CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE ORDEM SUPERIOR A UM

1 Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

São da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = g(t)$$

Um exemplo destas equações é a *Lei de Newton*:

Se y representa a posição de um corpo, o seu movimento é dado por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_i F_i,$$

onde m é a massa do corpo e F_i são as forças que nele actuam.

Se $g(t) = 0$, a equação é *homogénea*.

Para definir completamente uma solução (particular) da equação, precisamos de duas condições iniciais, por exemplo $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$.

Tal como para as equações de primeira ordem, temos neste contexto o seguinte resultado.

Teorema de Existência e Unicidade
Se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas no intervalo $]a, b[$, então o problema

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

tem uma solução única no mesmo intervalo.

Escrevemos $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$.

Para cada função y, $L[y]$ é também uma função.

Exemplo:

Suponhamos que $p(t) = 0$ e $q(t) = 1$.

Então $L[y] = y'' + y$.

Se $y = \operatorname{sen} t$, $L[y] = (\operatorname{sen} t)'' + (\operatorname{sen} t) = 0$

Se $y = t$, $L[y] = (t)'' + t = t$

Em qualquer caso, L transforma funções em funções, e por isso é chamado *operador* (se transformasse funções em valores reais, seria chamado *funcional*. Um exemplo é $L[y] = \int_a^b y(t)\,\mathrm{dt}$.)

O operador L verifica as propriedades

$L[cy] = cL[y], \;\; c \in \mathbb{R}$

$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$,

donde é um operador *linear*.

Voltando a $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y$:

As soluções da equação homogénea

$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

são precisamente as funções y tais que $L[y] = 0$.

Por causa disto, se y é solução também cy o é (para qualquer $c \in \mathbb{R}$)

e, se y_1 e y_2 são soluções, também o é $y_1 + y_2$.

Exemplo:

$y'' + y = 0$ (portanto, $p(t) = 0$ e $q(t) = 1$)

Duas soluções são $y_1(t) = \operatorname{sen} t$ e $y_2(t) = \cos t$.

$\Rightarrow \;\; y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$

também é solução (para quaisquer c_1 e c_2.)

Como veremos no teorema seguinte, esta é a solução geral da equação: qualquer solução é desta forma.

Teorema

Sejam y_1 e y_2 duas soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (com p e q contínuas) no intervalo $]a, b[$ tais que $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \neq 0$ neste intervalo.

Então $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ é a solução geral da equação.

Demonstração. Seja y uma qualquer solução e definamos $y_0 = y(t_0)$ e $y_0' = y'(t_0)$ (para t_0 escolhido em $]a, b[$.)

Queremos ver que existem c_1 e c_2 em $\mathbb{R}$ tais que $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Devemos ter então

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Este sistema tem solução (única) (c_1, c_2) se e só se

$$\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Esta é precisamente a condição do teorema.

Devido à unicidade de soluções, $y = c_1y_1 + c_2y_2$. $\square$

A quantidade anterior é denotada por

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$$

e chama-se *wronskiano*.

$\{y_1, y_2\}$ é chamado um *conjunto fundamental de soluções*, e dizemos que y_1 e y_2 são soluções *linearmente independentes*.

Lema de Abel
O wronskiano satisfaz a equação $W' + p(t)W = 0$.

Para além disso, W é zero para todo o $t \in]a, b[$ ou nunca é zero para nenhum $t \in]a, b[$.

Demonstração. Como $W = y_1y_2' - y_2y_1'$, temos

$$\begin{aligned} W' &= (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' \\ &= y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1) = -p(y_2'y_1 - y_2y_1') = -pW, \end{aligned}$$

como queríamos obter.

A equação é linear homogénea (em W), e por isso a sua solução é $W(t) = c\,e^{-\int p(t)\mathrm{dt}}$ para algum $c \in \mathbb{R}$, logo ou é sempre zero ou nunca se anula. $\square$

O lema de Abel permite-nos obter o wronskiano só a partir dos coeficientes da equação, e não das soluções y_1 e y_2 que entram na sua definição. Ou seja, não precisamos de resolver a equação original para sabermos o wronskiano de quaisquer duas soluções y_1 e y_2.

Exemplo:

$y'' + y = 0$

$p(t) = 0$, por isso (dadas duas soluções y_1 e y_2) o wronskiano é

$W(y_1, y_2) = c\,e^{-\int 0\mathrm{dt}} = c$ para algum c.

$y_1 = \operatorname{sen} t$ e $y_2 = \cos t$ são soluções.

$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 - \cos^2 = -1$

Como $W[y_1, y_2] \neq 0$, pelo teorema anterior a solução geral é

$y(t) = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\operatorname{sen} t + c_2\cos t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Todas as soluções são desta forma.

$y_1 = \operatorname{sen} t$ e $y_2 = \cos t$ são linearmente independentes.

$\{\operatorname{sen} t,\ \cos t\}$ é um conjunto fundamental de soluções para a equação.

1.1 Equações Diferenciais com Coeficientes Constantes

Como exemplo das equações de segunda ordem, começamos pelas *lineares homogéneas com coeficientes constantes.*

São da forma

$ay'' + by' + cy = 0,$

Com a, b e c em $\mathbb{R}$ (e $a \neq 0$.)

Devido à forma especial destas equações, faz sentido procurar para elas soluções da forma exponencial (que são funções cuja derivada é da mesma natureza original.) As funções reais sen e cos também têm como derivada funções da mesma classe - note-se que estão relacionadas com exponenciais complexas.

Testamos $y = e^{rt}$, e queremos saber para que valores de r teremos soluções da equação anterior.

Substituindo na equação:

$$a(r^2\, e^{rt}) + b(r\, e^{rt}) + ce^{rt} = 0$$

$$\Rightarrow e^{rt}\,[ar^2 + br + c] = 0$$

Obtemos portanto o *polinómio característico* da equação:

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

Este polinómio tem como raízes

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e, de acordo com a natureza destas raízes, teremos diferentes soluções da equação original.

Caso 1: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Temos duas raízes reais, $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

Que correspondem a duas soluções da equação:

$$y_1 = e^{r_1 t}$$

$$y_2 = e^{r_2 t}$$

As duas soluções são *linearmente independentes* se não for nulo o seu wronskiano, dado por

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Neste caso, temos

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1\, e^{r_1 t} & r_2\, e^{r_2 t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)t}\,(r_2 - r_1),$$

que é não nulo porque $r_1 \neq r_2$.

A solução geral da equação é $y = c_1\, e^{r_1 t} + c_2\, e^{r_2 t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}.)$

<u>Exemplo</u>:

$y'' + 5y' + 4y = 0$

O polinómio característico é $r^2 + 5r + 4 = 0$, que tem como raízes

$r = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2} = -1 \text{ ou } -4$

Temos como soluções

$y_1 = e^{-t}$

e $y_2 = e^{-4t}$.

A solução geral é $y = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{-4t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}.)$

<u>Caso 2</u>: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Neste caso, temos uma raiz real dupla, $r = \dfrac{-b}{2a}$.

Sabemos que $y_1(t) = e^{rt}$ é uma solução da equação.

Precisamos de uma segunda solução (linearmente independente desta) de modo a obtermos a solução geral.

Para isso, usamos o *método de redução de ordem.*

Procuramos y_2 da forma $y_2 = v(t)\, y_1(t)$

e, para obtermos independência linear, v não pode ser constante.

Substituímos y_2 na equação original, e determinamos desse modo v.

Obtemos:

$$\begin{aligned}
a(v\,e^{rt})'' + b(v\,e^{rt})' + c(v\,e^{rt}) &= a(v'\,e^{rt} + rv\,e^{rt})' + b(v'\,e^{rt} + rv\,e^{rt}) + cv\,e^{rt} \\
&= a(v''\,e^{rt} + 2rv'\,e^{rt} + r^2 v\,e^{rt}) + b(v'\,e^{rt} + rv\,e^{rt}) + cv\,e^{rt} \\
&= e^{rt}\,[av'' + (2ar+b)v' + (ar^2+br+c)v] = e^{rt} a v'' = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad v = c_1 t + c_2$

Para que v não seja constante, devemos ter $c_1 \neq 0$. Escolhemos por exemplo $v = t$.

A segunda solução fica então

$y_2(t) = t\, e^{rt}$

O wronskiano das duas soluções é

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{rt} & t\, e^{rt} \\ r\, e^{rt} & e^{rt} + rt\, e^{rt} \end{vmatrix} = e^{rt}\,(e^{rt} + rte^{rt}) - rt\, e^{rt} e^{rt} = e^{2rt},$$

que é não nulo.

Assim, a solução geral é

$y = c_1\, e^{rt} + c_2\, t\, e^{rt} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}.)$

Exemplo:

$y'' - 2y' + y = 0$

O polinómio característico é $r^2 - 2r + 1 = 0$, que tem como raízes

$r = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$ (raiz real dupla)

Temos como soluções

$y_1(t) = e^t$

e $y_2(t) = t\, e^t$.

A solução geral é $y = c_1\, e^t + c_2\, t\, e^t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}.)$

Caso 3: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Há duas raízes complexas $r = \alpha \pm i\beta$,

Teríamos assim soluções $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)t}$ e $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)t}$, mas estas não são soluções reais.

Por linearidade, também são soluções

$y_1(t) = \mathrm{Re}\,[e^{(\alpha+i\beta)t}] = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$

e
$y_2(t) = \mathrm{Im}\,[e^{(\alpha+i\beta)t}] = e^{\alpha t} \mathrm{sen}\,(\beta t)$.

O wronskiano destas soluções é

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\mathrm{sen}(\beta t) \\ \alpha\, e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta\, e^{\alpha t}\mathrm{sen}\,(\beta t) & \alpha\, e^{\alpha t}\mathrm{sen}\,(\beta t) + \beta\, e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\, e^{2\alpha t}\cos(\beta t)\mathrm{sen}\,(\beta t) + \beta\, e^{2\alpha t}\cos^2(\beta t) - \alpha\, e^{2\alpha t}\mathrm{sen}\,(\beta t)\cos(\beta t) + \beta\, e^{2\alpha t}\mathrm{sen}^2\,(\beta t) \\ &= \beta\, e^{2\alpha t} \end{aligned}$$

que é não nulo porque $\beta \neq 0$.

A solução geral da equação é $y = c_1\, e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2\, e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\beta t) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}.)$

Exemplo:

$y'' - 2y' + 2y = 0$

O polinómio característico é $r^2 - 2r + 2 = 0$, que tem como raízes

$r = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

Temos como soluções

$y_1 = e^t \cos t$

e $y_2 = e^t\,\mathrm{sen}\, t$.

A solução geral é $y = c_1\, e^t \cos t + c_2\, e^t\,\mathrm{sen}\, t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}.)$

2 Equações Lineares Homogéneas de Ordem Superior a Dois

São da forma

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0$$

A equação é de ordem n (quando $a_n \neq 0$.)

Para resolver uma equação como esta, precisamos de n soluções linearmente independentes $y_1, \cdots, y_n$.

A solução geral é então

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \quad (c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R})$$

Definimos o wronskiano das n soluções como

$$W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Se $W(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$, as n soluções são linearmente independentes.

Vamos estudar equações de ordem superior a 2 com coeficientes constantes.

<u>Exemplo:</u>

$y^{(iv)} + y''' - 3y'' - y' + 2y = 0$

Se procurarmos como anteriormente soluções de tipo exponencial ($y = e^{rt}$), obtemos o *polinómio característico*:

$r^4 + r^3 - 3r^2 - r + 2 = 0$

Por inspecção, notamos que $r = 1$ é raiz do polinómio, portanto $y_1 = e^t$ é solução da equação.

Se dividirmos o polinómio característico por $r - 1$, obtemos como resultado $r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$.

Este novo polinómio tem também 1 como raiz, e por isso $y_2 = te^t$ é também solução da equação.

Dividindo novamente por $r-1$, obtemos $r^2+3r+2=0$, que tem como raízes $r=-1$ e $r=-2$.

Donde, $y_3 = e^{-t}$ e $y_4 = e^{-2t}$ são outras duas soluções da equação diferencial.

Para ver se as quatro soluções são linearmente independentes, calculamos o seu wronskiano:

$$W(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} & e^{-2t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} & -2e^{-2t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} & 4e^{-2t} \\ e^t & (t+3)e^t & -e^{-t} & -8e^{-2t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-t} \begin{vmatrix} 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & t+1 & -1 & -2 \\ 1 & t+2 & 1 & 4 \\ 1 & t+3 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= e^{-t} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= e^{-t} \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= e^{-t}(-4-28+10-20+12-2+5-2+1) = -28e^{-t} \neq 0$$

As soluções são portanto linearmente independentes, e assim a solução geral da equação é

$$y = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-t} + c_4 e^{-2t}, \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}).$$

<u>Exemplo:</u>

$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

O polinómio característico é $r^3 - 2r^2 + r - 2$, que tem $r = 2$ como raiz.

Obtemos então

$r^3 - 2r^2 + r - 2 = (r-2) \cdot (r^2+1)$.

As três raízes são $r_1 = 2$, $r_2 = i$ e $r_3 = -i$, e temos três soluções dadas por

$y_1 = e^{2t}$, $y_2 = \cos(t)$ e $y_3 = \operatorname{sen}(t)$.

Podemos ver tal como no exemplo anterior que estas soluções têm wronskiano não nulo, e portanto são linearmente independentes. A solução geral é

$y = c_1 e^{2t} + c_2 \cos(t) + c_3 \text{sen}(t)$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Pode acontecer também que haja raízes complexas múltiplas.

Exemplo:

$y^{(iv)} + 2y'' + y = 0$

O polinómio característico é

$r^4 + 2r^2 + 1$,

que pode ser escrito como $(r^2 + 1)^2$,

donde $r = \pm i$ são raízes complexas duplas.

Temos como soluções

$y_1 = \cos t$, $y_2 = \text{sen}\, t$, $y_3 = t \cos t$ e $y_4 = t\, \text{sen}\, t$.

A solução geral é portanto

$y = c_1 \cos t + c_2\, \text{sen}\, t + c_3\, t \cos t + c_4\, t\, \text{sen}\, t, \quad (c_i \in \mathbb{R})$.

Exemplo:

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

tem polinómio característico

$r^3 + 3r^2 + 3r + 1$

Por inspecção, notamos que $r_1 = -1$ é raiz do polinómio.

Temos $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1) \cdot (r^2 + 2r + 1)$

e este último polinómio tem como raízes $r_2 = r_3 = -1$

e portanto o polinómio característico original tem -1 como raiz tripla.

São soluções $y_1 = e^{-t}$, $y_2 = t\, e^{-t}$ e $y_3 = t^2\, e^{-t}$.

A solução geral é $y = c_1 e^{-t} + c_2 t\, e^{-t} + c_3 t^2\, e^{-t}, \quad (c_i \in \mathbb{R})$.

Em geral:

Uma raiz real r de multiplicidade m dá lugar a m soluções linearmente independentes

$y_1 = e^{rt},\ y_2 = t\,e^{rt}, \cdots, y_m = t^{m-1}\,e^{rt}$

Duas raízes complexas conjugadas $\alpha \pm i\beta$ de multiplicidade m dão lugar a $2m$ soluções linearmente independentes

$$y_1 = e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ y_2 = t\,e^{\alpha t}\cos(\beta t), \cdots, y_m = t^{m-1}\,e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

$$y_{m+1} = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t),\ y_{m+2} = t\,e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t), \cdots, y_{2m} = t^{m-1}\,e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

Exemplo:

Uma equação linear homogénea com coeficientes constantes tem três soluções, dadas por

$y_1 = t\,e^t \operatorname{sen} t$, $y_2 = e^{2t}$ e $y_3 = t^3$.

Pergunta-se: qual é a menor ordem possível para a equação? Qual é a sua solução geral? Como é uma equação possível que tenha tal solução geral?

Se a equação tem as soluções dadas, o polinómio característico tem de ter pelo menos

$1 + i$ como raiz dupla $\quad (\Rightarrow 1 - i$ também é raiz dupla)

2 como raiz simples

0 como raiz quádrupla

e a equação tem de ter (pelo menos) as soluções

$t\,e^t \operatorname{sen} t$	e^{2t}	t^3
$t\,e^t \cos t$		t^2
$e^t \operatorname{sen} t$		t
$e^t \cos t$		1

A mínima ordem é 9.

Um polinómio característico é, por exemplo,

$(r - (1+i))^2 (r - (1-i))^2 (r-2)(r-0)^4$

Os coeficientes deste polinómio de grau 9 dão os coeficientes de uma equação possível.

3 Equações Lineares Não Homogéneas de Ordem Dois

Voltemos à equação não homogénea geral

$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$.

Escrevemos esta equação como $L[y] = g(t)$.

Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação não homogénea, temos

$L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = g(t) - g(t) = 0$,

e por isso $y_1 - y_2$ é solução da equação homogénea correspondente.

Donde, se y_p for *uma* solução particular da equação não homogénea e y_h for a solução geral da equação homogénea, temos que

$y = y_p + y_h$ é a solução geral da equação não homogénea.

Exemplo:

$y'' + y = 2e^t$

A equação homogénea correspondente é $y'' + y = 0$.

O polinómio característico desta equação é $r^2 + 1$,

que tem como raízes $r = \pm i$.

A solução geral da homogénea é portanto $y_h = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \quad (c_i \in \mathbb{R})$

Para a equação não homogénea, vemos por inspecção que $y_p = e^t$ é solução.

Logo, todas as soluções da equação são da forma

$y = y_p + y_h = e^t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \quad (c_i \in \mathbb{R})$

Em geral, para resolver

$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$

devemos resolver primeiro $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$
e obter $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

e procurar apenas *uma* solução particular y_p da não homogénea.

Depois, a solução geral da não homogénea é

$y = y_p + y_h = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Para obter um y_p, vamos desenvolver dois métodos:

O *método dos coeficientes indeterminados* é fácil de utilizar, mas serve apenas para equações com coeficientes constantes e para alguns tipos de $g(t)$.

O *método de variação dos parâmetros* (também chamado *método de variação das constantes*) serve para equações sem coeficientes constantes e para todos os tipos de $g(t)$, mas não é em geral fácil de aplicar (conduz a primitivas difíceis ou impossíveis de resolver.)

3.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

Exemplo:

$y'' + y = 2e^t$

A homogénea tem como solução geral $y_h = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$.

Para a solução particular, tentamos adivinhar que tipo pode ter a partir da forma de $g(t)$.

Neste caso, $g(t) = 2e^t$ sugere que procuremos $y_p = Ae^t$. O valor de A obtém-se substituindo na equação original:

$(Ae^t)'' + Ae^t = 2e^t \;\Leftrightarrow\; 2Ae^t = 2e^t \;\Leftrightarrow\; A = 1,$

e por isso $y_p = e^t$.

Em geral, procuramos y_p do mesmo tipo de $g(t)$. Isto funciona para certas funções exponenciais, trigonométricas, e para polinómios.

É preciso ter algum cuidado com as escolhas, como se vê no exemplo seguinte.

Exemplo:

$y'' - y = e^t$

Para a homogénea, fazemos $r^2 - 1 = 0$ e obtemos $r = \pm 1$.

$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \; (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Como $g(t) = e^t$, procuramos, tal como no exemplo anterior, $y_p = Ae^t$.

Mas $(Ae^t)'' - (Ae^t) = 0 \neq e^t$ seja qual for o A.
Ou seja, y_p não pode ser desta forma.

Para evitar este tipo de enganos, podemos usar este método recorrendo a *aniquiladores*.

Exemplo:

$y'' - y = e^t$

A equação homogénea correspondente tem solução geral $y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$ $(c_i \in \mathbb{R})$.

Definindo D como o operador de derivada, escrevemos a equação não homogénea como

$(D^2 - 1)y = e^t$.

Um *aniquilador* para e^t é um operador dado por um polinómio em D que, quando aplicado a e^t, produz uma função nula.

Por exemplo, $D - 1$ aniquila e^t, porque $(D-1)e^t = De^t - e^t = 0$.

Aplicamos este aniquilador aos dois termos da equação não homogénea, e obtemos

$(D-1)(D^2-1)y = (D-1)e^t = 0$

Ou seja, transformamos deste modo a equação original numa equação homogénea de ordem 3, cujo polinómio característico é $(r-1)(r^2-1)$.

A solução geral desta equação é $Ae^t + Be^{-t} + Cte^t$, que deve portanto ser a forma da solução particular y_p que devemos procurar.

Substituimos então esta função na equação original de modo a descobrir os valores de A, B e C.

Não precisamos de considerar os termos que já estejam na solução y_h da equação homogénea, e por isso tomamos apenas $y_p = Cte^t$. Substituindo na equação, vem

$(Cte^t)'' - Cte^t = e^t$

Isto implica $2Ce^t = e^t$, ou seja, $C = 1/2$. Assim, $y_p = \dfrac{1}{2}te^t$.

A solução geral da equação não homogénea é portanto

$y = y_h + y_p = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Procuramos com este método transformar uma equação não homogénea numa equação homogénea de ordem superior de modo a podermos descobrir uma forma possível para y_p.

Exemplo:

$y'' + y = 2e^t$

$\Rightarrow \; (D^2 + 1)y = 2e^t$

$\Rightarrow \; (D - 1)(D^2 + 1)y = 0$

O polinómio característico tem como raízes $r = 1$, $r = i$ e $r = -i$.

As soluções são portanto da forma $Ae^t + B\cos t + C\mathrm{sen}\, t$

Como os dois últimos termos fazem parte da solução da homogénea correspondente, procuramos $y_p = Ae^t$.

Substituímos então y_p na equação original para determinar o valor de A, e obtemos $A = 1$.

O método só funciona para aqueles $g(t)$ de que conhecemos o aniquilador, e que são funções que tenham a mesma natureza das suas derivadas.

Aniquiladores

A tabela seguinte mostra aniquiladores para diversas funções elementares.

$e^{\alpha t}$	$\mapsto$	$D - \alpha$	$(\alpha \in \mathbb{R})$
$t\, e^{\alpha t}$	$\mapsto$	$(D - \alpha)^2$	$(\alpha \in \mathbb{R})$
$t^m\, e^{\alpha t}$	$\mapsto$	$(D - \alpha)^{m+1}$	$(\alpha \in \mathbb{R},\; m \in \mathbb{N})$
$\cos(\beta t)$	$\mapsto$	$D^2 + \beta^2$	$(\beta \in \mathbb{R})$
$\mathrm{sen}\,(\beta t)$	$\mapsto$	$D^2 + \beta^2$	$(\beta \in \mathbb{R})$
$t^m \cos(\beta t)$	$\mapsto$	$(D^2 + \beta^2)^{m+1}$	$(\beta \in \mathbb{R},\; m \in \mathbb{N})$
$t^m\, \mathrm{sen}\,(\beta t)$	$\mapsto$	$(D^2 + \beta^2)^{m+1}$	$(\beta \in \mathbb{R},\; m \in \mathbb{N})$
$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$\mapsto$	$(D - \alpha)^2 + \beta^2$	$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
$e^{\alpha t}\, \mathrm{sen}\,(\beta t)$	$\mapsto$	$(D - \alpha)^2 + \beta^2$	$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
$t^m\, e^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$\mapsto$	$[(D - \alpha)^2 + \beta^2]^{m+1}$	$(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\; m \in \mathbb{N})$
$t^m\, e^{\alpha t}\, \mathrm{sen}\,(\beta t)$	$\mapsto$	$[(D - \alpha)^2 + \beta^2]^{m+1}$	$(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\; m \in \mathbb{N})$

Note-se que todos as aniquiladores desta lista são casos particulares dos dois últimos. No entanto, usando esse último aniquilador, a ordem da derivada obtida pode ser superior ao realmente necessário.

Por exemplo:

$e^{\alpha t} = t^m\, e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ (com $m = 0$ e $\beta = 0$) teria como aniquilador $[(D-\alpha)^2 + 0]^1$, mas já vimos que para aniquilar $e^{\alpha t}$ é suficiente apenas $D - \alpha$.

Exemplo:

$y'' + y = \cos t$

Homogénea: $y_h = c_1 \cos t + c_2 \text{sen}\, t$.

Não Homogénea:

$(D^2+1)y = \cos t$

$\Rightarrow\ (D^2+1)^2 y = 0$

Há duas raízes complexas duplas: $r = \pm i$

As soluções são da forma $A\cos t + B\text{sen}\, t + Ct\cos t + Dt\text{sen}\, t$, mas para a não homogénea tomamos apenas $y_p = Ct\cos t + Dt\text{sen}\, t$.

Substituindo na equação:

$y_p' = C\cos t - Ct\text{sen}\, t + D\text{sen}\, t + Dt\cos t$

$y_p'' = -C\text{sen}\, t - C\text{sen}\, t - Ct\cos t + D\cos t + D\cos t - Dt\text{sen}\, t$

$\Rightarrow\ y_p'' + y_p = -2C\text{sen}\, t + 2D\cos t = \cos t$

$\Rightarrow\ C = 0,\ D = 1/2$

$y_p = \dfrac{1}{2}\, t\, \text{sen}\, t$

$\Rightarrow\ y = c_1\cos t + c_2\text{sen}\, t + \dfrac{1}{2}\, t\, \text{sen}\, t, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Exemplo:

$y'' - y = t + 1$

Homogénea: $y_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

Não homogénea:

$(D^2 - 1)y = t + 1$

$\Rightarrow\ D^2(D^2-1)y = 0$

$\Rightarrow \; y_p = A + Bt + Ce^t + De^{-t}$

Ignoramos os dois últimos termos e, substituindo na equação original, obtemos

$y_p'' - y_p = -A - Bt = t + 1 \quad \Rightarrow \quad A = B = -1$

$\Rightarrow \; y_p = -1 - t$

$\Rightarrow \; y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t - 1$

Exemplo:

$y'' - 2y' + y = e^t + t\cos t + t^2$

$\Rightarrow \; y_h = c_1 e^t + c_2 t e^t$

$\Rightarrow \; (D^2 - 2D + 1)y = e^t + t\cos t + t^2$

$\Rightarrow \; D^3(D^2+1)^2(D-1)(D^2 - 2D + 1)y = 0$

As raízes são: $r = 0$ (tripla), $r = \pm i$ (duplas) e $r = 1$ (tripla), donde

$y_p = Ae^t + Bte^t + Ct^2e^t + D + Et + Ft^2 + G\cos t + H\operatorname{sen} t + It\cos t + Jt\operatorname{sen} t$

Em seguida devemos substituir este y_p na equação original (ignorando os dois primeiros termos, que já estão na solução da homogénea) de modo a descobrir o valor de cada uma das constantes.

3.2 Método de Variação dos Parâmetros

Este é um método mais geral do que o anterior, porque permite obter uma solução particular y_p mesmo quando a equação dada não tem coeficientes constantes, ou quando não existe aniquilador para $g(t)$.

Dada a equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$,

a equação homogénea correspondente tem solução $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ (onde y_1 e y_2 são linearmente independentes.)

Com este método, procuramos y_p da forma

$y_p = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2,$

onde u_1 e u_2 são funções a determinar (que não podem ser ambas constantes, caso contrário nada de novo se acrescenta à solução já conhecida para a homogénea.)

Temos duas incógnitas mas apenas uma equação, donde há alguma liberdade na escolha de u_1 e u_2.

Obtemos

$$y_p' = u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_1y_1' + u_2y_2'.$$

Postulamos então como segunda equação $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$. Deste modo, ao fazer a segunda derivada y_p'', não aparecerão derivadas de u_1 e u_2 de ordem superior à primeira.

Temos

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''.$$

Substituímos estas derivadas na equação original para completarmos o sistema para u_1' e u_2', que é depois resolvido.

<u>Exemplo</u>:

$$y'' + y = \operatorname{tg} t$$

Note-se que, para este $g(t)$, não existe aniquilador, donde o método dos coeficientes indeterminados não pode ser aplicado aqui.

A solução da homogénea é $y_h = c_1\cos t + c_2 \operatorname{sen} t$

Para a não homogénea, procuramos $y_p = u_1\cos t + u_2\operatorname{sen} t$.
$\Rightarrow \ y_p' = u_1'\cos t + u_2'\operatorname{sen} t - u_1\operatorname{sen} t + u_2\cos t$

Declaramos $\boxed{u_1'\cos t + u_2'\operatorname{sen} t = 0}$ (que se torna então a primeira equação do sistema a resolver.)

$\Rightarrow \ y_p'' = -u_1'\operatorname{sen} t - u_1\cos t + u_2'\cos t - u_2\operatorname{sen} t$

e, substituindo na equação original, vem

$$y_p'' + y_p = -u_1'\operatorname{sen} t + u_2'\cos t = \operatorname{tg} t$$

(Note-se que os termos com u_1 e u_2 se cancelam.)

Obtivemos assim o sistema

$$\begin{cases} u_1'\cos t + u_2'\operatorname{sen} t = 0 \\ \\ -u_1'\operatorname{sen} t + u_2'\cos t = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$$

Este sistema tem solução única porque o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Este determinante é de facto $W(y_1, y_2)$, e estas soluções são linearmente independentes.

Pela regra de Cramer, obtemos

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{tg} t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix}} = -\operatorname{tg} t \operatorname{sen} t$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \operatorname{tg} t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix}} = \operatorname{tg} t \cos t = \operatorname{sen} t$$

$\Rightarrow \; u_2 = \int \operatorname{sen} t \, \mathrm{dt} = -\cos t$ (por exemplo)

e $u_1 = -\displaystyle\int \operatorname{tg} t \operatorname{sen} t \mathrm{dt} = \int \frac{-\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \mathrm{dt} = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} \mathrm{dt} = \operatorname{sen} t - \int \frac{1}{\cos t} \, \mathrm{dt}$
$= \operatorname{sen} t - \log|\sec t + \operatorname{tg} t|$ (por exemplo).

Temos então

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 \cos t + u_2 \operatorname{sen} t \\ &= (\operatorname{sen} t - \log|\sec t + \operatorname{tg} t|) \cdot \cos t - \cos t \operatorname{sen} t \\ &= -\log|\sec t + \operatorname{tg} t| \cdot \cos t \end{aligned}$$

A solução final fica

$y = y_h + y_p = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \log|\sec t + \operatorname{tg} t| \cdot \cos t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Voltando ao caso geral:

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$\Rightarrow \; y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$ (porque pomos $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$)

$\Rightarrow \; y_p'' = u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_1 y_1'' + u_2 y_2''$

Substituindo na equação:

$$\begin{aligned} y_p'' + p(t) y_p' + q(t) y_p &= u_1 \left(y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1\right) + u_2 \left(y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2\right) + u_1' y_1' + u_2' y_2' \\ &= u_1' y_1' + u_2' y_2' \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Obtemos assim o sistema

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t) \end{cases}$$

Ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Como y_1 e y_2 são linearmente independentes, o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo, e o sistema tem solução (única).

Ficamos com

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(t) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 \ g}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 \ g}{W(y_1, y_2)}$$

Donde:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2 \ g}{W(y_1, y_2)} \,\mathrm{dt}$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1 \ g}{W(y_1, y_2)} \,\mathrm{dt}$$

e $y_p = -y_1 \displaystyle\int \frac{y_2 \ g}{W(y_1, y_2)} \,\mathrm{dt} + y_2 \int \frac{y_1 \ g}{W(y_1, y_2)} \,\mathrm{dt}$,

com $y = y_h + y_p$.

4 Método de Redução de Ordem

Voltamos às equações de segunda ordem homogéneas genéricas

$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$

Só sabemos resolver estas equações quando os seus coeficientes forem constantes.

Para o caso geral, e supondo que uma solução y_1 é conhecida, o método de redução de ordem permite descobrir uma segunda solução que seja linearmente independente de y_1.

Escrevemos $y_2(t) = v(t)y_1(t)$, e substituimos esta função na equação diferencial de modo a descobrir $v(t)$. Para termos independência linear, devemos obter v não constante.

Exemplo:

$(1 + t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$

Seja dada $y_1 = t$ (que, como se pode ver substituindo na equação, é solução.)

Pomos $y_2 = vy_1 = vt$

e obtemos $y_2' = v't + v$

e $y_2'' = v''t + 2v'$.

Ou seja:

$$\begin{aligned}(1 + t^2)y_2'' - 2ty_2' + 2y_2 &= (1 + t^2)(v''t + 2v') - 2t(v't + v) + 2vt \\ &= (1 + t^2)tv'' + 2v' = 0\end{aligned}$$

Note-se que os termos com v na equação se cancelam (isto sucede porque y_1 é solução da equação.)

A equação obtida é de segunda ordem em v mas, como só aparecem nela termos com v' e com v'', podemos considerá-la de primeira ordem em v'.

Definimos $u = v'$, e obtemos então

$(1 + t^2)tu' + 2u = 0$

$$\Rightarrow \frac{u'}{u} = -\frac{2}{(1 + t^2)\,t} = \frac{2t}{1 + t^2} - \frac{2}{t}$$

$$\Rightarrow \log|u| = \log|1 + t^2| - 2\log|t| + c$$

$$\Rightarrow u = k\,\frac{1 + t^2}{t^2}$$

Escolhemos por exemplo $u = \dfrac{1+t^2}{t^2} = \dfrac{1}{t^2} + 1$

Obtemos então

$$v = \int u \, \mathrm{dt} = -\frac{1}{t} + t$$

$$\Rightarrow \; y_2 = vt = -1 + t^2$$

Se a equação fosse não homogénea, usaríamos agora o método de variação dos parâmetros para determinar um y_p. Note-se que, neste exemplo, não poderíamos usar o método dos coeficientes indeterminados, porque a equação não é de coeficientes constantes.

Deduzimos em seguida o resultado da aplicação do método de redução de ordem a um caso geral.

Seja então dada a equação

$$y'' + p(t)y' + q(t) = 0$$

e suponhamos que y_1 é uma solução.

Procuramos uma segunda solução, linearmente independente da primeira, da forma

$$y_2(t) = v(t)\, y_1(t)$$

As suas derivadas são

$$y_2'(t) = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

e $y_2''(t) = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t)$.

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 \\ &= [v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''] + p[v'y_1 + vy_1'] + q[vy_1] \\ &= y_1v'' + [2y_1' + py_1]v' + [y_1'' + py_1' + qy_1]v \\ &= y_1v'' + [2y_1' + py_1]v' \end{aligned}$$

A última igualdade é verdadeira porque y_1 é solução da equação.

Obtemos então uma equação de segunda ordem em v. Como só estão presentes termos em v'' e em v' (e não em v), podemos, pondo $u = v'$, considerar que a equação é de primeira ordem em u. Esta é a razão de ser do nome do método.

Obtemos:

$y_1 u' + [2y_1' + py_1]u = 0,$

que é uma equação linear homogénea, tendo portanto solução

$$u = e^{-\int \frac{2y_1' + py_1}{y_1}\mathrm{dt}} = e^{-\int \frac{2y_1'}{y_1}\mathrm{dt}} e^{-\int p(t)\mathrm{dt}} = \frac{1}{y^2}\, e^{-\int p(t)\mathrm{dt}}$$

Portanto,

$$v = \int u\,\mathrm{dt} = \int \frac{1}{y^2}\, e^{-\int p(t)\mathrm{dt}}\mathrm{dt}$$

e $y_2 = vy_1$