Ficha 6
Resolução dos exercícios de auto-avaliação

III.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}\,dx$

Resolução:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-25}\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\Big[\ln\left|x^2-25\right|\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\left|3^2-25\right| - \ln\left|2^2-25\right|\right)$$

Usando a regra de primitivação: $P\frac{u'}{u} = \ln|u|$
(Folhas de apoio de Mat.II pág 2)

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|9-25| - \ln|4-25|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|-16| - \ln|-21|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 16 - \ln 21\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\ln\frac{16}{21} = \ln\left(\frac{16}{21}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{\frac{16}{21}} = \ln\frac{4}{\sqrt{21}}$$

Usando a propriedade: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
(Folhas de apoio de Mat.I pág 20)

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx$

Resolução:

$$\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx \underset{(*)}{=} \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right]_2^4 = \frac{4^3}{3}+\frac{4^2}{2}+4+\ln|4-1| - \left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2+\ln|2-1|\right)$$

$$= \frac{64}{3}+8+4-\ln 3-\frac{8}{3}-2-2-\ln 1 = \frac{56}{3}+8+\ln 3 = \frac{80}{3}+\ln 3$$

Cálculos auxiliares: $(*)$

$$P\left(\frac{x^3}{x-1}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pelo} \\ 1^{\text{o}}\text{passo}}}{=} P\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right) = Px^2+Px+P1+P\frac{1}{x-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pelo} \\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=} \frac{x^{2+1}}{2+1}+\frac{x^{1+1}}{1+1}+x+\ln|x-1|$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|$$

1º Passo: <u>Obtenção de uma função racional própria</u>

Como $\text{grau}\left(x^3\right) = 3 > 1 = \text{grau}\left(x-1\right)$ então efectua-se a divisão do polinómio $\left(x^3\right)$ pelo polinómio $\left(x-1\right)$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 & x-1 \\ \cline{2-2}
-x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \cline{1-1}
x^2 & \\
-x^2+x & \\ \cline{1-1}
x & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Assim,

$$\frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\text{função própria}} .$$

<u>**2º Passo:** Determinação das raízes do denominador da função própria e respectiva factorização</u>

A raiz do denominador é $x = 1$.
O denominador já se encontra factorizado sendo: $x - 1$

<u>**5º Passo:** Determinação da primitiva da função própria</u>

$$P\frac{1}{x-1} = \ln|x-1|$$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{e} x \ln x \, dx$

<u>Resolução:</u>

$$\int_{\frac{1}{2}}^{e} x \ln x \, dx \underset{(*)}{=} \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{e} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4} - \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}\right) = \frac{e^2}{2}1 - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{8}\ln 2^{-1} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{16} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{16}$$

Cálculos auxiliares: $(*)$

$$\underset{\uparrow}{P x \ln x} = \frac{x^2}{2}\ln x - P\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}Px = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

Usando o método de primitivação por partes
$P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$
(Folhas de apoio de Mat.II pág 2)
e a observação b.2
(Folhas de apoio de Mat.II pág 3)
Tem-se que:

$$\begin{cases} u' = x \\ v = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Px = \frac{x^2}{2} \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

d) $\int_0^1 \frac{x^5}{3+x^{12}} dx$

<u>Resolução:</u>

$$\int_0^1 \frac{x^5}{3+x^{12}} dx \underset{(*)}{=} \left[\frac{\sqrt{3}}{18}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^6}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{18}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x^6}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1^6}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{0^6}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} - \operatorname{arc\,tg}0\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \operatorname{arc\,tg}0\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{108}$$

Cálculos auxiliares: (*)

$$P\frac{x^5}{3+x^{12}}=P\frac{x^5}{3\left(1+\frac{x^{12}}{3}\right)}=\frac{1}{3}P\frac{x^5}{1+\frac{\left(x^6\right)^2}{3}}=\frac{1}{3}P\frac{x^5}{1+\left(\frac{x^6}{\sqrt{3}}\right)^2}\underset{\uparrow}{=}\frac{\sqrt{3}}{3\cdot 6}P\frac{\frac{6x^5}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x^6}{\sqrt{3}}\right)^2}\underset{\uparrow}{=}\frac{\sqrt{3}}{18}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^6}{\sqrt{3}}$$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

Regra de primitivação: $P\frac{u'}{1+u^2}=\operatorname{arc\,tg} u+C$

em que $\begin{cases} u=\frac{x^6}{\sqrt{3}} \\ u'=\frac{6x^5}{\sqrt{3}} \end{cases}$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Resolução:

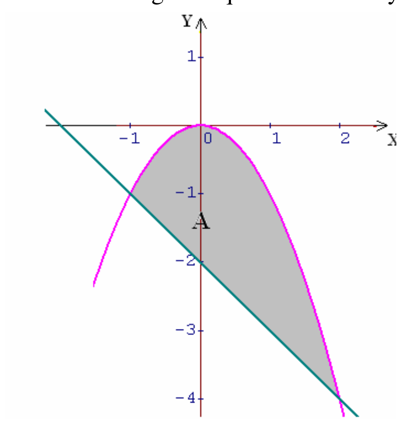
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left[\operatorname{arc\,sen} x\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arc\,sen} 0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

III.2 Calcule a área da figura limitada pelas linhas: $y+x^2=0$; $x+y+2=0$

Resolução:

Representação gráfica:

- $y=-x^2$, Representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para baixo
- $y=-x-2$, Representa uma recta de declive negativo que corta o eixo yy em -2



Determinação dos pontos de intersecção entre a parábola $y=-x^2$ e a recta $y=-x-2$:

$$\begin{cases} y=-x^2 \\ y=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2=-x^2 \\ y=-x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=-x-2 \end{cases} \underset{\text{Pela formula resolvente}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-1 \vee x=2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$$

Cálculo da área (A):

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2-(-x-2)\right)dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$$

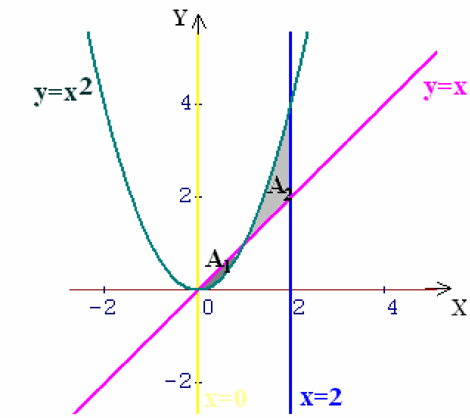
$$=-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\cdot 2-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)\right)=-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\frac{9}{2}$$

III.3 Calcule a área compreendida entre as curvas $y=x$ e $y=x^2$ e as rectas $x=0$ e $x=2$.

Resolução:

Representação gráfica:

- $y=x$, Representa a recta bissectriz dos quadrantes ímpares
- $y=x^2$, Representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para cima
- $x=0$, Representa uma recta horizontal que coincide com o eixo dos yy
- $x=2$, Representa uma recta vertical



Determinação dos pontos de intersecção entre a parábola $y=x^2$ e a recta $y=x$:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x^2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x-1=0 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

A parábola $y=x^2$ e a recta $y=x$ intersectam-se nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$.

Cálculo da área (A):

A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x-x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right)+\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)=1$$

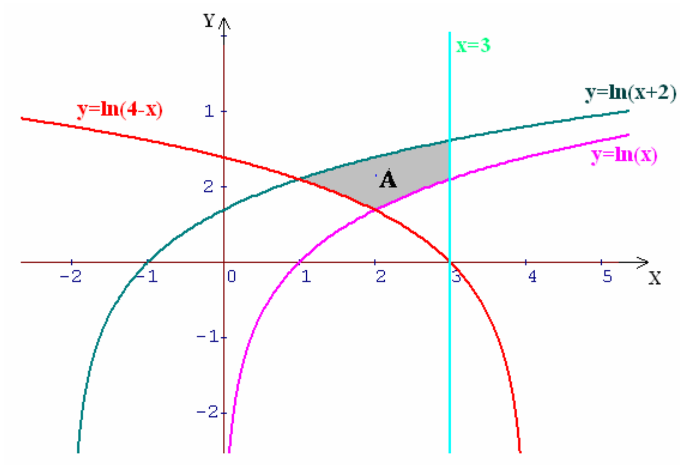
III.4 Determine a área da porção de plano limitada pelas curvas de equação:

a) $y = \ln(x)$; $y=\ln(x+2)$; $y=\ln(4-x)$; $x=3$

Resolução:

<u>Representação gráfica:</u>

- $y = \ln(x)$, Representa a função logarítmica
- $y=\ln(x+2)$, Representa a função logarítmica com translação horizontal para a esquerda (a=2>0)
- $y=\ln(4-x)$, Representa a função logarítmica com simetria em relação ao eixo dos yy e translação horizontal para a esquerda (a=4>0).



<u>Cálculo da área (A)</u>:

A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 \left(\ln(x+2)-\ln(4-x)\right)dx + \int_2^3 \left(\ln(x+2)-\ln(x)\right)dx \underset{(*)}{=}$$

$$= \left[x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)-\left(x\ln(4-x)-x-4\ln(4-x)\right)\right]_1^2 + \left[x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)-\left(x\ln(x)-x\right)\right]_2^3$$

$$= \left[(x+2)\ln(x+2)+(-x+4)\ln(4-x)\right]_1^2 + \left[(x+2)\ln(x+2)-x\ln(x)\right]_2^3$$

$$= (2+2)\ln(2+2)+(-2+4)\ln(4-2)-\left((1+2)\ln(1+2)+(-1+4)\ln(4-1)\right)$$

$$+(3+2)\ln(3+2)-3\ln(3)-\left((2+2)\ln(2+2)-2\ln(2)\right)$$

$$= 4\ln(4)+2\ln(2)-3\ln(3)-3\ln(3)+5\ln(5)-3\ln(3)-4\ln(4)+2\ln(2)$$

$$= 4\ln(2)-9\ln(3)+5\ln(5)$$

Cálculos auxiliares $(*)$ *:*

Para calcular as primitivas $P\ln(x+2)$, $P\ln(4-x)$ e $P\ln(x)$ vamos recorrer ao método de primitivação por partes.

- $$P\ln(x) = \underset{\uparrow}{P\left(1\cdot\ln(x)\right)} = x\ln(x) - Px\frac{1}{x} = x\ln(x) - P1 = x\ln(x) - x$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=\frac{1}{x} \end{cases}$

- $P\ln(x+2) = P(1\cdot\ln(x+2)) \underset{\uparrow}{=} x\ln(x+2) - Px\frac{1}{x+2} = x\ln(x+2) - P\frac{x}{x+2} = x\ln(x+2) - P\frac{x+2-2}{x+2}$

  Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

  em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\ln(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=\frac{1}{x+2} \end{cases}$

  $$= x\ln(x+2) - P\left(1-\frac{2}{x+2}\right) = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)$$

- $P\ln(4-x) = P(1\cdot\ln(4-x)) \underset{\uparrow}{=} x\ln(4-x) - Px\frac{-1}{4-x} = x\ln(4-x) - P\frac{-x}{4-x} = x\ln(4-x) - P\frac{4-x-4}{4-x}$

  Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

  em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\ln(4-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=\frac{-1}{4-x} \end{cases}$

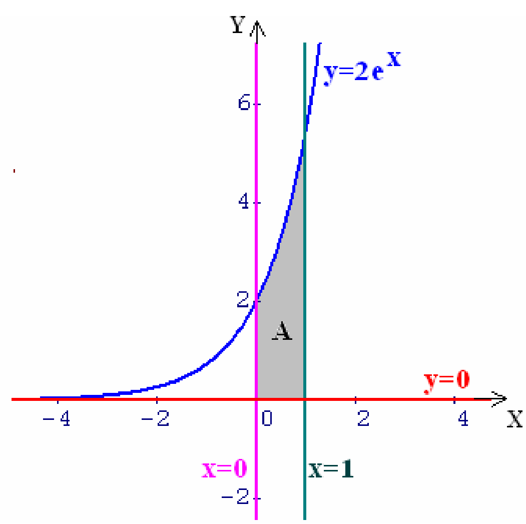
  $$= x\ln(4-x) - P\left(1+\frac{-4}{4-x}\right) = x\ln(4-x) - x - 4\ln(4-x)$$

b) $y=2e^x$; $x=0; x=1; y=0$

Resolução:

Representação gráfica:

- $y=2e^x$, Representa a função exponencial
- $x=0$, Representa uma recta horizontal que coincide com o eixo dos yy
- $x=1$, Representa uma recta vertical
- $y=0$, Representa uma recta vertical que coincide com o eixo dos xx.



Cálculo da área (A):

$$A = \int_0^1 (2e^x - 0)\,dx = 2\int_0^1 e^x\,dx = 2\left[e^x\right]_0^1 = 2(e^1 - e^0) = 2(e-1) = 2e-2$$