CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{o}}$ TESTE (Versão A)

12 /Novembro /2011 Duração: 1h30m

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 - x^3 \geq 2x^2\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}\right\}$$

a) Mostre que $A = \,]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$ e identifique os conjuntos B e $A \cap B$.

Resolução:

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 &\geq 2x^2 \iff x^4 - x^3 - 2x^2 \geq 0 \iff x^2\left(x^2 - x - 2\right) \geq 0 \iff \\ &\iff x = 0 \vee (x+1)(x-2) \geq 0 \iff x = 0 \vee x \leq -1 \vee x \geq 2 \end{aligned}$$

pelo que $A = \,]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$.
Quanto a B,

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \iff -1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

e $B = [-1, 2]$. Por fim, tem-se $A \cap B = \{-1, 0, 2\}$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\max(A \cap \mathbb{R}^-)$, $\min(A \cap \mathbb{R}^+)$, $\inf(A \cap \mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\min(A \cap B)$, $\sup(A \cap B)$ e $\inf((A \cap \mathbb{R}^-) \setminus \mathbb{Q})$.

Resolução:

$\max(A \cap \mathbb{R}^-) = \max\,]-\infty, -1] = -1$, $\quad \min(A \cap \mathbb{R}^+) = \min\,[2, +\infty[\, = 2$, $\quad \inf(A \cap \mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 2$

$\min(A \cap B) = -1$, $\quad \sup(A \cap B) = 2$, $\quad$ não existe $\inf((A \cap \mathbb{R}^-) \setminus \mathbb{Q})$ visto que o conjunto não é minorado

c) Se possível, dê exemplos de:

i) uma sucessão crescente de termos em $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ que converge para 5.

Resolução: por exemplo, $a_n = 5 - \frac{\sqrt{2}}{n}, n \in \mathbb{N}$.

ii) uma sucessão de termos em $A \cap B$ que é divergente.

Resolução: por exemplo, $b_n = -\frac{1 + (-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N}$.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} \quad \text{se } n > 1 \end{cases}$$

a) Mostre, por indução, que se tem

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n > 0$$

Resolução: 1^o passo: com $n = 2$, a proposição é verdadeira: $a_2 = \frac{-2}{1-2} = 2 > 0$.

2^o passo: supondo (hipótese de indução) que a proposição é verdadeira para n, isto é, $a_n > 0$, vem

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0, \text{ visto que é quociente de reais positivos}$$

Provámos assim que

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n > 0$$

b) Mostre que a sucessão $(a_n)(n \geq 2)$ é monótona decrescente.

Resolução: Com $n \geq 2$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{1+a_n} - a_n = \frac{-(a_n)^2}{1+a_n} < 0 \iff a_{n+1} < a_n$$

c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule $\lim a_n$.

Resolução: Como vimos, a sucessão (a_n) é minorada e é monótona decrescente (logo é limitada), pelo que é convergente. Designando por a o limite da sucessão, tem-se

$$a = \lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{a}{1+a} \iff \frac{-a^2}{1+a} = 0 \iff a = 0$$

isto é, $\lim a_n = 0$.

3. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{n!+1}{n^n+n}, \qquad \lim \frac{2n(n+1)^2+3}{3n(n^2+n+1)+6}, \qquad \lim \frac{3^n+7n}{5+2^n+n}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n!+2}}$$

Resolução:

$$\lim \frac{n!+1}{n^n+n} = \lim \frac{\frac{n!}{n^n}+\frac{1}{n^n}}{1+\frac{1}{n^{n-1}}} = 0, \qquad \lim \frac{2n(n+1)^2+3}{3n(n^2+n+1)+6} = \lim \frac{2(\frac{n+1}{n})^2+\frac{3}{n^3}}{3\frac{n^2+n+1}{n^2}+\frac{6}{n^3}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim \frac{3^n+7n}{5+2^n+n} = \lim \frac{1+\frac{7n}{3^n}}{\frac{5+n}{3^n}+(\frac{2}{3})^n} = +\infty, \text{ visto que } \left|\frac{2}{3}\right| < 1 \text{ e, portanto, } \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Seja, com $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(n+1)!}{n!+2}$; vem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!+2} . \frac{n!+2}{(n+1)!} = \frac{n+2}{n+1} . \frac{1+\frac{2}{n!}}{1+\frac{2}{(n+1)!}}$$

e, dado que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, também $\lim \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n!+2}} = 1$.

4. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$) os limites:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}, \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}+3x^2-5}{x(x-1)}$$

Resolução:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow 1} (x+1)\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = 2, \text{ atendendo a que } \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}+3x^2-5}{x(x-1)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x\sqrt{x}}+3-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 3$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Mostre que:
a) Se (u_n) é uma sucessão crescente e

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$$

então (u_n) e $(f(u_n))$ são sucessões convergentes (em $\mathbb{R}$).

Resolução: Como (u_n) é uma sucessão crescente e majorada, é convergente; seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lim u_n$. Dado que f é função definida e contínua em $\mathbb{R}$ (é uma função racional), f é contínua no ponto a, logo $f(u_n)$ é convergente e $f(a) = \lim f(u_n)$.

b) Se (v_n) é uma sucessão crescente, então $(f(v_n))$ é sucessão convergente (em $\mathbb{R}$).

Resolução: Seja (v_n) uma sucessão crescente.
Se (v_n) é majorada, como em alínea **a)**, concluímos que $f(v_n)$ é sucessão convergente.
Se (v_n) não é majorada, porque é crescente, tem-se $\lim v_n = +\infty$. Mas

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

e, portanto, também

$$\lim f(v_n) = 0.$$

Concluímos assim que, se (v_n) é uma sucessão crescente, $(f(v_n))$ é sucessão convergente.

c) Se (w_n) é uma sucessão qualquer de números reais, então $(f(w_n))$ tem subsucessões convergentes.

Resolução: A função f é limitada, uma vez que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

Então, qualquer que seja a sucessão de números reais (w_n), a sucessão $(f(w_n))$ é limitada e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $(f(w_n))$ tem (pelo menos) uma subsucessão convergente.