INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1
1.º TESTE

#A

LEE ∞ LEGI ∞ LEIC-T ∞ LERC 14|04|2012 09:00–11:30

Esta prova tem a duração de 1h30m.*

Questão 1. — Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |1 - x| \leq 1/x\}$.

1.1 Mostre que $A =]0, (1 + \sqrt{5})/2]$.

1.2 Indique o conjunto dos majorantes de A e o conjunto dos minorantes de A. Indique ainda, caso existam, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$.

Questão 2. — Prove, recorrendo ao princípio de indução matemática, que para todo o $n \geq 1$ se tem $\sum_{k=1}^{n}(k + 1)2^k = n2^{n+1}$.

Questão 3. — Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas,

3.1 Se (a_n) e (b_n) são sucessões tais que (a_n) é limitada e $(b_n) \to 0$ então, $(a_n b_n) \to 0$.

3.2 Se (a_n) é uma sucessão de termos positivos e $(a_{n+1}/a_n) \to \sqrt{2}$ então $(a_n) \to +\infty$

Questão 4. — Considere a sucessão (a_n) definida por recursão através de:

$$a_0 = 3; \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{(para qualquer } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

4.1 Mostre que (a_n) é monótona decrescente.

4.2 Sabendo que $a_n > 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

Questão 5. — Para cada uma das sucessões seguintes indique se existe limite e, em caso afirmativo, qual (não apresente os cálculos):

$$\text{(a)} \quad x_n = \frac{n + \arctan n}{2n - 1} \qquad \text{(b)} \quad y_n = \left(\frac{3n + 2}{3n - 1}\right)^{n/2} \qquad \text{(c)} \quad z_n = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n + 1}}$$

Questão 6. — Indique se existem e, em caso afirmativo, quais os seguintes limites (não apresente os cálculos):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}.$$

Questão 7. — Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para valores de $x \neq 0$ é definida através da identidade: $f(x) = (\ln(1 + x^2))/x$.

7.1 Mostre que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7.2 Sabendo que f é contínua em $x = 0$ calcule $f(0)$.

Questão 8. — Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida de acordo com o seguinte: $f(x) = x$ se $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1/x$ se $x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Indique, justificando, dois elementos $a, b \in [0, 1]$ tais que f é contínua em a e descontínua em b.

---

*Cotações: 1.1[0.5], 1.2[0.5]; 2[1.0]; 3.1[0.5], 3.2[0.5]; 4.1[0.5], 4.2[0.5]; 5(a)[0.5], 5(b)[0.5], 5(c)[0.5]; 6(a)[0.5], 6(b)[0.5], 6(d)[0.5]; 7.1[1.0], 7.2[1.0]; 8[1.0].