Algumas primitivas simples envolvendo funções trigonométricas

1. $\int dx/\sin x = \ln|\tan(x/2)|$. Para constatar este facto basta derivar:

$$(\ln|\tan(x/2)|)' = \frac{(\tan(x/2))'}{\tan(x/2)} = \frac{1/2}{\cos^2(x/2)}\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1}{\sin x}$$

2. $\int dx/\cos x = \ln|\tan x + \sec x|$. Mais uma vez, para constatar este facto basta derivar:

$$(\ln|\tan x + \sec x|)' = \frac{\sec^2 x + (\sin x/\cos^2 x)}{\tan x + \sec x} = \frac{\dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x}}{\dfrac{1+\sin x}{\cos x}} = \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1}{\cos x}$$

3. As primitivas $\int dx/\cos^2 x$ e $\int dx/\sin^2 x$ são imediatas, pois pois as funções integrandas são, respectivamente, as derivadas da tangente e da co-tangente, i.e., $\int dx/\cos^2 x = \tan x$ e $\int dx/\sin^2 x = \operatorname{cotan} x$.

4. As primitivas de $\int dx/\sin^3 x$ e $\int dx/\cos^3 x$ podem calcular-se usando *partes*:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^x}{\cos^3 x}dx = \int (\sin x)\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} =$$
$$= (\sin x)\frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx - \int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{}{2\cos^2 x} + \ln|\tan x + \sec x|$$

Analogamente para o caso da outra primitiva.

Exercício 3 da Ficha 11

5. $\int 5/2(x+1)(\sqrt{x}+2)\,dx$. Usando a substituição $x = t^2$ (donde: $dx = 2t\,dt$), obtemos

$$\int \frac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{(t^2+1)(t+2)}2t\,dt = \frac{5}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)(t+2)}\,dt.$$

Esta é a primitiva de uma função racional que, após a decomposição em fracções simples, resulta em,

$$\int \frac{2t}{(t^2+1)(t+2)}dt = \int \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t+1} = A\int \frac{t}{t^2+1}dt + B\int \frac{1}{t^2+1}dt + C\int \frac{1}{t+1}dt =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + B\arctan t + C\ln|t+1| = \frac{A}{2}\ln(t^2+1) + B\arctan t + C\ln|t+1|.$$

Escrevendo t em função de x, uma primitiva é:

$$\frac{A}{2}\ln(x+1) + B\arctan\sqrt{x} + C\ln(\sqrt{x}+1).$$

6. Para calcular a primitiva de $\sqrt{x^2+1}$ através da substituição $x = \tan t$ (donde $dx = dt/\cos^2 t$), obtemos:

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\cos^3 t}dt.$$

Esta primitiva foi calculada em (4) acima.

7. **(Existe um erro no enunciado: a primitiva a calcular deve ser a da função $\sqrt{x^2-1}$.)**
Para calcular a primitiva de $\sqrt{x^2-1}$ usando a substituição $x = 1/\cos t$ (donde $dx = (\sin t/\cos^2 t)dt$), obtemos,

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$
$$= \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^3 t}dt = \int \frac{1}{\cos^3 t}dt - \int \frac{1}{\cos t}dt$$

Ambas as primitivas já foram calculadas acima.

8. Para calcular uma primitiva de $(1/x^2)\sqrt{(x-1)/(x+1)}$ usando a substituição $t^2 = (x-1)/(x+1)$, obtemos,
$$t^2 = \frac{x-1}{x+1} \equiv t^2(x+1) = x-1 \equiv t^2x - x = -(t^2+1) \equiv x = -\frac{t^2+1}{t^2-1},$$
resultando que
$$dx = -\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)' dt = \frac{4t}{(t^2-1)^2}dt.$$
Calculando finalmente a primitiva obtemos,
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} &= \int \frac{(t-1)^2}{(t^2+1)^2}t\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt = \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{At+B}{(t^2+1)^2} + \int \frac{Ct+D}{t^2+1}dt = \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt + B\int \frac{1}{(t^2+1)^2} + \frac{C}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + D\int \frac{1}{t^2+1}dt = \\ &= -\frac{A}{2}\frac{1}{t^2+1} + B\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{2}\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt + \frac{c}{2}\ln(t^2+1) + D\arctan t\end{aligned}$$
Quanto à primitiva por calcular tem-se,
$$\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2} - \frac{t}{2}\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int t\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$$
A primeira primitiva é trivial, quanto à segunda, usa-se partes derivando t e primitivando $2t/(t^2+1)^2$, obtendo
$$\int t\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt = -\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{1}{t^2+1}dt$$
que é agora trivial.

9. Para calcular a primitiva da função $\cos x/(4+\sin^2 x)$ usando a substituição $t = \sin x$, ou seja $x = \arcsin t$, donde $dx = dt/\sqrt{1-t^2}$, obtemos,
$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{4+t^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+(t/2)^2}dt = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right).$$

10. Quanto à primitiva de $1/x\sqrt{x^2-1}$ usando a substituição $x = \cosh t$ (donde se obtém $dx = (\sinh t)dt$ resulta,
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{\cosh t\sqrt{(\cosh t)^2-1}}(\sinh t)dt = \int \frac{1}{\cosh t}dt = \int \frac{2}{e^t+e^{-t}}dt = 2\int \frac{e^t}{1+(e^t)^2}dt$$
sendo esta última primitiva a função $2\arctan(e^t)$.

Resolução (esquemática) da ficha 12, até ao exercício 25

1. Tem-se $e^{x-1}(1+e^x) = e^{x-1} + e^{2x-1}$ pelo que a primitiva é imediata.

2. A substituição $e^x = t$ (donde $x = \ln t$ e $dx = (1/t)dt$) permite estabelecer que,
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx = \int \frac{t}{t^2+2t+1}\frac{1}{t}dt$$
que é a primitiva de uma função racional.

3. Basta observar que,
$$\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{-2}$$
(multiplicando pelo conjugado) pelo que a primitiva fica imediata.

4. Basta observar que
$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
ambas imediatas (a primeira é um arcsin a segunda é uma potência).

5. Tem-se,
$$\int \frac{1-x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \arctan x - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}.$$

6. Trata-se de uma função racional, primitiva-se de acordo com o esquema usual.

7. Feita a mudança de variável $\sqrt{x} = t$ (donde, $x = t^2$ e $dx = 2t\,dt$ obtém-se:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx = \int \frac{1}{t(1+t)}2t\,dt$$
uma primitiva que é imediata.

8. Análogo ao anterior.

9. Tem-se
$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx$$
que é imediata ($\arcsin(x-1)$).

10. Neste caso,
$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$
estas primitivas são imediatas.

11. Tem-se,
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int x^2 \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
pode então aplicar-se o princípio de primitivação por partes, derivando x^2 e primitivando o outro factor.

12. Tem-se,
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$$
A primeira primitiva é imediata, quanto à segunda,
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$$
Esta primitiva é imediata, uma vez que é essencialmente a primitiva da função $1/\sqrt{x^2+1}$ que é a função *argumento do seno hiperbólico*, i.e., a função $\operatorname{argsh}(x) := \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

13. É uma função racional.

14. *idem.*

15. *ibidem.*

16. É uma primitiva imediata da forma $\int u'u\,dx$.

17. Basta observar que,
$$\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} = (1-\cos^2 x)\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x$$
e as primitivas destas duas últimas funções são imediatas.

18. Basta ver que:
$$\frac{\tan x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^4 x}.$$

19. Tem-se
$$x\tan^2 x = x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = x\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = x\frac{1}{\cos^2 x} - x.$$
Uma das primitivas é imediarta, quanto à outra temos, recorrendo ao princípio de primitivação por partes,
$$\int x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = x\tan x - \ln|\cos x|.$$

20. Foi calculada em (4) da primeira parte.

21. Análoga à anterior.

22. Por partes, primitivando $1/x^2$ e derivando $\arctan x$.

23. Imediata: é da forma $\int u'u\,dx$.

24. Por partes, derivando $(x+1)$ e primitivando x

25. Idêntico ao anterior.