

Miriam Jańczak

numer albumu: 229761

11 listopada 2017

prowadzący: dr hab. Paweł Zieliński

OBLICZENIA NAUKOWE

Lista 2

1 Iloczyn skalarny raz jeszcze

1.1 Opis problemu

Ponowne obliczenie iloczynu skalarnego z zadania 5 z listy 1 dla typów `Float32` i `Float64` po wprowadzeniu niewielkich zmian danych w wektorze x , tj. obcięciu ostatniej cyfry znaczącej współrzędnych x_4 i x_5 (9 dla x_4 , 7 dla x_5). W tym celu wykorzystano te same cztery algorytmy co w zadaniu z listy 1. Poniżej przedstawiono zmienione dane wejściowe:

$$\tilde{x} = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.577215664, 0.301029995]$$

$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]$$

1.2 Rozwiązanie

Iloczyn skalarny dla typów `Float32` i `Float64` obliczono za pomocą czterech algorytmów z programu z listy 1:

- (a) *w przód*,
- (b) *w tył*,
- (c) *od największego do najmniejszego*,
- (d) *od najmniejszego do największego*.

1.3 Wyniki

Zestawienie wyników iloczynów skalarnych $x \cdot y$ (zadanie 5 z listy 1) oraz $\tilde{x} \cdot y$ przedstawia Tabela 1.

Algorytm	Float32		Float64	
	$x \cdot y$	$\tilde{x} \cdot y$	$x \cdot y$	$\tilde{x} \cdot y$
(a)	-0.499 944 3	-0.499 944 3	$1.025\,188\,136\,829\,667\,2 \cdot 10^{-10}$	-0.004 296 342 739 891 585
(b)	-0.454 345 7	-0.454 345 7	$-1.564\,330\,887\,049\,436\,6 \cdot 10^{-10}$	-0.004 296 342 998 713 953
(c)	-0.5	-0.5	0.0	-0.004 296 342 842 280 865
(d)	-0.5	-0.5	0.0	-0.004 296 342 842 280 865

Tabela 1: Iloczyny skalarne $x \cdot y$ oraz $\tilde{x} \cdot y$ obliczone w arytmetykach `Float32` i `Float64` przy użyciu danych algorytmów.

1.4 Wnioski

2 Nietypowa granica

2.1 Opis problemu

Porównanie wykresów funkcji

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) \quad (1)$$

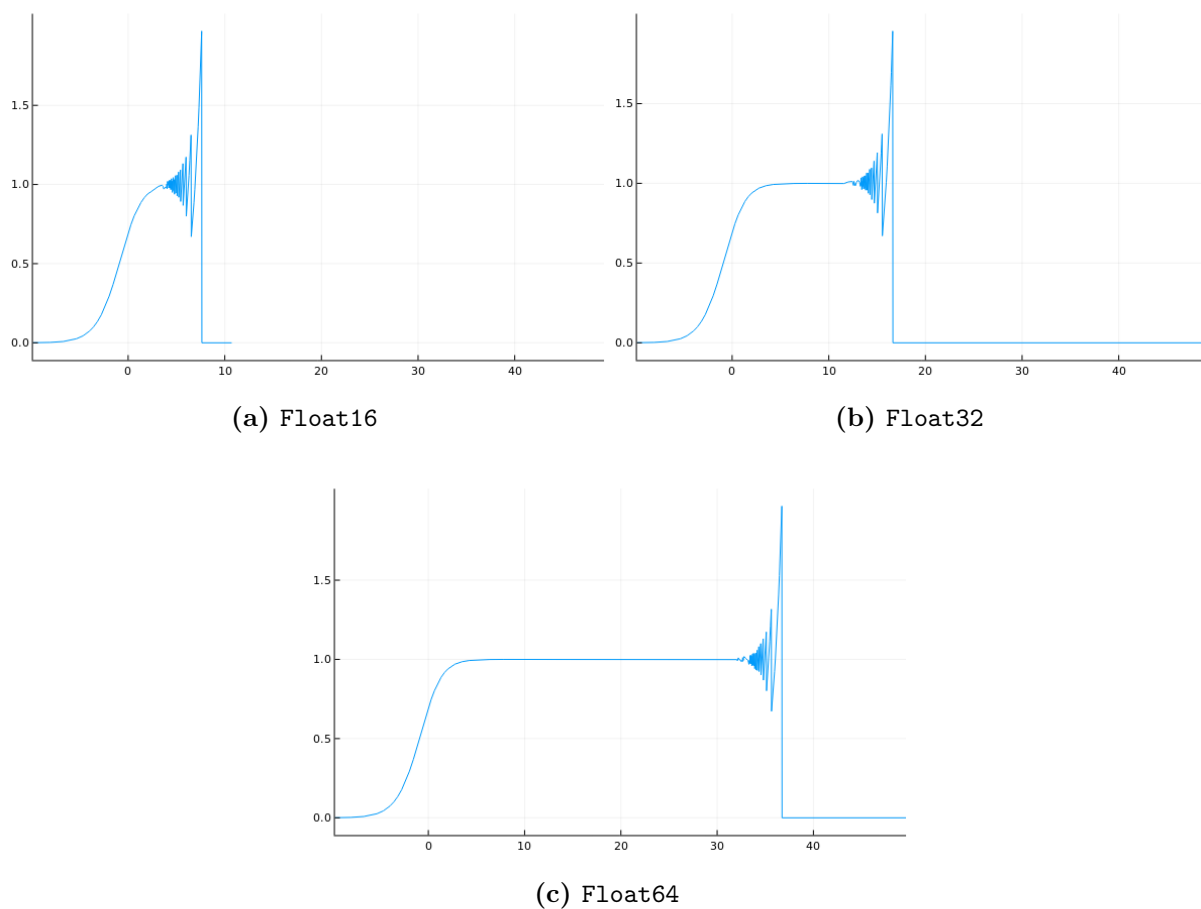
(narysowanych w co najmniej dwóch programach do wizualizacji) z jej granicą $\lim_{x \rightarrow \infty}$, a następnie wyjaśnienie zaistniałego zjawiska.

2.2 Rozwiązanie

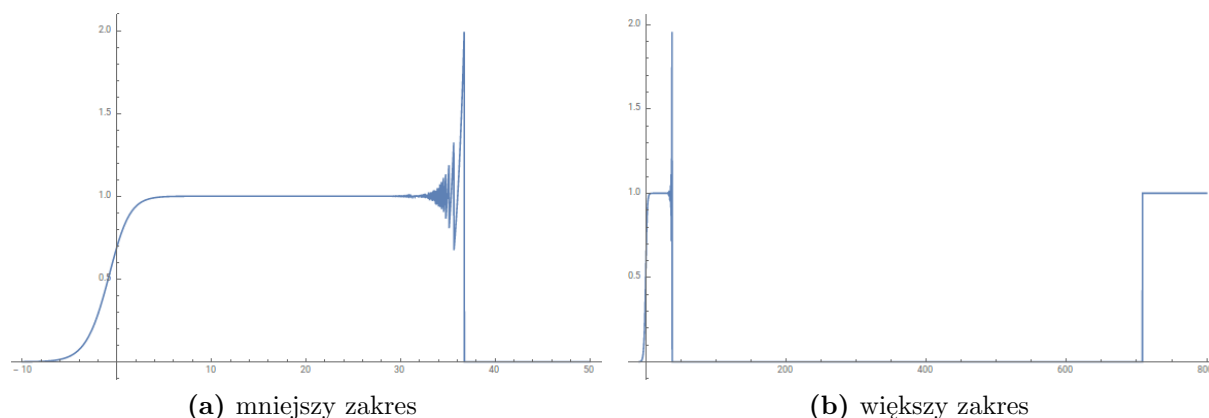
Wykresy funkcji (1) wykonano za pomocą biblioteki *Plotly* (używając różnych typów zmien-nopozycyjnych) w języku *Julia*, a także za pomocą pakietu matematycznego *Wolfram Alpha*. Granicę $\lim_{x \rightarrow \infty}$ funkcji (1) wyliczono za pomocą biblioteki *SymPy* w języku *Julia* oraz w sposób analityczny.

2.3 Wyniki

Poniżej przedstawiono otrzymane wykresy funkcji (1).



Rysunek 1: Wykresy wykonane za pomocą biblioteki *Plotly*



Rysunek 2: Wykresy wykonane za pomocą programu *Wolfram Alpha*

Obliczona przez program granica $\lim_{x \rightarrow \infty}$ funkcji (1) wynosi 1. Taki sam wynik został uzyskany przez rozwiązanie analityczne:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1 + e^{-x}))'}{(e^{-x})'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot -e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1. \end{aligned}$$

2.4 Wnioski

3 Układ równań i wskaźnik uwarunkowania

3.1 Opis problemu

Rozwiązanie układu równań liniowych $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dla danej macierzy współczynników $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ i wektora prawych stron $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Macierz \mathbf{A} zadana była w następujący sposób:

- (a) *macierz Hilberta* \mathbf{H}_n stopnia n ,
- (b) *macierz losowa* \mathbf{R}_n^c stopnia n o danym wskaźniku uwarunkowania c .

Wektor \mathbf{b} natomiast jako $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$, gdzie \mathbf{A} jest wygenerowaną macierzą, a $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$, tak aby było znane dokładne rozwiązanie dla \mathbf{A} i \mathbf{b} .

Układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ należało rozwiązać za pomocą dwóch algorytmów:

- (i) *metodą eliminacji Gaussa*: $\mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$,
- (ii) *metodą macierzy odwrotnej*: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$.

Obliczone rozwiązania $\tilde{\mathbf{x}}$ dla różnych macierzy wejściowych należało porównać z rozwiązaniem dokładnym $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$ oraz obliczyć błędy względne.

3.2 Rozwiązanie

Macierz Hilberta \mathbf{H}_n z rosnącym stopniem $n > 1$ wygenerowano za pomocą funkcji *hilb*(n), natomiast losową macierz \mathbf{R}_n^c , $n = 5, 10, 20$, z rosnącym wskaźnikiem uwarunkowania $c = 1, 10, 10^3, 10^7, 10^{12}, 10^{16}$ stworzono przy użyciu funkcji *matcond*(n, c). Dla każdej wygenerowanej macierzy rozwiązano układ równań metodą eliminacji Gaussa i macierzy odwrotnej, a także policzono błędy względne $\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ obu tych metod, wskaźniki uwarunkowania i rzędy macierzy.

3.3 Wyniki

Otrzymane wyniki dla macierzy Hilberta \mathbf{H}_n prezentuje Tabela 2, natomiast dla macierzy losowej \mathbf{R}_n^c Tabela 3, metoda eliminacji Gaussa jest oznaczona przez **GE**, a metoda macierzy odwrotnej przez **INV**.

Macierz Hilberta \mathbf{H}_n				
Rozmiar	Rząd	COND	Błędy względne	
			GE	INV
1x1	1	1.0	0.0	0.0
2x2	2	$1.928\,147\,006\,790\,397 \cdot 10^1$	$5.661\,048\,867\,003\,676 \cdot 10^{-16}$	$1.124\,015\,143\,811\,696 \cdot 10^{-15}$
3x3	3	$5.240\,567\,775\,860\,644 \cdot 10^2$	$8.022\,593\,772\,267\,726 \cdot 10^{-15}$	$9.825\,526\,038\,180\,824 \cdot 10^{-15}$
4x4	4	$1.551\,373\,873\,892\,924 \cdot 10^4$	$4.451\,545\,960\,181\,209 \cdot 10^{-13}$	$2.950\,477\,637\,286\,781 \cdot 10^{-13}$
5x5	5	$4.766\,072\,502\,425\,943 \cdot 10^5$	$1.682\,842\,629\,922\,719 \cdot 10^{-12}$	$8.500\,055\,777\,753\,297 \cdot 10^{-12}$
6x6	6	$1.495\,105\,864\,225\,467 \cdot 10^7$	$2.618\,913\,302\,311\,624 \cdot 10^{-10}$	$3.347\,413\,507\,036\,174 \cdot 10^{-10}$
7x7	7	$4.753\,673\,565\,831\,290 \cdot 10^8$	$1.260\,686\,722\,417\,155 \cdot 10^{-8}$	$5.163\,959\,183\,577\,243 \cdot 10^{-9}$
8x8	8	$1.525\,757\,553\,806\,004 \cdot 10^{10}$	$1.026\,543\,065\,687\,064 \cdot 10^{-7}$	$2.698\,715\,074\,276\,819 \cdot 10^{-7}$
9x9	9	$4.931\,537\,564\,468\,762 \cdot 10^{11}$	$4.832\,357\,120\,502\,150 \cdot 10^{-6}$	$9.175\,846\,868\,614\,517 \cdot 10^{-6}$
10x10	10	$1.602\,441\,699\,254\,171 \cdot 10^{13}$	$6.329\,153\,722\,983\,848 \cdot 10^{-4}$	$4.552\,142\,251\,740\,885 \cdot 10^{-4}$
11x11	11	$5.222\,677\,939\,280\,335 \cdot 10^{14}$	$1.154\,395\,859\,612\,211 \cdot 10^{-2}$	$8.044\,466\,773\,431\,160 \cdot 10^{-3}$
12x12	11	$1.751\,473\,190\,709\,146 \cdot 10^{16}$	$2.975\,640\,310\,734\,787 \cdot 10^{-1}$	$3.439\,293\,709\,120\,522 \cdot 10^{-1}$
13x13	11	$3.344\,143\,497\,338\,461 \cdot 10^{18}$	2.375 017 867 706 776	5.585 796 893 150 773
14x14	12	$6.200\,786\,263\,161\,444 \cdot 10^{17}$	5.281 004 646 755 168	4.800 641 929 017 436
15x15	12	$3.674\,392\,953\,467\,974 \cdot 10^{17}$	1.177 294 734 836 712	4.827 357 721 257 648
16x16	12	$7.865\,467\,778\,431\,645 \cdot 10^{17}$	$2.056\,465\,582\,380\,410 \cdot 10^1$	$3.173\,646\,749\,626\,613 \cdot 10^1$
17x17	12	$1.263\,684\,342\,666\,052 \cdot 10^{18}$	$1.774\,221\,463\,517\,907 \cdot 10^1$	$1.591\,033\,596\,260\,414 \cdot 10^1$
18x18	12	$2.244\,630\,992\,918\,913 \cdot 10^{18}$	4.276 456 441 115 942	6.281 223 433 472 033
19x19	13	$6.471\,953\,976\,541\,591 \cdot 10^{18}$	$2.211\,993\,729\,264\,891 \cdot 10^1$	$2.292\,561\,401\,563\,632 \cdot 10^1$
20x20	13	$1.355\,365\,790\,868\,823 \cdot 10^{18}$	$1.493\,006\,966\,929\,400 \cdot 10^1$	$2.153\,949\,860\,251\,383 \cdot 10^1$

Tabela 2: Wyniki obliczeń dla macierzy Hilberta \mathbf{H}_n

3.4 Wnioski

4 „Złośliwy wielomian” Wilkinsona

4.1 Opis problemu

Obliczenie dwudziestu zer wielomianu Wilkinsona p , tj. $p(x) = (x-20)(x-19)\dots(x-2)(x-1)$ w postaci naturalnej P i sprawdzenie otrzymanych pierwiastków z_k poprzez obliczenie $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$ dla $1 \leq x \leq 20$. Powtórzenie eksperymentu Wilkinsona, tj. zmiana współczynnika -210 przy x^{19} na $-210 - 2^{-23}$ i wyjaśnienie zaistniałego zjawiska.

4.2 Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania użyto pakietu **Polynomials**. Miejsca zerowe wielomianu P utworzonego z danych współczynników za pomocą funkcji **Poly** obliczono przy użyciu funkcji **roots**. Za pomocą funkcji **poly** stworzono natomiast wielomian p . Funkcja **polyval** posłużyła do obliczenia wartości wielomianów P i p w zadanych punktach. Obliczony został również błąd bezwzględny obliczonych pierwiastków wielomianu P . Podobne operacje zostały wykonane dla wielomianu P z zaburzonym współczynnikiem przy x^{19} .

Macierz losowa \mathbf{R}_n^c				
Rozmiar	Rząd	COND	Błędy względne	
			GE	INV
5x5	5	1	$1.404\,333\,387\,430\,680 \cdot 10^{-16}$	$1.790\,180\,836\,524\,724 \cdot 10^{-16}$
5x5	5	10	0.0	$9.930\,136\,612\,989\,092 \cdot 10^{-17}$
5x5	5	1000	$6.467\,561\,325\,518\,618 \cdot 10^{-15}$	$6.138\,840\,652\,485\,208 \cdot 10^{-15}$
5x5	5	10^7	$2.932\,858\,554\,206\,356 \cdot 10^{-10}$	$2.541\,421\,917\,682\,778 \cdot 10^{-10}$
5x5	5	10^{12}	$2.431\,174\,605\,159\,248 \cdot 10^{-5}$	$2.445\,937\,707\,560\,239 \cdot 10^{-5}$
5x5	4	10^{16}	$9.228\,482\,506\,511\,224 \cdot 10^{-2}$	$1.358\,024\,596\,793\,109 \cdot 10^{-1}$
10x10	10	1	$2.328\,823\,463\,338\,184 \cdot 10^{-16}$	$2.302\,207\,463\,925\,367 \cdot 10^{-16}$
10x10	10	10	$5.324\,442\,579\,404\,919 \cdot 10^{-16}$	$5.916\,561\,726\,981\,507 \cdot 10^{-16}$
10x10	10	1000	$7.659\,734\,318\,226\,236 \cdot 10^{-16}$	$1.167\,815\,308\,046\,354 \cdot 10^{-14}$
10x10	10	10^7	$2.568\,414\,379\,855\,613 \cdot 10^{-10}$	$2.258\,463\,845\,088\,549 \cdot 10^{-10}$
10x10	10	10^{12}	$1.951\,994\,704\,671\,510 \cdot 10^{-5}$	$2.174\,813\,032\,517\,800 \cdot 10^{-5}$
10x10	9	10^{16}	$3.178\,399\,241\,163\,815 \cdot 10^{-1}$	$3.516\,778\,693\,816\,187 \cdot 10^{-1}$
20x20	20	1	$5.495\,323\,605\,393\,213 \cdot 10^{-16}$	$4.557\,326\,905\,135\,503 \cdot 10^{-16}$
20x20	20	10	$5.087\,681\,048\,627\,601 \cdot 10^{-16}$	$4.071\,658\,748\,137\,585 \cdot 10^{-16}$
20x20	20	1000	$5.808\,917\,732\,317\,164 \cdot 10^{-15}$	$3.747\,228\,857\,827\,342 \cdot 10^{-15}$
20x20	20	10^7	$1.511\,216\,720\,479\,130 \cdot 10^{-10}$	$1.241\,078\,754\,561\,024 \cdot 10^{-10}$
20x20	20	10^{12}	$4.740\,084\,259\,557\,948 \cdot 10^{-5}$	$4.819\,264\,617\,327\,459 \cdot 10^{-5}$
20x20	19	10^{16}	$8.613\,420\,159\,130\,484 \cdot 10^{-1}$	$8.466\,277\,602\,660\,599 \cdot 10^{-1}$

Tabela 3: Wyniki obliczeń dla macierzy losowej \mathbf{R}_n^c

4.3 Wyniki

Tabela 4 przedstawia obliczone pierwiastki wielomianu P oraz $|P(z_k)|$, $|p(z_k)|$ i $|z_k - k|$, natomiast Tabela 5 prezentuje te wartości dla wielomianu P z zaburzonym współczynnikiem.

4.4 Wnioski

5 Model wzrostu populacji

5.1 Opis problemu

Zbadanie modelu wzrostu populacji (model logistyczny)

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n), \text{ dla } n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

gdzie r jest pewną daną stałą, $r(1 - p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji, a p_0 jest wielkością populacji stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

W tym celu należało przeprowadzić następujące eksperymenty.

- (i) Wykonanie 40 iteracji wyrażenia (2) w arytmetyce `Float32` dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$. Ponowne wykonanie 40 iteracji wyrażenia (2) z niewielką modyfikacją tj. wykonanie 10 iteracji, zatrzymanie, zastosowanie obcięcia wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku (daje to liczbę 0.722) i kontynuowanie dalej obliczenia (do 40-stej iteracji) tak, jak gdyby był to ostatni wynik na wyjściu. Porównanie wyników obu iteracji.
- (ii) Wykonanie 40 iteracji wyrażenia (2) dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ w arytmetyce `Float32` i `Float64`. Porównanie wyników iteracji dla obu arytmetyk.

k	$ P(z_k) $	$ p(z_k) $	$ z_k - k $
1	$2.746\,295\,274\,547 \cdot 10^{13}$	$2.746\,278\,890\,701 \cdot 10^{13}$	$1.907\,087\,633\,626 \cdot 10^{-4}$
2	$1.027\,837\,616\,282 \cdot 10^{13}$	$1.027\,823\,565\,670 \cdot 10^{13}$	$1.909\,818\,299\,438 \cdot 10^{-3}$
3	$7.199\,554\,861\,056 \cdot 10^{12}$	$7.199\,447\,475\,200 \cdot 10^{12}$	$9.078\,647\,283\,520 \cdot 10^{-3}$
4	$3.777\,623\,778\,304 \cdot 10^{12}$	$3.777\,532\,946\,944 \cdot 10^{12}$	$2.542\,714\,623\,741 \cdot 10^{-2}$
5	$1.555\,027\,751\,936 \cdot 10^{12}$	$1.554\,961\,097\,216 \cdot 10^{12}$	$5.371\,328\,339\,203 \cdot 10^{-2}$
6	$6.139\,877\,534\,720 \cdot 10^{11}$	$6.139\,384\,156\,160 \cdot 10^{11}$	$7.549\,379\,969\,948 \cdot 10^{-2}$
7	$3.653\,832\,509\,440 \cdot 10^{11}$	$3.653\,447\,936\,000 \cdot 10^{11}$	$8.524\,440\,819\,787 \cdot 10^{-2}$
8	$2.157\,236\,290\,560 \cdot 10^{11}$	$2.156\,963\,307\,520 \cdot 10^{11}$	$7.431\,403\,244\,734 \cdot 10^{-2}$
9	$7.216\,771\,584\,000 \cdot 10^{10}$	$7.214\,665\,062\,400 \cdot 10^{10}$	$4.671\,674\,615\,314 \cdot 10^{-2}$
10	$3.575\,989\,555\,200 \cdot 10^{10}$	$3.574\,346\,905\,600 \cdot 10^{10}$	$2.502\,293\,290\,932 \cdot 10^{-2}$
11	$1.270\,712\,678\,400 \cdot 10^{10}$	$1.269\,690\,726\,400 \cdot 10^{10}$	$9.586\,957\,518\,275 \cdot 10^{-3}$
12	$4.465\,326\,592\,000 \cdot 10^9$	$4.457\,859\,584\,000 \cdot 10^9$	$2.915\,294\,362\,053 \cdot 10^{-3}$
13	$1.682\,691\,072\,000 \cdot 10^9$	$1.678\,497\,280\,000 \cdot 10^9$	$6.441\,703\,922\,384 \cdot 10^{-4}$
14	$4.803\,983\,360\,000 \cdot 10^8$	$4.782\,909\,440\,000 \cdot 10^8$	$1.020\,027\,930\,076 \cdot 10^{-4}$
15	$1.201\,520\,640\,000 \cdot 10^8$	$1.188\,249\,600\,000 \cdot 10^8$	$1.075\,417\,522\,678 \cdot 10^{-5}$
16	$2.411\,468\,800\,000 \cdot 10^7$	$2.334\,668\,800\,000 \cdot 10^7$	$6.657\,697\,912\,971 \cdot 10^{-7}$
17	$3.106\,816\,000\,000 \cdot 10^6$	$2.844\,672\,000\,000 \cdot 10^6$	$1.626\,246\,826\,092 \cdot 10^{-8}$
18	$2.094\,080\,000\,000 \cdot 10^5$	$3.015\,680\,000\,000 \cdot 10^5$	$4.079\,034\,887\,638 \cdot 10^{-10}$
19	$1.817\,600\,000\,000 \cdot 10^5$	$1.981\,440\,000\,000 \cdot 10^5$	$2.831\,823\,664\,451 \cdot 10^{-11}$
20	$3.635\,200\,000\,000 \cdot 10^4$	$3.840\,000\,000\,000 \cdot 10^4$	$3.010\,924\,842\,783 \cdot 10^{-13}$

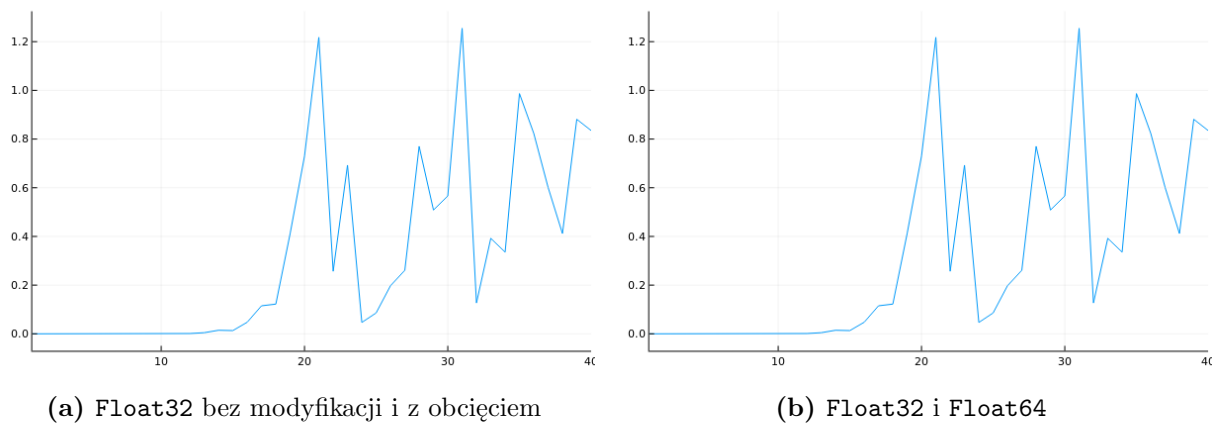
Tabela 4: Obliczone wartości dla wielomianu P

5.2 Rozwiązanie

Zaimplementowano podany model wzrostu populacji i za pomocą stworzonej funkcji obliczono wyniki dla odpowiedniej liczby iteracji.

5.3 Wyniki

Zestawienie wyników dla obu eksperymentów prezentują odpowiednio Tabela 6 oraz Tabela 7. Dla lepszego ukazania rozbieżności pomiędzy kolejnymi iteracjami w eksperymentach zostały narysowane wykresy (Rysunek 3) przedstawiające wartość bezwzględną różnic otrzymanych wyników.



Rysunek 3: Wykresy przedstawiają różnicę pomiędzy kolejnymi wynikami iteracji

k	z_k	$ P(z_k) $	$ p(z_k) $	$ z_k - k $
1	20.846910215194789	$1.114\,453\,504\,512 \cdot 10^{13}$	$1.374\,373\,319\,725 \cdot 10^{18}$	$8.469\,102\,151\,948 \cdot 10^{-1}$
2	$19.502442368818102 + 1.940331978642903i$	$9.539\,424\,609\,818 \cdot 10^{12}$	$4.252\,502\,487\,993 \cdot 10^{17}$	$2.004\,329\,444\,310$
3	$19.502442368818102 - 1.940331978642903i$	$9.539\,424\,609\,818 \cdot 10^{12}$	$4.252\,502\,487\,993 \cdot 10^{17}$	$2.454\,021\,446\,313$
4	$16.730744879792670 + 2.812624896721978i$	$3.315\,103\,475\,982 \cdot 10^{11}$	$2.742\,089\,401\,676 \cdot 10^{16}$	$2.825\,483\,521\,350$
5	$16.730744879792670 - 2.812624896721978i$	$3.315\,103\,475\,982 \cdot 10^{11}$	$2.742\,089\,401\,676 \cdot 10^{16}$	$2.906\,001\,873\,538$
6	$13.992406684487216 + 2.518824425710844i$	$1.061\,206\,453\,308 \cdot 10^{11}$	$9.545\,941\,595\,184 \cdot 10^{14}$	$2.712\,880\,531\,285$
7	$13.992406684487216 - 2.518824425710844i$	$1.061\,206\,453\,308 \cdot 10^{11}$	$9.545\,941\,595\,184 \cdot 10^{14}$	$2.518\,835\,871\,191$
8	$11.793890586174369 + 1.652477136407579i$	$3.357\,756\,113\,172 \cdot 10^{10}$	$3.296\,021\,414\,130 \cdot 10^{13}$	$2.045\,820\,276\,678$
9	$11.793890586174369 - 1.652477136407579i$	$3.357\,756\,113\,172 \cdot 10^{10}$	$3.296\,021\,414\,130 \cdot 10^{13}$	$1.665\,281\,290\,598$
10	$10.095455630535774 + 0.644932823624069i$	$7.143\,113\,638\,036 \cdot 10^9$	$1.491\,263\,381\,675 \cdot 10^{12}$	$1.110\,918\,027\,272$
11	$10.095455630535774 - 0.644932823624069i$	$7.143\,113\,638\,036 \cdot 10^9$	$1.491\,263\,381\,675 \cdot 10^{12}$	$6.519\,586\,830\,380 \cdot 10^{-1}$
12	8.915816367932559	$3.065\,575\,424\,000 \cdot 10^9$	$1.371\,743\,170\,560 \cdot 10^{11}$	$8.418\,363\,206\,744 \cdot 10^{-2}$
13	8.007772029099446	$1.072\,547\,328\,000 \cdot 10^9$	$1.852\,548\,659\,200 \cdot 10^{10}$	$7.772\,029\,099\,446 \cdot 10^{-3}$
14	6.999602070422420	$3.881\,231\,360\,000 \cdot 10^8$	$1.757\,670\,912\,000 \cdot 10^9$	$3.979\,295\,775\,798 \cdot 10^{-4}$
15	6.000020476673031	$1.291\,484\,160\,000 \cdot 10^8$	$2.061\,204\,480\,000 \cdot 10^8$	$2.047\,667\,303\,096 \cdot 10^{-5}$
16	4.999998573887910	$3.946\,393\,600\,000 \cdot 10^7$	$4.330\,393\,600\,000 \cdot 10^7$	$1.426\,112\,089\,753 \cdot 10^{-6}$
17	4.000000089724362	$1.046\,784\,000\,000 \cdot 10^7$	$1.072\,998\,400\,000 \cdot 10^7$	$8.972\,436\,216\,226 \cdot 10^{-8}$
18	2.999999996603420	$2.221\,568\,000\,000 \cdot 10^6$	$2.295\,296\,000\,000 \cdot 10^6$	$3.396\,579\,906\,223 \cdot 10^{-9}$
19	2.000000000055037	$3.491\,840\,000\,000 \cdot 10^5$	$3.655\,680\,000\,000 \cdot 10^5$	$5.503\,730\,804\,435 \cdot 10^{-11}$
20	0.99999999999836	$2.099\,200\,000\,000 \cdot 10^4$	$2.201\,600\,000\,000 \cdot 10^4$	$1.643\,130\,076\,445 \cdot 10^{-13}$

Tabela 5: Obliczone wartości dla wielomianu P z zaburzonym współczynnikiem przy x^{19}

5.4 Wnioski

6 Iterowanie funkcji kwadratowej

6.1 Opis problemu

Zbadanie zachowania równania rekurencyjnego

$$x_{n+1} := x_n^2 + c, \text{ dla } n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

gdzie c jest pewną daną stałą, dla następujących danych:

- (i) $c = -2$ i $x_0 = 1$
- (ii) $c = -2$ i $x_0 = 2$
- (iii) $c = -2$ i $x_0 = 1.999999999999999$
- (iv) $c = -1$ i $x_0 = 1$
- (v) $c = -1$ i $x_0 = -1$
- (vi) $c = -1$ i $x_0 = 0.75$
- (vii) $c = -1$ i $x_0 = 0.25$

W tym celu należało wykonać 40 iteracji wyrażenia (3) i zaobserwować zachowanie generowanych ciągów, a także przeprowadzić iterację graficzną (3).

6.2 Rozwiązanie

6.3 Wyniki

6.4 Wnioski

Iteracja	Bez modyfikacji	Z modyfikacją
1	0.0397	0.0397
2	0.154 071 73	0.154 071 73
3	0.545 072 6	0.545 072 6
4	1.288 978 1	1.288 978 1
5	0.171 518 8	0.171 518 8
10	0.722 930 6	0.722
11	1.323 836 4	1.324 147 9
12	0.037 716 985	0.036 488 414
15	1.270 483 7	1.257 216 9
17	0.786 042 8	0.901 085 5
19	0.165 524 72	0.577 893
20	0.579 903 6	1.309 691 1
25	1.007 080 6	1.092 910 8
30	0.752 920 9	1.319 182 2
35	1.021 099	0.034 241 438
40	0.258 605 48	1.093 568

Tabela 6: Wybrane wyniki kolejnych iteracji modelu logistycznego w arytmetyce `Float32` bez modyfikacji i z obciążeniem wyniku 10 iteracji od 3 miejsca po przecinku

Iteracja	Float32	Float64
1	0.0397	0.0397
2	0.154 071 73	0.154 071 730 000 000 02
3	0.545 072 6	0.545 072 626 044 421 3
4	1.288 978 1	1.288 978 001 188 800 6
5	0.171 518 8	0.171 519 142 109 175 52
10	0.722 930 6	0.722 914 301 179 573
15	1.270 483 7	1.270 261 773 935 076 8
20	0.579 903 6	0.596 529 312 494 690 7
25	1.007 080 6	1.315 588 346 001 072
26	0.985 688 5	0.070 035 295 602 778 99
27	1.028 008 6	0.265 426 354 520 610 03
30	0.752 920 9	0.374 146 489 639 286 76
35	1.021 099	0.925 382 128 557 104 6
39	1.265 200 4	0.002 909 156 902 851 206 5
40	0.258 605 48	0.011 611 238 029 748 606

Tabela 7: Wybrane wyniki kolejnych iteracji modelu logistycznego w arytmetyce `Float32` i `Float64`

It.	$c = -2$			$c = -1$			
	$x_0=1$	$x_0=2$	$x_0=1.999999999999999$	$x_0=1$	$x_0=-1$	$x_0=0.75$	$x_0=0.25$
1	-1.0	2.0	1.999 999 999 999 96	0.0	0.0	-0.4375	-0.9375
2	-1.0	2.0	1.999 999 999 999 840 1	-1.0	-1.0	-0.808 593 75	-0.121 093 75
3	-1.0	2.0	1.999 999 999 999 360 5	0.0	0.0	-0.346 176 147 460 937 5	-0.985 336 303 710 937 5
4	-1.0	2.0	1.999 999 999 997 442	-1.0	-1.0	-0.880 162 074 929 103 3	-0.029 112 368 589 267 135
5	-1.0	2.0	1.999 999 999 989 768 2	0.0	0.0	-0.225 314 721 856 495 6	-0.999 152 469 995 122 6
6	-1.0	2.0	1.999 999 999 959 072 7	-1.0	-1.0	-0.949 233 276 114 730 1	-0.001 694 341 702 645 596 5
7	-1.0	2.0	1.999 999 999 836 291	0.0	0.0	-0.098 956 187 516 496 6	-0.999 997 129 206 194 7
8	-1.0	2.0	1.999 999 999 345 163 8	-1.0	-1.0	-0.990 207 672 952 199 9	-5.741 579 369 278 327 · 10 ⁻⁶
9	-1.0	2.0	1.999 999 997 380 655 3	0.0	0.0	-0.019 488 764 426 589 09	-0.999 999 999 967 034 3
10	-1.0	2.0	1.999 999 989 522 621	-1.0	-1.0	-0.999 620 188 061 125	-6.593 148 249 578 462 · 10 ⁻¹¹
11	-1.0	2.0	1.999 999 958 090 484 1	0.0	0.0	-0.000 759 479 620 641 156 9	-1.0
12	-1.0	2.0	1.999 999 832 361 938 3	-1.0	-1.0	-0.999 999 423 190 705 8	0.0
13	-1.0	2.0	1.999 999 329 447 781 4	0.0	0.0	-1.153 618 255 700 372 7 · 10 ⁻⁶	-1.0
14	-1.0	2.0	1.999 997 317 791 574 9	-1.0	-1.0	-0.999 999 999 998 669 2	0.0
15	-1.0	2.0	1.999 989 271 173 493 7	0.0	0.0	-2.661 648 679 236 350 3 · 10 ⁻¹²	-1.0
16	-1.0	2.0	1.999 957 084 809 082 6	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
17	-1.0	2.0	1.999 828 341 078 044	0.0	0.0	0.0	-1.0
18	-1.0	2.0	1.999 313 393 778 961 3	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
19	-1.0	2.0	1.997 254 046 543 948 1	0.0	0.0	0.0	-1.0
20	-1.0	2.0	1.989 023 726 436 175 2	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
21	-1.0	2.0	1.956 215 384 326 048 6	0.0	0.0	0.0	-1.0
22	-1.0	2.0	1.826 778 629 873 91	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
23	-1.0	2.0	1.337 120 162 563 999 7	0.0	0.0	0.0	-1.0
24	-1.0	2.0	-0.212 109 670 864 823 13	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
25	-1.0	2.0	-1.955 009 487 525 616 3	0.0	0.0	0.0	-1.0
26	-1.0	2.0	1.822 062 096 315 173	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
27	-1.0	2.0	1.319 910 282 828 443	0.0	0.0	0.0	-1.0
28	-1.0	2.0	-0.257 836 845 283 739 6	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
29	-1.0	2.0	-1.933 520 161 214 128 8	0.0	0.0	0.0	-1.0
30	-1.0	2.0	1.738 500 213 821 510 9	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
31	-1.0	2.0	1.022 382 993 457 438 9	0.0	0.0	0.0	-1.0
32	-1.0	2.0	-0.954 733 014 689 006 5	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
33	-1.0	2.0	-1.088 484 870 662 841 2	0.0	0.0	0.0	-1.0
34	-1.0	2.0	-0.815 200 686 338 097 8	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
35	-1.0	2.0	-1.335 447 840 993 894 4	0.0	0.0	0.0	-1.0
36	-1.0	2.0	-0.216 579 063 984 746 25	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
37	-1.0	2.0	-1.953 093 509 043 491	0.0	0.0	0.0	-1.0
38	-1.0	2.0	1.814 574 255 067 817 4	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
39	-1.0	2.0	1.292 679 727 154 924 4	0.0	0.0	0.0	-1.0
40	-1.0	2.0	-0.328 979 123 002 670 2	-1.0	-1.0	-1.0	0.0

Tabela 8: Wybrane wyniki kolejnych iteracji modelu logistycznego w arytmetyce Float32 i Float64