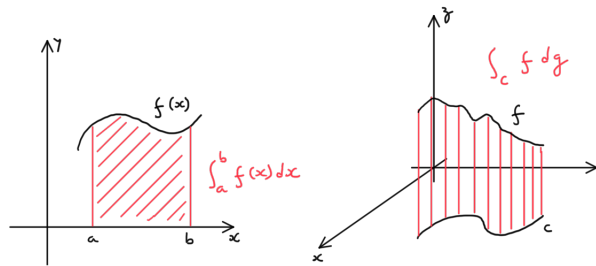


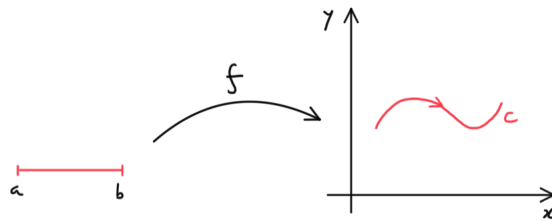
## 5. SUPERFÍCIES E INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

### 1 Revisão sobre Curvas e Integrais de Linha

A noção de integral de uma função real definida num intervalo pode ser generalizada a qualquer outro segmento de curva. Para uma função escalar contínua definida num segmento de curva  $c$ , por exemplo, o integral de linha  $\int_c f dg$  representará a área abaixo do gráfico de  $f$  que segue a curvatura descrita por  $c$ . A imagem seguinte compara essa área com a área (plana) descrita pelo gráfico de uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

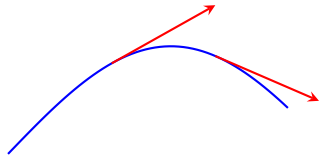


Para definir o integral de linha, precisamos primeiro de descrever curvas através das suas *parametrizações*. Uma parametrização para a curva  $c$  no plano é uma função contínua  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja imagem coincida com  $c$ .



Para cada curva, a parametrização não é única. Cada parametrização de  $c$  define também o *sentido* em que a curva é percorrida. Intuitivamente, uma curva é um "objecto de dimensão 1", e como tal deve ser descrito apenas por um parâmetro.

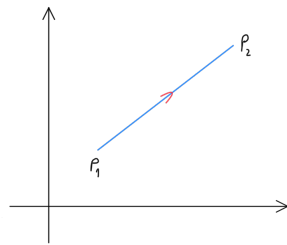
Quando  $g$  for de classe  $C^1([a, b])$  (ou seja, quando existir  $g'(t)$  para qualquer  $t \in ]a, b[$  e esta  $g'$  for contínua) e se  $g'$  nunca se anular, dizemos que a curva é *regular*. Nesse caso,  $g'(t)$  define, para cada  $t \in ]a, b[$ , um vector tangente à curva no ponto  $g(t)$ .



Mudando-se na definição de parametrização o conjunto de chegada para um  $\mathbb{R}^n$  genérico, podemos descrever curvas que existam em espaços euclidianos de qualquer dimensão.

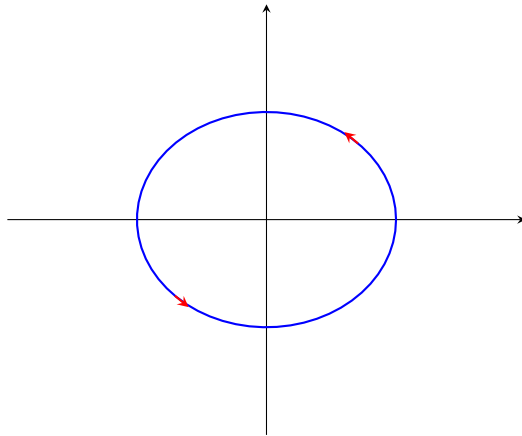
Seguem-se exemplos de parametrizações de algumas curvas de  $\mathbb{R}^2$  e de  $\mathbb{R}^3$ . Os domínios das derivadas não incluem os extremos de cada intervalo  $[a, b]$ .

- Segmento de recta de  $P_1$  a  $P_2$  no plano:



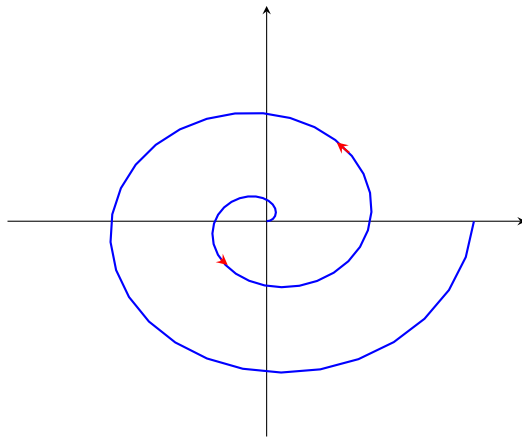
$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = P_1 + t(P_2 - P_1), \quad g'(t) = P_2 - P_1$$

- Circunferência de centro na origem e raio  $R$  no plano:



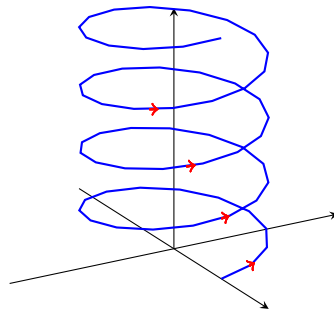
$$g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad g'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

- Segmento de espiral no plano:



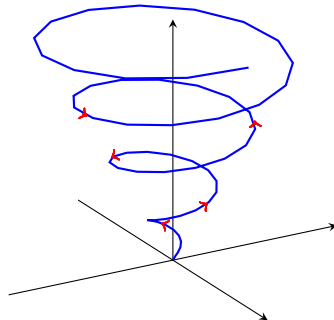
$$g : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad g'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)$$

- Segmento de hélice cilíndrica no espaço a três dimensões:



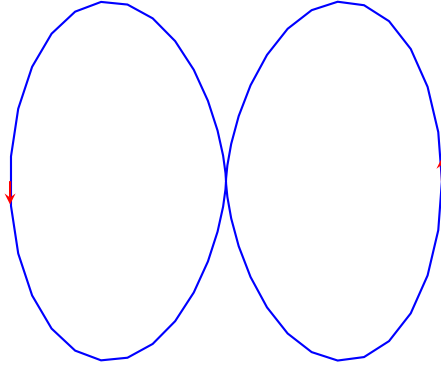
$$g : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad g'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

- Segmento de hélice cónica no espaço a três dimensões:



$$g : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad g'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

- Segmento de rosácea de duas pétalas no plano:

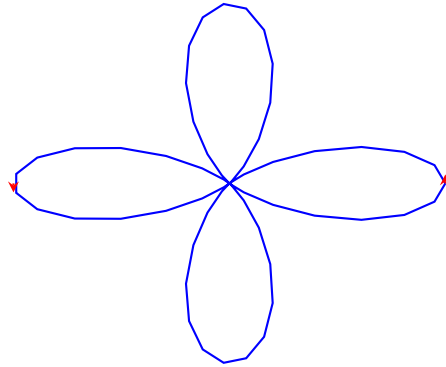


$$g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (\cos^2 t \cos t, \cos^2 t \sin t),$$

$$g'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, -2 \cos t \sin^2 t + \cos^3 t)$$

(Em coordenadas polares:  $r = \cos^2 t$ ).

- Segmento de rosácea de quatro pétalas no plano:



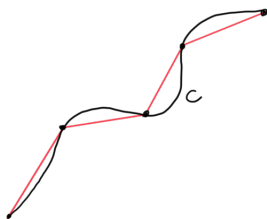
$$g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (\cos^2(2t) \cos t, \cos^2(2t) \sin t),$$

$$g'(t) = (-4 \cos(2t) \sin(2t) \cos t - \cos^2(2t) \sin t, -4 \cos(2t) \sin(2t) \sin t + \cos^2(2t) \cos t)$$

(Em coordenadas polares:  $r = \cos^2(2t)$ ).

O comprimento de um segmento de curva regular  $c$  que tenha uma parametrização

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  pode ser definido como o integral real  $\int_a^b \|g'(t)\| dt$ . Este integral pode ser visto intuitivamente como um limite dos comprimentos de aproximações a  $c$  por segmentos de recta unindo pontos das suas decomposições.



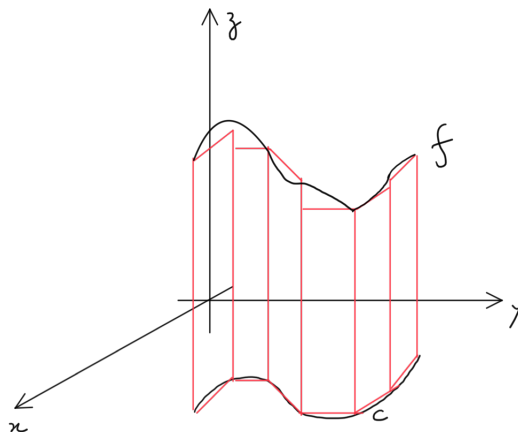
Quanto mais finas forem essas decomposições, mais se aproximam os segmentos anteriores de vectores tangentes à curva (que têm como expressão analítica  $g'(t)$ .)

Para algumas funções escalares  $f$  com domínio que inclua a curva regular  $c$ , podemos definir o integral de linha

$$\int_c f dg = \int_a^b f(g(t)) \|g'(t)\| dt.$$

Diremos que a função  $f$  é *integrável* na curva  $c$  se o integral real da direita existir. Isto acontece, por exemplo, se  $f$  for uma função contínua. Pode ver-se que a definição anterior não depende da parametrização escolhida para  $c$ .

Geometricamente, o integral de linha anterior pode ser visto como o limite das áreas de aproximações por rectângulos à área desejada.



O comprimento de um segmento de curva regular  $c$  coincide com o valor do integral de linha  $\int_c 1 dg$ .

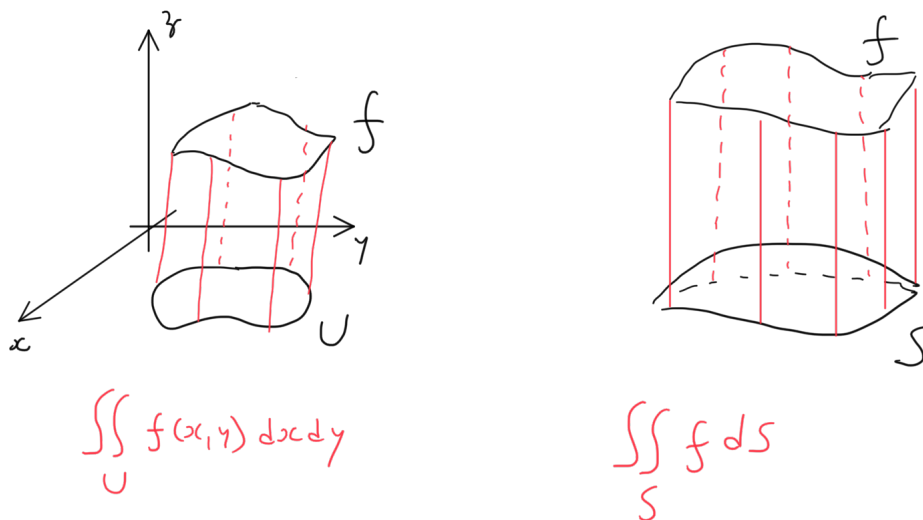
Podemos definir de modo semelhante o integral de linha de funções vectoriais  $F$  com domínio que inclua a curva regular  $c$ . Quando exista, será dado por

$$\int_c F dg = \int_a^b F(g(t)) \cdot g'(t) dt,$$

onde no integral da direita figura o produto interno de vectores. Nesta definição, o conjunto de chegada de  $F$  (e de  $g$ ) pode ser qualquer  $\mathbb{R}^n$ . O integral de linha de  $F$  vectorial formaliza o conceito de trabalho realizado por uma força: por exemplo, se  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  representar um campo de forças e  $c$  for uma curva regular parametrizada por  $g$ , o integral  $\int_c F dg$  (quando exista) representa o trabalho realizado por  $F$  para deslocar uma partícula ao longo de  $c$ .

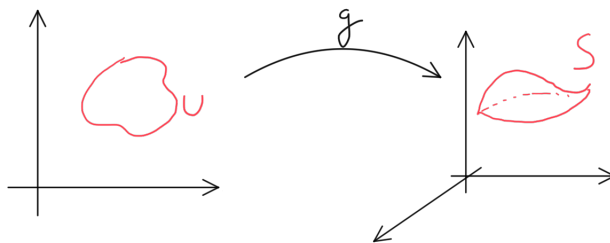
## 2 Superfícies Regulares em $\mathbb{R}^3$

Integrais de superfície vão ser generalizações da noção de integral duplo de uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é uma região (limitada) de  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo, se  $f$  for contínua e  $U$  for uma região compacta, o integral duplo  $\iint_U f(x,y) dx dy$  representa o volume abaixo do gráfico de  $f$  e restrito a  $U$ . O integral de superfície  $\iint_S f dS$  representará o volume entre o gráfico de  $f$  e a superfície  $S$  (num espaço adequado), tendo em conta a curvatura que a superfície impõe.



Tal como para os integrais de linha, para definir e calcular os integrais de superfície será preciso primeiro obter formas de descrever essas superfícies, ou seja, será preciso obter as suas *parametrizações*.

Uma parametrização para um pedaço de superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma função contínua  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  (com  $U$  uma região de  $\mathbb{R}^2$ ) cuja imagem coincida com  $S$ . Cada  $g$  define um modo de obter, em cada ponto, a curvatura desejada para  $S$ .



Tal como para as curvas, cada superfície tem mais do que uma parametrização possível. Podemos também pensar intuitivamente que uma superfície deve “ter dimensão 2”, e por isso ser descrita por dois parâmetros. No entanto, esta interpretação só faz sentido se os parâmetros forem de algum modo “linearmente independentes”, o

que acontece para o caso das superfícies *regulares*.

Uma superfície é dita regular se puder ser descrita por uma parametrização  $g(u, v)$  de classe  $C^1(U)$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  seja sempre não nulo (no interior de  $U$ .) Neste caso, os vectores  $\frac{\partial g}{\partial u}$  e  $\frac{\partial g}{\partial v}$  definem dois vectores tangentes à superfície no ponto  $g(u, v)$  que são linearmente independentes, e o seu produto externo  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  (que nunca se anula) define portanto um vector normal à superfície no mesmo ponto. Para qualquer superfície, mesmo não regular, diremos que um ponto  $P = g(u, v)$  é *regular* se a condição anterior se verificar nesse ponto, ou seja, se  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  não é nulo em  $P$ .

Nota: Por analogia com o que acontecia para as parametrizações de curvas, estamos aqui a considerar um  $U$  genérico, não necessariamente aberto.  $g(u, v)$  será portanto dita função de classe  $C^1(U)$  se existirem e forem contínuas as derivadas parciais  $\frac{\partial g}{\partial u}$  e  $\frac{\partial g}{\partial v}$  no interior de  $U$ .

Mudando-se na definição de parametrização o conjunto de chegada para um  $\mathbb{R}^n$  genérico, podemos descrever superfícies que existam em espaços euclidianos de qualquer dimensão.

Exemplo: Superfície esférica em  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem e de raio  $R > 0$

As três coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  são usadas para descrever pontos de  $\mathbb{R}^3$ . A superfície em questão representa o conjunto  $r = R$ . Podemos pensar intuitivamente que esta restrição retira um grau de liberdade a  $\mathbb{R}^3$ , e vai por isso definir um objecto “de dimensão 2”. Os cálculos seguintes formalizam esta ideia.

Uma parametrização para a superfície esférica pode ser

$g : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$g(\theta, \varphi) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi)$$

Note-se que esta parametrização não é uma função injectiva.

Neste caso,  $U = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  tem como interior  $]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$ , onde existem e são contínuas as derivadas parciais

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-R \cos \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \cos \theta, 0)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = (-R \sin \varphi \cos \theta, -R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$

O seu produto externo é dado por



$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin \varphi \sin \theta & R \sin \varphi \cos \theta & 0 \\ R \cos \varphi \cos \theta & R \cos \varphi \sin \theta & -R \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= (-R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, -R^2 \sin \varphi \cos \varphi)\end{aligned}$$

Como  $\varphi \in ]0, \pi[$  no interior de  $U$ , sabemos que  $\sin \varphi \neq 0$  nesse intervalo aberto. Como por outro lado  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  não podem ser simultaneamente nulos, concluímos que o vector  $\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi}$  nunca se anula no interior de  $U$ ; ou seja, a superfície em causa é regular.

Exemplo: Superfície cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$  de raio  $R > 0$  e em torno do eixo dos  $zz$

Usando coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ , podemos definir a parametrização

$$g : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

por

$$g(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z),$$

que é de classe  $C^1$  no seu domínio  $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ .

Para cada  $(\theta, z)$  no interior deste domínio, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

O seu produto externo é dado por

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0).$$

Como este vector nunca se anula no interior de  $U$ , a superfície é regular.

Como foi dito, dada uma superfície regular com parametrização  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , os vectores  $\vec{t}_1 = \frac{\partial g}{\partial u}$  e  $\vec{t}_2 = \frac{\partial g}{\partial v}$  definem dois vectores tangentes à curva (que são linearmente independentes em cada ponto) e  $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$  define um vector normal. Este vectores podem ser calculados em pontos do interior de  $U$ .

O *espaço tangente* à superfície  $S$  no ponto  $P = g(u, v)$ , denotado por  $T_P S$ , é o espaço vectorial (de dimensão 2) gerado pelos dois vectores  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$ , e o *espaço normal* à superfície no mesmo ponto, denotado por  $T_P^\perp S$  é o espaço vectorial (de dimensão 1)

gerado pelo vector  $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$  (ou seja, é o espaço ortogonal ao espaço tangente em  $P$ .)

Em cada ponto  $P = g(u, v)$ , o *plano tangente* à superfície é dado parametricamente por

$$\{P + c_1 \vec{t}_1 + c_2 \vec{t}_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

e a *recta normal* por

$$\{P + \lambda (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Denotaremos por  $\vec{n}$  um vector normal *unitário* (em cada ponto). A partir de uma parametrização de  $S$  regular, este pode ser dado tanto por  $\frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{\|\vec{t}_1 \times \vec{t}_2\|}$  como por  $-\frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{\|\vec{t}_1 \times \vec{t}_2\|}$ : os dois vectores têm a mesma direcção mas sentidos opostos. Para certas superfícies, poderemos falar na *normal unitária interior* e na *normal unitária exterior*. Com esta notação, e com qualquer dos dois possíveis valores para  $\vec{n}$ , a recta normal em  $P$  pode também ser dada por

$$\{P + \lambda \vec{n} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo: Superfície esférica em  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem e de raio 1

Os cálculos feitos acima permitem determinar o plano tangente e a recta normal em cada ponto  $g(\theta, \varphi)$ , para  $(\theta, \varphi) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$ .

Por exemplo, para  $P = g(\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , obtemos

$$\vec{t}_1|_P = \frac{\partial g}{\partial \theta}|_P = (-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, 0)|_P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$\vec{t}_2|_P = \frac{\partial g}{\partial \varphi}|_P = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)|_P = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi}|_P = (-\sin^2 \varphi \cos \theta, -\sin^2 \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \cos \varphi)|_P = (-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2})$$

Um vector normal unitário em  $P$  é dado por  $\vec{n} = (-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}) / \|(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2})\| = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ . Como a terceira componente deste vector é negativa, e dado o ponto em questão, vemos que se trata de uma normal unitária interior.

A recta normal à superfície que passa por  $P$  é dada por

$$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + \lambda (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ (para } \lambda \in \mathbb{R}).$$

O plano tangente em  $P$  é dado parametricamente por

$$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + c_1 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + c_2 (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ (para } c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Os pontos do plano tangente devem satisfazer o seguinte sistema, para todos os valores de  $c_1$  e  $c_2$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} + c_1 \frac{1}{2} - c_2 \frac{1}{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} - c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Resolvendo as duas primeiras equações em ordem a  $c_1$  e  $c_2$ , obtemos, em particular, que  $c_2 = x - y - 1$ .

Substituindo esse  $c_2$  na terceira equação, obtemos por fim  $x - y + \sqrt{2}z = 2$ , uma expressão para o plano tangente em coordenadas cartesianas.

O procedimento anterior pode ser feito para qualquer outro ponto  $g(\theta, \varphi)$  da superfície esférica. Note-se, contudo, que esta parametrização não permite determinar o plano tangente e a recta tangente em todos os pontos desta superfície. Por exemplo, não podemos determinar desta forma o plano tangente em  $(0, 0, 1)$ .

Um caso particular de parametrização de uma superfície é dado através de gráficos de funções diferenciáveis  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um conjunto de  $\mathbb{R}^2$  (e  $f$  tem derivada apenas em pontos interiores a  $U$ ). Nestes casos, podemos considerar como parâmetros as coordenadas  $x$  e  $y$  (por exemplo), e obter que o gráfico de  $f$  pode ser parametrizado por

$g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , para  $(x, y) \in U$ .

Tal como antes, obtemos, para pontos  $(x, y)$  no interior de  $U$

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 &= \frac{\partial g}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}) \\ \vec{t}_2 &= \frac{\partial g}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}) \\ \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 &= (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1) \end{aligned}$$

Note-se que, em qualquer caso, o vector normal anterior nunca se anula, e por isso as superfícies assim parametrizadas vão ser regulares.

Quando isso for possível, podemos considerar também funções  $f(x, z)$  ou  $f(y, z)$ .

Exemplo: Meia Superfície esférica em  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem e de raio 1, com  $z \geq 0$

Em coordenadas cartesianas, a superfície esférica de centro na origem e raio 1 é dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Resolvendo em ordem a  $z$ , determinamos uma solução  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , que produz uma parametrização

$$g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \text{ definida no conjunto } \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Em pontos no interior deste conjunto, é possível derivar  $g$  e obter então vectores tangentes e normais. Por exemplo, para o ponto  $(0, 0, 1)$  (que não pudemos estudar com

a parametrização anterior), obtemos

$$\begin{aligned}\vec{t}_1|_{(0,0,1)} &= \frac{\partial g}{\partial x}|_{(0,0,1)} = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}})|_{(0,0,1)} = (1, 0, 0) \\ \vec{t}_2|_{(0,0,1)} &= \frac{\partial g}{\partial y}|_{(0,0,1)} = (0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}})|_{(0,0,1)} = (0, 1, 0) \\ \vec{t}_1 \times \vec{t}_2|_{(0,0,1)} &= (\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1)|_{(0,0,1)} = (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Este último vector tem norma 1, e é por isso um vector normal unitário. Pela análise geométrica do exemplo, vemos que se trata de uma normal exterior. O plano tangente nesse ponto é dado por  $z = 1$ , e a recta normal coincide com o eixo dos  $zz$ .

Uma outra maneira de definir superfícies regulares em  $\mathbb{R}^3$  é considerar conjuntos de nível de funções diferenciáveis  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Estas funções podem também ter como domínio subconjuntos adequados de  $\mathbb{R}^3$ . Um conjunto de nível de  $F$  será dado por uma condição  $F(x, y, z) = c$ , para algum valor de  $c \in \mathbb{R}$ .

Por exemplo, uma superfície esférica de centro na origem e raio  $R$  é dada pelo conjunto de nível  $F(x, y, z) = R$ , para  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Em pontos em que o gradiente  $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$  não se anule, podemos usar o Teorema da Função Implícita para deduzir que localmente  $F$  define o gráfico de uma função de duas variáveis, como no que se viu acima, e define portanto também uma superfície regular.

O interesse deste tipo de análise reside em permitir um cálculo mais directo de vectores normais e tangentes num ponto, sem se ter de recorrer às parametrizações que  $F$  define de modo implícito. Consideremos uma curva regular definida numa vizinhança de um ponto  $P$  da superfície para o qual o gradiente não se anule. Se esta curva tiver como parametrização  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $P = g(c)$  para algum  $c \in ]a, b[$ , a composta  $F \circ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é constante, e por isso  $(F \circ g)'(c) = 0$ . Pela regra de derivação da função composta, obtemos  $(F \circ g)'(c) = \nabla F(g(c)) \cdot g'(c) = 0$ . Como isto é válido para qualquer curva regular que passe por  $P$ , e como  $g'(c)$  define sempre um vector tangente à curva (e portanto também à superfície a que pertence), concluímos que  $\nabla F(P)$  é um vector normal à superfície em  $P$ .

Exemplo: Superfície esférica em  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem e de raio  $R > 0$

A partir da condição  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = R$ , obtemos

$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ , que nunca se anula nos pontos da superfície, e define assim um vector normal em cada ponto  $(x, y, z)$ .

Obtemos, para além disso,  $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$ , um vector normal unitário (exterior) para cada  $(x, y, z)$ .

Por exemplo, no ponto  $(R, 0, 0)$  o vector normal unitário exterior é  $(1, 0, 0)$ . Repare-se que, nos dois exemplos em que já nos referimos a esta superfície esférica, e com as

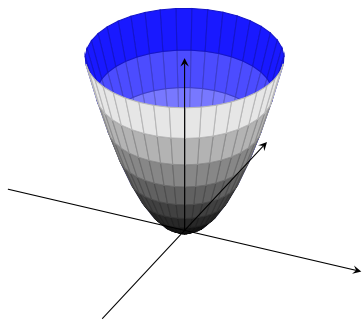
parametrizações então encontradas, não poderíamos ter calculado esta normal.

No ponto  $(0, 0, R)$ , a normal unitária exterior é  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  (como se viu no exemplo anterior). Os vectores tangentes neste ponto devem ser perpendiculares a este  $\vec{n}$ , satisfazendo assim a condição

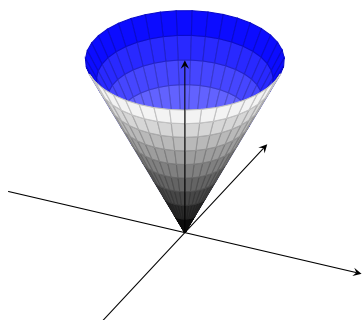
$$(x - 0, y - 0, z - R) \cdot (0, 0, 1) = 0, \text{ que é equivalente a } z = R, \text{ como já tínhamos visto.}$$

Seguem-se exemplos de algumas superfícies de  $R^3$  dadas como conjuntos de nível.

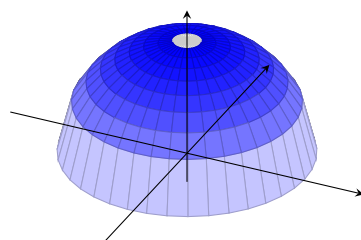
- Parabolóide  $z = 2(x^2 + y^2)$  :



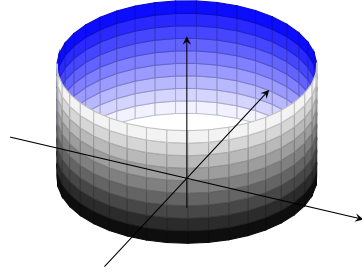
- Superfície Cônica  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$  :



- Meia Superfície Esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$ :



- Superfície Cilíndrica  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z \in [0, 1]$ :



### 3 Integrais de Superfície

#### 3.1 Áreas de Superfícies Regulares

Dada uma superfície regular com parametrização  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é uma região de  $\mathbb{R}^2$ , os vectores tangentes  $\frac{\partial g}{\partial u}$  e  $\frac{\partial g}{\partial v}$  definem, em cada ponto  $g(u, v)$  da superfície, um paralelogramo cuja área é dada pela norma do produto externo  $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ .

Um modo intuitivo de obter aproximações para o valor da área de uma superfície regular é considerar coberturas dessa superfície por paralelogramos (escolhendo-se um número finito de pontos nessa superfície, que são unidos de modo a formar paralelogramos planos.) Este tipo de coberturas define pois poliedros cujos lados são paralelogramos, e o volume desses poliedros pode ser calculado directamente; escolhendo-se coberturas cada vez mais finas, e portanto com cada vez mais pontos, obtemos por este processo aproximações cada vez melhores do valor da área da superfície (estamos aqui a considerar apenas superfícies para as quais exista limite para tais aproximações.)

Se só considerarmos paralelogramos tais que um dos parâmetros se mantém constante para vértices adjacentes, no limite (se existir), os lados dos paralelogramos aproximam-se de vectores tangentes à superfície em cada ponto, e as áreas dos paralelogramos aproximam-se (nos casos a considerar) do valor  $\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\|$  anterior.

Podemos assim definir a área de uma superfície regular  $S$  com parametrização  $g(u, v)$  por

$$A(S) = \iint_U \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du dv,$$

sempre que o integral exista.

Pode ver-se que esta definição não depende da parametrização escolhida para a superfície.

Exemplo: Superfície esférica em  $\mathbb{R}^3$  centrada na origem e de raio  $R > 0$

Tal como foi visto anteriormente, uma parametrização para a superfície esférica  $S$  pode ser  $g : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$g(\theta, \varphi) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi).$$

Para  $\varphi$  e  $\theta$  no interior de  $U = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ , foram já calculadas as derivadas

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-R \cos \varphi \sin \theta, R \cos \varphi \cos \theta, 0)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi)$$



e o seu produto externo é dado por

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} = (-R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta, -R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta, -R^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)$$

cujas norma é

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right\| &= \sqrt{R^4 \operatorname{sen}^4 \varphi \cos^2 \theta + R^4 \operatorname{sen}^4 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta + R^4 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + R^4 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{R^4 \operatorname{sen}^2 \varphi} \\ &= R^2 |\operatorname{sen} \varphi|. \end{aligned}$$

A área da superfície é então dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_U \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right\| d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 |\operatorname{sen} \varphi| d\varphi d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta \\ &= 4\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \\ &= 4\pi R^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Exemplo: Parabolóide  $z = x^2 + y^2$  para  $z \in [0, 1]$

Podemos parametrizar a superfície a partir do gráfico da função

$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Obtemos  $g : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ , e portanto

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

que têm produto externo

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

com norma  $\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ .

A área do parabolóide  $S$  é dada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr \\ &= 2\pi \left. \frac{2}{3} \frac{1}{8} (1 + 4r^2)^{3/2} \right|_0^1 \\ &= \frac{4\pi}{24} (5^{3/2} - 1) \\ &= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

Para o cálculo do integral duplo anterior, foram usadas coordenadas polares.

### 3.2 Integrais de Funções Escalares sobre Superfícies Regulares

O integral que nos permite calcular a área de uma superfície regular  $S$  é um exemplo de integral sobre  $S$  de uma função escalar definida numa região que contenha  $S$ . Para uma função  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $V$  é uma região de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ , definimos, sempre que o integral duplo da direita existir, o *integral de superfície* de  $f$  sobre  $S$  por:

$$\iint_S f \, dS = \iint_U f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv$$

A superfície  $S$  deve ser regular, e estamos a considerar uma sua parametrização  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Pode ver-se que o valor do integral não depende da escolha de parametrização feita.

O cálculo da área de uma superfície regular  $S$  corresponde, nesta nova definição, ao integral de superfície  $\iint_S 1 \, dS$ , e portanto a  $f = 1$ . O gráfico de qualquer outra função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  como acima é um subconjunto bidimensional de  $\mathbb{R}^4$ , e podemos interpretar o valor do integral  $\iint_S f \, dS$  como o volume tridimensional entre  $S$  e o seu gráfico. No caso de  $f = 1$ , este volume tem "altura" constante 1, e portanto o volume tridimensional vale a "área da base", ou seja, a área da superfície.

A definição de  $\iint_S f \, dS$  é uma generalização da definição de integral de linha de uma função escalar ao longo de uma curva regular  $\int_c f \, dg$  vista anteriormente.

Exemplo:

Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

Para calcular o integral de  $f$  sobre a superfície cilíndrica  $x^2 + z^2 = 1$ , com  $0 \leq y \leq 1$ , usamos uma parametrização

$$g(\theta, y) = (\cos \theta, y, \sin \theta) \text{ (para } \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } y \in [0, 1]).$$

Obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (0, 1, 0),$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (-\cos \theta, 0, -\sin \theta),$$

que tem norma 1.

O integral é dado por

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(g(\theta, y)) \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 + y^2 dy d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 1 + y^2 dy \\ &= 2\pi \left( y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi (1 + 1/3) \\ &= \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

### 3.3 Integrais de Funções Vectoriais sobre Superfícies Regulares

Definimos anteriormente integrais de linha tanto de funções escalares como de funções vectoriais, e podemos agora considerar também integrais de superfície de funções vectoriais (definidas em regiões que contenham a superfície sobre a qual se integra.)

Seja  $S$  uma superfície regular sobre a qual se possa definir um campo vectorial contínuo que em cada ponto de  $S$  forneça um vector  $\vec{n}$  unitário normal a  $S$ . Se a su-

perfície tem parametrização  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a expressão  $\frac{\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\|}$  define um campo de vectores normais unitários, e consideramos apenas superfícies para as quais este campo seja dado por uma função contínua.

Dado um campo  $\vec{n}$  (contínuo) de vectores unitários normais a  $S$  e uma função vectorial  $\vec{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $V$  é uma região de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ , definimos, sempre que o integral duplo da direita existir, o *integral de superfície* de  $\vec{F}$  sobre  $S$  no sentido de  $\vec{n}$  por:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_U \vec{F}(g(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du dv,$$

onde  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma parametrização para  $S$  tal que em cada ponto  $\frac{\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\|}$  coincide com  $\vec{n}$ .

A expressão anterior para  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$  é a mesma dada pela definição de integral sobre  $S$  da função *escalar*  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ , porque

$$\vec{F}(g(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| = \vec{F}(g(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right).$$

Ao integral de superfície  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$  dá-se também o nome de *fluxo* de  $\vec{F}$  através da superfície  $S$  (no sentido de  $\vec{n}$ ). Tal como para os integrais de linha de funções vectoriais, o significado físico deste fluxo é o de trabalho, neste caso trabalho do campo de forças ao longo de toda a superfície no sentido de  $\vec{n}$ . Se  $\vec{n}$  for perpendicular ao campo  $\vec{F}$  em todos os pontos de  $S$ , então o produto interno  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  é sempre nulo (em  $S$ ), e portanto o trabalho em questão é nulo.

Exemplo: Fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, y)$  ao longo do parabolóide  $z = 1 + x^2 + y^2$ , com  $z \in [1, 2]$ , no sentido da normal unitária exterior

Uma parametrização para a superfície é  $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 + r^2)$ , para  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $r \in [0, 1]$ , de onde vem

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 2r),$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial r} = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, -r),$$

que tem norma  $\sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}$ .

A normal  $\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial r}$  encontrada tem terceira componente negativa em todos os pontos da superfície, e portanto é geometricamente uma normal exterior a  $S$ .

O fluxo é dado por

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \vec{F}(g(r, \theta)) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial r} \right) dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta, 0, r \sin \theta) \cdot (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, -r) dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^3 \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta) dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \sin \theta \right) d\theta \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Exemplo: Fluxo do campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  ao longo da meia superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , com  $z > 0$ , no sentido da normal unitária exterior

Como foi visto anteriormente, esta superfície pode ser parametrizada através de coordenadas esféricas:

$$g(\theta, \varphi) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi), \text{ com } \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } \varphi \in [0, \pi].$$

Para esta parametrização, foi já calculado

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} = (-R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, -R^2 \sin \varphi \cos \varphi)$$

Esta normal só pode ser calculada agora para  $\varphi \in ]0, \pi[$ , pois só aí é que as derivadas estão definidas. Não considerar a fronteira do intervalo  $[0, \pi]$  (para o parâmetro  $\varphi$ ) não vai ter influência no valor do integral a calcular.

Escolhendo-se por exemplo  $\theta = \varphi = \pi/4$ , vê-se que a normal assim descoberta tem terceira componente negativa, logo é a normal interior à superfície esférica, e precisamos pois de considerar a normal simétrica a essa. O fluxo é então dado por

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \vec{F}(g(\theta, \varphi)) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right) d\theta \, d\varphi \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi) \cdot (-R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, -R^2 \sin \varphi \cos \varphi) d\theta \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R^3 \sin \varphi) d\theta \, d\varphi = 2\pi R^3
\end{aligned}$$

O cálculo anterior pode ser feito de modo mais directo se interpretarmos o fluxo como um integral da função escalar  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ , como foi referido acima.

A meia superfície esférica em questão faz parte da curva de nível  $R^2$  da função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , e portanto um vector normal unitário em cada ponto é dado por

$$\frac{\nabla F(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x/R, y/R, z/R)$$

Para  $(x, y, z)$  na meia superfície esférica superior, a normal anterior tem terceira componente positiva, e é portanto a normal necessária para o cálculo do integral.

Obtemos  $\vec{F} \cdot \vec{n} = (x, y, z) \cdot (x/R, y/R, z/R) = (x^2 + y^2 + z^2)/R = R$ ,

e o fluxo fica

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S R dS = R \cdot A(S) = 2\pi R^3.$$