Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

Campus da Alameda **8 de Novembro de 2008, 13 horas**

LEAmb, LEMat, LEANaval, MEB, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(8) **I.** 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x - \frac{\pi}{2} - e}{x - e} \geq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ |x - \pi| \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

a) Mostre que $A = \left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right] \cup]e, +\infty[$.(1,5)

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$ (0,2), $\min A$ (0,2), $\text{máx}(A \cap B)$ (0,2), $\inf(A \cap B)$ (0,3), $\sup(A \cap B \cap \mathbb{Q})$ (0,3), $\inf(A \cap B \cap \mathbb{Q})$ (0,3).

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão decrescente de termos em A é divergente.(1,0)

(ii) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em $A \cap B$ tende para $\frac{3\pi}{2}$.(1,0)

(iii) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem um sublimite.(1,0)

2. Use indução matemática para provar que $\sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1} = 1 + (n-1)2^n$. (2,0)

(6) **II.** 1. Calcule ou mostre que não existe o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\lim \frac{n\sqrt{n} + 2n^2 + 1}{1 - 3n^2}, \quad \lim \frac{3^n + n!}{1 + n! 3^n}, \quad \lim \sqrt[n]{\frac{n + 3^n}{n!}}, \quad \lim \left(1 - \frac{1}{n!}\right)^{(n+1)!}$$

(6) **III.** 1. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ke^{-x}, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{(x-1)x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

onde k é um número real.

a) Estude f quanto a continuidade em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.(1,5)

b) Determine k por forma a que f seja contínua no ponto zero.(2,0)

2. Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em zero e seja ϕ a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = g(1 + \cos x)$$

Indique, justificando, os pontos em que ϕ é necessariamente contínua.(2,5)