Ficha 12
Resolução dos exercícios propostos

I.1 Seja $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+x^2y-\frac{3y^2}{2}-9x+1$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

Resolução:

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+x^2y-\frac{3y^2}{2}-9x+1\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+x^2y-\frac{3y^2}{2}-9x+1\right)}{\partial y}\right)$$

$$=\left(x^2+y^2+2xy-9,\ y^2+2xy+x^2-3y\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

b) Determine os pontos de estacionaridade de f.

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2xy-9=0\\ y^2+2xy+x^2-3y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2xy=9\\ x^2+y^2+2xy-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ 9-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ 3-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3^2+2\cdot x\cdot 3=9\\ y=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+6x=0\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+6)=0\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x+6=0\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x=-6\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x=-6\\ y=3\end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são: $(0,3)$ e $(-6,3)$.

c) Calcule a matriz Hessiana de f.

Resolução:

Determinemos a matriz Hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{bmatrix}\underset{\substack{\text{Pela}\\ \text{alínea a)}}}{=}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+2xy-9\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+2xy-9\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2+2xy+x^2-3y\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2+2xy+x^2-3y\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x+2y & 2y+2x\\ 2y+2x & 2y+2x-3\end{bmatrix}$$

d) Classifique os pontos obtidos na alínea (b) quanto à sua natureza.

Resolução:

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto$(0,3)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,3)=\begin{bmatrix} 2\cdot 0+2\cdot 3 & 2\cdot 3+2\cdot 0 \\ 2\cdot 3+2\cdot 0 & 2\cdot 3+2\cdot 0-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,3)$ é:

$$D_1 = 6 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot 3-6\cdot 6=-18<0.$$

Como $D_2 < 0,$ então a forma quadrática é indefinida e $(0,3)$ é um ponto sela.

- ponto$(-6,3)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-6,3)=\begin{bmatrix} 2\cdot(-6)+2\cdot 3 & 2\cdot 3+2\cdot(-6) \\ 2\cdot 3+2\cdot(-6) & 2\cdot 3+2\cdot(-6)-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-6,3)$ é:

$$D_1 = -6 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -9 \end{vmatrix} = -6\cdot(-9)-(-6)\cdot(-6)=18>0$$

Como $D_1 < 0$ e $D_2 > 0,$ então a forma quadrática é negativa e $(-6,3)$ é um ponto de máximo relativo.

I.2 Determine e classifique os extremos relativos das seguintes funções:

a) $f(x,y)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$

Resolução:

De modo a determinarmos, os pontos "candidatos" a extremos relativos (máximos relativos ou mínimos relativos),

calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2y=0\\ -2x+y^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ -2y+y^2-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\\ y^2-2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\\ y=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-3\cdot 1)}}{2\cdot 1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\\ y=\frac{2\pm 4}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ y=\frac{6}{2}\vee y=-\frac{2}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\\ y=3\vee y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são $(3,3)$ e $(-1,-1)$.

Determinemos a matriz hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2y \end{bmatrix}$$

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto $(3,3)$

  A matriz hessiana neste ponto é:

  $$H(3,3)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

  A cadeia de menores principais de $H(3,3)$ é:

  $$D_1 = 2 > 0$$
  $$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - (-2\cdot(-2)) = 12 - 4 = 8 > 0.$$

  Como $D_1 > 0$ e $D_2 > 0$, então a forma quadrática é definida positiva e $(3,3)$ é um ponto de mínimo relativo.

- ponto $(-1,-1)$

  A matriz hessiana neste ponto é:

  $$H(-1,-1)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

  A cadeia de menores principais de $H(-1,-1)$ é:

  $$D_1 = 2 > 0$$
  $$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - (-2\cdot(-2)) = -4 - 4 = -8 < 0.$$

  Como $D_2 < 0$, então a forma quadrática é indefinida e $(-1,-1)$ é um ponto sela.

b) $f(x,y) = x^2 + y^4 x$

<u>Resolução:</u>

<u>Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:</u>

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y^4 = 0 \\ 4y^3 x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y^3 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{————} \\ y^3 = 0 \vee x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{————} \\ y = 0 \vee x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 0^4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2 \cdot 0 + y^4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

O ponto de estacionariedade é $(0,0)$.

<u>Determinemos a matriz hessiana de f:</u>

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4y^3 \\ 4y^3 & 12y^2 x \end{bmatrix}$$

<u>Classifiquemos o ponto de estacionariedade $(0,0)$:</u>

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \cdot 0^3 \\ 4 \cdot 0^3 & 12 \cdot 0^2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,0)$ é:

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (0 \cdot 0) = 0 - 0 = 0.$$

Como $D_2 = 0$, nada se pode concluir.

c) $f(x,y)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(e^{2x}\right)'_x\left(x+y^2+2y\right)+e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)'_x=0\\ \left(e^{2x}\right)'_y\left(x+y^2+2y\right)+e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)'_y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)+e^{2x}=0\\ e^{2x}(2y+2)=0\end{cases}\underset{e^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}e^{2x}\left(2\left(x+y^2+2y\right)+1\right)=0\\ 2y+2=0\end{cases}\underset{e^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2x+2y^2+4y+1=0\\ 2y+2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2(-1)^2+4(-1)+1=0\\ y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$$

O ponto de estacionariedade é $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

Determinemos a matriz hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)+2e^{2x}+2e^{2x} & 2e^{2x}(2y+2)\\ 2e^{2x}(2y+2) & 2e^{2x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4e^{2x}\left(x+y^2+2y+1\right) & 4e^{2x}(y+1)\\ 4e^{2x}(y+1) & 2e^{2x}\end{bmatrix}$$

Classifiquemos o ponto de estacionariedade $\left(\frac{1}{2},-1\right)$:

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H\left(\frac{1}{2},-1\right)=\begin{bmatrix}4e^{2\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+(-1)^2+2(-1)+1\right) & 4e^{2\frac{1}{2}}(-1+1)\\ 4e^{2\frac{1}{2}}(-1+1) & 2e^{2\frac{1}{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e & 0\\ 0 & 2e\end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H\left(\frac{1}{2},-1\right)$ é:

$$D_1=2e>0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2e & 0\\ 0 & 2e\end{vmatrix}=2e\cdot 2e-(0\cdot 0)=4e^2>0.$$

Como $D_1>0$ e $D_2>0$, então a forma quadrática é definida positiva e $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ é um ponto de mínimo relativo.