Análise Matemática I

Teste - 12 de Novembro de 2005

LEA, LEBM, LEFT, LMAC

1. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x|x-1| \leq 2\} \qquad B = V_2(0)$$

a) Mostre que $A =]-\infty, 2]$.
b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$,

$$\sup A \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}), \ \max A \cap B, \ \inf A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}), \ \min A^c \cap \mathbb{Q}.$$

2. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes:

i)
$$\begin{cases} (a) & \{1, \frac{2}{3}\} \subset \{\frac{2}{3}, \{1\}\} \\ (b) & \{1, \frac{2}{3}\} \subset \{\frac{2}{3}, \{\frac{2}{3}, 1\}\} \\ (c) & \{1, (2,3)\} \subset \{1, (3,2)\} \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} (d) & \forall x \in \mathbb{R} \ \exists r \in \mathbb{Q} \ \ r \in]x, x+1[\\ (e) & \exists y \in \mathbb{Q} \ \forall z \in \mathbb{R} \ \ y \in]z, z+1[\end{cases}$$

iii) $(f) \quad \exists a \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \ \ a \leq x$

iv) $(g) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \ \ (\sqrt{2} + \frac{2}{n}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

v)
$$\begin{cases} (h) & \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^+ \ \ x = \sqrt{2} + \frac{2}{n}\} \text{ é numerável} \\ (i) & \#\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^+ \ \ x = \sqrt{2} + \frac{2}{n}\} = \#\mathbb{Q} \\ (j) & \#\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^+ \ \ x = \sqrt{2} + \frac{2}{n}\} = \#(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

3. Considere as sucessões reais de termos gerais seguintes

$$\frac{(n+1)!}{n \cdot n!}, \qquad (-1)^n \sqrt[n]{n}, \qquad \frac{(2n+3)^6}{3\sqrt{nn^5}}.$$

Diga, justificando abreviadamente as respostas, quais destas sucessões são:
i) convergentes; ii) limitadas; iii) de Cauchy.

Para cada uma delas indique o conjunto dos sublimites, em $\mathbb{R}$ e em $\widetilde{\mathbb{R}}$.

4. a) Prove que $\forall n \in \mathbb{N}^+ \ \frac{2^n+1}{2^{n+1}} < 1$.

b) Seja u_n a sucessão definida por

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \tfrac{2^n+1}{2^{n+1}} u_n \end{aligned}$$

Prove que u_n é convergente e calcule o seu limite.

5. Sejam u_n, v_n, w_n sucessões de termos reais tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \ \exists k \in \mathbb{N}^+ \ \exists l \in \mathbb{N}^+ \qquad u_k < v_n < w_l$$

a) Prove que se u_n e w_n são convergentes, então v_n é limitada.
b) Suponha que $\lim u_n = \lim w_n$. Diga, justificando, se v_n é necessariamente convergente.