

Catedrático: Damián Ochoa Auxiliar: Jorge Rodríguez Universidad de San Carlos de Guatemala Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas Análisis de Variable Compleja 1 Guatemala, mayo de 2022

# Examen Final

#### Tema 1

Si  $\zeta^5 = 1$ , encuentre el valor no indefinido de:

$$\frac{\zeta}{1-\zeta^2} + \frac{\zeta^2}{1-\zeta^4} + \frac{\zeta^3}{1-\zeta} + \frac{\zeta^4}{1-\zeta^3}$$

Escriba una condición para evitar el caso indefinido.

#### Tema 2

Desarrolle las series de Laurent de las siguientes funciones en el dominio dado:

a) 
$$f(z) = \frac{e^z}{z-1}$$
;  $0 < |z-1|$   
b)  $g(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ ;  $0 < |z| < 3$   
c)  $h(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ ;  $1 < |z| < 2$ 

### Tema 3

Sea:

$$f(z) = \frac{z^3 - 4z + 1}{(z^2 + 5)(z^3 - 3)}$$

Y  $\gamma(t) = Re^{it}$  con  $(0 \le t \le \pi)$ , muestre que:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| \le \frac{\pi R \left( R^3 + 4R + 1 \right)}{\left( R^2 - 5 \right) \left( R^3 - 3 \right)}$$

Luego, en términos de los polos  $z_n$ , calcule el valor de:

$$\int_{|z|=2} f(z) \mathrm{d}z$$

## Tema 4

Sea  $f(z) = \frac{1}{g(z)^2}$  donde g(z) tiene un cero de orden 1 en  $z = z_0$ . Demuestre que:

$$Res(f; z_0) = \frac{-g''(z_0)}{[g'(z_0)]^3}$$