

# Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. I.

(Mitteilung aus dem Telegraphentechnischen Reichsamte.)

Von

Felix Pollaczek in Berlin.

## 1. Problemstellung.

Die Bestimmung der statistischen Verteilung der Wartezeiten der von einem oder von mehreren parallel arbeitenden „Schaltern“ abzufertigenden Personen, von der das Nachstehende handelt, führt im einfachsten Falle (konstante Abfertigungszeit) auf Fragen folgender Art:

Für jedes ganzzahlige  $n$  seien  $\mu(n) \leq n$  reelle inhomogene Linearformen  $l_1^{(n)}, \dots, l_\mu^{(n)}$  der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  gegeben; man integriere nun die Funktion

Maximum der Zahlen  $0, l_1^{(n)}, \dots, l_\mu^{(n)}$

über einen gewissen Simplex des  $n$ -dimensionalen Raumes der  $x$ , bzw. man bestimme für jedes  $t$  das Volumen desjenigen Simplexteiles, in dessen Punkten die erwähnte Funktion  $\leq t$  ist, und untersuche beide Resultate insbesondere bezüglich ihrer Abhängigkeit von der Dimensionszahl  $n$ .

Wir behandeln diese Aufgabe, deren Erledigung funktionentheoretische Hilfsmittel erfordert, hier nur in dem durch die wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellung bedingten Umfange und bedienen uns hierbei, an Stelle abstrakter Bezeichnungen, der bei dieser Fragestellung auftretenden Ausdrücke („Personen“, „Ankunftszeit“ usw.).

Unser Problem ist folgendes:

Es seien  $s (\geq 1)$  Schalter vorhanden, und vor diesen mögen innerhalb eines gewissen Zeitintervalls  $T$  stets gleichviel ( $n$ ) Personen erscheinen; diese  $n$  Personen mögen unabhängig voneinander eintreffen und für jede von ihnen sei jede Ankunftszeit innerhalb des Intervalls  $T$  gleich wahrscheinlich (dies als einfachste derartige Annahme). Weiter setzen wir die erforderlichen Abfertigungszeiten als statistisch bekannt voraus, d. h. es sei eine Funktion  $f(t)$

vorgegeben, welche den Bruchteil derjenigen Personen, deren Abfertigungszeit höchstens gleich  $t$  ist (oder die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abfertigungszeit eines Schalterbesuchers  $\leq t$  ist), angibt. Wir fragen nun nach der mittleren Wartezeit  $\vartheta$  irgendeiner der  $n$  Personen und nach der Statistik der Wartezeiten, d. h. nach der Wahrscheinlichkeit  $\varrho(t)$  dafür, daß die Wartezeit irgendeiner der  $n$  Personen höchstens gleich  $t$  ist.

Zur Erledigung dieser Fragen, deren erstere in diesem Teile beantwortet wird, muß eine Vorschrift darüber gegeben sein, in welcher Reihenfolge die Wartenden abgefertigt werden. Schreibt man vor, daß jede Person in der Reihenfolge ihres Eintreffens abgefertigt wird, so kann im einfachsten Falle einer für alle Personen gleichen Abfertigungszeit für die Untersuchung der Wartevorgänge von vornherein angenommen werden, daß an dem  $a$ -ten ( $a = 1, 2, \dots, s$ ) Schalter nur die  $a$ -te,  $s + a$ -te,  $2s + a$ -te, usw. eintreffende Person abgefertigt wird; hingegen wäre bei Beibehaltung der ursprünglichen Vorschrift im Falle des Vorkommens verschiedener Abfertigungszeiten der Abfertigungsschalter durch die Reihenfolge des Eintreffens allein noch nicht bestimmt, sondern auch von den Abfertigungszeiten aller vorher Eingetroffenen abhängig. *Wir schreiben jedoch entsprechend den meisten Wartevorgängen der Wirklichkeit vor, daß in jedem Falle dem  $a$ -ten Schalter der  $a$ -te,  $s + a$ -te,  $2s + a$ -te usw. Eintreffende zugewiesen wird.*

Wir bestimmen hier die mittlere (d. h. die mathematisch zu erwartende) Wartezeit  $\vartheta$ , die mit der später abzuleitenden Wahrscheinlichkeit  $\varrho(t)$  durch die Beziehung

$$\vartheta = \int_0^{\infty} t d\varrho(t) = \int_0^{\infty} (1 - \varrho(t)) dt$$

verknüpft ist, auf direktem Wege.

Die Größe  $\vartheta$ , welche, so wie später  $\varrho(t)$ , als geometrische Wahrscheinlichkeit zu berechnen ist, erscheint zunächst in der Form eines  $(2n - 1)$ -fachen Integrals über eine gewisse abteilungsweise lineare Funktion der Integrationsvariablen. Dann ist zuerst die Aufgabe zu erledigen, dieses Integral „auszuwerten“, und dies gelingt mit Hilfe eines vielfachen komplexen Integrals, einer Verallgemeinerung des Dirichletschen Faktors.  $\vartheta$  ergibt sich so allgemein, d. h. für beliebige Verteilungsfunktionen  $f(t)$ , in Form eines komplexen Doppelintegrals, dessen Integrand von einer durch die Momente von  $f(t)$  bestimmten analytischen Funktion  $\varepsilon(z)$  und außerdem von  $n$  und einem reellen Parameter  $\eta$ , dem „Ausnützungsgrad“, abhängt. Zwar kann dieses Doppelintegral für jedes gegebene  $f(t)$ ,  $\eta$  und  $n$  formal ausgerechnet werden, doch hängt das Resultat (im Falle konstanter Abfertigungszeit ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\eta$ ) für großes  $n$  in sehr umständlicher Weise von den erwähnten Größen ab.

Es ergibt sich daher die weitere Aufgabe,  $\vartheta$  asymptotisch für  $n \rightarrow \infty$  zu entwickeln, und um diese zu erledigen, machen wir einschränkende Voraussetzungen über  $f(t)$ . Je nach der Abhängigkeit des Parameters von  $n$  sind hierbei die drei Fälle  $\eta = \text{const} \leq 1$  und  $\eta = 1 + \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}$  (im Falle konstanter Abfertigungszeit die vier Fälle  $\eta = \text{const} \leq 1$  und  $\eta = 1 \pm \frac{\text{const}^2}{\sqrt{n}}$ ) zu unterscheiden, deren jedem eine besondere Entwicklung entspricht, ähnlich wie z. B. die Entwicklung der Besselschen Funktion  $J_n(nx)$  für  $n \rightarrow \infty$  (Debye) auf drei verschiedene semikonvergente Reihen führt, je nachdem  $x = \text{const} \geq 1$  oder  $x = 1 + \frac{\text{const}}{n^{2/3}}$  ist.

Das Anfangsglied jeder dieser Entwicklungen, auf dessen Anführung wir uns, nach Darlegung des formalen Rechnungsganges, zumeist beschränken, stellt das Limesgesetz des betreffenden Falles für kontinuierlichen Betrieb dar; mit diesem Glied, das frei ist von den Wirkungen der „Enden“ der unserer Rechnung zugrunde gelegten Wartevorgänge (nämlich dem Vorhandensein eines ersten und eines letzten Eintreffenden) wird man sich bei Anwendungen auf die Praxis zumeist begnügen. —

Die entsprechenden Entwicklungen für die Funktion  $\varrho(t)$ , die Statistik der Wartezeiten, werden in einem zweiten Teile gebracht.

## 2. Einführung eines vielfachen Fourierintegrals.

Zur Bestimmung der mittleren Wartezeit  $\vartheta$  irgendeiner innerhalb des Intervalls  $T$  eintreffenden Person benötigt man zuvor die mittlere Wartezeit  $\vartheta_m$  der  $m$ -ten eintreffenden Person ( $1 \leq m \leq n$ ); aus den  $\vartheta_m$  folgt dann  $\vartheta$  mittels

$$(1) \quad \vartheta = \frac{1}{n} \sum_1^n \vartheta_m.$$

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ist es gleichgültig, ob man  $n$  von vornherein fest bezifferte Personen annimmt, deren jede in jedem Zeitpunkt innerhalb  $T$  eintreffen kann, oder ob man, so wie im folgenden, der  $m$ -ten eintreffenden Person den Index  $m$  zuteilt, und demgemäß nur über alle Zeitpunktskombinationen

$$(2) \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq T$$

( $x_m$  = Ankunftszeitpunkt der  $m$ -ten eintreffenden Person) summiert, in denen  $n$  Personen *nacheinander* eintreffen können. Die Abfertigungszeit sei vorläufig für alle  $n$  Personen als gleich  $t_0 = \text{const.}$  vorausgesetzt. Für jedes System (2) ist nun zunächst die zugehörige Wartezeit des  $m$ -ten Eintreffenden zu bestimmen, wobei zwei Fälle zu unterscheiden sind:

$$\alpha) 1 \leq m \leq s,$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_s = 0,$$

da die ersten  $s$  Personen voraussetzungsgemäß nicht warten müssen.

$$\beta) m > s.$$

Die  $m$ -te Person hat nach dem früher Gesagten bis zur Erledigung der  $(m-s)$ -ten Person zu warten; diese letztere, die zur Zeit  $x_{m-s}$  eintraf und eine Wartezeit  $\tau_{m-s}$  hatte, verläßt zur Zeit  $x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0$  den Schalter. Fällt die Ankunftszeit  $x_m$  vor diesen Zeitpunkt, so ist  $\tau_m = x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0 - x_m$ ; liegt sie aber später, so ist  $\tau_m = 0$ . Um beide Fälle formal zusammenfassen, sei ein Zeichen  $()$  eingeführt durch folgende Definition:

$$(3) \quad \begin{aligned} (a) &= a & (a \geq 0), \\ (a) &= 0 & (a < 0). \end{aligned}$$

Mit (3) gilt allgemein

$$(4a) \quad \tau_m = (x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0 - x_m) \quad (s+1 \leq m \leq n),$$

$$(4b) \quad \tau_m = 0 \quad (1 \leq m \leq s).$$

Zur Bildung der mittleren Wartezeit  $\vartheta_m$  hat man über alle Kombinationen (2) zu mitteln, d. h.  $\vartheta_m$  ist der Quotient aus

$$\int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^T \tau_m dx_n \quad \text{und} \quad \int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^T dx_n = \frac{T^n}{n!}.$$

Nach (4a) hängt  $\tau_m$  nur ab von der Variablen  $x_m, x_{m-s}, x_{m-2s}$  usw.; im Zählerintegral können daher die  $n-m$  inneren Integrationen sogleich ausgeführt werden, und man erhält

$$(5) \quad \vartheta_m = \frac{n!}{T^n} \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{m-1}}^T \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} \tau_m dx_m \quad (1 \leq m \leq n),$$

und hieraus insbesondere nach (4b)

$$(5a) \quad \vartheta_m = 0 \quad (1 \leq m \leq s).$$

Aus (4a) folgt für  $\tau_m$ , wenn für den Augenblick

$$(6) \quad x_{m-\nu s} - x_{m-(\nu-1)s} + t_0 = a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

geschrieben und weiter

$$(7) \quad m = \mu s + s', \quad 1 \leq s \leq s', \quad \text{also} \quad \left[ \frac{m-1}{s} \right] = \mu,$$

gesetzt wird,

$$(8) \quad \tau_m = (a_1 + (a_2 + (a_3 + \dots + (a_\mu))))).$$

Beachtet man, daß  $a + (b-a)$  die größere der beiden Zahlen  $a$  und  $b$ , ebenso

$$a + (b-a + (c-b))$$

das Maximum der drei Zahlen  $a, b, c$  darstellt usw., so geht leicht hervor daß (8) das Maximum der Zahlen  $0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, \sum_1^\mu a_i$  darstellt. Unsere Aufgabe besteht also zunächst darin, die folgende Funktion:

Maximum der  $\mu + 1$  Linearformen

$$0, x_{m-s} - x_m + t_0, x_{m-2s} - x_m + 2t_0, \dots, x_{m-\mu s} - x_m + \mu t_0$$

über den Simplex (2) zu integrieren.

Da nun zwar nicht der Ausdruck (8), jedoch ein Ausdruck von der Form

$$(9) \quad (-a_1 - (a_2 + (a_3 + (a_4 + \dots))))$$

(Bedeutung: Minimum der Zahlen  $-a_1, -a_1 - a_2, -a_1 - a_2 - a_3, \dots$  usw., falls dieses Minimum positiv ist; andernfalls die Null) eine die Durchführung der Integrationen nach den  $x$  erleichternde Integraldarstellung besitzt, schreiben wir unter Benutzung der aus (3) folgenden Identität

$$(10) \quad (a) = a + (-a)$$

anstatt (4a)

$$\tau_m = x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_0 - x_m + (-(x_{m-s} - x_m + t_0) - \tau_{m-s})$$

mit

$$(11) \quad (-(x_{m-s} - x_m + t_0) - \tau_{m-s}) = (-a_1 - (a_2 + (a_3 + \dots))),$$

und dies gibt, in (5) eingesetzt,

$$\vartheta_m = \vartheta_{m-s} + \frac{n!}{T^n} \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{m-1}}^T (x_{m-s} - x_m + t_0 + (-(x_{m-s} - x_m + t_0) - \tau_{m-s})) \times \frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!} dx_m.$$

Wird hier die Integration über die ersten Summanden ausgeführt und

$$(12) \quad \varphi_{\mu, n+1}(T) = (n+1)! \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{m-1}}^T (-(x_{m-s} - x_m + t_0) - \tau_{m-s}) \frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!} dx_m$$

gesetzt, so folgt weiter

$$(13) \quad \vartheta_m = \vartheta_{m-s} + t_0 - \frac{sT}{n+1} + \frac{1}{(n+1)T^n} \varphi_{\mu, n+1}(T)$$

Fig. 1.

und der Faktor (...) unter dem Integralzeichen in (12) hat nunmehr die Gestalt (9). Es gilt nun, gewissermaßen als Verallgemeinerung des Dirichletschen diskontinuierlichen Faktors, folgende Integraldarstellung:

$$(14) \quad (-a_1 - (a_2 + (a_3 + \dots + (a_{\mu-1} + (a_\mu) \dots))))$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^\mu} \int_{C_1} \dots \int_{C_\mu} \frac{e^{-\sum_{i=1}^\mu q_i a_i}}{q_1 (q_1 - q_2) (q_2 - q_3) \dots (q_{\mu-1} - q_\mu) q_\mu} dq_1 dq_2 \dots dq_\mu \quad (\mu \geq 2),$$

wobei  $C_1 = C_{q_1}, \dots, C_\mu = C_{q_\mu}$  die aus der Fig. 1 ersichtlichen Kurven sind.

Die Formel (14) ist zunächst leicht zu verifizieren für  $\mu = 2$ , wo sie gibt:

$$(14a) \quad (-a_1 - (a_2)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} dq_1 \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{-q_1 a_1 - q_2 a_2}}{q_1 (q_1 - q_2) q_2} dq_2.$$

Ist  $a_2 > 0$ , also  $(a_2) = a_2$ , so darf die Kurve  $C_2$  parallel zu sich ins Unendliche der positiven  $q_2$ -Halbebene, wo  $\int \dots dq_1$  verschwindet, verschoben werden, wobei der Pol  $q_2 = q_1$ , dessen Residuum mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, überstrichen wird; (14a) geht dann über in die bekannte Identität

$$(-a_1 - a_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{-q_1 (a_1 + a_2)}}{q_1^2} dq_1;$$

ebenso folgt für  $a_2 \leq 0$ , also  $(a_2) = 0$ , durch Verschieben der Kurve  $C_1$  nach links ins Unendliche der negativ-reellen  $q_1$ -Halbebene, wobei sich  $\int \dots dq_1$  auf das Residuum in  $q_1 = 0$  reduziert, die Identität

$$(-a_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{-q_1 a_1}}{q_1^2} dq_1.$$

In analoger Weise ist die allgemeine Formel (14) durch Schluß von  $\mu$  auf  $\mu - 1$  zu beweisen.

Für die Größe (11) kann nun mit (14) und (6) geschrieben werden

$$(15a) \quad \begin{aligned} &(- (x_{m-s} - x_m + t_0) - \tau_{m-s}) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^\mu} \int_{C_1} \dots \int_{C_\mu} \frac{e^{-\sum_1^\mu q_\nu (x_{m-\nu s} - x_{m-(\nu-1)s} + t_0)}}{q_1 (q_1 - q_2) \dots (q_{\mu-1} - q_\mu) q_\mu} dq_1 \dots dq_\mu. \end{aligned}$$

Weiter schreiben wir für den zweiten Faktor des Integranden von (12)

$$(15b) \quad \frac{(T - x_m)^{n-n}}{(n-m)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{p(T-x_m)}}{p^{n-m+1}} dp$$

mit einer aus Fig. 1 ersichtlichen Integrationskurve  $C_p$ . Setzt man (15a, b) in (12) ein und vertauscht die Reihenfolge der komplexen und der reellen Integrationen, so können die letzteren sogleich ausgeführt werden; der Exponent der  $e$ -Potenz des Integranden lautet

$$\begin{aligned} &p(T - x_m) - \sum_1^\mu q_\nu (x_{m-\nu s} - x_{m-(\nu-1)s} + t_0) \\ &= pT + x_m(q_1 - p) + \sum_1^{\mu-1} x_{m-\nu s} (q_{\nu+1} - q_\nu) - x_{m-\mu s} q_\mu - t_0 \sum_1^\mu q_\nu \end{aligned}$$

und es wird

$$(16) \quad \begin{aligned} \varphi_{\mu, n+1}(T) &= \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p} \int_{C_1} \dots \int_{C_\mu} \frac{dp dq_1 \dots dq_\mu}{q_1 (q_1 - q_2) \dots (q_{\mu-1} - q_\mu) q_\mu} \\ &\times \int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{m-1}}^T e^{pT + x_m(q_1 - p) + \sum_1^{\mu-1} x_{m-\nu s} (q_{\nu+1} - q_\nu) - x_{m-\mu s} q_\mu - t_0 \sum_1^\mu q_\nu} p^{-n+m-1} dx_m. \end{aligned}$$

Führt man nun die Integration  $\int_{x_{m-1}}^T \dots dx_m$  aus, so wird an der oberen Grenze der von  $p$  abhängige Faktor des Integranden gleich  $\frac{1}{p^{n-m+1}(q_1-p)}$  und das zugehörige  $\int_{C_p} \dots dp$  verschwindet, da  $C_p$  (Fig. 1) ohne Überschreitung eines Poles ins Unendliche gerückt werden kann; es bleibt also jedesmal nur der der unteren Grenze entsprechende Anteil, und nach  $s$  Integrationen ergibt sich für den inneren Teil von (16):

$$\int_0^T dx_1 \dots \int_{x_{m-s-1}}^T \frac{e^{pT+x_{m-s}(q_2-p) + \sum_{r=2}^{\mu-1} x_{m-r}s(q_{r+1}-q_r) - x_{m-\mu}s q_{\mu} - t_0 \sum_{r=1}^{\mu} q_r}}{p^{n-m+1}(p-q_1)^s} dx_{m-s}.$$

Nach Durchführung von weiteren  $(\mu-1)s = m-s-s'$  Integrationen wird aus (16)

$$\varphi_{\mu, n+1}(T) = \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p} \int_{C_1} \dots \int_{C_{\mu}} \frac{dp dq_1 \dots dq_{\mu}}{q_1(q_1-q_2) \dots (q_{\mu-1}-q_{\mu}) q_{\mu}} \int_0^T dx_1 \dots$$

$$\dots \int_{x_{s'-1}}^T \frac{e^{p(T-x_{s'}) - t_0 \sum_{r=1}^{\mu} q_r}}{p^{n-m+1}(p-q_1)^s \dots (p-q_{\mu})^s} dx_{s'},$$

und wenn noch die letzten  $s' \leq s$  Integrationen ausgeführt werden, wird, mit (7),

$$(17) \quad \varphi_{\mu, n+1}(T) = \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p} \int_{C_1} \dots \int_{C_{\mu}} \frac{dp dq_1 \dots dq_{\mu}}{q_1(q_1-q_2) \dots (q_{\mu-1}-q_{\mu}) q_{\mu}}$$

$$\times \frac{e^{pT - t_0 \sum_{r=1}^{\mu} q_r}}{p^{n-\mu s+1}(p-q_1)^s \dots (p-q_{\mu})^s}.$$

### 3. Umformung des Integrals (17).

Um dieses Integral zu vereinfachen, seien zuerst  $p - q_1 = q'_1$  anstatt  $q_1$ ,  $p - q_2 = q'_2$  anstatt  $q_2$  usw. als Integrationsvariable genommen; dann wird (die Akzente der  $q'_i$  werden wieder fortgelassen)

$$(17a) \quad \varphi_{\mu, n+1}(T) = \frac{(n+1)!}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p} \int_{K_1} \dots \int_{K_{\mu}} \frac{e^{p(T-\mu t_0) + t_0 \sum_{i=1}^{\mu} q_i}}{p^{n-\mu s+1}(q_1 \dots q_{\mu})^s}$$

$$\times \frac{dp dq_1 \dots dq_{\mu}}{(p-q_1)(q_2-q_1) \dots (q_{\mu}-q_{\mu-1})(p-q_{\mu})},$$

wobei als Integrationskurven für die  $q_i$  zunächst wieder die Kurven  $C_i$  der Fig. 1, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, zu gelten haben ( $C_{i+1}$  rechts

von  $C_i$ , aber links von  $C_p$ ). Man kann jetzt zuerst die innerste dieser Kurven,  $C_1$ , durch einen kleinen Kreis  $K_1$  um den Nullpunkt der  $q_1$ -Ebene ersetzen, sodann auch  $C_2$  durch einen den ersten umgebenden, aber noch links von  $C_3$  liegenden Kreis  $K_2$  usw., so daß schließlich die Integrationskurven von (17 a) gemäß Fig. 2 gelegen sind.

Zerlegt man im Integranden (17 a) folgendermaßen:

$$\frac{1}{(p-q_1)(p-q_\mu)} = \frac{1}{(p-q_1)(q_1-q_\mu)} - \frac{1}{(p-q_\mu)(q_1-q_\mu)},$$

so wird

$$(17b) \quad \frac{1}{(n+1)!} \varphi_{\mu, n+1} = \frac{1}{(2\pi i)^{\mu+1}} \int_{C_p} \int_{K_1} \dots \int_{K_\mu} \frac{dp dq_1 \dots dq_\mu}{p^{n-\mu s+1} (q_1 \dots q_\mu)^s} e^{p(T-\mu t_0)+t_0 \sum_1^\mu q_i} \\ \times \left[ \frac{1}{(p-q_1)(q_2-q_1) \dots (q_\mu-q_{\mu-1})(q_1-q_\mu)} - \frac{1}{(p-q_\mu)(q_1-q_\mu)(q_2-q_1) \dots (q_\mu-q_{\mu-1})} \right].$$

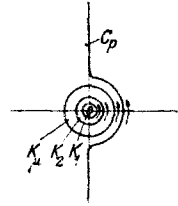


Fig. 2.

Läßt man hier im Integrale über den *ersten* Summanden den Kreis  $K_1$  sich so vergrößern, daß er den Kreis  $K_\mu$  in seinem Innern enthält, die Kurve  $C_p$  aber noch nicht schneidet, so stimmt dieses Integral, für dessen Integrationskreise jetzt  $K_2 < K_3 < K_4 < \dots < K_\mu < K_1$  gilt, bis auf das Vorzeichen überein mit dem Integral über den zweiten Summanden;  $\varphi_{\mu, n+1}$  ist daher gleich der negativen Residuensumme bez. der beiden zu berücksichtigenden einfachen Pole  $q_1 = q_2$  und  $q_1 = q_\mu$ , also

$$(18) \quad \frac{1}{(\mu+1)!} \varphi_{\mu, n+1} = \frac{1}{(2\pi i)^\mu} \int_{C_p} \int_{K_2} \dots \int_{K_\mu} \frac{dp dq_2 \dots dq_\mu \cdot e^{p(T-\mu t_0)+t_0 \sum_2^\mu q_i}}{p^{n-\mu s+1} (q_2 \dots q_\mu)^s} \\ \times \left[ \frac{e^{q_2 t_0}}{q_2^s (p-q_2)(q_3-q_2) \dots (q_\mu-q_{\mu-1})(q_2-q_\mu)} - \frac{e^{q_\mu t_0}}{q_\mu^s (p-q_\mu)(q_2-q_\mu) \dots (q_\mu-q_{\mu-1})} \right].$$

Man kann dieses Verfahren wiederholen, indem man  $K_2$  so vergrößert, daß  $K_\mu < K_2$  wird usw.; nach  $\mu - 3$  Wiederholungen ergibt sich

$$(19) \quad \frac{1}{(n+1)!} \varphi_{\mu, n+1} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p} \int_{K_{\mu-1}} \int_{K_\mu} \frac{dp dq_{\mu-1} dq_\mu}{p^{n-\mu s+1} (q_{\mu-1} q_\mu)^s} \cdot e^{p(T-\mu t_0)+t_0(q_{\mu-1}+q_\mu)} \\ \times \left[ \frac{e^{(\mu-2)t_0 q_{\mu-1}}}{q_{\mu-1}^{s(\mu-2)} (p-q_{\mu-1})(q_\mu-q_{\mu-1})(q_{\mu-1}-q_\mu)} - \frac{e^{(\mu-2)t_0 q_\mu}}{q_\mu^{s(\mu-2)} (p-q_\mu)(q_{\mu-1}-q_\mu)(q_\mu-q_{\mu-1})} \right].$$

Läßt man jetzt noch  $K_{\mu-1}$  über  $K_\mu$  hinauswachsen, jedoch links von  $C_p$  bleiben, so reduziert sich der letzte Ausdruck auf das Residuum (bez.  $dq_{\mu-1}$ ) des ersten Integranden im Pole zweiter Ordnung  $q_\mu$ , und die elementare Rechnung gibt (wir schreiben jetzt  $q, K_q$  statt  $q_\mu, K_\mu$ ):



$$(20) \quad \frac{1}{(n+1)!} \varphi_{\mu, n+1}(T) \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{dp dq}{p^{n-\mu s+1} q^{\mu s+1} (p-q)} e^{p(T-\mu t_0)+\mu q t_0} \left[ (\mu-1)(q t_0 - s) + \frac{q}{p-q} \right];$$

die Integrationskurven  $C_p$  und  $K_q$  zeigt Fig. 3. Das letzte leicht auszuwertende Doppelintegral ergibt

$$(20a) \quad \varphi_{\mu, n+1}(T) \\ = \sum_{\kappa=0}^{s\mu} \binom{n+1}{\kappa} (T - \mu t_0)^{n+1-\kappa} (\mu t_0)^{\kappa} \frac{s\mu - \kappa}{\mu},$$

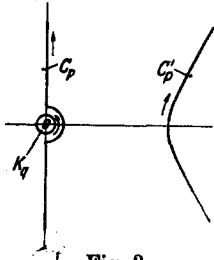


Fig. 3.

doch knüpft das Weitere nicht an dieses für großes  $\mu$  unübersichtliche Polynom an, sondern an den Ausdruck (20).

Aus (13) folgt, mit (5a) und (7), durch Summierung über  $\mu = 1, 2, \dots, \mu$

$$(21) \quad \vartheta_{\mu s+s'} = \mu \left( t_0 - \frac{sT}{n+1} \right) + \frac{1}{(n+1)T^n} \sum_{\nu=1}^{\mu} \varphi_{\nu, n+1}(T) \quad (\mu \geq 1, 1 \leq s' \leq s);$$

$\vartheta_{\mu s+s'}$  hängt also nicht von  $s'$  ab.

Für das Weitere denken wir uns  $n$ , die Zahl aller eintreffenden Personen, durch  $s$  teilbar:

$$(22) \quad n = s(\mu_0 + 1);$$

nach (1) gilt dann für die mittlere Wartezeit irgendeiner der  $n$  Personen

$$(23) \quad \vartheta = \frac{s}{n} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \vartheta_{\mu s+s}$$

und hieraus folgt mit (21), (22):

$$(24) \quad \vartheta = \frac{n-s}{2s} \left( t_0 - \frac{sT}{n+1} \right) + \frac{s}{n(n+1)T^n} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} (\mu_0 + 1 - \mu) \varphi_{\mu, n+1}(T).$$

Hierin setzen wir für  $\varphi_{\mu, n+1}$  den zuvor umzuformenden Ausdruck (20) ein; der Integrand (20) ist gleich

$$\frac{e^{p(T-\mu t_0)}}{p^{n-\mu s+1}} \left[ \frac{e^{\mu q t_0}}{q^{\mu s}} \cdot \frac{s - q t_0}{p(p-q)} + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{e^{\mu q t_0}}{(p-q) q^{\mu s}} - \frac{e^{\mu q t_0}}{\mu p q^{\mu s}} \right) \right],$$

so daß aus (20), mit  $\int_{K_q} \frac{\partial}{\partial q} dq = 0$ , folgt

$$(25) \quad \frac{1}{(n+1)!} \varphi_{\mu, n+1}(T) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)} \left( \frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0} \right)^{\mu} (s - q t_0) dp dq.$$

Gleichung (25) gibt, in (24) eingesetzt,

$$(26) \quad \vartheta = \frac{n-s}{2s} \left( t_0 - \frac{sT}{n+1} \right) + \frac{s(n-1)!}{T^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+s}(p-q)} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} (\mu_0 + 1 - \mu) \left( \frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0} \right)^\mu (s - qt_0) dp dq.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} &= (\mu_0 + 1)(s - qt_0) \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \left( \frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0} \right)^\mu + q \frac{\partial}{\partial q} \sum_{\mu=1}^{\mu_0} \left( \frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0} \right)^\mu \\ &= \left[ (\mu_0 + 1)(s - qt_0) + q \frac{\partial}{\partial q} \right] \frac{\left( \frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0} \right)^{\mu_0+1} - \frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0}}{\frac{p^s}{q^s} e^{(q-p)t_0} - 1}, \end{aligned}$$

und dies gibt, in (26) eingesetzt und partiell integriert (nach (22) ist wieder  $\mu_0 + 1 = n/s$  gesetzt):

$$(27) \quad \vartheta = \frac{n-s}{2s} \left( t_0 - \frac{sT}{n+1} \right) + \frac{s(n-1)!}{T^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \times \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+s}(p-q)} \left( \frac{n}{s}(s - qt_0) - \frac{p}{p-q} \right) \frac{p^n e^{(q-p)\frac{nt_0}{s}} - p^s e^{(q-p)t_0} \cdot q^{n-s}}{p^s e^{(q-p)t_0} - q^s} q^{s-n} dp dq.$$

Schreibt man hierin  $p \cdot \frac{s}{t_0}$  bzw.  $q \cdot \frac{s}{t_0}$  statt  $p$  bzw.  $q$  und setzt zur Abkürzung

$$(28) \quad \frac{sT}{t_0} = \alpha,$$

so folgt weiter

$$(29) \quad \vartheta = t_0 \left\{ \frac{n-s}{2s} \left( 1 - \frac{\alpha}{n+1} \right) + \frac{n!}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \times \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{p\alpha}}{p^{n+s}(p-q)q^{n-s}} \left( 1 - q - \frac{p}{n(p-q)} \right) \frac{p^n e^{(q-p)n} - p^s e^{(q-p)s} q^{n-s}}{p^s e^{(q-p)s} - q^s} dp dq \right\}.$$

#### 4. Asymptotische Entwicklung der Formel (29) im Falle $\eta < 1$ .

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, den letzten Ausdruck für  $n \rightarrow \infty$  asymptotisch zu entwickeln; hierfür muß aber über die Abhängigkeit des Parameters  $\alpha$  von  $n$  eine Festsetzung getroffen werden. Setzt man

$$(30) \quad \eta = \frac{n}{\alpha} = \frac{n t_0}{sT},$$

so ist  $\eta$ , als Quotient aus der gesamten Abfertigungszeit aller  $n$  Personen und der gesamten dafür an allen Schaltern vorgesehenen Arbeitszeit, anzusehen als gemeinsamer zeitlicher Ausnützungsgrad der  $s$  Abfertigenen (mit deren Einzelausnützungsgraden  $\eta$  nur dann übereinstimmt, wenn auch diejenigen Personen, deren Wartezeit = 0 ist, die eingangs erwähnte Reihen-

folge der Schalter einhalten). Bei der asymptotischen Entwicklung von (29) nehmen wir  $\eta$  zunächst als unabhängig von  $n$  an und setzen zuerst voraus

$$(31) \quad 0 < \eta < 1.$$

Die für großes  $|p|$  ausschlaggebenden Faktoren des Integranden (29) lauten  $e^{p(\alpha-n)} = e^{pn(\frac{1}{\eta}-1)}$  bzw.  $e^{p(\alpha-s)} = e^{pn(\frac{1}{\eta}-\frac{s}{n})}$ ; da bei der Annahme (31) die Koeffizienten  $\frac{1}{\eta} - 1$  und  $\frac{1}{\eta} - \frac{s}{n}$  positiv sind, darf  $C_p$  (Fig. 3) in bekannter Weise durch einen Vollkreis  $K_p > K_q$  um den Nullpunkt der  $p$ -Ebene ersetzt werden:  $\int_{C_p} \int_{K_q} = \int_{K_p} \int_{K_q}$ . Wir verkleinern jetzt den Kreis  $K_p$ , bis er innerhalb  $K_q$  liegt, und haben dann zu dem Integral (29) noch das Residuum in  $p=q$  hinzuzuzählen, welches lautet:

$$(31a) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{K_q} \frac{e^{q\alpha}}{q^{n+2}} \left[ \frac{n-s}{2s} (1-q) + \frac{n-s}{s} (n+1-\alpha q) \right] dq = \frac{\alpha^n}{s n!} \cdot \frac{n-s}{2} \left( \frac{\alpha}{n+1} - 1 \right);$$

aus (29) wird daher

$$(32) \quad \vartheta = t_0 \cdot \frac{n! \eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_p} \int_{K_q} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+2} (p-q) q^{n-s}} \left( 1 - q - \frac{p}{n(p-q)} \right) \\ \times \frac{p^n e^{(q-p)n} - p^s e^{(q-p)s} q^{n-s}}{p^s e^{(q-p)s} - q^s} dp dq \quad (K_p < K_q).$$

Der dem Minuenden des letzten Bruches in (32) entsprechende Integralanteil verschwindet; das zugehörige  $\int_{K_p}$  ist nämlich gleich dem Residuum im

Pole zweiter Ordnung  $p=0$ , und dieses lautet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_q} \frac{e^{nq}}{q^{n+1}} \left[ \frac{1}{nq} + (1-q) \left( \alpha - n + \frac{1}{q} + \delta_s \cdot \frac{e^q}{q} \right) \right] dq = 0$$

( $\delta_s^1 = 1$  oder  $=0$ , je nachdem  $s=1$  oder  $>1$  ist);

daher wird aus (32) weiter

$$(33) \quad \vartheta = t_0 \frac{n! \eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+1}} dp \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} \frac{1}{p(p-q)} \left( 1 - q - \frac{p}{n(p-q)} \right) \frac{p^s e^{(q-p)s}}{q^s - p^s e^{(q-p)s}} dq \quad (K_p < K_q)$$

oder, mit

$$(34) \quad F\left(p, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_q} \frac{1}{p(p-q)} \left( 1 - q - \frac{p}{n(p-q)} \right) \frac{p^s e^{(q-p)s}}{q^s - p^s e^{(q-p)s}} dq \quad (p < K_q^*),$$

$$(35) \quad \vartheta = t_0 \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} e^{n\left(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}\right)} F\left(p, \frac{1}{n}\right) \frac{dp}{p}.$$

Integrale von dieser Gestalt sind für  $n \rightarrow \infty$  gemäß der „Methode der Sattelpunkte“<sup>1)</sup> zu entwickeln, die im wesentlichen darauf hinauskommt, daß der Exponent, hier  $w = \frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}$ , als neue Integrationsvariable eingeführt wird, und daß man den Integrationsweg in der mehrblättrigen  $w$ -Ebene in Umläufe um die nach  $\Re(w) = -\infty$  hin gezogenen Verzweigungsschnitte deformiert. In der  $p$ -Ebene bedeutet dies, daß man die Kurve  $K_p$  so zu deformieren hat, daß sie die Nullstelle von  $\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta} \right) = \frac{1}{\eta} - \frac{1}{p}$ , d. i. die Stelle  $p = \eta$ , den „Sattelpunkt“, passiert und daß auf ihr im weiteren der Realteil von  $w$  gegen  $-\infty$  fällt oder wenigstens kleiner bleibt als im Sattelpunkte; (35) wird dann für  $n \rightarrow \infty$  im wesentlichen gleich dem Integral über das die Stelle  $p = \eta$  umfassende Kurvenelement und kann elementar asymptotisch nach  $n$  entwickelt werden. Insbesondere gilt in erster Näherung

$$(36) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} e^{n \left( \frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta} \right)} F\left(p, \frac{1}{n}\right) \frac{dp}{p} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} F(\eta, 0) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

vorausgesetzt, daß  $F(p, z)$  an der Stelle  $p = \eta$ ,  $z = 0$  regulär ist, und daß bei der Deformation von  $K_p$  keine Singularität von  $F\left(p, \frac{1}{n}\right)$  überstrichen wurde; mit der Stirlingschen Formel

$$(37) \quad n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

folgt weiter aus (35), (36):

$$(38) \quad \vartheta = t_0 \left[ F(\eta, 0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (\eta < 1).$$

Wir haben jetzt die Funktion  $F\left(p, \frac{1}{n}\right)$  zu betrachten; da in (34)  $|p| \ll |q| \ll 1$  gedacht ist, hat jeder der  $s$  Faktoren

$$(39) \quad q - \zeta_k p e^{q-p}, \quad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \quad (k = 0, 1, \dots, s-1)$$

des Nenners  $q^s - p^s e^{(q-p)s}$  innerhalb  $K_q$  eine einzige Nullstelle

$$(39a) \quad q_k(p) \quad (k = 0, 1, \dots, s-1)$$

und insbesondere gilt

$$(39b) \quad q_0(p) = p.$$

Der Integrand von (34) hat daher einen Pol dritter Ordnung  $q = p$  und  $s-1$  Pole erster Ordnung  $q_1, \dots, q_{s-1}$ , und die Anwendung des Residuen-

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik 1, S. 435 ff.

satzes gibt

$$(40) \quad F\left(p, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{s} \left[ \frac{p}{2(1-p)} - \frac{s-1}{2} \cdot \frac{p+1}{p} + \frac{s^2-1}{12n} \cdot \frac{p-1}{p} - \frac{p^3-4p^2+6p}{12n(1-p)^3} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{p-q_k} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{q_k}{(1-q_k)(p-q_k)^2} \right];$$

$$(40a) \quad q_k - \zeta_k p e^{q_k - p} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s-1).$$

Die Funktion (40) wird nur an der Stelle  $p=1$  und in den Verzweigungspunkten der Funktionen  $q_k(p)$  singulär; aus (40a) nebet

$$0 = \frac{\partial}{\partial q_k} (q_k - \zeta_k p e^{q_k - p}) = 1 - \zeta_k p e^{q_k - p}$$

folgt für diese Verzweigungsstellen und die zugehörigen Funktionswerte von  $q_k(p)$

$$(41) \quad e^{p-1} = \zeta_k p, \quad q_k(p) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, s-1).$$

Alle Verzweigungspunkte, sowie der Pol  $p=1$  der Funktion (40), liegen also auf der aus Fig. 4 ersichtlichen Kurve

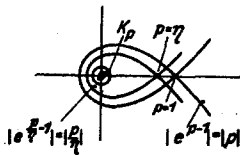


Fig. 4.

$$(41a) \quad |e^{p-1}| = |p|;$$

daher gilt hier die Formel (36), deren Ableitung voraussetzt, daß der Integrand innerhalb der Schleife der Kurve

$$(41b) \quad \left| \frac{p-1}{e^{\frac{p}{\eta}} - 1} \right| = \left| \frac{p}{\eta} \right|$$

(abgesehen von  $p=0$ ) regulär ist. Für  $F(\eta, 0)$  folgt aus (40), wenn  $q_k = \eta z_k$  gesetzt wird:

$$(42) \quad F(\eta, 0) = \frac{1}{s} \left[ \frac{\eta}{2(1-\eta)} - \frac{s-1}{2} \cdot \frac{\eta+1}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} \right]; \quad z_k = \zeta_k e^{\eta(z_k-1)} \quad (\eta < 1).$$

Um für  $F(\eta, 0)$  eine Reihenentwicklung herzuleiten, gehen wir aus von Gleichung (34), in der, falls  $0 < p < 1$  ist, für  $K_q$  der Einheitskreis der  $q$ -Ebene genommen werden darf; die Funktion  $p e^{-p}$  hat nämlich für reelles  $p$  ihr Maximum in  $p=1$ , während die längs des Kreises  $|q|=1$  betrachtete Funktion  $q e^{-q}$  in  $q=1$  das Minimum ihres Betrages erreicht, so daß

$$(43) \quad |q^s e^{-q^s}| > p^s e^{-p^s} \quad \text{für} \quad |q|=1, \quad 0 < p < 1$$

gilt. Nach dem Rouchéschen Satze<sup>2)</sup> haben daher innerhalb des Kreises  $|q|=1$  die Funktionen  $q^s e^{-q^s}$  und  $q^s e^{-q^s} - p^s e^{-p^s}$  (d. i. im wesentlichen der Nenner des Integranden von (34)) gleichviel Nullstellen, d. h. je  $s$ .

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. L. Bieberbach, Funktionentheorie I, 1. Aufl., S. 185.

Für reelles  $p = \eta < 1$  wird deshalb in (34) kein neuer Pol überstrichen, wenn  $K_q$  bis in den Einheitskreis der  $q$ -Ebene ausgedehnt wird; schreibt man noch  $q = \eta z$ , so folgt daher aus (34)

$$(44) \quad F(\eta, 0) = \frac{1}{2\pi i \eta} \int_{K_{|z|=\frac{1}{\eta}}} \frac{1-\eta z}{1-z} \cdot \frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s - e^{s\eta(z-1)}} dz \quad (\eta < 1),$$

wobei auf dem Integrationskreise  $K_{|z|=\frac{1}{\eta}}$  gemäß (43)  $|z^s| > |e^{s\eta(z-1)}|$  gilt.

Die letzte Ungleichung erlaubt, den zweiten Bruchfaktor des Integranden (44) in eine geometrische Reihe zu entwickeln, über die gliedweise integriert werden darf:

$$(45) \quad F(\eta, 0) = \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{|z|=\frac{1}{\eta}}} \frac{1-\eta z}{1-z} \cdot \frac{e^{\eta s k (z-1)}}{z^{s k}} dz$$

$$= \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ e^{-\eta s k} \frac{(\eta s k)^{s k}}{(s k)!} - (1-\eta) \left( 1 - e^{-\eta s k} \sum_{v=0}^{s k-1} \frac{(\eta s k)^v}{v!} \right) \right].$$

Aus (42) oder (44) und (38) folgt

$$(46) \quad \vartheta = \frac{t_0}{s} \left[ \frac{\eta}{2(1-\eta)} - \frac{s-1}{2} \cdot \frac{\eta+1}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

( $\eta < 1$ )

$$(46a) \quad \vartheta = \frac{t_0}{\eta} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\eta s k)^{s k}}{(s k)!} e^{-\eta s k} - (1-\eta) \left( 1 - e^{-\eta s k} \sum_{v=0}^{s k-1} \frac{(\eta s k)^v}{v!} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right];$$

( $\eta < 1$ )

nur für  $s = 1$  (ein Schalter) befolgt  $\vartheta$  asymptotisch ein einfaches Gesetz; die erste Gleichung (46) gibt dann

$$(46b) \quad \vartheta = t_0 \cdot \left[ \frac{\eta}{2(1-\eta)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (s = 1, \eta < 1).$$

Um  $F(\eta, 0)$  für großes  $s$  zu approximieren, schreiben wir die Gleichung (44) folgendermaßen um:

$$(47) \quad F(\eta, 0) = \frac{1}{2\pi i s \eta} \int_{K_z} \frac{z}{1-z} d \log \frac{z^s - e^{s\eta(z-1)}}{z^s}$$

$$= \frac{1}{2\pi i s \eta} \int_{K_z} -\log(1 - z^s e^{s\eta(z-1)}) \frac{dz}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i s \eta} \int_{K_z} \frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s} \left[ 1 + O\left(\frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}\right) \right] \frac{dz}{(1-z)^2},$$

und erhalten gemäß Gleichung (36) (Sattelpunkt ist jetzt der Punkt  $z = \frac{1}{\eta}$  und es ist  $\left[\frac{e^{\eta(z-1)}}{z}\right]_{z=\frac{1}{\eta}} < 1$ )

$$F(\eta, 0) = \frac{1}{s\eta} \frac{e^{s-s\eta}}{\sqrt{2\pi s} \left(\frac{1}{\eta}\right)^s} \left[ \frac{\frac{1}{\eta}}{\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)^s} + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] = \frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{s\sqrt{2\pi s}(1-\eta)^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right).$$

Mit (38) folgt daher

$$(47a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta = t_0 \left[ \frac{1}{(1-\eta)^2} \cdot \frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{s\sqrt{2\pi s}} \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right) \right] \quad (s \gg 1, \eta < 1).$$

Die vollständige, mittels der Sattelpunktmethode in grundsätzlich einfacher Weise zu gewinnende asymptotische Entwicklung von Gleichung (35) ist von der Form

$$(48) \quad \vartheta \sim \frac{t_0}{1-\eta} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_{\nu}(\eta)}{n^{\nu}(1-\eta)^{2\nu}} \quad (0 \leq \eta < 1),$$

worin die  $f_{\nu}(\eta)$  stetige, für  $\eta = 1$  nicht verschwindende Funktionen sind; diese Entwicklung versagt daher in den Anwendungen immer dann, wenn  $\frac{1}{n(1-\eta)^2}$  nicht mehr als klein gegen 1 angesehen werden darf.

### 5. Asymptotische Entwicklung im Falle $\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}$ , $c \geq 0$ .

Um auch den Fall eines sehr wenig unterhalb 1 liegenden  $\eta$  zu erfassen, stellen wir der bisherigen Annahme (31) die Annahme

$$(49) \quad \eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}} \quad (c \geq 0)$$

mit einer von  $n$  unabhängigen Konstanten  $c$  ( $c\sqrt{2}$  statt  $c$  geschrieben, um die weiteren Ausdrücke zu vereinfachen) an die Seite.

Wir verschieben wieder den Integrationsweg von (35) über die Schleife von (41a) hinaus ( $K_p'$ )<sup>3)</sup>, lassen ihn jedoch den Pol  $p = 1$  des

<sup>3)</sup> Beim Übergang von  $K_p$  zu  $K_p'$  werden  $s-1$  auf der erwähnten Kurvenschleife liegende Verzweigungspunkte der  $s-1$  Funktionen  $q_k(p)$  (40a) überstrichen; die zugehörigen Verzweigungsintegrale modifizieren, solange  $c \neq 0$  ist, die asymptotische Entwicklung von (51) nicht, da sie, wie die in § 7, Gl. (70) durchgeführte Überlegung zeigt,  $O(e^{-k\sqrt{n}})$  sind. — Für  $c = 0$  muß der Beitrag dieser Verzweigungsintegrale berücksichtigt werden; er ergibt sich in diesem Falle als  $o\left(\frac{1}{n}\right)$ , wodurch das Zeichen  $\geq 0$  in (55) gerechtfertigt wird. Würde man, um die linke Nachbarschaft

(Fortsetzung der Fußnote <sup>2)</sup> auf nächster Seite.)

Integranden (40) gemäß Fig. 5 umkreisen; bis auf einen Faktor  $1 + o(e^{-nk})$  (mit  $k > 0$ ) ist dann (35) gleich dem Integral über ein beliebig kleines festes, dem Punkt  $p = 1$  benachbartes Kurvenstück auf  $K'_p$ .

Setzt man

$$(50) \quad p = 1 + iz\sqrt{\frac{2}{n}},$$

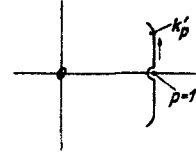


Fig. 5.

so folgt für den Exponenten in (35)

$$(50a) \quad n\left(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}\right) = -(z - ic)^2 + \frac{2i}{3}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}(z - ic)^3 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

und mittels elementarer Abschätzungen zeigt man dann in bekannter Weise, daß für die asymptotische Entwicklung von (35) symbolisch

$$(51) \quad \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} e^{n\left(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}\right)} F\left(p, \frac{1}{n}\right) \frac{dp}{p} \\ \sim \underbrace{\frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty}}_{\sim} e^{-(z-ic)^2} e^{\frac{2i}{3}\sqrt{\frac{2}{n}}(z-ic)^3 + O\left(\frac{1}{n}\right)} F\left(1 + iz\sqrt{\frac{2}{n}}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{i\sqrt{\frac{2}{n}}}{1 + iz\sqrt{\frac{2}{n}}} dz$$

gilt; der Ausdruck auf der rechten Seite ist so zu verstehen, daß zuerst der Integrand durch seine Reihenentwicklung nach  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  zu ersetzen und sodann gliedweise zu integrieren ist, wobei man den Pol  $z = 0$ , das Bild des Poles  $p = 1$ , in negativem Sinne zu umkreisen hat.

Aus (40), (50) folgt

$$(52) \quad F\left(p, \frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{2iz} - \frac{1}{8iz^3}\right) + O(1)$$

von  $\eta = 1$  völlig zu beherrschen,  $\vartheta$  auch für

$$(49a) \quad \eta = 1 - \frac{k}{n} \quad (k = \text{const} \geq 0)$$

entwickeln, so müßten diese  $s - 1$  Verzweigungsintegrale ebenfalls berücksichtigt werden. Diese Entwicklung kann also nicht aus der im Falle (49) gültigen Entwicklung durch formales Einsetzen von  $c = \frac{k}{\sqrt{2n}}$  erhalten werden, und ähnliches gilt

bei konstanter Abfertigungszeit für die rechte Nachbarschaft von  $\eta = 1$  (§ 7).

Im Falle variabler Abfertigungszeit treten derartige Anomalien nicht auf; aus der Entwicklung für  $\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}$  (die für positives und negatives  $c$  die gleiche ist) könnte die Entwicklung für (49a) durch formales Umrechnen gewonnen werden.



und daher wird aus (51) mit (35), (37) in erster Näherung

$$(53) \quad \vartheta = \frac{t_0}{2s} \sqrt{2\pi n} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2} \left( -\frac{1}{z} - \frac{1}{4z^3} \right) dz + O(1), \quad \delta > 0$$

und hieraus durch zweimalige partielle Integration

$$(53a) \quad \vartheta = \frac{t_0}{2s} \sqrt{2\pi n} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2} \left( \frac{ic}{2} + \frac{2c^3-3}{4z} \right) dz + O(1).$$

Nun ist

$$\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

und

$$(54) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2} \frac{dz}{z} = e^{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-x^2+2icx} \frac{dz}{z} \right) dx$$

$$= \frac{e^{c^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2-2cx} dx,$$

so daß aus (53a) folgt:

$$(55) \quad \vartheta = \frac{t_0}{s} \left[ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{2}} \left( c + (3-2c^2) \int_0^{\infty} e^{-x^2-2cx} dx \right) + O(1) \right],$$

$$\left( \eta = 1 - \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \quad c \geq 0 \right)$$

in zweiter Näherung folgt aus (51):

$$(55a) \quad \vartheta = \frac{t_0}{s} \left[ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{2}} \left( c + (3-2c^2) \int_0^{\infty} e^{-x^2-2cx} dx \right) + \frac{4c^4-2c^2-5}{12} \right.$$

$$\left. + \frac{c-2c^3}{3} \int_0^{\infty} e^{-x^2-2cx} dx - (s-1) + \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

$$\left( z_k = \zeta_k e^{2k-1}, \quad \eta = 1 - \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right)$$

## 6. Der Fall $\eta > 1$ .

Im Falle

$$(56) \quad \eta > 1$$

gehen wir wieder aus von Gleichung (29) und Fig. 3 und fragen jetzt danach, welche Kurven in der  $p$ -Ebene die Nullstellen  $p_k(q)$  der  $s$  Nenner-

faktoren (39) beschreiben, wenn  $q$  den kleinen Kreis  $K_q$  durchläuft. Es ist leicht einzusehen, daß jeder der  $s$  durch die Gleichung

$$(57) \quad p e^{-p} = \zeta_k q e^{-q}, \quad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \quad (k = 0, 1, \dots, s-1)$$

und durch die Forderung  $|p_k| \rightarrow \infty$  für  $|q| \rightarrow 0$  definierten Funktionszweige  $p_k(q)$  den unendlich oft in beiden Richtungen durchlaufenen Kreis  $K_q$  auf eine einfache Kurve  $C_p^{(k)}$  der positiv-reellen  $p$ -Halbebene abbildet; alle Kurven  $C_p^{(k)}$  befolgen,  $p = x + iy$  gesetzt, für großes  $x$  und  $y$  näherungsweise das Gesetz  $y e^{-x} = \pm |q|$ .

Verschiebt man nun in (29) die Kurve  $C_p$  in eine rechts von allen  $C_p^{(k)}$  gelegenen Kurve  $C'_p$  (Fig. 3), wo

$$(57a) \quad |p^s e^{-ps}| < |q^s e^{-qs}|$$

gilt, so darf der Minuend  $p^n e^{(q-p)n}$  des letzten Zählers in (29) fortgelassen werden; denn in dem ihm entsprechenden Teilintegral  $\int_{C'_p}$  kann die

Integrationskurve ohne Überschreitung von Nullstellen des Integrandenenners bis in das Unendliche der positiv-reellen  $p$ -Halbebene verschoben werden, wo dieses Integral infolge des Faktors  $e^{np(\frac{1}{\eta}-1)}$  verschwindet; aus (29) folgt daher, mit (30), (34),

$$(58) \quad \vartheta = \frac{t_n}{s} \left\{ \frac{n-s}{2} \left( 1 - \frac{n}{(n+1)\eta} \right) + \frac{s n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_p} e^{n(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta})} F\left(p, \frac{1}{n}\right) \frac{dp}{p} \right\}$$

( $\eta > 1$ ).

Da nach unserer Wahl  $C'_p$  rechts von den dem unendlich oft durchlaufenen Kreise  $K_q$  entsprechenden Kurven  $C_p^{(k)}$  liegt, fallen für jedes  $p$  von  $C'_p$   $s$  Nullstellen  $q_k(p)$  ( $k = 0, 1, \dots, s-1$ ) des Integrandenenners, von (34) innerhalb von  $K_q$  und die Anwendung des Residuensatzes auf (34) gibt jetzt

$$(59) \quad F\left(p, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{s-1} \left( \frac{q_k}{p(p-q_k)} - \frac{q_k}{n(p-q_k)^2(1-q_k)} \right).$$

Um nun auf das Integral in (58) die Formel (36) anwenden zu dürfen muß  $C'_p$  in eine neue Kurve verschoben werden, längs welcher der Realteil des Exponenten  $\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}$  von seinem Maximum 1 gegen  $-\infty$  fällt; dieser Bedingung genügt z. B. die Kurve  $|p e^{-p}| = \eta e^{-\eta}$ , und da diese Kurve wegen  $\eta e^{-\eta} < e^{-1}$  rechts liegt von der Kurve  $|p e^{-p}| = e^{-1}$ , auf der nach (41) die Verzweigungsstellen und Pole des Integranden (59) liegen, modifizieren diese Stellen nicht die Formel (36), mit welcher aus (58),

(59) folgt

$$(60) \quad \vartheta = \frac{t_0}{s} \left[ n \cdot \frac{\eta-1}{2\eta} - \frac{s-1}{2\eta} - \frac{s}{2} + \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right];$$

( $\eta > 1$ )

hierin ist  $z_k$  die innerhalb des Einheitskreises gelegene Wurzel der Gleichung

$$(61) \quad z - \zeta_k e^{\eta(z-1)} = 0, \quad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \quad (k = 0, 1, \dots, s-1; \eta > 1).$$

Eine Reihenentwicklung analog (46 a) ergibt sich, wenn in (34), wo jetzt  $p > K_q$  ( $p$  außerhalb  $K_q$ ) gilt, der Nenner gemäß (57 a) in eine geometrische Reihe entwickelt und gliedweise integriert wird; man erhält dann

$$(62) \quad \vartheta = t_0 \left[ \frac{n-s}{2s} \cdot \frac{\eta-1}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(\eta s k)^{s k}}{(s k)!} + (1-\eta) \sum_{v=0}^{s k-1} \frac{(\eta s k)^v}{v!} \right) e^{-\eta s k} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

( $\eta > 1$ )

Analog der Formel (48) ist die vollständige asymptotische Entwicklung von  $\vartheta$  für  $\eta > 1$  von der Form

$$(63) \quad \vartheta \sim t_0 \left[ n \cdot \frac{\eta-1}{2s\eta} + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{f_v(\eta)}{n^v (1-\eta)^{2v+1}} \right],$$

so daß bei der Anwendung der Gleichungen (60), (62) immer die Bedingung  $n(1-\eta)^2 \gg 1$  erfüllt sein muß.

## 7. Der Fall $\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}$ , $c < 0$ .

Um auch die rechte Nachbarschaft der Stelle  $\eta = 1$  zu umfassen, muß daher (58), (59) auch unter der Annahme

$$(64) \quad \eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}} \quad (c < 0)$$

entwickelt werden.

Das Anfangsglied der Summe  $\sum_{k=0}^{s-1}$  in (59) hat an der Stelle  $p=1$  einen Pol, da dort beide Nenner  $q_0(p)-1$  und  $p-q_0(p)$  verschwinden; die übrigen Glieder dieser Summe verhalten sich für  $p=1$  regulär. Die für das Folgende erforderliche Entwicklung von  $q_0(p)$  an der Stelle  $p=1$  ergibt sich aus (57) ( $k=0$ ) durch elementare Rechnung als

$$(65) \quad q_0(p) = 1 - (p-1) - \frac{2}{3}(p-1)^2 - \dots$$

Um das Integral (58) für  $n \rightarrow \infty$  entwickeln zu können, hat man  $C'_p$  in eine i. a. dem Gebiete  $\left| \frac{e^{p-1}}{p} \right| < 1$  angehörnde Kurve  $C''_p$ , deren Verlauf in der Nähe von  $p = 1$  Fig. 6 zeigt, zu verschieben; hierbei werden unendlich viele Verzweigungspunkte  $p_v$  der Funktionen  $q_k(p)$  überstrichen, deren Verzweigungsintegrale sich später als  $O(e^{-k^2 \sqrt{n}})$  ergeben werden. Führt man in dem über  $C''_p$  erstreckten Integral (58) wieder gemäß (50) die Variable  $z$  ein, so gilt, mit  $F(p, \frac{1}{n})$  nach (59), und in gleichem Sinne wie Gleichung (51):

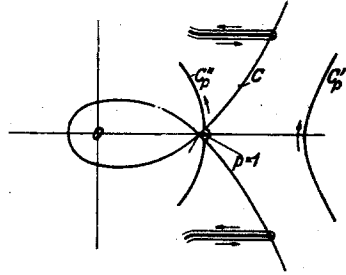


Fig. 6.

$$(66) \quad \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C''_p} e^{n \left( \frac{p-1}{\eta} - \log \frac{p}{\eta} \right)} F\left(p, \frac{1}{n}\right) dp$$

$$\sim \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-ic)^2} e^{\frac{2i}{3} \sqrt{\frac{2}{n}} (z-ic)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)} F\left(1 + iz\sqrt{\frac{2}{n}}, \frac{1}{n}\right) \frac{i\sqrt{\frac{2}{n}}}{1 + iz\sqrt{\frac{2}{n}}} dz.$$

Aus (59) folgt mit (65), (50)

$$(67) \quad F\left(p, \frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{s} \left( \frac{1}{2iz} + \frac{1}{8iz^3} \right) + O(1)$$

und daher ist in erster Näherung

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C''_p} &= \frac{\sqrt{2\pi n}}{2s} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{4z^3} \right) dz + O(1), \quad \delta > 0 \\ &= \frac{\sqrt{2\pi n}}{2s} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} e^{-(z-ic)^2} \left( -\frac{ic}{2} - \frac{2c^3-3}{4z} \right) dz + O(1), \\ (68) \quad \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C''_p} &= \frac{1}{4s} \sqrt{\frac{n}{2}} \left( -c - (2c^2-3) \int_0^{\infty} e^{-x^2+2cx} dx \right) + O(1), \quad c < 0. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man, zunächst ohne Begründung, die Verzweigungspunkte, so folgt aus (58) mit (64), (68) in erster Näherung:

$$(69) \quad \vartheta = \frac{t_0}{s} \left[ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n}{2}} \left( -5c + (3-2c^2) \int_0^{\infty} e^{-x^2+2cx} dx \right) + O(1) \right]$$

$$\left( \eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad c < 0 \right)$$

Die Verzweigungspunkte  $p_v$  der Funktionen  $q_k(p)$  genügen der Gleichung (41), liegen also auf der in Fig. 6 dargestellten Kurve

$$(41a) \quad C: |e^{p-1}| = |p|,$$

und bei Übergang von  $C'_p$  zu  $C''_p$  werden diejenigen Verzweigungsstellen überstrichen, die auf den von  $p = 1$  ins Unendliche gehenden Ästen von  $C$  liegen. Die asymptotischen Entwicklungen der zugehörigen Verzweigungsintegrale enthalten als ausschlaggebenden Faktor die  $e$ -Potenz  $e^{n(\frac{p_v}{\eta} - \log \frac{p_v}{\eta})}$  und für diese folgt mit (41), (64)

$$(70) \quad \frac{n!}{n^n} e^{n(\frac{p_v}{\eta} - \log \frac{p_v}{\eta})} = \frac{n!}{n^n} \left( \zeta_k e^{1+p_v(\frac{1}{\eta}-1) + \log \eta} \right)^n = \sqrt{2\pi n} \cdot e^{c\sqrt{2n}(p_v-1) + O(1)};$$

da  $c < 0$  ist und nur solche  $p_v$  in Frage kommen, für welche  $\Re(p_v - 1) > 0$  ist, d. h. welche auf den beiden vom Doppelpunkt ins Unendliche gehenden Ästen von  $C$  liegen, verschwinden diese Beiträge für großes  $n$  exponentiell, und ebenso die über alle  $p_v$  erstreckte Summe; aus (41) folgt nämlich leicht, daß für den  $N$ -ten Verzweigungspunkt von  $q_k(p)$  asymptotisch  $\Re(p_v) = \frac{1}{\eta} \log 2\pi N$  gilt. Zur asymptotischen Entwicklung (69) liefern daher diese Integrale keinen Beitrag.

### 8. Verallgemeinerung auf den Fall variabler Abfertigungszeiten.

Wir geben jetzt die bisherige Voraussetzung  $t_0 = \text{const}$  auf und lassen als Abfertigungszeiten alle Werte  $t$  eines Intervalls von endlicher Länge

$$(71) \quad 0 \leq t' \leq t \leq t''$$

zu, deren jeder mit einer beliebig vorgegebenen relativen Häufigkeit vorkomme; für die im Intervall (71) nicht abnehmende Funktion  $f(t)$ , welche die relative Anzahl der Schalterbesucher mit einer Abfertigungszeit  $\leq t$ , also die Statistik der Abfertigungszeiten darstellt, gilt dann

$$(72) \quad f_-(t') = 0, \quad f_+(t'') = 1, \quad \int_{t'}^{t''} df(t) = 1.$$

Um  $\vartheta_m$  und  $\vartheta$  zu berechnen, hat man der  $m$ -ten eintreffenden Person eine Abfertigungszeit

$$(73) \quad t_m \quad (1 \leq m \leq n-1)$$

zuzuteilen, sodann  $\tau_m$  in Abhängigkeit von den Ankunftszeiten (2) und den Abfertigungszeiten (73) zu bestimmen, und sowohl über die Variablen  $x$ , als auch über die  $t$ , zu mitteln. Die letztere Mittelung ist gemäß der

Bedeutung der Funktion  $f(t)$  so vorzunehmen: Wird für den Augenblick der Mittelwert von  $\tau_m$  bezüglich der  $x_v$  mit  $\bar{\vartheta}_m = \bar{\vartheta}_m(t_1, \dots, t_{m-1})$  bezeichnet, so ist  $\vartheta_m$  gleich dem  $(m-1)$ -fachen Stieltjesintegral

$$(74) \quad \vartheta_m = \int_{t_1}^{t''} df(t_1) \dots \int_{t_{m-1}}^{t''} df(t_{m-1}) \bar{\vartheta}_m(t_1, \dots, t_{m-1}).$$

Wie in der Einleitung erwähnt, schreiben wir auch im jetzigen Falle vor, daß der  $m$ -te  $(\mu s + s')$ -te Eintreffende dem  $s'$ -ten Schalter ( $1 \leq s' \leq s$ ) zugewiesen ist; dann gilt analog (4 a, b)

$$(75) \quad \begin{aligned} \tau_m &= (x_{m-s} + \tau_{m-s} + t_{m-s} - x_m) & (s+1 \leq m \leq n); \\ \tau_m &= 0 & (1 \leq m \leq s), \end{aligned}$$

und auch die weiteren Formeln (5) bis (17 b) bleiben erhalten, wenn  $t_0$  durch  $t_{m-s}$ ,  $\mu t_0$  durch  $\sum_1^{\mu} t_{m-s}$  usw. ersetzt wird. Die Gleichungen (13) bzw. (21) lauten jetzt

$$(76) \quad \begin{aligned} \bar{\vartheta}_m(t_{s'}, t_{s+s'}, \dots, t_{m-s}) &= \bar{\vartheta}_{m-s}(t_{s'}, t_{s+s'}, \dots, t_{m-2s}) + t_m - \frac{sT}{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)T^n} \varphi_{\mu, n+1}(T) \quad (m = \mu s + s'), \end{aligned}$$

$$(77) \quad \bar{\vartheta}_{\mu s + s'}(t_{s'}, \dots, t_{\mu s - s + s'}) = \sum_{v=1}^{\mu} t_{m-v} - \frac{\mu s T}{n+1} + \frac{1}{(n+1)T^n} \sum_{v=1}^{\mu} \varphi_{v, n+1}(T).$$

In (17 a, b) lautet die  $e$ -Potenz jetzt

$$e^{p(T - \sum_1^{\mu} t_{m-v} s) + \sum_1^{\mu} q_v t_{m-v} s}$$

und der aus  $\varphi_{\mu, n+1}(T)$  durch Mittelung über alle  $\mu!$  Permutationen  $\Pi$  der  $\mu$  Größen  $t_{m-v} s$  entstehende Ausdruck

$$(78) \quad \varphi_{\mu, n+1}^*(T) = \frac{1}{\mu!} \sum_{\Pi} \varphi_{\mu, n+1}^{\Pi}(T)$$

kann in der gleichen Weise umgeformt werden wie das Integral (17 c), wodurch sich analog (20) ergibt

$$(79) \quad \begin{aligned} &\frac{\varphi_{\mu, n+1}^*(T)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT + (q-p) \sum_1^{\mu} t_{m-v} s}}{p^{n-\mu s+1} q^{\mu s+1} (p-q)} \left[ (\mu-1) \left( \frac{q}{\mu} \sum_1^{\mu} t_{m-v} s - s \right) + \frac{q}{p-q} \right] dp dq. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der  $\vartheta_m$  benötigt man nur diesen Mittelwert (78), denn offensichtlich darf in dem Integranden von (74) jede beliebige Per-

mutation der  $t$ , vorgenommen werden, und daher auch in den Größen  $\varphi_{\mu, n+1}(T)$ , von welchen dieser Integrand nach (77) linear abhängt.

Für das arithmetische Mittel  $\bar{\vartheta}(t_1, \dots, t_{n-1})$  (bezüglich der  $x$ ,) der Größen  $\bar{\vartheta}_m$  folgt, mit (22), analog (24)

$$(80) \quad \bar{\vartheta}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_1^{\mu_0} t_{rs} - \frac{n-s}{2} \frac{T}{n+1} + \frac{s}{n(n+1)T^n} \sum_1^{\mu_0} (\mu_0 + 1 - \mu) \varphi_{\mu, n+1}(T)$$

und hieraus für die mittlere Wartezeit  $\vartheta$  einer beliebigen der  $n$  Personen:

$$(81) \quad \vartheta = \int_i^{i''} df(t_1) \dots \int_i^{i''} df(t_{n-1}) \bar{\vartheta}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \int_i^{i''} df(t_1) \dots \int_i^{i''} df(t_{n-1}) \left[ \frac{1}{2} \sum_1^{\mu_0} t_{rs} - \frac{n-s}{2} \frac{T}{n+1} + \frac{s}{n(n+1)T^n} \sum_1^{\mu_0} (\mu_0 + 1 - \mu) \varphi_{\mu, n+1}^*(T) \right],$$

$$\mu_0 = \frac{n-s}{s}.$$

Wir formen nun den Ausdruck (79) analog (20), (25) durch partielle Integration um in

$$(79a) \quad \frac{1}{(n+1)!} \varphi_{\mu, n+1}^*(T) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)} \cdot \frac{p^{s\mu} e^{(q-p) \sum_1^{\mu} t_{rs}}}{q^{s\mu}} \left( s - \frac{q}{\mu} \sum_{r=1}^{\mu} t_{rs} \right) dp dq$$

und setzen in (81) ein; vertauscht man die Reihenfolge der komplexen und der reellen Integrationen und führt die ganze Funktion

$$(82) \quad \mathcal{J}(z) = \int_i^{i''} e^{zt} df(t)$$

ein, so wird aus (81):

$$(83) \quad \vartheta = \frac{n-s}{2s} \left( \mathcal{J}'(0) - \frac{sT}{n+1} \right) + \frac{s(n-1)!}{T^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)} \\ \times \sum_{\mu=1}^{\mu_0} (\mu_0 + 1 - \mu) \frac{p^{s\mu} \mathcal{J}^{\mu-1}(q-p)}{q^{s\mu}} (s \mathcal{J}(q-p) - q \mathcal{J}'(q-p)) dp dq;$$

hieraus, mit

$$\sum_1^{\mu_0} = \left[ (\mu_0 + 1) \frac{s \mathcal{J}(q-p) - q \mathcal{J}'(q-p)}{\mathcal{J}(q-p)} + q \frac{\partial}{\partial q} \right] \frac{\left( \frac{p^s}{q^s} \mathcal{J}(q-p) \right)^{\mu_0+1} - \frac{p^s}{q^s} \mathcal{J}(q-p)}{\frac{p^s}{q^s} \mathcal{J}(q-p) - 1},$$

$$\mu_0 = \frac{\mu-s}{s},$$

und partiell integriert:

$$(84) \quad \vartheta = \frac{n-s}{2s} \left( \mathcal{J}'(0) - \frac{sT}{n+1} \right) \\ + \frac{s \cdot n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{pT}}{p^{n+2}(p-q)} \left( \frac{s\mathcal{J}(q-p) - q\mathcal{J}'(p-q)}{s\mathcal{J}(q-p)} - \frac{p}{n(p-q)} \right) \\ \times \frac{p^n \mathcal{J}^{\frac{n}{2}}(q-p) - p' \mathcal{J}(q-p) q^{n-s}}{p' \mathcal{J}(q-p) - q^s} q^{s-n} dp dq.$$

Schreibt man hierin  $p \cdot \frac{s}{\mathcal{J}'(0)}$  bzw.  $q \cdot \frac{s}{\mathcal{J}'(0)}$  statt  $p$  bzw.  $q$  und setzt

$$(85) \quad \varepsilon(z) = \mathcal{J}\left(\frac{z}{\mathcal{J}'(0)}\right) = \int_0^{t''} e^{z \frac{t}{\mathcal{J}'(0)}} df(t) \quad (\varepsilon'(0) = 1),$$

$$(86) \quad \eta = \frac{n\mathcal{J}'(0)}{sT},$$

so folgt endlich in Verallgemeinerung der Gleichung (29)

$$(87) \quad \vartheta = \mathcal{J}'_0 \left[ \frac{n-s}{2s} \left( 1 - \frac{n}{(n+1)\eta} \right) + \frac{n! \eta^n}{n^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p} \int_{K_q} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+2}(p-q)q^{n-s}} \right. \\ \times \left( \varepsilon(s(q-p)) - q\varepsilon'(s(q-p)) - \frac{p\varepsilon(s(q-p))}{n(p-q)} \right) \\ \left. \times \frac{p^n s^{\frac{n}{2}-1} (s(q-p)) - p' q^{n-s}}{p' \varepsilon(s(q-p)) - q^s} \right] dp dq.$$

In (87) bedeutet

$$(88) \quad \mathcal{J}'_0 \equiv \mathcal{J}'(0) = \int_0^{t''} t df(t)$$

die mittlere Abfertigungszeit, und die Größe  $\eta$  (Gl. (86)) ist wieder als (mittlerer) Ausnützungsgrad zu bezeichnen<sup>4)</sup>.

### 9. Asymptotische Entwicklungen der Formel (87).

Bei der asymptotischen Entwicklung der Gleichung (87) sind, wenn jetzt der früher erledigte Fall konstanter Wartezeit ausgeschlossen wird, nur drei Fälle zu unterscheiden:

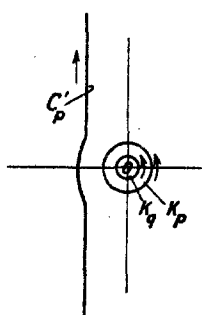
$$\eta = \text{const} \geq 1, \quad \eta = 1 + \text{const} \sqrt{\frac{2}{n}} \quad (\text{const} \geq 0).$$

1)  $\eta = \text{const} < 1.$

<sup>4)</sup> Gl. (87) gilt auch dann noch, wenn man unendlich große Abfertigungszeiten ( $t'' = \infty$ ) zuläßt, vorausgesetzt, daß (88) konvergiert. Da dann aber die Existenz und Regularität von  $\mathcal{J}(z)$  und  $\varepsilon(z)$  zunächst nur in der linken Halbebene sichergestellt ist, hat man in (87) dann als  $C_p$  etwa eine rechts von  $K_q$  gelegene Parallele zur imaginären Achse ( $\text{Re}(q-p) < 0$ ) zu nehmen.



Wir verschieben in (87) die gemäß Fig. 3 liegende Kurve  $C_p$  in die linke  $p$ -Halbebene hinein ( $C'_p$  in Fig. 7) und haben daher zu  $\int_{C'_p}$  noch das



Integral  $\int_{K_q}$  über einen die Integrandenpole  $p=0$  und  $p=q$  (und daher den ganzen Kreis  $K_q$ ) enthaltenden Kreis  $K_p$  (Fig. 7) hinzuzuzählen:

$$(89) \quad \vartheta = \mathcal{J}'_0 \left[ \frac{n-s}{2s} \left( 1 - \frac{n}{(n+1)\eta} \right) + \frac{n! \eta^n}{n^n} \left( \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_p} \int_{K_q} + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_p} \int_{K_q} \right) \right] \\ (K_p > K_q).$$

Fig. 7. Verkleinert man in  $\int_{K_p} \int_{K_q}$  den Kreis  $K_p$  so, daß  $K_p < K_q$

wird, so hat man noch das Residuum in  $p=q$  hinzuzunehmen, und da dieses sich, analog Gleichung (31a), als entgegengesetzt gleich dem ersten Gliede von (89) ergibt, folgt

$$(90) \quad \vartheta = \mathcal{J}'_0 \frac{n! \eta^n}{n^n} \left[ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_p} \int_{K_q} + \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_p} \int_{K_q} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+2}(p-q)q^{n-s}} (\varepsilon(s(q-p)) - q\varepsilon'(s(q-p)) - \frac{ps(s(q-p))}{n(p-q)}) \frac{p^n s^{\frac{n}{s}-1}(s(q-p)) - p^s q^{n-s}}{p^s s(s(q-p)) - q^s} dp dq \right] \\ (K_p < K_q).$$

Das zweite Doppelintegral in (90) ist gleich dem analogen Ausdrucke (32) so zu behandeln, daß auf  $\int_{K_q}$ , nach Streichung des Gliedes  $p^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1}$ , der Residuensatz angewandt und das Integral

$$(90a) \quad \frac{\eta^n}{(2\pi i)^2} \int_{K_p} \int_{K_q} = \frac{1}{2\pi i s} \int_{K_p} e^{n \left( \frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta} \right)} \left( \text{Res}_{q=p} + \sum_{k=1}^{s-1} F_k \right) \frac{dp}{p}$$

mit

$$(90b) \quad \text{Res}_{q=p} = \frac{sp s''}{2(1-p)} + \frac{s-1}{2} \cdot \frac{1-2p}{p(1-p)} + \frac{s^2-1}{12n} \cdot \frac{p-1}{p} - \frac{1}{12n(1-p)^3} \\ \times [p^3(3s^2 \varepsilon_0''^2 - 2s^2 \varepsilon_0''' - s^2 + 1) + 2p^2(s^2 \varepsilon_0''' - 3s^2 \varepsilon_0'' + 2s^2 - 2) + 6p(s \varepsilon_0'' - s + 1)],$$

$$(90c) \quad \begin{cases} F_k(p) = \frac{q_k}{p(p-q_k)} \left( 1 - \frac{ps'(s(q_k-p))}{n(p-q_k)} \cdot \frac{1}{s(s(q_k-p)) - q s'(s(q_k-p))} \right), \\ q_k = p \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}(s(q_k-p)), \quad (k=0, 1, 2, \dots, s-1); \quad \varepsilon^{\frac{1}{s}}(0)=1 \end{cases}$$

(dessen Integrand längs der reellen Achse, auf der keine Verzweigungspunkte liegen können<sup>5)</sup>, analytisch fortgesetzt werde), asymptotisch nach  $n$  entwickelt wird. Bei Anwendung der Formel (36) hat man jedoch jetzt auf der rechten Seite die Summe  $\sum_{p_v}$  der Verzweigungsintegrale hinzuzuzählen, die den innerhalb oder auf dem Rande der Schleife von (41a) (Fig. 4) liegenden Verzweigungspunkten  $p_v$ <sup>5a)</sup> der Funktionen  $q_k(p)$  zugehören. Analog (38), (44) erhält man so

$$(91) \quad \frac{n! \eta^n}{n^n (2\pi i)^2} \int_{K_p} \int_{K_q} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{|z|=1+}} \frac{s(s\eta(z-1)) - z\eta s'(s\eta(z-1))}{z^s - s(s\eta(z-1))} \cdot \frac{dz}{1-z} + O\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{p_v},$$

wobei die Glieder der Summe  $\sum_{p_v}$  von der resp. Größenordnung  $\left| \frac{e^{\frac{p_v-1}{\eta}}}{\frac{p_v}{\eta}} \right|^n n^k$  sind (mit geeigneten Konstanten  $k$ ).

Das erste Doppelintegral in (90), dessen Integrationskurve  $C_p$  beliebig weit nach  $\Re(p) = -\infty$  hin verschoben werden darf, verschwindet identisch, falls

$$(92) \quad \frac{1}{\eta} > \frac{t''}{J'(0)} = \tau''$$

ist, d. h. falls auch der auf die größte auftretende (anstatt auf die mittlere) Abfertigungszeit bezogene Ausnutzungsgrad  $\leq 1$  ist; denn dann verschwinden

beide ausschlaggebenden Faktoren von (90),  $e^{\frac{np}{\eta}}$  und

$$e^{\frac{np}{\eta}} e^{\frac{n}{s}} (s(q-p)) = \left[ \int_t^{t''} e^{\frac{sq t}{J'(0)} + sp \left( \frac{1}{\eta} - \frac{t}{J'(0)} \right)} df \right]^{\frac{n}{s}},$$

exponentiell für  $\Re(p) \rightarrow -\infty$ .

Um aber dieses Integral auch für  $\frac{1}{\eta} \leq \tau''$  ohne längere Betrachtungen abschätzen zu können, werden wir über die Verteilungsfunktion  $f(t)$  einschränkende Annahmen machen. Um auch fernerhin als Integrationsbereich das „Produkt“ zweier eindimensionaler Mannigfaltigkeiten nehmen zu können, ersetzen wir  $p$  durch eine neue Integrationsvariable  $p_0 = p - q$ ,

<sup>5)</sup> Beweis:  $\int_{K_q} \dots \frac{dq}{p^s s(s(q-p)) - q^s}$  ist wegen

$$|p^s s(s(q-p))| < q^s \quad \text{für} \quad 0 \leq p < 1, \quad 1 < \frac{|q|}{p} < 1 + \delta$$

in der Nachbarschaft der Strecke  $0 \leq p < 1$  regulär.

<sup>5a)</sup> Es ist leicht, Verteilungsfunktionen  $f(t)$ , die „beliebig wenig“ von der Verteilung bei konstanter Abfertigungszeit abweichen, anzugeben, derart, daß solche Verzweigungspunkte innerhalb der Schleife von (41a) wirklich vorhanden sind.

wobei zunächst die Integrationswege der Fig. 7 beibehalten werden dürfen ( $C_{p_0} = C'_p$ ):

$$(93) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_p} \int_{K_q} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{p_0}} \int_{K_q} \frac{e^{\frac{n(p_0+q)}{\eta}} \cdot \frac{(p_0+q)^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1} (-sp_0) - (p_0+q)^s q^{n-s}}{(p_0+q)^s \varepsilon (-sp_0) - q^s}}{\varepsilon(-sp_0) - q\varepsilon'(-sp_0) - \frac{(p_0+q)s(-sp_0)}{np_0}} dp_0 dq.$$

Das weitere Verfahren besteht nun darin, daß wir die beiden Integrationswege derart verschieben, ( $C'_{p_0}$ ,  $K'_q$ ), daß

$$(94a) \quad \left| e^{\frac{p_0}{\eta} \varepsilon^s (-sp_0)} \right| < c' < 1 \quad \text{längs } C'_{p_0}$$

und

$$(94b) \quad \left| \frac{e^{\frac{q}{\eta} - 1}}{\frac{q}{\eta}} \right| \leq 1 \quad \text{längs } K_q$$

ist. Dann kann nämlich der dem Minuenden  $(p_0+q)^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1} (-sp_0)$  des zweiten Integranden Zählers entsprechende Anteil von  $\frac{n! \eta^n}{n^n} \frac{1}{(2\pi i)} \iint$  als  $O\left(\frac{c'^n}{\sqrt{n}}\right)$  abgeschätzt werden; der Anteil des Subtrahenden  $(p_0+q)^s q^{n-s}$  aber kann durch Anwendung des Residuensatzes als Summe von einfachen Integralen  $\int \dots dp_0$  geschrieben werden und es handelt sich nur noch darum,  $C'_{p_0}$  derart einzurichten, daß auch diese Integrale abgeschätzt werden können, deren Auftreten eben der schematischen Anwendung der Sattelpunktmethode auf das Doppelintegral (93) im Wege steht.

Der Nenner des Integranden (93) verschwindet an den Stellen

$$(95a) \quad q = -p_0$$

und

$$(95b) \quad q = \frac{p_0 \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}} (-sp_0)}{1 - \zeta_k \varepsilon^s (-sp_0)}, \quad \zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}} \quad (k = 0, 1, \dots, s-1; \varepsilon^{\frac{1}{s}}(0) = 1).$$

Wir ziehen nun in der  $q$ -Ebene eine einfach geschlossene Kurve  $K'_q$  gemäß (94b), die also den Punkt  $q = \eta$  passiert und die Schleife der Kurve  $\left| e^{\frac{q}{\eta} - 1} \right| = \left| \frac{q}{\eta} \right|$  im Innern enthält; dann werden die durch (95a) entworfenen Bilder  $C_p^{-1}$  einiger Teilbogen  $C_{p_0}^{-1}$  und die durch (95b) entworfenen Bilder  $C_q^k$  von im allgemeinen unendlich vielen Teilbogen  $C_{p_0}^k$  der Kurve  $C'_{p_0}$  innerhalb  $K'_q$  fallen. Wir gehen jetzt in (93) von  $K_q$  zu  $K'_q$  über, wobei die Residuen in den Punkten der  $C_{p_0}^{-1}$  abzuziehen sind, und wenden

sodann auf das Glied mit  $(p_0 + q)^s q^{n-s}$  den Residuensatz an. Die Pole (95b) liefern die Residuen

$$(96) \quad \sum_{C_{p_0}^k} \frac{1}{2\pi i s} \int_{C_{p_0}^k} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^{n+1-s} p_0^s q^{s-1}} \left( \varepsilon(-sp_0) - (p-p_0)\varepsilon'(-sp) - \frac{p\varepsilon'(-sp_0)}{np_0} \right) dp_0,$$

wobei

$$(97) \quad p = \frac{p_0}{1 - \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)}$$

gesetzt ist; führt man in das letzte Integral  $p$  anstatt  $p_0$  als Variable ein, und schreibt  $p - p_0 = q_k$  (so daß aus (97)  $q_k = p \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}(s(q-p))$  folgt), so wird weiter mit der Bezeichnung (90c)

$$\frac{1}{2\pi i s} \int_{C_{p_0}^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p^k} \frac{e^{\frac{np}{\eta}}}{p^n} F_k(p) \frac{dp}{p}. \quad (C_p^k \text{ ist das } p\text{-Bild (97) von } C_{p_0}^k).$$

Die Umformung von (93) lautet also, da längs  $C_{p_0}^{-1}$  im ganzen nur das Residuum des Gliedes mit  $(p_0 + q)^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1}$  abzuziehen ist,

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{n! \eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_p K_q} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{C_{p_0} K_q} \left[ e^{\frac{p_0}{\eta} \varepsilon^{\frac{1}{s}}(-sp_0)} e^{\frac{q}{\eta} - \log \frac{q}{\eta}} \right]^n \frac{1}{(p_0 + q)^2 p_0} \\ & \times \frac{\varepsilon^{-1}(-sp_0) q^s}{(p_0 + q)^s \varepsilon(-sp_0) - q^s} \left( \varepsilon(-sp_0) - q \varepsilon'(-sp_0) - \frac{p_0 + q}{np_0} \varepsilon(-sp_0) \right) dp_0 dq \\ & + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{C_p^k} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i s} \int_{C_p^k} e^{n \left( \frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta} \right)} F_k(p) \frac{dp}{p} \\ & - \sum_{C_{p_0}^{-1}} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p_0}^{-1}} \frac{d}{dp_0} \left[ \frac{\varepsilon^{\frac{s}{s}}(-sp_0)}{\left( \frac{-p_0}{\eta} \right)^n} \left( \frac{1}{\eta} + \frac{n-1}{np_0} - \delta_s \frac{s(-sp_0)}{(n+1)p_0} \right) \right] dp_0. \end{aligned} \right.$$

Hat man  $C_{p_0}'$  gemäß (94a) gewählt, was stets möglich ist, so handelt es sich nunmehr um die Abschätzung der Integrale  $\int_{C_p^k}$ . Die Enden der Kurven  $C_p^k$  entsprechen den Schnittpunkten der beiden Kurven  $K_q'$  und (95b) in der  $q$ -Ebene (Fig. 8). In diesen Schnittpunkten gilt nach (94b), (95b)

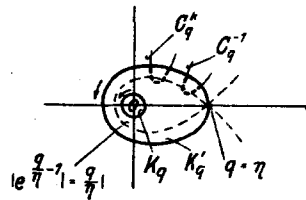


Fig. 8.

$$(98a) \quad \left| \frac{\frac{p_0 \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}}{e^{\eta(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}})} - 1}}{\frac{p_0 \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}}}{\eta(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}})}} \right| < 1$$

und daher, wenn mit der Ungleichung (94a) multipliziert wird, nach (97)

$$(99a) \quad \left| \frac{\frac{p_0}{e^{\eta(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}})} - 1}}{\frac{p_0}{\eta(1-\zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}})}} \right| = \left| \frac{\frac{p-1}{e^\eta}}{\frac{p}{\eta}} \right| < c' < 1$$

und ebenso findet man für beide Enden der Kurven  $C_{p_0}^{-1}$

$$(99b) \quad \left| \frac{s^{\frac{1}{s}}(-s p_0)}{\frac{p_0}{\eta}} \right| < c' < 1.$$

Da nach (99a) die Endpunkte aller  $C_p^k$  dem Gebiete

$$(100) \quad \left| \frac{\frac{p-1}{e^\eta}}{\frac{p}{\eta}} \right| < c' < 1$$

der  $p$ -Ebene angehören, kann man insbesondere *dann* eine Kurve  $C_p^k$  ganz in dieses Gebiet (s. Fig. 3) hinein verschieben, wenn sie die positiv-reelle  $p$ -Halbachse nicht schneidet. Um dies zu erzielen, werden wir  $C_{p_0}'$  so bestimmen, daß im allgemeinen nur *solche* Stellen  $p_0$  reelle  $p$ -Bilder (97) haben, deren  $q$ -Bilder (95b) von sehr großem Betrage sind und daher außerhalb  $K_q'$  liegen; *diese* Stellen  $p_0$  fallen daher außerhalb der Bogen  $C_{p_0}^k$ .

Außerdem wird (für  $k \neq 0$ ) ein negativ-reeller Wert von (97) als Bild eines Punktes in der Nachbarschaft von  $p_0 = 0$  mit kleinem  $q$ -Bild zugelassen werden. Weiter werden wir Vorkehrungen treffen, daß das  $q$ -Bild (95b) von  $C_{p_0}'$  die Kurve  $K_q'$  (Fig. 8) nur endlich oft schneidet; dann nämlich enthält die Doppelsumme in (98) nur endlich viele Glieder.

Den meisten dieser Bedingungen genügt die an verschiedenen Stellen nach links ausgebogene imaginäre  $p_0$ -Achse. Für imaginäres  $p_0$  ist nämlich  $|\varepsilon(-s p_0)| \leq \varepsilon(0) = 1$  und daher der Ausdruck (97) nur an der Stelle  $p_0 = 0$  reell; d. h. das  $p$ -Bild (97) der imaginären  $p_0$ -Achse schneidet die reelle  $p$ -Achse nur an der Stelle  $p = 0$  (für  $k > 0$ ) bzw. an der Stelle  $p = 1$  (für  $k = 0$ ). Für imaginäres  $p_0$  gilt weiter (94a), abgesehen von der Nachbarschaft etwaiger Einsstellen von  $\varepsilon(-s p_0)$ ; imaginäre Eins-

stellen sind ersichtlich dann und nur dann vorhanden, wenn die Verteilungsfunktion  $f(t)$  abteilungsweise konstant ist und nur in äquidistanten Stellen der  $t$ -Achse unstetig wird, und sie liegen diskret, mit Ausnahme des Falles konstanter Abfertigungszeit ( $\varepsilon(z) \equiv e^z$ ), den wir jetzt ausschließen.

Um das Ungleichheitszeichen von (94a) auch in der Nachbarschaft dieser Einsstellen zu erzielen, hat man dort die imaginäre  $p_0$ -Achse hinreichend wenig nach links auszubiegen, denn für hinreichend kleines  $\operatorname{Re}(p_0) = x < 0$  gilt wegen

$$\left[ e^{\frac{p_0}{\eta}} \frac{1}{\varepsilon^s} (-s p_0) \right]_{p_0=0}' = \frac{1}{\eta} - 1 > 0 \quad \text{auch}$$

$$\left| e^{\frac{x+iy}{\eta}} \frac{1}{\varepsilon^s} (-s(x+iy)) \right| < e^{\frac{x}{\eta}} \frac{1}{\varepsilon^s} (-sx) < \frac{1}{\varepsilon^s}(0) = 1$$

und ersichtlich wird der Betrag von (95b) an den Realstellen des  $p$ -Bildes (97) der so deformierten imaginären  $p_0$ -Achse (abgesehen von der Stelle  $p \approx 0$  bzw.  $p \approx 1$ ) beliebig groß.

Um aber zu verhindern, daß das  $q$ -Bild (95b) von  $C'_{p_0}$  die Kurve  $K'_q$  unendlich oft schneidet, machen wir einschränkende Annahmen über  $f(t)$  und daher über  $\varepsilon(z)$ . Wir setzen von hier ab  $f(t)$  als abteilungsweise konstante, nur in äquidistanten Punkten der  $t$ -Achse unstetige Funktion voraus; gleiches gilt dann von  $\varphi(t)$  und nach (85) wird  $e^{-z\tau} \varepsilon(z)$  gleich einem Polynom  $N = \frac{\tau'' - \tau'}{\delta}$ -ten Grades in  $e^{z\delta}$  (unter  $\delta$  die Stufenbreite von  $\varphi(\tau)$  verstanden).  $\varepsilon(z)$  wird also, bis auf einen Exponentialfaktor, eine periodische Funktion von  $z$ ; die Einsstellen und die etwaigen imaginären Nullstellen von  $|\varepsilon(-s p_0)|$  bilden eine gewisse Anzahl äquidistanter Punktreihen auf der imaginären Achse und in einem gewissen Parallelstreifen um diese Achse liegen keine weiteren Nullstellen.

Als  $C'_{p_0}$  nehmen wir nun die an den erwähnten Nullstellen und Einsstellen halbkreisförmig, mit konstantem Radius  $\varrho$ , nach links ausgebogene imaginäre Achse. Macht man den Radius  $\varrho$  hinreichend klein, so gilt ersichtlich folgendes:

$\alpha$ ) Längs  $C'_{p_0}$  ist (94a) erfüllt mit einer geeigneten Konstante  $c' < 1$ .

$\beta$ ) Die periodische Funktion  $|\varepsilon(-s p_0)|$  hat längs  $C'_{p_0}$  keine Nullstelle und daher ein positives Minimum, so daß der Betrag von (95b) längs  $C'_{p_0}$  gegen  $\infty$  geht und die Kurven (95b) und  $K'_q$  (Fig. 8) einander nur endlich oft schneiden.

$\gamma$ ) Diejenigen Punkte von  $C'_{p_0}$ , deren  $p$ -Bilder (97) reell sind, haben im allgemeinen  $q$ -Bilder (95b) von sehr großem Betrage und liegen daher nicht auf den Bogen  $C^k_{p_0}$ ; außerdem hat das  $p$ -Bild der Stelle  $p = 0$

benachbarten Bogens von  $C'_{p_0}$ , der für  $k \neq 0$  ein  $C^k_{p_0}$  ist, einen Schnittpunkt  $p \approx \frac{-\varrho}{2 \sin \frac{k\pi}{s}}$  mit der negativ-reellen Halbachse.

Infolge  $\alpha$ ) kann das Doppelintegral rechts in (98) (die endlich vielen Nullstellen des Integrandenennenners ergeben bekanntermaßen keine Schwierigkeiten) als  $O\left(\frac{c'^n}{\sqrt{n}}\right)$  abgeschätzt werden:

$$(101a) \quad \frac{n! \eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \int_{C'_{p_0} K_q} = O\left(\frac{c'^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Infolge  $\beta$ ) enthält die Doppelsumme in (98) nur endlich viele Glieder; deren Integrationskurven  $C^k_p$  können nun zufolge  $\gamma$ ) ohne Überschreitung des Sattelpunktes  $p = \eta$  ganz in das Gebiet (100) hinein verschoben werden, wobei im allgemeinen Verzweigungspunkte  $p_v$  der Integranden überstrichen werden, so daß die betreffenden Verzweigungsintegrale hinzuzuzählen sind. Mit (99a) erhält man daher:

$$(101b) \quad \sum_{k=0}^{s-1} \sum_C \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i s} \int_{C^k_p} e^{n\left(\frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta}\right)} F_k(p) \frac{dp}{p} = \sum'_{p_v} + O(c'^n),$$

und ebenso folgt mit (99b) für das letzte Glied in (98)

$$(101c) \quad \sum_{C_{p_0}^{-1}} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p_0}^{-1}} = O(c'^n).$$

Die letzten drei Gleichungen ergeben mit (98)

$$(102) \quad \frac{n! \eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \int_{C_p K_q} = \sum'_{p_v} + O(c'^n),$$

und aus (90), (91), (102) folgt

$$(103) \quad \vartheta = O(1) + \sum_{p_v} + \sum'_{p_v} + O(c'^n).$$

Da nun  $\vartheta$  gemäß seiner Definition als Mittelwert von Wartezeiten höchstens  $O(n)$  ist, während die einzelnen Glieder von  $\sum_{p_v}$  und  $\sum'_{p_v}$  von der

Größenordnung  $\left| \frac{e^{\frac{p_v-1}{\eta}}}{\frac{p_v}{\eta}} \right| n^k$  sind, mit

$$(104) \quad \left| \frac{e^{\frac{p_v-1}{\eta}}}{\frac{p_v}{\eta}} \right| \geq 1,$$

so müssen jedenfalls diejenigen Verzweigungsintegrale, für welche in (104) das Ungleichheitszeichen gilt, in beiden Summen mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten. Würden aber für ein bestimmtes  $\eta = \eta_0$  diejenigen Glieder, für welche (104) mit dem Gleichheitszeichen gilt, nicht ebenfalls identisch fortfallen, so würde die Gleichung (103) für jedes  $\eta > \eta_0$  ein mit  $n$  exponentiell wachsendes  $\vartheta$  ergeben; daher gilt, jedenfalls für  $\eta < 1$ ,

$$(105) \quad \sum_{p_v} + \sum'_{p_v} = 0 \quad (0 \leq \eta < 1)$$

und hieraus folgt mit (90), (91), (102)

$$(106) \quad \vartheta = \mathcal{J}'_0 \cdot \frac{1}{2\pi i \eta} \int_{K: z=-1+} \frac{\varepsilon(s\eta(z-1)) - z\eta\varepsilon'(s\eta(z-1))}{z^s - \varepsilon(s\eta(z-1))} \frac{dz}{1-z} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \eta < 1$$

und allgemeiner die Regel, daß man, um die asymptotische Entwicklung von  $\vartheta$  zu erhalten, das Integral (90 a) formal (d. h. ohne Berücksichtigung der Verzweigungspunkte des Integranden) nach der Sattelpunktmethode zu entwickeln hat.

Durch Anwendung des Residuensatzes auf (106) folgt analog Gl. (46)

$$(106a) \quad \vartheta = \mathcal{J}'_0 \left[ \frac{\eta}{2(1-\eta)} \left( \varepsilon''(0) - \frac{s-1}{s} \right) - \frac{s-1}{2s\eta} (1+\eta) + \frac{1}{s\eta} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Hierin sind mit  $z_k$  ( $k=1, 2, \dots, s-1$ ) die  $s-1$  innerhalb des Einheitskreises liegenden Wurzeln der Gleichung

$$(106b) \quad \varepsilon(s\eta(z-1)) - z^s = 0 \quad (0 < \eta < 1)$$

bezeichnet; analog der Gleichung (46a) könnte auch für das Integral in (106) eine Reihenentwicklung gegeben werden.

$$2) \quad \eta = 1 - c \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad c \geq 0.$$

Wir gehen aus von Gleichung (90); wird der *zweite*, durch Gleichung (90 a-c) umgeformte Summand so behandelt wie im Falle konstanter Abfertigungszeit (Gleichung (51) ff.), so folgt, mit der Abkürzung

$$\varepsilon''(0) = \varepsilon_0'',$$

$$(107) \quad \begin{aligned} & \frac{n! \eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_p} \int_{K_q} \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{4s} \left[ c(s\varepsilon_0'' - s + 1)^2 + (4(s\varepsilon_0'' - s + 1) - (1 + 2c^2)(s\varepsilon_0'' - s + 1)^2) \right. \\ & \quad \left. \times \int_0^\infty e^{-x^2 - 2cx} dx \right] + O(1) + \sum_{p_v} \end{aligned}$$



Den ersten Summanden von (90) zerlegen wir wieder gemäß Gleichung (98), wobei jetzt als  $C'_{p_0}$  die nur an den Nullstellen von  $\varepsilon(-s p_0)$  (mit hinreichend kleinem von  $n$  unabhängigem Radius  $\varrho$ ) und an der Stelle  $p_0 = 0$  (mit einem Radius  $\varrho' = \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}$ ) halbkreisförmig nach links ausgebogene imaginäre Achse gewählt wird. Wie früher kann dann das zweite und dritte Glied rechts in (98) gemäß (101 b, c), mit geeignetem  $c' < 1$ , abgeschätzt werden; da jedoch (94 a) nicht mehr durchwegs erfüllt und für

keine Lage von  $C'_{p_0}$  erfüllbar ist (das Minimum von  $c^{\frac{p_0}{\eta}} \varepsilon^s(-s p_0)$  längs der reellen Achse geht mit  $\eta \rightarrow 1$  selbst gegen 1), verschwindet das Glied  $\int_{C'_{p_0}} \int_{K'_q}$  rechts in (98) nicht mehr exponentiell, sondern die Umgebung

von  $q = 1$  (auf  $K'_q$ ) liefert zusammen mit der Umgebung von  $p_0 = 0$ , bzw. mit den Umgebungen der übrigen auf  $C'_{p_0}$  liegenden Einsstellen von  $|\varepsilon(-s p_0)|$  zu diesem Doppelintegral Beiträge von der Größenordnung  $n^{\frac{1}{2}}$  resp.  $n^{-1}$ . Um z. B. den Beitrag der Einsstelle  $p_0 = 0$  zu erhalten, hat man formal

$$(108) \quad p_0 = i \sqrt{\frac{2}{n}} \zeta, \quad q = 1 + i \sqrt{\frac{2}{n}} z,$$

zu setzen, womit für den Exponenten des ausschlaggebenden  $q$ -Faktors  $e^{n(\frac{q}{n} - \log \frac{q}{n})}$  wieder Gleichung (50 a) folgt, während sich für den Exponenten des ausschlaggebenden  $p_0$ -Faktors  $(e^{\frac{p_0}{\eta}} \varepsilon^s(-s p_0))^n$

$$n \left( \frac{p_0}{\eta} + \frac{1}{s} \log \varepsilon(-s p_0) \right) = 2 i c \zeta - s \zeta^2 (e_0'' - 1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

also ebenfalls eine Größe  $O(1)$  ergibt.

Elementare Abschätzungen zeigen dann, daß man die asymptotische Entwicklung des Beitrages der Umgebung von  $p_0 = 0$ ,  $q = 1$  dadurch erhält, daß man (Anwendung der Sattelpunktmethode auf Doppelintegrale) in  $\int_{C'_{p_0}} \int_{K'_q}$  die Variablen (108) einführt, den Integranden formal nach  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  entwickelt, und gliedweise nach  $\zeta$  und  $z$  integriert. Die Integrationskurve  $K'_q$  haben wir uns, nach Fortlegung von  $C'_{p_0}$ , in solcher Weise aus der Umgebung von  $q = 0 (K_q)$  bis an die Stelle  $q = 1$  deformiert zu denken, daß dabei der Nennerfaktor

$$q - \frac{\frac{1}{p_0 \varepsilon^s}(-s p_0)}{1 - \varepsilon^s(-s p_0)} = i \sqrt{\frac{2}{n}} \left( z + \zeta \frac{s+1-s e_0''}{2} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

niemals verschwindet, und um dies zu erzielen, hat man den Realteil von  $q$  hinreichend unterhalb 1 zu lassen. Demgemäß hat man in dem mit (108) transformierten Integrale die Integration nach  $z$  und  $\zeta$  etwa über zwei Parallele  $G_1, G_2$  zur reellen Achse, für welche

$$\Im(z + \zeta \cdot \frac{s+1-s\epsilon_0''}{2}) > 0, \quad \Im(\zeta) > 0$$

gilt, zu erstrecken. Die Durchführung der Rechnung ergibt in erster Näherung

$$(109) \quad \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_{p_0} \approx 0} \int_{K'_q \approx 1} = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2 s} \int_{G_1} \int_{G_2} \frac{e^{2ic\zeta - s\zeta^2(\epsilon_0''-1) - (z-ic)^2}}{-z-\zeta \cdot \frac{s+1-s\epsilon_0''}{2}} \\ \times \left( \zeta s(\epsilon_0''-1) + \frac{1}{2\zeta} - z \right) \frac{dz d\zeta}{\zeta^2} + O(1).$$

Um das letzte Doppelintegral in reelle Form überzuführen, hat man durch Differentiation nach geeigneten Parametern die Integrandennenner fortzuschaffen, wodurch sich bekannte Integraltypen ergeben, und hat sodann wieder nach den Parametern zu integrieren. Mit

$$(110) \quad v = \sqrt{s(\epsilon_0''-1)}$$

(da wir den Fall  $\epsilon(z) = e^z$  ausgeschlossen haben, gilt nach der Schwarzschen Ungleichung für das durch (85) definierte  $\epsilon(z)$  immer  $\epsilon_0'' > 1$  und daher  $v > 0$ ), erhält man so

$$(111) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{G_1} \int_{G_2} \dots dz d\zeta = \frac{1}{8\pi} \left[ v(v^2+3) e^{-\frac{c^2}{v^2}} - 2c(v^4+2v^2+3) \int_{\frac{c}{v}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right. \\ \left. + 2ec^2 v(2v^2c^2+2c^2+v^2-3) \int_{\frac{1+v^2}{2v}c}^{\infty} \int_{\frac{1+v^2}{2v}c}^{\infty} e^{-x^2-2xy\frac{1-v^2}{1+v^2}-y^2} dx dy \right] = A.$$

Um den Beitrag einer der übrigen Einsstellen (diese sind bei unseren Annahmen von der Form  $\frac{2\pi i\nu}{\delta}$  ( $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$ )) zu erhalten, hat man die eben angedeutete Rechnung mit  $p_0 = \frac{2\pi i\nu}{\delta} + i\sqrt{\frac{2}{n}}\zeta$  an Stelle von (108) durchzuführen.

Da das höchste Glied der so zu erhaltenden, von allen übrigen Einsstellen herrührenden Entwicklung  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  ist, wird die Entwicklung von  $\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_{p_0}} \int_{K'_q}$  in erster Näherung durch (109), (111) gegeben:

$$(112a) \quad \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_{p_0}} \int_{K'_q} = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{s} \cdot A + O(1),$$

und mit (101b), (101c) folgt daher für (98)

$$(112b) \quad \frac{n! \eta^n}{n^n} \cdot \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C'_p} \int_{K'_q} = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{s} \cdot A + O(1) + \sum_{p_v}.$$

Setzt man (112b) und (107) in (90) ein, so ergibt sich

$$\vartheta = O(\sqrt{n}) + \sum_{p_v} + \sum'_{p_v},$$

und hier müssen in  $\sum_{p_v} + \sum'_{p_v}$  nach dem bei Gleichung (103) Ausgeführten alle jene Glieder identisch fortfallen, deren  $p_v$  innerhalb der Schleife der Kurve (41a) liegt; die etwa nicht identisch fortfallenden Beiträge der auf dieser Schleife liegenden  $p_v$  wären aber im wesentlichen von der Größenordnung (70) und würden daher im Falle  $c < 0$  ( $\Re(p_v - 1) < 0$ ) ein  $\vartheta = O(e^{k\sqrt{n}})$  ( $k > 0$ ) ergeben, was unmöglich ist. Daher gilt die Gleichung (105) auch noch für  $\eta = 1$ , und mit ihr folgt aus (90), (107), (112b), (111)

113)

$$\begin{aligned} \vartheta = & \mathcal{J}'_0 \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{4s} \left\{ c(v^2+1)^2 + [4(v^2+1) - (1+2c^2)(v^2+1)^2] \int_0^\infty e^{-x^2-2cx} dx \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} v(v^2+3) e^{-\frac{c^2}{v^2}} - 2c(v^4+2v^2+3) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{c}{v}}^\infty e^{-x^2} dx \\ & \left. + 2ec^2 v(2v^2c^2 + 2c^2 + v^2 - 3) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1+v^2}{2v}}^\infty \int_{\frac{1+v^2}{2v}c}^\infty e^{-x^2-2xy\frac{1-v^2}{1+v^2}-y^2} dx dy \right\} + O(1) \\ & \left( \eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}, \quad c \gtrless 0, \quad v = \sqrt{s(\varepsilon''(0) - 1)} \right) \end{aligned}$$

Aus (113) folgt für  $c = 0$

113a)

$$\begin{aligned} \vartheta = & \mathcal{J}'_0 \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \cdot \frac{1}{8s} \left[ (v^2+1)(v^2-3) \left( \frac{2}{\pi} \arctg v - 1 \right) + \frac{2v}{\pi} (v^2+3) \right] + O(1) \\ & \left( \eta = 1, \quad v = \sqrt{s(\varepsilon''(0) - 1)}, \quad 0 \leq \arctg v < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

3) Der Fall  $\eta = \text{const} > 1$  kann nunmehr rasch erledigt werden. Zunächst sieht man, daß im Sonderfall

$$\frac{1}{\eta} < \frac{t'}{\mathcal{J}'(0)} = \tau'$$

so wie bei konstanter Abfertigungszeit vorgegangen werden könnte. Im allgemeinen Falle gehen wir aus von Gleichung (87) und Fig. 3 und ersetzen die Variable  $p$  wieder durch  $p_0 = p - q$ , wodurch das Integral  $\int \int_{C_p K_q}$  in (87) formal in (93) übergeht ( $K_q$  liegt jetzt links von  $C_{p_0}$ ).

Sodann wählen wir  $K'_q$  so wie früher (Fig. 8) und nehmen als  $C'_{p_0}$  die an den früher erwähnten Null- und Einstellen etwa halbkreisförmig *nach rechts* ausgebuchtete imaginäre  $p_0$ -Achse. In gleicher Weise wie früher gelangt man dann zur Gleichung (98), deren erstes und letztes Glied gemäß (101a), (101c) abgeschätzt werden können; diejenigen  $s$  Kurven  $C_p^k$  jedoch, welche gemäß (97) der Nachbarschaft von  $p_0 = 0$  (auf  $C'_{p_0}$ ) entsprechen, schneiden die reelle  $p$ -Achse rechts vom Nullpunkt und bleiben daher bei dem Versuch, sie in das Gebiet (100) hinein zu verschieben, am Sattelpunkt  $p = \eta$  hängen; die zugehörigen  $s$  Integrale  $\int_{C_p^k}$  müssen daher

nach der Sattelpunktmethode entwickelt werden, während für die übrigen Glieder der Doppelsumme in (98) wieder (101b) gilt. Man stellt dann ähnlich wie früher fest, daß keine störenden Verzweigungsintegrale auftreten können, und erhält daher aus (87)

$$(114) \quad \vartheta = \mathcal{J}'_0 \left[ \frac{n-s}{2s} \left( 1 - \frac{n}{(n+1)\eta} \right) + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{p \approx \eta}} e^{n \left( \frac{p}{\eta} - \log \frac{p}{\eta} \right)} F_k(p) \frac{dp}{p} + O(c''^n) \right] \quad (\eta > 1)$$

wobei unter  $C_{p \approx \eta}$  ein die reelle Achse im Punkte  $p = \eta$  senkrecht schneidendes Kurvenelement, unter  $c''$  eine geeignete Konstante  $< 1$  und unter  $q_k(p)$  (in den Ausdrücken  $F_k(p)$  von Gleichung (90c)) die längs der reellen  $p$ -Achse fortgesetzte, für  $p_0 \approx 0$  durch die Parameterdarstellung (95b), (97) gegebene Lösung der Gleichung  $q_k = p \zeta_k \varepsilon^{\frac{1}{s}} (s(q_k - p))$  zu verstehen ist.

Es kommt dies also auf dasselbe hinaus, als ob man in dem Integral (87) das Glied  $p^n \varepsilon^{\frac{n}{s}-1} (s(q-p))$  streichen und den Rest, so wie in § 6, eventuell nach Anwendung des Residuensatzes auf  $K_q$ , formal im Sattelpunkt  $p = \eta$  entwickeln würde, und man erhält so

$$(115) \quad \vartheta = \mathcal{J}'_0 \left[ n \frac{\eta-1}{2s\eta} - \frac{\eta-1}{2\eta} + \frac{1}{2s\eta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{|z|=1}} \frac{s(s\eta(z-1)) - z\eta\varepsilon'(s\eta(z-1))}{z^s - \varepsilon(s\eta(z-1))} \cdot \frac{dz}{1-z} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad \eta > 1,$$

oder analog Gleichung (60)

$$(116) \quad \vartheta = \frac{J'_0}{s} \left[ n \frac{\eta - 1}{2\eta} - \frac{s-1}{2\eta} - \frac{s}{2} + \frac{1}{\eta} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{1-z_k} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad \eta > 1,$$

wobei  $z_k$  ( $k = 0, 1, \dots, s-1$ ) die  $s$  innerhalb des Einheitskreises gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$(116a) \quad z^s - \varepsilon(s\eta(z-1)) = 0, \quad \eta > 1$$

bezeichnet.

(Eingegangen am 1. Juni 1929.)