11.1 O integral de Riemann

11.1.1 Partições, somas superiores e somas inferiores

Uma partição P de um intervalo $[a, b]$ é uma sequência finita de pontos $\langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$. Estes pontos devem satisfazer a condição seguinte,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Para cada *sub-intervalo* $[x_i, x_{i+1}]$ (com $0 \le i < n$) definimos,

$$m_i = \inf f([x_i, x_{i+1}]) \quad \text{e} \quad M_i = \sup f([x_i, x_{i+1}]).$$

Dada uma partição $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$ a *soma inferior* associada a esta partição é o número real que se denota por $L(f, P)$ e é definido através da relação $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, onde $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$. De forma análoga se define a *soma superior* que se denota por $U(f, P)$ e se define através da relação $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$.

Dada uma partição P é claro que se tem $L(f, P) \le U(f, P)$.

Intuitivamente, uma soma superior corresponde a uma aproximação por excesso da área que pretendemos calcular, enquanto que uma soma inferior corresponde a uma soma por defeito. O conceito que introduzimos a seguir — o de *refinamento de uma partição* — mostra que esses desvios podem ser melhorados.

Definição 11.1.— *Uma partição Q é um refinamento de uma partição P se todos os pontos de P ocorrem em Q. Neste caso escrevemos $Q \ll P$.*

Dadas duas partições P_1, P_2 elas possuem sempre um refinamento comum. De facto, basta considerar $P_1 \wedge P_2$ que é a sequência determinada pelos pontos de P_1 e P_2 ordenados por ordem crescente.

Lema 11.1.— *Se P, Q são partições e $Q \ll P$ então,*

$$L(f, P) \le L(f, Q) \le U(f, Q) \le U(f, P).$$

Dem.— A demonstração deste facto depende de uma simples observação: se $Q \ll P$ então, sendo $P = \langle x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\rangle$, a partição Q introduz subdivisões nos intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, digamos que $x_i < x_i^0 < x_i^1 < \cdots < x_i^{k_i} < x_{i+1}^0$. Assim quando passamos de $L(P, f)$ para $L(Q, f)$, cada parcela do tipo $m_i \Delta x_i$ é substituída por por um valor maior designadamente por

$$\begin{aligned} m_i^0(x_i^1 - x_i) + m_i^1(x_i^2 - x_i^1) + \cdots + m_i^{k_i}(x_{i+1} - x_i^{k_i}) \ge \\ \ge m_i(x_i^1 - x_i) + m_i(x_i^2 - x_i^1) + \cdots + m_i(x_{i+1} - x_i^{k_i}) = \\ = m_i[(x_i^1 - x_i) + (x_i^2 - x_i^1) + \cdots + (x_{i+1} - x_i^{k_i})] = m_i \Delta x_i. \end{aligned}$$

Considerações idênticas mostrarão que $U(Q, f) \le U(P, f)$.

Para estabelecer $L(Q, f) \le U(Q, f)$ observe-se que ambas as somas têm o mesmo número de parcelas dos tipos $m_i \Delta x_i$ e $M_i \Delta x_i$. Estas parcelas são facilmente comparáveis uma vez que se tem $m_i = \inf f([x_i, x_{i+1}]) \le M_i = \sup f([x_i, x_{i+1}])$. ■

Lema 11.2.— *Se P_1, P_2 são partições de $[a, b]$ então tem-se que $L(f, P_1) \le U(f, P_2)$.*

Dem.— A demonstração é muito simples bastando considerar o resultado anterior e um refinamento comum de P_1 e P_2, e.g., considerando $P_1 \wedge P_2$. Tem-se, usando o resultado anterior,

$$L(P_1, f) \leq L(P_1 \wedge P_2, f) \leq U(P_1 \wedge P_2, f) \leq U(P_2, f).$$

Destas desigualdades resulta imediatamente que $L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$. ■

Denotemos por $\mathscr{P}([a,b])$ o conjunto de todas as partições. O *integral superior* da função f em $[a,b]$ é $U(f) = \inf\{U(f,P) \mid P \in \mathscr{P}([a,b])\}$. Já o *integral inferior* é introduzido através da relação, $L(f) = \inf\{L(f,P) \mid P \in \mathscr{P}([a,b])\}$. O resultado seguinte é uma consequência natural dos resultados entretanto estabelecidos.

Lema 11.3.— *Suponhamos que f é uma função limitada em $[a,b]$. Tem-se que $L(f) \leq U(f)$.*

Dem.— Supondo, tendo em vista a obtenção de um absurdo, que $L(f) > U(f)$ então, tendo em conta que $L(f) = \inf\{L(f,P) \mid P \in \mathscr{P}([a,b])\}$ e que $U(f) = \sup\{L(f,P) \mid P \in \mathscr{P}([a,b])\}$, teriam que existir partições P, Q tais que $U(P,f) < LQ, f)$. Isto, contudo, contradiz o resultado anterior, conduzindo assim a um absurdo. ■

Estamos agora em condições de definir o conceito de *função integrável à Riemann*.

Definição 11.2.— *Uma função limitada num intervalo $[a,b]$ diz-se integrável à Riemann em $[a,b]$ (escrevemos $f \in \mathscr{R}([a,b])$) se os integrais superior e inferior de f em $[a,b]$ coincidem. Neste caso o seu valor comum designa-se de integral de f em $[a,b]$ e denota-se por*

$$\int_a^b f\,dx \quad \textit{ou por} \quad \int_{[a,b]} f\,dx.$$

A designação que adoptámos — «integrabilidade à Riemann» — , sugere a existência de outros tipos de integral que tentam da mesma forma capturar a noção intuitiva de área. De facto, outras noções mais sofisticadas e mais convenientes existem, e.g. o integral de Riemann generalizado e o integral de Lebesgue.

11.1.2 Critérios de integrabilidade

Ao longo desta secção isolamos certas propriedades, relativamente simples de verificar e que, por si só, asseguram a integrabilidade de uma função.

Começamos com um critério geral.

Lema 11.4.— *Um função f é integrável à Riemann em $[a,b]$ se e só se, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P do intervalo $[a,b]$ tal que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$.*

Dem.— É claro que que a condição indicada implica a integrabilidade à Riemann, pois se $U(f) > L(f)$ então considerando $\epsilon = U(f) - L(f)$, não seria possível encontrar nenhuma partição P tal que $U(P,f) - L(p,f) < \epsilon$, uma vez que se tem sempre que

$$U(P,f) - L(P,f) > U(f) - L(f).$$

A implicação recíproca também se estabelece facilmente recorrendo a esta linha de argumentação. Com efeito, se existe $\epsilon > 0$ satisfazendo $U(P,f) - L(P,f) \geq \epsilon$ para qualquer partição P, então também se tem

$$U(f) - L(f) = \inf\{U(P,f) - L(f,P) \mid P \in \mathscr{P}([a,b])\} \geq \epsilon,$$

ou seja, f não é integrável à Riemann. ■

LEMA 11.5.— *Consideremos f definida no intervalo $[a, b]$.*

(1) *Se $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$ para uma dada partição P do intervalo $[a, b]$ então, se $Q \ll P$ também se tem $U(Q, f) - L(Q, f) < \epsilon$.*

(2) *Se $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$ para uma dada partição $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$ e se s_i, t_i são pontos tomados ao arbitrio em $[x_i, x_{i+1}]$ então,*

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(s_i) - f(t_i)|\Delta x_i < \epsilon.$$

(3) *Se f é integrável à Riemann então, nas condições de (2) tem-se*

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta x_i - \int_{[a,b]} f dx\right| < \epsilon.$$

DEM.— Estas afirmações são todas fáceis de estabelecer, face aos resultados entretanto demonstrados. Assim, (1) decorre do facto de se ter $U(P, f) - L(P, f) \geq U(Q, f) - L(Q, f)$. A asserção (2) é também uma simples consequência do facto de se ter que $M_i - m_i \geq |f(s_i) - f(t_i)|$. Quanto a (3) trata-se de uma consequência de (2) e de

$$L(P, f) \leq \int_{[a,b]} f dx \leq U(P, f),$$

para qualquer partição P. ∎

TEOREMA 11.1.— *Se f é contínua em $[a, b]$ então f é integrável à Riemann em $[a, b]$.*

DEM.— Suponhamos que f é contínua em $[a, b]$. Como $[a, b]$ é um conjunto compato temos que f é *uniformemente contínua* em $[a, b]$, i.e.,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [a, b])[d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon].$$

Fixemos então $\epsilon > 0$. Pela continuidade uniforme existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \epsilon/(b - a)$. Seja $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$ uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que $x_{i+1} - x_i < \delta$. Tem-se

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b - a}\Delta x_i = \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \epsilon.$$

Usando o resultado anterior e o facto de ϵ se qualquer, podemos concluir que f é integrável à Riemann em $[a, b]$. ∎

TEOREMA 11.2.— *Se f é monótona em $[a, b]$ então f é integrável à Riemann em $[a, b]$.*

DEM.— Denotemos por P_n a partição de $[a, b]$ em n partes iguais. Tem-se então que $P_n = \langle x_0, x_1, \dots, x_n\rangle$ e para qualquer $i = 0, 1, \dots, n-1$ tem-se $\Delta x_i = (b-a)/n$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f é crescente. Neste caso tem-se $m_i = f(x_i)$ e $M_i = f(x_{i+1})$. Posto isto,

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))\frac{b-a}{n} = \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n},$$

valor que tende para zero quando $n \to \infty$. ■

Apesar deste resultados existem funções que não são contínuas em $[a, b]$ e que são integráveis à Riemman. Por exemplo a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 1/n & (x = m/n \text{ na forma irredutível com } m \neq 0) \\ 0 & (x \text{ é irracional}) \end{cases}$$

é descontínua nos racionais e no entanto é integrável à Riemann.

No entanto, a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \in C) \\ 0 & (x \notin C) \end{cases}$$

(onde C é o conjunto de Cantor) é descontínua nos pontos de C e contínua nos restantes. Esta função não é integrável à Riemann em $[0, 1]$.

Em ambos os exemplos o conjunto de pontos onde a função é descontínua é infinito. Assim porque razão são estes exemplos distintos do ponto de vista da integrabilidade? A resposta a esta questão é dada pelo seguinte teorema de Lebesgue cuja demonstração se deixa para a secção (opcional) 11.1.5.

TEOREMA 11.3 (LEBESGUE).— *Suponhamos que f é uma função limitada no intervalo $[a, b]$. A função f é integrável à Riemann em $[a, b]$ se e só se, o conjunto dos pontos de $[a, b]$ em que f é descontínua tem* medida nula.

Neste ponto não é para nós importante saber o que significa exactamente «um conjunto ter medida nula». Em todo o caso, é interessante saber que existe um critério de integrabilidade associado à noção de continuidade, mais precisamente à ideia de que uma função é integrável à Riemann num dado intervalo se e só se apresenta «poucas descontinuidades» nesse intervalo. É também claro, que não sabendo o significado preciso do termo «medida nula» também não é possível neste ponto, fornecer um sentido exacto para a expressão «poucas descontinuidades». Ainda assim, podemos mencionar duas instâncias em que o termo se aplica e que são úteis do ponto de vista prático: se um conjunto A é *finito* ou *numerável* então tem medida nula. Aqui, por «numerável» queremos dizer de um conjunto cujos elementos se podem colocar em correspondência bijectiva com os naturais (é o caso, por exemplo, dos números racionais, ou dos números racionais num qualquer intervalo).

Nos dois exemplos anteriores, no primeiro o conjunto de descontinuidades é contável enquanto que no segundo não.