# Examen parcial 2

## Problemas 10.6 y 14.2

Jorge Alejandro Rodríguez Aldana

April 3, 2022

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas - Universidad de San Carlos de Guatemala

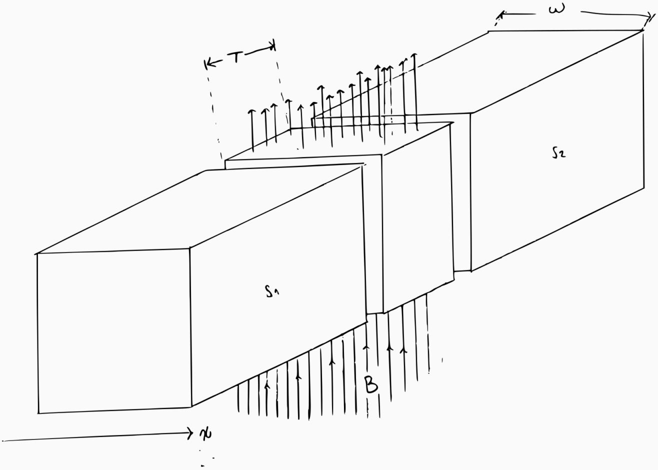
# Problema 10.6

# Problema 10.6

**Efecto de difracción por una unión de Josephson.** Considere una unión de una sección transversal rectangular con un campo magnético $B$ aplicado en el plano de la unión, normal a un borde con ancho $\omega$. Digamos que el espesor de la unión es $T$. Asumamos por conveniencia que la diferencia de fase de estos dos superconductores es $\frac{\pi}{2}$ cuando $B = 0$. Muestre que la corriente $DC$ en la presencia de campo magnético es:

$$J \approx J_0 \frac{\sin \omega TBe/\hbar c}{\omega TBe/\hbar c} \tag{1}$$

# Problema 10.6



## Solución - Problema 10.6

Calculamos el flujo de campo magnético por un pequeño rectángulo de lados $T$ y $x$. Este es:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^x \int_0^T B \mathrm{d}x \mathrm{d}T \\ &= xTB \end{aligned} \tag{2}$$

# Solución - Problema 10.6

Sabemos que:

$$J = J_o \sin(\delta)$$
$$\mathrm{d}J = J_o \cos(\delta)\mathrm{d}\delta$$

con $\delta = \frac{e\Phi}{\hbar c} = \frac{exTB}{\hbar c}$

y $\mathrm{d}\delta = \frac{eTB}{\hbar c}\mathrm{d}x$

# Solución - Problema 10.6

Ahora, hacemos la siguiente aproximación:

$$\frac{exTB}{\hbar c} = \delta$$
$$\frac{eTB}{\hbar c} = \frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\omega}$$

# Solución - Problema 10.6

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}J &\approx J_0 \cos\left(\frac{xeTB}{\hbar c}\right)\frac{1}{\omega}\mathrm{d}x \\
J &\approx \int_0^{\omega} \cos\left(\frac{xeTB}{\hbar c}\right)\frac{1}{\omega}\mathrm{d}x \\
J &\approx J_0 \frac{\sin \omega TBe/\hbar c}{\omega TBe/\hbar c}
\end{aligned}
$$

# Problema 14.2

# Problema 14.2

**Plasmones de interferencia.** Consideramos un plano $z = 0$ entre un metal 1 a $z > 0$ y un metal 2 a $z < 0$. El metal 1 tiene una frecuencia de plasmón $\omega_{p1}$; el metal 2 de $\omega_{p2}$. El dieléctrico entre esos dos metales es de gases de electrones libres. Muestre que los plasmones de superficie asociados con la interfaz tienen una frecuencia de:

$$\omega = \left[\frac{1}{2}\left(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2\right)\right]^{1/2}$$

# Solución - Problema 14.2

Partimos de las siguientes ecuaciones del libro:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{10}$$

$$\omega_s^2 = \frac{1}{2}\omega_p^2 \tag{71}$$

Con $\omega_s$ la frecuencia de una superficie de un plasma semi infinito en el lado positivo de un plano $z = 0$.

**Proposición:**

$$\epsilon_1(\omega) = -1$$

En la superficie de plasma.

**Demostración:**

Partiendo de las ecuaciones anteriores, en la superficie $\omega = \omega_s$.

$$\epsilon_n(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pn}^2}{\omega_s^2} = 1 - \frac{\omega_{pn}^2}{\frac{1}{2}\omega_{pn}^2} = -1$$

$\square$

Análogamente, para la frecuencia en la superficie de un plasma semi infinito en el lado negativo de un plano $z = 0$:

$$\epsilon_2(\omega) = 1$$

# Solución - Problema 14.2

Entonces, partiendo de esto tenemos:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1(\omega) &= -\epsilon_2(\omega) \\
1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} &= -1 + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} \\
2 &= \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} \\
\omega^2 &= \frac{1}{2}\left(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2\right) \\
\omega &= \left[\frac{1}{2}\left(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2\right)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$\square$