Exercício 1.– Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(-1) = 0 = f(1)$. Prove que f tem um ponto fixo, i.e., que existe um ponto $\alpha \in [-1,1]$ com $f(\alpha) = \alpha$.

Exercício 2.– Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$, para todo o $x > b$. Mostre que f tem mínimo em $[0,+\infty[$.

Exercício 3.– Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

1. Prove que f é limitada.
2. Prove que f tem um ponto fixo, i.e., que existe um ponto $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.
3. Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique, justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$

Exercício 4.– Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(0) > 0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Prove que f tem máximo no intervalo $[0,+\infty[$.

Exercício 5.– Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Mostre que f é limitada.

Exercício 6.– Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Poderá existir uma sucessão (x_n) com termos em $[-1,1]$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tem $f(x_n) = n$? Porquê?

Exercício 7.– Quais das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis em $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$