**Instituto Superior Técnico - TagusPark**
**Matemática Discreta 2020/2021**
**Exercícios para as aulas de problemas e teorico-práticas**

**Lista 2**

*Após a aula teorico-prática e a de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina. Vários dos exercícios (ou muito semelhantes) são apresentados como exemplos ou exercícios resolvidos nos Capítulos 4 e 5 do livro (alguns de entre eles estão explicitamente indicados abaixo).*

# Formas fechadas de somatórios (conclusão)

# 1 Métodos baseados em potências fatoriais

1. Recorde as formas fechadas obtidas para somatórios $\sum_{k=p}^{n} k^{\underline{r}}$ ou $\sum_{k=p}^{n} (ak+b)^{\underline{r}}$ com $r \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p, n \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$, e use-as para calcular formas fechadas para

   (a) $\sum_{k=1}^{n} (5k^3 - 3k^2)$ (b) $\sum_{k=0}^{n} (k^3 - 3k^2 + 2k)$ (c) $\sum_{j=1}^{n} (j^3 + 2j)$ (d) $\sum_{k=0}^{n-1} (4k^3 - 7k^2 + k)$

   (e) $\sum_{k=0}^{n} (2k^3 - 3k^2 + 5k - 4)$ (f) $\sum_{k=0}^{n} k^4$ (g) $\sum_{k=0}^{n} (3k^4 - 7k^2 + 4k)$ (h) $\sum_{k=0}^{n} (k^4 + 3k^3 - 4k + 3)$

   (i) $\sum_{k=0}^{n} k^5$ (j) $\sum_{k=0}^{n} 2k^5 - 6k^3$ (k) $\sum_{k=1}^{n-1} (3k+2)(3k-1)(3k-4)$ (l) $\sum_{k=0}^{n} (7k-1)(7k+6)$

2. Recorde as formas fechadas obtidas para somatórios $\sum_{k=p}^{n} k^{\underline{-r}}$ ou $\sum_{k=p}^{n} (ak+b)^{\underline{-r}}$ com $r \in \mathbb{N}_2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p, n \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$, e use-as para calcular formas fechadas para

   (a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$ (b) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3k-2}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{k^3+6k^2+11k+6}$ (d) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+4k+3}$

   (e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+4)}$ (f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ (g) $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5}{k^2+k}$ (h) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^3+9k^2+26k+24}$

   (i) $\sum_{k=2}^{n} \frac{4}{k^2-1}$ (j) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(5k+4)(5k-1)}$ (k) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(4k+1)(4k+5)(4k+9)}$ (l) $\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4k^2-1}$

# 2 Método da perturbação da soma

1. Use o método da perturbação direta para obter formas fechadas de

   (a) $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ (b) $\sum_{k=2}^{n} 3^{-k}$ (c) $\sum_{k=0}^{n} k3^k$ (d) $\sum_{k=2}^{n} k(-1)^k$ (e) $\sum_{k=0}^{n} k^2 3^k$

2. Use o método da perturbação indireta para obter formas fechadas de (a) $\sum_{k=0}^{n} k$ (b) $\sum_{k=0}^{n} k^2$ (c) $\sum_{k=0}^{n} k^3$

3. A sucessão $H_n$ dos *números harmónicos* define-se como se segue: $H_0 = 0$ e $H_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j}$ para $n \in \mathbb{N}_1$ (o termo de ordem $n$ é o *número harmónico* $n$). Use o método da perturbação indireta para concluir que

   (a) $\sum_{k=0}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$ Sugestão: aplique perturbação direta a $\sum_{k=0}^{n} kH_k$ (livro: exemplo 101)

   (b) $\sum_{k=0}^{n} kH_k = \frac{1}{4}n(n+1)(2H_{n+1} - 1)$

# 3 Lema de Abel (integração finita por partes)

1. Utilize o lema de Abel para encontrar formas fechadas para (a) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k3^k$ (c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 3^k$

2. Utilize o lema de Abel para estabelecer a igualdade do exercício 2.3b (livro: secção 5.11, exercício 1p)

# 4 Miscelânea

1. Calcule uma forma fechada para a soma das $n$ primeiras parcelas de cada uma das somas seguintes

   (a) $3^2 \times (1^2 - 1) + 4^2 \times (2^2 - 2) + 5^2 \times (3^2 - 3) + 6^2 \times (4^2 - 4) + \ldots$

   (b) $\frac{1}{2 \times 5 \times 8} + \frac{2}{5 \times 8 \times 11} + \frac{3}{8 \times 11 \times 14} + \frac{4}{11 \times 14 \times 17} + \ldots$ (c) $\frac{1}{5} + \frac{1}{5+10} + \frac{1}{5+10+15} + \ldots + \frac{1}{5+10+15+\ldots+5n}$

2. Encontre uma forma fechada para cada uma das expressões seguintes. Pode assumir já estabelecida a igualdade $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ com $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   (a) $\sum_{i=0}^{n} ((n^2 - 1)2^{n-i})$ (b) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3+3k^2+2k+1}{k^2+3k+2}$ (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4+3k^3+2k^2-2}{k^2+3k+2}$

   (d) $\sum_{i=1}^{n} (6i + \sum_{j=1}^{n} 4)$ (e) $\sum_{k=0}^{n+3} (5^k + \sum_{i=1}^{k} 2)$ (f) $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=0}^{i} 3)$

   (g) $\sum_{j=0}^{n} (3^j + (\sum_{k=0}^{n} (k^2 - k)))$ (h) $\sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{(4k+6)(4k+10)} + (\sum_{j=0}^{n} 2nj))$ (i) $\sum_{k=0}^{n-1} (k^2 (\sum_{i=1}^{k-1} 2))$

3. Encontre uma forma fechada para cada uma das expressões seguintes. Pode ser útil recordar algumas derivadas finitas calculadas no exercício 1.1 e as regras de derivação finita no exercício 1.2 da Lista 1.

   (a) $\sum_{k=0}^{n} ((k+1)! + k^2 k!)$ (b) $\sum_{k=0}^{n} 3^k (2(k+1)! + kk!)$ (c) $\sum_{k=0}^{n} 2(k3^{k+1} + k(k-1)3^k)$

   (d) $\sum_{k=0}^{n} (3k^{\underline{2}} 2^{k+1} + k^{\underline{3}} 2^k)$ (e) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k2^k}{(k+1)(k+2)}$ (f) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-2k}{2^k}$

   (g) $\sum_{k=1}^{n-1} (\frac{3}{4})^k \frac{k+8}{k(k+1)(k+2)}$ (h) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k2^k}{(k+2)!}$ (i) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$

4. Encontre uma forma fechada para cada expressão seguinte ($\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor que ou igual a $x$, $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior que ou igual a $x$ e $\mathrm{mod}(x,n) = x - \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$= resto da divisão de $x$ por $n$).

   (a) $\sum_{k=0}^{n} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ (b) $\sum_{k=0}^{n} \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{mod}(k,3)$ (d) $\sum_{k=0}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ (e) $\sum_{k=0}^{n} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor$

   (f) $\sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_2(k) \rfloor$ (g) $\sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_3(k) \rfloor$ (h) $\sum_{k=0}^{n} \lceil \sqrt{k} \rceil$ (i) $\sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2(k) \rceil$

5. Mostre que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\underline{1}} = H_n$ (sugestão: calcule a derivada finita da sucessão $H_n$ – ver exercício 2.3)

6. Nem todos os somatórios têm como formas fechadas expressões algébricas como as obtidas nos exercícios anteriores. Um exemplo é o número harmónico $H_n = \sum_{k=1}^{n}(1/k)$. Mas, recorrendo a relações conhecidas entre integrais de funções reais de variável real e somatórios, podem obter-se majorantes e minorantes para diversas somas, de que esta é um exemplo.

   (a) Justifique as desigualdades seguintes

   $$\log(n+1) \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \;\leq\; 1 + \log n$$

   recordando que $\int_a^{b+1} f(x)dx \leq \sum\limits_{k=a}^{b} f(k) \leq \int_{a-1}^{b} f(x)dx$ se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e monótona decrescente.

   (b) Usando a alínea anterior mostre que

   (i) $n^2 + n + 2\log(n+1) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2(k^2+1)}{k} \leq n^2 + n + 2 + 2\log n$

   (ii) $3\log(n+2) - 3 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3}{k+1} \leq 3(\log(n+1))$

# 5 Números de Stirling

1. Considere o seguinte fragmento da tabela de <u>**números de Stirling de primeira espécie**</u>:

$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$

número na linha $n \geq 0$ e coluna $j \geq 0$
=
coeficiente de $k^j$ no polinómio relativo a $k^{\underline{n}}$

| | $k^0$ | $k^1$ | $k^2$ | $k^3$ | $k^4$ | $k^5$ | $k^6$ | $k^7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k^{\underline{0}}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^{\underline{1}}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^{\underline{2}}$ | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^{\underline{3}}$ | 0 | 2 | $-3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^{\underline{4}}$ | 0 | $-6$ | 11 | $-6$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $k^{\underline{5}}$ | 0 | | $-50$ | 35 | $-10$ | 1 | 0 | 0 |
| $k^{\underline{6}}$ | 0 | $-120$ | 274 | | 85 | $-15$ | 1 | 0 |
| $k^{\underline{7}}$ | | | $-1764$ | 1624 | $-735$ | | | |

   (a) Complete a tabela recordando a seguinte definição recursiva dos números de Stirling de 1a espécie:

   $$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (i \in \mathbb{N}_1, n < i) \qquad\qquad \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} - (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} \quad (i \in \mathbb{N}_1, n \geq i)$$

   (b) Recorrendo à tabela acima, obtenha o polinómio correspondente a cada um dos seguintes monómios fatoriais (i) $k^{\underline{3}}$ (ii) $k^{\underline{4}}$ (iii) $k^{\underline{5}}$ (iv) $k^{\underline{6}}$ (v) $k^{\underline{7}}$

2. Considere o seguinte fragmento da tabela de **números de Stirling de segunda espécie**:

$\left\{ n \atop j \right\}$

número na linha $n \geq 0$ e coluna $j \geq 0$ = coeficiente de $k^{\underline{j}}$ no polinómio fatorial relativo a $k^n$

| | $k^{\underline{0}}$ | $k^{\underline{1}}$ | $k^{\underline{2}}$ | $k^{\underline{3}}$ | $k^{\underline{4}}$ | $k^{\underline{5}}$ | $k^{\underline{6}}$ | $k^{\underline{7}}$ | $k^{\underline{8}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k^0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^3$ | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^4$ | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $k^5$ | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $k^6$ | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | 0 | 0 |
| $k^7$ | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | 0 |
| $k^8$ | | | | 966 | 1701 | 1050 | | | |

(a) Complete a tabela recordando a seguinte definição recursiva dos números de Stirling de 2a espécie:

$$\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1 \qquad \left\{ n \atop i \right\} = \left\{ i \atop 0 \right\} = 0 \quad (i \in \mathbb{N}_1, n < i) \qquad \left\{ n \atop i \right\} = \left\{ n-1 \atop i-1 \right\} + i \left\{ n-1 \atop i \right\} \quad (i \in \mathbb{N}_1, n \geq i)$$

(b) Recorrendo à tabela acima, obtenha o polinómio fatorial correspondente a cada um dos seguintes monómios (i) $k^4$ (ii) $k^5$ (iii) $k^6$ (iv) $k^7$ (v) $k^8$

3. Recorrendo sempre que possível aos números de Stirling de primeira e segunda espécie calcule uma forma fechada para

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ (b) $\sum_{k=0}^{n} (k^2 - k)$ (c) $\sum_{k=0}^{n-1} (2k^3 + k^2 + k)$ (d) $\sum_{k=0}^{n-1} (5k^4 - k^3 - k)$