Regulated Array Grammars of Finite Index

C. Gruber, J. Reiter

TU Wien

30.April, 2010

Table of contents

n-dimensional array

Ein n-dimensionales Array A über ein Alphabet V (Menge aller non-terminal und terminal Symbole) ist eine Funktion

$$A : Z^n \to V \cup \{\#\} \quad n \in N = \{1, 2, ...\}$$

wobei

$$shape(A) = \{v \in Z^n \mid A(v) \neq \#\}$$

endlich ist und $\# \notin V$ als *background* oder *blank Symbol* bezeichnet wird. Das Array A kann nun so definiert werden

$$A = \{(v, A(v)) \mid v \in shape(A)\}.$$

Der Vektor $(0, ..., 0) \in Z^n$ wird als Ω_n bezeichent.

n-dimensional array production and grammar

Eine n-dimensionale Array Produktion p über dem Alphabet V ist ein Tripel (W, A_1, A_2) wobei $W \subseteq Z^n$ eine endliche Menge von Koordinaten ist und A_1 und A_2 Abbildungen von W auf $V \cup \{\#\}$ sind.
p kann als Λ-frei bezeichnet werden, falls $shape(A_2) \neq 0$ ist.

$$shape(A_i) = \{v \in W \mid A_i(v) \neq \#\},\ 1 \leq i \leq 2$$

Eine n-dimensionale Array Grammatik kann nun als Sechstupel

$$G = (n, V_N, V_T, \#, P, \{(v_0, S)\})$$

definiert werden. $\{(v_0, S)\}$ wird als Startarray (Axiom), v_0 als Startvektor und S als das Startsymbol bezeichnet.

matrix grammar

Eine Matrixgrammatik G_M ist ein 4-Tupel

$$G_M = (V_N, V_T, (M, F), S),$$

M ist eine endliche Menge von Matrizen, $M = \{m_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Die Matrizen m_i sind Sequenzen von der Form

$$m_i = (m_{i,1}, ..., m_{i,n_i}),\ n_i \geq 1,\ 1 \leq i \leq n.$$

F kann auch als Fehlermenge bezeichnet werden. Ist $F = \emptyset$, dann kann G_M als Matrixgrammatik ohne appearence checking bezeichnet werden.

graph controlled grammar

Eine graph-controlled Grammatik G_P ist ein 4-Tupel

$$G_M = (V_N, V_T, (R, L_{in}, L_{fin}), S),$$

R ist eine endliche Menge von Regeln r der Form

$$(l(r) : p(l(r)), \sigma(l(r)), \varphi(l(r))),\ \ l(r) \in Lab(G_P).$$

Falls $\varphi(l(r))$ leer ist für alle $r \in R$, dann kann G_P als graph-controlled Grammatik ohne appearence checking bezeichnet werden.
Falls $\forall r \in R\ \varphi(l(r)) = \sigma(l(r))$, dann kann G_P als graph-controlled Grammatik mit unconditional transfer bezeichnet werden.

Matrix- und graph-controlled Grammatiken können in Arraygrammatiken direkt übergeführt werden, indem ihre Produktionen durch Arrayproduktionen ersetzt werden.

graph controlled grammar

Eine graph-controlled Grammatik G_P ist ein 4-Tupel

$$G_M = (V_N, V_T, (R, L_{in}, L_{fin}), S),$$

R ist eine endliche Menge von Regeln r der Form

$$(l(r) : p(l(r)), \sigma(l(r)), \varphi(l(r))),\ \ l(r) \in Lab(G_P).$$

Falls $\varphi(l(r))$ leer ist für alle $r \in R$, dann kann G_P als graph-controlled Grammatik ohne appearence checking bezeichnet werden.
Falls $\forall r \in R\ \varphi(l(r)) = \sigma(l(r))$, dann kann G_P als graph-controlled Grammatik mit unconditional transfer bezeichnet werden.

Matrix- und graph-controlled Grammatiken können in Arraygrammatiken direkt übergeführt werden, indem ihre Produktionen durch Arrayproduktionen ersetzt werden.

bounded derivations

Index einer Ableitung

Der Index einer Ableitung D eines Terminalobjekts w (String oder Array) in einer Grammatik G ist mit der maximalen Anzahl von non-terminal Symbolen, die in einem Zwischenableitungsschritt vorkommen, definiert und wird mit $ind_{G,D}(w)$ bezeichnet.

Weiters bezeichnet $ind_{G,min}(w)$ bzw. $ind_{G,max}(w)$ das Minimum bzw. das Maximum aus der Menge

$$\{ind_{G,D}(w) \mid w \text{ is generated by } G\}$$

Entsprechend gibt es nun die Definition für die Grammatik

$$ind_Y(G) = sup\{ind_{G,Y}(w) \mid w \text{ is generated by } G\} \quad Y \in \{min, max\}$$

Andere Art von endlicher Index Restriktion nur Objekte w beachtet, die von einer Grammatik G mit einer Ableitung $ind_{G,Y}(w) \leq k$ für $Y \in \{min, max\}$ erzeugt werden.

bounded derivations

Index einer Ableitung

Der Index einer Ableitung D eines Terminalobjekts w (String oder Array) in einer Grammatik G ist mit der maximalen Anzahl von non-terminal Symbolen, die in einem Zwischenableitungsschritt vorkommen, definiert und wird mit $ind_{G,D}(w)$ bezeichnet.

Weiters bezeichnet $ind_{G,min}(w)$ bzw. $ind_{G,max}(w)$ das Minimum bzw. das Maximum aus der Menge

$$\{ind_{G,D}(w) \mid w \text{ is generated by } G\}$$

Entsprechend gibt es nun die Definition für die Grammatik

$$ind_Y(G) = sup\{ind_{G,Y}(w) \mid w \text{ is generated by } G\} \quad Y \in \{min, max\}$$

Andere Art von endlicher Index Restriktion nur Objekte w beachtet, die von einer Grammatik G mit einer Ableitung $ind_{G,Y}(w) \leq k$ für $Y \in \{min, max\}$ erzeugt werden.

grammar with prescribed teams

Eine Grammatik mit prescribed teams G_t ist ein 4-Tupel

$$G_t = (V_N, V_T, (P, R, F), S),$$

$G = (V_N, V_T, P, S)$ ist eine kontextfreie Grammatik, R ist eine endliche Menge von Teams aus P und F ist die Menge von Produktionen, die bei dem appearence checking übersprungen werden können. Ist $F = \emptyset$, dann kann G_t als Grammatik mit prescribed teams ohne appearence checking bezeichnet werden.

Wiederum beschränken wir die Anzahl von non-terminal Symbolen, die in einem Zwischenableitungsschritt vorkommen dürfen, indem nur Teams angewendet werden dürfen, die alle non-terminale im Zwischenschritt betreffen $\Rightarrow$ durch max. Anzahl an kontextfreien Produktionen in einem Team beschränkt.
$L^{\lceil k \rceil}(G)$ bezeichnet nun die Sprache, die durch die Grammatik G mit endlicher Index Restriktion von k erzeugt wird.

Beispiel für eine Grammatik mit prescribed teams (1)

2-dimensionale Array-Grammatik mit prescibed teams:

$$G = (n, \{D, E, L, Q, R, S, U\}, \{a\}, \#, (P, R, F), \{((0,0), S)\})$$

$$P = \left\{ \begin{matrix} \# \\ S\# \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L \\ aD \end{matrix}, \begin{matrix} \# \\ L \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L \\ a \end{matrix}, D\# \rightarrow aD, \begin{matrix} \#\# \\ L \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} aU \\ a \end{matrix}, \right.$$

$$D\# \rightarrow aR, \begin{matrix} \# \\ R \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} R \\ a \end{matrix}, U\# \rightarrow aU,$$

$$\left. U\# \rightarrow aU, U \rightarrow E, \begin{matrix} \# \\ R \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} Q \\ a \end{matrix}, R \rightarrow a, E \rightarrow a \right\}$$

Beispiel für eine Grammatik mit prescribed teams (2)

$$R = \left\{ \left\langle \begin{array}{c} \# \\ S\# \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} L \\ aD \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{c} \# \\ L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} L \\ a \end{array}, \; D\# \rightarrow aD \right\rangle, \right.$$

$$\left\langle \begin{array}{c} \#\# \\ L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} aU \\ a \end{array}, \; D\# \rightarrow aR \right\rangle, \left\langle \begin{array}{c} \# \\ R \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} R \\ a \end{array}, \; U\# \rightarrow aU \right\rangle,$$

$$\left. \left\langle U\# \rightarrow aU, U \rightarrow E, \begin{array}{c} \# \\ R \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} Q \\ a \end{array} \right\rangle, \langle R \rightarrow a, E \rightarrow a \rangle \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \# \\ R \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} Q \\ a \end{array} \right\}$$

Ableitungssequenz:

$$S \Rightarrow_G \begin{array}{ll} L & \\ a & D \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{lll} a & U & \\ a & & \\ a & a & R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{lll} a & a & U \\ a & & \\ a & a & R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{lll} a & a & E \\ a & & R \\ a & a & a \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{lll} a & a & a \\ a & & a \\ a & a & a \end{array}$$

Gefolgerte Resultate

$PT_{ac}^{[k]}(cf)$ bezeichnet die Sprachfamilie, die von String-Grammatiken mit prescribed teams aus kontextfreien Produktionen mit endlicher Index Restriktion erzeugt werden.

$PT_{ac}^{[k]}(X)$ bezeichnet die Familie aller Arraysprachen, die von Array-Grammatiken mit prescribed teams aus Array-Produktionen des Types X, mit $X \in \{n\text{-}\#\text{-}cf, n\text{-}cf, n\text{-}scf \mid n \geq 1\}$ erzeugt werden.

Theorem 1

Für jedes $k \in \{fin\} \cup \{j \mid j \geq 1\}$, gilt

$$PT^{[k]}(cf) = PT_{ac}^{[k]}(cf) = Z^{Y,[k]}(cf) = Z^{min,\cap[k]}(cf)$$

für alle $Z \in \{M, M_{ac}, P, P_{ut}, P_{ac}\}$ und $Y \in \{min, max\}$.

Gefolgerte Resultate

$PT_{ac}^{\lceil k \rceil}(cf)$ bezeichnet die Sprachfamilie, die von String-Grammatiken mit prescribed teams aus kontextfreien Produktionen mit endlicher Index Restriktion erzeugt werden.

$PT_{ac}^{\lceil k \rceil}(X)$ bezeichnet die Familie aller Arraysprachen, die von Array-Grammatiken mit prescribed teams aus Array-Produktionen des Types X, mit $X \in \{n\text{-}\#\text{-}cf, n\text{-}cf, n\text{-}scf \mid n \geq 1\}$ erzeugt werden.

Theorem 1

Für jedes $k \in \{fin\} \cup \{j \mid j \geq 1\}$, gilt

$$PT^{\lceil k \rceil}(cf) = PT_{ac}^{\lceil k \rceil}(cf) = Z^{Y,\lceil k \rceil}(cf) = Z^{min,\cap\lceil k \rceil}(cf)$$

für alle $Z \in \{M, M_{ac}, P, P_{ut}, P_{ac}\}$ und $Y \in \{min, max\}$.

Gefolgerte Resultate (2)

Theorem 2

Für $X \in \{n - \# - cf, n - cf \mid n \geq 1\}$, gilt

1. $PT^{[fin]}(X) = Z^{Y,[fin]}(X) = Z^{min,\cap[fin]}(X)$ und auch
2. $PT_{ac}^{[fin]}(X) = Z_{ac}^{Y,[fin]}(X) = Z_{ac}^{min,\cap[fin]}(X)$

für alle $Z \in \{M, P\}$ und $Y \in \{min, max\}$.

Theorem 3

Für alle $k \in \{fin\} \cup \{j | j \geq 1\}$ gilt

1. $PT^{[k]}(X) = Z^{Y,[k]}(X) = Z^{min,\cap[k]}(X)$ *genau so wie*
2. $PT_{ac}^{[k]}(X) = Z_{ac}^{Y,[k]}(X) = Z_{ac}^{min,\cap[k]}(X)$

Für alle

$X \in \{n - scf, n - scf_1 | n \geq 1\}$, $Z \in \{M, P\}$, *und* $Y \in \{min, max\}$.

Gefolgerte Resultate (2)

Theorem 2

Für $X \in \{n - \# - cf, n - cf \mid n \geq 1\}$, gilt

1. $PT^{[fin]}(X) = Z^{Y,[fin]}(X) = Z^{min,\cap[fin]}(X)$ und auch
2. $PT_{ac}^{[fin]}(X) = Z_{ac}^{Y,[fin]}(X) = Z_{ac}^{min,\cap[fin]}(X)$

für alle $Z \in \{M, P\}$ und $Y \in \{min, max\}$.

Theorem 3

Für alle $k \in \{fin\} \cup \{j | j \geq 1\}$ gilt

1. $PT^{[k]}(X) = Z^{Y,[k]}(X) = Z^{min,\cap[k]}(X)$ *genau so wie*
2. $PT_{ac}^{[k]}(X) = Z_{ac}^{Y,[k]}(X) = Z_{ac}^{min,\cap[k]}(X)$

Für alle
$X \in \{n - scf, n - scf_1 | n \geq 1\}, \ Z \in \{M, P\}, \ und \ Y \in \{min, max\}$.

Gefolgerte Resultate (3) - 1-dimensionaler Fall

Theorem 4

Für alle $X \in \{1 - cf_1, 1 - scf_1\}$ gilt

$$PT^{\lceil 1 \rceil}(X) = PT_{ac}^{\lceil 1 \rceil}(X) = Z^{Y,\lceil 1 \rceil}(X) = Z^{min,\cap \lceil 1 \rceil}(X) = L(1 - reg)$$

Für alle $Z \in \{M, M_{ac}, P, P_{ut}, P_{ac}\}$ *und* $Y \in \{min, max\}$.

Theorem 5

Für alle $X \in \{1 - cf_1, 1 - scf_1\}$ *und alle* $k \geq 2$ gilt

$$PT^{\lceil k \rceil}(X) = PT_{ac}^{\lceil k \rceil}(X) = Z^{Y,\lceil k \rceil}(X) = Z^{min,\cap \lceil k \rceil}(X) = PT^{\lceil 2 \rceil}(X)$$

Für alle $Z \in \{M, M_{ac}, P, P_{ut}, P_{ac}\}$ *und* $Y \in \{min, max\}$. $PT^{\lceil 2 \rceil}(X)$ repräsentiert eine Familie von String-Sprachen $L(lin)$.

Gefolgerte Resultate (3) - 1-dimensionaler Fall

Theorem 4

Für alle $X \in \{1 - cf_1, 1 - scf_1\}$ gilt

$$PT^{\lceil 1 \rceil}(X) = PT_{ac}^{\lceil 1 \rceil}(X) = Z^{Y,\lceil 1 \rceil}(X) = Z^{min,\cap\lceil 1 \rceil}(X) = L(1 - reg)$$

Für alle $Z \in \{M, M_{ac}, P, P_{ut}, P_{ac}\}$ *und* $Y \in \{min, max\}$.

Theorem 5

Für alle $X \in \{1 - cf_1, 1 - scf_1\}$ *und alle* $k \geq 2$ gilt

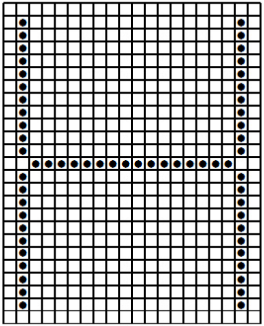
$$PT^{\lceil k \rceil}(X) = PT_{ac}^{\lceil k \rceil}(X) = Z^{Y,\lceil k \rceil}(X) = Z^{min,\cap\lceil k \rceil}(X) = PT^{\lceil 2 \rceil}(X)$$

Für alle $Z \in \{M, M_{ac}, P, P_{ut}, P_{ac}\}$ *und* $Y \in \{min, max\}$. $PT^{\lceil 2 \rceil}(X)$ repräsentiert eine Familie von String-Sprachen $L(lin)$.

Syntaktisches Pattern Recognition

Stufen in Character Recognition

1. Anlegen von Daten
2. Preprocessing
   - Normalisierung und Rauscheliminierung: anschließend abbilden auf eine 20 x 25 Gitter
   - Ausdünnung (Skelletierung)
3. Syntaktische Analyse



Beispiel zur Erkennung eines H

2-dimensionale Array-Grammatik mit prescibed teams:

$$G = (n, \{S, L, R, D_L, U_L, D_R, U_R\}, \{a\}, \#, (P, R, \emptyset), \{((0,0), S)\})$$

$$P = \left\{ \; S\# \;\rightarrow\; LR \;,\; \#L \;\rightarrow\; La \;,\; R\# \;\rightarrow\; aR \;,\; \begin{array}{c} \# \\ L \\ \# \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{c} U_L \\ a \\ D_L \end{array} , \right.$$

$$\begin{array}{c} \# \\ R \\ \# \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{c} U_R \\ a \\ D_R \end{array} ,\; \begin{array}{c} \# \\ U_L \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{c} U_L \\ a \end{array} ,\; \begin{array}{c} \# \\ U_R \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{c} U_R \\ a \end{array} ,\; \begin{array}{c} D_L \\ \# \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{c} a \\ D_L \end{array} ,$$

$$\left. \begin{array}{c} D_R \\ \# \end{array} \;\rightarrow\; \begin{array}{c} a \\ D_R \end{array} , U_L \rightarrow a, U_R \rightarrow a, D_L \rightarrow a, D_R \rightarrow a \right\}$$

Beispiel zur Erkennung eines H (2)

$$R = \left\{ \left\langle\; S\# \;\rightarrow\; LR \;\right\rangle, \left\langle\; \#L \;\rightarrow\; La \;,\; R\# \;\rightarrow\; aR \;\right\rangle, \right.$$

$$\left\langle \begin{array}{cc} \# & \\ & L \\ \# & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} U_L & \\ & a \\ D_L & \end{array} ,\; \begin{array}{cc} & \# \\ R & \\ & \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & U_R \\ a & \\ & D_R \end{array} \right\rangle,$$

$$\left\langle \begin{array}{c} \# \\ U_L \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} U_L \\ a \end{array} ,\; \begin{array}{c} \# \\ U_R \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} U_R \\ a \end{array} ,\; \begin{array}{c} D_L \\ \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} a \\ D_L \end{array} ,\; \begin{array}{c} D_R \\ \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} a \\ D_R \end{array} \right\rangle,$$

$$\left. \langle U_L \rightarrow a, U_R \rightarrow a, D_L \rightarrow a, D_R \rightarrow a \rangle \right\}$$

Beispiel zur Erkennung eines H (3)

Ableitungssequenz:

$$S \Rightarrow_G L\ R \Rightarrow_G L\ a\ a\ R \Rightarrow_G \begin{array}{cccc} U_L & & & U_R \\ a & a & a & a \\ D_L & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccc} U_L & & & U_R \\ a & & & a \\ a & a & a & a \\ a & & & a \\ D_L & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G$$

$$\begin{array}{cccc} U_L & & & U_R \\ a & & & a \\ a & & & a \\ a & a & a & a \\ a & & & a \\ a & & & a \\ D_L & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccc} a & & & a \\ a & & & a \\ a & & & a \\ a & a & a & a \\ a & & & a \\ a & & & a \\ a & & & a \end{array}$$

Beispiel zur Erkennung eines H (3)

Ableitungssequenz:

$$S \Rightarrow_G L\;R \Rightarrow_G L\;a\;a\;R \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ & a & a & a & a & \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G$$

$$\begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \end{array}$$

Beispiel zur Erkennung eines H (3)

Ableitungssequenz:

$$S \Rightarrow_G L\ R \Rightarrow_G L\ a\ a\ R \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ & a & a & a & a & \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G$$

$$\begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \end{array}$$

Beispiel zur Erkennung eines H (3)

Ableitungssequenz:

$$S \Rightarrow_G L\ R \Rightarrow_G L\ a\ a\ R \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ & a & a & a & a & \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G$$

$$\begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{cccccc} a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \end{array}$$

Beispiel zur Erkennung eines H (3)

Ableitungssequenz:

$$S \Rightarrow_G L\ R \Rightarrow_G L\ a\ a\ R \Rightarrow_G \begin{array}{ccc} U_L & & U_R \\ & a\ a\ a\ a & \\ D_L & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{ccc} U_L & & U_R \\ a & & a \\ & a\ a\ a\ a & \\ a & & a \\ D_L & & D_R \end{array} \Rightarrow_G$$

$$\begin{array}{ccc} U_L & & U_R \\ a & & a \\ a & & a \\ & a\ a\ a\ a & \\ a & & a \\ a & & a \\ D_L & & D_R \end{array} \Rightarrow_G \begin{array}{ccc} a & & a \\ a & & a \\ a & & a \\ & a\ a\ a\ a & \\ a & & a \\ a & & a \\ a & & a \end{array}$$

Beispiel zur Erkennung eines H (3)

Ableitungssequenz:

$$S \Rightarrow_G \; L\;R \;\Rightarrow_G\; L\;a\;a\;R \;\Rightarrow_G\; \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ & a & a & a & a & \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \;\Rightarrow_G\; \begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \;\Rightarrow_G$$

$$\begin{array}{cccccc} U_L & & & & & U_R \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ D_L & & & & & D_R \end{array} \;\Rightarrow_G\; \begin{array}{cccccc} a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ & a & a & a & a & \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \\ a & & & & & a \end{array}$$

Theorie und Realität (1)

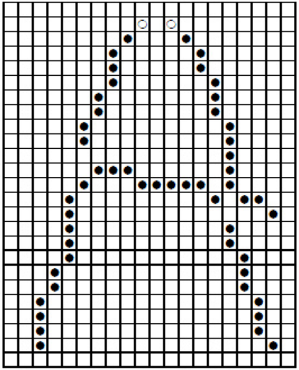
Zur Ableitung der horizontalen Linie muss z.B. zusätzlich zu der Produktion

$$R\# \rightarrow aR$$

auch noch die Produktionen

$$\begin{array}{c}\#\\ R\end{array} \rightarrow \begin{array}{c}R\\ a\end{array}, \quad \begin{array}{c}R\\ \#\end{array} \rightarrow \begin{array}{c}a\\ R\end{array}$$

hinzugefügt werden.



Theorie und Realität (2)

- Entscheidung anhand des Abweichungsfehlers zu idealen Buchstaben
- Effizienz
  - Verwendung von regulated array Grammatiken (z.B.: graph-controlled Grammatik)
  - Reduzierung der nicht deterministischen Auswahl von Regeln
- Buchstaben verschiedener Größe über Sprachen in $PT^{\lceil k \rceil}(2\text{-}cf)$ charakterisieren

Anforderungen

- Automat um Sprachen aus kontextfreien Array-Grammatiken mit endlicher Index Restriktion zu charakterisieren
- Array-Grammatiken verarbeiten nicht nur Symbol- sondern auch Positionsinformationen $\Rightarrow$ Ein-Weg Automat nicht möglich
- selbe Information darf nur einmal gelesen werden

Ein Ableitungsschritt für ein selektiertes Team ist nur möglich, wenn

- Alle Non-Terminale im aktuellen Array werden parallel abgeleitet.
- Der *shape* des aktuellen Arrays muss nach der Ableitung Teil des *shape* des originalen Arrays sein. (nicht bei #-kontextfreien Array-Produktionen)
- Jede Position eines Terminalsymbol im aktuellen Array muss mit der Position des originalen Arrays übereinstimmen.

Anforderungen

- Automat um Sprachen aus kontextfreien Array-Grammatiken mit endlicher Index Restriktion zu charakterisieren
- Array-Grammatiken verarbeiten nicht nur Symbol- sondern auch Positionsinformationen $\Rightarrow$ Ein-Weg Automat nicht möglich
- selbe Information darf nur einmal gelesen werden

Ein Ableitungsschritt für ein selektiertes Team ist nur möglich, wenn

- Alle Non-Terminale im aktuellen Array werden parallel abgeleitet.
- Der *shape* des aktuellen Arrays muss nach der Ableitung Teil des *shape* des originalen Arrays sein. (nicht bei #-kontextfreien Array-Produktionen)
- Jede Position eines Terminalsymbol im aktuellen Array muss mit der Position des originalen Arrays übereinstimmen.

Definition

Ein n-dimensionaler k-head finite Array-Automat vom Typ X ($X \in \{n\text{-}\#\text{-}cf, n\text{-}cf, n\text{-}scf, n\text{-}cf_1, n\text{-}scf_1 \mid n \geq 1\}$) ist folgendermaßen definiert

$$(n, V_N, V_T, \#, (P, R, F), \{v_0, S\}),$$

sodass dieser einer n-dimensionalen Array-Grammatik mit prescribed Teams G mit endlichem Index k entspricht, mit

- jedes Team in R hat maximal k Array-Produktionen des Typs X
- für jede Array-Produktion $p \in P$, ist p von der Form

$$p = (W, \{(\Omega_n, A)\} \cup \{(v, \#) \mid v \in W \backslash \{\Omega_n\}\}, \{(v, X_v) \mid v \in W\})$$

Funktionsweise

Der Automat M arbeitet auf einem gegebenen Array aus V_T^{*n} nun wie folgt:
M arbeitet auf Objekten von $\{(a,a),(a,X) \mid a \in V_T, X \in V_N \cup \{\#\}\}^{*n}$, wo die erste Komponente das gegebene Array beinhaltet und die zweite Komponente das bis jetzt durch G generierte Array.

Der aktuelle Zustand des Automaten ist durch die Menge der Non-Terminale Y aus den (a, Y) Paaren des aktuellen Arrays gegeben.

Definition der durch den Automaten M akzeptierten Array-Sprache

$$L(M) = \{A \mid A \in V_T^{*n}, \{(v,(A(v),\#)) \mid v \in shape(A)\} \Longrightarrow_M^* \{(v,(A(v),A(v))) \mid v \in shape(A)\}\}$$

Funktionsweise

Der Automat M arbeitet auf einem gegebenen Array aus V_T^{*n} nun wie folgt:
M arbeitet auf Objekten von $\{(a,a),(a,X) \mid a \in V_T, X \in V_N \cup \{\#\}\}^{*n}$, wo die erste Komponente das gegebene Array beinhaltet und die zweite Komponente das bis jetzt durch G generierte Array.

Der aktuelle Zustand des Automaten ist durch die Menge der Non-Terminale Y aus den (a, Y) Paaren des aktuellen Arrays gegeben.

Definition der durch den Automaten M akzeptierten Array-Sprache

$$L(M) = \{A \mid A \in V_T^{*n}, \{(v,(A(v),\#)) \mid v \in shape(A)\} \Longrightarrow_M^* \{(v,(A(v),A(v))) \mid v \in shape(A)\}\}$$

Beispiel eines Automaten

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
 & (a,\#) & (a,S) & (a,\#) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
 & (a,\#) & (a,L) & (a,R) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
 & (a,L) & (a,a) & (a,a) & (a,R) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

Beispiel eines Automaten

$$\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
& (a,\#) & (a,S) & (a,\#) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
& (a,\#) & (a,L) & (a,R) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M$$

$$\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
& (a,L) & (a,a) & (a,a) & (a,R) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
& (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M$$

Beispiel eines Automaten

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
 & (a,\#) & (a,S) & (a,\#) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
 & (a,\#) & (a,L) & (a,R) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
 & (a,L) & (a,a) & (a,a) & (a,R) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

Beispiel eines Automaten

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
& (a,\#) & (a,S) & (a,\#) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
& (a,\#) & (a,L) & (a,R) & (a,\#) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
& (a,L) & (a,a) & (a,a) & (a,R) & \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
& (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

Beispiel eines Automaten (2)

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a)
\end{array}
$$

Beispiel eines Automaten (2)

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a)
\end{array}
$$

Beispiel eines Automaten (2)

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,\#) & & & & & (a,\#) \\
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R) \\
(a,\#) & & & & & (a,\#)
\end{array}
\Rightarrow_M
\begin{array}{cccccc}
(a,U_L) & & & & & (a,U_R) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,D_L) & & & & & (a,D_R)
\end{array}
\Rightarrow_M
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
 & (a,a) & (a,a) & (a,a) & (a,a) & \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a) \\
(a,a) & & & & & (a,a)
\end{array}
$$

Conclusions

- Regulated Array-Grammatiken mit finite Index ist geeignete Methode für syntaktisches Pattern Recognition
- Mögliche Erweiterung zur Erkennung von 3-dimensionalen Objekten

Danke für die Aufmerksamkeit!
Fragen?

Conclusions

- Regulated Array-Grammatiken mit finite Index ist geeignete Methode für syntaktisches Pattern Recognition
- Mögliche Erweiterung zur Erkennung von 3-dimensionalen Objekten

Danke für die Aufmerksamkeit!
Fragen?