie histológica o el número de glóbulos blancos en un milímetro cúbico de sangre son ejemplos de variables que siguen una distribución de Poisson. En general, es una distribución muy utilizada en diversas áreas de la investigación médica y, en particular, en epidemiología. El concepto de evento “raro” o poco frecuente debe ser entendido en el sentido de que la probabilidad de observar k eventos decrece rápidamente a medida que k aumenta. Supóngase, por ejemplo, que el número de reacciones adversas tras la

administración de un fármaco sigue una distribución de Poisson de media $\lambda = 2$. Si se administra este fármaco a 1.000 individuos, la probabilidad de que se produzca una reacción adversa ($k = 1$) es 0,27; los valores de dicha probabilidad para $k = 2, 3, 4, 5, 6$ reacciones, respectivamente, son: 0,27; 0,18; 0,09; 0,03 y 0,01. Para $k = 10$ o mayor, la probabilidad es virtualmente 0. El rápido descenso de la probabilidad de que se produzcan k reacciones adversas a medida que k aumenta puede observarse claramente en el gráfico de la función de masa de probabilidad obtenido con Epidat 4:



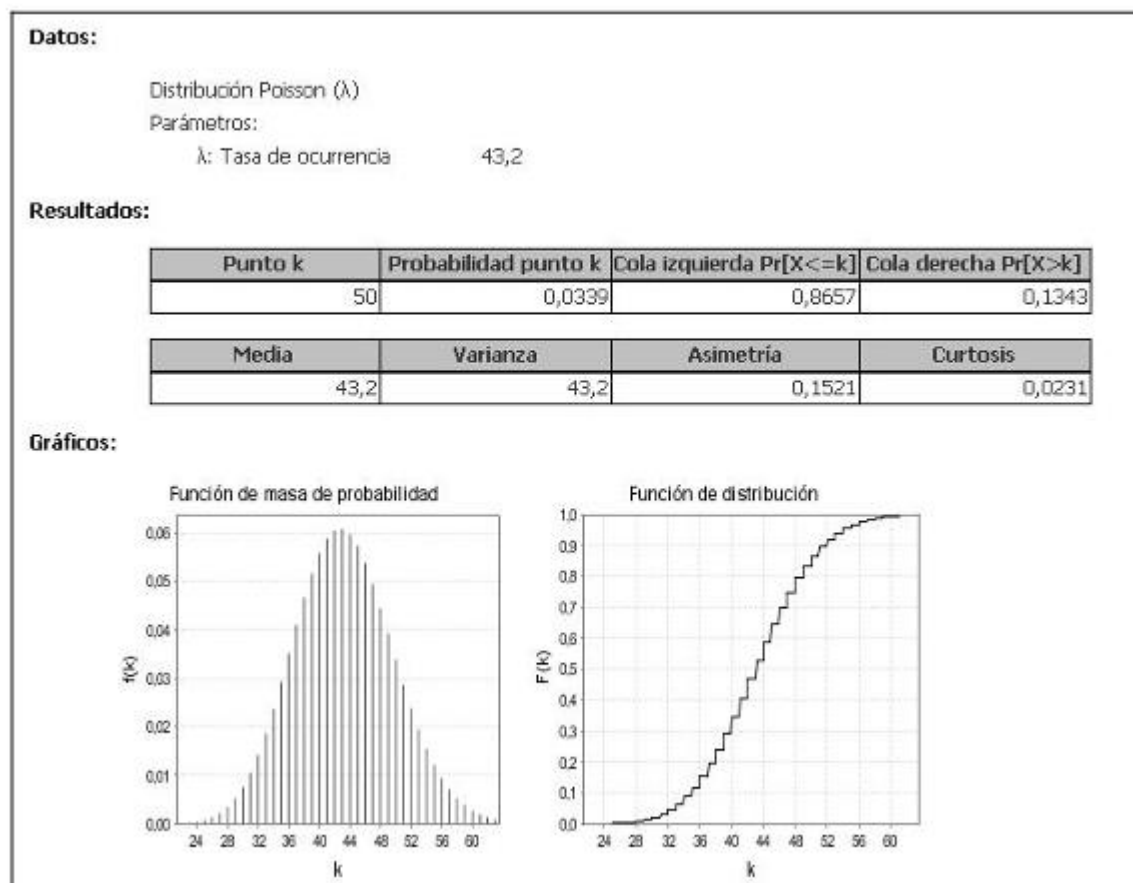
Para que una variable recuento siga una distribución de Poisson deben cumplirse varias condiciones: 1. En un intervalo muy pequeño (p. e. de un milisegundo) la probabilidad de que ocurra un evento es proporcional al tamaño del intervalo. 2. La probabilidad de que ocurran dos o más eventos en un intervalo muy pequeño es tan reducida que, a efectos prácticos, se puede considerar nula. 3. El número de ocurrencias en un intervalo pequeño no depende de lo que ocurra en cualquier otro intervalo pequeño que no se solape con aquél. Estas propiedades pueden resumirse en que el proceso que genera una distribución de Poisson es estable (produce, a largo plazo, un número medio de sucesos constante por unidad de observación) y no tiene memoria (conocer el número de sucesos en un intervalo no ayuda a predecir el número de sucesos en el siguiente). El parámetro de la distribución, λ ,

representa el número promedio de eventos esperados por unidad de tiempo o de espacio, por lo que también se suele hablar de λ como "la tasa de ocurrencia" del fenómeno que se observa. A veces se usan variables de Poisson con "intervalos" que no son espaciales ni temporales, sino de otro tipo. Por ejemplo, para medir la frecuencia de una enfermedad se puede contar, en un período dado, el número de enfermos en cierta población dividida en "intervalos" de, por ejemplo, 10.000 habitantes. Al número de personas enfermas en una población de tamaño prefijado, en un instante dado, se le denomina prevalencia de la enfermedad en ese instante y es una variable que sigue una distribución de Poisson. Otra medida para la frecuencia de una enfermedad es la incidencia, que es el número de personas que enferman en una población en un periodo determinado. En este caso, el intervalo es de personas tiempo, generalmente personas-año, y es también una variable con distribución de Poisson. Habitualmente, ambas medidas se expresan para intervalos de tamaño unidad o, dicho de otro modo, en lugar de la variable número de enfermos, se usa el parámetro λ . La distribución de Poisson tiene iguales la media y la varianza. Si la variación de los casos observados en una población excede a la variación esperada por la Poisson, se está ante la presencia de un problema conocido como sobre dispersión y, en tal caso, la distribución binomial negativa es más adecuada.

Para valores de λ mayores de 20 la distribución de Poisson se aproxima a una distribución normal de media y varianza iguales a λ . Por este motivo no se debe considerar una limitación la restricción que tiene Epidat 4 de no realizar el cálculo para valores de λ superiores a 50. Valores: $k: 0, 1, 2, \dots$ Parámetros: λ : tasa de ocurrencia, $\lambda > 0$ Ejemplo El número de enfermos que solicitan atención de urgencia en un hospital durante un periodo de 24 horas tiene una media de 43,2 pacientes. Se sabe que el servicio se colapsará si el número de enfermos excede de 50. ¿Cuál es la probabilidad de que se colapse el servicio de urgencias del hospital? Representar la función de masa de probabilidad. Para calcular la probabilidad pedida y, además, representar la función de masa de probabilidad hay que marcar

el cuadro situado en la parte inferior derecha de la pantalla: Obtener las funciones de distribución y densidad.

Resultados con Epidat 4:



La probabilidad de que el servicio colapse está cerca de 0,13.

Distribución geométrica (p)

Supóngase que se efectúa repetidamente un experimento o prueba, que las repeticiones son independientes y que se está interesado en la ocurrencia o no de un suceso al que se refiere como “éxito”, siendo la probabilidad de este suceso p . La distribución geométrica permite calcular la probabilidad de que tenga que realizarse un número k de repeticiones antes de obtener un éxito por primera vez; esta probabilidad decrece a medida que aumenta k con lo que la función de masa de probabilidad es siempre decreciente. Así pues, se diferencia de la distribución binomial en que el número de repeticiones no está predeterminado, sino que es la variable aleatoria que se mide y, por otra parte, el conjunto de valores posibles de

la variable es ilimitado. Para ilustrar el empleo de esta distribución, se supone que cierto medicamento opera exitosamente ante la enfermedad para la cual fue concebido en el 80% de los casos a los que se aplica; la variable aleatoria “intentos fallidos en la aplicación del medicamento antes del primer éxito” sigue una distribución geométrica de parámetro $p = 0,8$. Otro ejemplo de variable geométrica es el número de hijos hasta el nacimiento de la primera niña. La distribución geométrica se utiliza en la distribución de tiempos de espera, de manera que si los ensayos se realizan a intervalos regulares de tiempo, esta variable aleatoria proporciona el tiempo transcurrido hasta el primer éxito. Esta distribución presenta la propiedad denominada “falta de memoria”, que implica que la probabilidad de tener que esperar un tiempo t no depende del tiempo que ya haya transcurrido.

Valores: $k: 0, 1, 2, \dots$

Parámetros: p : probabilidad de éxito, $0 < p < 1$

Ejemplo La probabilidad de que cierto examen médico dé lugar a una reacción “positiva” es igual a 0,8, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran menos de 5 reacciones “negativas” antes de la primera positiva? La variable aleatoria “número de reacciones negativas antes de la primera positiva” sigue una distribución geométrica con parámetro $p = 0,8$.

Resultados con Epidat 4:

Datos:

Distribución geométrica (p)

Parámetros:

p: Probabilidad de éxito0,8

Resultados:

Punto k	Probabilidad punto k	Cola izquierda $Pr[X \leq k]$	Cola derecha $Pr[X > k]$
4	0,0013	0,9997	0,0003

Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
0,25	0,3125	2,6833	9,2

La probabilidad de que ocurran menos de 5 reacciones “negativas” antes de la primera positiva es casi 1 (0,9997).

Distribución binomial negativa (r, p)

Una generalización obvia de la distribución geométrica aparece si se supone que un experimento se continúa hasta que un determinado suceso, de probabilidad p , ocurre por r ésima vez. La variable aleatoria que proporciona la probabilidad de que se produzcan k fracasos antes de obtener el r -ésimo éxito sigue una distribución binomial negativa de parámetros r y p , $BN(r, p)$. La distribución geométrica corresponde al caso particular en que $r = 1$. Un ejemplo es el número de lanzamientos fallidos de un dado antes de obtener un 6 en tres ocasiones, que sigue una $BN(3, 1/6)$. En el caso de que los sucesos ocurran a intervalos regulares de tiempo, esta variable proporciona el tiempo total hasta que ocurren r éxitos, por lo que también se denomina “distribución binomial de tiempo de espera”. La distribución binomial negativa aparece en un estudio de Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) sobre los juegos de azar en 1714, pero años antes ya había sido descrita por Blaise Pascal (1623-1662). Más adelante, esta distribución fue propuesta como una alternativa a la distribución de Poisson para modelar el número de ocurrencias de un suceso cuando los datos presentan lo que se conoce como variación extra-Poisson o sobredispersión. En estas situaciones, la varianza es mayor que la media, por lo que se incumple la propiedad que caracteriza a una distribución de Poisson, según la cual la media es igual a la varianza. La primera aplicación en bioestadística la realizó Student (William Sealy Gosset (1876-1937)) a principios de siglo cuando propuso esta distribución para modelar el número de glóbulos rojos en una gota de sangre. En este caso, la variabilidad extra se debe al hecho de que esas células no están uniformemente distribuidas en la gota, es decir, la tasa de intensidad no es homogénea. La distribución binomial negativa es más adecuada que la de Poisson para modelar, por ejemplo, el número de accidentes laborales ocurridos en un determinado lapso. La distribución de Poisson asume que todos los individuos tienen la misma probabilidad de sufrir un accidente y que ésta permanece constante durante el período de estudio; sin embargo, es más plausible la hipótesis de que los individuos tienen probabilidades constantes en el tiempo, pero que varían de unos sujetos a otros; esto es lo que se conoce en la literatura como la propensión a los accidentes (“accident proneness”) [9][10]. Esta hipótesis

se traduce en una distribución de Poisson mixta, o de efectos aleatorios, en la que se supone que las probabilidades varían entre individuos de acuerdo a una distribución gamma y esto resulta en una distribución binomial negativa para el número de accidentes. El número máximo de éxitos permitidos en Epidat 4, para realizar cálculos de la distribución binomial negativa, es 1.000.

Valores: $k: 0, 1, 2, \dots$

Parámetros: r : número de éxitos, $r \geq 1$ entero

p : probabilidad de éxito, $0 < p < 1$

Ejemplo Se sabe que, en promedio, una de cada 100 placas de rayos X que se realizan es defectuosa. ¿Cuál es el número medio de placas útiles que se producen entre 10 defectuosas? Si se considera el primer fallo como punto de inicio, hay que considerar la variable “número de placas útiles antes de 9 defectuosas”, que sigue una distribución binomial negativa de parámetros $r = 9$ y $p = 0,01$. Es necesario hacer notar que, cuando se está interesado en obtener alguno de los valores característicos de la distribución objeto de estudio (en este ejemplo, número medio de placas útiles), es indiferente calcular probabilidades o puntos, ya que el programa presenta los valores característicos de la distribución en ambos casos. En este ejemplo, se seleccionó la opción de calcular la probabilidad del punto 1, aunque se trata de un dato irrelevante en el cálculo del número medio de placas útiles. Se puede comprobar fácilmente que la modificación del punto o de la opción de cálculo no influyen en los valores característicos.

Resultados con Epidat 4:

Datos:

Distribución binomial negativa (r, p)

Parámetros:

r: Número de éxitos

9

p: Probabilidad de éxito

0,01

Resultados:

Punto k	Probabilidad punto k	Cola izquierda $\Pr[X \leq k]$	Cola derecha $\Pr[X > k]$
1	0	0	1

Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
891	89.100	0,6667	0,6667

Entre 10 placas defectuosas se producen, en promedio, unas 891 placas útiles.

Distribución hipergeométrica (N,R,n)

La distribución hipergeométrica suele aparecer en procesos muestrales sin reemplazo, en los que se investiga la presencia o ausencia de cierta característica. Piénsese, por ejemplo, en un procedimiento de control de calidad en una empresa farmacéutica, durante el cual se extraen muestras de las cápsulas fabricadas y se someten a análisis para determinar su composición. Durante las pruebas, las cápsulas son destruidas y no pueden ser devueltas al lote del que provienen. En esta situación, la variable que cuenta el número de cápsulas que no cumplen los criterios de calidad establecidos sigue una distribución hipergeométrica. Por tanto, esta distribución es la equivalente a la binomial, pero cuando el muestreo se hace sin reemplazo, de forma que la probabilidad de éxito no permanece constante a lo largo de las n pruebas, a diferencia de la distribución binomial. Esta distribución se puede ilustrar del modo siguiente: se tiene una población finita con N elementos, de los cuales R tienen una determinada característica que se llama “éxito” (diabetes, obesidad, hábito de fumar, etc.). El número de “éxitos” en una muestra aleatoria de tamaño n , extraída sin reemplazo de la población, es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros N , R y n . Cuando el tamaño de la población es grande, los muestreos con y sin reemplazo son equivalentes, por lo que la distribución hipergeométrica se aproxima en tal caso a la binomial. En el caso de esta distribución, Epidat 4 limita el cálculo a valores del tamaño de población (N) menores o iguales que 1.000.

Valores: k : $\max\{0, n-(N-R)\}$, ..., $\min\{R, n\}$, donde $\max\{0, n-(N-R)\}$ indica el valor máximo entre 0 y $n - (N-R)$ y $\min\{R, n\}$ indica el valor mínimo entre R y n .

Parámetros: N : tamaño de la población, $N \geq 1$ entero

R : número de éxitos en la población; $1 \leq R \leq N$, N entero

n : número de pruebas; $1 \leq n \leq N$, n entero

Ejemplo Se sabe que el 7% de los útiles quirúrgicos en un lote de 100 no cumplen ciertas especificaciones de calidad. Tomada una muestra al azar de 10 unidades sin reemplazo, interesa conocer la probabilidad de que no más de dos sean defectuosas. El número de útiles defectuosos en el lote es $R = 0,07 \times 100 = 7$. Para un tamaño muestral de $n = 10$, la probabilidad buscada es $P\{\text{número de defectuosos} \leq 2\}$.

Resultados con Epidat 4:

Datos:

Distribución hipergeométrica (N, R, n)

Parámetros:

N: Tamaño de la población

100

R: Número de éxitos en la población

7

n: Número de pruebas

10

Resultados:

Punto k	Probabilidad punto k	Cola izquierda $Pr[X \leq k]$	Cola derecha $Pr[X > k]$
2	0,1235	0,9792	0,0208

Media	Varianza	Asimetría	Curtosis
0,7	0,5918	0,9126	0,4529

La probabilidad de que, a lo sumo, haya dos útiles defectuosos en el lote es aproximadamente 0,98. Además, puede decirse que la media y la varianza de la distribución hipergeométrica (100, 7, 10) son 0,7 y 0,59, respectivamente; en este caso, la media de útiles quirúrgicos defectuosos en 10 pruebas es de 0,7 y la varianza de 0,59.

RESUMEN DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución	Campo de variación	Parámetros	Observaciones
Uniforme	(a, b)	a: mínimo	Distribución clave en la generación de distribuciones
		b: máximo	
Normal	$(-\infty, \infty)$	μ : media	Si $\mu=0$ y $\sigma=1$ se denomina distribución normal estándar De ella derivan las distribuciones ji-cuadrado, t de Student y F de Snedecor
		σ : desviación estándar	
Normal bivalente	$X_1 \in (-\infty, \infty)$	$\mu=(\mu_1, \mu_2)$: media	
	$X_2 \in (-\infty, \infty)$	$\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$: desviación estándar	
		ρ : coeficiente de correlación	
Lognormal	(0, ∞)	μ : escala	Si X sigue una distribución lognormal entonces su logaritmo neperiano sigue una distribución normal
		σ : forma	
Logística	$(-\infty, \infty)$	a: situación	Si U sigue una distribución uniforme en el intervalo (0, 1) entonces $X=\ln(U/(1-U))$ sigue una distribución logística
		b: escala	
Beta	(0, 1)	p: forma	Es adecuada para modelar proporciones Si $p=q=1$ se obtiene la distribución uniforme en (0, 1)
		q: forma	
Gamma	(0, ∞)	a: escala	Es adecuada para modelar tiempos de vida Si p es un n° entero se denomina distribución de Erlang
		p: forma	
Exponencial	(0, ∞)	λ : tasa	Equivalente continuo de la distribución geométrica, también posee la propiedad de "falta de memoria"
Ji-cuadrado	(0, ∞)	n: grados de libertad	Distribuciones importantes en la contrastación de hipótesis estadísticas
t de Student	$(-\infty, \infty)$	n: grados de libertad	
F de Snedecor	(0, ∞)	n: grados de libertad	
		m: grados de libertad	
Cauchy	$(-\infty, \infty)$	μ : escala	Si $\mu=1$ y $\theta=0$ se denomina distribución de Cauchy estándar
		θ : situación	
Weibull	(0, ∞)	a: forma	Si $a=1$ se tiene la distribución exponencial Otro caso particular es la distribución de Rayleigh
		b: escala	
Laplace	$(-\infty, \infty)$	a: situación	
		b: escala	
Pareto	$[x_0, \infty)$	α : forma	
		x_0 : situación	
Triangular	[a, b]	a: mínimo	Se emplea cuando hay poca información disponible de la variable
		c: moda	
		b: máximo	

RESUMEN DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Distribución	Valores	Parámetros	Definición de la variable	Observaciones
Uniforme discreta	$a, a+1, a+2, \dots, b$	a: mínimo b: máximo	Variable que puede tomar n valores distintos con la misma probabilidad cada uno de ellos	
Binomial	$0, 1, 2, \dots, n$	n: número de pruebas p: probabilidad de éxito	Número de éxitos en n pruebas independientes de un experimento con probabilidad de éxito constante	Esta distribución se aplica a poblaciones finitas cuando los elementos se toman al azar y con reemplazo, y a poblaciones conceptualmente infinitas cuando el proceso es estable y sin
Multinomial	$X_i: 0, 1, 2, \dots$ ($i = 1, \dots, m$)	n: número de pruebas m: n° de resultados posibles p _i : probabilidad del suceso i	Número de veces que ocurren m sucesos disjuntos en n pruebas independientes	Se aplica cuando se tiene un proceso estable y sin memoria
Hipergeométrica	de $\max(0, n-(N-R))$ a $\min(R, n)$	N: tamaño de la población R: número de éxitos n: número de pruebas	Número de éxitos en una muestra de tamaño n , extraída sin reemplazo de una población de tamaño N que contiene R éxitos	Es equivalente a la distribución binomial cuando el muestreo se hace sin reemplazo. Si el tamaño de la población es grande ambas distribuciones se pueden considerar prácticamente iguales
Geométrica	$0, 1, 2, \dots$	p: probabilidad de éxito	Número de fracasos antes de obtener un éxito por primera vez	Se utiliza en la distribución de tiempos de espera y tiene la propiedad de "falta de memoria"
Binomial negativa	$0, 1, 2, \dots$	r: número de éxitos p: probabilidad de éxito	Número de fracasos antes de obtener el r -ésimo éxito	Cuando $r=1$ se obtiene la distribución geométrica
Pascal	$r, r+1, r+2, \dots$	r: número de éxitos p: probabilidad de éxito	Número de pruebas necesarias para obtener r éxitos	Se relaciona con la binomial negativa de la siguiente manera: $Pascal(r, p) = BN(r, p) + r$
Poisson	$0, 1, 2, \dots$	λ : tasa de ocurrencia	Número de ocurrencias de un evento "raro" o poco frecuente en un intervalo o espacio continuo de tiempo	El proceso que genera una distribución de Poisson es estable y no tiene memoria. La distribución binomial se aproxima por la Poisson si n es grande y p pequeña, siendo $\lambda = np$

Conclusión

Tanto las probabilidades discretas como las continuas se rigen por las mismas leyes fundamentales de probabilidad, como la regla de suma, la regla del producto y la regla de la complementación.

Ambos tipos de probabilidades se utilizan para calcular la probabilidad de eventos, realizar inferencias estadísticas y modelar fenómenos en una amplia variedad de campos.

Las probabilidades discretas y continuas son dos enfoques esenciales en estadística que se utilizan para tratar con diferentes tipos de datos y fenómenos. La elección entre ellas depende de la naturaleza de los datos y los objetivos del análisis estadístico. Ambos enfoques son fundamentales para la comprensión y la aplicación efectiva de la probabilidad y la estadística en la toma de decisiones y la modelización de eventos aleatorios en la ciencia y la industria.

Recomendaciones

Los ingenieros y profesionales en campos relacionados deben adquirir una comprensión sólida de las distribuciones de probabilidad y sus aplicaciones, ya que esto es esencial para la toma de decisiones y la gestión de riesgos.

Utilizar software y herramientas estadísticas para calcular probabilidades y realizar análisis en situaciones complejas que involucran distribuciones de probabilidad.

Es esencial mantener la información en estadísticas y probabilidades para cualquier tipo de aplicación efectiva de estas herramientas en proyectos y procesos ingenieriles.

Bibliografía

Canavos GC. Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos. Madrid: McGraw-Hill

1988. - Fernández-Abascal H, Guijarro MM, Rojo JL, Sanz JA. Cálculo de probabilidades y estadística. Barcelona: Editorial Ariel; 1994. - Herrerías Pleguezuelo R, Palacios González F.

Curso de inferencia estadística y del modelo lineal simple. Madrid: Delta, Publicaciones Universitarias; 2007. - Martín-Pliego J, Ruiz-Maya L.

Estadística I: Probabilidad. 2ª ed. Madrid: Thomson; 2004. - Meyer PL. Probabilidad y aplicaciones estadísticas. 2ª ed. Bogotá: Fondo Educativo Interamericano; 1973. - Weisstein EW. From MathWorld-A Wolfram Web Resource

[página en internet]. Statistical Distribution. Disponible en:
<http://mathworld.wolfram.com/topics/StatisticalDistributions.html>