Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Relatividad general
Guatemala, 17 de marzo de 2022

Jorge Alejandro Rodríguez Aldana
201804766

Examen parcial 1

1. Problema 1

1.1.

Debido a que estamos considerando un rayo de luz, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{x} &= \vec{v}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}l &= c\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}l^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 \\ c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 &= 0 \\ \mathrm{d}s^2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

También es útil ver que, expandiendo en series al rededor de $\frac{2\Phi}{c^2}$ tenemos:

$$\frac{1}{1-\frac{2\Phi}{c^2}} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + \left(\frac{2\Phi}{c^2}\right)^2 + \cdots$$

Ahora, considerando que $\frac{\Phi}{c^2} << 1$, podemos descartar los términos de orden superior a 1.

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\frac{2\Phi}{c^2}} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \tag{2}$$

Ahora hallemos las expresiones de Δt para el sistema con geometría lineal $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2$ y $\Delta t'$ para el sistema con la geometría planteada en el enunciado.

Sistema lineal:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 \\ 0 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 \\ \mathrm{d}t^2 &= \frac{1}{c^2}\mathrm{d}l^2 \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{c}\mathrm{d}l \\ \Delta t &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}l \end{aligned}$$

Sistema planteado:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right)\\
0 &= \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\mathrm{d}l^2 && \text{Usando la expansión 2}\\
0 &= \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1}c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\mathrm{d}l^2 && \text{Multiplicando por } 1-\frac{2\Phi}{c^2}\\
0 &= c^2\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)^2\mathrm{d}l^2 && \text{Despejando } \mathrm{d}t\\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{c}\left(1-\frac{2\Phi}{c^2}\right)\mathrm{d}l\\
\Delta t' &= \frac{1}{c}\int \mathrm{d}l - \frac{2}{c^3}\int \Phi \mathrm{d}l
\end{aligned}$$

Entonces el retardo $\delta t = \Delta t' - \Delta t$ es:

$$\delta t = -\frac{2}{c^3}\int \Phi \mathrm{d}l$$

Aunque aparentemente esto es un .ªdelantoz no un retardo, el potencial $\Phi = -\frac{GM}{r}$ incluye un signo que hace de δt positivo.

□

1.2.

Ahora, para hallar δt hace falta valuar esta expresión.
Sabemos que:

$$\delta t = \frac{2}{c^3}\int \Phi \mathrm{d}l$$

Pero también sabemos que $\mathrm{d}l = c\mathrm{d}t$, además, podemos parametrizar la curva por la que la luz va a desplazarse en términos de t, dejando así el parámetro $\sigma = t$.
Con el procedimiento visto en clase, hallamos una expresión para Φ distinta de $\frac{1}{r}$ que depende directamente del parámetro σ.
Esta fue hallada usando teoría de perturbaciones y es una aproximación de segundo orden que describe el potencial de una geodésica nula (el tipo de movimiento que esperaríamos de un fotón moviéndose en este escenario es que tome una geodésica nula).

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_1 + \cdots \tag{1}$$
$$\Phi_0 = \frac{1}{\sigma} \sin\phi \tag{2}$$
$$\Phi_1 = A\cos\phi + B\sin\phi + \frac{1}{2\sigma}(3 + \cos 2\phi) \tag{3}$$

Y hallamos A y B en base a la condición propuesta. En este caso proponemos la condición de que cuando $U_1 \to 0$ entonces $\phi \to \frac{pi}{2}$.
De esta manera vemos que $U_1 = 0 = A\left(\frac{pi}{2} - \phi\right) + B + \frac{2}{\sigma}$ implica que $A = 0$ y $B = \frac{2}{\sigma}$.
Entonces:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma}\sin\phi + \frac{GM}{2\sigma^2 c^2}(3 + 4\sin\phi + \cos 2\phi) + \cdots$$

Ahora planteamos la integral:

$$\begin{aligned}
\delta t &= \frac{2}{c^3} \int \Phi(\sigma) c \mathrm{d}\sigma \\
&= \frac{2}{c^2} \int_{t_o}^{t_f} \mathrm{d}\sigma \left[\frac{1}{\sigma}\sin\phi + \frac{GM}{2\sigma^2 c^2}(3 + 4\sin\phi + \cos 2\phi)\right] \\
&= \frac{2}{c^2} \left[\sin\phi \ln\sigma\Big|_{\sigma=t_o}^{t_f} - (3 + 4\sin\phi + \cos 2\phi) \frac{GM}{2\sigma c^2}\Big|_{\sigma=t_o}^{t_f}\right]
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que en los puntos en los que la señal está en la tierra y en venus podemos considerar ϕ igual a cero y π respectivamente, y tomando en cuenta Φ en estos límites como su expresión $\Phi = \frac{1}{r}$ tendríamos:

$$\begin{aligned}
\Phi = \frac{1}{r} &= \frac{1}{\sigma}\sin\phi + \frac{GM}{2\sigma^2 c^2}(3 + 4\sin\phi + \cos 2\phi) \\
\frac{1}{r_T} &= \frac{GM}{2t_o^2 c^2}(3 + 1) \\
\frac{1}{r_T} &= \frac{2GM}{t_o^2 c^2} \\
t_o &= \left(\frac{2GMr_T}{c^2}\right)^{1/2} \\
&\text{Análogamente} \\
t_f &= \left(\frac{2GMr_V}{c^2}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Y finalmente evaluamos la expresión de δt en t_f, $\phi = \pi$ y t_o, $\phi = 0$.

$$\begin{aligned}
\delta t &= \frac{2}{c^2}\left[\sin\phi\ln\sigma-(3+4\sin\phi+\cos 2\phi)\frac{GM}{2\sigma c^2}\right]\Bigg|_{t_o,0}^{t_f,\pi}\\
&= \frac{2}{c^2}\left[\frac{3GM}{2t_oc^2}-\frac{3GM}{2t_fc^2}\right]\\
&= \frac{2}{c^2}\left[\frac{3(GM)^{1/2}}{2\sqrt{2}r_T^{1/2}c}-\frac{3(GM)^{1/2}}{2\sqrt{2}r_V^{1/2}c}\right]
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\delta t = \frac{3}{c^3}\left(\frac{GM}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{r_T^{1/2}}-\frac{1}{r_V^{1/2}}\right]$$

Con M la masa del sol.

2. Problema 2

2.1.

Sea s la trayectoria con parámetros de curva λ y α tenemos que:

$$\begin{aligned}
s^\mu &= (t(\lambda,\alpha), x(\lambda,\alpha))\\
&= (\alpha\sinh\lambda, \alpha\cosh\lambda)
\end{aligned}$$

Podemos hallar las líneas tangentes a esta curva derivando parcialmente respecto al parámetro, por tanto:
Cuando α es constante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s^\mu}{\partial\lambda} &= \frac{\mathrm{d}s^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\\
&= (\alpha\cosh\lambda, \alpha\sinh\lambda)\\
&= \chi^\mu
\end{aligned}$$

Cuando λ es constante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s^\mu}{\partial\alpha} &= \frac{\mathrm{d}s^\mu}{\mathrm{d}\alpha}\\
&= (\sinh\lambda, \cosh\lambda)\\
&= \psi^\mu
\end{aligned}$$

Ahora, para saber si estas líneas son ortogonales entre sí debemos calcular su producto punto:

$$\begin{aligned}\chi^\mu \psi_\mu = \chi_\mu \psi^\mu &= \eta_{\mu\nu}\chi^\mu \psi^\nu \\ &= \alpha \cosh\lambda \sinh\lambda - \alpha \sinh\lambda \cosh\lambda \\ &= 0\end{aligned}$$

□

2.2.

Calculemos v:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha \sinh\lambda}{\alpha \cosh\lambda} = \tanh\lambda$$

Calculemos γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\lambda}} = \cosh\lambda$$

Entonces:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} = \frac{\mathrm{d}t}{\cosh\lambda}$$

Y por la conservación de $\mathrm{d}s^2$ tenemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 &= \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 \\ \mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}t\left(1 - \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}t\left(1 - \cancelto{\tanh^2\lambda}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}t\left[1 - \tanh^2\lambda\right]^{\frac{1}{2}} \\ \mathrm{d}\tau &= \frac{\mathrm{d}t}{\cosh\lambda}\end{aligned}$$

2.3.

Dados χ^μ y ψ^μ del inciso 1, ahora podemos hallar los vectores normales $\hat{e}_\alpha$ y $\hat{e}_\lambda$ normalizando los hallados anteriormente.

Con α constante:

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\chi^\mu \chi_\mu}}\chi^\mu \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta_{\mu\nu}\chi^\mu \chi^\nu}}\chi^\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\chi^\mu\chi^\nu &= \alpha^2(\cosh^2\lambda - \sinh^2\lambda) \\
&= \alpha^2
\end{aligned}
$$

$$
\hat{e}^\mu_\alpha = \frac{\chi^\mu}{\alpha}
$$

Con λ constante:

$$
\hat{e}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\eta_{\mu\nu}\psi^\mu\psi^\nu}}\psi^\mu
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\psi^\mu\psi^\nu &= \sinh^2\lambda - \cosh^2\lambda \\
&= -1
\end{aligned}
$$

$$
\hat{e}^\mu_\lambda = -i\psi^\mu
$$

Ahora hallemos en términos de los vectores base $\hat{e}_t = (1,0)$ y $\hat{e}_x = (0,-1)$ la nueva base:

$$
\begin{cases}
\hat{e}^\mu_\alpha = \cosh\lambda \hat{e}^\mu_t - \sinh\lambda \hat{e}^\mu_x \\
\hat{e}^\mu_\lambda = i\sinh\lambda \hat{e}^\mu_t - i\cosh\lambda \hat{e}^\mu_x
\end{cases}
$$

Es decir:

$$
\begin{pmatrix} \hat{e}^\mu_\alpha \\ \hat{e}^\mu_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda \\ i\sinh\lambda & i\cosh\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}^\mu_t \\ \hat{e}^\mu_x \end{pmatrix}
$$

La matriz de transformación es:

$$
T = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & -\sinh\lambda \\ i\sinh\lambda & -i\cosh\lambda \end{pmatrix}
$$

Y

$$T^T = \begin{pmatrix} \cosh\lambda & i\sinh\lambda \\ -\sinh\lambda & -i\cosh\lambda \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$TT^T = \begin{pmatrix} 1 & 2i\sinh\lambda\cosh\lambda \\ 2i\sinh\lambda\cosh\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\sinh 2\lambda \\ i\sinh 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

No es ortogonal.

2.4.

Podemos hallar las geodésicas a partir de:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau^2 &= -\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \\ &= \frac{\mathrm{d}t^2}{\cosh^2\lambda} \end{aligned}$$

Tambien buscamos hallar:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}\frac{dx^\gamma}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

Para esto haremos uso de las definiciones de cuadriaceleración y cuadrivelocidad, estos vectores son calculados en el siguiente inciso así que aquí únicamente las dejaré enunciadas:

$$\alpha^\mu(\tau) + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}U^\gamma U^\alpha = 0$$

2.5.

Tenemos el cuadrivector posición (que en este caso es bidimencional):

$$x^\mu = (ct, x, 0, 0) \qquad = (c\alpha\sinh\lambda, \alpha\cosh\lambda, 0, 0)$$

Ahora hallemos lo solicitado
Cuadrivelocidad

$$\begin{aligned} U^\mu(\tau) &= \frac{\mathrm{d}x^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \cosh\lambda\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \\ &= \cosh\lambda(1, v, 0, 0) \\ &= \cosh\lambda(1, \tanh\lambda, 0, 0) \end{aligned}$$

Cuadriaceleración

$$\begin{aligned}\alpha^{\mu}(\tau) &= \frac{\mathrm{d}U^{\mu}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\\ &= \cosh\lambda\left(0, \frac{\mathrm{d}\tanh\frac{\tau}{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}, 0, 0\right)\\ &= \cosh\lambda\left(0, \frac{1}{\alpha\cosh^2\frac{\lambda}{\alpha}}, 0, 0\right)\end{aligned}$$

Además, vemos que t y x cumplen con la ecuación de una hiperbola:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{t^2}{\alpha^2} = 1$$

Esto es fácil de demostrar, sustituyendo las definiciones de x y t:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{t^2}{\alpha^2} &= \frac{\alpha^2\cosh^2\lambda}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2\sinh^2\lambda}{\alpha^2}\\ &= \cosh^2\lambda - \sinh^2\lambda\\ &= 1\end{aligned}$$

□

2.6.

El la trayectoria descrita por el observador **O** sea una hiperbola se puede utilizar para hacer una relación al movimiento de partículas en el espacio sometidas a campos gravitacionales. Pero el que la matriz de transformación entre este sistema y los vectores de la base no sea ortogonal supondría dificultades de cálculo.
Cuando se tenga el caso específico en el que la trayectoria descrita coincida con el sistema, puede ser factible usar estos nuevos vectores base.

3. Problema 3

3.1.

Tenemos:

$$S(x^{\mu}) = \int \mathrm{d}\sigma\left(-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}} - \frac{e}{c}A_{\mu}(x)\dot{x}^{\mu}\right)$$

Reparametrizando la curva a un parámetro ω, y hallando una relación entre los parámetros $\sigma = \sigma(\omega)$ tenemos que usando la regla de la cadena:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega$$

Y haciendo la regla de la cadena en la expresión de S tenemos:

$$\begin{aligned}
S(x^\mu) &= \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega\left(-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\sigma}\right)^2} - \frac{e}{c}A_\mu(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\sigma}\right)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega\left(-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\omega}}\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\sigma}\right) - \frac{e}{c}A_\mu(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\sigma}\right)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\omega\left(-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\omega}} - \frac{e}{c}A_\mu(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\right)\\
&= \int \mathrm{d}\omega\left(-mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\omega}} - \frac{e}{c}A_\mu(x)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\omega}\right)
\end{aligned}$$

□

3.2.

Sabemos que la siguiente acción:

$$S(x^\mu) = \int L\mathrm{d}\sigma$$

Se minimiza haciendo pequeñas variaciones, y dejando como resultado las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{1}$$

Ahora, en nuestro caso:

$$L = -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} - \frac{e}{c}A_\mu(x)\dot{x}^\mu$$

Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= -\frac{mc}{2\cancelto{c}{\sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}}}\left[2\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha}\right] - \frac{e}{c}A_\mu\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha} \\
&= -m\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\delta^\nu_\alpha - \frac{e}{c}A_\mu\delta^\mu_\alpha \\
&= -m\dot{x}_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= -m\ddot{x}_\alpha - \frac{e}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma} \\
&= -m\ddot{x}_\alpha - \frac{e}{c}\partial_\mu A_\alpha\dot{x}^\mu
\end{aligned}
$$

Y:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -\frac{e}{c}\partial_\alpha A_\mu\dot{x}^\mu$$

Sustituyendo en (1):

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \\
&= -m\ddot{x}_\alpha - \frac{e}{c}\partial_\mu A_\alpha\dot{x}^\mu + \frac{e}{c}\partial_\alpha A_\mu\dot{x}^\mu \\
m\ddot{x}_\alpha &= \frac{e}{c}\dot{x}^\mu\left(\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Y ahora podemos calcular con el tensor electromagnético $F_{\alpha\mu} = \partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha$ [1].

$$m\ddot{x}_\alpha = \frac{e}{c}\dot{x}^\mu F_{\alpha\mu}$$

Y por tanto:

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{e}{mc}F_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu$$

Comentario: Es interesante como el tensor electromagnético aparece de forma natural en la solución a la ecuación de movimiento, ya que este tensor está directamente relacionado con los campos eléctrico y magnético:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Vemos que al hallar las componentes espaciales de $m\ddot{x}_i$ de la fuerza y tomar $c = 1$ tendremos la formulación clásica de fuerza de Lorentz para un electrón en movimiento:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -eE_x + 0 - eB_z v_y + eB_y v_z \\
m\ddot{x}_2 &= -eE_y + eB_z v_x + 0 - eB_x v_z \\
m\ddot{x}_3 &= -eE_z - eB_y v_x + eB_x v_y + 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -e\vec{E} - e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Referencias

[1] "Electromagnetic tensor - wikipedia." `https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_tensor`. (Accessed on 03/18/2022).