
EXAMEN FINAL

Tema 1

Si $\zeta^5 = 1$, encuentre el valor no indefinido de:

$$\frac{\zeta}{1 - \zeta^2} + \frac{\zeta^2}{1 - \zeta^4} + \frac{\zeta^3}{1 - \zeta} + \frac{\zeta^4}{1 - \zeta^3}$$

Escriba una condición para evitar el caso indefinido.

Tema 2

Desarrolle las series de Laurent de las siguientes funciones en el dominio dado:

$$\begin{aligned} a) f(z) &= \frac{e^z}{z-1}; & 0 < |z-1| \\ b) g(z) &= \frac{1}{z(z-3)}; & 0 < |z| < 3 \\ c) h(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-2)}; & 1 < |z| < 2 \end{aligned}$$

Tema 3

Sea:

$$f(z) = \frac{z^3 - 4z + 1}{(z^2 + 5)(z^3 - 3)}$$

Y $\gamma(t) = Re^{it}$ con $(0 \leq t \leq \pi)$, muestre que:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R (R^3 + 4R + 1)}{(R^2 - 5)(R^3 - 3)}$$

Luego, en términos de los polos z_n , calcule el valor de:

$$\int_{|z|=2} f(z) dz$$

Tema 4

Sea $f(z) = \frac{1}{g(z)^2}$ donde $g(z)$ tiene un cero de orden 1 en $z = z_0$. Demuestre que:

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{-g''(z_0)}{[g'(z_0)]^3}$$