

# La paradoja EPR y la desigualdad de Bell

Rubí Esmeralda, Ramírez Milián, 201804565<sup>1</sup> y Jorge Alejandro, Rodríguez Aldana, 201804766<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ECFM, Departamento de Física, Universidad de San Carlos,  
Edificio T1, Ciudad Universitaria, Zona 12, Guatemala.

## I. INTRODUCCIÓN

### II. MÉTRICA MINKOWSKI

El espacio-tiempo de Minkowski es un conjunto de cuatro dimensiones, con elementos etiquetados por tres dimensiones espaciales y una temporal. Un punto individual en el espacio tiempo es llamado un evento. La trayectoria de una partícula es una curva a través del espacio-tiempo.

EL intervalo entre dos eventos en el espacio tiempo está descrito:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Lo importante en esta definición de intervalo del espacio-tiempo entre dos eventos es que es *invariante bajo transformaciones de coordenadas inerciales*. No existe una noción absoluta de "eventos simultáneos"; es decir si dos cosas ocurren al mismo tiempo depende de las coordenadas utilizadas.

El espacio-tiempo tiene un tensor métrico asociado que puede escribirse en forma matricial como

$$(\eta_{\alpha\beta}) := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora el intervalo del espacio tiempo entre dos eventos escrito en forma tensorial:

$$(\Delta s)^2 = -\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

Una herramienta muy útil para comprender el espacio-tiempo es la estructura del cono de luz que están divididos en futuro y pasado. Todos los puntos dentro del cono de luz futuro y pasado de un evento «O» en el espacio tiempo, son llamados puntos *timelike* con  $(\Delta s)^2 > 0$ . Y los puntos de los conos son *light-like* o nulos  $(\Delta s)^2 = 0$ . Si se supone que todos los procesos causales se propagan a la velocidad de la luz o a una velocidad menor, se concluye que estos son todos los eventos que se pueden afectar causalmente a partir de O.

Los puntos que están fuera del cono de luz del evento O están separados en forma *space-like* con  $(\Delta s)^2 < 0$ . Si se asume que ningún proceso causal se propaga más rápido que la luz, estos eventos están causalmente desconectados de O.

### III. PARADOJA DE EPR

Si tenemos dos partículas entrelazadas, sabemos que al medir una de ellas, se definirá en un estado, y por tanto, la otra también lo hará. El problema con esto, es que, aparentemente, tenemos dos eventos directamente relacionados, ocurriendo al mismo tiempo, lo que parece una contradicción a la Relatividad.

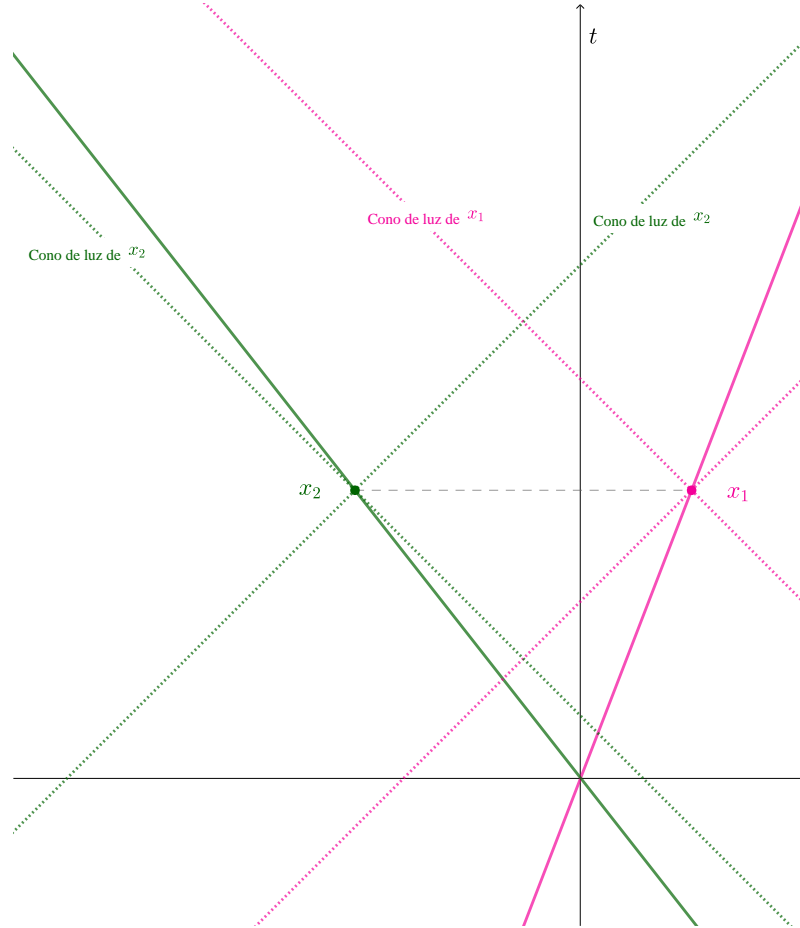


Figura 1: Diagrama de Minkowski

Veamos este planteamiento con más rigurosidad matemática:

Sean  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , dos partículas observadas por un mismo observador en un sistema inercial, que se entrelazan en  $t = 0$  y luego se alejan a velocidades  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  respectivamente. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) \\ \mathbf{x}_2 &= (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)\end{aligned}$$

Pero, al ser observados por un mismo observador, partiendo de un mismo evento, entonces:  $x_1^0 = x_2^0 = t$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (t, x_1^1, x_1^2, x_1^3) \\ \mathbf{x}_2 &= (t, x_2^1, x_2^2, x_2^3)\end{aligned}$$

Y suponiendo una velocidad constante, entonces  $x_n^i = tv_n^i$ :

$$\mathbf{x}_1 = (t, tv_1^1, tv_1^2, tv_1^3) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_2 = (t, tv_2^1, tv_2^2, tv_2^3) \quad (2)$$

Calculemos entonces  $\Delta x^\alpha$

$$\begin{aligned}\Delta x^\alpha &:= (x_2^\alpha - x_1^\alpha) \\ \Delta x^0 &= (t - t) = 0 \\ \Delta x^i &= (x_2^i - x_1^i) \\ &= (tv_2^i - tv_1^i) \\ &= t(v_2^i - v_1^i) \\ &= t\Delta v^i\end{aligned}$$

Calculemos ahora  $\Delta s^2$

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &:= -\eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \\ &= -\eta_{00} (\Delta x^0)^2 - \eta_{ij} \delta_{ij} (\Delta x^i \Delta x^j) \\ &= 0 - \delta_{ij} (\Delta x^i \Delta x^j) \\ &= \sum_{i=1}^3 -(\Delta x^i)^2 \\ &= -t^2 \sum_{i=1}^3 (\Delta v^i)^2 \\ &= -t^2 [(\Delta v^1)^2 + (\Delta v^2)^2 + (\Delta v^3)^2] \\ &\leq 0\end{aligned}$$

El caso de la igualdad solo se da en  $t = 0$  o si las velocidades de ambas partículas son las mismas, de modo que  $\Delta v^i = 0 \quad \forall i \in [1, 3]$

Y por tanto, en el caso que las velocidades sean distintas, la métrica de Minkowski es menor a cero, es decir, los eventos  $x_1$  y  $x_2$  no tienen una relación causal. Y al estar correlacionados, esto es una aparente violación de la teoría de la Relatividad.

#### IV. CONCLUSIÓN

---

[1] "Spacetime," Jul 2020, [Online; accessed 8. May 2021]. [Online]. Available: <https://www.pitt.edu/jdnorton/teaching/HPS0410/chapters/spacetime/index.html>