Resolução de exame de recuperação
(Versão A)

Primeira parte

Questão 1.—
(a) Temos,

$$\frac{n - \sin(n)}{\sqrt{n^3} + 2} = \frac{1 - \sin(n)/n}{\sqrt{n} + 2/\sqrt{n}} \to 0 (= \frac{1}{\infty}).$$

(b) Considerando $a_n = n^2 + 2^n$ obtemos,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1}}{n^2 + 2^n} = \frac{(n+1)^2/2^n + 2}{n^2/2^n + 1} \to \frac{0+2}{0+1} = 2.$$

Como $(a_{n+1}/a_n) \to 2$ concluímos que $(\sqrt[n]{a_n}) = (\sqrt[n]{n^2 + 2^n}) \to 2$.

(c) Neste caso,

$$\frac{3^n + n^2}{2^{2n} - 1} = \frac{3^n(1 + n^2/3^n)}{4^n(1 - 1/4^n)} = \left(\frac{4}{4}\right)^n \frac{1 + n^2/3^n}{1 - 1/4^n} \to 0 \cdot \frac{1+0}{1-0} = 0.$$

(d) Temos,

$$\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3} = \left(\frac{(n+2)-4}{n+2}\right)^{2n+3} = \left(\left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)^{n+3/2}\right)^2 = \left(\left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)^{n+2}\left(1 + \frac{-4}{n+2}\right)^{-1/2}\right)^2$$

O produto à direita tende para $(e^{-4})^2 = e^{-8}$.

Questão 1.2(a)—A verificação de que $x_1 > x_0$ é trivial e deixa-se ao cuidado do leitor. A hipótese de indução é então: $x_{n+1} > x_n$, sendo a tese: $x_{n+2} > x_{n+1}$. Demonstramos que a hipótese implica a tese do seguinte modo:

$$x_{n+1} > x_n \Rightarrow 2x_{n+1} > 2x_n \Rightarrow 2x_{n+1} + 1 > 2x_n + 1 \Rightarrow \sqrt{2x_{n+1} + 1} > \sqrt{2x_n + 1} \equiv x_{n+2} > x_{n+1}.$$

Questão 1.2(b)—Nas condições indicadas tem-se $x_0 \leq x_n \leq 3$ pelo que a sucessaõ é limitada, como também é monótona resulta que é convergente. Digamos que $(x_n) \to \alpha$. Como (x_{n+1}) é uma subsucessão de (x_n) tem-se igualmente que $(x_{n+1}) \to \alpha$. Assim, passando ao limite a relação de recorrência, obtemos

$$\alpha = \sqrt{2\alpha + 1} \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 1 \equiv \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0.$$

A equação da direita tem duas soluções, $1 - \sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$. Como α tem que ser positivo, só pode ser $1 + \sqrt{2}$.

Questão 1.3—Mais uma vez a verificação de que a relação é verdadeira para $n = 1$ é trivial e deixa-se a cargo do leitor. A hipótese de indução é então:

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(3k+2) = (n-1)n(n+2)$$

e a tese:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(3k+2) = n(n+1)(n+3).$$

A tese pode estabelecer-se a partir da tese, do seguinte modo:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)(3k+2) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)(3k+2) + n(3n+5) =_{\text{H.I.}} (n-1)n(n+3) + n(3n+5) = n(n+1)(n+3).$$

Questão 1.4(a)—Em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a função f onbtém-se de funções elementares (que são contínuas) usando operações algébricas e composição de funções, logo é contínua naquele conjunto.

Questão 1.4(b)—Sendo f contínua em $x=0$ tem-se que

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(3x)}{x}.$$

Para calcular este limite podemos fazer a mudança de variável $x = \tan(u)/3$. Tem-se assim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(3x)}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\tan(u)/3} = \lim_{u\to 0} 3 \cdot \frac{(\cos u)\cdot u}{\sin u} = \lim_{u\to 0} 3\cos u \frac{u}{\sin u} = 3.$$

Questão 1.4(c)—É fácil verificar que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Atendendo à definição de limite existem $K > 0$ e $L < 0$ tais que em $]-\infty, L] \cup [K, +\infty[$ se tem $|f(x)| < 1$. (sendo por isso f limitada naquele conjunto). Por outro lado, como f é contínua f é limitada em $[L, K]$. Assim f é limitada em $\mathbb{R} = (]-\infty, L] \cup [K, +\infty[) \cup [L, K]$.

Questão 1.5—A função $h(x) = f(x) - g(x)$ é contínua em $[0,1]$ (por ser a diferença de duas funções contínuas). Por outro lado, $h(0) = f(0) - g(0) = 0 - 1 = -1 < 0$ e $h(1) = f(1) - g(1) = 1 - 0 = 1 > 0$. Assim, pelo teorema do valor intermédio de Bolzano tem-se que existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = f(c) - g(c) = 0$, ou seja, f(c)=g(c).

Questão 1.6(a)—Falsa.

Questão 1.6(b)—Verdadeira.

Questão 1.6(a)—Falsa.

Segunda parte

Questão 2.1(A)—Tem-se,

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(1/x)(\ln x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} \frac{\ln x}{x}$$

o primeiro factor corresponde a um limite notável e tende para 1. Ao segundo factor corresponde uma indeterminação do tipo ∞/∞. Recorrendo à regra de Cauchy temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Assim, concluímos que o limite original é 0.

Questão 2.1(B)—Temos que,

$$\lim_{x\to 0^+} [\ln(1/x)]^x = \lim_{x\to 0^+} \exp(x\ln(\ln(1/x))) = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{\ln(\ln(1/x))}{1/x}\right).$$

Recorrendo à regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(\ln(1/x)))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{(-1/x^2)/(1/x)}{\ln(1/x)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(1/x)} = 0$$

Assim o limite original é $\exp(0) = 1$.

Questão 2.2—Calculando a derivada através das derivadas esquerda e direita obtemos,

$$f'(-1^-) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{e^{-(x+1)} - 1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} -\frac{e^{-(x+1)} - 1}{-(x+1)} = -1$$

$$f'(-1^+) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{e^{(x+1)} - 1}{x+1} = 1.$$

Como as derivadas laterais são diferentes a função não é diferenciável em $x = -1$.

Questão 2.3(a)—A função é crescente em $[1,+\infty[$ (derivada positiva) e decrescente em $]-\infty,1]$ (derivada negativa).

Questão 2.3(b)—A função apresenta um mínimo local em $x=1$ (que é também um mínimo global).

Questão 2.4(a)—Tem-se que $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$. Por outro lado é claro que $f^{(4)}(0)>0$. Como a ordem da primeira derivada que não se anula (a seguir à primeira) é par, temos um extremo. Como essa derivada é positiva esse extremo é um mínimo local.

Questão 2.4(b)—Sendo $R_4(x)$ o resto de Lagrange de ordem 4, o erro cometido aproximando a função pelo respectivo polinómio de Taylor de ordem 4 é

$$|f(x)-(1+x^4/3)|=\left|\frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}x^5\right|=\frac{|f^{(5)}(\theta)|}{5!}|x|^5\leq\frac{1}{5!}\cdot 1^5=\frac{1}{120}<\frac{1}{100}.$$

Questão 2.5—Tem-se uma indeterminação do tipo $0/0$. Aplicando a regra de Cauchy, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\displaystyle\int_0^{x^2}\cos^2 t\,dt\right)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos^2(x^2)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\frac{x}{\sin x}\cos^2(x^2)=2.$$

Questão 2.6—O valor da área indicada é dado por

$$\int_0^1(e^x-e^{-x})\,dx=[e^x+e^{-x}]_0^1.$$

Question 2.7—Considerando a substituição indicada temos que $x=e^t$ e, consequentemente, $dx=e^t\,dt$. Temos então,

$$\int\frac{\ln x}{x(\ln x-1)^2}dx=\int\frac{t}{e^t(t-1)^2}e^t\,dt=\int\frac{t}{(t-1)^2}dt=\int\frac{A}{(t-1)^2}+\frac{B}{t-1}dt=A\int\frac{1}{(t-1)^2}+B\int\frac{1}{t-1}dt$$

onde os coeficiente A e B podem ser calculados pelo processo usual. Continuando,

$$A\int\frac{1}{(t-1)^2}+B\int\frac{1}{t-1}dt=-A\int\frac{-1}{(t-1)^2}+B\ln|t-1|=-\frac{A}{t-1}+B\ln|t-1|$$

A primitiva final pode agora obter-se substituindo t por $\ln x$.

Questão 2.8—Começando por calcular o raio de convergência, obtém-se:

$$R=\lim\frac{\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+5}}}{\dfrac{n+2}{\sqrt{(n+1)^3+5}}}=\lim\frac{n+1}{n+2}\sqrt{\frac{(n+1)^3+5}{n^3+5}}=1.$$

Ficamos assim a saber que a série converge absolutamente no intervalo $]-1,1[$ e diverge em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Os casos $x=1$ e $x=-1$ têm que ser estudados particularmente.

Para $x=1$ obtem-se a série $\sum(n+1)/\sqrt{n^3+1}$. Observando a diferença de "grau" entre o numerador e o denominador, concluí-se que esta série é comparável com a série de Dirichlet $\sum 1/n^{1/2}$. Recorrendo ao critério geral de comparação:

$$\lim\frac{\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+5}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+5}}=1,$$

confirmando que as séries têm a mesma natureza, sendo por isso ambas divergentes (a natureza da série de Dirichlet utilizada é conhecida).

No caso $x=-1$ obtem-se a série alternada $\sum(-1)^n(n+1)/\sqrt{n^3+5}$. A série dos módulos é a série anterior (que é divergente) pelo que esta série não é absolutamente convergente. Contudo, aplicando o critério de Leibniz, verifica-se facilmente que a série converge, sendo por isso simpesmente convergente.