Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 7 – Integrais Impróprios

Parte I – Exercícios Propostos

I. 1 Verifique se os seguintes integrais são ou não convergentes.

No caso afirmativo, indique o seu valor.

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

I.2 Verifique se os seguintes integrais são ou não convergentes.

No caso afirmativo, indique o seu valor.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{1+x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

Parte II – Exercícios Resolvidos

II.1 Verifique se os seguintes integrais são ou não convergentes.

No caso afirmativo, indique o seu valor.

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, logo, em particular, é contínua em $[1,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(+\infty)^2} = 0$
- $\lim_{x\to1} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1^2} = 1$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} x^{-2} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = -\frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Logo, o integral $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente e $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$.

c) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Resolução:

A função integranda $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ é contínua em $]0,+\infty[$, logo, em particular, é contínua em $]0,1]$.

Atendendo a que,

- $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$
- $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo inferior, então, podemos concluir que este integral é impróprio de segunda espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to0^+} \int_{a}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to0^+} \int_{a}^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \lim_{a\to0^+} \int_{a}^{1} x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a\to0^+} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_a^1 = \lim_{a\to0^+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_a^1 = \lim_{a\to0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1$$

$$= \lim_{a\to0^+} \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}\right) = 2 - 2\sqrt{0^+} = 2 - 2\cdot 0 = 2$$

Logo, o integral $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ é convergente e $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$.

b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}$, logo, em particular, é contínua em $[1,+\infty[$. Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(+\infty)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} 1\right)$$
$$= \operatorname{arc\,tg}(+\infty) - \operatorname{arc\,tg} 1 \underset{(*)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Logo, o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Observação $(*)$:

Para se poder definir a função inversa da função tangente, isto é, a função arco tangente, consideremos a restrição principal da função tangente $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = a \Leftrightarrow 1 = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow \operatorname{tg} a = 1 \underset{a\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}{\Rightarrow} a = \frac{\pi}{4}$$

Observando o gráfico podemos concluir que, quando $x \to +\infty$, tem-se que $y \to \frac{\pi}{2}$, isto é, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{\pi}{2}$.

c) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Resolução:

A função integranda $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ é contínua em $]-1,1[$, logo, em particular, é contínua em $[0,1[$.

Atendendo a que

- $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-1^2}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$,

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo superior, então podemos concluir que este integral é impróprio de segunda espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{b\to 1^-}\left[\operatorname{arcsen} x\right]_0^b = \lim_{b\to 1^-}\left(\operatorname{arcsen} b - \operatorname{arcsen} 0\right)$$

$$= \operatorname{arcsen} 1^- - \operatorname{arcsen} 0 \underset{(*)}{=} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Logo, o integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ é convergente e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$.

Observação $(*)$:

Observando o gráfico podemos concluir que, quando $x \to 1^-$, tem-se que $y \to \frac{\pi}{2}$, sendo $y = \operatorname{arc\,sen} x$,

isto é, $\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2}$ e, o valor da função no ponto x=0 é y=0, isto é, $\operatorname{arc\,sen} 0 = 0$.

d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-1}dx$

Resolução:

A função integranda $\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, logo, em particular, é contínua em $[0,1[$.

Atendendo a que

- $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{0^2-1} = -1$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo superior, então, podemos concluir que este integral é impróprio de segunda espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{x^2-1}dx \underset{(*)}{=} \lim_{b\to 1^-}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^b = \lim_{b\to 1^-}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right|\right) = \lim_{b\to 1^-}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{b-1}{b+1}\right|\right) - \lim_{b\to 1^-}\left(\frac{1}{2}\ln|-1|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1^- -1}{1+1}\right| - \frac{1}{2}\ln|-1| = \frac{1}{2}\ln\left|0^-\right| - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 0^+ - \frac{1}{2}\cdot 0 \underset{(**)}{=} \frac{1}{2}(-\infty) - 0 = -\infty$$

Logo, o integral $\int_0^1 \frac{1}{x^2-1}dx$ é divergente.

Cálculos auxiliares: (*)

Calculemos a $P\dfrac{1}{x^2-1}$. Trata-se da primitiva de uma função racional.

<u>Primitivação da função racional:</u>

$$P\frac{1}{x^2-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pelo} \\ 5^{\text{o}}\text{passo}}}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

<u>1º Passo:</u> <u>Obtenção de uma função racional própria</u>

Como $\text{grau}(1)=0<2=\text{grau}\left(x^2-1\right)$ então a função $\dfrac{1}{x+x^2}$ já é própria.

<u>2º Passo:</u> <u>Factorização do denominador da função própria</u>

$$x^2-1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Caso notável da multiplicação} \\ \text{(Folhas de apoio de Mat.0} - \text{pág 7)}}}{=} (x+1)(x-1)$$

<u>3º Passo:</u> <u>Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos</u>

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

<u>4º Passo:</u> <u>Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados</u>

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow 1=A(x-1)+B(x+1)$$

- Para $x=1$ vem $\quad 1=A(1-1)+B(1+1)\Leftrightarrow 1=A\cdot 0+B\cdot 2\Leftrightarrow B=\dfrac{1}{2}$

- Para $x=-1$ vem $\quad 1=A(-1-1)+B(-1+1)\Leftrightarrow 1=A\cdot(-2)+B\cdot 0\Leftrightarrow A=-\dfrac{1}{2}$

Assim,

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

<u>**5º Passo:** Determinação da primitiva da função própria</u>

$$P\frac{1}{(x+1)(x-1)}=P\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)=P\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+P\frac{\frac{1}{2}}{x-1}=-\frac{1}{2}P\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}P\frac{1}{x-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Observação $(**)$ *:*

Sabemos que a base do logaritmo $(\ln(x))$ é a=e*, então observando o gráfico, para o caso em que* a> 1 *(folhas de apoio de Matemática I - página 20), podemos concluir que quando* $x\to 0^+$ *tem-se que* $y\to-\infty$ *, sendo* $y=\ln(x)$ *, isto é,* $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\ln(0^+)=-\infty$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\dfrac{x}{(1+x^2)^2}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}$, logo, em particular, é contínua em $[0,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}\underset{\substack{\text{Regra}\\\text{de}\\\text{Cauchy}}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(1+x^2)2x}=\frac{1}{2\left(1+(+\infty)^2\right)2(+\infty)}=\frac{1}{+\infty}=0$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(1+x^2)^2}=\frac{0}{(1+0^2)^2}=0\,,$$

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^b 2x(1+x^2)^{-2}dx\right)=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(1+x^2)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}\right]_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+x^2}\right]_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+b^2}-\left(-\frac{1}{1+0^2}\right)\right)$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+b^2}+1\right)=-\frac{1}{1+(+\infty)^2}+1=-\frac{1}{+\infty}+1=0+1=1$$

Logo, o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ é convergente e $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=1$

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III.1 Verifique se os seguintes integrais são ou não convergentes.

No caso afirmativo, indique o seu valor.

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+x^2}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\ln(x)}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot\ln^3(x)}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}\,dx$