Curso: Relatividad general

Hoja de trabajo 1

I. RELATIVIDAD ESPECIAL

1. Considere dos transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowski:
   - un boost con velocidad v_x en la dirección x;
   - un boost con velocidad v_y en la dirección y.

   a) ¿Cuál es la matriz de Lorentz asociada a la composición de las dos transformaciones en el orden dado anteriormente?

   b) Escriba el cambio de las componentes de un vector y de una uno-forma ante estas transformaciones.

2. Demostrar que la invariancia galileana restringe a la densidad lagrangiana de una partícula clásica libre a ser proporcional al módulo de su velocidad al cuadrado, $L \propto v^2$.

3. Un cuerpo se dice uniformemente acelerado si su cuadrivector aceleración $\vec{a}$ tiene magnitud y dirección espacial constante. Demuestre que esto implica que el cuadrivector aceleración $\vec{a}$ tiene siempre las mismas componentes en el marco de referencia comóvil del cuerpo. Muestre además que estas componentes corresponden a la definición galileana de aceleración.

4. La línea de universo de una partícula está descrita por las ecuaciones

$$x(t) = at + b\sin wt, \qquad y(t) = b\cos wt, \qquad z(t) = 0, \qquad |bw| < 1, \tag{1}$$

   en un sistema inercial dado. Describa el movimiento y determine las componentes de los cuadrivectores velocidad y aceleración de la partícula.

5. Demuestre que si dos eventos tienen una separación tipo tiempo, hay un sistema de referencia de Lorentz en el que los dos eventos tienen las mismas coordenadas espaciales. De manera similar, demuestre que si dos eventos tienen una separación tipo espacio, existe un sistema de referencia de Lorentz en el que ocurren simultáneamente.

6. *Aceleración propia*: considere una partícula en $\mathbb{R}^{1,1}$. Sean $x^\mu = (t, x)$ sus coordenadas en el sistema inercial S. La aceleración propia, α, se define como la aceleración medida en el sistema de reposo instantáneo.

   a) Determinar α^μ, en términos de $v \equiv \frac{dx}{dt}$, $a \equiv \frac{dv}{dt}$ y $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, siendo v la velocidad instantánea, donde

$$\alpha^\mu \equiv \frac{d^2 x^\mu}{d\tau}, \text{ con } \alpha^2 = \alpha_\mu \alpha^\mu \tag{2}$$

   y τ es el tiempo propio.

   b) Mostrar que la aceleración medida en S está relacionada con la aceleración propia α mediante

$$a \equiv \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\gamma^3}\alpha \tag{3}$$

7. Considere la acción de una partícula relativista dada por

$$S_0 = -mc \int d\sigma \sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \tag{4}$$

   donde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$ y $\eta_{\mu\nu} = diag(+,-,-,-)$.

a) Hallar el momento $p_\mu = \frac{dL}{d\dot{x}^\mu}$ y mostrar que $p^2 + m^2 = 0$. Este vínculo se denomina vínculo de capa de masa. Mostrar que el vínculo se preserva en el tiempo, esto es, $\frac{d}{d\sigma}(p^2 + m^2) = 0$.

b) Construir el Hamiltoniano $H = p_\mu \dot{x}^\mu - L$ y mostrar que es identicamente nulo.

El origen de esta propiedad es la invarianza de la acción ante reparametrizaciones $\sigma \to \sigma'(\sigma)$. Esta invarianza indica que el conjunto (x^μ, p_μ) contiene coordenadas redundantes en el espacio de fases. Mediante una elección de calibre, como $\sigma = t$, se puede eliminar alguna de ellas. De esta manera el parámetro a lo largo de la línea de universi conicide con la coordenada temporal en un sistema de referencia dado. A su vez, el vínculo de la capa de masa permite eliminar uno de los momentos, y el sistema resulta ser tres grados de libertad con sus respectivos momentos.

8. En espacio euclídeo tridimensional con coordenadas cartesianas no distinguimos entre vectores (con componentes V^α) y 1-formas (con componentes P_β), porque sus componentes transforman de la misma manera. Muestre esto desarrollando los dos pasos siguientes:

- Muestre que
$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_\beta A^\beta$$
y
$$P_{\bar{\beta}} = \Lambda^\alpha{}_{\bar{\beta}} P_\alpha \tag{5}$$
son la misma transformación si la matriz de transformación es ortogonal.
- La métrica de tal espacio tiene componentes $\{\delta_{ij}, i, j = 1, \cdots 3\}$. Muestre que la transformación de un sistema de coordenadas cartesianas a otro obedece
$$\delta_{\bar{i}\bar{j}} = \Lambda^l{}_{\bar{i}} \Lambda^l{}_{\bar{j}} \delta_{kl} \tag{6}$$
y que esto implica que $\{\Delta^k{}_{\bar{i}}\}$ es una matriz ortogonal.

II. VECTORES, VECTORES DUALES, TENSORES Y DENSIDADES

1. Muestre que la operación de suma entre tensores de mismo rango es cerrada.

2. Demuestre que si A es un tensor de rango $(2, 0)$ y B un tensor de rango $(0, 2)$, entonces $A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$ es un escalar (independiente del marco de referencia).

3. Mostrar que si A_μ es un vector dual, $\partial_\mu A_\nu$ no es un tensor de rango $(0, 2)$. Mostrar, sin embargo, que la parte antisimétrica de $\partial_\mu A_\nu$, sí lo es.

4. Sea $g_{\mu\nu}$ las componentes de un tensor $(0, 2)$. En un sistema de coordenadas dado $g_{\mu\nu}$ son las componentes de una matriz $n \times n$.

   a) ¿Cómo transforma $g = \det g_{\mu\nu}$ bajo cambios de coordenadas?

   b) ¿ Mostrar que $dv = d^n \sqrt{|g|}$ es invariante frente a cambios de coordenadas. Evaluarlo para distintos sistemas de coordenadas: Cartesianas, cilíndricas y esféricas.