CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

1 Introdução

Os sistemas que estudaremos em seguida são da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\,x_1 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n + g_1(t) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)\,x_1 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Temos n equações e n variáveis $x_1, \cdots, x_n$.

O sistema pode ser posto na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \cdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \cdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

ou

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x} + \vec{g}$$

onde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \cdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$.

Vamos lidar só com o caso de coeficientes constantes, e primeiro apenas com o caso homogéneo:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x}.$$

2 Caso Homogéneo

O espaço de soluções do sistema tem dimensão n, e por isso precisamos de n soluções (vectoriais) linearmente independentes.

Procuramos, como anteriormente, soluções de tipo exponencial

$\vec{x} = e^{\lambda\, t}\, \vec{v}$, com $\vec{v}$ constante.

Para que um $\vec{x}$ deste tipo seja solução, devemos ter

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \lambda\, e^{\lambda\, t}\, \vec{v} = A\, e^{\lambda\, t}\, \vec{v}$$

$$\Rightarrow \;\; A\, \vec{v} = \lambda\, \vec{v},$$

donde λ é valor próprio de A e $\vec{v}$ é vector próprio associado a λ.

<u>Exemplo</u>:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Procuremos os valores próprios e os vectores próprios desta matriz A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (1-\lambda)\,(\lambda-3)\,(\lambda+2)$$

Os valores próprios são portanto $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -2$.

Para descobrir os vectores próprios associados a $\lambda_1 = 1$, resolvemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por eliminação de Gauss, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sistema original é portanto equivalente a

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são da forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 4z \\ z \end{pmatrix}$,

e um gerador para este espaço de soluções é o vector próprio $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Uma solução para o sistema de equações diferenciais original é portanto

$$\vec{x_1} = e^{\lambda_1 t}\, \vec{v_1} = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ao qual aplicamos eliminação de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -5/3 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sistema original é equivalente a

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

As soluções deste sistema são da forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$,

e um gerador para este espaço de soluções é o vector próprio $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Uma segunda solução para o sistema de equações diferenciais é

$$\vec{x_2} = e^{\lambda_2 t}\,\vec{v_2} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = -2$, temos

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5/2 & 5/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As soluções deste sistema são da forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$,

e um gerador para este espaço de soluções é o vector próprio $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Uma terceira solução para o sistema de equações diferenciais é

$$\vec{x_3} = e^{\lambda_3 t}\,\vec{v_3} = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A solução geral do sistema de equações diferenciais é dada pela combinação linear das três soluções obtidas:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= c_1\,\vec{x_1} + c_2\,\vec{x_2} + c_3\,\vec{x_3} \\ &= c_1\,e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\,e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Se houver valores próprios complexos $\lambda = \alpha \pm \beta i$ com vectores próprios dados por $\vec{v} = \vec{v_1} \pm i\vec{v_2}$, obtemos duas soluções tirando a parte real e a parte imaginária de $e^{\lambda t}\,\vec{v}$:

$$e^{\lambda t}\,\vec{v} = e^{(\alpha+\beta i)t}\,[\vec{v_1} + i\vec{v_2}]$$

$$= (e^{\alpha t}\cos(\beta t) + i\,e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t))\,(\vec{v_1} + i\vec{v_2})$$

$$= [e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\vec{v_1} - e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\,\vec{v_2}] + i\,[e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\vec{v_2} + e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\,\vec{v_1}]$$

$\Rightarrow$ Há duas soluções

$\vec{x_1} = e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\vec{v_1} - e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\,\vec{v_2}$

e $\quad \vec{x_2} = e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\vec{v_2} + e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\,\vec{v_1}$

Se houver raízes múltiplas, podemos não conseguir arranjar n vectores próprios linearmente independentes (ou seja, a matriz original pode não ser diagonalizável), e podemos portanto também não conseguir arranjar n soluções linearmente independentes que sejam da forma exponencial anterior.

<u>Exemplo</u>:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

O polinómio característico é dado por

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Para $\lambda = 2$, obtemos

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e os vectores próprios são da forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, com $z \in \mathbb{R}$.

Um exemplo é $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e uma solução para o sistema é então

$$\vec{x_1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 1$ (que é raiz dupla do polinómio característico), obtemos

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Os vectores próprios são da forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e um exemplo é $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Uma segunda solução para o sistema é dada por $\vec{x_2} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Não pode haver mais soluções da forma exponencial anterior que sejam linearmente independentes de $\vec{x_1}$ e $\vec{x_2}$. Isto acontece porque não existe neste caso uma base para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios.

A *multiplicidade algébrica* de $\lambda = 2$ é 1, porque 2 é uma raiz simples do polinómio característico. A sua *multiplicidade geométrica* (que é o número de vectores próprios linearmente independentes associados a eesa raiz, ou seja, a dimensão do espaço próprio para esse λ) é 1.

Para $\lambda = 1$, a multiplicidade algébrica é 2 (porque 1 é raiz dupla do polinómio), mas a multiplicidade geométrica é 1, já que apenas obtivemos um vector próprio (linearmente independente) associado a $\lambda = 1$.

Para qualquer valor próprio λ temos sempre

$$1 \leq \text{mult.geom.}\,(\lambda) \leq \text{mult.alg.}\,(\lambda)$$

A soma das multiplicidades geométricas (para todos os valores próprios) vai dar o máximo número de vectores próprios linearmente independentes que é possível encontrar, e também o número de soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais. Cada valor próprio produz garantidamente uma destas soluções.

Se, para cada λ, a multiplicidade geométrica for máxima (ou seja, igual à correspondente multiplicidade algébrica), então existe uma base de $\mathbb{R}^n$ formada só por vectores próprios (aqui, n é o grau do polinómio característico), e n soluções linearmente independentes. Diz-se neste caso que a matriz é *diagonalizável.* Note-se que, se todos os valores próprios de uma matriz forem raízes simples do seu polinómio característico, ela é necessariamente diagonalizável.

Neste exemplo, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é 1, por isso precisamos de descobrir uma terceira solução, linearmente independente de $\vec{x_1}$ e $\vec{x_2}$, para podermos completar a solução geral do sistema.

Esta solução não pode pois ser da forma $e^{\lambda t}\,\vec{v}$.

Como para as equações anteriormente vistas, tentamos uma terceira solução $\vec{y}$ da forma $\vec{y} = t\;\vec{x_2} = t\,e^t\,\vec{v_2}$. Isto implica:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = e^t\,\vec{v_2} + t\,e^t\,\vec{v_2}$$

e $\quad A\vec{y} = A\,t\,e^t\,\vec{v_2} = t\,e^t\,\vec{v_2}$.

Concluimos que não pode haver solução desta forma.

Tentemos $\vec{y} = t\vec{x_2} + e^t\vec{w}$, para algum $\vec{w}$. Fica:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{x_2} + t\,e^t\,\vec{v_2} + e^t\vec{w} = e^t\vec{v_2} + t\,e^t\,\vec{v_2} + e^t\vec{w}$$

e $\quad A\vec{y} = At\vec{x_2} + Ae^t\vec{w} = t\vec{x_2} + e^tA\vec{w} = te^t\vec{v_2} + e^tA\vec{w}$.

Ou seja, para termos uma solução $\vec{y}$ da forma dada, $\vec{w}$ deve satisfazer

$A\vec{w} - \vec{w} = \vec{v_2}$ ou, equivalentemente, $(A - I)\,\vec{w} = \vec{v_2}$.

Resolvemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As soluções deste sistema são da forma $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$.

Uma possibilidade para $\vec{w}$ é portanto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Este $\vec{w}$ é chamado *vector próprio generalizado.*

Uma terceira solução para o sistema é $\vec{x_3} = t\vec{x_2} + e^t\vec{w} = te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e a solução geral é $\vec{x} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + c_3\vec{x_3}$, $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.)$

Em geral:

Se λ é valor próprio de multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1,

temos um vector próprio $\vec{v}$ (obtido a partir de $(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$), e uma solução $\vec{x_1} = e^{\lambda t}\vec{v}$

e um vector próprio generalizado $\vec{w}$ (obtido a partir de $(A - \lambda I)\,\vec{w} = \vec{v}$), com solução associada $\vec{x_2} = te^{\lambda t}\vec{v} + e^{\lambda t}\vec{w}$.

Equivalentemente, devemos resolver

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0} \\ (A - \lambda I)^2\,\vec{w} = \vec{0} \quad (\text{com } (A - \lambda I)\,\vec{w} \neq \vec{0}) \end{cases}$$

No exemplo anterior:

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ produz } \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ e retiramos } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ produz } \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

e tomamos por exemplo $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Note-se que, aqui, não podemos escolher $y = 0$ (porque senão $\vec{w}$ seria um vector próprio, e não um vector próprio generalizado.)

Com maior generalidade:

Se λ tiver multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1, começamos por obter um vector próprio $\vec{v}$ (resolvendo $(A-\lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}$) e uma primeira solução $\vec{x_1} = e^{\lambda t}\vec{v}$.

A seguir resolvemos $(A - \lambda I)^2\,\vec{w} = \vec{0}$ (com $(A - \lambda I)\,\vec{w} \neq \vec{0}$). Isto pode dar dois vectores $\vec{w_1}$ e $\vec{w_2}$, ou apenas um.

Se der dois vectores, obtemos mais duas soluções:

$\vec{x_2} = te^{\lambda t}\vec{v} + e^{\lambda t}\vec{w_1}$ e $\vec{x_3} = te^{\lambda t}\vec{v} + e^{\lambda t}\vec{w_2}$.

Se der apenas um ($\vec{w}$), resolvemos $(A-\lambda I)^3\vec{z}=\vec{0}$ (com $(A-\lambda I)^2\,\vec{z}\neq\vec{0}$.) As duas soluções adicionais são neste caso

$$\vec{x_2}=te^{\lambda t}\vec{v}+e^{\lambda t}\vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{x_3}=\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\vec{v}+te^{\lambda t}\vec{w}+e^{\lambda t}\vec{z}.$$

Isto pode ser generalizado a multiplicidades algébricas e geométricas de ordem superior.

3 Exponencial de Matrizes

Há uma outra maneira de descobrir a solução para os sistemas de equações diferenciais lineares como os anteriores: usando a *exponencial de matrizes*.

Para números reais (ou complexos) definimos $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, e esta série converge sempre.

Por analogia, definimos $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ para qualquer matriz quadrada A. Esta série converge sempre, tal como a série exponencial para escalares.

Se A for uma matriz n por n, e^A também será uma matriz n por n.

Exemplos:

Se A for a matriz nula (0), obtemos $e^A = e^{(0)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(0)^k}{k!} = I$

Pode ver-se que isto implica que, para qualquer matriz quadrada A, se tem

$\left[e^A\right]^{-1} = e^{-A}$.

Se $A = I$, a matriz identidade, obtemos

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & e \end{pmatrix} = e\, I$$

Para $t \in \mathbb{R}$ e uma matriz quadrada A, definimos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

Exemplos:

Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, com todos os λ_i diferentes, temos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & (\lambda_n t)^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Se $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}^k = *$$

$$\begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda t)^2 & 2t(\lambda t) \\ 0 & (\lambda t)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} (\lambda t)^2 & 2t(\lambda t) \\ 0 & (\lambda t)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda t)^3 & 3t(\lambda t)^2 \\ 0 & (\lambda t)^3 \end{pmatrix}$$

Podemos ver (por exemplo, por indução) que, para $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (\lambda t)^n & nt(\lambda t)^{n-1} \\ 0 & (\lambda t)^n \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$* = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kt \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k!} \\ & \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Para $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, temos $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}\, e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

e, em geral, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$ tem associada a exponencial

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} & \cdots & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} & \cdots & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\, e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\, e^{\lambda t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t\, e^{t} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Se A for uma matriz quadrada, a exponencial de At verifica

$$\frac{d\, e^{At}}{dt} = \frac{d}{dt} \Big[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} \Big] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\, A^k\, t^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1}\, t^{k-1}}{(k-1)!} = A\, e^{At}$$

(Podemos derivar a série termo a termo porque o seu raio de convergência em torno de 0 é infinito).

Donde, $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ tem solução $\vec{x} = e^{At}\,\vec{v}$, para $\vec{v}$ constante.

(Podemos comparar com o caso real: $\dfrac{dx}{dt} = ax$ tem solução real $x = ce^{at}$, para c constante).

Nota: As colunas de e^{At} dão soluções (linearmente independentes) do sistema.

Por exemplo, a primeira coluna é dada por $e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que é solução do sistema.

Se tivermos uma condição inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$, podemos retirar o valor da constante $\vec{v}$:

$\vec{x} = e^{At}\,\vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{x_0} = e^{At_0}\,\vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{v} = e^{-At_0}\,\vec{x_0}$

e portanto $\vec{x} = e^{A\,(t-t_0)}\,\vec{x_0}$.

Esta solução pode também ser comparada ao que acontece para o caso real.

Se S for uma matriz invertível,

$$e^{S^{-1}\,A\,S} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left[S^{-1}AS\right]^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left[S^{-1}A^kS\right] = S^{-1}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,A^k\right]S = S^{-1}e^{A}S$$

Se A é diagonalizável, então existe uma matriz Λ tal que $S^{-1}AS = \Lambda$ para certa matriz S.

Donde, $A = S\Lambda S^{-1}$ e $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$.

A matriz S é uma matriz de mudança de base, cujas colunas são vectores próprios.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

O polinómio característico é $(2-\lambda)((2-\lambda)^2-1)$, que tem como raízes $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$.

Para $\lambda_1 = 1$, obtemos $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Os vectores próprios são da forma $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$, e obtemos $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 2$, obtemos $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Os vectores próprios são da forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, e obtemos $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_3 = 3$, temos $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Os vectores próprios são da forma $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, e obtemos $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Há três vectores próprios linearmente independentes, logo a matriz é diagonalizável. Note-se que, como há três valores próprios diferentes, poderíamos ter concluído logo de início que a matriz seria diagonalizável.

Portanto, existem Λ diagonal e S invertível tal que $A = S\Lambda S^{-1}$. A matriz Λ tem na diagonal principal os valores próprios de A, e S tem em colunas os seus vectores próprios (dados pela mesma ordem em que aparecem em Λ.) Ou seja,

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

e portanto

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t}+e^t}{2} & \dfrac{e^{3t}-e^t}{2} & 0 \\ \dfrac{e^{3t}-e^t}{2} & \dfrac{e^{3t}+e^t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

A solução do sistema $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ é $\vec{x} = e^{At}\,\vec{v}$, com $\vec{v}$ constante. As colunas de e^{At} dão três soluções linearmente independentes para o sistema.

Note-se que os blocos da matriz original A correspondem a blocos na matriz exponencial (e esses novos blocos são a exponencial dos blocos originais.)

Pode haver valores próprios múltiplos e, mesmo assim, a matriz ser diagonalizável.

<u>Exemplo</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

O polinómio característico é $(2-\lambda)[(\lambda-1)^2-1]$, que tem como raízes $\lambda = 0$ (simples) e $\lambda = 2$ (dupla).

Para $\lambda = 0$, obtemos $x + y = 0$ e $z = 0$, e portanto os vectores próprios são da forma $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$. Tomamos $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 2$, obtemos $A-2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Isto corresponde apenas à equação $x = y$. Os vectores próprios são pois da forma $\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}$. Como há nesta expressão dois graus de liberdade, podemos escolher dois vectores próprios linearmente independentes associados a $\lambda = 2$: por exemplo, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como há três vectores próprios linearmente independentes, a matriz é diagonalizável, e temos assim

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

donde

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{2t}+1}{2} & \dfrac{e^{2t}-1}{2} & 0 \\ \dfrac{e^{2t}-1}{2} & \dfrac{e^{2t}+1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

E se a matriz não for diagonalizável?

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios são $\lambda_1 = 2$ (simples) e $\lambda_2 = 1$ (duplo).

Para $\lambda_1 = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como só há dois vectores próprios linearmente independentes, a matriz não é diagonalizável. Podemos tentar fazê-la "o mais diagonal possível", ou seja, tentar arranjar S de modo a que $S^{-1}AS$ seja "quase diagonal".

Procuramos os vectores próprios generalizados:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Os vectores próprios generalizados são da forma $\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, e tomamos $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Na base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{w}\}$, a transformação associada a A é representada por

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Isto sucede porque

$$\begin{cases} A\,\vec{v_1} = 2\,\vec{v_1} \\ A\,\vec{v_2} = \vec{v_2} \\ A\,\vec{w} = \vec{v_2} + \vec{w} \end{cases}$$

Donde,

$$A = SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \; e^{At} = S\, e^{Jt}\, S^{-1} \; \Rightarrow \; \vec{x}(t) = e^{At}\,\vec{v}$$

Para calcular a exponencial de Jt, trabalhamos bloco a bloco:

$$e^{Jt} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & t\,e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$

Usámos aqui o cálculo feito anteriormente para matrizes da forma $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

A matriz A é *semelhante* à matriz J. J é a *forma canónica de Jordan* para A. Quando A é diagonalizável, $J = \Lambda$ é uma matriz diagonal.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A matriz tem como valor próprio $\lambda = 2$ (triplo).

Para os vectores próprios:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A matriz não é diagonalizável, e precisamos de dois vectores adicionais para completar uma base para $\mathbb{R}^3$.

Resolvemos primeiro $(A - 2I)\,\vec{w} = \vec{v}$, e obtemos $\vec{w_1}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos depois $(A - 2I)\,\vec{w} = \vec{w_1}$, e obtemos $\vec{w_2}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{cases} A\,\vec{v} = 2\,\vec{v} \\ A\,\vec{w_1} = \vec{v} + 2\,\vec{w_1} \\ A\,\vec{w_2} = \vec{w_1} + 2\,\vec{w_2} \end{cases}$$

na base $\{\vec{v}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ a transformação associada a A tem representação

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e então

$$A = S\,J\,S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = S\,e^{Jt}\,S^{-1} = S\,e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \dfrac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$\Rightarrow \ \vec{x} = e^{At}\,\vec{v}$$

e as colunas de e^{At} dão soluções (linearmente independentes) do sistema.

Se os valores próprios de A forem complexos, $e^{At} = S\,e^{Jt}\,S^{-1}$ vai ter entradas reais (note-se que S tem também entradas complexas).

Para escrever a forma canónica de Jordan J para uma dada matriz A:

- Pomos na diagonal principal de J os valores próprios de A (tomando em consideração as suas multiplicidades algébricas).

- Na diagonal imediatamente acima da principal, as entradas só podem ser 0 ou 1. Formam-se dessa maneira *blocos de Jordan*, em número igual à soma das multiplicidades geométricas de todos os valores próprios de A.

- As outras entradas da matriz J são todas nulas.

<u>Exemplo:</u>

Suponhamos que A tem como valores próprios

λ_1, com multiplicidade algébrica 1

λ_2, com multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 2

λ_3, com multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1

A forma canónica de Jordan para A fica então

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

O número de blocos de Jordan para cada λ é igual à sua multiplicidade geométrica.

J é a representação de A numa base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{w}\}$

<u>Exemplo</u>:

λ_1, com multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1

λ_2, com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 2

A forma canónica de Jordan fica

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

e há uma base $\{\vec{v_1}, \vec{w_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{w_2}\}$.

Podemos também fazer, equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

que corresponde a uma base $\{\vec{v_1}, \vec{w_1}, \vec{v_2}, \vec{w_2}, \vec{v_3}\}$.

A ordem dos blocos de Jordan deve ser consistente com a ordem das colunas na matriz de mudança de base S.

4 Sistemas Lineares Não Homogéneos

São da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x} + g(\vec{t}) \\ \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0} \end{cases}$$

Para resolver:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} - A\,\vec{x} = \vec{g}$$

$$\Rightarrow\ e^{-At}\,\frac{d\vec{x}}{dt} - A\,e^{-At}\,\vec{x} = e^{-At}\,\vec{g}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\left[e^{-At}\,\vec{x}\right] = e^{-At}\,\vec{g}$$

$$\Rightarrow\ \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\left[e^{-As}\,\vec{x}(s)\right] \mathrm{ds} = \int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\vec{g}(s)\,\mathrm{ds}$$

$$\Rightarrow\ e^{-At}\,\vec{x}(t) - e^{-At_0}\,\vec{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\vec{g}(s)\,\mathrm{ds}$$

(Note-se que A comuta com e^{At}).

Obtemos deste modo a *Fórmula de Variação dos Parâmetros*:

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\,\vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\vec{g}(s)\,\mathrm{ds}}$$

Esta fórmula mostra que a solução geral de um sistema não homogéneo é dada pela soma da solução do sistema homogéneo associado com uma solução particular do sistema não homogéneo.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tem como valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

Vectores próprios:

Para $\lambda_1 = 1$, obtemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = 2$, obtemos $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e portanto

$$e^{At} = S\,e^{Jt}\,S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

o que implica

$$\vec{x}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{ds}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s} & e^{2(t-s)} - e^{t-s} \\ \\ 0 & e^{2(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{ds}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{t-s} - \dfrac{1}{2}\, e^{2(t-s)} \\ \\ -\dfrac{1}{2}\, e^{2(t-s)} \end{pmatrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} + 2e^t + \dfrac{1}{2}\, e^{2t} \\ \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\, e^{2t} \end{pmatrix}$$

5 Sistemas Genéricos de Equações Diferenciais

Os sistemas lineares anteriores foram escritos na forma

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\,\vec{x} + \vec{g}$$

onde $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ e $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \cdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$

e t pertencia a um intervalo aberto I (de $\mathbb{R}$).

Um sistema mais geral, não necessariamente linear, pode aparecer sob a forma

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t)$$

com $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ (onde U é um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.)

Por analogia com as equações de primeira ordem, podemos também escrevê-lo como

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

tendo em atenção que agora consideramos y como uma função vectorial (de variável escalar) e f como função vectorial (de variável vectorial.)

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = t\,e^{y_2} \\ \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1\,e^t - y_2^2 \end{cases}$$

Neste caso, $y = (y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^2$

e $f : U \to \mathbb{R}^2$, com $f(t, y_1, y_2) = (t\,e^{y_2},\ y_1\,e^t - y_2^2)$.

I deve ser um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, e para este exemplo o domínio U de f é $\mathbb{R}^3$.

O Teorema de Existência e Unicidade de Picard que vimos para as equações de primeira ordem pode também ser adaptado a este caso:

Teorema de Existência e Unicidade de Picard para Sistemas de Equações

Seja dado o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

onde $f : U \to \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e limitado contendo (t_0, y_0)
(com $t \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^n$).

Se f é de classe C^1 em U, então o problema anterior tem solução única num intervalo $[t_0, t_0 + \alpha[$ (para certo $\alpha > 0$.)

A solução é o limite de uma sucessão de iteradas de Picard, e depende continuamente da condição inicial do problema.

Nota:

Recorde-se que a função f é dita de classe C^1 em U se for contínua em U e se $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ forem contínuas em U para todo o i entre 1 e n.

Exemplo Anterior:

Acrescentando uma condição inicial, podemos escrever o sistema anterior como

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = (t\, e^{y_2},\, y_1\, e^t - y_2^2) \\ \\ y(0) = (0, 0) \end{cases}$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, e temos

$\dfrac{\partial f}{\partial y_1}(t, y) = (0,\, e^t)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y_2}(t, y) = (t\, e^{y_2},\, -2\, y_2)$
para qualquer $(t, y) \in \mathbb{R}^3$.

Como estas derivadas parciais são contínuas em $\mathbb{R}^3$, e portanto também em vizinhanças do ponto inicial $(0, 0, 0)$, o teorema garante solução local única para o problema.