Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

$1^{\text{o}}$ **semestre 17/18**

# $3^{\text{o}}$ TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

**LEIC-Taguspark**
**16 de dezembro de 2017 (11:30)**

Teste 301 (soluções da escolha múltipla)

Nome:
Número:

O teste que vai realizar tem a duração de **120 minutos** e consiste na resolução de **sete problemas**. Os cinco primeiros são de escolha múltipla; cada resposta em branco vale 0 valores, **e cada resposta errada vale -1/3 da respectiva classificação.** Os dois últimos problemas são de resposta aberta, devendo por isso **apresentar os cálculos** efetuados e/ou **justificar** cuidadosamente as suas respostas.

**NOTA FINAL:**

**Problema 1 (0.6 valores)**
Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Indique a única afirmação **verdadeira** relativamente ao espaço nulo e ao espaço das colunas de $A$ e $B$:

[ ] o espaço nulo de $A$ é trivial e o espaço das colunas de $B$ é o $\mathbb{R}^4$;
[X] o espaço das colunas de $A$ é o $\mathbb{R}^4$ e o espaço nulo de $B$ é uma reta em $\mathbb{R}^4$;
[ ] o espaço nulo de $A$ é o $\mathbb{R}^4$ e o espaço nulo de $B$ é uma reta em $\mathbb{R}^4$;
[ ] o espaço das colunas de $A$ é um hiperplano de $\mathbb{R}^4$ e o espaço nulo de $B$ é trivial.

**Problema 2 (1.2 valores)**
Seja o subespaço $W$ de $\mathbb{R}^3$ definido da seguinte maneira:

$$W = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z = 0 \ \text{ e } \ x - z = 0\ \}.$$

(a) **(0.6 val.)** Indique a única resposta **verdadeira** relativamente à dimensão de $W$ ou do seu complemento ortogonal $W^\perp$:

☐ $\dim W = 2$; ☒ $\dim W = 1$; ☐ $\dim W^\perp = 1$; ☐ $\dim W^\perp = 3$.

(b) **(0.6 val.)** Indique a única resposta **verdadeira** relativamente a $W$ ou ao seu complemento ortogonal $W^\perp$

☒ $W = \text{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; ☐ $W = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$;

☐ $W^\perp = \text{Col}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; ☐ $W^\perp = \mathcal{L}\{(1, 0, -1)\}$

**Problema 3 (0.9 valores)**
Considere as seguintes matrizes e indique a única matriz que **não** é diagonalizável:

☐ $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$; ☒ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; ☐ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; ☐ $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

**Problema 4 (0.9 valores)**

Seja a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ no espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2 tal que $T(\mathbf{p}(t)) = -2\mathbf{p}'(t) + 3\mathbf{p}(t)$. Selecione a **única matriz** que representa $T$ na base canónica de $\mathcal{P}_2$:

$\square \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$; $\square \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $\boxed{\text{X}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; $\square \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

**Problema 5 (0.9 valores)**

Considere as seguintes formas quadráticas e indique a única afirmação que é **verdadeira**:

$\square$ $2x^2 + 2xy + 2y^2$ é semidefinida positiva; $\boxed{\text{X}}$ $x^2 + 4xy + y^2$ é indefinida;

$\square$ $-2x^2 + 2xy - 2y^2$ é indefinida; $\square$ $x^2 - 4xy + y^2$ é definida negativa.

**Problema 6 (3 valores)**
Considere o problema da diagonalização da seguinte matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) (1.0 val.) Escreva o polinómio característico da matriz $A$ e use-o para argumentar que $A$ é invertível.

(b) (1.5 val.) Deduza uma matriz diagonal $D$ e uma matriz ortogonal $P$ tais que $D = P^T AP$.

(c) (0.5 val.) Descreva a ação da matriz $A$ sobre a esfera unitária, usando as matrizes $D$ e $P$ da alínea anterior (sugestão: comece por identificar uma rotação na matriz $P$).

**Problema 7 (2.5 valores)**

(a) (0.5 val.) Considere a matriz $A$ do Problema 1 do teste e verifique que se trata de uma matriz ortogonal. Use este facto para calcular $A^{-1}$.

(b) (1.0 val.) Generalize esta propriedade das matrizes ortogonais, i.e. mostre que para toda a matriz quadrada $U$, $n \times n$, se tem $U^{-1} = U^T$.

(c) (1.0 val.) Mostre que se $U$ é uma matriz ortogonal, então $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ou seja $U$ não altera o comprimento dos vetores.