



## PROYECTO

# ECUACIONES DE EULER EN UNA DIMENSIÓN

## 1. Introducción

Se desea resolver problemas de un flujo unidimensional de un gas compresible no viscoso, y además que no transmite calor. Para esto se recurre a realizar una simulación del fluido cuyo movimiento está restringido únicamente por las condiciones iniciales de presión, velocidad y densidad; y está sometido únicamente a la fuerza dada por la presión.

Posteriormente, los datos de la simulación son graficados para poder ser analizados. Se realizan diversas simulaciones cambiando las condiciones iniciales, y se analiza si el comportamiento observado es esperado físicamente.

## 2. Método

El código está diseñado a partir del modelo de un fluido no viscoso (es decir: un fluido sin fricción) compresible, modelado dentro de un tubo, sujeto a las siguientes ecuaciones [1]:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (1)$$

$$(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x = 0 \quad (2)$$

$$(\rho e)_t + (\rho u e + p u)_x = 0 \quad (3)$$

Donde:

$t$  : es el tiempo  
 $x$  : es la densidad  
 $u$  : es la velocidad  
 $p$  : es la presión  
 $e$  : es la energía total específica<sup>1</sup>

Y en donde (1) es la ecuación de continuidad, (2) es una de las ecuaciones de Euler en términos de la densidad de movimiento y (3) es la conservación de la energía [2].

Estas ecuaciones son implementadas en un script en C++, que realiza los cálculos necesarios ligados a estas ecuaciones y las condiciones iniciales del fluido. Genera 5 archivos de datos que proveen los valores de densidad, energía, momento, presión y velocidad, a lo largo del tubo, en bloques temporales, mostrando así la evolución temporal de cada uno de estos datos.

Posteriormente estos datos son graficados con la ayuda del software *Gnuplot* que se encarga de generar gráficas de evolución temporal.

<sup>1</sup>Es decir: la energía total por unidad de masa.

### 3. Resultados

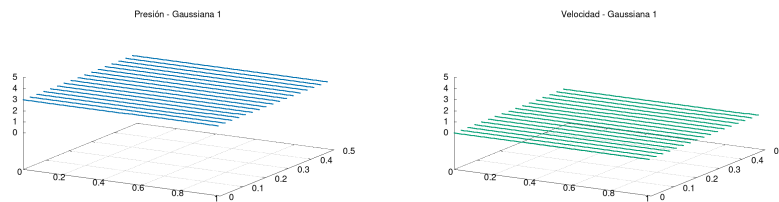
Los resultados obtenidos llevan a una cantidad enorme de gráficas, o en mi caso, a animaciones gif (que no puedo incertar en un pdf) generadas por *Gnuplot*. Pero logré condensar a 3 gráficas por simulación haciendo superficies de líneas. Sin embargo, las animaciones se encuentran disponibles en GitHub para tener una mejor visualización de estas.

**Nota 1:** En estas superficies no están todas las curvas que fueron generadas, para no saturar la gráfica.

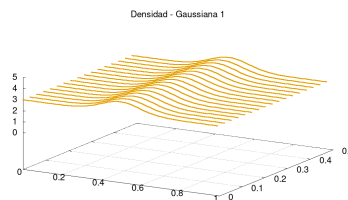
**Nota 2:** Los nombres de los ejes fueron eliminados porque interferían con la numeración de los ejes. Pero el eje vertical siempre representa la función en cuestión, el eje horizontal la posición, y el eje que va hacia adentro de la hoja representa el tiempo. La fuente de las gráficas no fue aumentada por la misma razón. Sin embargo la densidad de pixeles es suficiente para hacer un acercamiento.

#### 3.1. Gaussiana 1:

Figura 1: Gaussiana 1  
Densidad gaussiana, presión y velocidad constantes.



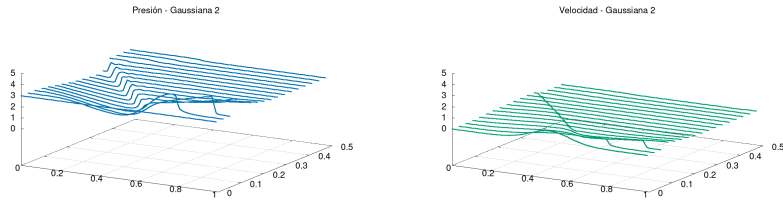
(a) Evolución temporal de la presión.    (b) Evolución temporal de la velocidad.



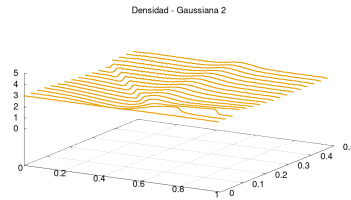
(c) Evolución temporal de la densidad.

### 3.2. Gaussiana 2:

Figura 2: Gaussiana 2  
Velocidad gaussiana, presión y densidad constantes.



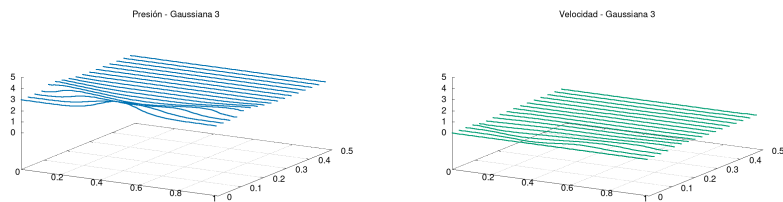
(a) Evolución temporal de la presión. (b) Evolución temporal de la velocidad.



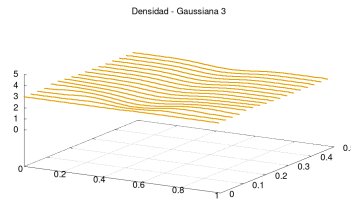
(c) Evolución temporal de la densidad.

### 3.3. Gaussiana 3:

Figura 3: Gaussiana 3  
Presión gaussiana, densidad y velocidad constantes.



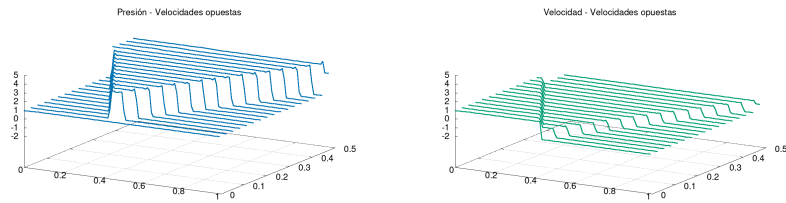
(a) Evolución temporal de la presión. (b) Evolución temporal de la velocidad.



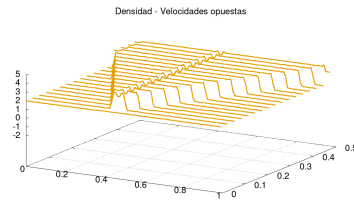
(c) Evolución temporal de la densidad.

### 3.4. Velocidades opuestas

Figura 4: Velocidades opuestas  
Velocidad con valores de  $\pm 1m/s$  centradas en 0.45.



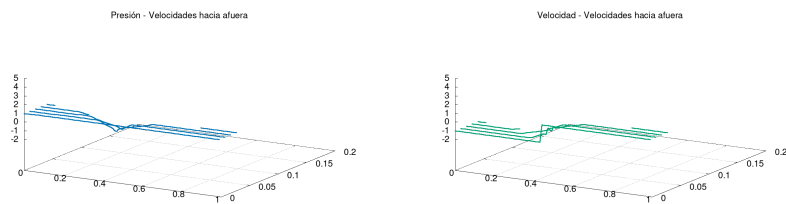
(a) Evolución temporal de la presión. (b) Evolución temporal de la velocidad.



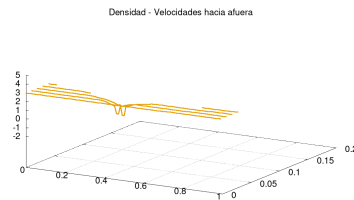
(c) Evolución temporal de la densidad.

### 3.5. Velocidades hacia afuera

Figura 5: Velocidades hacia afuera  
Velocidad con valores de  $\pm 1m/s$  centradas en 0.45.



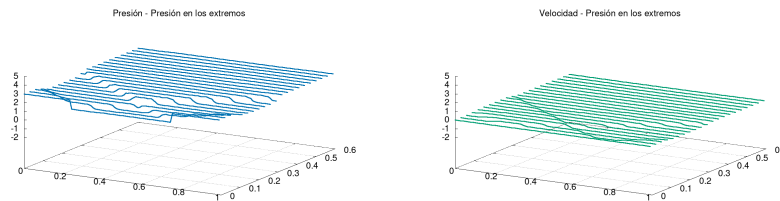
(a) Evolución temporal de la presión. (b) Evolución temporal de la velocidad.



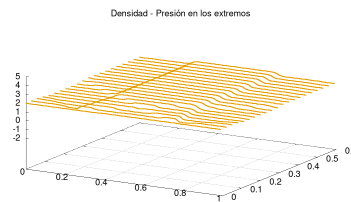
(c) Evolución temporal de la densidad.

### 3.6. Presión en los extremos

Figura 6: Presión en los extremos  
Presión de  $3Pa$  en los extremos.



(a) Evolución temporal de la presión. (b) Evolución temporal de la velocidad.



(c) Evolución temporal de la densidad.

## 4. Discusión

### 4.1. Gaussianas

Vemos que las condiciones iniciales de las gaussianas es básicamente hacer que uno de los tres parámetros tenga forma de campana de Gauss respecto a la posición (trasladada por 3 unidades en el caso de la presión y la densidad). Y el resto se dejan constantes con valores de 0, 3, 3 para la velocidad, densidad y presión respectivamente.

La evolución temporal de estas gráficas se comporta como es esperado.

En el caso de la gaussiana 1, que consistía en tener densidad gaussiana, esperábamos que el sistema permaneciera en reposo, ya que la velocidad es 0 y el gradiente de la presión es cero.

En el caso de la gaussiana 2, que tiene velocidad gaussiana, era un poco menos intuitivo, pero ya que solo tiene velocidad positiva, esperábamos que el gas se trasladara en dirección positiva, disminuyendo la presión a la izquierda y aumentándola a la derecha, de igual manera con la densidad, y este es el comportamiento observado.

En el caso de la gaussiana 3, que consistía en tener presión gaussiana, esperábamos ver como la presión empujaba hacia afuera el gas, y esto es justo lo que observamos.

### 4.2. Velocidades opuestas

La idea de estos parámetros iniciales era probar que pasaba en el caso de una especie de choque "si dos olas de gas se acercan una a la otra en direcciones opuestas. No hice el cambio en 0.5 sino en 0.45 para observar si había algún cambio.

El comportamiento fue el esperado, de cierta manera. Ya que uno esperaba un choque y turbulencia; pero en este caso el fluido no tiene fricción por lo que las ondas solo se sumarán dejando las velocidades en cero.

En la simulación pareciera que si hay una ligera interacción con los límites, ya que al tocar el límite hay un ligero rebote.

### **4.3. Velocidades hacia afuera**

Después de hacer el caso 3.4, debía ver que pasaba haciendo lo contrario, dos olas que salen del tubo. Por poco intuitivo que parezca, y pocos datos útiles que se obtuvieron, este caso también tiene sentido físico. Ya que las olas de gas salen del tubo, y al no haber interacción con las paredes, el fluido se sale del sistema dejando densidad 0 (en este caso pasa a ser negativa por la forma en la que es el modelo) y por esto la gráfica desaparece.

### **4.4. Presión en los extremos**

La idea de este parámetro inicial fue simular el comportamiento de una caja que aplasta el fluido por los lados, de modo que hay un exceso de presión por los laterales. Sin embargo esto no salió como esperaba, ya que no hay interacción con las paredes, así que esto simplemente se comportó como la suma de dos casos de gaussiana 3.3, ligeramente alterados, ya que esto en lugar de ser una gaussiana era una grada, pero el comportamiento promedio fue el mismo.

## **5. Conclusiones**

- Los métodos computacionales son una forma eficiente de modelar la física de fluidos.
- La intuición sobre como un fluido se va a comportar, es bastante asetada (al menos en estos 6 casos).
- En un fluido que no viscoso, que no transfiere calor, es posible tener densidad no uniforme y aun así tener reposo.
- A pesar de que en teoría no hay interacción con las paredes en la simulación, en las pruebas que hice para el caso 3.4 si parece haber interacción, ya que al tocar el límite hay un ligero rebote.
- Se puede mejorar el modelo para que el fluido interactúe con las paredes; de modo que el fluido no pueda escapar y por tanto evitar casos como el de la sección [3.5].

## **Referencias**

- [1] P. L. Roe, “Characteristic-based schemes for the euler equations,” *Annual review of fluid mechanics*, vol. 18, no. 1, pp. 337–365, 1986.
- [2] E. Pazos, “Ecuaciones de euler en una dimensión física atmosférica, proyecto.” Notas de clase, 2021.