Equações de 2^{a} ordem lineares não-homogéneas

Consideremos as equações diferenciais lineares não-homogéneas

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \qquad (\dagger)$$

onde $a_1(t)$, $a_0(t)$ e $b(t)$ são uma funções contínuas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Revisão da Álgebra Linear: A equivalência, através do operador linear

$$L[y] = y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y$$

à equação $L[y] = b$ permite escrever a solução de (†) como

$$y = y_h + y_p$$

onde $L[y_h] = 0$, i. e. y_h é uma solução da equação homogénea
e $L[y_p] = b$, i. e. y_p é uma solução particular da equação não-homogénea (†).

Método dos coeficientes indeterminados (MCI)

Considere-se a equação diferencial linear com coeficientes a_1 e a_0 constantes:

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(t) \quad \Leftrightarrow \quad p(D)y = b$$

onde p é o polinómio caracteristico da equação homogénea associada.

Limitações do MCI: Assume-se que $b(t)$ é uma combinação linear das funções

$$t^k e^{rt} \cos(st), \qquad t^k e^{rt} \operatorname{sen}(st), \qquad \text{com } k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } r, s \in \mathbb{R}.$$

e não se aplica ao caso de coeficientes variáveis.

Passo 1: Reconhecer que $b(t)$ é solução de outra equação homogénea

$$q(D)b = 0$$

onde $q(\lambda)$ diz-se o polinómio aniquilador de $b(t)$.

Tabela de aniquiladores

Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$:

$$q(D) = (D-r) \quad \longleftrightarrow \quad e^{rt}$$

$$q(D) = (D-r)^2 \quad \longleftrightarrow \quad e^{rt},\ te^{rt}$$

$$\vdots$$

$$q(D) = (D-r)^{k+1} \quad \longleftrightarrow \quad e^{rt},\ te^{rt},\ \dots\ ,t^k e^{rt}$$

$$q(D) = (D-r)^2 + s^2 \quad \longleftrightarrow \quad e^{rt}\cos(st),\quad e^{rt}\operatorname{sen}(st)$$

$$q(D) = \left((D-r)^2 + s^2\right)^2 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{cc} e^{rt}\cos(st), & e^{rt}\operatorname{sen}(st), \\ te^{rt}\cos(st), & te^{rt}\operatorname{sen}(st) \end{array}$$

$$\vdots$$

$$q(D) = \left((D-r)^2 + s^2\right)^{k+1} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{cc} e^{rt}\cos(st), & e^{rt}\operatorname{sen}(st), \\ te^{rt}\cos(st), & te^{rt}\operatorname{sen}(st), \\ \vdots & \vdots \\ t^k e^{rt}\cos(st), & t^k e^{rt}\operatorname{sen}(st) \end{array}$$

Passo 2: Obter a solução geral da equação homogénea

$$q(D)p(D)y = 0.$$

Passo 3: Do conjunto das soluções encontradas no passo anterior, obter por substituição directa na equação original

$$p(D)y = b$$

uma solução particular $y_p(t)$.

Passo 4: Concluir com a solução geral da equação original

$$y = y_h + y_p$$

onde y_h é a solução geral da equação homogénea associada, i. e.

$$p(D)y_h = 0$$

Exemplo

Calcule a solução geral da equação $y'' - 3y' + 2y = e^t$

Exemplo

Calcule a solução geral da equação $(D^2 + 1)y = t + e^t$

Método de variação dos parâmetros

Proposição (fórmula de variação dos parâmetros)

A solução geral da equação

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t)$$

onde $a_1(t)$, $a_0(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas, é dada por

$$y(t) = C_1\, y_1(t) + C_2\, y_2(t) + c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$$

onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada, C_1 e C_2 são constantes reais e

$$c_1(t) = -\int \frac{y_2(t) b(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

$$c_2(t) = \int \frac{y_1(t) b(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$

Exemplo

Resolva o PVI: $y'' - 2t^{-2}y = \log t, \quad y(1) = y'(1) = 1.$

Exemplo

Determine a solução geral da equação $\underbrace{y'' + 2y' + y}_{\text{constantes}} = \dfrac{e^{-t}}{t}$

ñ tem aniquilador