Presentación 2

Relatividad General

Jorge Alejandro Rodríguez Aldana

15 de mayo de 2022

Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de San Carlos de Guatemala

Problema 1

Problema 1.1. - Enunciado

Enunciado: Utilizando la ecuación de continuidad, la primera ecuación de Friedmann y la ecuación de estado, encontrar la dependencia temporal del factor de escala $a(t)$, estudiar la solución $a(t)$ correspondiente a $w = 0$, $w = 1/3$ y $w = -1/3$ en el caso $k = 0$. Explicar qué tipo de universo corresponde a cada caso.

Problema 1.1. - Solución

Cada valor de w correspone a:

$$
\begin{aligned}
w = 0 &\quad \text{Universo dominado por materia.} \\
w = 1/3 &\quad \text{Universo dominado por radiación.} \\
w = -1/3 &\quad \text{Universo dominado por curvatura.} \\
w = -1 &\quad \text{Universo dominado por vacío.}
\end{aligned}
$$

Problema 1.1. - Solución

Partiendo de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\rho} = -3H\left(\rho + P\right) \tag{1.1}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{1.2}$$

$$P = w\rho \tag{1.3}$$

Llegamos a:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)} \tag{1.4}$$

Con t_0 el tiempo presente y $\rho(t_0) = \rho_0$ y $a(t_0) = a_0$.

Problema 1.1. - Solución

De la ecuación (1.4) podemos hacer algunos análisis para los distintos valores de w.

Vemos que en $w = 0$ la expansión del universo causa que la densidad de materia decrezca con un factor de $1/a^3$. En cambio, en un universo dominado por curvatura $(w = -1/3)$ el factor decrece a $1/a^2$.

Pero en el caso de un universo dominado por radiación $(w = 1/3)$ el factor es un exponente mayor, es decir $1/a^4$, esto es causado porque la densidad de radiación no solo decrece en la expansión, sino que la radiación sufre de corrimiento al rojo.

Problema 1.1. - Solución

Ahora partiendo de (1.4), $k = 0$ y de:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \tag{1.5}$$

Resolvemos la ecuación diferencial para $a(t)$:

$$a(t) = a_0 \left[\frac{3\,(1+w)}{2}\left(\frac{8\pi G\rho_0}{3c^2}\right)^{1/2}(t - t_0) + 1\right]^{\frac{2}{3(1+w)}} \tag{1.6}$$

Problema 1.2. - Enunciado

Encontrar la relación entre la solución de $H(t_0) = H_0$ y la edad del universo Δt de acuerdo con los distintos valores de w.

Problema 1.2. - Solución

De la ecuación (1.5) tenemos que $H(t_0)^2 = H_0^2$ está dada por:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 - \frac{kc^2}{a_0^2}$$

Que cuando $k = 0$:

$$H_0 = \left(\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0\right)^{1/2} \tag{1.7}$$

Problema 1.2. - Solución

Ahora, sabemos que la edad del universo Δt está dada por la diferencia de tiempo entre el Big Bang y la actualidad: $\Delta t = t_0 - t_{BB}$.

Usando 1.6 tenemos:

$$
\begin{aligned}
a(t_{BB}) &= a_0 \left[\frac{3\,(1+w)}{2} \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} \right)^{1/2} (t_{BB} - t_0) + 1 \right]^{\frac{2}{3(1+w)}} \\
&= a_0 \left[\frac{3\,(1+w)}{2} H_0 \,(-\Delta t) + 1 \right]^{\frac{2}{3(1+w)}}
\end{aligned}
$$

Además: $a(t_{BB}) = 0$, de esto:

$$
\Delta t = \frac{2H_0^{-1}}{3(1+w)} \tag{1.8}
$$

Problema 1.2. - Solución

Entonces para los distintos valores de w tenemos:

w	Δt
0	$\frac{2}{3}H_0^{-1}$
$1/3$	$\frac{1}{2}H_0^{-1}$
$-1/3$	H_0^{-1}

De esto podemos concluir que la edad del universo es distinta en cada tipo de universo. Y si el universo ha estado en distintos tiempos en distintas de estas faces, la edad del universo es una combinación lineal de estas soluciones.

Problema 1.3. - Enunciado

Las soluciones de los escenarios anteriores incluyen un Big Bang, donde $a(t_{BB}) = 0$. ¿Es esto una característica genérica de las ecuaciones de Friedmann con materia y curvatura arbitraria? Obtenga una cota para t_{BB}.

Problema 1.3. - Solución

Para hallar la cota necesitaremos establecer una condición: *La condición fuerte de energía:* $\rho + 3P \geq 0$

Podemos reescribir:

$$P \geq -\frac{1}{3}\rho \tag{1.9}$$

Problema 1.3. - Solución

Ahora de (1.3) y (1.9) tenemos:

$$w\rho = P \geq -\frac{1}{3}\rho$$
$$w \geq -\frac{1}{3}$$
$$1 + w \geq 1 - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{1+w} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

De esto y (1.8) tenemos:

$$\Delta t = t_0 - t_{BB} = \frac{2H_0^{-1}}{3(1+w)} \leq \frac{2H_0^{-1}}{3(1-\frac{1}{3})}$$

Problema 1.3. - Solución

Resolviendo para t_{BB} tenemos:

$$t_{BB} \geq t_0 - H_0^{-1} \tag{1.10}$$

De esto podemos concluir que el Big Bang es una característica de las ecuaciones de Friedmann solo si se cumple la condición fuerte de energía.

Problema 1.4. - Enunciado

Estudiar los escenarios del factor de escala *FRW* para un universo dominado por materia con curvatura $(k = 0,\ k = -1,\ k = 1)$.

Problema 1.4. - Solución

Este problema se reduce a estudiar las soluciones a la ecuación diferencial (1.5), pero esta vez considerando k no necesariamente igual a cero y $w = 0$:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{kc^2}{a^2}$$

Sin embargo, encontrar una solución algebraica de esta ecuación diferencial es difícil incluso para una calculadora[1].

[1] Probado con `https://www.calculadora-de-integrales.com/`

Problema 1.4. - Solución

Por esto, solo estudiaremos los posibles escenarios, reescribiendo la expresión:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 \; a_0^3 \; a^{-1} - kc^2$$

Vemos que la variación del factor de escala decrece conforme su valor se aumenta, por lo que si hacemos tender a a infinito, el valor de $\dot{a}$ se vuelve constante:

$$\lim_{a\to\infty} \dot{a}^2 = -kc^2$$

Problema 1.4. - Solución

Aquí vemos que para $k = 0$, a deja de variar ($\dot{a} = 0$) en $a \to \infty$. Sin embargo, vemos que para valores k negativos, como lo es $k = -1$, a crecerá indefinidamente.

El último caso, k positivo, específicamente $k = 1$ resulta en una variación de a imaginaria $\dot{a} = ic$, lo cual es físicamente imposible, por lo que podemos determinar que el valor de a está acotado. Podemos determinar la cota de la siguiente manera:

$$\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 \; a_0^3 \; a^{-1} - kc^2 \geq 0$$

$$a \leq \frac{8\pi G}{3kc^4}\rho_0 \; a_0^3$$

Problema 2

Problema 2.1. - Enunciado

Demuestre que en presencia de una constante cosmológica y otra materia, la ecuación de Friedmann se convierte en:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \tag{2.1}$$

Problema 2.1. - Solución

Necesitaremos partir algunas ecuaciones:

Recoremos la métrica:

$$g_{tt} = 1 \tag{2.2}$$

$$g_{rr} = \frac{a^2}{1 - kr} \tag{2.3}$$

$$g_{\theta\theta} = a^2 r^2 \tag{2.4}$$

$$g_{\phi\phi} = a^2 r^2 \sin^2\theta \tag{2.5}$$

Problema 2.1. - Solución

También el tensor de Ricci y el escalar de Ricci:

$$R_{tt} = -\frac{a\ddot{a}}{a} \tag{2.6}$$

$$R_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a^2}\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) \tag{2.7}$$

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] \tag{2.8}$$

Problema 2.1. - Solución

El tensor de energía e impulso

$$T_{tt} = \rho \tag{2.9}$$

$$T_{ii} = -Pg_{ii} \tag{2.10}$$

Y el valor de κ:

$$\kappa = 8\pi G \tag{2.11}$$

Finalmente la ecuación de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

Problema 2.1. - Solución

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (2.2) a la (2.11) en (2.12) y tomando la componente tt tenemos:

$$
\begin{aligned}
R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R - \Lambda g_{tt} &= \kappa T_{tt} \\
-3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right) - \Lambda &= 8\pi G\rho \\
\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}
\end{aligned}
$$

Con $c = 1$.

$\square$

Problema 2.2. - Enunciado

Estudie y describa la geometría del espacio-tiempo para el caso $\Lambda > 0$ en un universo sin materia.

Problema 2.2. - Solución

Sabemos que en un caso sin materia $\rho = 0$. De nuevo el problema se reduce a encontrar las soluciones a la ecuación diferencial (2.1) tomando $\rho = 0$.

Esto es:

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3}a^2 - k$$

Esta si tiene una solución algebráica, pero es dificil obtener una expresión explicita para a a partir de ella:

$$\frac{\ln\left|\sqrt{\frac{\Lambda}{3}a^2 - k} + \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} a\right|}{\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}} = t_0 - t$$

Problema 2.2. - Solución

Aunque la solución explicita de a es difícil de obtener, aún se pueden concluir algunas cosas, como que la dependencia temporal de a es exponencial, y en el caso $k = 0$ tenemos:

$$a = \left(\frac{3}{4\Lambda}\right)^{1/2} \exp\left[\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}(t_0 - t)\right]$$

Problema 2.3. - Enunciado

Describa el caso de universo plano ($k = 0$) dominado por materia, con constante cosmológica $\Lambda > 0$.

Problema 2.3. - Solución

De nuevo, esto se reduce a encontrar las soluciones a la ecuación diferencial (2.1) tomando $k = 0$ y $w = 0$.

Esto es:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 a_0^3 a^{-1} + \frac{\Lambda}{3}a^2$$

Cuya solución es:

$$\left.\frac{2\ln\left[\left(H_0^2 a_0^3 a^3 + \frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} + H_0 a_0^{3/2} a^{3/2}\right]}{3H_0 a_0^{3/2}}\right|_{a_0}^{a} = t - t_0$$

Con H_0 dado por (1.7).

Problema 2.3. - Solución

De nuevo nos encontramos en una dificultad para despejar a. Sin embargo, es fácil darse cuenta que la solución de a de nuevo será una exponencial respecto al tiempo. Pero esta vez el exponente tiene un factor de $3/2$ y el sistema depende de la constante de Hubble actual H_0.