Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)

1º Sem. 2004/05

5ª Ficha de Exercícios

I. Funções Elementares

1) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, assinalando de forma conveniente os seus três pontos de intersecção.

2) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$, assinalando de forma conveniente os seus dois pontos de intersecção.

3) Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$. Prove cada uma das seguintes proposições.

(a) Se $n \geq 1$ e $f(0) = 0$, então $f(x) = xg(x)$ com g um polinómio de grau $n - 1$.

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, a função p dada por $p(x) = f(x + a)$ é também um polinómio de grau n.

(c) Se $n \geq 1$ e $f(a) = 0$ para um dado $a \in \mathbb{R}$, então $f(x) = (x - a)h(x)$ com h um polinómio de grau $n - 1$. [Sugestão: considere $p(x) = f(x + a)$.]

(d) Se $f(x) = 0$ para $(n + 1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $c_k = 0\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $f(x) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) Seja $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}$, com $m \geq n$. Se $g(x) = f(x)$ para $(m + 1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $m = n$, $b_k = c_k\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $g(x) = f(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas.

(a) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$ (c) $p(0) = p(1) = 1$
(b) $p(0) = p(1) = 1\,,\ p(2) = 2$ (d) $p(0) = p(1)$

5) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1-x)$ (b) $p(x) = p(1+x)$ (c) $p(2x) = 2p(x)$ (d) $p(3x) = p(x+3)$

6) Considere as seguintes propriedades fundamentais das funções **seno**, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno**, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. $\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi) = -1$.
2. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \ .$$
3. Para $0 < x < \pi/2$ tem-se que
$$0 < \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} \ .$$

Prove a partir delas as seguintes propriedades importantes das funções seno e coseno. [Sugestão: Apostol, Vol. I, §2.5.]

(a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sin(0) = \cos(\pi/2) = \sin(\pi) = 0$.

(c) $\sin(-x) = -\sin(x)$ e $\cos(-x) = \cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno é uma função ímpar e o coseno uma função par).

(d) $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ e $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno e o coseno são funções periódicas).

(f) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \ , \\ \sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \ . \end{aligned}$$

(g) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\begin{aligned} \sin(a) - \sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \ , \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \ . \end{aligned}$$

(h) No intervalo $[0, \pi/2]$, o seno é estritamente crescente e o coseno é estritamente decrescente.

7) Com base nas propriedades das funções seno e coseno listadas no exercício anterior, mostre que:

(a) $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \pi/2$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ e $\cos(x + \pi) = -\cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ e $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(f) $2\sin(x)\sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(g) $2\sin(x)\cos(y) = \sin(x - y) + \sin(x + y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(h) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(h/2)}{h/2}\cos(x + h/2)\ , \\
\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= -\frac{\sin(h/2)}{h/2}\sin(x + h/2)\ .
\end{aligned}$$

8) Considere as funções **seno hiperbólico**, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno hiperbólico**, $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ .$$

Mostre que:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sinh(0) = 0$ e $\cosh(0) = 1$.

(c) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ e $\cosh(-x) = \cosh(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\cosh(x + y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\ , \\
\sinh(x + y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)\ .
\end{aligned}$$

(e) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ e $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(f) $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ e $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

9) Considere a função inversa da função seno hiperbólico, argsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que

$$\operatorname{argsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

10) Considere a função inversa da função coseno hiperbólico, quando esta última é restrita ao intervalo $[0, +\infty[$, argcosh : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$. Mostre que

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , \ \forall x \in [1, +\infty[\ .$$

11) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $f(x) = \tan\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(d) $f(x) = \log(\log x)$ (e) $f(x) = \log\left(1 + x^{3/2}\right)$ (f) $f(x) = \log\left(1 - x^{2/3}\right)$

(g) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(1+\sqrt{x+1}\right)$ (i) $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{2}$

(j) $f(x) = \arcsin e^x$ (k) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$ (l) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$

(m) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (n) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(o) $f(x) = \log\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (p) $f(x) = \log\left(1 - \arctan x\right)$

12) Seja (u_n) uma sucessão monótona. Prove que a sucessão $(\arctan u_n)$ é convergente em $\mathbb{R}$.

II. Limites e Continuidade

1) Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2) Usando o caso notável

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ ,$$

mostre que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin x} = 5$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x} = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a} = \cos a$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{\sin x} = 2$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

3) Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(\tan t)}{\sin(t)}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$ (c) $\lim\limits_{t\to \pi} \dfrac{\sin(t-\pi)}{t-\pi}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$

4) Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Supondo que existe uma sucessão (x_n) de termos em $[a,b]$ tal que $\lim \varphi(x_n) = 0$, prove que φ tem pelo menos um zero em $[a,b]$.

5) Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

(a) Não existe qualquer sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n \, , \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = 1/n \, , \ \forall n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

6) Seja $D = [0, +\infty[\setminus\{1\}$ e considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \qquad \text{para} \qquad x \in D \ .$$

(a) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \ , \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) \ .$$

(b) Indique o contradomínio de f, justificando abreviadamente a resposta.

(c) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n) de termos em D tais que

(i) (u_n) é convergente e $(f(u_n))$ é divergente.

(ii) (v_n) é divergente e $(f(v_n))$ é convergente.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & , \ x \geq 0 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0 e indique, justificando, se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto.

(c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(d) Indique justificando o contradomínio de f.

8) Seja f a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & , \ x < 0 \\ \log \frac{1}{1+x^2} & , \ x > 0 \ . \end{cases}$$

(a) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

9) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \\ g(x) &= x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(c) Mostre que são funções limitadas.

10) Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= \log \log(1 + x) \\ g(x) &= \sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

(c) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

11) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2 + 1} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

12) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{x}} & , \ x > 0 \\ \\ x(2-x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

13) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ \\ (x+k)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

14) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) & , \ x > 1 \\ \\ 1 - x^2 & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto 1.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

15) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} & , \ x > 0 \\ \\ k(x+1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

16) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2(1+x)}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (x+1)^2 - k & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

III. Propriedades Globais das Funções Contínuas

1) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Indique, justificando, a natureza da série

$$\sum \frac{f(\sin n)}{n^2} \; .$$

2) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0,1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0,1]$. Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [0,1]$ com $f(c) = c$. [Sugestão: aplique o teorema de Bolzano a $g(x) = f(x) - x$.]

3) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), tal que $f(a) \leq a$ e $f(b) \geq b$. Prove que f tem um ponto fixo em $[a,b]$.

4) Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$ para todo o $x > b$. Mostre que f tem mínimo em $[0,+\infty[$.

5) Dada uma função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, considere a função f que é definida em $[-1,1]$ por $f(x) = g(1 - x^2)$.

(a) Supondo que g é contínua em todo o seu domínio, mostre que f tem máximo e mínimo.

(b) Supondo apenas que g é contínua em $]0,+\infty[$, poderemos garantir a existência de máximo e mínimo de f? Justifique.

6) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

(a) Prove que f é limitada.

(b) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique, justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2} \; .$$

7) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:

(a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.

(b) f tem mínimo em $\mathbb{R}$.