Capítulo 6

Funções Lineares

Neste capítulo estudamos um tipo particular de funções, as chamadas funções lineares. O principal resultado a reter é que uma função linear $f : V \to W$ entre dois espaços lineares de dimensões respectivamente, $\dim V = n$ e $\dim W = p$, é sempre representada por uma matriz A do tipo $p \times n$. Tal significa que escolhendo bases ordenadas B e B', respectivamente em V e em W se pode escrever $(f(x))_{B'} = A\mathbf{x}_B$, para todo $x \in V$.

Em primeiro lugar começamos por rever alguns conceitos básicos sobre funções. Definem-se depois funções lineares entre espaços vectoriais. Mostra-se que a função composta de funções lineares é ainda uma função linear, e que a inversa de uma função linear invertível ainda é uma função linear. Introduzimos ainda na Secção 6.1 a noção de isomorfismo, e mostramos que qualquer espaço linear real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Na secção seguinte estudamos a representação matricial de uma função linear em relação a bases fixadas no domínio e no espaço de chegada da função, e relacionamos representações matriciais distintas de uma dada função linear. Na Secção 6.3 caracterizam-se as funções lineares invertíveis através do seu núcleo e relacionam-se os valores e vectores próprios de funções lineares com os valores e vectores próprios de matrizes que representam a função. Finalizamos o capítulo introduzindo a noção de espaço dual de um espaço linear, e deduzindo a representação matricial da função dual induzida por uma dada função linear entre espaços vectoriais.

6.1 Definição de função linear

Comecemos por recordar que uma função f é uma "lei"que a cada elemento x de um conjunto V associa um e um só elemento y de outro conjunto W. Quando f aplica x em w escrevemos $w = f(x)$ e dizemos que w é a *imagem* de x por f. A notação $f : V \to W$ indica que f aplica os elementos de V em elementos de W, e $f : x \mapsto w$ usa-se para indicar que o elemento $x \in V$ é aplicado por f no elemento $w \in W$. Para a função $f : V \to W$, o conjunto V é chamado *conjunto de partida*, ou *domínio* de f, e o conjunto W é denominado *conjunto de chegada*. O subconjunto de W que é formado pelas imagens por f dos elementos de V é designado por *contradomínio*, ou *conjunto imagem* de f, e será denotado por $\mathrm{Im}(f)$, ou $f(V)$. Isto é,

$$Im(f) = \{w \in W : \; w = f(x), \; \text{para algum } x \in V\}\,.$$

Na literatura, os termos *aplicação* e *transformação* são igualmente usados para designar uma função.

Consideremos $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^p$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. A função f aplica cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ num vector $\mathbf{w} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p$, digamos $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$. Para funções f entre os espaços lineares $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, dizer que f é uma função linear significa que as equações que relacionam $w_1, w_2, \ldots, w_p$ com $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são equações lineares (nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Por exemplo, consideremos as funções:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, xy, x^2 + 1)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y - z, 2y - 3z)$.

Destas funções somente a função do item 4 é linear uma vez que as equações $w_1 = x + y - z$ e $w_2 = 2y - 3z$ são lineares.

Como veremos adiante, qualquer função linear f pode ser escrita na forma $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz. Por exemplo, a função do item 4 acima pode escrever-se nesta forma, dado que

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2y - 3z) \iff f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Pretendemos agora definir funções lineares $T : V \to W$ no caso geral em que V e W são espaços lineares. É claro que a definição deve generalizar o caso em que $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^p$. Para tal, note-se que quando $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz real $p \times n$, são satisfeitas as condições

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}); \\ T(\alpha\mathbf{x}) &= A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x} = \alpha T(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

para quaisquer vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e todo o escalar real α. Estas são precisamente as propriedades que iremos usar para definir função linear entre dois espaços vectoriais.

Definição 6.1. **Função linear**
Seja $T : V \to W$ uma função entre dois espaços lineares V e W sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que T é uma *função linear*, ou *transformação linear*, se para quaisquer vectores $x, y \in V$, e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, são verificadas as condições:

i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Note-se que as condições i) e ii) da Definição 6.1 são equivalente à condição:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \text{para todos os } \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e todos } x, y \in V.$$

Esta condição, que caracteriza igualmente uma função linear, significa que uma função é linear se aplica combinações lineares de vectores em combinações lineares dos respectivos vectores imagem.

Exercício 6.1. Sejam V e W espaços lineares sobre $\mathbb{K}$, e $T_1 : V \to W$ e $T_2 : V \to W$ duas funções lineares. Mostre que as funções $(T_1 + T_2)$ e (αT_1), com $\alpha \in \mathbb{K}$, são lineares. Recorde para tal que $(T_1 + T_2)$ e αT_1 são definidas por:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \quad \text{e} \quad (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x).$$

▲

Apresentemos alguns exemplos de funções lineares e não lineares.

Exemplo 6.1. Exemplos de funções lineares

1. **Produto interno**: Seja $T : V \to \mathbb{C}$ a função definida por $T(x) = \langle v, x \rangle$, onde $\langle \, , \, \rangle$ denota um produto interno no espaço linear complexo V e v um vector de V.

   Para mostrar que T é linear basta verificar que, por definição de produto interno, esta função goza das propriedades P2 e P3 da Definição 5.1 (pág. 243). Ou seja,

   $$T(x+y) = \langle v, x+y \rangle = \langle v, x \rangle + \langle v, y \rangle = T(x) + T(y),$$

   e

   $$T(\alpha x) = \langle v, \alpha x \rangle = \alpha \langle v, x \rangle = \alpha T(x),$$

   onde α é um escalar complexo.

2. **A projecção ortogonal sobre um subespaço:** Seja S um subespaço de um espaço linear V munido de um produto interno, e $T : V \to S$ definida por $T(x) = \operatorname{proj}_S x$.

   Para mostrar que T é uma função linear, basta escolher uma base ortogonal de S e utilizar a expressão (5.15) que define $\operatorname{proj}_S x$ (ver pág. 263). Essa expressão, diz-nos que $\operatorname{proj}_S x$ é igual à soma das projecções ortogonais de x sobre os vectores da base, ou seja, uma soma em que as parcelas são da forma $\operatorname{proj}_{v_i} x = \frac{\langle v_i \, , x \rangle}{\|v_i\|^2}$ (sendo v_i um vector da base ortogonal escolhida em S). O produto interno é linear (na variável x), e portanto a função $g(x) = \operatorname{proj}_{v_i} x$ é linear. Como a soma de funções lineares é uma função linear (ver Exercício 6.1), tem-se que T é linear.

3. **A operação de derivação**: Considere-se o subespaço $\mathcal{D}$ do espaço linear $\mathcal{F}$ das funções reais de variável real, formado pelas funções diferenciáveis. Seja $T : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ definida por $T(f) = f'$, onde f' designa a derivada de f. Como,

   $$T(f+g) = (f+g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$$

   e

   $$T(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha T(f),$$

   tem-se que T é linear.

4. **O integral de uma função**: Seja V o espaço linear das funções reais integráveis no intervalo $[a, b]$, e T a função definida em V por $T(f) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Como,

$$T(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = T(f) + T(g),$$
$$T(\alpha f) = \int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx = \alpha T(f),$$

tem-se que T é linear.

5. **O traço de uma matriz**: Seja $\mathcal{M}_{n\times n}$ o espaço linear das matrizes reais de ordem $n > 1$, e $T : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = \mathrm{tr}(A)$. Usando a definição de traço de uma matriz (soma das entradas da diagonal principal), é fácil verificar que

$$\begin{aligned} T(A+B) &= \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = T(A) + T(B) \\ T(\alpha A) &= \mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) = \alpha T(A). \end{aligned}$$

Logo, o traço é uma função linear.

6. **Escolha de coordenadas**: Seja V um espaço linear real de dimensão n e $B = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de V. Verifiquemos que a função $\mathbb{I} : V \to \mathbb{R}^n$, que a cada vector $x \in V$ faz corresponder o vector das coordenadas $\mathbf{x}_B$, isto é, $\mathbb{I}(x) = \mathbf{x}_B$, é linear.

Se $x, y \in V$ são tais que $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ e $y = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(x) &= \mathbb{I}(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = (x_1, \ldots, x_n) \\ \mathbb{I}(y) &= \mathbb{I}(y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) = (y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(x+y) &= \mathbb{I}((x_1+y_1)v_1 + \cdots + (x_n+y_n)v_n) = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \\ &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = \mathbb{I}(x) + \mathbb{I}(y) \\ \mathbb{I}(\alpha x) &= \mathbb{I}((\alpha x_1)v_1 + \cdots + (\alpha x_n)v_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \\ &= \alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha\mathbb{I}(x). \end{aligned}$$

♦

Exemplo 6.2. Exemplos de funções não lineares

1. **Determinante de uma matriz**: Seja $\mathcal{M}_{n\times n}$ o espaço linear das matrizes reais $n \times n$ (com $n > 1$), e $T : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ definida por $T(X) = \det(X)$.

   Como para qualquer escalar α se tem $\det(\alpha X) = \alpha^n \det(X)$, a função determinante não é linear.

2. **Translação:** Seja V um espaço linear e $T : V \to V$ definida por $T(x) = x + v$, onde v é um vector não nulo fixado em V.

   Para qualquer escalar α, são válidas as igualdades

   $$T(\alpha x) = \alpha x + v \qquad \text{e} \qquad \alpha T(x) = \alpha(x + v).$$

   Logo, $T(\alpha x) \neq \alpha T(x)$, e portanto T não é linear.

♦

Uma propriedade das funções lineares $T : V \to W$, entre espaços lineares V e W, é que a imagem do vector zero de V é o vector zero de W. De facto, como V é um espaço linear, sabemos que: (a) V contém o vector zero; (b) cada vector x de V possui um simétrico $(-x) = (-1)x$, que ainda pertence a V. Logo, usando a definição de função linear, tem-se

$$T(0) = T(x - x) = T(x) - T(x) = 0.$$

Podemos assim enunciar uma condição necessária para uma função ser linear.

Proposição 6.1. Se V e W são espaços lineares e $T : V \to W$ é uma função linear, então
$$T(0) = 0.$$

Exemplo 6.3. A função T definida por $T(x, y) = (x - y, x + y + 1)$ não é linear uma vez que $T(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0)$. ♦

Recordamos a seguir as definições de função composta de duas funções e de inversa de uma função. Mostramos que no caso das funções em causa serem lineares então a função composta e a função inversa também são funções lineares.

Composição e inversão de funções

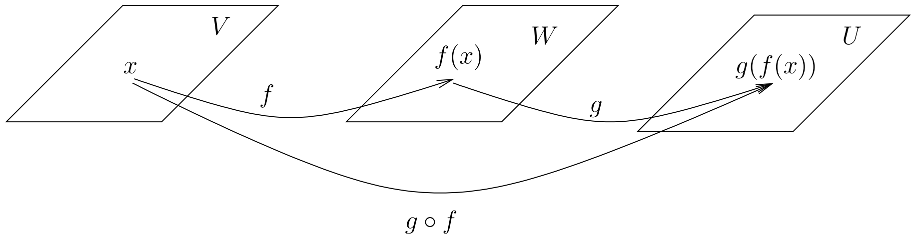

Figura 6.1: A composição $g \circ f$ das funções f e g .

Dadas duas funções $f : V \to W$ e $g : W \to U$ define-se a *composição* $(g \circ f)$ (lê-se "g após f") como sendo a função

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{para todo o } x \in V. \tag{6.1}$$

Por conseguinte, a composição $(g \circ f)$ é uma função de V em U. É claro de (6.1) que $(g \circ f)$ só está definida se o contradomínio de f coincidir com o conjunto de partida de g. Observe o diagrama na Figura 6.1.

Na proposição seguinte mostramos que a composta de duas funções lineares é uma função linear.

Proposição 6.2. Sejam V, W e U espaços lineares. Se $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ são funções lineares, então $(T_2 \circ T_1) : V \to U$ é uma função linear.

Demonstração. Sejam x e y vectores de V e α um escalar. Da definição (6.1), de função composta, e da definição de função linear, temos

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(x + y) &= T_2(T_1(x + y)) = T_2(T_1(x) + T_1(y)) \\ &= T_2(T_1(x)) + T_2(T_1(y)) = (T_2 \circ T_1)(x) + (T_2 \circ T_1)(y),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\alpha x) &= T_2(T_1(\alpha x)) = T_2(\alpha T_1(x)) \\ &= \alpha T_2(T_1(x)) = \alpha (T_2 \circ T_1)(x).\end{aligned}$$

Ou seja, $(T_2 \circ T_1)$ satisfaz as duas condições da definição de função linear. $\square$

Dada uma função $f : V \to W$, a inversão de f consiste em determinar uma outra função $g : Im(T) \to V$ tal que a composição $g \circ f$ seja a identidade, isto é, tal que $(g \circ f)(x) = x$ para todo o $x \in V$ (observe a Figura 6.2).

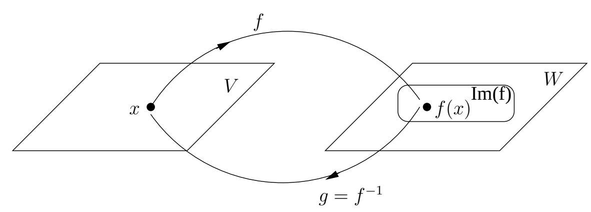

Figura 6.2: A função f e a sua inversa f^{-1}.

Definição 6.2. Inversa de uma função

Uma função $f : V \to W$ diz-se invertível se existe uma função $g : Im(f) \to V$ tal que $(g \circ f)$ é a função identidade em V. Isto é,

$$(g \circ f)(x) = x \text{ para todo } x \in V$$

Uma função g nestas condições designa-se por *função inversa* de f.

Deixamos como exercício mostrar que a inversa de uma função, quando existe, é única.

Exercício 6.2. Suponha que existem duas funções g_1 e g_2 que são funções inversas de uma função invertível f. Mostre que $g_1 = g_2$.

A inversa de uma função invertível é única.

▲

Quando f é invertível, designamos por f^{-1} a função inversa de f.

Note-se que a função inversa de uma função $T : V \to W$ entre espaços lineares, está definida num subespaço de W. De facto, $Im(T) \subseteq W$ é fechado para a adição de vectores e multiplicação por escalares uma vez que, sendo

$$y, w \in Im(T) \iff y = T(x_1) \text{ e } w = T(x_2) \text{ para alguns } x_1, x_2 \in V, \tag{6.2}$$

se tem

$$y + w = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2) \Longrightarrow y + w \in Im(T)$$

e

$$\alpha y = \alpha T(x_1) = T(\alpha x_1) \Longrightarrow \alpha y \in Im(T), \text{ com } \alpha \text{ escalar.}$$

Vejamos agora que a inversa de uma função linear ainda é uma função linear.

Proposição 6.3. Seja $T : V \to W$ uma função linear invertível. A função inversa T^{-1} é uma função linear.

Demonstração. Seja $T^{-1} : Im(T) \to V$ a função inversa da função linear T, e $u, v \in Im(T)$, com $u = T(x)$ e $v = T(y)$ para certos $x, y \in V$. Como T é linear, tem-se

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha u + \beta v) &= T^{-1}(\alpha T(x) + \beta T(y)) = T^{-1}(T(\alpha x + \beta y)) \\ &= \alpha x + \beta y = \alpha T^{-1}(u) + \beta T^{-1}(v), \end{aligned}$$

onde α e β são escalares. Ou seja, T^{-1} é linear. □

A injectividade de uma função f é condição necessária e suficiente para a invertibilidade de f. Recordemos as definições de injectividade[1] e de sobrejectividade de uma função.

Definição 6.3. A função $f : V \to W$ diz-se

(i) *Injectiva* se aplica pontos distintos em pontos distintos. Ou seja, f é injectiva se para todo $x, z \in V$ se tem

$$x \neq z \Longrightarrow f(x) \neq f(z),$$

ou equivalentemente, f é injectiva se: $f(x) = f(z) \Longrightarrow x = z$.

(ii) *Sobrejectiva* se o contradomínio de f é igual a W. Isto é,

$$Im(f) = W.$$

Uma função que é simultaneamente injectiva e sobrejectiva diz-se *bijectiva*.

Proposição 6.4. A função $f : V \to W$ é invertível se e só se f é injectiva.

Demonstração. Suponha-se que f é injectiva e mostremos que f é invertível. Sendo $y \in Im(f)$, existe $x \in V$ tal que $y = f(x)$. Como f é injectiva, a solução x de $y = f(x)$ é única, pelo que a função $g : Im(f) \to V$ tal que $g(y) = x$ está bem definida. Como $g(y) = g(f(x)) = x$ para todo o x, a função g é a inversa de f.

[1] Na terminologia anglo-saxónica uma função injectiva diz-se "one-to-one".

Para a implicação recíproca, suponha-se que f é invertível e mostremos que é injectiva. Sejam $x, z \in V$ tais que $f(x) = f(z)$. Como existe a função inversa, aplicando f^{-1} à igualdade anterior, tem-se $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(z))$, ou equivalentemente, $x = z$. Logo, f é injectiva. $\square$

Isomorfismos

Desde o Capítulo 3 que sabemos que, fixada uma base ordenada B num espaço linear V de dimensão n, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre vectores de um espaço linear real (resp. complexo) V de dimensão n e vectores de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{C}^n$). Esta correspondência associa a cada vector $x \in V$ o respectivo vector das coordenadas $\mathbf{x}_B$. No Exemplo 6.1-6 vimos ainda que esta função, $\mathbb{I} : x \mapsto \mathbf{x}_B$, é linear.

A função $\mathbb{I} : x \mapsto \mathbf{x}_B$ é um exemplo de um isomorfismo entre espaços lineares. Como indica a origem etimológica da palavra isomorfo (do grego "iso" quer dizer igual e "morfo" quer dizer forma), dois espaços lineares são isomorfos quando são estruturalmente iguais, no sentido em que qualquer propriedade que é verificada num espaço é igualmente válida no outro espaço. Define-se um isomorfismo entre espaços lineares como sendo uma função bijectiva $f : V \to W$ que preserva a estrutura de espaço linear em V e em W. Ou seja, uma função bijectiva f que preserva as operações de adição e multiplicação por escalares definidas em V e em W, isto é

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

As duas condições anteriores significam que f é linear.

Definição 6.4. Isomorfismo entre espaços lineares

Um isomorfismo entre os espaços lineares V e W é uma função $\mathbb{I} : V \to W$ linear e bijectiva.

Quando existe um isomorfismo entre V e W, os espaços lineares V e W dizem-se isomorfos.

Exercício 6.3. Mostre que um isomorfismo entre espaços lineares aplica bases em bases.

▲

Exercício 6.4. Mostre que o espaço linear real $\mathbb{C}$, dos números complexos $z = a + ib$, é isomorfo ao espaço das matrizes reais da forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

▲

Como a função (linear) que aplica um vector de um espaço linear no respectivo vector das coordenadas, na base ordenada fixada no espaço, é um isomorfismo, conclui-se o que a seguir se enuncia.

Proposição 6.5. Um espaço linear real (resp. complexo) de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Um isomorfismo é a função que a cada vector do espaço faz corresponder o vector das coordenadas numa base ordenada fixada no espaço.

Refira-se que o conceito de isomorfismo é mais geral do que o apresentado na Definição 6.4. Podem estabelecer-se isomorfismos entre conjuntos munidos de estruturas distintas da estrutura de espaço linear, como por exemplo, conjuntos munidos da estrutura de grupo, de anel, ou de álgebra de Lie (ver Capítulo 7). Por exemplo, se A e B são conjuntos munidos, respectivamente, das estruturas algébricas $\triangle$ e $\Box$, uma função bijectiva do conjunto A no conjunto B que preserve as estruturas, definidas em A e em B diz-se um *isomorfismo*. Isto é, uma função bijectiva $f : A \to B$ que satisfaz

$$f(a\triangle b) = f(a)\Box f(b), \quad \text{para todo } a, b \in A\,. \tag{6.3}$$

Se existe um isomorfismo entre os conjuntos $(A, \triangle)$ e $(B, \Box)$, munidos das respectivas estruturas, estes conjuntos dizem-se isomorfos.

No caso em que a estrutura em A e em B é a de espaço linear, um isomorfismo é uma função bijectiva que satisfaz a condição (6.3) para as operações de adição de vectores e de multiplicação por escalares. Neste caso, um isomorfismo é uma função linear tal como se considerou na Definição 6.4.

Exercício 6.5. Mostre que a função

$$f:\; x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} = X$$

é um isomorfismo entre $\mathbb{R}^3$, munido da estrutura de produto vectorial $\times$, e o conjunto $\mathcal{A}_3$ das matrizes reais anti-simétricas de terceira ordem, munido da estrutura $[\,,\,]$ definida por $[A, B] = AB - BA$.

Chama-se *comutador* à operação $[\,,\,]$ que associa ao par de matrizes A, B a matriz $[A, B] = AB - BA$. Como poderá ver no próximo capítulo, $(\mathbb{R}^3, \times)$ e $(\mathcal{A}_3, [\,,\,])$ são álgebras de Lie e a função f é um isomorfismo de álgebras de Lie.

▲

6.2 Matriz que representa uma função linear

O objectivo desta secção é mostrar que qualquer função linear $T : V \to W$, onde V e W são espaços lineares de dimensões n e p respectivamente, pode representar-se por uma (única) matriz A em relação a bases fixadas em V e em W. Isto significa que o vector das coordenadas de $T(x)$ na base fixada em W se pode escrever na forma $A\mathbf{x}_B$, onde $\mathbf{x}_B$ é o vector das coordenadas de x na base fixada em V.

Seja $T : V \to W$ uma função linear, $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de V e $B' = (w_1, w_2, \ldots, w_p)$ uma base ordenada do espaço de chegada W. Qualquer vector de um espaço linear escrever-se (de forma única) como combinação linear dos vectores de uma base desse espaço. Assim, existem escalares c_i únicos tais que

$$x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \iff \mathbf{x}_B = (c_1, \ldots, c_n) \qquad x \in V, \tag{6.4}$$

Como a função T é linear, tem-se

$$w = T(x) = T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \cdots + c_n T(v_n).$$

Desta igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{B'} = (\mathbf{T}(x))_{B'} &= c_1(\mathbf{T}(v_1))_{B'} + c_2(\mathbf{T}(v_2))_{B'} + \cdots + c_n(\mathbf{T}(v_n))_{B'} \\
&= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{T}(v_1))_{B'} & (\mathbf{T}(v_2))_{B'} & \cdots & (\mathbf{T}(v_n))_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{(Definição 1.11)} \\
&== \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{T}(v_1))_{B'} & (\mathbf{T}(v_2))_{B'} & \cdots & (\mathbf{T}(v_n))_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \mathbf{x}_B \quad \text{(por (6.4))} \\
&= A\mathbf{x}_B.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

A matriz A em (6.5) diz-se a matriz que representa a função linear T nas bases B de V e B' de W. Saliente-se que se os espaços lineares V e W são complexos, tem-se

$$\mathbb{C}^n \ni \mathbf{x}_B \longmapsto \mathbf{w}_{B'} = (\mathbf{T}(x))_{B'} = A\mathbf{x}_B \in \mathbb{C}^p,$$

e portanto a matriz A é do tipo $p \times n$.

Para referência futura passamos a enunciar o que acabámos de mostrar.

Definição 6.5. Seja $T : V \to W$ uma função linear, B uma base ordenada do espaço linear V e B' uma base ordenada do espaço linear W.

A matriz A que representa T nas bases, B do espaço de partida e B' do espaço de chegada, é a matriz que para todo $x \in V$ satisfaz

$$(\mathbf{T}(x))_{B'} = A\mathbf{x}_B, \tag{6.6}$$

onde $\mathbf{x}_B$ e $(\mathbf{T}(x))_{B'}$ designam, respectivamente, os vectores das coordenadas de x na base B e de $T(x)$ na base B'. Se $\dim V = n$ e $\dim W = p$, a matriz A é do tipo $p \times n$.

Para designar a matriz A em (6.6) usa-se a notação $M(T, B, B')$.

Nota 36. *Para uma função linear $T : V \to V$ em que se fixa a mesma base B no espaço de partida e de chegada, referimo-nos à matriz que representa T simplesmente como a "matriz que representa T na base B".*

Proposição 6.6. Matriz que representa uma função linear

A matriz que representa a função linear $T : V \to W$ na base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V e na base ordenada B' de W, é a matriz A cujas colunas são os vectores das coordenadas $(\mathbf{T}(v_1))_{B'}, (\mathbf{T}(v_2))_{B'}, \ldots, (\mathbf{T}(v_n))_{B'}$ (por esta ordem). Ou seja,

$$A = M(T, B, B') = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{T}(v_1))_{B'} & (\mathbf{T}(v_2))_{B'} & \cdots & (\mathbf{T}(v_n))_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

Nota 37. *Existe uma única matriz que representa uma função linear $T : V \to W$ em relação a bases ordenadas fixas em V e em W. A unicidade desta matriz é consequência da unicidade dos vectores das coordenadas que constituem as colunas da matriz.*

Na Figura 6.3 ilustramos a definição de matriz que representa uma função linear em relação a bases fixadas no espaço de partida V e no espaço de chegada W.

Exemplo 6.4. Considere-se a função linear $T(x, y, z) = (2x - y, 3z + y)$. Podemos escrever

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

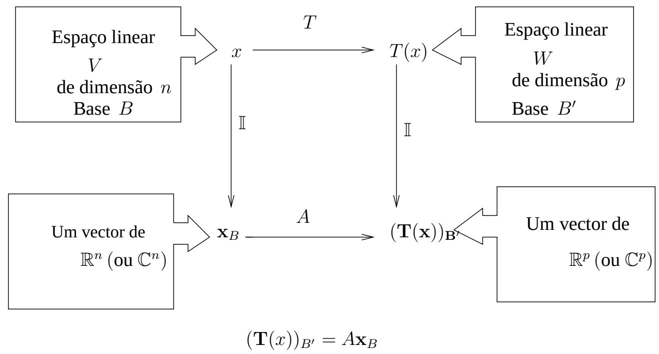

Figura 6.3: A matriz A, do tipo $p \times n$, representa a função linear $T : V \to W$ em relação à base B de V e à base B' de W. Os espaços V e W têm dimensões n e p, respectivamente. O isomorfismo $\mathbb{I}$ é a função (linear) que aplica cada vector de um espaço linear no vector das coordenadas na base fixada nesse espaço.

Ou seja, a imagem por T de um qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ pode obter-se multiplicando a matriz A por esse vector.

A matriz A representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ (espaço de partida) e à base canónica de $\mathbb{R}^2$ (espaço de chegada), uma vez que as colunas da matriz A são as imagens dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$T(1,0,0) = (2,0), \quad T(0,1,0) = (-1,1) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (0,3).$$

♦

Exemplo 6.5. Consideremos a função $T : P_3 \to P_2$, definida por $T(p(t)) = 3p'(t)$, onde P_n designa o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a n, e $p'(t)$ designa a derivada de p. Fixemos as bases $B_1 = (1-t, t^2, 2t^3, 1+t)$ em P_3, e $B_2 = (2, t+1, t-t^2)$ em P_2. Pretende-se determinar a matriz que representa T em relação a estas bases. Para tal, calculemos as coordenadas dos vectores

$$T(1-t) = -3, \qquad T(t^2) = 6t, \qquad T(2t^3) = 18t^2, \qquad T(1+t) = 3,$$

na base B_2. As coordenadas de $T(1-t) = -3$ podem obter-se da seguinte forma:

$$-3 = 2\alpha + \beta(t+1) + \gamma(t-t^2) = (2\alpha+\beta) + (\beta+\gamma)t - \gamma t^2$$
$$\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = -3 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = -3/2 \text{ e } \beta = \gamma = 0.$$

Por conseguinte, $(\mathbf{T}(1-t))_{B_2} = (-3/2, 0, 0)$. Calculando de igual modo as restantes colunas da matriz pretendida, obtemos

$$(\mathbf{T}(t^2))_{B_2} = (-3, 6, 0),\ (\mathbf{T}(2t^3))_{B_2} = (-9, 18, -18) \text{ e } (\mathbf{T}(1+t))_{B_2} = (3/2, 0, 0).$$

Assim, a matriz que representa T nas bases fixadas, é

$$M(T, B_1, B_2) = \begin{bmatrix} -3/2 & -3 & -9 & 3/2 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vejamos agora como usar esta matriz para calcular a imagem por T de um certo polinómio de P_3. Por exemplo, pretende-se usar $M(T, B_1, B_2)$ para determinar $T(q)$ onde $q(t) = 2 + 2t - 5t^2 + 4t^3$.

Comecemos por notar que o vector das coordenadas de q na base B_1 é $\mathbf{q}_{B_1} = (0, -5, 2, 2)$. Por definição de matriz que representa uma função linear, tem-se

$$(\mathbf{T}(q))_{B_2} = \begin{bmatrix} -3/2 & -3 & -9 & 3/2 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -36 \end{bmatrix}_{B_2}.$$

Assim, como $(\mathbf{T}(q))_{B_2} = (0, 6, -36)$, a imagem de q por T é

$$T(q(t)) = 6(t+1) - 36(t - t^2) = 6 - 30t + 36t^2.$$

De facto, usando a expressão de T podemos confirmar este resultado:

$$T(q(t)) = 3q'(t) = 3(2 + 2t - 5t^2 + 4t^3)' = 3(2 - 10t + 12t^2) = 6 - 30t + 36t^2.$$

♦

Exemplo 6.6. Considere-se a função $T(f) = \int_0^t f(x)dx$, definida no espaço P_2 dos polinómios de grau menor ou igual a 2. É claro que a imagem de um polinómio de P_2 é um polinómio de grau menor ou igual a 3, e portanto podemos tomar para espaço de chegada o espaço P_3, ou seja, considerar $T : P_2 \to P_3$. Fixemos em P_2 e em P_3 as respectivas bases canónicas: $BC_{P_2} = (1, t, t^2)$ e $BC_{P_3} = (1, t, t^2, t^3)$. Como

$$T(1) = \int_0^t 1\, dx = t, \quad T(t) = \int_0^t x\, dx = \frac{t^2}{2} \quad \text{e} \quad T(t^2) = \int_0^t x^2\, dx = \frac{t^3}{3},$$

as colunas da matriz que representa T nas bases fixadas são os vectores das coordenadas de $T(1), T(t)$ e $T(t^2)$ na base BC_{P_3}, ou seja, respectivamente os vectores $(0,1,0,0), (0,0,1/2,0)$ e $(0,0,0,1/3)$. Assim, a matriz que representa o integral indefinido (como função de P_2 em P_3) relativamente às bases consideradas, é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

♦

Alguns exemplos geométricos de funções lineares

Nesta secção pretendemos identificar as matrizes que representam (na base canónica) certas funções lineares definidas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Como vimos, para obter essa matriz basta conhecermos as imagens dos vectores da base canónica. Em todos os exemplos que se seguem consideramos fixada a base canónica, quer no espaço de partida quer no espaço de chegada.

Exemplo 6.7. 1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **é uma reflexão em relação ao eixo dos** xx (Figura 6.4).

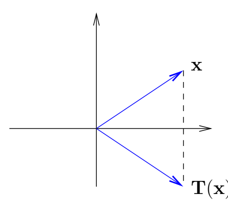

Figura 6.4: Reflexão em relação ao eixo dos xx.

Como

$$T(1,0) = (1,0) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (0,-1),$$

a matriz que representa T é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $T(x,y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x,-y)$.

2. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **é uma reflexão em relação à recta** $y=x$ (Figura 6.5).

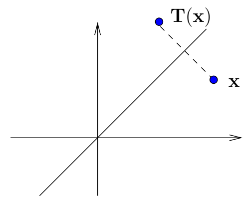

Figura 6.5: Reflexão em relação à recta $y=x$.

Como $T(1,0)=(0,1)$ e $T(0,1)=(1,0)$, a matriz que representa T é

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Portanto, $T(x,y)=(y,x)$.

3. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **é a projecção ortogonal sobre o eixo dos** yy (Figura 6.6).

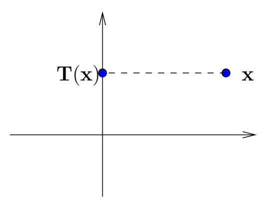

Figura 6.6: Projecção ortogonal sobre o eixo dos yy.

Como $T(1,0)=(0,0)$ e $T(0,1)=(0,1)$, a matriz que representa T é

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Assim, $T(x,y)=(0,y)$.

4. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ **é uma rotação em torno da origem de um ângulo** θ **no sentido directo** (Figura 6.7).

A imagem de $(1,0)$ por T é obviamente $T(1,0)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$ e a de $(0,1)$ é $T(0,1)=(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)$. Logo, a matriz que representa T é

$$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

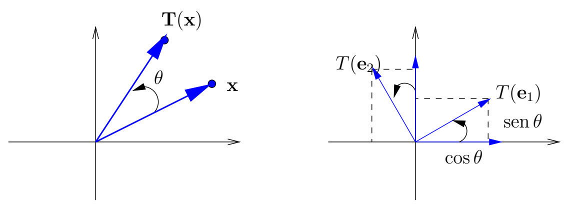

Figura 6.7: Rotação em torno da origem de um ângulo θ no sentido directo.

Por exemplo, a rotação em torno da origem de um ângulo $\pi/4$ no sentido directo (ou anti-horário, ou positivo) é

$$T(\mathbf{x}) = R_{\pi/4}\mathbf{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x},$$

ou seja, $T(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y)$.

♦

Exercício 6.6. Considere as funções lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas a seguir. Mostre que as matrizes M indicadas representam T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

1) T é uma reflexão em relação ao plano xy, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2) T é a projecção ortogonal sobre o plano yz, $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3) T é uma rotação em torno do eixo dos zz de um ângulo θ no sentido positivo, $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Verifique ainda que a imagem de um qualquer ponto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é

$$T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta, z).$$

O *sentido directo* (ou positivo) de uma rotação em torno de um eixo é estabelecido da seguinte forma: um observador, alinhado com o eixo, com os pés na origem e a cabeça direccionada no sentido positivo do eixo, vê a rotação no plano perpendicular ao eixo realizar-se no sentido anti-horário.

4) T é uma rotação em torno do eixo dos yy de um ângulo θ no sentido directo,

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

▲

Para finalizar esta secção refira-se que o conjunto

$$L(V,W) = \{T : V \to W;\ T \text{ é linear}\}$$

é um espaço linear. O conjunto $L(V,W)$ é um subconjunto do espaço linear $\mathcal{F}$ das funções $f : V \to W$, entre espaços lineares sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, com as operações de adição e multiplicação por escalares definidas por

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad (\alpha f)(v) = \alpha f(v), \quad \text{para todo } f, g \in \mathcal{F} \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Como a soma de funções lineares é uma função linear e a multiplicação de uma função linear por um escalar é uma função linear (ver Exercício 6.1), tem-se que $L(V,W)$ é fechado para estas operações, e portanto um subespaço de $\mathcal{F}$.

Sejam V e W espaços lineares de dimensões $\dim V = n$ e $\dim W = p$. Fixadas bases ordenadas B e B', respectivamente, em V e em W, é fácil concluir que a aplicação que a cada $T \in L(V,W)$ faz corresponder a matriz $M(T,B,B')$ do tipo $p \times n$, é uma função linear bijectiva. Ou seja, $L(V,W)$ é um espaço linear isomorfo ao espaço $\mathcal{M}_{p\times n}$, das matrizes $p \times n$ (reais se V e W são espaços lineares reais ou complexas se estes espaços forem complexos).

Enunciamos na proposição seguinte este resultado.

Proposição 6.7. Sejam V e W espaços lineares sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, de dimensões $\dim V = n$ e $\dim W = p$. Fixadas bases ordenadas B em V e B' em W, o espaço linear

$$L(V, W) = \{T : V \to W; \quad T \text{ é linear}\}$$

é isomorfo ao espaço linear $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$, das matrizes do tipo $p \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$.

O isomorfismo é a bijecção que a cada função $T : V \to W$ de $L(V, W)$ faz corresponder a matriz $M(T, B, B')$, que representa T nas bases ordenadas B de V e B' de W. Ou seja, o isomorfismo $\mathbb{I} : L(V, W) \to \mathcal{M}_{p\times n}$, é definido por

$$T \longmapsto M(T, B, B').$$

Matrizes que representam uma função linear em relação a bases distintas

Pretendemos agora relacionar matrizes que representam uma dada função linear em relação a bases distintas. Para tal, suponha-se que a função linear $T : V \to W$ é representada pela matriz A em relação às bases B_1 de V e $\tilde{B}_1$ de W, e que T é representada pela matriz C em relação às bases B_2 de V e $\tilde{B}_2$ de W. Isto é,

$$(\mathbf{T}(x))_{\tilde{B}_1} = A\mathbf{x}_{B_1} \quad \text{e} \quad (\mathbf{T}(x))_{\tilde{B}_2} = C\mathbf{x}_{B_2} \quad \text{para todo } x \in V. \tag{6.9}$$

Sendo $y = T(x)$, então $(\mathbf{T}(x))_{\tilde{B}_1} = \mathbf{y}_{\tilde{B}_1}$ e $(\mathbf{T}(x))_{\tilde{B}_2} = \mathbf{y}_{\tilde{B}_2}$ representam o mesmo vector y, respectivamente, nas bases $\tilde{B}_1$ e $\tilde{B}_2$. Assim, os vectores $\mathbf{y}_{\tilde{B}_1}$ e $\mathbf{y}_{\tilde{B}_2}$ estão relacionados através da matriz $M = M_{\tilde{B}_2\leftarrow\tilde{B}_1}$ que realiza a mudança da base $\tilde{B}_1$ para $\tilde{B}_2$ (ver Definição 3.9 na página 157). Nomeadamente,

$$\mathbf{y}_{\tilde{B}_2} = M\mathbf{y}_{\tilde{B}_1}.$$

De igual modo, os vectores $\mathbf{x}_{B_1}$ e $\mathbf{x}_{B_2}$ estão relacionados através da matriz $S = S_{B_2\leftarrow B_1}$ que realiza a mudança da base B_1 para B_2:

$$\mathbf{x}_{B_2} = S\mathbf{x}_{B_1}.$$

Usando (6.9), temos

$$\mathbf{y}_{\tilde{B}_2} = C\mathbf{x}_{B_2} \iff M\mathbf{y}_{\tilde{B}_1} = CS\mathbf{x}_{B_1} \iff MA\mathbf{x}_{B_1} = CS\mathbf{x}_{B_1}.$$

Como as matrizes de mudança de base são invertíveis e a equivalência acima é verificada para todo $x \in V$, as matrizes A e C (que representam a mesma função linear em relação a bases distintas) satisfazem a igualdade

$$MA = CS \Longrightarrow A = M^{-1}CS.$$

Relembremos que a matriz de mudança da base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_k)$ para a base ordenada $\tilde{B}$ é a matriz cujas colunas são os vectores das coordenadas, $(\mathbf{v}_1)_{\tilde{B}}, \ldots, (\mathbf{v}_k)_{\tilde{B}}$ (por esta ordem). Tendo em conta a forma da matriz em (6.7), que define uma função linear em relação a bases fixadas no espaço de partida e de chegada, a matriz de mudança de base $M_{\tilde{B}\leftarrow B}$ pode interpretar-se, em termos de funções lineares, como sendo a matriz que representa a função (linear) identidade $I : V \to V$, $x \mapsto x$, em relação à base B no espaço de partida e à base $\tilde{B}$ no espaço de chegada. Ou seja,

Num espaço linear W, a matriz de mudança da base ordenada B de W para a base ordenada $\tilde{B}$ de W, é a matriz que representa a função identidade $I : W \to W$, $x \mapsto x$, em relação à base B no espaço de partida e à base $\tilde{B}$ no espaço de chegada. Isto é,

$$M_{\tilde{B}\leftarrow B} = M(I, B, \tilde{B}).$$

Considere-se o exemplo seguinte.

Exemplo 6.8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função linear definida por

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, y - z). \end{array}$$

Como

$$T(x, y, z) = (x + y, y - z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

a matriz que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é a matriz

$$A = M(T, BC_{\mathbb{R}^3}, BC_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Fixemos agora em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^2$ as bases ordenadas

$$B_1 = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)), \qquad B_2 = ((2, 1), (1, -1)).$$

Determinemos a matriz que representa T em relação a estas bases. Como

$$T(1,1,0)=(2,1)=\mathbf{u}, \quad T(0,1,1)=(1,0)=\mathbf{v}, \quad T(1,1,1)=(2,0)=\mathbf{w},$$

e

$$\begin{aligned}(2,1) &= 1\times(2,1)+0\times(1,-1)\\ (1,0) &= \tfrac{1}{3}(2,1)+\tfrac{1}{3}(1,-1)\\ (2,0) &= \tfrac{2}{3}(2,1)+\tfrac{2}{3}(1,-1),\end{aligned}$$

temos $\mathbf{u}_{B_2}=(1,0)$, $\mathbf{v}_{B_2}=(1/3,1/3)$ e $\mathbf{w}_{B_2}=(2/3,2/3)$. Logo,

$$C=M(T,B_1,B_2)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

As matrizes A e C estão relacionadas através de matrizes de mudança de base S e M. O diagrama que apresentamos a seguir ajuda a estabelecer a relação entre estas matrizes.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3_{BC} \arrow[r, "T", "A"'] \arrow[d, "S=M(I,BC,B_1)"', "I_{\mathbb{R}^3}"] & \mathbb{R}^2_{BC} \arrow[d, "I_{\mathbb{R}^2}"', "M=M(I,BC,B_2)"] \\ \mathbb{R}^3_{B_1} \arrow[r, "T", "C"'] & \mathbb{R}^2_{B_2} \end{tikzcd} \tag{6.10}$$

Na horizontal temos a função linear T com duas representações matriciais distintas A e C. Na vertical, à esquerda, temos a matriz S que realiza a mudança da base BC de $\mathbb{R}^3$ para a base B_1, que é igualmente a matriz que representa a função identidade $I_{\mathbb{R}^3}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ em relação à base BC no espaço de partida e à base B_1 no espaço de chegada. Na vertical, à direita, temos a matriz M que realiza a mudança da base BC de $\mathbb{R}^2$ para a base B_2, que também é a matriz que representa a função identidade $I_{\mathbb{R}^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ em relação à base BC no espaço de partida e à base B_2 no espaço de chegada.

Dado um qualquer vector $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{BC}\in\mathbb{R}^3$, a sua imagem por T, $\mathbf{y}_{B_2}=(\mathbf{T}(\mathbf{x}))_{B_2}$, pode obter-se do diagrama (6.10) de duas formas distintas:

$$\mathbf{x}_{BC}\longmapsto A\mathbf{x}_{BC}\longmapsto MA\mathbf{x}_{BC}=\mathbf{y}_{B_2} \tag{6.11}$$

ou

$$\mathbf{x}_{BC}\longmapsto S\mathbf{x}_{BC}\longmapsto CS\mathbf{x}_{BC}=\mathbf{y}_{B_2}. \tag{6.12}$$

Isto é, $MA\mathbf{x}_{BC} = CS\mathbf{x}_{BC}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Ou seja, $MA = CS$.

As aplicações em (6.11), correspondem a "ler" o diagrama (no sentido das setas) primeiro na horizontal e em seguida na vertical. Enquanto que em (6.12) o diagrama é percorrido primeiro na vertical e depois na horizontal.

Um diagrama (direccionado) deste tipo diz-se *comutativo* se o resultado da composição de aplicações correspondentes a qualquer percurso entre dois vértices é igual.

Determinemos agora as matrizes S e M de mudança de base. Como

$$
\begin{aligned}
(1,0,0) &= 0 \times (1,1,0) - (0,1,1) + (1,1,1), \\
(0,1,0) &= (1,1,0) + (0,1,1) - (1,1,1), \\
(0,0,1) &= -(1,1,0) + 0 \times (0,1,1) + (1,1,1)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(1,0) &= \frac{1}{3}(2,1) + \frac{1}{3}(1,-1) \\
(0,1) &= \frac{1}{3}(2,1) - \frac{2}{3}(1,-1)
\end{aligned}
$$

temos

$$
S = M(I_{\mathbb{R}^3}, BC, B_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
M = M(I_{\mathbb{R}^2}, BC, B_2) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}.
$$

Deixamos como exercício a confirmação da igualdade $A = M^{-1}CS$. ♦

No caso geral de uma função linear $T : V \to W$, com V e W espaços lineares reais de dimensões $\dim V = n$ e $\dim W = p$, usamos também um *diagrama comutativo* para ilustrar a relação entre as matrizes que representam T em relação a bases distintas fixadas em V e em W. Designamos por $\mathbb{R}^n_{(U,B)}$ uma cópia de $\mathbb{R}^n$ cujos elementos são vistos como vectores das coordenadas de vectores de U na base B.

Na Figura 6.8 apresentamos à esquerda o *diagrama comutativo* que relaciona as matrizes A e C que representam a função linear $T : V \to W$ em relação a bases fixadas em V e W, e na mesma figura à direita é ilustrado o significado da comutatividade do diagrama.

Obviamente que se T é uma função linear em que o espaço de partida e o de chegada são o mesmo espaço (isto é, $T : V \to V$), e se neste espaço fixarmos a mesma base, o diagrama comutativo anterior reduz-se ao diagrama da Figura 6.9.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_{(V,B_1)} \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "S"'] & \mathbb{R}^p_{(W,\tilde{B}_1)} \arrow[d, "M"] \\
\mathbb{R}^n_{(V,B_2)} \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^p_{(W,\tilde{B}_2)}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{x}_{B_1} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & A\mathbf{x}_{B_1} \arrow[d, mapsto] \\
S\mathbf{x}_{B_1} \arrow[r, mapsto] & CS\mathbf{x}_{B_1} = MA\mathbf{x}_{B_1}
\end{tikzcd}
$$

Figura 6.8: As matrizes A e C, que representam a função linear T em relação a bases distintas, estão relacionadas através das matrizes de mudança de base M e S. O diagrama do lado esquerdo é comutativo, e portanto $CS = MA$, ou equivalentemente $C = MAS^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_{(V,B_1)} \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "M"'] & \mathbb{R}^n_{(V,B_1)} \arrow[d, "M"] \\
\mathbb{R}^n_{(V,B_2)} \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^n_{(V,B_2)}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{x}_{B_1} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & A\mathbf{x}_{B_1} \arrow[d, mapsto] \\
M\mathbf{x}_{B_1} \arrow[r, mapsto] & CM\mathbf{x}_{B_1} = MA\mathbf{x}_{B_1}
\end{tikzcd}
$$

Figura 6.9: As matrizes A e C que representam $T : V \to V$ são semelhantes: $C = MAM^{-1}$.

Ou seja, as matrizes $A = M(T, B_1, B_1)$ e $C = M(T, B_2, B_2)$, que representam $T : V \to V$, respectivamente, em relação às bases B_1 e B_2 fixadas em V são matrizes semelhantes, isto é, $C = MAM^{-1}$ (recorde a Definição 4.8 de matrizes semelhantes, página 188). Para referência futura, enunciamos este resultado.

Proposição 6.8. As matrizes $A = M(T, B_1, B_1)$ e $C = M(T, B_2, B_2)$, que representam a função linear $T : V \to V$ em relação às bases B_1 e B_2 fixadas em V, são matrizes semelhantes. Isto é,

$$C = MAM^{-1},$$

onde M é a matriz que realiza a mudança da base B_1 para a base B_2.

Nota 38. *Uma função linear $T : V \to V$ diz-se um endomorfismo. Ou seja, um endomorfismo é uma função linear do espaço linear V em si próprio.*

Matriz que representa a função composta

A partir da definição de matriz que representa uma função linear, é fácil determinar a matriz que representa a composta de duas funções lineares. Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ duas funções lineares, $A = M(T_1, B_1, B_2)$ a matriz que representa T_1 em relação à base B_1 de V e à base B_2 de W, e $C = M(T_2, B_2, B_3)$ a matriz que representa T_2 em relação à base B_2 de W e B_3 de U. Se A é a matriz que representa T_1, e C é a matriz que representa T_2, tem-se $(\mathbf{T_1}(x))_{B_2} = A\mathbf{x}_{B_1}$ e $(\mathbf{T_2}(y))_{B_3} = C\mathbf{y}_{B_2}$. Além disso, como $(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$, resulta

$$((\mathbf{T_2} \circ \mathbf{T_1})(x))_{B_3} = C(A\mathbf{x}_{B_1}) = (CA)\mathbf{x}_{B_1}.$$

Conclui-se portanto que a matriz CA representa $(T_2 \circ T_1)$ sempre que A representa T_1 e C representa T_2. Os diagramas seguintes ilustram este facto.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{V}, B_1) \arrow[r, "T_1"] \arrow[dr, "(T_2 \circ T_1)"'] & (\mathbf{W}, B_2) \arrow[d, "T_2"] \\
 & (\mathbf{U}, B_3)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_{(\mathbf{V}, B_1)} \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "CA"'] & \mathbb{R}^p_{(\mathbf{W}, B_2)} \arrow[d, "C"] \\
 & \mathbb{R}^k_{(\mathbf{U}, B_3)}
\end{tikzcd}$$

Proposição 6.9. Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ duas funções lineares, $A = M(T_1, B_1, B_2)$ a matriz que representa T_1 em relação à base B_1 de V e à base B_2 de W, e $C = M(T_2, B_2, B_3)$ a matriz que representa T_2 em relação à base B_2 de W e B_3 de U.

A matriz que representa $(T_2 \circ T_1) : V \to U$ em relação à base B_1 de V e B_3 de U, é a matriz CA, isto é,

$$CA = M(T_2 \circ T_1, B_1, B_3).$$

6.3 Núcleo e contradomínio de uma função linear

Vimos que existe um isomorfismo entre o espaço das funções lineares e o espaço das matrizes (ver Proposição 6.7). Este isomorfismo aplica uma dada função linear $T : V \to W$ na matriz $M(T, B, B')$, que representa T em relação às bases B e B' fixadas em V e em W. É assim de presumir que este isomorfismo (função linear bijectiva) permita traduzir vários resultados obtidos para matrizes em termos de funções lineares. A seguir estabelecemos algumas destas relações para o contradomínio e para o núcleo de uma função linear. Comecemos por definir núcleo de uma função linear entre espaços vectoriais.

Definição 6.6. Seja $T : V \to W$ uma função linear entre espaços lineares. Chamamos *núcleo* de T ao conjunto dos elementos de V que são aplicados em $0 \in W$. Designamos por $N(T)$ o núcleo de T.

Note-se que se $A = M(T, BC_{\mathbb{R}^n}, BC_{\mathbb{R}^p})$ é a matriz que representa $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^p$, isto é, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, então a definição de núcleo de T está de acordo com a definição de núcleo da matriz A (ver Exemplo 6.9 a seguir).

O núcleo de uma função linear é um subconjunto do espaço de partida, e o contradomínio um subconjunto do espaço de chegada (observe a Figura 6.10).

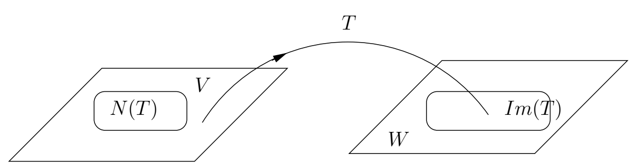

Figura 6.10: O núcleo e o contradomínio de uma função linear T.

Exemplo 6.9. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Por definição, o núcleo de T é

$$\begin{aligned} N(T) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = N(A), \end{aligned}$$

e o contradomínio

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : \mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \text{ para algum } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : \mathbf{y} = A\mathbf{x} \text{ para algum } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = EC(A). \end{aligned}$$

Conclui-se que o núcleo de T é o núcleo da matriz A, e o contradomínio de T é o conjunto dos vectores $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ que são combinação linear das colunas de A, ou seja, o espaço das colunas de A. Na Figura 6.11 esquematizam-se as noções de núcleo e de contradomínio de T.

♦

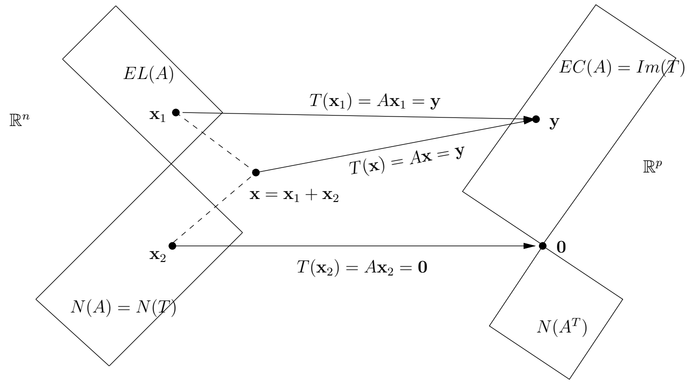

Figura 6.11: O núcleo e o contradomínio da função linear T definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Exemplo 6.10. a) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação de um ângulo θ em torno da origem. Como o único vector de $\mathbb{R}^2$ que é aplicado por T em $(0,0)$ é a origem, tem-se $N(T) = \{\mathbf{0}\}$. Além disso, qualquer vector de $\mathbb{R}^2$ é imagem por T de algum outro vector de $\mathbb{R}^2$, logo $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

b) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projecção ortogonal sobre o plano xy.

Como os únicos vectores de $\mathbb{R}^3$ que são aplicados por T na origem são os vectores do eixo dos zz, o núcleo de T é o eixo dos zz. Por outro lado, qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ é aplicado num vector do plano xy, logo o conjunto imagem é o plano xy. Ou seja,

$$N(T) = \{(0,0,z) : \ z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad Im(T) = \{(x,y,0) : \ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

c) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão em relação ao eixo dos xx. É fácil ver que $N(T) = \{\mathbf{0}\}$ e $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

♦

Proposição 6.10. Sejam V e W espaços lineares. O núcleo e o contradomínio de uma função linear $T : V \to W$ são subespaços lineares de V e de W, respectivamente.

Demonstração. Já mostrámos, na página 330, que $Im(T)$ é um subespaço de W. Para provar que $N(T)$ é um subespaço de V basta verificar que é fechado para a adição de vectores e para a multiplicação por escalares. Sejam $x, v \in N(T)$, isto é

$$x, v \in N(T) \Longleftrightarrow T(x) = 0 \text{ e } T(v) = 0,$$

Da linearidade de T, resulta

$$T(x+v) = T(x) + T(v) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow x + v \in N(T)$$

e

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) = 0 \Longrightarrow \alpha x \in N(T),\ \alpha \text{ escalar}.$$

$\square$

Usando a definição de matriz que representa uma função linear T em relação a bases fixadas no espaço de partida e no espaço de chegada, conclui-se facilmente que o núcleo e o contradomínio de uma função linear são (sub)espaços isomorfos, respectivamente, ao núcleo e ao espaço das colunas da matriz que representa T nas bases fixadas (ver também o Exemplo 6.9). Este resultado é enunciado no teorema seguinte.

Teorema 6.1. Seja $T : V \to W$ uma função linear e $A = M(T, B, B')$ a matriz $p \times n$ que representa T em relação à base B de V e à base B' de W. São válidas as afirmações:

a) O isomorfismo de V em $\mathbb{C}^n$ determinado pela base B, aplica o núcleo de T no núcleo de A.

b) O isomorfismo de W em $\mathbb{C}^p$ determinado pela base B', aplica o contradomínio de T no espaço das colunas de A.

c) Verifica-se a igualdade:

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V. \tag{6.13}$$

Passamos a designar a relação (6.13) por "*Teorema da dimensão para funções lineares*".

Demonstração. a) Seja $x \in V$ um qualquer vector do núcleo de T, isto é, x é um vector que verifica $T(x) = 0$. Da definição da matriz que representa T, tem-se $(\mathbf{T}(x))_{B'} = A\mathbf{x}_B$ para todo $x \in V$. Logo,

$$x \in N(T) \Longleftrightarrow T(x) = 0 \Longleftrightarrow (\mathbf{T}(x))_{B'} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A\mathbf{x}_B = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{x}_B \in N(A).$$

O isomorfismo $N(T) \to N(A)$ é a função (linear) que a cada vector $x \in N(T)$ faz corresponder o vector das coordenadas $\mathbf{x}_B$.

b) Para mostrar que $Im(T)$ é um espaço linear isomorfo a $EC(A)$, considere-se $y \in Im(T)$. Logo, $y = T(x)$ para algum $x \in V$. Da definição de matriz que representa T, temos

$$\begin{aligned} y \in Im(T) &\iff T(x) = y, \text{para algum } x \in V \\ &\iff (\mathbf{T}(x))_{B'} = A\mathbf{x}_B = \mathbf{y}_{B'}, \text{para algum } \mathbf{x}_B \in \mathbb{C}^n \\ &\iff \mathbf{y}_{B'} \in EC(A). \end{aligned}$$

O isomorfismo $Im(T) \to EC(A)$ é a função (linear) que a cada vector $y \in Im(T)$ faz corresponder o vector das coordenadas $\mathbf{y}_{B'}$.

c) Da Proposição 3.9 (pág. 137) sabemos que o isomorfismo que a cada vector de um espaço linear faz corresponder o respectivo vector das coordenadas numa base fixada, aplica bases em bases (ver também o Exercício 6.3). Do Teorema da dimensão para matrizes (Teorema 3.6, pág. 144) temos $\dim N(A) + \dim EC(A) = n$, onde n é o número de colunas de A, ou seja, $n = \dim V$. Logo, como $N(A)$ é isomorfo a $N(T)$ e $Im(T)$ isomorfo a $EC(A)$, tem-se $\dim N(T) = \dim N(A)$ e $\dim Im(T) = \dim EC(A)$. Por conseguinte, $\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V$.

□

O núcleo e o contradomínio de uma função linear $T : V \to W$ são espaços lineares isomorfos, respectivamente, ao núcleo e ao espaço das colunas de uma matriz que represente T, mas não são necessariamente iguais a estes espaços. Os exemplos que apresentamos a seguir ilustram esta situação.

Exemplo 6.11. Consideremos a função linear $T(p(t)) = 3p'(t)$ do Exemplo 6.5. No exemplo referido, foi calculada a matriz que representa $T : P_3 \to P_2$ em relação às bases $B_1 = (1-t, t^2, 2t^3, 1+t)$ de P_3, e $B_2 = (2, t+1, t-t^2)$ de P_2, a saber:

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & -3 & -9 & 3/2 \\ 0 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é tal que $\mathbf{y}_{B_2} = (\mathbf{T}(x))_{B_2} = A\mathbf{x}_{B_1}$. Pretendemos obter o núcleo e o contradomínio de T. Para determinar o núcleo de T e o contradomínio $Im(T)$, vamos calcular $N(A)$ e $EC(A)$. A matriz A já está em escada e portanto uma base para o espaço das colunas é dada pelas três primeiras colunas de A, donde

$$EC(A) = \text{Span}\{(-3/2, 0, 0), (-3, 6, 0), (-9, 18, -18)\}.$$

A base do espaço das colunas de A é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, e portanto não pode ser um conjunto gerador do contradomínio de T, uma vez que o contradomínio de T é um conjunto de polinómios de grau menor ou igual a 2. No entanto, o contradomínio de T é gerado pelos polinómios cujos vectores das coordenadas na base B_2 geram $EC(A)$. Assim, atendendo a que

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{p}_1(t))_{B_2} & = (-3/2, 0, 0) & \Longrightarrow p_1(t) = -3 \\ (\mathbf{p}_2(t))_{B_2} & = (-3, 6, 0) & \Longrightarrow p_2(t) = 6t \\ (\mathbf{p}_3(t))_{B_2} & = (-9, 18, -18) & \Longrightarrow p_3(t) = -18t^2, \end{array}$$

os polinómios p_1, p_2 e p_3 formam uma base de $Im(T)$. Logo,

$$Im(T) = \text{Span}\left\{-3, 6t, -18t^2\right\}.$$

Como $\dim Im(T) = 3$ e $\dim P_2 = 3$, temos $Im(T) = P_2$.

Pelo Teorema da dimensão para funções lineares, sabemos que $\dim N(T) = \dim P_3 - \dim Im(T) = 4 - 3 = 1$. Para determinarmos o núcleo de A, resolvemos o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} -3/2x - 3y - \ \ 9z + 3/2w = 0 \\ \qquad\qquad 6y + 18z \qquad\quad = 0 \\ \qquad\qquad\quad 18z \qquad\qquad = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \{x = w, y = 0, z = 0.$$

Consequentemente,

$$N(A) = \text{Span}\{(1, 0, 0, 1)\}.$$

O núcleo de T é gerado pelos polinómios de P_3 cujos vectores das coordenadas na base B_1 geram o núcleo de A. Assim,

$$N(T) = \text{Span}\{2\},$$

uma vez que $(\mathbf{p}(t))_{B_1} = (1, 0, 0, 1)$ é o polinómio constante $p(t) = (1 - t) + (1 + t) = 2$.

Podemos confirmar este resultado usando a definição de núcleo de T. O núcleo de T é o conjunto dos polinómios p que verificam $T(p) = 3p'(t) = 0$, ou equivalentemente, os polinómios cuja derivada é zero. Estes polinómios são os constantes, isto é, os múltiplos do polinómio constante 2. ⧫

Exemplo 6.12. No Exemplo 6.6 obtivemos a matriz que representa $T : P_2 \to P_3$ definida por $T(f) = \int_0^t f(x)dx$, em relação às bases canónicas fixadas nos espaços dos polinómios P_2 e P_3. Esta matriz (ver (6.8) na página 338), é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A matriz M possui três colunas linearmente independentes, e portanto as colunas de M formam uma base para $EC(M)$ (o qual é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3). Logo, o contradomínio de T (que é um subespaço de P_3) é gerado pelos polinómios cujos vectores das coordenadas na base BC_{P_3} são:

$$(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1/2, 0) \text{ e } (0, 0, 0, 1/3).$$

Ou seja, $Im(T) = \mathrm{Span}\{t, t^2/2, t^3/3\}$. O contradomínio de T é assim o espaço dos polinómios cujo valor em zero é igual a zero:

$$Im(T) = \{at + bt^2 + ct^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Como $\dim Im(T) = 3$, resulta do Teorema da dimensão para funções lineares que $\dim N(T) = \dim P_2 - \dim Im(T) = 3 - 3 = 0$. Por conseguinte, o núcleo de T é o polinómio constante igual a zero, $N(T) = \{0\}$. Sugere-se como exercício que confirme que o núcleo de T é o vector zero de P_2. ◆

O núcleo de uma função linear e invertibilidade

A injectividade de uma função é uma condição necessária e suficiente para que a função seja invertível (cf. Proposição 6.4). No caso da função T ser uma função linear (entre espaços lineares), ainda se tem que T é invertível se e só se $N(T) = \{0\}$. A Proposição seguinte caracteriza as funções lineares invertíveis.

Proposição 6.11. Sejam V e W espaços lineares e $T : V \to W$ uma função linear. São equivalentes as afirmações:

(i) T é injectiva.

(ii) T é invertível.

(iii) O núcleo de T é $N(T) = \{0\}$.

Demonstração. A equivalência $(i) \iff (ii)$ é precisamente a Proposição 6.4. Vamos mostrar a sequência de implicações: $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja x um elemento qualquer do núcleo de T, isto é, tal que $T(x) = 0$. Aplicando T^{-1} à última igualdade, vem $T^{-1}(T(x)) = x = T^{-1}(0)$. Como T^{-1} é uma função linear (cf. Proposição 6.3), a imagem de zero é zero (cf. Proposição 6.1), e portanto $x = T^{-1}(0) = 0$ para qualquer $x \in N(T)$. Ou seja, $N(T) = \{0\}$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Suponhamos que $N(T) = \{0\}$ e sejam $x, y \in V$ tais que $T(x) = T(y)$. Pela linearidade de T, tem-se

$$T(x) = T(y) \iff T(x) - T(y) = 0 \iff T(x - y) = 0 \Longrightarrow x - y = 0,$$

onde a última implicação segue do facto do núcleo de T apenas conter o elemento zero. Conclui-se que, se $T(x) = T(y)$ então $x = y$, ou seja, que T é injectiva. $\square$

Pela Proposição 6.11, a dimensão do núcleo de uma função linear ser zero é uma condição necessária e suficiente para a função linear ser invertível. Consequentemente, pelo Teorema da dimensão para funções lineares, para que uma função linear $T : V \to W$ seja invertível é necessário que a dimensão do contradomínio seja igual à dimensão do domínio (isto é, $\dim Im(T) = \dim V$). No caso de endomorfismos $T : V \to V$, é fácil ver que o Teorema da dimensão para funções lineares, a Proposição 6.11, e o facto do $N(T)$ ser isomorfo ao núcleo da matriz que representa T, permitem estabelecer as equivalências seguintes.

Seja V um espaço linear e $T : V \to V$ uma função linear. São válidas as seguintes equivalências:

- $N(T) = \{0\}$ se e só se $Im(T) = V$.
- T é injectiva se e só se é sobrejectiva.
- $N(T) = \{0\}$ se e só se qualquer matriz que represente T é invertível.

Exemplo 6.13. Vejamos quais das funções lineares do Exemplo 6.7 são invertíveis.

a) Quer a reflexão $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação ao eixo dos xx, quer em relação à recta $y = x$, são funções lineares invertíveis. A função linear inversa destas funções lineares coincide com a própria função, isto é, $T = T^{-1}$.

b) A projecção ortogonal sobre o eixo dos yy não é invertível. O núcleo desta função linear é o eixo dos xx (e portanto diferente de $\{(0, 0)\}$).

c) É fácil verificar geometricamente que a rotação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em torno da origem de um ângulo θ é uma função invertível, e que a sua inversa é a rotação em torno da origem de um ângulo $(-\theta)$. A função T^{-1} é representada pela matriz de rotação de um ângulo $(-\theta)$, isto é,

$$R_{(-\theta)} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Verifique que $R_\theta^{-1} = R_{(-\theta)} = R_\theta^T$. Note-se ainda que $\det R_\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$ e portanto a matriz R_θ é sempre invertível qualquer que seja θ.

♦

Exemplo 6.14. a) Pretende-se saber se existem funções lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ que sejam injectivas ou sobrejectivas.

Uma tal função linear é representada por uma matriz A do tipo 5×3. A matriz A tem característica menor ou igual a 3, ou seja, a dimensão do espaço das colunas de A é no máximo 3. Consequentemente, a dimensão do contradomínio de T é menor ou igual a 3. Assim, como $\dim \mathbb{R}^5 = 5$ o contradomínio de T nunca pode ser $\mathbb{R}^5$, pelo que não existem funções lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ sobrejectivas.

Por outro lado, do Teorema da dimensão para funções lineares, resulta $\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Como $\dim Im(T)$ pode ser igual a 3, a igualdade anterior diz-nos que a dimensão do núcleo pode ser zero. Assim, existem funções lineares injectivas (logo, invertíveis) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$.

b) Pretendemos saber o mesmo que na alínea anterior mas para uma função linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

Uma matriz que represente uma tal função linear é do tipo 3×5, e portanto tem característica menor ou igual a 3. Se tiver característica 3, então $\dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, e portanto T será sobrejectiva. Além disso, como $\dim N(T) + \dim Im(T) = 5$ e $\dim Im(T)$ é no máximo 3, resulta que $\dim N(T)$ é no mínimo 2, e portanto nunca se poderá ter $N(T) = \{\mathbf{0}\}$. Ou seja, não existem funções lineares injectivas $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$.

♦

Vejamos agora qual é a matriz que representa uma função linear invertível em relação a bases fixadas no espaço de partida e de chegada. Consideremos uma função linear $T : V \to W$ e $T^{-1} : W \to V$ a sua inversa. Sendo T invertível, tem-se que $\dim V = \dim W$. Seja $A = M(T, B_1, B_2)$ a matriz (quadrada) que representa T em relação às bases B_1 de V e B_2 de W, e $C = M(T^{-1}, B_2, B_1)$ a matriz que representa a função (linear) inversa T^{-1}. Da definição de matriz que representa uma função linear, e da definição de inversa, obtém-se

$$T^{-1}(T(x)) = x \iff C(A\mathbf{x}_{B_1}) = \mathbf{x}_{B_1}, \quad \text{para todo } x \in V.$$

Como $CA\mathbf{x}_{B_1} = \mathbf{x}_{B_1}$ para todo $x \in V$, tem-se $CA = I$. Ou seja, a matriz C é a inversa de A.

Enunciamos na proposição seguinte o que acabámos de mostrar.

Proposição 6.12. Sejam V e W espaços lineares da mesma dimensão, B_1 uma base ordenada de V e B_2 uma base ordenada de W.

Se $A = M(T, B_1, B_2)$ é a matriz que representa a função linear invertível $T : V \to W$, então A^{-1} é a matriz que representa a função (linear) inversa $T^{-1} : W \to V$. Isto é, $A^{-1} = M(T^{-1}, B_2, B_1)$.

Valores próprios de funções lineares

No Capítulo 4 estudámos valores e vectores próprios de matrizes. Como o espaço $L(V, V)$, das funções lineares de um espaço linear V em si próprio, é isomorfo a um espaço de matrizes quadradas (cf. Proposição 6.7), é natural definir valores e vectores próprios de uma função linear. Como veremos, os valores próprios e vectores próprios de uma função linear $T : V \to V$ são valores e vectores próprios de uma matriz que representa T em relação a bases fixas em V. Contudo o recíproco não é sempre válido, em particular se V é um espaço linear real e a matriz A que representa T tem valores próprios complexos, os valores próprios de A não são valores próprios de T (ver o Exemplo 6.15 abaixo).

Definição 6.7. Seja V um espaços linear sobre o corpo $\mathbb{K}$, e $T : V \to V$ uma função linear.

Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ diz-se um valor próprio de T se existe um vector não nulo $v \in V$ tal que

$$T(v) = \lambda v. \tag{6.14}$$

Equivalentemente, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de T se $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$, onde I é a função identidade definida em V.

Quando um vector não nulo $v \in V$ satisfaz a igualdade (6.14) para um certo $\lambda \in \mathbb{K}$, diz-se que v é um vector próprio de T associado ao valor próprio λ.

Usando a definição de matriz que representa uma função linear, relacionam-se agora os valores e vectores próprios de uma matriz que represente a função linear com os valores e vectores próprios da função linear dada.

Proposição 6.13. Seja $T : V \to V$ uma função linear, onde V é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, e A a matriz que representa T em relação a uma base fixada em V. São válidas as afirmações:

- Os valores próprios de T são valores próprios de A.
- Os valores próprios de A pertencentes a $\mathbb{K}$ são valores próprios de T.
- Se $\dim V = n$, então T tem no máximo n valores próprios (pode não ter nenhum).

Demonstração. Da definição de matriz que representa uma função linear T tem-se

$$T(x) = \lambda x \iff (\mathbf{T}(x))_B = (\lambda x)_B \iff A\mathbf{x}_B = \lambda \mathbf{x}_B.$$

Por conseguinte, os valores próprios de T são valores próprios de A. Os valores próprios da matriz A, só serão valores próprios de T se pertencerem ao corpo $\mathbb{K}$.

Como a matriz A que representa T tem n valores próprios, dos itens anteriores conclui-se que T tem no máximo n valores próprios. $\square$

No exemplo a seguir, apresentamos uma função linear $T : V \to V$ que não tem valores próprios enquanto que a matriz que representa a função tem sempre $n = \dim V$ valores próprios.

Exemplo 6.15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-y, x)$. A matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^2$ é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de A são $\lambda = \pm i$. Claramente, não existe nenhum vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ do domínio da função T (isto é, de $\mathbb{R}^2$) que verifique $T(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}$. Logo, T não tem valores próprios. Dito de outra forma, os valores próprios de A não são escalares do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sobre o qual $V = \mathbb{R}^2$ (o domínio de T) é um espaço linear. ♦

Define-se espaço próprio $E(\lambda)$ de um valor próprio λ da função linear $T : V \to V$ como sendo o espaço gerado pelos vectores próprios de T associados a λ. Ou seja,

$$\lambda \text{ é valor próprio de } T \Longrightarrow E(\lambda) = \operatorname{Span}\{x \in V : T(x) = \lambda x\} = N(T - \lambda I),$$

onde $I : V \to V$ é a função identidade.

Seja A a matriz que representa a função linear $T : V \to V$ em relação a uma base fixada em V. Os espaços próprios correspondentes a valores próprios λ de A (isto é, o núcleo da matriz $(A - \lambda I)$) são isomorfos aos espaços próprios de T sempre que λ é valor próprio de T.

Os espaços próprios de funções lineares são exemplos de espaços invariantes por T.

Definição 6.8. Um subespaço S do espaço linear V diz-se um *subespaço invariante* por $T : V \to V$ se $T(S) \subset S$. Isto é, S é invariante por T se a imagem por T de qualquer vector de S ainda é um vector de S.

É consequência da definição de espaço próprio de uma função linear o resultado seguinte.

Seja V um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{K}$ e T uma função linear $T : V \to V$. Se λ é um valor próprio de T, o espaço próprio $E(\lambda)$ é um subespaço de V invariante por T.

6.4 O espaço dual de um espaço linear

É frequentemente útil considerar funções lineares definidas num espaço vectorial que tomam valores escalares. Estas funções constituem um espaço linear que se designa por dual.

A noção de dualidade é importante em várias áreas da matemática como a geometria projectiva, a lógica e teoria de conjuntos, a geometria diferencial, etc. Abordamos nesta secção a noção de espaço dual de um espaço linear de dimensão finita, definimos a base dual de uma dada base e mostramos que a função dual de uma função linear entre espaços lineares é representada pela matriz transposta da matriz que representa a função dada.

Passamos a definir o espaço dual de um espaço linear de dimensão finita.

Definição 6.9. Espaço dual
Se V é um espaço linear (de dimensão finita) sobre o corpo $\mathbb{K}$, o *espaço dual* de V é o conjunto $V^* = L(V, \mathbb{K})$ das funções lineares de V em $\mathbb{K}$.
Os elementos de V^* são designados por *funcionais lineares*, ou *formas-1*, ou *covectores*.

Se $\xi \in V^*$ usamos indistintamente $\xi(v)$ ou $\langle\langle \xi\, ,\, v \rangle\rangle$, para designar a imagem em $\mathbb{K}$ do vector $v \in V$ pela função ξ.

Exemplo 6.16.

1. Um elemento de $(\mathbb{R}^n)^*$ é uma função da forma $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

2. Seja $V = P_n$ o espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a n. A função de P_n em $\mathbb{R}$, definida por
$$p \longmapsto \int_a^b p(x)\, dx,$$
é um funcional linear, isto é, um elemento de $V^* = (P_n)^*$.

3. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e Df a sua derivada, então a função $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por
$$\mathbf{x} \longmapsto Df(\mathbf{x})$$
é um elemento de $(\mathbb{R}^n)^*$.

♦

Da Proposição 6.7 (pág. 342), sabemos que $V^* = L(V, \mathbb{K})$ é um espaço linear e que, se V é um espaço linear de dimensão n, V^* é isomorfo ao espaço das matrizes $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$, do tipo $1 \times n$, com entradas em $\mathbb{K}$ (a dimensão de $\mathbb{K}$ é igual a 1). Ou seja, V^* é isomorfo a $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ enquanto que V é isomorfo a $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Por conseguinte, a dimensão de V^* é igual à dimensão de V.

Dada uma base B do espaço linear V podemos definir uma base B^* de V^* a partir de B do seguinte modo. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V e definam-se n elementos $v^1, v^2, \ldots, v^n$ de V^* através das igualdades

$$v^i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{6.15}$$

Recordemos que na definição anterior, a expressão $v^i(v_j)$ significa a imagem do vector $v_j \in V$ pela função linear v^i. O conjunto $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ é uma base de V^* como se mostra na proposição seguinte.

Proposição 6.14. Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então o conjunto $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ formado pelos vectores de V^* que satisfazem (6.15), é uma base de V^*.

A base $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ é designada por *base dual*.

Demonstração. Como $\dim V^* = \dim V$, o espaço V^* tem dimensão n e portanto basta mostar que o conjunto $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ é linearmente independente. Escrevendo a função linear nula, $0 : V \to \mathbb{K}$, como combinação linear de $v^1, v^2, \ldots, v^n$, pretende-se mostrar que a única solução de $c_1 v^1 + \cdots + c_n v^n = 0$ é $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Avaliando esta combinação linear de funções lineares em v_j, tem-se

$$c_1 v^1 + \cdots + c_n v^n = 0 \Longrightarrow c_1 v^1(v_j) + \cdots + c_n v^n(v_j) = 0,$$

Usando a definição (6.15), a expressão anterior é

$$0 = c_1 v^1(v_j) + \cdots + c_n v^n(v_j) = c_j v^j(v_j) = c_j,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Logo, o conjunto $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ é linearmente independente e portanto uma base de V^*. $\square$

Se $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é uma base ordenada de V e $B^* = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$ é a base dual, qualquer elemento ξ de V^* escreve-se de forma única como combinação linear dos covectores v^i. As componentes de ξ na base dual são os escalares $\xi_1, \ldots, \xi_n$ que satisfazem $\xi(v_i) = \xi_i$, para $i = 1, \ldots, n$. De facto, usando a definição de base dual, o valor de $\xi = \xi_1 v^1 + \cdots + \xi_n v^n$ em qualquer vector v_i da base B é

$$\xi(v_i) = \xi_1 v^1(v_i) + \cdots + \xi_n v^n(v_i) = \xi_i.$$

Assim, o vector das coordenadas de $\xi \in V^*$ na base $B^* = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$ é $(\xi)_{B^*} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ onde $\xi_i = \xi(v_i)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Consideremos $u \in V$ e $\xi \in V^*$ tais que $\mathbf{u}_B = (u_1, \ldots u_n)$ e $\xi_{B^*} = (\xi_1, \ldots \xi_n)$. Isto é, $u = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$ e $\xi = \xi_1 v^1 + \cdots + \xi_n v^n$. A imagem de u por ξ é dada por

$$\begin{aligned} \xi(u) &= \xi_1 v^1(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n) + \cdots + \xi_n v^n(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n) \\ &= \xi_1 u_1 + \cdots + \xi_n u_n, \end{aligned} \tag{6.16}$$

onde aplicámos o facto dos v^j serem funções lineares bem como a definição de base dual. Usando o isomorfismo que a cada vector de um espaço linear associa o vector das coordenadas, a expressão (6.16) pode escrever-se matricialmente na forma

$$\xi(u) = \xi_{B^*}\ \mathbf{u}_B = \begin{bmatrix}\xi_1 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}. \tag{6.17}$$

Nota 39. *Se considerarmos os elementos de $\mathbb{R}^n$ como vectores coluna de n componentes reais, o espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ identifica-se como os vectores linha de n componentes reais. De acordo com (6.17), o valor de um funcional linear $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ num vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é obtido por multiplicação matricial (do vector linha ξ pelo vector coluna $\mathbf{u}$).*

Exemplo 6.17. Considere-se a base canónica $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e_n})$ de $\mathbb{R}^n$, e $(\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n)$ a respectiva base dual. Se $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ é um vector de $\mathbb{R}^n$, então

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n) = x_i.$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e Df a sua derivada, então o funcional linear $Df(\mathbf{x})$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ é

$$Df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathbf{e}^n.$$

♦

Exercício 6.7. Mostre que a aplicação que a um vector $v \in V$ associa o funcional $\eta \in (V^*)^*$ (função linear de V^* em $\mathbb{K}$), definida por $\eta(\xi) = \xi(v)$, para todo $\xi \in V^*$, é um isomorfismo entre V e $(V^*)^*$. ▲

Dada uma função linear T entre dois espaços lineares V e W, esta função induz uma função linear entre os espaços duais W^* e V^*, conforme se explicita a seguir.

Proposição 6.15. Sejam V e W espaços lineares e $T : V \to W$ uma função linear. Existe uma única função linear $T^* : W^* \to V^*$ que satisfaz

$$\langle\langle T^*(\xi)\,,\,v\rangle\rangle = \langle\langle \xi\,,\,T(v)\rangle\rangle, \quad \xi \in W^*,\, v \in V. \tag{6.18}$$

Deixamos como exercício verificar que a função T^* é linear e está bem definida.

Exercício 6.8. Verifique que (6.18) é independente de v e que T^* é linear.

A função T^* na proposição anterior é designada por *função dual* de T.

Na proposição seguinte mostramos que a matriz que representa T^* é a matriz transposta da matriz que representa T.

Proposição 6.16. Seja $B_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada do espaço linear V, $B^1 = (e^1, \ldots, e^n)$ a respectiva base dual, $B_2 = (f_1, \ldots, f_p)$ uma base ordenada de W e $B^2 = (f^1, \ldots, f^p)$ a base dual respectiva.

Se $A = M(T, B_1, B_2)$ é a matriz que representa a função linear $T : V \to W$, então $A^T = M(T^*, B^2, B^1)$ é a matriz que representa a função dual $T^* : W^* \to V^*$.

Demonstração. Dizer que a matriz $A = M(T, B_1, B_2) = [a_{ij}]$ representa T significa que a coluna j de A (isto é, o vector $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj})$) é o vector das coordenadas de $T(e_j)$ na base B_2. Ou seja,

$$T(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{pj} f_p, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{6.19}$$

Se $C = M(T^*, B^2, B^1) = [c_{ij}]$ é a matriz $n \times p$ que representa T^*, pretende-se mostrar que $c_{ij} = a_{ji}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, p$. Dizer que C representa T^* nas bases B^2 de W^* e B^1 de V^*, significa que a coluna j de C é o vector das coordenadas de $T^*(f^j)$ na base B^1. Ou seja,

$$T^*(f^j) = c_{1j} e^1 + c_{2j} e^2 + \cdots + c_{nj} e^n, \quad j = 1, \ldots p. \tag{6.20}$$

Usando a definição de função dual e a expressão (6.19), temos

$$\begin{aligned} \langle\langle T^*(f^j)\,,\, e_i\rangle\rangle &= \langle\langle f^j\,,\, T(e_i)\rangle\rangle = \langle\langle f^j\,,\, a_{1i} f_1 + a_{2i} f_2 + \cdots + a_{pi} f_p\rangle\rangle \\ &= a_{1i}\langle\langle f^j\,,\, f_1\rangle\rangle + a_{2i}\langle\langle f^j\,,\, f_2\rangle\rangle + \cdots + a_{pi}\langle\langle f^j\,,\, f_p\rangle\rangle \\ &= a_{ji}, \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usámos a linearidade de f^j e na última igualdade a definição da base dual.

Por outro lado, usando a igualdade (6.20), a expressão $\langle\langle T^*(f^j)\,,\, e_i\rangle\rangle$ é também igual a

$$\begin{aligned} \langle\langle T^*(f^j)\,,\, e_i\rangle\rangle &= \langle\langle c_{1j} e^1 + c_{2j} e^2 + \cdots + c_{nj} e^n\,,\, e_i\rangle\rangle \\ &= c_{1j}\langle\langle e^1\,,\, e_i\rangle\rangle + c_{2j}\langle\langle e^2\,,\, e_i\rangle\rangle + \cdots + c_{nj}\langle\langle e^n\,,\, e_i\rangle\rangle \\ &= c_{ij}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, $c_{ij} = a_{ji}$, o que significa que $C = A^T$. $\square$

Exercício 6.9. Considere $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbb{J} \mathbf{v}, \quad \text{com } \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que a aplicação $\varphi^\flat : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$, definida por $\langle\langle \varphi^\flat(\mathbf{v}), \mathbf{u} \rangle\rangle = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, é linear.

b) Determine a representação matricial de $\varphi^\flat$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à respectiva base dual.

c) Justifique que $\varphi^\flat$ é invertível.

d) Seja $\varphi^\sharp : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}^2$ a função inversa de $\varphi^\flat$. Determine a matriz que representa $\varphi^\sharp$ em relação à base dual da base canónica de $\mathbb{R}^2$ na partida, e à base canónica na chegada.

▲