Ficha 3
Resolução dos exercícios propostos

I.1 Aplicando o método de primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

a) $P x e^{3x}$

Resolução:

$$P\, x e^{3x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{3}e^{3x}x - P\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 1 = \frac{1}{3}e^{3x}x + \frac{1}{3}Pe^{3x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{3}e^{3x}x - \frac{1}{3}\frac{1}{3}P3e^{3x}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = e^{3x} \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = Pe^{3x} = \frac{1}{3}P3e^{3x} = \frac{1}{3}e^{3x} \\ v' = 1 \end{cases}$

Usando a regra de primitivação: $P\,u'\cdot e^{u} = e^{u} + C$ em que $\begin{cases} u = 3x \\ u' = 3 \end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{3}e^{3x}x - \frac{1}{9}e^{3x} + C = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) + C = e^{3x}\,\frac{3x-1}{9} + C$$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

b) $P x^2 e^{2x}$

Resolução:

$$P\; x^2 e^{2x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - P\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2x = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 + \frac{1}{2}Pe^{2x}\cdot 2x \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2x - P\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = e^{2x} \\ v = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = Pe^{2x} = \frac{1}{2}P2e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} \\ v' = 2x \end{cases}$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = e^{2x} \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = Pe^{2x} = \frac{1}{2}P2e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} \\ v' = 2 \end{cases}$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x + \frac{1}{2}Pe^{2x} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}P2e^{2x}$$

Usando a regra de primitivação: $P\,u'\cdot e^{u} = e^{u} + C$ em que $\begin{cases} u = 2x \\ u' = 2 \end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x + \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

c) $P x^7 e^{x^4}$

Resolução:

$$Px^7 e^{x^4} = P\; x^4 x^3 e^{x^4} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}e^{x^4}x^4 - P\frac{1}{4}e^{x^4}4x^3 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}e^{x^4}x^4 - \frac{1}{4}Pe^{x^4}4x^3$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = x^3 e^{x^4} \\ v = x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = Px^3 e^{x^4} = \frac{1}{4}P4x^3 e^{x^4} = \frac{1}{4}e^{x^4} \\ v' = 4x^3 \end{cases}$

Usando a regra de primitivação: $P\,u'\cdot e^{u} = e^{u} + C$ em que $\begin{cases} u = x^4 \\ u' = 4x^3 \end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}e^{x^4}x^4 - \frac{1}{4}e^{x^4} + C = \frac{1}{4}e^{x^4}\left(x^4 - 1\right) + C$$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

d) $\mathrm{P}\, x \operatorname{sen}(5x)$

Resolução:

$$\mathrm{P}\, x\operatorname{sen}(5x) \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{5}x\cos(5x) - \mathrm{P}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\cdot 1\right) = -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\mathrm{P}\cos(5x) \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\mathrm{P}5\cos(5x)$$

Usando o método de primitivação por partes: $\mathrm{P}(u'v)=u\,v-\mathrm{P}(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=\operatorname{sen}(5x) \\ v=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\mathrm{P}u'=\frac{1}{5}\mathrm{P}5\operatorname{sen}(5x)=-\frac{1}{5}\cos(5x) \\ v'=1 \end{cases}$

Usando a regra de primitivação: $\mathrm{P}u'\cos u=\operatorname{sen} u+C$

em que $u=5x$, $u'=5$

$$= -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}\operatorname{sen}(5x)$$

e) $\mathrm{P}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$

Resolução:

$$\mathrm{P}\,\frac{\ln^2 x}{x^2} = \mathrm{P}\; x^{-2}\ln^2 x \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{x}\ln^2 x - \mathrm{P}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x}\ln x = -\frac{1}{x}\ln^2 x + \mathrm{P}\,\frac{2}{x^2}\ln x = -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\mathrm{P}x^{-2}\ln x$$

Usando o método de primitivação por partes: $\mathrm{P}(u'v)=u\,v-\mathrm{P}(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=x^{-2} \\ v=\ln^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\mathrm{P}u'=\mathrm{P}x^{-2}=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x} \\ v'=(\ln^2 x)'=2\ln x\,(\ln x)'=2\ln x\,\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\ln x \end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\mathrm{P}x^{-2}\ln x = \; -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\left(-\frac{1}{x}\ln x - \mathrm{P}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $\mathrm{P}(u'v)=u\,v-\mathrm{P}(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=x^{-2} \\ v=\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\mathrm{P}u'=\mathrm{P}x^{-2}=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x} \\ v'=(\ln x)'=\frac{1}{x} \end{cases}$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x + 2\mathrm{P}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x + 2\mathrm{P}x^{-2} = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x + 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x + 2\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x} + C = -\frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C$$

f) $\mathrm{P}\left(\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Resolução:

$$\mathrm{P}\left(\frac{x\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arc\,sen} x\right) \underset{\uparrow}{=} -\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x - \mathrm{P}\left(-\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $\mathrm{P}(u'v)=u\,v-\mathrm{P}(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=\operatorname{arc\,sen} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\mathrm{P}u'=\mathrm{P}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{P}\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{-2}\mathrm{P}\text{-}2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{1-x^2} \\ v'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

$$= -\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x - \mathrm{P}(-1) = -\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x + \mathrm{P}1 \underset{\uparrow}{=} -\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x + x + C$$

Utilizando a regra de primitivação: $\mathrm{P}k=kx+C$

I.2 Aplicando o método de primitivação por partes, determine a seguinte primitiva:

$$Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)$$

Resolução:

$$Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)=P1\cdot\operatorname{sen}(2x)\underset{\uparrow}{=}e^{x}\cdot\operatorname{sen}(2x)-Pe^{x}\cdot 2\cos(2x)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=e^{x}\\ v=\operatorname{sen}(2x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=Pe^{x}=e^{x}\\ v'=(2x)'\cos(2x)=2\cos(2x)\end{cases}$

$$=e^{x}\cdot\operatorname{sen}(2x)-2Pe^{x}\cos(2x)\underset{\uparrow}{=}e^{x}\cdot\operatorname{sen}(2x)-2\left(e^{x}\cos(2x)-Pe^{x}\left(-2\operatorname{sen}(2x)\right)\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=e^{x}\\ v=\cos(2x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=Pe^{x}=e^{x}\\ v'=(2x)'\operatorname{sen}(2x)=-2\operatorname{sen}(2x)\end{cases}$

$$=e^{x}\cdot\operatorname{sen}(2x)-2e^{x}\cos(2x)-4Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)$$

Temos que,

$$Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)=e^{x}\cdot\operatorname{sen}(2x)-2e^{x}\cos(2x)-4Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\Leftrightarrow Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)+4Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)=e^{x}\cdot\operatorname{sen}(2x)-2e^{x}\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow 5Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)=e^{x}\cdot\operatorname{sen}(2x)-2e^{x}\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow Pe^{x}\operatorname{sen}(2x)=\frac{1}{5}e^{x}\left(\operatorname{sen}(2x)-2\cos(2x)\right)$$

I.3 Aplicando o método de primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

a) $P\ln(3x)$

Resolução:

$$P\ln(3x)=P\left(1\cdot\ln(3x)\right)\underset{\uparrow}{=}x\ln(3x)-Px\frac{3}{3x}=x\ln(3x)-P1=x\ln(3x)-x$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=1\\ v=\ln(3x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=P1=x\\ v'=\dfrac{3}{3x}\end{cases}$

b) $P3\ln^{2}(5x)$

Resolução:

$$P3\ln^{2}(5x)=3P\ln^{2}(5x)=3P1\cdot\ln^{2}(5x)\underset{\uparrow}{=}3x\ln^{2}(5x)-3Px\frac{2}{x}\ln(5x)=3x\ln^{2}(5x)-3P2\ln(5x)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=1\\ v=\ln^{2}(3x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=P1=x\\ v'=2\ln(3x)\left(\ln(3x)\right)'=2\ln(3x)\dfrac{3}{3x}=\dfrac{2}{x}\ln(3x)\end{cases}$

$$=3x\ln^{2}(5x)-6P\ln(5x)=3x\ln^{2}(5x)-6P\left(1\cdot\ln(5x)\right)\underset{\uparrow}{=}3x\ln^{2}(5x)-6x\ln(5x)-(-6)Px\frac{3}{3x}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=1\\ v=\ln(3x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=P1=x\\ v'=\dfrac{3}{3x}\end{cases}$

$$=3x\ln^{2}(5x)-6x\ln(5x)+6P1=3x\ln^{2}(5x)-6x\ln(5x)+6x$$

c) $P \operatorname{arc\,tg}(2x)$

Resolução:

$$P \operatorname{arc\,tg}(2x) = P\left(1 \cdot \operatorname{arc\,tg}(2x)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de} \\ \text{primitivação por partes: } P(u'v)=u\,v-P(u\,v') \\ \text{em que } \begin{cases} u'=1 \\ v=\operatorname{arc\,tg}(2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=\frac{2}{1+(2x)^2} \end{cases}}}{=} x \operatorname{arc\,tg}(2x) - P\left(x \frac{2}{1+(2x)^2}\right) = x \operatorname{arc\,tg}(2x) - \frac{1}{4} P\left(\frac{2\cdot 4x}{1+4x^2}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Utilizando a regra de primitivação:} \\ P\frac{u'}{u}=\ln|u|+C}}{=} x \operatorname{arc\,tg}(2x) - \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| \underset{\substack{\uparrow \\ 1+4x^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}}}{=} x \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)$$