Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 18 – Energia potencial magnética

Energia potencial magnética

- Energia potencial magnética de um conjunto de circuitos
- Energia de uma bobine
- Energia e densidade de energia do campo magnético
- Cálculo de forças magnéticas a partir da energia potencial magnética

Popovic & Popovic Cap. 16

Serway Cap. 32

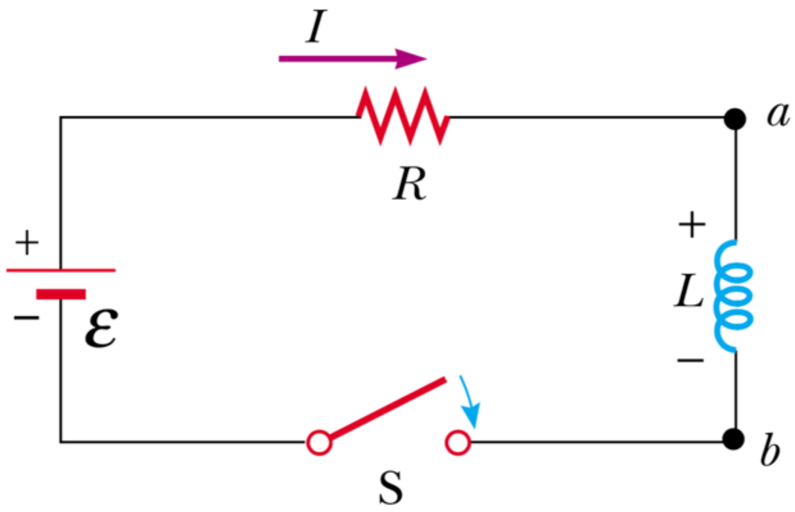
Revisão: circuito RL

Um circuito com uma resistência R e um indutor L designa-se circuito RL.

O indutor **opõe-se a uma alteração instantânea da corrente**, tentando preservar o valor antes da alteração: o indutor "atrasa" a reacção do circuito a mudanças.

Ao fechar o interruptor:

- $I(0) = 0$ vai aumentar, $dI/dt > 0$
- $\mathcal{E}_L = -L\dfrac{dI}{dt} < 0$ (queda de potencial $V_b - V_a$)



Lei das malhas para o circuito: $$\boxed{\mathcal{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0}$$

Energia armazenada num campo magnético

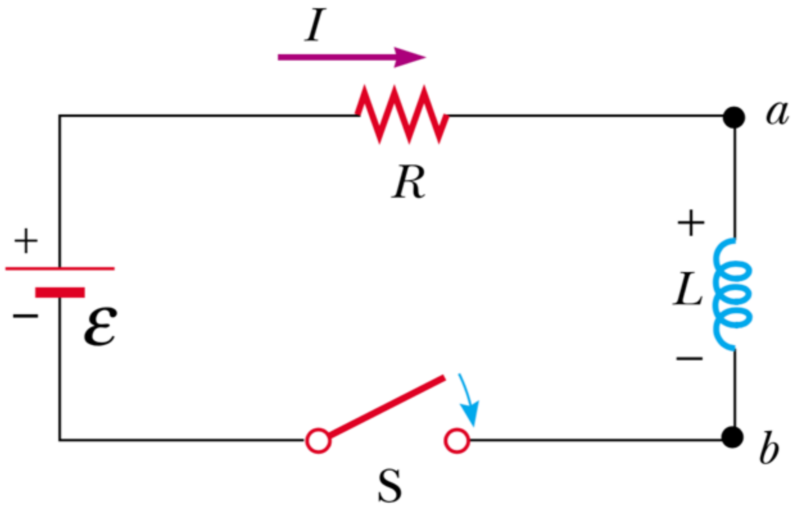
Num circuito RL a bateria tem que fornecer mais energia do que num circuito só com a resistência. Multiplicando a eq. do circuito por I:

Taxa a que a bateria **fornece** energia

Taxa a que o indutor **armazena** energia

$$\boxed{\mathcal{E}I} - \boxed{RI^2} - \boxed{LI\frac{dI}{dt}} = 0$$

Taxa a que a resistência **dissipa** energia



Taxa de armazenamento de energia: $\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$

Energia total armazenada: $U_m = \int dU = \int_0^I LI\, dI = \boxed{\frac{1}{2}LI^2}$

Energia armazenada no campo magnético de um indutor

Energia armazenada num campo magnético

Três situações:

1. A corrente **aumenta**: $\mathcal{E}I - RI^2 = LI\frac{dI}{dt} > 0$

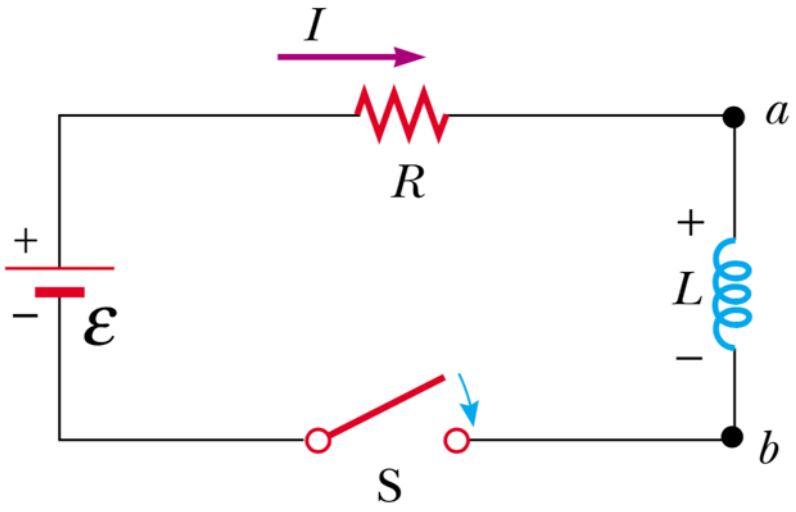
   A bateria realiza $W > 0$ para carregar o indutor

2. A corrente **diminui**: $\mathcal{E}I - RI^2 = LI\frac{dI}{dt} < 0$

   A bateria realiza $W < 0$ para descarregar o indutor

3. A corrente é **constante**: $\mathcal{E}I - RI^2 = LI\frac{dI}{dt} = 0$

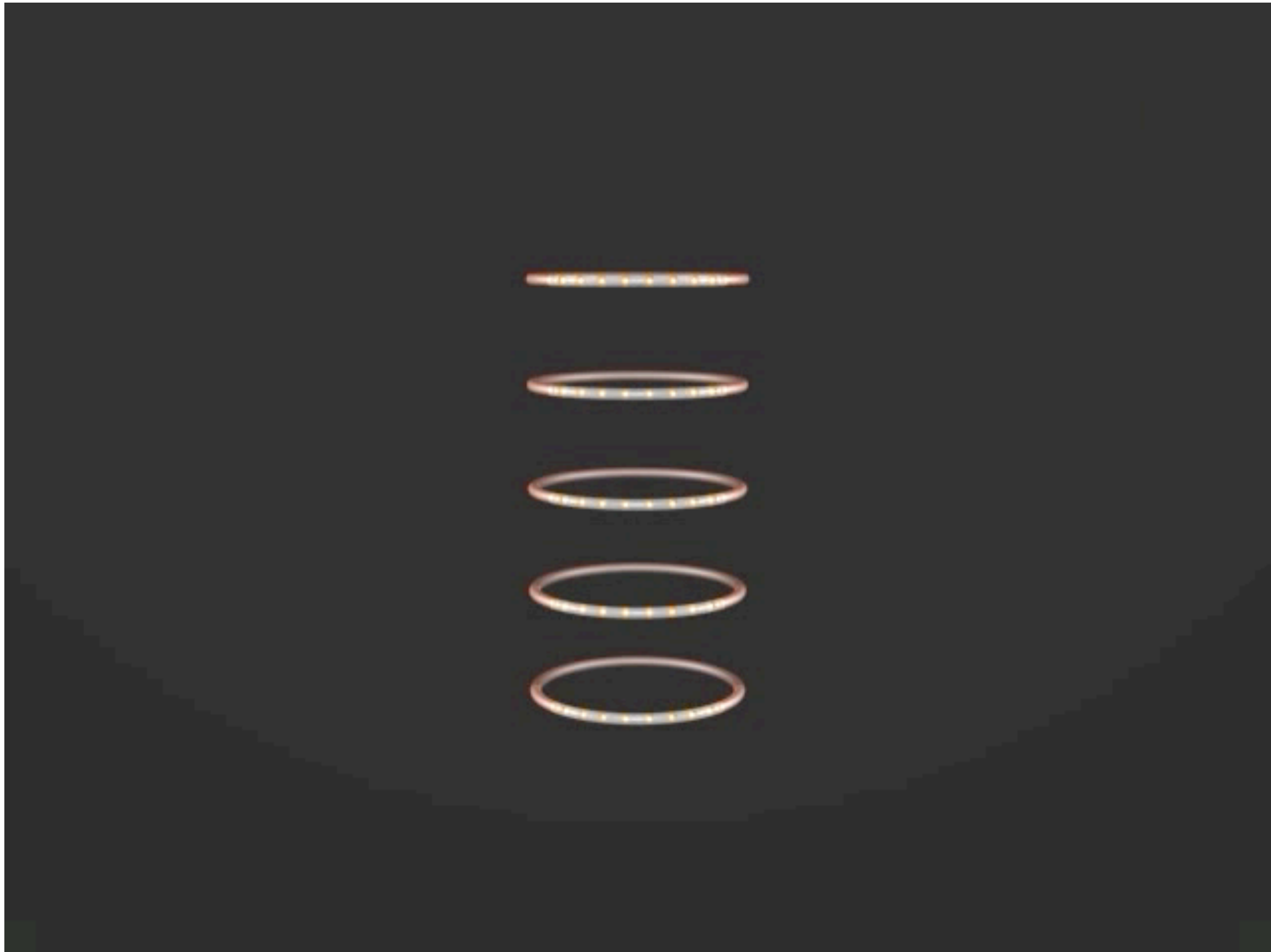
   A bateria não realiza trabalho adicional



Energia armazenada num campo magnético

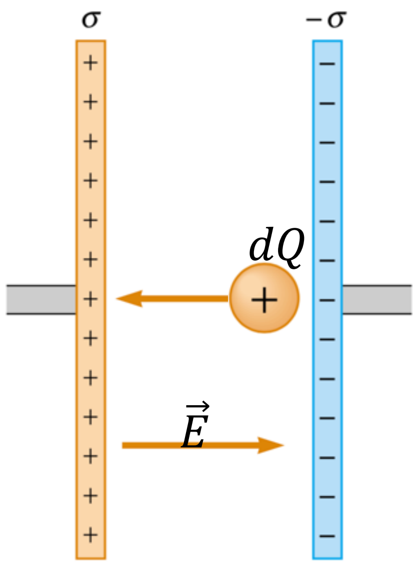
Quando se tenta estabelecer um campo magnético num indutor, a bateria tem que **realizar trabalho** para "vencer" a f.e.m. oposta.

A **energia** correspondente é armazenada no campo magnético do indutor.

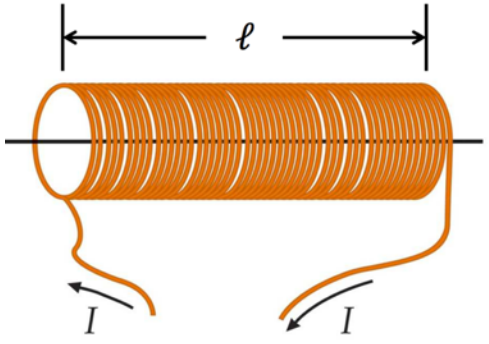


http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/faraday/SolenoidUp/SolenoidUp.htm

Analogia entre condensadores e indutores



Condensador		Indutor	
D.d.p.	V	Φ_B	Fluxo
Carga	Q	I	Corrente
Capacidade	$V = \frac{1}{C} Q$	$\Phi_B = LI$	Indutância
Trabalho	$W = \int V dq$	$W = \int \Phi_B dI$	Trabalho
En. potencial	$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$	$U = \frac{1}{2} L I^2$	En. potencial



Energia armazenada num campo magnético

Como para um indutor $\Phi_B = LI$,

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\Phi_b I = \frac{1}{2}\frac{\Phi_B^2}{L}$$

$$\left(U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2\right)$$

Para dois indutores, consideram-se também os coefs. indução mútua:

$$U_m = \frac{1}{2}\left(L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2\right) + M I_1 I_2$$

Caso geral de N circuitos percorridos por correntes I_j (com $M_{ii} = L_i$)

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\Phi_j I_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} M_{ij} I_i I_j$$

$$\left(U_e = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} Q_j V\right)$$

Calcular a indutância: dois métodos

Método 1 – a partir do fluxo

1. Conhecida a corrente I, calcular o campo $\vec{B}$
2. Calcular o fluxo $\Phi_B = N \int B dS$
3. Calcular $L = \Phi_B / I$

Exemplo: solenóide

$$B = \mu_0 n I$$
$$\Phi_B = BA = \mu_0 n^2 I A l$$
$$\boldsymbol{L = \mu_0 n^2 A l}$$

Método 2 – a partir da energia

1. Conhecida a corrente I, calcular o campo $\vec{B}$
2. Calcular a dens. energia $u_B = B^2 / 2\mu_0$
3. Calcular $U_m = \int u_B dv$
4. Calcular $L = 2U_m / I^2$

$$B = \mu_0 n I$$
$$u_B = \mu_0 n^2 I^2 / 2$$
$$U_m = u_B A l = \mu_0 n^2 I^2 A l / 2$$
$$\boldsymbol{L = \mu_0 n^2 A l}$$

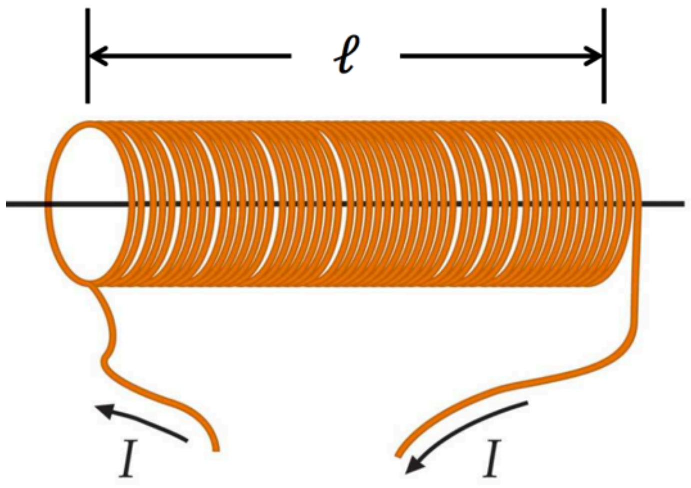
Densidade de energia num campo magnético

Por simplicidade, consideramos um solenóide:

- Indutância: $L = \mu_0 n^2 A l$
- Campo magnético: $B = \mu_0 n I \rightarrow I = B/\mu_0 n$

Substituindo L e B na expressão de U_m:

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 A l) \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A l$$



Dividindo pelo volume Al do solenóide:

$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Densidade de energia magnética [J/m^3]

(Comparar com $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$)

Cálculo da força magnética a partir de U_m

Tal como para as forças eléctricas, é possível calcular as forças magnéticas a partir da energia magnética. Esta energia pode converter-se em trabalho mecânico.

Caso 1: Sistema isolado
Para pequenos deslocamentos, o fluxo Φ_B mantém-se constante (Lei de Lenz)

$$\boxed{\vec{F}_m = -\left(\frac{dU_m}{ds}\right)_{\Phi_B} \vec{u}_s}$$

Força magnética, fluxo constante

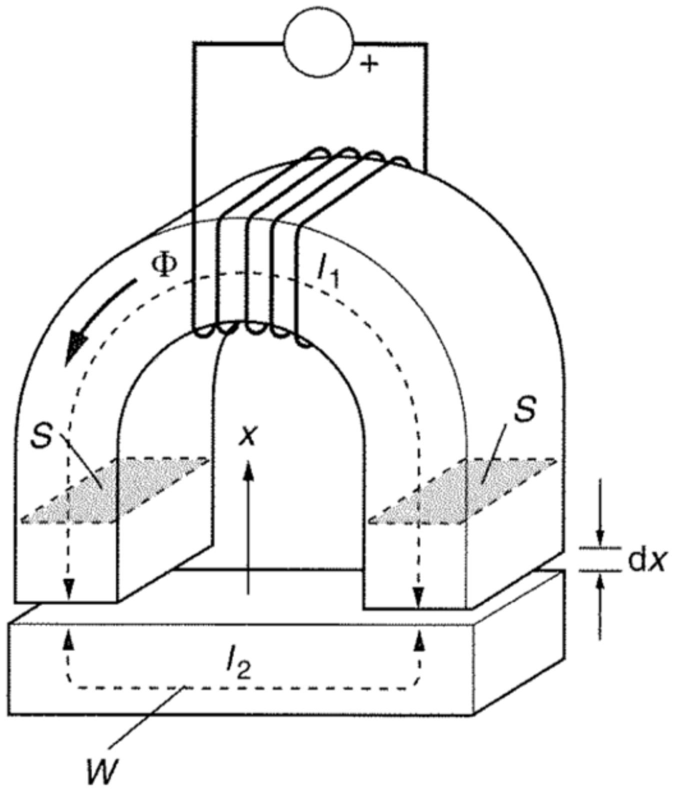
Caso 2: Sistema não-isolado
O sistema está ligado e.g. a uma bateria.
Para pequenos deslocamentos, a corrente I mantém-se constante. A bateria realiza trabalho para mudar o fluxo.

$$\boxed{\vec{F}_m = +\left(\frac{dU_m}{ds}\right)_{I} \vec{u}_s}$$

Força magnética, corrente constante

Exemplo: electromagneto (sistema isolado)

Supondo que o fluxo magnético se mantém constante, a energia total também se mantém.
Quando o bloco sobe uma distância dx, a energia magnética no intervalo diminui e converte-se em energia mecânica.



Energia magnética no ar: $U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} V_{ar}$

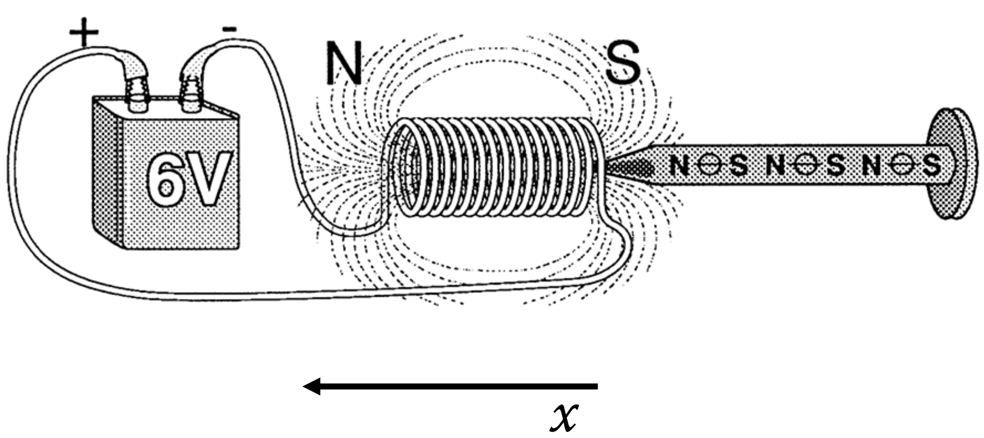
Diferença de en. magnética : $dU_m = -\frac{B^2}{2\mu_0} dV_{ar} = -\frac{B^2}{\mu_0} S dx$

Força exercida:

$$\vec{F}_m = -\left(\frac{dU_m}{dx}\right)_{\Phi_B} \vec{u}_x = \frac{B^2 S}{\mu_0} \vec{u}_x = \frac{\Phi_B^2}{\mu_0 S} \vec{u}_x$$

Exemplo: fechadura activada por solenóide (sistema não isolado)

Solenóide com material ferromagnético próximo da abertura.



Campo magnético: $B = \mu n I$

Energia magnética no ar: $U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} V_{ar}$

Energia magnética no ferro: $U_m = \frac{B^2}{2\mu_F} V_{ferro}$

Energia total vs. inserção x do prego: $U_m(x) = \frac{1}{2}[\mu_0(l-x)A + \mu_F xA]n^2 I^2$

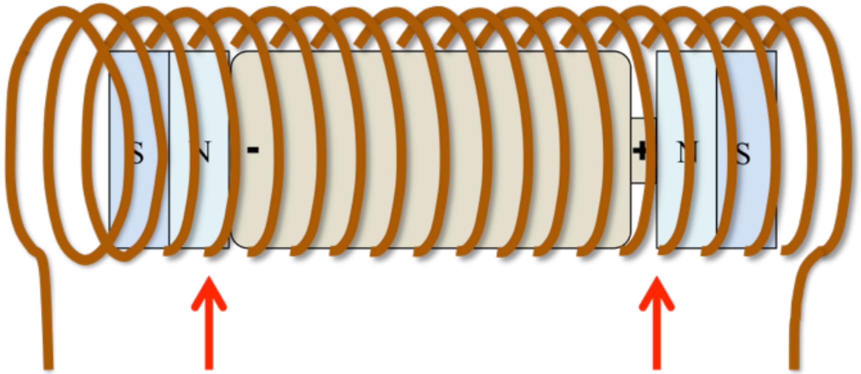
Diferença de energia: $dU_m = U_m(x+dx) - U_m(x) = \frac{1}{2}(\mu_F - \mu_0)An^2I^2dx$

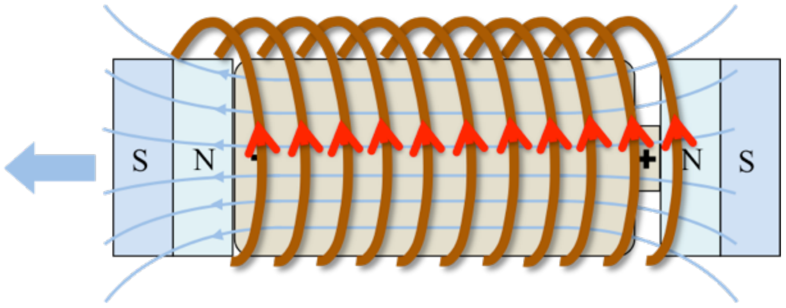
Força exercida:

$$\vec{F}_m = +\left(\frac{dU_m}{dx}\right)_I \vec{u}_x = \frac{1}{2}(\mu_F - \mu_0)An^2I^2\vec{u}_x$$

Aplicações: força magnética e indução

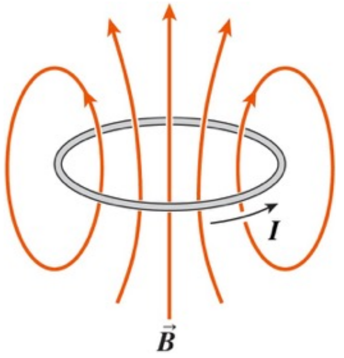
Comboio magnético





Conclusões

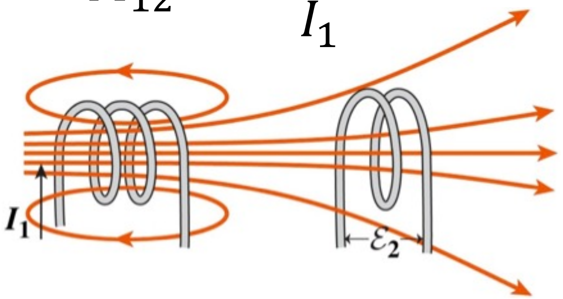
Auto-indução



$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

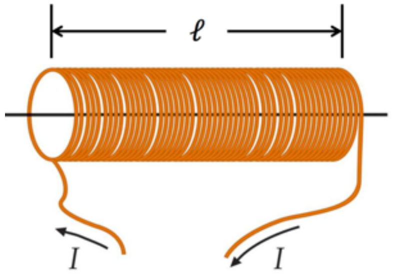
Indução mútua

$$M_{12} \equiv \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$



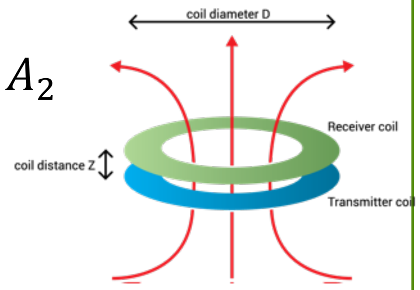
Auto-indutância de um solenóide

$$L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$$

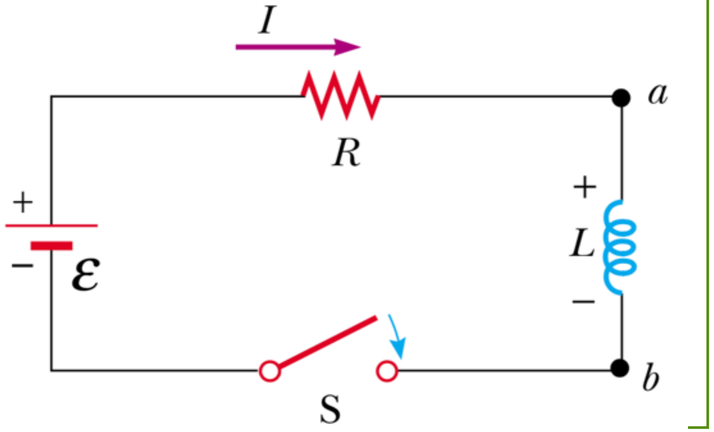


Indutância mútua de dois solenóides

$$M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2$$



Circuito RL



Constante de tempo