Def. extremo absoluto

x_0 é o máx. abs. de f sse $\forall x,\ f(x) \leq f(x_0)$

x_0 " " mín. " " " " $\forall x,\ f(x) \geq f(x_0)$

Def. extremo local

x_0 é um máx. local de f sse $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$,
$f(x) \leq f(x_0)$

x_0 é um mín. local de f sse $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$,
$f(x) \geq f(x_0)$

Sendo $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

restrição de f a $B_r(x_0)$

↳ bola de raio > 0 e centro em x_0 (?)

Prop.

sendo $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

se

- x_0 for um extremo local e $x_0 \in \operatorname{int} A$
- As derivadas parciais em x_0 existirem e forem finitas

então

- as derivadas parciais em x_0 são nulas

NOTA I: Derivadas parciais ∂f

Quando f tem ⊕ dos 1 variável podemos calcular a taxa de variação de cada variável mantendo as outras fixas!

Logo, uma derivada parcial é a derivada de uma função para uma determinada variável.

ex: $\frac{\partial F}{\partial x}$ $\frac{\partial F}{\partial y}$ $\frac{\partial F}{\partial z}$ ...

nota II: as derivadas parciais medem a variação de f na direção dos eixos coordenados.

NOTA I: Derivadas direcionais $D_v f(\bar{x})$

Medem a variação de f na direção de um vetor.

Dado o vetor $v(v_1, v_2, \ldots, v_n)$
A derivada direcional de f na direção de v é dada por:

$$D_v f(\bar{x}) = \lim \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h}$$

nota II: de modo a facilitar o cálculo desta derivada direcional, transforma-se o vetor em unitário.

norma/comprimento = 1

Dividindo cada coordenada pela norma original de v.

ou seja, sendo $v(v_1, v_2)$, $v = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)$

NOTA: Se as derivadas parciais de f existirem e forem contínuas, então a derivada direcional na direção de v dá-se por:

$$D_v f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_j}$$

por ex. $\bar{x}(x_1, x_2)$ $v(v_1, v_2)$

$$D_v F(\bar{x}) = v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

NOTA$_I$: Derivadas de Aplicações (Transformações Lineares)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - T}{|h|} = 0$$

$DF(\bar{x}) = T$ ↳ transf. linear

↳ derivada de f no ponto $\bar{x}$

nota II: neste caso, f é diferenciável.

Nota: derivada segundo um vetor

=

derivada dirigida

Mas

≠

derivada direcional
(neste caso o vetor é unitário)

Btw só se discute diferenciabilidade em relação a pontos interiores ao domínio da função.

Def. de Diferenciabilidade

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+h) - f(x,y) - D_{(h,k)}f(x,y)}{\|(h,k)\|}$$

Como ver se a função h tem um extremo local em (x_0, y_0)

1º Fazer as derivadas parciais de primeira ordem de h

2º Se $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

(x_0, y_0) é um ponto de estacionaridade de h

3º Calcular as derivadas parciais de segunda ordem de h

4º Construir a Matriz Hessiana de (x_0, y_0)

$$H_h(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

5º Calcular o det e o tr da matriz

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ $\quad$ $\operatorname{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + d$

6º Se $\det > 0$ Se $\operatorname{tr} > 0$, mínimo (ambos valores pos.)

(matrizes) formas quadráticas

Se $\det > 0$ Se $\operatorname{tr} < 0$, máximo (ambos valores neg.)

Se $\det > 0$, $\det < 0$ Se $\operatorname{tr} < 0$, $\operatorname{tr} > 0$, ponto de sela (forma ñ def.)