Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

7^a Ficha de exercícios para as aulas práticas: 13 - 24 Novembro de 2006

1. Calcule as derivadas das seguintes funções.

   (1) $\sqrt{x}$ **(2)** $\sqrt{x^2}$ **(3)** $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ **(4)** $x^{-3/2}+x^{2/3}$ **(5)** $\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} x$ **(6)** $\cos\operatorname{arcsen} x$

   (7) $\operatorname{tg} x - xe^{2x}$ **(8)** $\dfrac{x-\cos x-2}{\operatorname{sen} x - x}$ **(9)** $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x}$ **(10)** $\operatorname{tg}^2 x$ **(11)** $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

   (12) $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ **(13)** $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ **(14)** $-\dfrac{3}{x^2} - 2\operatorname{tg}\sqrt{x} + x^4\operatorname{sen}^3 3x$ **(15)** $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x^2 - \operatorname{tg}^2 x^3}{x}$

   (16) $\operatorname{arcsen} x \arccos x \operatorname{arctg} x \log x$ **(17)** $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}$ **(18)** $\dfrac{x}{\sqrt{5-(2x)^2}}$

   (19) $\log\arccos\sqrt{1-x^2}$ **(20)** $\log x \log\log\log x$ **(21)** $\sqrt[3]{\log^2 x^2}$ **(22)** $\dfrac{x\operatorname{sen}^2 2x + x^2\cos x^3}{\operatorname{cotg} x}$

   (23) $\sqrt[3]{\log^2 x^2}$ **(24)** $\operatorname{arctg}^2\sqrt{(4-x^2)^3}$ **(25)** $x^2\left[1-\log^3\left(x\operatorname{sh} x^2\right)\right]$

   (26) $\dfrac{1}{x}\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x \operatorname{arcsen}^2\dfrac{1}{x^2}$ **(27)** $\sqrt[3]{x\operatorname{sen} x}\cos e^{\sqrt{x}}$ **(28)** $\arccos\operatorname{arctg}^2\log\left(-x^3\right)$

   (29) $\operatorname{sen}^3\left(2x\log\left(1-x^3\right)\right)$ **(30)** $\log\operatorname{arcsen} e^{\frac{x^2+1}{x-x^2}}$ **(31)** $\dfrac{e^{\log^2 x^3}}{1-x^2}$ **(32)** $e^{\sqrt{x}} - e^{1/x}$

   (33) $e^{\log x} + 2^{x^2}$ **(34)** $e^{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$ **(35)** $x^{1/x}$ **(36)** $x^{x^{x-1}}$ **(37)** $(x^x)^{x-1}$ **(38)** $x^{\operatorname{sen} 2x}$

   (39) $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ **(40)** $\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}\operatorname{ch}\cos x$ **(41)** $\log x^x$ **(42)** $(\log x)^x$ **(43)** $x^{\log x}$

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x<2,\\ x+2 & \text{se } x\geq 2.\end{cases}$$

   Determine a função derivada de f.

3. Sejam $a,b\in\mathbb{R}$. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x<2,\\ ax+b & \text{se } x\geq 2.\end{cases}$$

   Determine a e b de modo a que f seja diferenciável em $\mathbb{R}$, e para esses valores de a e b, determine f'.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 6$.

   (i) Determine os pontos do plano onde a tangente ao gráfico de f é horizontal.

   (ii) Determine os pontos do plano onde a tangente ao gráfico de f tem declive -6.

   (iii) Mostre que a recta $y = 12x - 17$ é tangente ao gráfico de f e determine o ponto de tangência.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $c \in \mathbb{R}$, com $f(c) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |f(x)|$. Mostre que g é diferenciável em c se e só se $f'(c) = 0$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $c \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$f'(c) = \lim \left[n \left(f\left(c + \frac{1}{n} \right) - f(c) \right) \right].$$

   Mostre, por meio de um exemplo, que a existência do limite anterior não garante a existência de $f'(c)$.

7. Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções.

   (i) $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ **(ii)** $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

   (iii) $x|x|$ **(iv)** $|x| + |x+1|$ **(v)** $2x + |x|$ **(vi)** $|\operatorname{sen} x|$ **(vii)** $e^{-|x|}$ **(viii)** $\log |x|$ **(ix)** $e^{x-|x|}$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$.

   (i) Mostre que se f é par, então f' é ímpar.

   (ii) Mostre que se f é ímpar, então f' é par.

9. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto 0 e tais que

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{-1/x}} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x\frac{1 + e^{1/x}}{2 + e^{1/x}}, \qquad \text{para todo o } x \neq 0.$$

   Calcule as derivadas laterais de f e de g no ponto 0.

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 1 - x^2 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

   (i) Defina a função derivada f'.

   (ii) Justifique a não existência, no gráfico f, de dois pontos distintos relativamente aos quais as tangentes a esse gráfico sejam paralelas.

11. Seja C a curva plana de equação $y = x^2 - 5x + 6$.

(i) Determine o ponto de C no qual a tangente à curva é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

(ii) Justifique que, dada arbitrariamente uma recta do plano não paralela ao eixo das ordenadas, existe um e um só ponto de C no qual a tangente é paralela à recta dada.

12. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em R e tal que $g(0) = 3$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = 1 + xg(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(i) Mostre que f é diferenciável no ponto 0 e determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de intersecção com o eixo das ordenadas.

(ii) Mostre que se g fôr estritamente monótona, o gráfico de f e a tangente (cuja equação se determinou em (i)) só se intersectam no ponto de tangência.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f(0) = f'(0) = 1$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \operatorname{arctg} f(x) - f(\operatorname{arctg} x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine $g'(0)$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que f'' é contínua em $\mathbb{R}$. Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$\varphi(x) = f(e^x), \qquad \psi(x) = f(\operatorname{sen} x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Mostre que

$$\varphi''(0) + \psi''\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''(1).$$

15. Considere a função $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(i) Defina a função f' e determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, com $a < 0$.

(ii) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(iii) Seja F a função que prolonga f por continuidade ao ponto 0. Determine a função F'.

16. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(i) Determine f'.

(ii) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto 0.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Determine $(g \circ f)'$.

18. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0, \\ \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto 1.

(ii) Determine a e b de modo a que f seja diferenciável no ponto 0 e verifique se, com esses valores de a e b, a função f' fica contínua em $\mathbb{R}$.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = x\left(2 + x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\right), \qquad \text{para todo o } x \neq 0.$$

(i) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto 0 e mostre que nenhum ponto do gráfico de f está situado "abaixo" dessa recta tangente.

(ii) Estude f' quanto à continuidade.

20. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que f' é contínua no ponto a. Mostre que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = (x - a) f(x)$$

é duas vezes diferenciável no ponto a e determine $g''(a)$.

21. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(e^x)$. Mostre que

$$g''(0) - g'(0) = f''(1).$$

22. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = e^{g(\log x)}$.

(i) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de φ no ponto 1.

(ii) Determine $\varphi''(e)$.

23. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}^+$ para os quais as funções $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

são diferenciáveis em $\mathbb{R}$, mas as respectivas derivadas não são contínuas no ponto 0.

24. Verifique que as seguintes funções têm um máximo ou um mínimo local nos pontos indicados, não sendo, no entanto, diferenciáveis nesses pontos.

(i) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x > 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ em $x = 0$. **(ii)** $\sqrt[3]{x^2 (x-3)^2}$ em $x = 0$ e $x = 3$.

(ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ em $x = 0$.

25. Determine, se existirem, os extremos locais e os intervalos de monotonia das seguintes funções.

(i) $x^2 - 3x + 5$ **(ii)** $3x - 4x^2$ **(iii)** $x^3 - 3x - 4$ **(iv)** $x^4 + 2x^2 - 4$

(v) $x + \dfrac{1}{x}$, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **(vi)** $\dfrac{x}{x^2+1}$ **(vii)** $\sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, em $\mathbb{R}^+$

(viii) $2x + \dfrac{1}{x^2}$, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **(ix)** $|x^2 - 1|$, em $[-4, 4]$ **(x)** $1 - (x-1)^{2/3}$, em $[0, 2]$

(xi) $x\,|x^2 - 12|$, em $[-2, 3]$ **(xii)** $x\,(x-8)^{1/3}$, em $[0, 9]$

26. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{se } x < 0, \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Determine f'.

(ii) f tem extremos locais? Justifique.

27. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que

$$f(a) = f(b) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(x) \neq 0,$$

para todo o $x \in\,]a, b[$. Seja $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

para todo o $x \in\,]a, b[$.

Mostre que g é sobrejectiva, isto é, $g(]a, b[) = \mathbb{R}$.

(Sugestão: Aplique o Teorema de Rolle à função $f(x)\, e^{-\alpha x}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.)

28. Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ diferenciável em $]0, 1[$ e tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações.

(i) Para todo o $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, a função f tem máximo no intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

(ii) A função f é limitada em $]0,1[$.

(iii) A função f' tem infinitos zeros em $]0,1[$.

29. Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ diferenciável em $]0,1[$ e tal que
$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n+2}\right),$$
para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Supondo que existe $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, determine o seu valor.

30. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto que contenha os pontos 0 e 1. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e tal que
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n^2},$$
para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(i) Determine $f(0)$.

(ii) Mostre que o contradomínio de f contém o intervalo $[2,3]$, isto é, $f(I) \supset [2,3]$.

(iii) Supondo que existe $f^{(k)}$ nalguma vizinhança de 0, para todo o $k \in \mathbb{N}$, determine $f^{(k)}(0)$ e diga se 0 é ou não ponto de extremo local.

31. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que
$$\phi(n) = (-1)^n n,$$
para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Mostre que não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi'(x)$.

32. **(i)** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que g' é injectiva. Mostre que nenhuma recta tangente ao gráfico de g tem mais de um ponto comum com esse gráfico.

(ii) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que h'' é contínua em $\mathbb{R}$. Mostre que se alguma recta tangente ao gráfico de h intersecta esse gráfico em dois pontos distintos, então h'' tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$.

(iii) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Mostre que se a recta $y = x$ intersecta o gráfico de f em três pontos distintos, então f'' tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$.

33. Mostre que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente 3 zeros.

34. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

35. Mostre que:

(i) o polinómio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais;

(ii) o polinómio $x^{101} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

36. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$, no entanto, tem-se $f'(x) \neq 0$, para todo o $x \in [-1, 1]$. Explique porque é que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

37. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$, com $f(0) = 0$, e tal que f' é crescente. Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Mostre que g é crescente em $\mathbb{R}^+$.

38. Mostre que as funções $\operatorname{tg} x - x$ e $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ são estritamente monótonas em $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

39. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2,$$

para todos os $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é uma função constante em $\mathbb{R}$.

40. Mostre que:

(i)

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|,$$

para todos os $x, y \in \mathbb{R}$;

(ii)

$$\operatorname{tg} x > x,$$

para todo o $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$;

(iii)

$$\log(x + 1) - \log x < \frac{1}{x},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^+$;

(iv)

$$\frac{x - 1}{x} < \log x < x - 1,$$

para todo o $x \in]1, +\infty[$;

(v)

$$e^x \geq 1 + x,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, e $e^x = 1 + x$ se e só se $x = 0$;

(vi)

$$|\cos x - 1| \leq x^2,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(vii)

$$|\operatorname{sen} x - x| \leq x^3,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(viii)

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{arctg} x \leq x,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;

(ix) Seja $\alpha > 1$.

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x,$$

para todo o $x \in]-1, +\infty[$, e $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ se e só se $x = 0$;

(x)

$$8 + \frac{1}{9} \leq \sqrt{66} \leq 8 + \frac{1}{8};$$

Sugestão: Considere a função $\sqrt{x}$ no intervalo $[64, 66]$;

(xi) Para $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ fixo,

$$a^{1/n} - b^{1/n} < (a-b)^{1/n},$$

para todos os $a, b \in \mathbb{R}^+$, com $a > b$.

Sugestão: Considere a função $f(x) = x^{1/n} - (x-1)^{1/n}$, para todo o $x \geq 1$, com $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ fixo, e verifique que f é decrescente.

(xii) Para $\alpha \in]0, 1[$ fixo,

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b,$$

para todos os $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Sugestão: Considere a função $f(x) = \alpha x - x^\alpha$, para todo o $x \geq 0$, com $\alpha \in]0, 1[$ fixo, e verifique que $f(1)$ é um mínimo de f.

41. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ diferenciável em $[a, b]$ e tal que f' é contínua em $[a, b]$. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|,$$

para todos os $x, y \in [a, b]$.

42. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que f'' é limitada, e $f(0) = f'(0) = 0$. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq cx^2,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

43. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

44. Sejam $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e tais que

$$\varphi(0) > \psi(0) \qquad \text{e} \qquad x(\varphi'(x) - \psi'(x)) > 0, \quad \text{para todo o } x \neq 0.$$

(i) Mostre que $\varphi(x) > \psi(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Mostre por meio de um exemplo que, se a hipótese $\varphi(0) > \psi(0)$ não se verificar então pode ter-se $\varphi(x) < \psi(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

45. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e tais que

$$f(0) = g(0) \qquad \text{e} \qquad f'(x) > g'(x), \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $x(f(x) - g(x)) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

46. Seja $V_\varepsilon(0)$ uma vizinhança de 0. Seja $f : V_\varepsilon(0) \to \mathbb{R}$ diferenciável em $V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$, para todo o $x \in V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.

(i) Mostre que se f é contínua em 0, então $f(0)$ é um extremo de f. Diga se $f(0)$ é um máximo ou um mínimo de f. Se f fôr diferenciável em 0, qual é o valor de $f'(0)$?

(ii) Mostre por meio de um exemplo que, sem a hipótese da continuidade de f em 0, não pode garantir-se que $f(0)$ seja um extremo de f.

47. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine os valores reais de x que verificam a condição

$$g^{(n)}(x) > 0,$$

para todos os $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Indique um intervalo no qual todas as derivadas $g^{(n)}$ sejam crescentes. Existirá algum intervalo no qual todas essas derivadas sejam decrescentes? Justifique.

48. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = xf(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se g'' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $g''(0) = 0$, mostre que $f(0)$ é mínimo absoluto de f.

49. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = f'(1) = 1$. Mostre que existe $c \in]0,1[$ tal que $(f \circ f)'(c) = \dfrac{1}{3}$.

50. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$, com mais de um ponto. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I tal que $f'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$. Mostre que ou $f'(x) > 0$ para todo o $x \in I$, ou $f'(x) < 0$ para todo o $x \in I$.