Mecánica Cuántica 2

Jorge Alejandro Rodriguez Aldana

26 de julio de 2021

Capítulo 1

Simetrías y reglas de conservación

1.1.

1.2.

1.3. Grupo no-conmutativo: las rotaciones y el momentum angular

Aplicar propiedades generales a problemas específicos, pero el grupo de rotaciones no es conmutativo.
Suponer un hamiltoniano $\hat{H}$ invariante ante rotaciones:

$$\left[\hat{R}_{\vec{\mu}}(\alpha), \hat{H}\right] = 0$$
$$\left[\hat{R}_{\vec{\mu}}(\alpha), \hat{U}(t)\right] = 0$$

Tomamos una rotación de un ángulo α al rededor de z:

$$\begin{aligned}\phi'(r,\theta,\phi) &= \hat{R}_z(\alpha)\phi(r,\theta,\phi)\\ &= \phi(r,\theta,\phi+\alpha)\end{aligned}$$

Por definición de generador, el generador $\hat{L}_z$ es tal que $\hat{R}_z(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\alpha\right)$.

1.3.1. Escritura vectorial

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = \begin{cases}\hat{L}_x = \hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y = -i\hbar(y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y)\\ \hat{L}_y = \hat{z}\hat{P}_x - \hat{x}\hat{P}_z = -i\hbar(z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z)\\ \hat{L}_z = \hat{x}\hat{P}_y - \hat{x}\hat{P}_y = -i\hbar(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\end{cases}$$

1.3.2. Relaciones de conmutación

Las relaciones de conmutación de $\hat{\vec{L}}$ están dadas por:

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{1.1}$$

1.3.3. Espacio de representaciones

Un espacio invariante ante un grupo de transformaciones, se le llama espacio de representaciones del grupo. Puede ser reducible si existe una suma directa de subespacios que sean invariantes ante este mismo grupo.

Espacio de representaciones irreducibles de un grupo conmutativo

Propiedad: Todas las representaciones irreducibles son de dimensión 1.

Espacio de representaciones irreducibles de los grupos de rotación $SU(2)$ y $SO(3)$

Nos vamos a interesar en los generadores de rotaciones (operadores hermíticos y unitarios).
Propiedad: Sean $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ que verifican el álgebra de Lie del grupo de rotaciones:

$$\left[J_i, J_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \tag{1.2}$$

entonces $\hat{\vec{J}}^2$ conmuta con los elementos del álgebra de Lie.

$$\left[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_i\right] = 0 \text{ para } i = x, y, z$$

El espectro común de J_z y $\vec{J}^2$ es de la forma:

$$\vec{J}^2 \left|j, m\right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left|j, m\right\rangle \tag{1.3}$$

$$J_z \left|j, m\right\rangle = \tag{1.4}$$

Definimos los operadores escalón:

$$J_+ = J_x + iJ_y$$
$$J_- = J_x - iJ_y$$

Y notamos que $J_+^\dagger = J_-$
Las relaciones de conmutación:

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$
$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_{pm}$$
$$\left[\vec{J}^2, J_\pm\right] = 0$$

Con j fijo, los vectores $|j, m\rangle$, con $m = -j, \cdots, j$ forman una base ortonormal ($\langle j, m|j, n\rangle = \delta_{mn}$) de un espacio vectorial D_j de dimensión $j+1$ y el espacio D_j es un espacio de representaciones irreducibles del grupo de rotación.

Todo espacio de representaciones del grupo de rotaciones puede descomponerse como la suma de espacios irreducibles
$$H = D_{j1} \oplus D_{j2} \oplus \cdots$$
(con índices que pueden repetirse).

Nota: Los 3 generadores J_x, J_y, J_z forman una base del álgebra de Lie llamada álgebra de Lie $SO(3)$ o $SU(2)$. Los generadores J_x, J_y, J_z forman otra base de la misma álgebra más interesante. A esta base se le llama descomposición de Cartan de $SU(2)$, $SO(3)$ complejificada.
Tenemos que:

$$\begin{aligned} J_z\left(J_\pm \left|a,m\right\rangle\right) &= \left(\left[J_z, J_\pm\right] + J_\pm J_z\right)\left|a,m\right\rangle \\ &= \pm\hbar J_\pm \left|a,m\right\rangle + \hbar m J_\pm \left|a,m\right\rangle \\ &= \hbar(\pm 1 + m) J_\pm \left|a,m\right\rangle \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\vec{J}^2\left(J_\pm \left|a,m\right\rangle\right) = J_\pm \vec{J}^2 \left|a,m\right\rangle = \hbar^2 a J_\pm \left|a,m\right\rangle$$

Nota:

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) J_z^2$$

Entonces notemos que:

$$\begin{aligned} \hbar^2(a - m^2) &= \left\langle a,m\right| \vec{J}^2 - J_z^2 \left|a,m\right\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\left\langle a,m\right| \left(J_+J_- + J_-J_+\right)\left|a,m\right\rangle \\ &\geq 0 \\ a &\geq m^2 \end{aligned}$$

Existe un valor máximo de $m : m_{max}$, y por tanto un mínimo.
Esto se traduce en:

$$\begin{aligned} J_+ \left|a, m_{max}\right\rangle &= 0 \\ J_- \left|a, m_{min}\right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 &= J_z^2 + \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) \\ &= J_z^2 + J_+J_- - \hbar J_z \end{aligned}$$

Aplicamos la relación a $|a, m_{max}\rangle$ y a $|a, m_{min}\rangle$:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |a, m_{max}\rangle &= \hbar^2 a^2 |a, m_{max}\rangle \\ &= \\ &= \hbar^2 m_{max}(m_{max} + 1) |a, m_{max}\rangle \end{aligned}$$

$$a^2 = m_{max}(m_{max} + 1)$$

de igual manera $a^2 = m_{min}(m_m in - 1)$.

Dado que $J_z (J_\pm |a, m\rangle) = \hbar(\pm 1 + m)(J_\pm |a, m\rangle)$ podemos definir:

$$|a, m = m \pm 1\rangle = \frac{1}{c_\pm} J_\pm |a, m\rangle \tag{1.5}$$

podemos intuir que $m_{max} = m_{min} + n$ con $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$a^2 = m_{max}^2 + m_{max} = m_{min}^2 + m_{min} \tag{1.6}$$

De esto: $m_{min} = -\frac{n}{2}$ y por tanto $m_{max} = m_{min} + n = \frac{n}{2} = j$.
Por tanto $m = -j, -j + 1, \cdots, j - 1, j$ y tenemos $(2j + 1)$ valores posibles.
Ahora la normalización $c_\pm$, si $|j, m\rangle$ está normalizado,

$$\begin{aligned} |c_\pm|^2 \| |j, m + 1\rangle \|^2 &= \langle j, m| J_- J_+ |j, m\rangle \\ &= \hbar^2 \left(j(j + 1) - m(m + 1) \right) \end{aligned}$$

de igual manera para c_-.
Por tanto, cada espacio D_j es de dimensión $(2j + 1)$ y los operadores $J_\pm$, J_z actúan dentro de D_j al igual que J_x, J_y, J_z que se obtienen por medio de combinaciones lineales.
D_j es invariante ante rotaciones: es un espacio de representación del grupo de rotación.
Cada D_j no puede descomponerse en la suma de 2 espacios.

□