Exercício 1.— Mostre que o conjunto dos números irracionais não é fechado para nenhuma das operações usuais: adição, produto, e exponenciação. Ou seja, existem irracionais $x, y, u, v, w, z \in \mathbb{I}$ tais que $x + y \notin \mathbb{I}$, $u \cdot v \notin \mathbb{I}$ e $w^z \notin \mathbb{I}$.

Exercício 2.— Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^6 + 2x^3 - 2 \leq 0\}$.

1. Exprima A na forma de um intervalo de números reais.
2. Determine $\operatorname{Maj}(A), \operatorname{Min}(A), \sup(A), \inf(A), \max(A)$ e $\min(A)$.

Exercício 3.— Considere os seguintes conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| + 1 > 2x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + 3x^3 + 2x^2 \leq 0\}$ e $C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Mostre que $A =]-\infty, 1[$ e $B = [-2, -1] \cup \{0\}$. Verifique se os conjuntos $A, B, C, A \cap B \cap C$, são majorados ou minorados e caso sejam, indique em $\mathbb{R}$ o conjunto dos majorantes e dos minorantes dos mesmos.
2. Caso existam, determine em $\mathbb{R}$ o supremo, infimo, máximo e minimo de cada um dos conjuntos $A, B, C, A \cap B \cap C$.

Exercício 4.— Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > s - \epsilon$.

Exercício 5.— Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Seja ainda $m \in \mathbb{R}$ um majorante de A distinto de s. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $a < m - \epsilon$ para todo o $a \in A$.

Exercício 6.— Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que $a \leq b$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Mostre que existem o supremo de A e o ínfimo de B, e que $\sup A \leq \inf B$.

Exercício 7.— Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e limitados, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < \epsilon$.

Exercício 8.— Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que B é majorado e $A \subseteq B$. Mostre que A e B têm supremo e que $\sup A \leq \sup B$.