Universidad de San Carlos de Guatemala
Análisis de Variable Compleja 1
Catedrático: Damián Ochoa
Auxiliar: Jorge Alejandro Rodríguez
marzo 2022

ECFM
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

# Tarea 2

**Instrucciones** : Resolver los siguientes problemas de manera individual en LaTeX. Se deberá entregar en Classroom en la fecha indicada, sin prórrogas. Cada uno de los problemas tiene valor de un punto.

**Problema 1.** Demuestre o encuentre un contraejemplo si es falso:
Si $\lim_{z\to z_o} f(z) = a$, $h$ está definida en la imagen de $f$ y $\lim_{w\to a} h(w) = c$, entonces $\lim_{z\to z_o} h(f(z)) = c$.

**Solución.** El enunciado es falso.

**Demostración.** Tomemos cualquier función $f$, tal que el límite $\lim_{z\to z_o} f(z)$ exista y sea igual a $a$.
Ahora planteamos una función $h$ tal que:

$$h(w) = \begin{cases} c & si\ w \neq a \\ \gamma & si\ w = a \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{w\to a} h(w) &= c \\ h(a) &= \gamma \end{aligned}$$

El límite existe, aunque es distinto de la función valuada en ese punto.
Claramente:

$$\lim_{z\to z_o} h(f(z)) = h(a) = \gamma$$

Pero:

$$\lim_{w\to a} h(w) = c$$

$\square$

**Problema 2.** a) Demuestre que la intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto.

b) Demuestre que la unión de cualquier colección de conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$ es un conjunto abierto.

c) Proporcione un ejemplo que demuestre que la condición de que la colección sea finita es necesaria en el inciso anterior.

**Solución.**

**a)** Para este problema definiremos a

$$\mathbf{N} = \bigcap_{i=0}^{n} \mathbf{C}_i$$

al conjunto que resulta de la intersección de $n < \infty$ conjuntos abiertos $\mathbf{C}_i \in \mathbb{C}$.

Tenemos que para todo $x \in \mathbf{N}$, también $x \in \mathbf{C}_i \ \ \forall\ i \in \mathbb{Z}\ [0, n]$.

Entonces para un $x$ dado, existe una delta-vecindad $0 < \delta_i \in \mathbb{R}$ para cada $\mathbf{C}_i$.

Puesto que $n$ es finito, si $\{d_i\}_{i=0}^{n}$ es el conjunto de los $\delta_i > 0$ para algún $x \in \mathbf{N}$, entonces, es posible hallar

$$\delta = \text{mín}\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_n\}$$

una delta-vecindad al rededor de $x$ que existe en $\mathbf{N}$. Y por tanto, $\mathbf{N}$ es abierto.

**b)** Para este problema definiremos a

$$\mathbf{U} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbf{C}_i$$

al conjunto que resulta de la unión de $n$ conjuntos abiertos (pueden ser infinitos) $\mathbf{C}_i \in \mathbb{C}$.

Asumamos por contradicción, que $\mathbf{U}$ no es abierto. Entonces existe algún $x \in \mathbf{U}$ para el que no existe una delta-vecindad. Pero si $x \in \mathbf{N}$, entonces $x \in \mathbf{C}_i$ para al menos algún $i$. Pero sabemos que cada $\mathbf{C}_i$ es abierto, por tanto, en $\mathbf{C}_i$ existe una delta-vecindad para $x$, y por tanto, esta delta-vecindad también pertenece a la unión $\mathbf{U}$ ($\rightarrow\leftarrow$).

**c)** Consideremos el conjunto:

$$\mathbf{C}_p := \{z | z < e^{i\theta - p}\}$$

Por tanto $|z| < e^{-p}$

Ahora, para la intersección:

$$\bigcap_{r=0}^{\infty} \mathbf{C}_r = \{0\}$$

Y el conjunto que solo contiene al cero, claramente no es un conjunto abierto.

**Problema 3.** Demuestre que $f(z) = |z|$ no es entera.

**Solución.** Si encontramos algún punto $p \in \mathbb{C}$ en el que $f(p)$ no es holomorfa (no cumpla Cauchy-Riemann) entonces la función no es entera.

Veamos que para $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} f(z) &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= U + V \end{aligned}$$

Por tanto:

$$U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$V(x, y) = 0$$

Ahora para $z = p|Re(p) \neq 0$, calculemos $U_x$ y $V_y$

$$U_x = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(2x) = \frac{x}{|z|} \neq 0 = V_y$$

Por tanto no se cumple Cauchy-Riemann en $p$ y no es entera (también funcionaba calculando $U_y$ y $-V_x$ para un punto $z = q|Im(q) \neq 0$).

$\square$

**Problema 4.** Se define $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ como:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

¿Las ecuaciones de Cauchy Riemann son equivalentes a que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$?

**Solución.** Para evitar conflictos, demostremos ida y vuelta de un si y solo si.

**Ida**

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Por la derivada de la suma} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Sabemos que} - i = 1/i \\
&= \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[u_x - v_y + i(u_y + v_x)\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Multiplicando por 2} \\
0 &= u_x - v_y + i(u_y + v_x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Separando partes real e imaginaria} \\
0 &= u_x - v_y \Leftrightarrow u_x = v_y \\
0 &= u_y + v_x \Leftrightarrow u_y = -v_x
\end{aligned}$$

**Vuelta** Si C.R. se cumple, entonces $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ con $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Por la derivada de la suma} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Sabemos que} - i = 1/i \\
&= \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[u_x - v_y + i(u_y + v_x)\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Si se cumple C.R.} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

**Problema 5.** Suponga que $f$ es holomorfa en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y que Re $(f) = 3$ para todo $z$ en $D$. Demuestre que $f$ es constante en $D$.

**Solución.** Si es holomorfa en el disco $D$, cumple Cauchy-Riemann. Ademas, sabemos que $f(z) = u + iv$ dentro del disco, cumple $u = 3$. De esto tenemos:

$$u(x,y) = 3 \qquad \begin{aligned} u_x &= 0 \\ u_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Por C.R.} \qquad \begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $v(x,y)$ es independiente de $x$ y de $y$. $\Rightarrow$ Es constante: $v(x,y) = cte.$

De esto, dentro del disco:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = 3 + ib \text{ con } b \text{ una constante.}$$

$\square$

**Problema 6.** Encuentre las regiones en las cuales cada una de las siguientes funciones son holomorfas:

a) $\sqrt{z^3 - 1}$.

b) $\sin \sqrt{z}$.

**Solución.** Comenzemos definiendo la función $S(z) = \sqrt{z}$.
Sabemos que $S(z)$ es holomorfa en todo el espacio a excepción de la recta real negativa.
Es decir:

$$\begin{gathered} S(-x) \text{ no es holomorfa para todo } x \in \mathbb{R}^+ \\ \text{Pero si es holomorfa en cualquier otro punto} \end{gathered} \tag{1}$$

**a)** Tenemos:

$$f(z) = \sqrt{z^3 - 1} = S(z^3 - 1)$$

Basta hallar los valores de $z$ que hagan que $S(z^3 - 1) = S(-x)$ y por (1), serán los únicos puntos en los que $x$ no es holomorfa. Esto es:

$$\begin{aligned} z^3 - 1 &= -x & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ z^3 &= 1 - x & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ z &= \sqrt[3]{1 - x} & \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Por tanto, $\sqrt{z^3 - 1}$ es holomorfa en todo el espacio excepto en $z = \sqrt[3]{1 - x} \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$.

**b)**

**Proposición.** *La función que resulta de la composición de funciones, es holomorfa en la intersección de abiertos en los que estas lo son.*

**Demostración.** Sean $f(w) = u(p, q) + iv(p, q)$ y $g(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ dos funciones complejas holomorfas en un abierto. Entonces tenemos:
En el abierto en el que $f$ es holomorfa:

$$u_p = v_q \qquad\qquad u_q = -v_p \tag{1}$$

En el abierto en el que $g$ es holomorfa:

$$p_x = q_y \qquad\qquad p_y = -q_x \tag{2}$$

Para la composición:

$$f(g(z)) = u(p(x, y), q(x, y)) + iv(p(x, y), q(x, y))$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_p p_x + u_q q_x \\ v_y &= v_p p_y + v_q q_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= u_p p_y + u_q q_y \\ v_x &= v_p p_x + v_q q_x \end{aligned}$$

Por tanto, en el abierto en el que tanto $f$ como $g$ sean holomorfas, tenemos:

$$u_x = v_y \qquad\qquad u_y = -v_x$$

Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función que resulta de la composición en el abierto en el que ambas funciones eran holomorfas.

$\square$

**Proposición.** *La función* $\sin(z)$ *es entera.*

**Demostración.** Utilizando el problema 4 en $f(z) = \sin(z) = \sin(x + iy)$:

$$f_x = \cos(x + iy) \qquad\qquad f_y = i\cos(x + iy)$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\left(f_x - \frac{1}{i}f_y\right) = 0$$

$\square$

$\Rightarrow$

La función $f(z) = \sin\sqrt{z}$ es holomorfa en donde $\sin(z)$ y $\sqrt{z}$ lo sean, osea en todo el espacio complejo menos en la recta real negativa.

Veamos que pasa en la recta real negativa: La función $f(z) = \sin\sqrt{z}$ se transforma en $f(x) = \sin(i\sqrt{x}) = i\sinh(\sqrt{x})$ con $x \in \mathbb{R}^+$. Esta función claramente no cumple Cauchy-Riemann, ya que $Re(f) = 0$ y $Im(f) \neq cte.$

Por tanto, $f(z) = \sin\sqrt{z}$ es holomorfa en todo el espacio complejo excepto en la recta real negativa.

**Problema 7.** Demuestre que si $f(z)$ y $\overline{f(z)}$ son enteras, entonces $f$ es constante.

**Solución.** Si $f(z) = u + iv$ y $\overline{f(z)} = p + iq = u - iv$ son holomorfas (con $u, v, p, q$ dependiendientes de $x, y$), entonces cumplen Cauchy-Riemann. De esto:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y & u_y &= -v_x \\ p_x = u_x &= q_y = -v_y & p_y = u_y &= -q_x = v_x \end{aligned}$$

Por igualación tendríamos que:

$$v_y = -v_y \Leftrightarrow v_y = 0$$
$$v_y = -v_y \Leftrightarrow v_y = 0$$

Y por tanto

$$u_x = v_y = 0$$
$$u_y = v_x = 0$$

Por tanto, $u$ y $v$ deben ser independientes tanto de $x$ como de $y$.

$\Longrightarrow$

$f(z) = cte$ y $\overline{f(z)} = cte$.

□

**Problema 8.** ¿Existe una función analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que la parte real de la función es $e^x$, donde $z = x + iy$?

**Solución.** No existe función analítica que cumpla esta condición

**Demostración.** Para que sea analítica, debe cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y en este caso conocemos $u = e^x$. De esto podemos hallar:

$$v_y = u_x = e^x \tag{1}$$
$$v_x = -u_y = 0 \tag{2}$$

Y por tanto, tenemos que, para que se cumpla (1) entonces $v = ye^x + c_1$ con $c_1$ una constante. Y para que se cumpla (2) entonces $v = c_2 = cte$.

Y tenemos que $v = ye^x + c_1 \neq v = c_2$.

$\square$

**Problema 9.** ¿En qué conjunto la función $f(z) = z^z$ es holomorfa? Determine su derivada en ese conjunto.

**Solución.** Tenemos $f(x, y) = (x+iy)^{(x+iy)}$, si realizamos el siguiente cambio de variables: $\alpha(x, y) = x+iy$ entonces tenemos:

$$f(x, y) = \alpha(x, y)^{\alpha(x,y)}$$

Y ahora podemos realizar la siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha^{\alpha}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\alpha \ln \alpha}\right) \\
&= e^{\alpha \ln \alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \ln \alpha\right) \\
&= e^{\alpha \ln \alpha}\left[\ln \alpha \cancelto{1}{\frac{\partial}{\partial x}(\alpha)} + \alpha \cancelto{1/\alpha}{\frac{\partial}{\partial x}(\ln \alpha)}\right] \\
&= e^{\alpha \ln \alpha}\left(\ln \alpha + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^{\alpha}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\alpha \ln \alpha}\right) \\
&= e^{\alpha \ln \alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \ln \alpha\right) \\
&= e^{\alpha \ln \alpha}\left[\ln \alpha \cancelto{i}{\frac{\partial}{\partial y}(\alpha)} + \alpha \cancelto{i/\alpha}{\frac{\partial}{\partial y}(\ln \alpha)}\right] \\
&= e^{\alpha \ln \alpha} i\left(\ln \alpha + 1\right)
\end{aligned}$$

Por el Problema 4 sabemos que las ecuaciones de C-R son equivalentes a:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Y vemos que en este caso, esto se cumple, y dado que no hemos puesto condiciones para $x$ y $y$, entonces esta función debe ser holomorfa en todo el espacio.

Por último, por definición de derivada de $z$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \\
&= e^{\alpha \ln \alpha}\left(\ln \alpha + 1\right) \\
&= e^{z \ln z}\left(\ln z + 1\right)
\end{aligned}$$