Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica, Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 5 – Primitivas de Funções Racionais

Parte I – Exercícios Propostos

Primitivas de funções racionais imediatas

I.1 Calcule as seguintes primitivas:

a) $P\dfrac{1}{(3x+2)^5}$ **b)** $P\dfrac{1}{x}$ **c)** $P\dfrac{4x^2}{x^3+5}$

d) $P\dfrac{x^2+1}{x^3+3x+1}$ **e)** $P\dfrac{2x}{1+x^4}$ **f)** $P\dfrac{4x+2}{1+(x^2+x)^2}$

Primitivas de funções racionais – Denominador com zeros reais

I.2 Calcule a seguinte primitiva $P\dfrac{1}{x^2-1}$.

Primitivas de funções racionais – Denominador sem zeros reais

I.3 Calcule as seguintes primitivas:

a) $P\dfrac{1}{1+(x-1)^2}$ **b)** $P\dfrac{1}{x^2+2x+5}$

Primitivas de funções racionais – Redução a fracções próprias

I.4 Calcule a seguinte primitiva $P\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$

Parte II – Exercícios Resolvidos

II.1 Calcule as seguintes primitivas:

a) $P\dfrac{3x^2-1}{x^3-x}$

Resolução:

A primitiva da função $\dfrac{3x^2-1}{x^3-x}$ é imediata porque $\left(x^3-x\right)' = 3x^2-1$.

Assim,

$$P\frac{3x^2-1}{x^3-x} = \ln\left|x^3-x\right| + C.$$

b) $P\dfrac{1}{x+x^2}$

Resolução:

A primitiva da função $\dfrac{1}{x+x^2}$ não é imediata, como tal, iremos calculá-la recorrendo à primitivação de funções racionais, uma vez que se trata de uma função racional.

Primitivação da função racional:

$$P\frac{1}{x+x^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\text{o}}\text{passo}}}{=} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\operatorname{grau}(1) = 0 < 2 = \operatorname{grau}\left(x+x^2\right)$ então a função $\dfrac{1}{x+x^2}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x+x^2 = x(1+x) = x(x+1)$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 1 = A(x+1) + Bx$$

- Para $x=0$ vem $\quad 1 = A(0+1) + B0 \Leftrightarrow 1 = A \Leftrightarrow A = 1$

- Para $x=-1$ vem $\quad 1 = A(-1+1) + B(-1) \Leftrightarrow 1 = A0 - B \Leftrightarrow B = -1$

Assim,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{1}{x(x+1)} = P\left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) = P\frac{1}{x} + P\frac{-1}{x+1} = \ln|x| - P\frac{1}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

c) $P\frac{x-1}{x^2+x}$

Resolução:

A primitiva da função $\frac{x-1}{x^2+x}$ não é imediata, como tal, iremos calculá-la recorrendo à primitivação de funções racionais, uma vez que se trata de uma função racional.

Primitivação da função racional:

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(x-1)=1<2=\text{grau}(x^2+x)$, então a função $\frac{x-1}{x^2+x}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x^2+x=x(x+1)$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow x-1=A(x+1)+Bx$$

- Para $x=-1$ vem $-1-1=A(-1+1)+B(-1)\Leftrightarrow -2=-B\Leftrightarrow B=2$

- Para $x=0$ vem $0-1=A(0+1)+B\cdot 0\Leftrightarrow -1=A\Leftrightarrow A=-1$

Assim,

$$\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x+1}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{x-1}{x^2+x}=P\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x+1}\right)=P\frac{-1}{x}+P\frac{2}{x+1}=-P\frac{1}{x}+2P\frac{1}{x+1}$$
$$=-\ln|x|+2\ln|x+1|+C$$

Conclusão: $P\left(\frac{x-1}{x^2+x}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ \text{5ºPasso}}}{=}-\ln|x|+2\ln|x+1|+C$

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

d) $P\dfrac{x+1}{x^4+x^2}$

Resolução:

A primitiva da função $\dfrac{x+1}{x^4+x^2}$ não é imediata, como tal, iremos calculá-la recorrendo à primitivação de funções racionais, uma vez que se trata de uma função racional.

Primitivação da função racional:

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\operatorname{grau}(x+1)=1<4=\operatorname{grau}(x^4+x^2)$, então a função $\dfrac{x+1}{x^4+x^2}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x^4+x^2=x^2\underbrace{(x^2+1)}_{\text{não tem raízes reais}}$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{x+1}{x^4+x^2}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pelo método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{x+1}{x^4+x^2}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\Rightarrow x+1=A_1(x^2+1)+A_2(x^2+1)x+(Mx+N)x^2$$

$$\Leftrightarrow x+1=A_1x^2+A_1+A_2x^3+A_2x+Mx^3+Nx^2\Leftrightarrow x+1=(A_2+M)x^3+(A_1+N)x^2+A_2x+A_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_2+M=0\\A_1+N=0\\A_2=1\\A_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+M=0\\1+N=0\\A_2=1\\A_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M=-1\\N=-1\\A_2=1\\A_1=1\end{cases}$$

Assim,

$$\frac{x+1}{x^4+x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{-1x-1}{x^2+1}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{x+1}{x^4+x^2}=P\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{-x-1}{x^2+1}\right)=P\frac{1}{x^2}+P\frac{1}{x}+P\frac{-x-1}{x^2+1}=Px^{-2}+\ln|x|-P\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\ln|x|-\left(P\frac{x}{x^2+1}+P\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{x^{-1}}{-1}+\ln|x|-\left(\frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1}+P\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1}-P\frac{1}{x^2+1}=-\frac{1}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}(x)+C$$

Conclusão: $P\dfrac{x+1}{x^4+x^2}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\circ}\text{passo}}}{=}-\dfrac{1}{x}+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}(x)+C$

e) $P\frac{x-1}{x^3+x^2}$

Resolução:

A primitiva da função $\frac{x-1}{x^3+x^2}$ não é imediata, como tal, iremos calculá-la recorrendo à primitivação de funções racionais, uma vez que se trata de uma função racional.

Primitivação da função racional:

$$P\frac{x-1}{x^3+x^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=} \frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x+1|+C=\frac{1}{x}+2\left(\ln|x|-\ln|x+1|\right)+C=\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(x-1)=1<3=\text{grau}(x^3+x^2)$, então a função $\frac{x-1}{x^3+x^2}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x^3+x^2=x^2(x+1)$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{x-1}{x^3+x^2}=\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{x+1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{x-1}{x^3+x^2}=\frac{x-1}{x^2(x+1)}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow x-1=A_1(x+1)+A_2x(x+1)+Bx^2$$

- Para $x=-1$ vem $-1-1=A_1(-1+1)+A_2(-1)(-1+1)+B(-1)^2$
  $\Leftrightarrow -2=A_1\cdot 0+A_2(-1)\cdot 0+B \Leftrightarrow -2=B \Leftrightarrow B=-2$
- Para $x=0$ vem $0-1=A_1(0+1)+A_2 0(0+1)+B0^2 \Leftrightarrow -1=A_1 \Leftrightarrow A_1=-1$
- Para $x=1$ vem $1-1=A_1(1+1)+A_2 1(1+1)+B1^2 \Leftrightarrow 0=A_1 2+A_2 2+B \underset{\substack{B=-2\\ \text{e } A_1=-1}}{=} 0=(-1)2+A_2 2+(-2)$
  $\Leftrightarrow 0=-2+A_2 2-2 \Leftrightarrow 0=-1+A_2-1 \Leftrightarrow A_2-2=0 \Leftrightarrow A_2=2$

Assim,

$$\frac{x-1}{x^3+x^2}=\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x+1}.$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{x-1}{x^3+x^2}=P\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x+1}\right)=P\frac{-1}{x^2}+P\frac{2}{x}+P\frac{-2}{x+1}=-P\frac{1}{x^2}+2P\frac{1}{x}-2P\frac{1}{x+1}$$

$$=-Px^{-2}+2\ln|x|-2\ln|x+1|=-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+2\ln|x|-2\ln|x+1|+C$$

$$=-\frac{x^{-1}}{-1}+2\ln|x|-2\ln|x+1|+C=\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x+1|+C$$

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III.1 Calcule as seguintes primitivas de funções racionais:

a) $P\dfrac{x^4-3x^3}{x^2-3x+2}$

b) $P\dfrac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}$

c) $P\dfrac{x^4}{1-x}$

d) $P\dfrac{3x+1}{x^3-x}$

e) $P\dfrac{x+1}{x^3(x-2)^2}$

f) $P\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$

III.2 Calcule a primitiva $P\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right)$