COM RESOLUÇÃO

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º semestre 11/12

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEE, LEGI, LEIC-T, LERC

21 de Outubro de 2011 (15:30)

Teste 101

Nome:
Número:
Curso:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **45 minutos** e consiste de sete problemas. Os quatro primeiros são perguntas de escolha múltipla, pelo que assinale a sua opção no primeiro quadro abaixo. As resposta erradas descontam 1/3 da cotação indicada. Os restantes problemas têm as cotações indicadas na segunda tabela abaixo.

Perg 1	2 Val	(d)	
Perg 2	2 Val	(b)	
Perg 3	3 Val	(c)	
Perg 4	3 Val	(b)	

O quadro abaixo destina-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Prob 5	3 Val	
Prob 6	4 Val	
Prob 7	3 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1
Identifique a única matriz em escada de linhas.

(a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 2
Considere o seguinte sistema de equações lineares
$$\begin{cases} x_1 & +hx_2 & = & 1 \\ 4x_1 & +8x_2 & = & k \end{cases}$$
Indique a única afirmação verdadeira.

(a) O sistema é possível determinado sse $h = 2$ e $k = 4$.

(b) O sistema é impossível sse $h = 2$ e $k \neq 4$.

(c) O sistema é possível indeterminado sse $h \neq 2$ e $k = 4$.

(d) O sistema é impossível sse $h = 2$ e $k = 4$.

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 3

Sejam os vetores $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$.

Indique o(s) valor(es) de h que faz(em) com que o vetor $\mathbf{b}$ seja combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$.

(a) $h = 3$.

(b) $h \neq 3$.

(c) $h = -3$.

(d) $h = 0$.

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 4

Sejam $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ tais que

- $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1\}$,
- $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$,
- $\mathbf{u}_4 \notin \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Identifique a única opção correcta:

(a) O conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ é linearmente independente.

(b) O conjunto $\mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma reta que passa na origem.

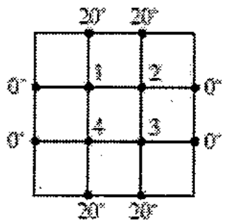
(c) O conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ gera $\mathbb{R}^3$.

(d) O conjunto $\mathcal{L}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é um plano que contém a origem.

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 5

A figura abaixo representa a secção transversal duma viga metálica, com um fluxo de calor desprezável na direção perpendicular a essa secção. Sabendo os valores das temperaturas em cada um dos lados da viga (ver na figura), e considerando que a temperatura T_j, $j = 1, 2, 3, 4$, num ponto interior j é aproximadamente a média da temperatura nos quatro pontos adjacentes, escreva o sistema de equações lineares que permite calcular as temperaturas T_j.



Indique os cálculos para construir o sistema. Não é necessário resolver o sistema!!!

$$T_1 = \frac{20 + T_2 + T_4}{4} \iff 4T_1 - T_2 \qquad - T_4 = 20$$

$$T_2 = \frac{20 + T_1 + T_3}{4} \iff -T_1 + 4T_2 - T_3 \qquad = 20$$

$$T_3 = \frac{20 + T_2 + T_4}{4} \iff -T_2 + 4T_3 - T_4 = 20$$

$$T_4 = \frac{20 + T_1 + T_3}{4} \iff -T_1 \qquad - T_3 + 4T_4 = 20$$

2.0 1.0

Problema 6
Descreva o conjunto solução de $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$ na forma vetorial paramétrica, em que A é a matriz equivalente por linhas à seguinte matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

1.0

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -10x_5 - 8x_4$
$x_3 = -2x_5$

$x_2, \ x_4, x_5$ - livres 1.0

Forma vetorial paramétrica da solução:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

1.0 1.0

Problema 7
Considere o problema de determinar se existe solução para a seguinte equação matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Defina vetores apropriados e enuncie o problema da existência de solução da equação vetorial equivalente a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em termos de combinações lineares desses vetores.
Não é necessário resolver o problema. Apenas enunciar.

Sejam $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{a}_2, \ \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ - vetores coluna de A.

1.0

Verifique se a eq. vetorial

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{b}$$

1.0

tem solução, i.e., verifique se $\underline{b}$ se pode escrever como combinação linear dos vetores $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$. 1.0