Análise Matemática I

1° Semestre de 2001/02
LEC e LET
Resumo da matéria

Resultados do texto [1]

I Números reais

1. Admitimos a existência de um conjunto $\mathbb{R}$ (a cujos elementos chamamos números reais) no qual supomos definidas duas operações, uma chamada adição e outra multiplicação, e supomos fixado um subconjunto de $\mathbb{R}$, designado por $\mathbb{R}^+$, a cujos elementos chamamos números positivos. Os quatro termos *número real, número positivo, adição e multiplicação* são adoptados como conceitos primitivos da teoria o que significa que não são definidos.

2. Aceita-se que $(\mathbb{R}, +, \times)$ seja um *corpo*, i.e., que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

   A. **Axiomas da adição**:

   i) associatividade:
   $$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x+y)+z = x+(y+z);$$
   ii) comutatividade:
   $$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x+y = y+x;$$
   iii) elemento neutro:
   $$\exists_{u\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ u+x = x;$$
   prova-se facilmente que o elemento neutro é único; designa-se o elemento neutro da adição por 0;

   iv) existência de simétrico:
   $$\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{x'\in\mathbb{R}}\ x+x' = 0;$$
   prova-se facilmente que o elemento simétrico é único; designa-se o simétrico de x por $-x$.

   O par $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo comutativo.

   Definição da subtracção:
   $$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x-y := x+(-y).$$

   B. **Axiomas da multiplicação**:

   i) associatividade:
   $$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x\times y)\times z = x\times(y\times z);$$
   ii) comutatividade:
   $$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x\times y = y\times x;$$

iii) elemento neutro:

$$\exists_{u\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ u\times x = x;$$

prova-se facilmente que o elemento neutro é único; designa-se o elemento neutro da multiplicação por 1;

iv) existência de inverso:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\exists_{x'\in\mathbb{R}}\ x\times x' = 1;$$

prova-se facilmente que o elemento inverso é único; designa-se o inverso de x por $1/x$.

O par $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\times)$ é um grupo comutativo.

Definição da divisão:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \frac{x}{y} := x\times(1/y).$$

C. **Axioma da distributividade da multiplicação em relação à adição**:

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ x\times(y+z) = x\times y + x\times z.$$

Prova-se facilmente que 0 é elemento absorvente da multiplicação.

Note-se que se impõe que o elemento neutro da multiplicação seja distinto do elemento neutro da adição. De facto, no axioma relativo à existência de elemento neutro para a multiplicação exige-se que $u\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Note-se que se se levantasse esta restrição, então o conjunto $\{0\}$ com a adição e multiplicação usuais satisfaria os nove axiomas anteriores.

3. Aceita-se que $(\mathbb{R},\mathbb{R}^+,+,\times)$ seja um *corpo ordenado*, i.e., que seja um corpo e que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

D. **Axiomas de ordem**:

i) fecho de $\mathbb{R}^+$ para a adição e multiplicação:

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}^+}\ x+y\in\mathbb{R}^+,\ x\times y\in\mathbb{R}^+;$$

diz-se que um número é negativo sse o seu simétrico for positivo e designa-se por $\mathbb{R}^-$ o conjunto dos números negativos;

ii) tricotomia: todo o número real x verifica uma e uma só das três condições seguintes: x é positivo, x é zero ou x é negativo.

Sendo x, $y\in\mathbb{R}$, dizemos que x é menor do que y, ou que y é maior do que x, e escrevemos $x<y$ ou $y>x$, sse $y-x\in\mathbb{R}^+$.

Seja $x<y$. Prova-se facilmente que se $z>0$, então $xz<xy$; se $z<0$, então $xz>xy$.

Com os onze axiomas anteriores e a proposição da linha anterior prova-se facilmente que $0<1$.

Nota: $(\mathbb{Q},\mathbb{Q}^+,+,\times)$ também é um corpo ordenado. O conjunto $\mathbb{Q}$ é definido mais à frente.

4. Aceita-se que $(\mathbb{R},\mathbb{R}^+,+,\times)$ seja um *corpo ordenado completo*, i.e., que que seja um corpo ordenado e que seja verdadeiro o

IV. **Axioma do supremo**: qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo.

5. Diz-se que L é majorante do conjunto A sse qualquer elemento de A for menor ou igual a L. Diz-se que l é minorante do conjunto A sse qualquer elemento de A for maior ou igual a l. Diz-se que o conjunto A é limitado sse tiver majorantes e minorantes.

   Diz-se que M é máximo do conjunto A sse M é majorante de A e $M \in A$. Diz-se que m é mínimo do conjunto A sse m é minorante de A e $m \in A$.

   Diz-se que s é supremo do conjunto A sse s é o mínimo do conjunto dos majorantes de A. Diz-se que $\underline{s}$ é ínfimo do conjunto A sse $\underline{s}$ é o máximo do conjunto dos minorantes de A.

6. Existirá de facto $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, +, \times)$ satisfazendo os doze axiomas acima? Pode construir-se $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, +, \times)$ se se admitir a existência de $(\mathbb{N}, +)$.

7. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é indutivo sse $x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$.

8. O conjunto, $\mathbb{N}$, dos números naturais é, por definição, a intersecção de todos os conjuntos indutivos que contêm 0. O conjunto $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

9. Princípio de indução matemática. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathrm{P}(n)$ uma proposição. Se $\mathrm{P}(0)$ é verdadeira e $\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$, então $\mathrm{P}(n)$ é uma proposição verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. (De facto, designando por A o subconjunto formado pelos elementos de $\mathbb{N}$ para os quais $\mathrm{P}(n)$ é uma proposição verdadeira, A é indutivo e contém 0, pelo que $\mathbb{N} \subset A$; mas então $A = \mathbb{N}$, uma vez que $A \subset \mathbb{N}$.)

10. Propriedade Arquimedeana: o conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado.

    Prova: Suponhamos que $\mathbb{N}$ era majorado. Então $\mathbb{N}$ teria supremo s. Existiria necessariamente um natural $p > s - 1$ (caso contário $s - 1$ seria majorante de $\mathbb{N}$). Mas então $p + 1 > s$. Como $p + 1$ é um natural, chegámos a uma contradição. Logo, $\mathbb{N}$ não é majorado.

    (Nota: para provar que $\mathbb{N}$ não é majorado tem que se recorrer ao axioma do supremo. Há corpos ordenados (não completos) onde os naturais são majorados.)

11. Define-se o conjunto, $\mathbb{Z}$, dos números inteiros como a união do conjunto dos números naturais com o conjunto dos seus simétricos.

12. Define-se o conjunto dos números racionais como sendo o conjunto dos números que se possam escrever na forma x/y com $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{N}_1$.

13. Existência de irracionais. Pode provar-se a existência de um número irracional, mostrando que existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 2$ e que nenhum número racional satisfaz esta condição.

    Prova. Admitamos que existia $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Então, existem $p, q \in \mathbb{N}_1$, primos entre si, tais que $r = p/q$. Segue que $p^2 = 2q^2$, pelo que p é par, $p = 2s$ com $s \in \mathbb{N}_1$. Logo, $4s^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2s^2 = q^2$, pelo que q também é par. Mas então p e q não são primos entre si.

    Para provar que existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 2$, define-se $s = \sup\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. O número real s está bem definido porque o conjunto é não vazio e majorado. Prova-se que são impossíveis as desigualdades $s^2 < 2$ e $s^2 > 2$, porque no primeiro caso $(s + 1/n)^2 < 2$ para n suficientemente grande, e no segundo caso $(s - 1/n)^2 > 2$ para n suficientemente grande.

14. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}_1$. Define-se $\sqrt[n]{a}$ como o supremo do conjunto dos números reais x tais que $x^n < a$. Tem-se que $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

15. Diz-se que dois conjuntos são equipotentes sse existe uma bijecção entre eles.

16. Densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Existem um racional e um irracional em $]a, b[$.

    Prova. Decorre facilmente do seguinte lema (tomando $c = b - a$ e uma vez que os múltiplos inteiros de um (ir)racional são (ir)racionais): qualquer que seja $c > 0$ existem um racional e um irracional em $]0, c[$. Este lema é consequência de propriedade Arquimedeana e do facto de $1/n$ ser racional e $\sqrt{2}/n$ ser irracional, $\forall_{n \in \mathbb{N}_1}$.

    Conclui-se, obviamente, que em qualquer intervalo com mais de um ponto há infinitos racionais e infinitos irracionais.

17. Diz-se que um conjunto é numerável sse for equipotente a $\mathbb{N}$. Os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são numeráveis.

    Um conjunto diz-se contável sse for finito ou numerável.

18. Princípio do encaixe. Seja $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ uma família de intervalos limitados e fechados satisfazendo $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall_{n \in \mathbb{N}_1}$. Então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

    Prova. Se $I_n = [a_n, b_n]$ então $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \supset [\sup_{n \in \mathbb{N}_1} a_n, \inf_{n \in \mathbb{N}_1} b_n] \neq \emptyset$, porque $\sup_{n \in \mathbb{N}_1} a_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}_1} b_n$, desigualdade esta que decorre facilmente da definição de supremo e ínfimo.

19. Seja a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. O intervalo $[a, b]$ não é numerável.

    Prova. O argumento é por contradição. Suponhamos que $[a, b] = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$. Constrói-se uma família I_n de intervalos limitados e fechados, $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, tais que $x_n \notin I_n$, $\forall_{n \in \mathbb{N}_1}$. Pelo princípio do encaixe, existe $x_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Observa-se que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_1$, $x_n \notin I_n$ implica que $x_n \notin \cap_{n=1}^{\infty} I_n$, pelo que $x_n \neq x_0$. Isto contradiz o facto de $x_0 \in [a, b] = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$.

20. Teorema de **Cantor**. Seja A um conjunto qualquer e $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A, ou seja, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A. Então existe uma aplicação injectiva de A em $\mathcal{P}(A)$, mas não existe nenhuma aplicação bijectiva entre estes dois conjuntos. Diz-se que o cardinal de A é inferior ao cardinal de $\mathcal{P}(A)$ e escreve-se $\#A < \#\mathcal{P}(A)$.

    Prova. Suponhamos que existia uma bijecção φ de A em $\mathcal{P}(A)$. Designe-se por M o conjunto definido por $M = \{x \in A : x \notin \varphi(x)\}$ e por m o elemento de A tal que $\varphi(m) = M$. Facilmente se verifica que não se pode ter nem $m \in M$ nem $m \notin M$.

21. Teorema de **Schröder−Bernstein**. Se existe uma função injectiva $f : A \to B$ e existe uma função injectiva $g : B \to A$, então existe uma bijecção $h : A \to B$.

22. **Cantor** pôs a questão de saber se existiria algum conjunto $A \subset \mathbb{R}$ com $\#\mathbb{N} < \#A < \#\mathbb{R}$. Em sua opinião não deveria existir um tal conjunto, mas ele não foi capaz de o provar. Esta hipótese, conhecida como *hipótese do contínuo*, foi um dos grandes desafios matemáticos deixados pelo século XIX. Em 1940 **Gödel** provou que não se podia desprovar a hipótese do contínuo usando os axiomas aceites da Teoria do Conjuntos. Mais tarde, em 1963, **Cohen** mostrou que, de acordo com os mesmos axiomas, era impossível provar a hipótese do contínuo. Juntos, estes resultados implicam que a hipótese do contínuo é indecidível. Pode ser aceite ou rejeitada como uma afirmação acerca da natureza dos conjuntos infinitos, e em qualquer dos casos nenhuma contradição lógica resultará. Poderá encontrar mais informação sobre este assunto em S. Abbott, *Understanding Analysis*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics, 2001.

23. Por definição, $|x| = x$ se $x \geq 0$, e $|x| = -x$ se $x < 0$.

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. A vizinhança ϵ de a é $V_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\} =]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

II Sucessões

1. Por definição, uma sucessão de termos em A é uma aplicação de $\mathbb{N}_1$ em A.

   Sendo u uma sucessão, os valores de $u(1), u(2), \ldots, u(n), \ldots$ dizem-se os termos da sucessão. O valor $u(n)$ é o termo de ordem n, ou enésimo termo, da sucessão. Em vez de se escrever $u(n)$, é habitual escrever-se u_n para designar o enésimo termo da sucessão u. É ainda habitual designar a sucessão u por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$, ou simplesmente (u_n).

   As sucessões de termos em $\mathbb{R}$ dizem-se sucessões reais.

   Por razões de comodidade, por vezes consideram-se sucessões definidas em $\mathbb{N}$, em vez de $\mathbb{N}_1$, ou seja, aplicações de $\mathbb{N}$ num conjunto A.

2. Habitualmente representamos geometricamente os termos de uma sucessão real u por um dos dois seguintes processos: esboçando o seu gráfico no plano cartesiano, ou marcando os primeiros termos da sucessão na recta real. O gráfico da sucessão u é o conjunto $\{(n, u_n) : n \in \mathbb{N}_1\}$.

3. Uma progressão aritmética de primeiro termo a e razão r, é uma sucessão u, definida por $u_n = a + (n-1)r$, para $n \in \mathbb{N}_1$.

   Uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão r, é uma sucessão u, definida por $u_n = ar^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}_1$.

   A sucessão $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dos números de Fibonacci é definida por

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

   Dizemos que uma tal sucessão está definida por recorrência.

   É simples provar por indução que $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, para $n \in \mathbb{N}$.

4. As operações algébricas estendem-se naturalmente às sucessões reais.

5. Uma sucessão real diz-se minorada sse for minorado o conjunto dos seus termos e majorada sse for majorado o conjunto dos seus termos. Uma sucessão diz-se limitada sse for minorada e majorada, ou seja, sse for limitado o conjunto dos seus termos.

   Uma sucessão real diz-se crescente sse $u_n \leq u_{n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$ e decrescente sse $u_n \geq u_{n+1}$. Diz-se monótona sse for crescente ou decrescente. Diz-se ainda estritamente monótona sse for estritamente crescente ou estritamente decrescente, onde estas designações têm o significado óbvio.

6. Sejam u e v duas sucessões e suponha-se que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $v_n \in \mathbb{N}_1$ e ainda que v é estritamente crescente. A sucessão $w = u \circ v$, definida por $w_n = (u \circ v)(n) = u(v(n)) = u_{v_n}$, diz-se uma subsucessão de u, mais precisamente, a subsucessão de u determinada por v.

7. Tem grande importância o seguinte Teorema. Qualquer sucessão real tem subsucessões monótonas.

   Prova. Dada uma sucessão real u, seja $K := \{p : \forall_{n>p}\ u_n > u_p\}$. Se K é infinito, u tem uma subsucessão estritamente crescente. Se K é finito, u tem uma subsucessão decrescente.

8. Diz-se que a sucessão real u converge ou tende para a, e escreve-se $\lim u = a$, $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ ou $u_n \to a$, sse

$$\forall_{V_\epsilon(a)} \exists_{p\in\mathbb{N}_1} \forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ n > p \Rightarrow u_n \in V_\epsilon(a),$$

   ou seja,

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{p\in\mathbb{N}_1} \forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ n > p \Rightarrow |u_n - a| < \epsilon.$$

   Uma sucessão real diz-se convergente sse existe um número real a tal que $u_n \to a$. As sucessões que não são convergentes dizem-se divergentes.

   Uma sucessão diz-se um infinitésimo sse converge para zero.

9. Toda a sucessão convergente é limitada.

10. Unicidade do limite. Seja u_n uma sucessão real e $a,\ b \in \mathbb{R}$. Se $u_n \to a$ e $u_n \to b$, então $a = b$.

11. Teorema das Sucessões Enquadradas. Sejam u, v e w três sucessões reais e suponha-se que a partir de certa ordem $u_n \leq v_n \leq w_n$. Se u e w convergem ambas para a, então v também converge, e o seu limite é a.

12. O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.

13. a) Se u e v são sucessões convergentes então $u + v$ e $u \times v$ são sucessões convergentes e tem-se $\lim(u+v) = \lim u + \lim v$, $\lim(u\times v) = \lim u \times \lim v$. Se, além disso, $v_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ e $\lim v \neq 0$, então $\lim(u/v) = \lim u / \lim v$.

    b) Sejam u e v duas sucessões convergentes e suponha-se que, para infinitos valores de n, $u_n \leq v_n$. Então $\lim u \leq \lim v$.

    c) Se $u \to a$, então $|u| \to |a|$.
    Prova. Segue da desigualdade $||u_n| - |a|| \leq |u_n - a|$.

    d) Seja $p \in \mathbb{N}_1$ e $u_n \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Se $u_n \to a$, então $\sqrt[p]{u_n} \to \sqrt[p]{a}$.
    A prova decorre de

$$|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}| = \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \sqrt[p]{a}(\sqrt[p]{u_n})^{p-2} + \ldots + (\sqrt[p]{a})^{p-2}\sqrt[p]{u_n} + (\sqrt[p]{a})^{p-1}} \leq \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}}.$$

14. Se $|c| < 1$, então $c^n \to 0$.

    Prova. Usa-se a desigualdade de **Bernoulli**: $(1 + k)^n \geq 1 + nk$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $k > -1$.

15. Para todo $a > 0$, tem-se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

    Prova. Usa-se a desigualdade de Bernoulli: $(1 + k_n)^n \geq 1 + nk_n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer sucessão (k_n) cujos termos sejam maiores do que -1. Suponha-se em primeiro lugar que $a > 1$ e defina-se $k_n := \sqrt[n]{a} - 1$. Claro que $k_n > 0$ e $a = (1 + k_n)^n \geq 1 + nk_n$. Logo, $k_n \leq (a - 1)/n$. Pelo Teorema das Sucessões

Enquadradas, k_n é um infinitésimo. Isto prova que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, para $a > 1$. No caso em que $0 < a < 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \left(1/\sqrt[n]{1/a}\right) = 1/1 = 1$. O caso $a = 1$ é trivial.

16. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

    Prova. Se a sucessão é crescente prova-se que ela converge para o supremo do conjunto dos seus termos.

17. A sucessão u, definida por $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ é obviamente estritamente crescente e é também majorada (por exemplo por 3, porque $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ para $k > 2$). Logo converge. Chamamos ao seu limite número de **Neper**, usualmente designado pela letra e.

    Outra sucessão com limite e é a sucessão v, definida por $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, também crescente e majorada.

18. Um Teorema fundamental sobre sucessões reais deve-se a **Bolzano** e **Weierstrass**. Qualquer sucessão limitada tem subsucessões convergentes.

    Prova. Qualquer sucessão real u tem uma subsucessão monótona. Essa subsucessão é, além de monótona, limitada.

19. Dizemos que a sucessão real u é uma sucessão de Cauchy sse

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{p\in\mathbb{N}_1} \forall_{m,n\in\mathbb{N}_1}\ m, n > p \Rightarrow |u_m - u_n| < \epsilon.$$

20. Uma sucessão real é convergente sse é uma sucessão de Cauchy.

    Ideia da prova. É fácil provar que qualquer sucessão convergente é de Cauchy. Em sentido inverso, se u é de Cauchy, então é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem uma subsucessão convergente, digamos para a. É fácil provar que $\lim u = a$.

21. A definição de sucessão de Cauchy é muito útil para provar a convergência de sucessões para as quais não temos candidato a limite.

22. Diz-se que a é sublimite da uma sucessão sse a sucessão tem uma subsucessão convergente para a.

23. Seja u uma sucessão real limitada. Então u é convergente sse o conjunto dos seus sublimites é singular.

    Claro que se u é convergente, então o conjunto dos seus sublimites é singular. Para a prova em sentido inverso, é fácil provar que se u não converge, então o conjunto dos seus sublimites não é singular.

24. O conjunto dos sublimites de uma sucessão limitada tem elemento máximo e mínimo.

25. Chama-se limite superior de (u_n), e denota-se por $\limsup u_n$ ou $\overline{\lim}\ u_n$, ao maior sublimite da sucessão (u_n). Chama-se limite inferior de (u_n), e denota-se por $\liminf u_n$ ou $\underline{\lim}\ u_n$, ao menor sublimite da sucessão (u_n).

26. Seja (u_n) uma sucessão limitada e S o conjunto dos seus sublimites. Então, (i) $S \neq \emptyset$; (ii) S é singular sse (u_n) é convergente; (iii) uma sucessão monótona, é convergente (pelo que S é um conjunto singular); (iv) S tem elemento máximo e mínimo. Estas quatro propriedades *não subsistem no quadro das sucessões não limitadas*. No sentido de as estender a sucessões não limitadas e no sentido de caracterizar o comportamento de um maior leque de sucessões, introduz-se a recta acabada.

27. A recta acabada é o conjunto definido por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, onde $-\infty$ e $+\infty$ designam dois objectos matemáticos distintos e distintos de qualquer número real. Um elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ diz-se finito sse pertence a $\mathbb{R}$ e infinito em caso contrário.

28. Considera-se em $\overline{\mathbb{R}}$ a relação de ordem menor ($<$) determinada pelas seguintes regras: (i) se $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ são ambos finitos a relação $x < y$ coincide com a relação de ordem em $\mathbb{R}$; (ii) para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $-\infty < x < +\infty$.

29. Qualquer subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ (incluindo o conjunto vazio) tem supremo e ínfimo.

30. Na recta acabada definem-se vizinhanças do modo seguinte. Sendo $\epsilon > 0$, se $a \in \mathbb{R}$, então $V_\epsilon(a)$ coincide com a vizinhança anteriormente definida. As vizinhanças de $-\infty$ e $+\infty$ são definidas por $V_\epsilon(-\infty) = [-\infty, -1/\epsilon[$ e $V_\epsilon(+\infty) =]1/\epsilon, +\infty]$.

    Estas definições asseguram que $V_\epsilon(+\infty)$ é um intervalo, $+\infty$ é a intersecção de todas as suas vizinhanças, e que $0 < \delta < \epsilon$ implica $V_\delta(a) \subset V_\epsilon(a)$.

31. Dizemos que a sucessão real u tende ou converge em $\overline{\mathbb{R}}$ para a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$) sse

    $$\forall_{V_\epsilon(a)} \exists_{p \in \mathbb{N}_1} \forall_{n \in \mathbb{N}_1}\ n > p \Rightarrow u_n \in V_\epsilon(a).$$

    Assim,

    $$u_n \to +\infty \text{ sse } \forall_{k \in \mathbb{R}} \exists_{p \in \mathbb{N}_1} \forall_{n \in \mathbb{N}_1}\ n > p \Rightarrow u_n > k,$$
    $$u_n \to -\infty \text{ sse } \forall_{k \in \mathbb{R}} \exists_{p \in \mathbb{N}_1} \forall_{n \in \mathbb{N}_1}\ n > p \Rightarrow u_n < k.$$

32. Seja (u_n) uma sucessão e S o conjunto dos seus sublimites em $\overline{\mathbb{R}}$. Então, (i) $S \neq \emptyset$; (ii) S é singular sse (u_n) é convergente; (iii) uma sucessão monótona, é convergente (pelo que S é um conjunto singular); (iv) S tem elemento máximo e mínimo.

33. Seja u uma sucessão de termos positivos. Se u_{n+1}/u_n converge em $\overline{\mathbb{R}}$, então $\sqrt[n]{u_n}$ também converge, e para o mesmo limite.

    Prova quando o limite é finito. Seja $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = l \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que, para todo o $n > p$, $l - \epsilon < u_{n+1}/u_n < l + \epsilon$. Isto implica que $(l-\epsilon)^{n-p-1} u_{p+1} < u_n < (l+\epsilon)^{n-p-1} u_{p+1}$, para todo o $n > p+1$. Logo, $(l-\epsilon)\frac{1}{\sqrt[n]{(l-\epsilon)^{p+1}}}\sqrt[n]{u_{p+1}} < \sqrt[n]{u_n} < (l+\epsilon)\frac{1}{\sqrt[n]{(l+\epsilon)^{p+1}}}\sqrt[n]{u_{p+1}}$, para todo o $n > p+1$. Pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, qualquer sublimite de $\sqrt[n]{u_n}$ pertence ao intervalo $[l-\epsilon, l+\epsilon]$. Como ϵ é arbitrário, o conjunto dos sublimites é um conjunto singular, e $\sqrt[n]{u_n}$ converge para l.

34. Aplicando a proposição do ponto anterior pode, por exemplo, concluir-se que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

35. Seja $p \in \mathbb{N}_1$ e $a > 1$. Tem-se $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

(i) Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^p}{a} = \frac{1}{a} < 1$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\sqrt[n]{\frac{n^p}{a^n}} < (1-\epsilon)$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ suficientemente grande. Logo, $\frac{n^p}{a^n} < (1-\epsilon)^n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ suficientemente grande. O Teorema das Sucessões Enquadradas implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$.

(ii) Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, tem-se $\sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}} < \frac{1}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ suficientemente grande. Logo, $\frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ suficientemente grande. O Teorema das Sucessões Enquadradas implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

(iii) Como $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$, o Teorema das Sucessões Enquadradas implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

36. Define-se potência de um expoente racional r, representado pela fracção irredutível $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}_1$, por $a^r := (\sqrt[q]{a})^p$, para todos os reais a para os quais o segundo membro tem sentido.

Seja $a > 1$. Seja ainda α um irracional arbitrário e (r_n) uma sucessão crescente de racionais convergente para α. A sucessão (a^{r_n}) é crescente e limitada, pelo que converge. Prova-se que o limite não depende da sucessão de racionais, convergente para α. Define-se a^α como $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Mais, pode provar-se que sempre que (s_n) seja uma sucessão de racionais convergente para α, se tem $\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^\alpha$.

Se $0 < a < 1$ e α é irracional, então define-se $a^\alpha := \left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$. Esta definição é equivalente a atribui a a^α valor igual ao limite de (a^{r_n}), onde (r_n) é qualquer sucessão de racionais convergente para α.

37. São sete as indeterminações: $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, ∞^0, 0^0 e 1^∞.

38. $\lim (u_n{}^{v_n}) = \lim u_n{}^{\lim v_n}$, desde que o segundo membro não seja um símbolo de indeterminação (∞^0, 0^0 ou 1^∞).

39. Prova-se que se $x_n \to a$ e $|u_n| \to +\infty$, então $\left(1 + \frac{x_n}{u_n}\right)^{u_n} \to e^a$.

III Séries

1. Seja (a_n) uma sucessão real. Chama-se sucessão das somas parciais de (a_n) a sucessão definida por $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \ldots + a_n$. Diz-se que a sucessão (a_n) é somável sse a sucessão (s_n) convergir. Neste caso, designando por l o limite de (s_n), costuma escrever-se $l = \sum_{k=1}^\infty a_k$, em vez de $l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k$, e costuma dizer-se que a série $\sum_{k=1}^\infty a_k$ é convergente e que l é a soma da série. Quando (s_n) não converge (em $\mathbb{R}$) costuma dizer-se que a série é divergente. Em qualquer dos casos, é costume chamar-se a a_n o termo de ordem n da série.

A notação acima é ambígua pois confunde a série $\sum_{k=1}^\infty a_k$ com a sua soma.

Em rigor, uma série é um par ordenado de sucessões $((a_n), (s_n))$ que verifique $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

2. A série $\sum_{n=1}^\infty x^{n-1}$ converge sse $|x| < 1$ e, neste caso, a sua soma é $1/(1-x)$.

3. Uma série de Mengoli é uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$, em que $b_n \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$. A sucessão das suas somas parciais é $\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$, pelo que a série converge sse a sucessão (b_n) convergir. Nesse caso, designando por k o limite de (b_n), $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - k$.

4. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então a_n é um infinitésimo.

5. Uma série, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, de termos não negativos ($a_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$) converge sse a sucessão das suas somas parciais for majorada.

6. Critério geral de comparação. Suponha-se que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Então,

   a) se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente;

   b) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

7. A série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. De facto, $\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$, para $k \in \mathbb{N}_1$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty$.

   Seja $\alpha < 1$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, pelo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é divergente.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2$, pelo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

   Seja $\alpha > 2$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, pelo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente.

9. Sejam $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$. Se a_n/b_n converge para $l \in]0, +\infty[$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza.

   Nota. Se a_n/b_n converge para 0, então a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Se a_n/b_n converge para $+\infty$, então a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

10. A série de **Dirichlet**, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$.

    Em face do já exposto, basta provar que a série de Dirichlet converge se $1 < \alpha < 2$. Tem-se $\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^{k\alpha}} = \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = \frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}$, para $k \in \mathbb{N}$. Como $\alpha > 1$, segue-se $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^k} = \frac{1}{1-2^{\alpha-1}}$.

11. Critério de **Cauchy**. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e suponha-se que $\sqrt[n]{a_n}$ converge e que o seu limite é l. Se $l < 1$, a série converge; se $l > 1$, a série diverge.

    Prova. Suponhamos que $l < 1$ e seja $0 < \epsilon < 1 - l$. Existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que $n > p$ implica $\sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon < 1$. Logo $a_n < (l + \epsilon)^n$, para $n > p$. Se $l > 1$, então existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que $n > p$ implica $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pelo que $a_n \geq 1$, para todo o $n > p$.

    Este critério pode ser melhorado. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e suponha-se que $\limsup \sqrt[n]{a_n} = l$. Se $l < 1$, a série converge; se $l > 1$, a série diverge.

12. Critério de **D'Alembert**. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos e suponha-se que a_{n+1}/a_n converge e que o seu limite é l. Se $l < 1$, a série converge; se $l > 1$, a série diverge.

    Prova. Num dos pontos anteriores vimos que se $\lim a_{n+1}/a_n = l$, então $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$. Basta aplicar o Critério de Cauchy.

13. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma permutação de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sse existe uma bijecção $\psi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ tal que $b_n = a_{\psi(n)}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma sua permutação, $b_n = a_{\psi(n)}$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. De facto, sendo $m = \max\{\psi(1), \psi(2), \ldots, \psi(n)\}$, vem $b_1 + \ldots + b_n = a_{\psi(1)} + \ldots + a_{\psi(n)} \leq a_1 + \ldots + a_m \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma permutação de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\left(\text{porque } a_n = b_{\psi^{-1}(n)}\right)$, vem também $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e (K_m) uma sucessão de subconjuntos de $\mathbb{N}_1$, disjuntos dois a dois, cuja união é $\mathbb{N}_1$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \in K_m} a_n$.

14. Critério de **Cauchy**. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sse a sucessão das suas somas parciais for uma sucessão de Cauchy, ou seja,

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{p \in \mathbb{N}_1} \forall_{q,r \in \mathbb{N}_1}\ p < q < r \Rightarrow |a_{q+1} + \ldots + a_r| < \epsilon.$$

15. Critério de **Leibniz**. Seja (a_n) uma sucessão decrescente de termos positivos. A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge sse (a_n) converge para zero.

Prova. Seja (a_n) uma sucessão decrescente, convergente para 0. Se q, $r \in \mathbb{N}_1$ com $q < r$, então $|a_{q+1} - a_{q+2} + \ldots + (-1)^{r-q-1} a_r| \leq a_{q+1}$, pelo que a sucessão das somas parciais é de Cauchy. A implicação em sentido contrário é imediata.

16. A série harmónica alternada, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, converge.

17. Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente sse $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente. As séries convergentes, mas não absolutamente convergentes, dizem-se simplesmente convergentes.

18. Para $a \in \mathbb{R}$, sejam a^+ e a^-, respectivamente, as partes positiva e negativa de a, ou seja, $a^+ = \max\{a, 0\}$ e $a^- = \max\{-a, 0\}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente sse convergem ambas as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. A prova decorre imediatamente de $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$, $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ e $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.

19. Toda a série absolutamente convergente é convergente. Tem-se

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Prova. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Pelo ponto anterior, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergem. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ também converge. Para provar a desigualdade, basta aplicar a desigualdade triangular à sucessão das somas parciais da série de termo geral a_n e, seguidamente, tomar o limite de ambos os membros.

20. Teorema de **Riemann**. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série simplesmente convergente e $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Existem permutações de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com soma α.

21. Motivação da definição da série produto. O produto dos dois polinómios $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$ e $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_r x^r$ é o polinómio $a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \ldots$

Definição da série produto. A série produto de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, onde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

22. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são absolutamente convergentes também o é a série produto, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Além disso, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

23. Seja (a_n) uma sucessão real e $x \in \mathbb{R}$. Chamamos série de potências de x, com coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

24. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente em cada ponto do intervalo $]-r, r[$, onde

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

e é divergente em $]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$. A $r \in \overline{\mathbb{R}}$ chama-se raio de convergência da série.

25. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é igual a $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, sempre que este limite exista.

26. A série $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Verifica-se facilmente que $E(x)E(y) = E(x+y)$.

    Como $E(1) = e$, conclui-se que $E(n) = e^n$, para $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $e^n E(-n) = E(n)E(-n) = E(0) = 1$, pelo que $E(-n) = e^{-n}$. Logo, $E(m) = e^m$ para todo o $m \in \mathbb{Z}$. Seja $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}_1$. Então $E\left(p/q\right)^q = E(p) = e^p$, ou seja, $E\left(p/q\right) = \sqrt[q]{e^p}$. Logo, $E(r) = e^r$, para todo o $r \in \mathbb{Q}$.

    Seja $a \in \mathbb{R}$. Prova-se que se (x_n) é uma sucessão convergente para a, então $E(x_n)$ converge para $E(a)$.

    Seja $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$. Vimos atrás que a^x é igual ao limite de (a^{r_n}), onde (r_n) é qualquer sucessão de racionais convergente para x. Tomando $a = e$, $e^x = \lim_{n\to\infty} e^{r_n} = \lim_{n\to\infty} E(r_n) = E(x)$. Conclui-se que $E(x) = e^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

27. Definimos as seguintes séries de potências, absolutamente convergentes em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \ldots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \ldots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

    Usando a proposição relativa ao produto de séries absolutamente convergentes, prova-se que $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, para todos os x, $y \in \mathbb{R}$.

IV Continuidade e limite

1. Uma função real de variável real é uma aplicação de um subconjunto D de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

    Sendo $f : D \to \mathbb{R}$, a imagem de um conjunto $A \subset D$ por f designa-se por $f(A)$.

    A função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se majorada sse $f(D)$ for um conjunto majorado. Define-se de modo análogo função minorada e limitada.

Chama-se supremo de f em A, $\sup_A f$, ao supremo do conjunto $f(A)$, ou seja, ao $\sup_{x \in A} f(x)$. Este supremo será $+\infty$ se f não for majorada e $-\infty$ se $A = \emptyset$ ou se f é a função vazia, i.e., a função de domínio vazio. Define-se de modo análogo ínfimo de f em A, $\inf_A f$ e, quando existam, $\max_A f$ e $\min_A f$. [Nota: Não se deve confundir (valor do) máximo com ponto de máximo (o ponto onde o máximo ocorre).]

Define-se da forma habitual o que se entende por função crescente, estritamente crescente, decrescente, estritamente decrescente, monótona e estritamente monótona.

O gráfico de $f : D \to \mathbb{R}$ é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D,\ y = f(x)\}$.

2. Definimos a função logaritmo natural, designada por ln ou log, como sendo a inversa da função $x \mapsto e^x$. Esta definição faz sentido porque a função exponencial (de base $e > 1$) é estritamente crescente. Sendo o contradomínio de $x \mapsto e^x$ o intervalo $\mathbb{R}^+$, o domínio da função logaritmo é $\mathbb{R}^+$ e para $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln x$ é o único valor y, tal que $x = e^y$.

   Reconhece-se sem dificuldade a validade das fórmulas $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ e $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$, para todos os x, $y \in \mathbb{R}^+$.

3. Estão deduzidas algumas propriedades das funções trigonométricas no texto a partir das definições do seno e coseno dadas acima. Devemos salientar que se prova que existe um $\rho > 0$ tal que $\cos \rho = 0$ e $\cos x > 0$ para cada $x \in [0, \rho[$; Define-se o número π por $\pi := 2\rho$.

4. Definem-se as funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico por

$$\begin{array}{rclclcl} \sinh x & = & \frac{e^x - e^{-x}}{2} & = & x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cosh x & = & \frac{e^x + e^{-x}}{2} & = & 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{array}$$

   Verifica-se, sem qualquer dificuldade, que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

   Se o parâmetro t percorrer o conjunto $\mathbb{R}$, o ponto $(\cos t, \sin t)$ percorre (infinitas vezes) a circunferência de raio um e centro na origem.

   Se o parâmetro t percorrer o conjunto $\mathbb{R}$, o ponto $(\cosh t, \sinh t)$ percorre (uma vez) o ramo direito da hipérbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$.

5. Definição de continuidade de **Cauchy**. Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$. A função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em a sse

$$\forall_{V_\delta(f(a))} \exists_{V_\epsilon(a)} \forall_{x \in D}\ x \in V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(f(a)),$$

   ou seja, sse

$$\forall_{\delta > 0} \exists_{\epsilon > 0} \forall_{x \in D}\ |x - a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

6. Definição de continuidade de **Heine**. Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$. A função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a sse sempre que x_n seja uma sucessão, de termos em D, convergente para a, a sucessão $f(x_n)$ converge para $f(a)$.

7. As definições de continuidade de Cauchy e Heine são equivalentes.

8. Diz-se que a função f é contínua sse é contínua em todos os pontos do seu domínio.

9. Exemplos.

   a) Sejam m, $b \in \mathbb{R}$. A aplicação $x \mapsto mx + b$ é contínua.

   b) A função de Heaviside é descontínua na origem.

   c) A função de Dirichlet é descontínua em $\mathbb{R}$.

10. Da definição de continuidade de Heine e dos teoremas sobre sucessões, obtém-se:

    a) se f e g são contínuas no ponto a, então $f+g$, $f-g$ e $f \times g$ são contínuas em a; se, além disso, $g(a) \neq 0$, então f/g (está definida numa vizinhança de a e) é contínua em a;

    b) se g é contínua em a e f é contínua no ponto $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a.

11. A função modulo é contínua.

12. Seja $n \in \mathbb{N}_1$. Para n par, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é contínua em $\mathbb{R}_0^+$. Para n ímpar, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

13. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $r \in]0, +\infty]$. A função $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é contínua.

    Mais geralmente, prova-se (p. 339) que uma série de potências é uma função contínua em todo o intervalo de convergência da série.

14. Seja $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o ponto a é aderente a D sse toda a vizinhança $V_\epsilon(a)$ intersecta D. De forma equivalente, o ponto a é aderente a D sse existe uma sucessão de termos em D convergente para a. Designa-se o conjunto de pontos aderentes a D por $\overline{D}$.

15. Definição de limite de Cauchy. Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D}$. A função $f : D \to \mathbb{R}$ tem limite b ($b \in \mathbb{R}$) no ponto a sse

    $$\forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon>0} \forall_{x \in D} \ |x-a| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

    Neste caso escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

16. Definição de limite de Heine. Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que a função f, definido em D, tem limite b no ponto a sse sempre que (x_n) seja uma sucessão, de termos em D, convergente para a, a sucessão $(f(x_n))$ converge para b.

17. As definições de limite de Cauchy e Heine são equivalentes.

18. Se $a \in D$, então f tem limite em a sse é contínua em a e neste caso $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se $a \in \overline{D} \setminus D$, a existência de limite no ponto a equivale à possibilidade de prolongar por continuidade f ao ponto a, ou seja, à existência de uma função, $\hat{f}$, definida em $D \cup \{a\}$ e contínua. É claro que

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D, \\ \lim_{x \to a} f(x) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

19. Exemplos. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

20. Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $A \subset D$ e $a \in \overline{A}$. O limite de f no ponto a relativo ao conjunto A é $\lim_{x\to a} f|_A(x)$, quando este exista. Escrevemos também $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ para designar $\lim_{x\to a} f|_A(x)$.

    Em particular, ao limite de $f(x)$ quando x tende para a relativo ao conjunto $D \cap]a, +\infty[$, quando este exista, é costume chamar limite de f no ponto a à direita, ou limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores, usando-se para designá-lo o símbolo $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Define-se de forma análoga o $\lim_{x\to a^-} f(x)$. Tanto os limites à direita como à esquerda são usualmente designados por limites laterais. O limite de f no ponto a relativo ao conjunto $D \setminus \{a\}$ é chamado o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores distintos de a, escrevendo-se $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

21. Usando as definições de vizinhança na recta acabada introduzidas acima, podemos também dar significado a $\lim_{x\to a} f(x) = b$ quando a e/ou b são $\pm\infty$

22. Da definição de limite de Heine e dos teoremas sobre sucessões, obtêm-se imediatamente proposições relativas ao limite da soma, diferença, produto e quociente (em pontos em que o denominador não tenha limite nulo) de funções.

23. Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{x\to b} f(x) = c$ e a é aderente ao domínio de $f \circ g$, então $\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = c$.

    Notas: 1. Este resultado não é válido para os limites por valores distintos de a e de b. 2. A hipótese de a ser aderente ao domínio de $f \circ g$ é necessária: podem existir os limites indicados de f e g, e uma vizinhança de a onde $f \circ g$ não está definida.

24. Teorema de **Weierstrass**. Seja I um intervalo limitado, fechado e não-vazio e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Então f tem máximo e mínimo.

25. Teorema do Valor Intermédio. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

26. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}^n$ estritamente monótona e contínua. Então $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua.

27. A função arcsin é a inversa da restrição do seno a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

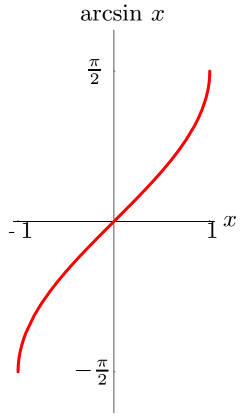
    $$\left(x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \wedge \sin x = y\right) \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

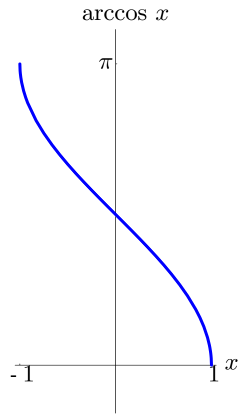
    A função arccos é a inversa da restrição do coseno a $[0, \pi]$.

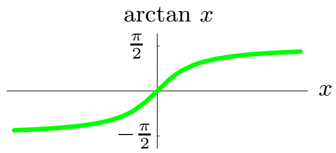
    $$(x \in [0, \pi] \wedge \cos x = y) \Leftrightarrow x = \arccos y.$$

A função arctan é a inversa da restrição do tangente a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\wedge \tan x = y\right) \Leftrightarrow x = \arctan y.$$







Pela proposição do ponto anterior as quatro funções log, arcsin, arccos e arctan são contínuas.

28. A função $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua (em todos os pontos $y \in D$) sse

$$\forall_{y \in D}\ f \text{ é contínua em } y,$$

ou seja,

$$\forall_{y\in D}\forall_{\delta>0}\exists_{\epsilon>0}\forall_{x\in D}\ |x-y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta.$$

Assim, se f é contínua, dados um $y \in D$ e um $\delta > 0$, é possível determinar ϵ (que depende de δ e y) tais que $\forall_{x\in D}|x-y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$.

Seja $\delta > 0$ fixo. A função $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$ é contínua. Contudo, à medida que y se aproxima de zero somos forçados a escolher valores para $\epsilon(\delta, y)$ cada vez mais pequenos. É, portanto, impossível escolher ϵ apenas em função de δ.

Existem funções, ditas uniformemente contínuas, para as quais a escolha de ϵ pode ser feita apenas em função de delta, ou seja,

$$\forall_{\delta>0}\exists_{\epsilon>0}\forall_{x,y\in D}\ |x-y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta.$$

O exemplo anterior mostra que, em geral, a condição de continuidade uniforme em D é diferente da condição de continuidade em todos os pontos de D. Isto é consequência do facto de não podermos trocar a ordem de quantificadores existenciais e universais. A continuidade uniforme é mais forte do que a continuidade em todos os pontos do domínio.

29. O Teorema de **Heine-Cantor** garante que uma função contínua num intervalo limitado e fechado é uniformemente contínua nesse intervalo. A sua prova faz-se por contradição.

Este teorema será usado mais tarde para provar a integrabilidade das funções contínuas em intervalos limitados e fechados.

30. Uma sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, com $f_n : D \to \mathbb{R}$, converge pontualmente para $f : D \to \mathbb{R}$ sse $\forall_{x\in D} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ou seja, sse

$$\forall_{x\in D}\forall_{\delta>0}\exists_{p\in\mathbb{N}_1}\ n > p \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

Aqui a escolha de p depende de x e δ. A sucessão (f_n) diz-se uniformemente convergente quando a escolha de p pode ser feita apenas em função de δ:

$$\forall_{\delta>0}\exists_{p\in\mathbb{N}_1}\forall_{x\in D}\ n > p \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

A noção de convergência uniforme será usada mais tarde, por exemplo, para trocar limites com integrais.

31. O limite pontual de uma sucessão de funções contínua pode não ser uma função contínua mas o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

Este resultado pode ser usado, por exemplo, para provar a continuidade das séries de potências no interior dos seus intervalos de convergência.

V Diferenciabilidade

1. Seja $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}$ é interior a D sse existe uma vizinhança $V_\epsilon(a) \subset D$. Designa-se o conjunto de pontos interiores a D por $\operatorname{int} D$.

2. Definição de derivada. Seja $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in \operatorname{int} D$. Diz-se que f é diferenciável em a sse existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Neste caso designa-se o valor do limite por derivada de f em a, e denota-se por $f'(a)$.

3. Se f é diferenciável em a, chama-se recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ à recta de equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Logo, a derivada de f em a é o declive da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$.

4. Se $f(x)$ é a posição de uma partícula deslocando-se sobre a recta real no instante x, então $f'(a)$ é a velocidade da partícula no instante a.

5. Notação de Leibniz: sendo $y = f(x)$, $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.

6. Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

7. Se f e g são diferenciáveis no ponto a, então

   a) $f + g$ é diferenciável em a e $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
   b) $f - g$ é diferenciável em a e $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.
   c) fg é diferenciável em a e $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

d) f/g é diferenciável em a se $g(a) \neq 0$ e $(f/g)'(a) = [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)]/[g(a)]^2$.

8. Derivada da função composta. Se g é diferenciável no ponto a e f é diferenciável no ponto $g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável no ponto a e $(f \circ g)'(a) = f'[g(a)]g'(a)$.

   Em termos da notação de Leibniz: se $y = g(x)$ e $z = f(y)$, então

$$(f \circ g)'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

9. Derivada da função inversa. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua, $g : f(I) \to \mathbb{R}$ a sua inversa. Se f é diferenciável no ponto a e $f'(a) \neq 0$, então g é diferenciável no ponto $b = f(a)$ e

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

   Em termos da notação de Leibniz: se $y = f(x)$, então $x = g(y)$ e

$$g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

10. Exemplos.

a) Seja $n \in \mathbb{N}_1$ e $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt[n]{x}$. A função g é inversa de $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(y) = y^n$.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f(x)}} = \frac{1}{ny^{n-1}|_{y=\sqrt[n]{x}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

b) Seja $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln x$. A função g é inversa de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(y) = e^y$.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f(x)}} = \frac{1}{e^y|_{y=\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

c) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \arctan x$. A função g é inversa de $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, definida por $f(y) = \tan y$.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f(x)}} = \frac{1}{\sec^2 y|_{y=\arctan x}} = \frac{1}{(1+\tan^2 y)|_{y=\arctan x}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

d) Seja $g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \arcsin x$. A função g é inversa de $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, definida por $f(y) = \sin y$.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)|_{y=f(x)}} = \frac{1}{\cos y|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{|\cos y|\,|_{y=\arcsin x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}\,|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Note-se que quando y está no domínio de f tem-se que $\cos y$ é positivo.

e) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando o resultado da alínea b) e o resultado relativo à derivada da função composta calculemos a derivada de $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^\alpha$. Tem-se

$$f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Isto generaliza o resultado da alínea a).

11. Diferenciabilidade das séries de potências (p. 415). Uma função definida por uma série de potências de $x - a$, com raio de convergência $r > 0$, é indefinidamente diferenciável no intervalo $]a-r, a+r[$ e as suas derivadas podem calcular-se derivando a série termo a termo.

12. Diz-se que a é ponto de estacionaridade de f sse f é diferenciável em a e $f'(a) = 0$.

13. Se f é diferenciável em a e tem um extremo em a, então a é ponto de estacionaridade de f.

14. Teorema de **Rolle**. Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, diferenciável em $]a, b[$ verificando $f(a) = f(b)$. Existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

15. Corolários do Teorema de Rolle. Considere-se uma função definida num intervalo e diferenciável. Entre dois zeros da função existe pelo menos um zero da sua derivada, e entre dois zeros consecutivos da derivada não pode existir mais do que um zero da função.

16. Teorema de **Lagrange**. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, diferenciável em $]a, b[$. Existe $c \in]a, b[$ tal que $[f(b) - f(a)]/(b-a) = f'(c)$.

17. Corolários do Teorema de Lagrange. Uma função com derivada identicamente nula num intervalo é constante nesse intervalo; se a derivada for positiva, então a função é estritamente crescente.

18. Teorema de **Cauchy**. Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, f e g funções contínuas no intervalo $[a, b]$, diferenciáveis no intervalo $]a, b[$, com $g'(x) \neq 0$ para todos $x \in]a, b[$. Existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

19. Regra de Cauchy. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $a \in \overline{I}$. Sejam f e $g : I \to \mathbb{R}$ duas funções (cujo domínio é o intervalo I) diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$, com $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in I \setminus \{a\}$. Se f e g tendem ambas para 0 ou ambas para $+\infty$ quando $x \to a$, com $x \neq a$, então

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o segundo limite exista em $\overline{\mathbb{R}}$.

Ideia da prova quando ambas f e g tendem para $+\infty$ quando $x \to a$: se $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \approx l$, então $\frac{f(x)}{g(x)} \approx l\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \to l$ quando $g(x) \to +\infty$.

VI Fórmula e Série de Taylor

1. Seja $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$. Designa-se por $D^{(1)}$ o conjunto formado pelos pontos (*interiores* a D) em que f é diferenciável. Por indução, para n natural maior ou igual a 2, define-se $D^{(n)}$ como o conjunto formado pelos pontos (*interiores* a $D^{(n-1)}$) em que $f^{(n-1)}$ é diferenciável.

2. Fórmulas de Taylor com restos de **Peano** e **Lagrange**.

   a) Se $a \in D^{(1)}$, então

   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)E_1(x,a),$$

   com $\lim_{x\to a} E_1(x,a) = 0$.
   Seja $I \subset D^{(1)}$ um intervalo, a e $x \in I$. Então,

   $$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a),$$

   para algum ξ entre a e x.

   b) Se $a \in D^{(2)}$, então

   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + (x-a)^2 E_2(x,a),$$

   com $\lim_{x\to a} E_2(x,a) = 0$.
   Seja $I \subset D^{(2)}$ um intervalo, a e $x \in I$. Então,

   $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,$$

   para algum ξ entre a e x.

   c) Se $a \in D^{(n)}$, então

   $$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &\quad + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n E_n(x,a) \end{aligned}$$

   com $\lim_{x\to a} E_n(x,a) = 0$.
   Seja $I \subset D^{(n)}$ um intervalo, a e $x \in I$. Então,

   $$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &\quad + \frac{f^n(\xi)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

   para algum ξ entre a e x.
   Nota: o valor de ξ depende de x, a e n. No ponto 15 indicaremos explicitamente a dependência de ξ em x e n escrevendo $\xi_n(x)$.

3. Quando $a = 0$ as fórmulas de Taylor tomam o nome de fórmulas de **MacLaurin**.

4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in D^{(1)}$. Para que f tenha um extremo local em a é necessário (mas não suficiente) que a seja *ponto de estacionaridade* de f, ou seja, que $f'(a) = 0$.

5. Seja $a \in D^{(2)}$ um ponto de estacionaridade de f tal que $f''(a) \neq 0$. Se $f''(a) > 0$, então f tem um mínimo local estrito em a, ou seja,
$$\exists_{\epsilon>0}\forall_{x\in V_\epsilon(a)\setminus\{a\}}\ f(x) > f(a).$$
Se $f''(a) < 0$, então f tem um máximo local estrito em a, ou seja,
$$\exists_{\epsilon>0}\forall_{x\in V_\epsilon(a)\setminus\{a\}}\ f(x) < f(a).$$

6. Seja $a \in D^{(3)}$ um ponto de estacionaridade de f tal que $f''(a) = 0$ e $f'''(a) \neq 0$. Então, f não tem qualquer extremo em a.

7. Se $a \in D^{(1)}$ e
$$\exists_{\epsilon>0}\forall_{x\in V_\epsilon(a)}\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a),$$
então f diz-se *convexa* (ou com a concavidade voltada para cima) em a. Se
$$\exists_{\epsilon>0}\forall_{x\in V_\epsilon(a)}\ f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a),$$
então f diz-se *côncava* (ou com a concavidade voltada para baixo) em a. Pode também acontecer que exista um $\epsilon > 0$ tal que num dos intervalos $]a-\epsilon, a[$ e $]a, a+\epsilon[$ o gráfico de f esteja por cima do da sua recta tangente em $(a, f(a))$ e no outro esteja por baixo do dessa recta. Em tal hipótese diz-se que a é um ponto de *inflexão* de f.

8. Se $a \in D^{(2)}$ e $f''(a) > 0$, então f é convexa em a. Se $f''(a) < 0$, então f é côncava em a.

9. A função f diz-se indefinidamente diferenciável no ponto a sse $a \in D^{(n)}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Note-se que se f é indefinidamente diferenciável no ponto a e $n \in \mathbb{N}_1$, então f é n vezes diferenciável numa vizinhança de a, visto que $a \in D^{(n+1)}$, pelo que a é interior a $D^{(n)}$.

10. Uma série de potências é indefinidamente diferenciável no interior do seu intervalo de convergência e as suas derivadas podem calcular-se derivando a série termo a termo.

11. Uma função f diz-se analítica num ponto a, interior ao seu domínio, sse existir uma vizinhança de a, $V_\epsilon(a)$, tal que $f|_{V_\epsilon(a)}$ é uma série de potências de $x - a$.

12. Prova-se que uma série de potências, $s(x)$, de $x-a$ com raio de convergência r é uma função analítica em $|x-a| < r$. Mais precisamente, para cada b tal que $|b-a| < r$, $s(x)$ é igual a uma série de potências de $x-b$ se $|x-b| < r-|b-a|$.

13. Seja f é indefinidamente diferenciável em a. Chama-se série de Taylor de f no ponto a a

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

14. Nem toda a função f indefinidamente diferenciável em a é analítica em a. Se f for analítica em a, então f coincide, numa vizinhança de a, com a sua série de Taylor no ponto a, pois usando a proposição do ponto 10 prova-se facilmente que nenhuma série de potências distinta da série de Taylor pode representar f numa vizinhança de a.

15. Seja f indefinidamente diferenciável no ponto a. Então f é analítica em a sse $\lim_{n\to+\infty}(x-a)^n E_n(x,a)=0$ para todo o x nalguma vizinhança de a, sse $\lim_{n\to+\infty}\frac{f^n(\xi_n(x))}{n!}(x-a)^n=0$ para todo o x nalguma vizinhança de a.

16. Em vez de se usar a proposição do ponto 15, para escrever a série de Taylor de uma função num ponto é frequente *usar-se a proposição do ponto* 10 *e os desenvolvimentos seguintes,* a saber, dos quais se podem tirar os desenvolvimentos das funções analíticas de uso mais frequente:

    a) da série geométrica:

    $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x+\ldots,$$

    válido para $|x|<1$;

    b) da exponencial:

    $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

    válido para todo o $x\in\mathbb{R}$;

    c) das funções trigonométricas:

    $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$

    $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

    válidos para todo o $x\in\mathbb{R}$;

    d) da função binomial: se $\alpha\in\mathbb{R}$,

    $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

    válido para $|x|<1$ (todo o $x\in\mathbb{R}$ se $\alpha\in\mathbb{N}$).

    A prova deste desenvolvimento faz-se em quatro passos:

    i) Define-se a função f por $f(x):=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$, verificando que $f(x)$ está bem definida para $|x|<1$, ou seja, que o raio de convergência da série de potências é 1.

    ii) Usando 10, verifica-se que $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$ para todo o $x\in]-1,1[$.

iii) O passo anterior implica que $[f(x)(1+x)^{-\alpha}]' \equiv 0$.

iv) Um dos corolários do Teorema de **Lagrange** implica que $x \mapsto f(x)(1+x)^{-\alpha}$ é constante. Dando o valor zero a x conclui-se que a constante é 1.

17. Exemplos de desenvolvimentos em série de Taylor:

a) Sejam a, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calculemos o desenvolvimento de $x \mapsto \frac{1}{a+bx}$ em torno de 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+bx} &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+bx/a} \\
&= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 - \ldots + (-1)^n \frac{b^n}{a^n}x^n + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}x^2 - \ldots + (-1)^n \frac{b^n}{a^{n+1}}x^n + \ldots
\end{aligned}$$

válido para $|bx/a| < 1$, ou seja, para $|x| < |a|/|b|$.

b) Seja $a \neq 0$. Calculemos o o desenvolvimento de $x \mapsto \frac{1}{x}$ em torno de a. Fazendo $y = x - a$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{a+y} \\
&= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+y/a} \\
&= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{y}{a} + \frac{y^2}{a^2} - \ldots + (-1)^n \frac{y^n}{a^n} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{y}{a^2} + \frac{y^2}{a^3} - \ldots + (-1)^n \frac{y^n}{a^{n+1}} + \ldots \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a^3}(x-a)^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}}(x-a)^n + \ldots
\end{aligned}$$

válido para $|y/a| < 1$, ou seja, para $|x - a| < |a|$.

c) Calculemos o desenvolvimento de $x \mapsto \ln(1-x)$ em torno de 0.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln(1-x) &= -\frac{1}{1-x} \\
&= -1 - x - x^2 - \ldots - x^{n-1} - \ldots \\
&= \frac{d}{dx}\left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots - \frac{1}{n}x^n - \ldots\right),
\end{aligned}$$

para $|x| < 1$ porque a última série tem raio de convergência 1 e a sua derivada pode ser calculada termo a termo, devido ao ponto 10. Usando um corolário do Teorema de Lagrange,

$$\ln(1-x) = c - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots - \frac{1}{n}x^n - \ldots.$$

Fazendo $x = 0$, conclui-se que $c = 0$.

d) Calculemos o desenvolvimento de $x \mapsto \arctan x$ em torno de 0.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\
&= 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots \\
&= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \ldots\right),
\end{aligned}$$

para $|x| < 1$ porque a última série tem raio de convergência 1 e a sua derivada pode ser calculada termo a termo, devido ao ponto 10. Usando um corolário do Teorema de Lagrange,

$$\arctan x = c + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \ldots.$$

Fazendo $x = 0$, conclui-se que $c = 0$.

e) Calculemos o desenvolvimento de $x \mapsto \arcsin x$ em torno de 0.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}x^6 + \ldots \\ &= \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{1}{7}x^7 + \ldots\right), \end{aligned}$$

para $|x| < 1$ porque a última série tem raio de convergência 1 e a sua derivada pode ser calculada termo a termo, devido ao ponto 10. Usando um corolário do Teorema de Lagrange,

$$\arcsin x = c + x + \frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

Fazendo $x = 0$, conclui-se que $c = 0$.

Referências

[1] **J. Campos Ferreira**, *Introdução à Análise Matemática,* Fundação Gulbenkian, 6ª ed., 1995.