INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

IST - 1º Semestre de 2016/17

EXERCÍCIOS DE ÁLGEBRA LINEAR [1]

FICHA 2 - Espaços Vectoriais

1 Combinações lineares de vectores de $\mathbb{R}^n$

Por $\mathbb{R}^n$ entenderemos o conjunto de todas as sequências ordenadas de n números reais

$$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)\,,$$

às quais chamaremos de **vectores**. Os valores reais $x_1, ..., x_n$, tomam o nome de componentes do vector $\mathbf{x}$.

Dois vectores $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ dizem-se iguais se as suas componentes homólogas forem iguais. Isto é $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$.

Em $\mathbb{R}^n$ introduzimos duas operações. Uma de **soma** de vectores e outra de multiplicação ou **produto** de um **escalar** por um vector. Para isso sejam $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$ e α, β números reais.

- Soma em $\mathbb{R}^n$:
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, ..., u_n + v_n)\,.$$
- Produto escalar em $\mathbb{R}^n$:
$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, ..., \alpha u_n)\,.$$
- Estas operações gozam das seguintes propriedades, características da estrutura algébrica de $\mathbb{R}^n$:

i) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (associatividade).

ii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (comutatividade).

iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, onde $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ é o vector nulo (existência de elemento neutro).

iv) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$, onde $-\mathbf{u} = (-u_1, ..., -u_n)$ (existência de elemento simétrico).

v) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ (distributividade).

vi) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ (distributividade).

vii) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$ (associatividade).

viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

[1] Coligidos por: João Ferreira Alves, Ricardo Coutinho e José M. Ferreira.

Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, vectores de $\mathbb{R}^m$. Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ diz-se uma **combinação linear** de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, se existirem números reais $x_1, ..., x_n$, tais que

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + ... + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}.$$

Os valores $x_1, x_2, ..., x_n$, tomam o nome de coeficientes da combinação linear.

O conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, designa-se por

$$\mathcal{L}\left(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}\right),$$

e é chamado de **conjunto gerado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$, o qual toma o nome de **conjunto gerador**.

Se $\mathcal{L}\left(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}\right) = \mathbb{R}^m$, diremos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^m$.

Em termos de componentes, $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, ..., v_{m1})$, $\mathbf{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, ..., v_{m2})$, ..., $\mathbf{v}_n = (v_{1n}, v_{2n}, ..., v_{mn})$ formam um conjunto gerador de $\mathbb{R}^m$ se e só se a matriz

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & ... & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & ... & v_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ v_{m1} & v_{m2} & ... & v_{mn} \end{bmatrix},$$

pode ser transformada por operações elementares de linhas numa matriz em escada de linhas com um pivô em cada linha (*i.e.*, sem linhas nulas).

1.1 Exercícios

Exercício 1 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *o conjunto* $G = \{(1,1), (2,2)\}$.

a) *Mostre que o vector* $(-5,-5)$ *é combinação linear dos vectores de* G.

b) *É também o vector* $(1,0)$ *combinação linear dos vectores de* G?

c) *O conjunto* G *gera* $\mathbb{R}^2$?

d) *Determine a forma geral dos vectores* $(a,b) \in \mathcal{L}(G)$.

Exercício 2 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o conjunto* $G = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,2,2)\}$.

a) *Mostre que o vector* $(2,3,3)$ *é combinação linear dos vectores de* G.

b) *Mostre que o vector* $(0,0,1)$ *não é combinação linear dos vectores de* G.

c) *O conjunto* G *gera* $\mathbb{R}^3$?

d) *Determine a forma geral dos vectores* $(a,b,c) \in \mathcal{L}(G)$.

Exercício 3 *Considere em* $\mathbb{R}^4$ *o conjunto*

$$G = \{(1,2,3,4), (1,3,3,4), (1,2,4,4), (1,2,1,4)\}.$$

a) *Mostre que o vector* $(4,3,2,1)$ *não é combinação linear dos vectores de* G.

b) *Mostre que o vector* $(2,2,7,8)$ *é combinação linear dos vectores de* G.

c) *De forma mais geral possível determine* $(2,2,7,8)$ *como combinação linear dos vectores de* G.

Exercício 4 *Indique quais dos seguintes conjuntos de vectores geram* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $\{(1,3,3),(4,6,4),(-2,0,2),(3,3,1)\}$.

b) $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

c) $\{(1,4,2),(0,0,0),(-1,-3,-1),(0,1,1)\}$.

d) $\{(26,47,29),(123,0,498)\}$.

Exercício 5 *Quais dos conjuntos indicados a seguir geram* $\mathbb{R}^4$*?*

a) $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,1,-1)\}$.

b) $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$.

c) $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,1,0,1)\}$.

d) $\{(11,-12,1,1),(45,17,1,20),(21,3,41,122)\}$.

Exercício 6 *Determine o único valor de* a *que faz com que*

$$G = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,2,0),(3,2,a)\}$$

não seja um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 7 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o conjunto* $G = \{(1,0,1),(0,1,a),(1,1,b),(1,1,1)\}$. *Qual o único par* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *que faz com que* G *não gere* $\mathbb{R}^3$?

Exercício 8 *Considere em* $\mathbb{R}^4$ *o conjunto* $G = \{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(1,1,0,0),(1,1,1,a)\}$. *Calcule o único valor de* a *que faz com que* G *não gere* $\mathbb{R}^4$.

Exercício 9 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o conjunto*

$$G = \{(1,2,1),(2,\alpha,2),(2,5,3),(\beta,-7,\alpha)\}.$$

Determine os únicos valores de α *e* β *para os quais o conjunto* G *não gera* $\mathbb{R}^3$.

2 Dependência e independência linear

Os vectores de $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$, dizem-se **linearmente dependentes** sempre que um deles é combinação linear dos restantes. Ou seja, os vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$, são linearmente dependentes se existir $j \in \{1,...,n\}$ tal que

$$\mathbf{v}_j \in \mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_{j-1},\mathbf{v}_{j+1},...,\mathbf{v}_n\}),$$

o que sucede se e só se existirem números reais $c_1,...,c_{j-1},c_{j+1},...,c_n$, tais que

$$\mathbf{v}_j = c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_{i-1}\mathbf{v}_{j-1} + c_{j+1}\mathbf{v}_{i+1} + ... + c_n\mathbf{v}_n.$$

Em caso contrário diremos que os vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$, são **linearmente independentes**.

São válidos os seguintes critérios para aferir se um conjunto de n vectores é linearmente dependente ou independente:

i) No caso $n = 2$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, são vectores linearmente dependentes se e só se um deles é múltiplo do outro.

ii) Se existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $\mathbf{v}_j = 0$, então $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{v}_n$, são vectores linearmente dependentes.

iii) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ...$, $\mathbf{v}_n$, são linearmente independentes se e só se o sistema homogéneo na forma vectorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + ... + x_n\mathbf{v}_n = 0$$

nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, só tem a solução nula.

Em termos de componentes, $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, ..., v_{m1})$, $\mathbf{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, ..., v_{m2})$, ..., $\mathbf{v}_n = (v_{1n}, v_{2n}, ..., v_{mn})$, são linearmente independentes se e só se o sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, só tem a solução nula.

iv) $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, ..., v_{m1})$, $\mathbf{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, ..., v_{m2})$, ..., $\mathbf{v}_n = (v_{1n}, v_{2n}, ..., v_{mn})$, são linearmente independentes se e só se a matriz

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$$

pode ser transformada através de operações elementares de linhas numa matriz em escada de linhas com n pivôs.

vi) Se $n > m$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ...$, $\mathbf{v}_n$, são vectores linearmente dependentes.

2.1 Exercícios

Exercício 10 *Em cada um dos seguintes casos, mostre que os vectores indicados são linearmente dependentes:*

a) *Em* $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 4)$.

b) *Em* $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 3, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$.

c) *Em* $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 3, 2, 3)$.

d) *Em* $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 1, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 0)$.

Exercício 11 *Em cada um dos seguintes casos, analise se vectores indicados são linearmente independentes:*

a) *Em* $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, 1)$.

b) *Em* $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 1, 1)$.

Exercício 12 *Quais dos seguintes conjuntos são constituídos por vectores linearmente independentes?*

a) $\{(1,1,1),(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

c) $\{(1,1,1),(2,2,0),(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

d) $\{(2,46,6),(23,2,-123),(1,23,1),(1,10,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

e) $\{(1,0,-1,0),(4,0,-3,1),(2,0,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

f) $\{(1,0,-1,0),(4,0,-3,1),(2,1,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

g) $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$.

h) $\{(1,23,1,14),(1,12,1,0),(24,-1,0,0),(11,19,17,-123),(101,119,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

Exercício 13 *Calcule o único valor de a que faz com que os vectores de $\mathbb{R}^4$*

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0,2)\,,\ \ \mathbf{v}_2 = (1,0,1,0)\,,\ \ \mathbf{v}_3 = (2,0,1,a)$$

sejam linearmente dependentes.

Exercício 14 *Determine os únicos valores de α e β que fazem com que os vectores de $\mathbb{R}^4$*

$$\overrightarrow{v_1} = (1,7,3,\beta)\,, \quad \overrightarrow{v_2} = (1,7,4,7\beta) \quad e \quad \overrightarrow{v_3} = (1,\alpha,6,1)$$

sejam linearmente dependentes.

3 Bases de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ diz-se uma **base** de $\mathbb{R}^m$ se $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^m$ e se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ forem vectores linearmente independentes.

As bases de $\mathbb{R}^m$ possuem as seguintes características:

- Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^m$ então $n = m$. Isto é, todas as bases de $\mathbb{R}^m$ possuem m vectores.

- Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, são vectores linearmente independentes então $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

- Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$ então $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Mudanças de base

Se $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^n$, qualquer vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de um único modo como combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$. Isto é, existem escalares únicos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ tais que

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

Dizemos então que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ são as coordenadas de $\mathbf{x}$ na base ordenada $\mathcal{B}$:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Designando por $\mathcal{E}_n = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e considerando as habituais coordenadas do vector $\mathbf{x}$ na base $\mathcal{E}_n$,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix},$$

passamos de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n}$ através da multiplicação de uma matriz que representamos por $M_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{B}}$ e a que chamamos **matriz de mudança de base**:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_n} = \mathbf{M}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Concretamente, se $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, ..., v_{n1})$, $\mathbf{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, ..., v_{n2})$, ..., $\mathbf{v}_n = (v_{1n}, v_{2n}, ..., v_{nn})$, então

$$\mathbf{M}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & ... & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & ... & v_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ v_{n1} & v_{n2} & ... & v_{nn} \end{bmatrix}.$$

A passagem da base $\mathcal{E}_n$ para a base $\mathcal{B}$ será feita mediante a matriz

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_n} = \mathbf{M}^{-1}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{B}}.$$

Dadas duas bases arbitrárias de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$, $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$, pode ser obtida por intermédio da base canónica, $\mathcal{E}_n$, através do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_1 \arrow[r, "M_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{B}_1}"] \arrow[d, "M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}"'] & \mathcal{E}_n \arrow[dl, "M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{E}_n}"] \\ \mathcal{B}_2 & \end{tikzcd},$$

a partir do qual facilmente se conclui que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{E}_n} \mathbf{M}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{B}_1}.$$

3.2 Exercícios

Exercício 15 *Mostre que qualquer base de* $\mathbb{R}^n$ *tem* n *vectores.*

Exercício 16 *Determine quais dos seguintes conjuntos são bases de* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $\{(1,0),(0,1)\}$.

b) $\{(1,1),(0,3)\}$.

c) $\{(1,0),(0,3),(2,5)\}$.

d) $\{(1,2)\}$.

e) $\{(1,1),(0,0)\}$.

Exercício 17 *Quais dos conjuntos indicados a seguir constituem bases de* $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

b) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,2,1)\}$.

c) $\{(3,0,0),(1,1,0),(2,2,2),(1,3,5)\}$.

d) $\{(1,1,1),(2,2,0)\}$.

Exercício 18 *Indique quais dos conjuntos seguintes são bases de* $\mathbb{R}^4$*:*

a) $\{(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,1,0),(2,1,-1,0)\}$.

b) $\{(1,3,0,0),(1,1,3,1),(2,2,3,2),(2,3,3,2),(2,4,1,2)\}$.

c) $\{(2,0,0,2),(1,1,0,0),(0,0,2,3),(1,2,1,2)\}$.

d) $\{(2,0,0,2),(1,1,0,0),(1,2,1,2)\}$.

Exercício 19 *Seja* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ *a base de* $\mathbb{R}^2$ *constituída pelos vectores*

$$\mathbf{v}_1 = (1,0) \quad e \quad \mathbf{v}_2 = (1,1).$$

a) *Qual é o vector de* $\mathbb{R}^2$ *que na base* $\mathcal{B}$ *tem coordenadas* $(2,2)$?

b) *Calcule as coordenadas do vector* $(3,5)$ *na base* $\mathcal{B}$.

c) *Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *nesta base.*

Exercício 20 *Seja* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ *a base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída pelos vectores*

$$\mathbf{v}_1 = (2,0,0), \quad \mathbf{v}_2 = (1,1,0) \quad e \quad \mathbf{v}_3 = (1,1,1).$$

a) *Qual é o vector de* $\mathbb{R}^3$ *que na base* $\mathcal{B}$ *tem coordenadas* $(0,3,5)$?

b) *Calcule as coordenadas do vector* $(2,0,1)$ *na base* $\mathcal{B}$.

c) *Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *nesta base.*

Exercício 21 A *é matriz de mudança de base se e só se* A *é invertível. Justifique.*

Exercício 22 *Quais das matrizes indicadas a seguir podem ser matrizes de mudança da base canónica, $\mathcal{E}_2$, para uma outra base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$? Nos casos afirmativos indique a respectiva base $\mathcal{B}$.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 23 *Os vectores $\mathbf{u} = (-1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, 3)$ constituem uma base de $\mathbb{R}^2$.*

a) *Qual a matriz, $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_1 \longleftarrow \mathcal{E}_2}$, de mudança da base canónica, $\mathcal{E}_2$, para $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$?*

b) *Se $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ for uma outra base de $\mathbb{R}^2$ cuja matriz de mudança da base canónica, $\mathcal{E}_2$, para $\mathcal{B}_2$ é*

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix},$$

determine $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

c) *Qual a matriz, $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \longleftarrow \mathcal{B}_1}$, de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$?*

Exercício 24 *Dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ têm nas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente, as seguintes coordenadas:*

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}_1} = (1, -1)\,, \; [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}_2} = (0, 2)\,, \; [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1} = (1, 2)\,, \; [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = (3, 6)\,.$$

Quais as matrizes de mudança de base: $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$ e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}$?

Exercício 25 *Considere a base ordenada de $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B}_U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ onde*

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 1) \;, \qquad \mathbf{u}_2 = (1, 7, 7) \;, \qquad \mathbf{u}_3 = (0, 3, 4)\,.$$

a) *Quais as coordenadas do vector $(3, 1, -7)$ na base $\mathcal{B}_U$.*

b) *Calcule $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que as coordenadas de $\mathbf{w}$ na base $\mathcal{B}_U$ sejam dadas por $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$.*

c) *Quais as coordenadas do vector $(3, 1, -7)$ na base $\mathcal{B}_V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ formada pelos vectores $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$ que satisfazem as igualdades*

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \;, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \;, \qquad \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

4 Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Um subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$ é dito um **subespaço** de $\mathbb{R}^n$ se satisfizer as seguintes condições:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$, $\forall \mathbf{x} \in S, \forall \mathbf{y} \in S$.

2) $\alpha \mathbf{x} \in S$, $\forall \mathbf{x} \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4.1 Bases e dimensão de subespaços

À semelhança do que sucede com $\mathbb{R}^n$, relativamente a um qualquer subespaço S de $\mathbb{R}^n$, podemos analogamente formular o conceito de base de S. Assim, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_p\} \subset S$ diz-se uma **base de** S, se $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_p$ forem vectores linearmente independentes e $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = S$.

Mantêm-se as seguintes características das bases de $\mathbb{R}^n$:

- Todas as bases de S possuem o mesmo número de elementos. Esse número é chamado de **dimensão de** S e representado por $\dim S$.
- Se $\dim S = p$, qualquer conjunto de p vectores de S que sejam linearmente independentes constitui uma base de S.
- Se $\dim S = p$, qualquer conjunto de p vectores de S que sejam geradores de S, constitui uma base de S.

4.2 Exemplos

1. $S = \{\mathbf{0}\}$ constitui um subespaço de $\mathbb{R}^n$, chamado **subespaço trivial**. Adoptaremos a convenção de que este subespaço é gerado pelo conjunto vazio. Isto é, convenciona-se que $\mathcal{L}(\varnothing) = \{\mathbf{0}\}$. Assim, como o vector nulo é linearmente dependente, a única base do subespaço nulo é o conjunto $\varnothing$ e por conseguinte, a sua dimensão é zero.

2. Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ...,$ $\mathbf{v}_p$, são vectores de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\})$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, dito agora **subespaço gerado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$.

3. Se U e V são dois subespaços de $\mathbb{R}^n$, o conjunto $U \cap V$ também é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, dito **subespaço intersecção de** U **com** V. O conjunto $U \cup V$ pode não ser um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Por essa razão, considera-se o conjunto
$$U + V = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in U \text{ e } \mathbf{y} \in V\},$$
o qual constitui um subespaço de $\mathbb{R}^n$, dito **subespaço soma de** U **com** V. É ele o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém $U \cup V$. As dimensões destes espaços relacionam-se através da fórmula
$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V.$$

4. Associados a uma matriz $m \times n$,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
são considerados os seguintes subespaços:

   (a) Se
   $$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}), \ \mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}), ..., \mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}),$$
   são as colunas de $\mathbf{A}$, $\mathcal{L}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n\})$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$, chamado de **subespaço das colunas da matriz A** e representado por Col$\mathbf{A}$. Observemos que $\mathbf{y} \in$ Col$\mathbf{A}$ se e só se existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.

(b) $\mathrm{Nul}\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, designado por **subespaço nulo da matriz A**.

4.3 Característica e nulidade de uma matriz

Dada uma matriz $\mathbf{A}$ $(m \times n)$, à dimensão do subespaço Col$\mathbf{A}$ chama-se **característica de A**, que designaremos por $\mathrm{c}(\mathbf{A})$:

$$\mathrm{c}(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{Col}\mathbf{A}).$$

A dimensão do espaço nulo de $\mathbf{A}$ toma o nome de **nulidade de A** e será designada por $\mathrm{n}(\mathbf{A})$:

$$\mathrm{n}(\mathbf{A}) = \dim(\mathrm{Nul}\mathbf{A}).$$

Característica e nulidade satisfazem as seguinte relação fundamental:

$$\mathrm{c}(\mathbf{A}) + \mathrm{n}(\mathbf{A}) = n.$$

4.4 Teorema da matriz inversa

Estes novos conceitos permitem-nos acrescentar ao teorema da matriz inversa o seguinte:

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(1) $\mathbf{A}$ é invertível.

(2) $\mathrm{Col}\mathbf{A} = \mathbb{R}^n$.

(3) $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = n$.

(4) $\mathrm{Nul}\mathbf{A} = \{0\}$.

(5) $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 0$.

4.5 Exercícios

Exercício 26 *Representе graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do plano, identificando os que são subespaços de* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \ \ e \ x - y = 0\}$.

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercício 27 *Represente graficamente cada um dos seguintes subconjuntos do espaço, identificando os que são subespaços de* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$.

d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \text{ e } x - y + 2z = 0\}$.

e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

Exercício 28 *Considere as matrizes*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) $(1, 3) \in \mathrm{Col}\mathbf{A}$*?*

b) $(1, 0, 0) \in \mathrm{Col}\mathbf{B}$*?*

c) *Qual a nulidade de* $\mathbf{A}$*? E de* $\mathbf{B}$*?*

d) *Represente geometricamente* $\mathrm{Col}A$.

Exercício 29 *Determine a característica de cada uma das matrizes indicadas a seguir. Que conclui sobre a sua invertibilidade?*

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 30 *Para cada uma das matrizes indicadas a seguir, determine bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo. Indique ainda a característica e a nulidade de cada uma delas.*

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. h) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 31 *Para* $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *quaisquer, que valores deve assumir* d *para que a matriz*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tenha característica 1*?*

Exercício 32 *Com $h \in \mathbb{R}$ seja*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & h \end{bmatrix}$$

a) *Para que valores de h tem $\mathbf{A}$ característica máxima?*

b) *Se $h = -5$ qual a nulidade de $\mathbf{A}$?*

Exercício 33 *Seja $\mathbf{A}$ uma matriz 5×5. É verdadeiro ou falso que:*

a) *Se* $\mathrm{Nul}\mathbf{A} = \{0\}$*, então $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma e uma só solução, qualquer que seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$.*

b) *Se* $\dim(\mathrm{Col}\mathbf{A}) = \mathbf{4}$*, então $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é um sistema possível, qualquer que seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$.*

c) *Se* $\mathrm{c}\,(\mathbf{A}) = 3$*, então $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um sistema possível com $\mathbf{3}$ variáveis livres.*

d) *Se* $\mathrm{c}\,(\mathbf{A}) = 3$*, então* $\mathrm{c}\left(\mathbf{A}^T\right) = 2$.

e) *Se* $\mathrm{c}\,(\mathbf{A}) = 5$*, então a matriz $\mathbf{A}$ não é invertível.*

Exercício 34 *Para cada um dos seguintes subespaços S determine matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ tais que* $S = \mathrm{Nul}\mathbf{A} = \mathrm{Col}\mathbf{B}$.

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ e } y + 2z = 0 \}$.

c) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } y + 2z + 3w = 0 \}$.

d) $S = \mathcal{L}\{(3, 1), (2, 1)\}$.

e) $S = \mathcal{L}\{(3, 1)\}$

f) $S = \mathcal{L}\{(1, 2, 3), (0, 1, 4)\}$.

g) $S = \mathcal{L}\{(1, 1, 2, 3), (1, 1, 3, 4)\}$.

Exercício 35 *Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços:*

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0 \}$.

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0 \}$.

d) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0 \text{ e } x + y + 2z = 0 \}$.

e) $S = \mathcal{L}\{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}$.

f) $S = \mathcal{L}\{(1, -1, 1), (1, 1, 3), (0, 1, 1)\}$.

g) $S = \mathcal{L}\{(1, 4, -2, 3), (3, 6, 0, 3), (3, 4, 2, 1)\}$.

Exercício 36 *Em $\mathbb{R}^4$ considere o subespaço*

$$S = \mathcal{L}\{(1, 2, 3, 4), (2, 5, 6, 8), (1, 4, 3, 4), (1, 2, 4, 5)\}.$$

a) *Determine duas bases distintas de S.*

b) *Mostre que* $(0, -2, 3, 3) \in S$.

c) *Calcule as coordenadas de $(0, -2, 3, 3)$ em cada uma das bases determinadas na alínea* a).

Exercício 37 *Relativamente aos subespaços de* $\mathbb{R}^3$ *descritos a seguir, determine uma base e a sua dimensão.*

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\ \} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\ \}$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\ \} \cap \mathcal{L}(\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\})$.

c) $S = \mathcal{L}(\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}) \cap \mathcal{L}(\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\})$.

d) $S = \mathcal{L}(\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}) + \mathcal{L}(\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\})$.

e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} + \mathcal{L}(\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\})$.

f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\ \} + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}$.

Exercício 38 *Considere os seguintes subespaços* U *e* V *de* $\mathbb{R}^3$ *e determine uma base do subespaço soma* $U + V$ *e uma base do subespaço intersecção* $U \cap V$.

a) $U = \{(0, 0, 0)\}$ *e* $V = \{(0, 0, 0)\}$.

b) $U = \{(0, 0, 0)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$.

c) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}$.

d) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$.

e) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

f) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$.

Exercício 39 *Considere os seguintes subespaços* U *e* V *de* $\mathbb{R}^4$ *e determine uma base do subespaço soma* $U + V$ *e uma base do subespaço intersecção* $U \cap V$.

a) $U = \mathcal{L}\{(0, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0)\}$.

b) $U = \mathcal{L}\{(0, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 2, -1, 1)\}$.

c) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

d) $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 1, 1, 1)\}$.

e) $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.

f) $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, -2)\}$.

g) $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ *e* $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 2, 1)\}$.

5 Espaços e subespaços vectoriais

Um conjunto $E \neq \varnothing$ diz-se um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, se estiver munido de duas operações, uma entre elementos de E a que chamaremos soma e outra entre elementos de E e elementos de $\mathbb{K}$ a que chamaremos produto escalar,

$$+ : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \to \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad . : \alpha \in \mathbb{K}, \mathbf{v} \in E \to \alpha.\mathbf{v},$$

verificando os seguintes axiomas:

i) Associatividade da soma: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$.

ii) Comutatividade da soma: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$.

iii) Existência de elemento neutro ou zero: $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in E$.

iv) Existência de elemento simétrico : $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$, $\forall \mathbf{u} \in E$.

v) Distributividade do produto por escalares em relação à soma em E: $\alpha.(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha.\mathbf{u}+\alpha.\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

vi) Distributividade do produto por escalar em relação à adição em $\mathbb{K}$: $(\alpha+\beta).\mathbf{u}=\alpha.\mathbf{u}+\beta.\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

vii) Associatividade entre o produto por escalar e a multiplicação em $\mathbb{K}$: $\alpha.(\beta.\mathbf{u})=(\alpha\beta).\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

viii) A unidade de $\mathbb{K}$ como elemento neutro do produto por escalares: $1.\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in E$.

O primeiro exemplo de espaço vectorial (sobre $\mathbb{R}$) que nos pode ocorrer é o de $\mathbb{R}^n$. Podemos mesmo observar ser um espaço vectorial algo com uma estrutura algébrica idêntica à de $\mathbb{R}^n$. Daí que os diversos conceitos apresentados relativamente a $\mathbb{R}^n$ possam analogamente ser formulados num qualquer espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$. Muito brevemente recordamo-los seguidamente:

- Um subconjunto não vazio $S \subset E$ é dito um subespaço de E se satisfizer as seguintes condições:

  1) $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in S$, $\forall \mathbf{x} \in S, \forall \mathbf{y} \in S$.
  2) $\alpha \mathbf{x} \in S$, $\forall \mathbf{x} \in S, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Nestas condições, S verifica todos os axiomas i)-viii), constituindo ele próprio um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e em particular $\mathbf{0} \in S$.

- Dados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, elementos de E, $\mathbf{v} \in E$ diz-se uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ...,$ $\mathbf{v}_n$, se existirem escalares $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+...+x_n\mathbf{v}_n=\mathbf{v}.$$

  O conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ designa-se por $\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\})$ e forma o subespaço de E gerado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$.

- Os elementos de E, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, dizem-se linearmente dependentes sempre que um deles é combinação linear dos restantes. Em caso contrário diremos que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, são linearmente independentes; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes se e só se

$$x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+...+x_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0} \Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n=0.$$

- $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ diz-se uma base de E se $\mathcal{L}(\mathcal{B})=E$ e se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ forem vectores linearmente independentes.

- **Teorema de Steinitz.** Dado um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$:

  a) Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma base de E, então todas as bases de E possuem n elementos; n diz-se a dimensão de E $(\dim E = n)$.

  b) Se dim $= n$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, são vectores linearmente independentes então $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma base de E.

  c) Se $\dim S = n$, e $\mathcal{L}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}) = E$ então $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma base de E.

5.1 Exemplos

Vejamos alguns exemplos significativos de espaços vectoriais.

1. $\mathbb{C}^n = \{(z_1, ..., z_n) : z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\}$ munido de soma e de produto escalar análogos aos definidos para $\mathbb{R}^n$, constitui um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Facilmente se verifica que

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1), (i, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, i)\}$$

   é uma base de $\mathbb{C}^n$ enquanto espaço vectorial real. A sua dimensão será pois $2n$.

2. Mas do mesmo modo $\mathbb{C}^n$ também constitui um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, tendo como base

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1)\}.$$

   A sua dimensão será pois igual a n.

3. Designemos por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$. Munido da soma de matrizes e do produto de um escalar real por uma matriz, obtemos um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão mn: $\dim \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.
   Por exemplo $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem como base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   e $\dim \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

4. $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, conjunto das matrizes complexas $m \times n$, munido das mesmas operações de soma de matrizes e de produto de um escalar complexo por uma matriz, forma um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, cuja dimensão é igualmente mn.

5. Seja $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções reais tendo como domínio $\mathbb{R}$. Consideremos a soma de duas funções f_1 e f_2 como sendo a função $f_1 + f_2$ dada por

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

   e o produto de um escalar real α por uma função f como sendo a função αf tal que

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Munido destas operações $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ constitui um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Contudo, $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ não admite nenhuma base finita, dizendo-se por isso de um **espaço de dimensão infinita**.

6. Facilmente se observa que o conjunto dos polinómios de coeficientes reais com grau não superior a n,
$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$. Ao contrário de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tem dimensão finita, pois
$$\mathcal{P}_n = \{1, t, ..., t^n\}$$
constitui uma base de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, sendo portanto $\dim \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

7. Também o conjunto de todos os polinómios de coeficientes reais, independentemente do seu grau,
$$\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n : n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\},$$
constitui um subespaço vectorial de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$, igualmente de dimensão infinita.

5.2 Exercícios

Exercício 40 *Indique se os seguintes subconjuntos do espaço vectorial $\mathbb{P}_3$ (polinómios com grau menor ou igual a 3) constituem subespaços de $\mathbb{P}_3$:*

$$\begin{aligned} U &= \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(0) = p(1)\}. \\ V &= \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(-1) = p(0) = p(1) = 0\}. \\ W &= \left\{a + bt + ct^2 + dt^3 : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Exercício 41 *O subconjunto do espaço vectorial $\mathbb{P}_2$ (dos polinómios com grau $\leqslant 2$),*

$$U = \{p(t) \in \mathbb{P}_2 : p(0) = a\},$$

é um subespaço de $\mathbb{P}_2$ para qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$?

Exercício 42 *Relativamente ao espaço vectorial, $\mathbb{F}$, das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indique quais dos seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{F}$:*

$$\begin{aligned} U &= \{f \in \mathbb{F} : f(t) + f(-t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\}. \\ V &= \{f \in \mathbb{F} : f(t) = \cos(\pi t),\ \forall t \in \mathbb{Z}\}. \\ W &= \{f \in \mathbb{F} : f(t) = \sin(\pi t),\ \forall t \in \mathbb{Z}\}. \\ X &= \{f \in \mathbb{F} : f \text{ é diferenciável e } f'(t) = f(t),\ \forall t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Exercício 43 *Seja $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o espaço vectorial das matrizes reais $n \times n$. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são subespaços de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$?*

$$\begin{aligned} U &= \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} \text{ é invertível}\}. \\ V &= \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} \text{ não é invertível}\}. \\ W &= \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} \mathbf{A} = 0\}. \\ X &= \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} \text{ é simétrica}\}. \\ Y &= \{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} \text{ é de Markov}\}. \end{aligned}$$

Exercício 44 *Considere em* $\mathbb{P}_2$ *o conjunto de polinómios* $G = \{1+t, 1-t^2\}$.

a) *Mostre que o polinómio* $t + t^2$ *é combinação linear dos elementos de* G.

b) *Mostre que o polinómio* t *não é combinação linear dos elementos de* G.

c) G *gera* $\mathbb{P}_2$?

d) *Determine a forma geral dos polinómios* $p(t) \in \mathcal{L}(G)$.

Exercício 45 *Mostre que os polinómios*

$$p_1(t) = 1 + 2t - t^2,\ p_2(t) = 3 + t^2,\ p_3(t) = 5 + 4t - t^2,\ p_4(t) = -2 + 2t - t^2$$

geram $\mathbb{P}_2$.

Exercício 46 *Mostre que no espaço vectorial,* $\mathbb{F}$, *das funções reais de variável real, cada um dos seguintes conjuntos é constituído por funções linearmente dependentes.*

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \left\{2, \sin^2(t), \cos^2(t)\right\} & \text{b)} & \left\{\cos(2t), \sin^2(t), \cos^2(t)\right\} \\ \text{c)} & \left\{e^t, e^{-t}, \cosh(t)\right\} & \text{d)} & \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}. \end{array}$$

Exercício 47 *Dadas* n *funções* $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ..., $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *do espaço vectorial,* $\mathbb{F}$, *das funções reais de variável real, mostre que se existirem números* $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$ *tais que a matriz*

$$\begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \ldots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \ldots & f_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \ldots & f_n(t_n) \end{bmatrix}$$

é invertível, então f_1, f_2,..., f_n *são linearmente independentes.*

Exercício 48 *Aplicando o exercício anterior, mostre que os conjuntos*

$$\left\{1, t, e^t\right\} \ \text{ e } \ \{\sin(t), \cos(t), t\cos(t)\}$$

são constituídos por funções linearmente independentes. (Sugestão: no primeiro caso faça $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$; *no segundo faça* $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = \pi$*).*

Exercício 49 *Seja* $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ *o subconjunto de* $\mathbb{P}_2$ *constituído pelos polinómios*

$$p_1(t) = 1 + t,\ p_2(t) = 1 + 2t \ \text{ e } p_3(t) = t^2.$$

a) *Mostre que* $\mathcal{B}$ *é uma base de* $\mathbb{P}_2$.

b) *Qual é o polinómio que nesta base tem coordenadas* $(1, 3, -2)$?

c) *Determine as coordenadas do polinómio* $2 + 2t - t^2$ *na base* $\mathcal{B}$.

d) *Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um polinómio* $a + bt + ct^2$ *na base* $\mathcal{B}$.

Exercício 50 *Considere o espaço vectorial* $\mathbb{P}_3$ *e a sua base canónica* $\mathcal{P}_3 = (1, t, t^2, t^3)$.

a) *Mostre que* $\mathcal{B} = (1+t, 1-t-t^2, t^2, t^3)$ *é também uma base de* $\mathbb{P}_3$.

b) *Qual a matriz de mudança de base de* $\mathcal{P}_3$ *para* $\mathcal{B}$?

c) *Quais as coordenadas do polinómio* $1-2t+t^3$ *na base* $\mathcal{B}$?

Exercício 51 *Sejam* U *e* V *subespaços de um mesmo espaço vectorial* E.

a) *Mostre que intersecção* $U \cap V$ *é um subespaço de* E.

b) *Dê exemplos em que:*

i) *A união* $U \cup V$ ***é*** *um subespaço de* E.

ii) *A união* $U \cup V$ ***não é*** *um subespaço de* E.

Exercício 52 *Sejam* U *e* V *subespaços de um espaço vectorial* E *e considere-se o subconjunto soma*

$$U + V \overset{def}{=} \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in V\}.$$

Mostre que:

a) *O conjunto* $U \cup V$ *está contido no conjunto* $U + V$.

b) *A soma* $U + V$ *é um subespaço de* E.

c) *Se* W *for um subespaço de* E *que contém* $U \cup V$, *então* W *também contém* $U + V$.

d) *A soma* $U + V$ *é o menor subespaço de* E *que contém* $U \cup V$.

Exercício 53 *Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de* $\mathbb{P}_3$*:*

a) $S = \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(0) = 0\}$.

b) $S = \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(1) = 0\}$.

c) $S = \{p(t) \in \mathbb{P}_3 : p(1) = p(0)\}$.

Exercício 54 *Considere o espaço vectorial* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *das matrizes reais* $m \times n$.

a) *Mostre que* $S = \left\{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = 0\right\}$ *é um subespaço de* $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. *Determine uma base deste subespaço.*

b) *Mostre que o conjunto* $S = \left\{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\right\}$ *(das matrizes que são simétricas) é um subespaço de* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *e determine uma sua base.*

c) *Mostre que o conjunto* $S = \{\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i + j \text{ é par}\}$ *é um subespaço de* $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. *Encontre uma base para este subespaço.*

Exercício 55 *No espaço vectorial* $C^2(\mathbb{R})$ *das funções reais de variável real que são duas vezes diferenciáveis, considere o subconjunto*

$$S = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}) : f'' - 2f' + f = 0\right\}.$$

a) *Mostre que* S *é um subespaço de* $C^2(\mathbb{R})$.

b) *Mostre que o conjunto* $\{e^t, te^t\}$ *é uma base de* S. *(Sugestão: mostre que se* $f \in S$, *então* $f(t)e^{-t}$ *é um polinómio com grau* $\leqslant 1$*).*

c) *Tendo em conta a alínea anterior mostre que, dados* a *e* $b \in \mathbb{R}$, *existe uma e uma só função* $f \in S$ *tal que* $f(0) = a$ *e* $f'(0) = b$.

6 Soluções

1) b) Não. c) Não. d) $\mathcal{L}(G) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\}$.

2) c) G não gera $\mathbb{R}^3$. d) $L(G) = \{(a,b,\mathrm{c}) \in \mathbb{R}^3 : b = c\}$.

3) c) $(2,2,7,8) = (3-3w)(1,2,3,4) - 2(1,3,3,4) + (1+2w)(1,2,4,4) + w(1,2,1,4)$.

4) a) Não. b) Sim c) Não. d) Não.

5) a) Sim. b) Sim. c) Não. d) Não.

6) $a = 3$.

7) $(a,\mathrm{b}) = (0,1)$.

8) $a = 1$.

9)$\alpha = 4$ e $\beta = -11$.

11) a) $L.D.$ b) $L.I.$

12)a) $L.I.$ b) $L.I.$ c) $L.D.$ d) $L.D.$ e) $L.D.$ f) $L.I.$ g) $L.I.$ h) $L.D.$

13) $a = 2$.

14)$\alpha = 7$ e $\beta = 1/19$.

16) a) Sim. b) Sim. c) Não. d) Não. e) Não.

17) a) É base de $\mathbb{R}^3$. b) Não é base de $\mathbb{R}^3$. c) Não é base de $\mathbb{R}^3$. d) Não é base de $\mathbb{R}^3$.

18) a) Não é base de $\mathbb{R}^4$. b) Não é base de $\mathbb{R}^4$. c) É base de $\mathbb{R}^4$. d) Não é base de $\mathbb{R}^4$.

19) a) $(4,2)$. b) $(-2,5)$. c) $(a-b,\mathrm{b})$.

20) a) $(8,8,5)$. b) $(1,-1,1)$. c) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, b-c, c\right)$.

22) $\mathbf{A}, \mathcal{B} = \{(1/5,0),(0,1/4)\}$. $\mathbf{B}, \mathcal{B} = \{(-1,3),(1,-2)\}$. $\mathbf{D}, \mathcal{B} = \{(1/2,-1/2),(1/2,1/2)\}$.
C não é matriz de mudança de base.

23) a) $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} -3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{x} = (1/18, 5/18)$, $\mathbf{y} = (-2/9, -1/9)$.

c) $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$.

24) $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10/3 & 4/3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/2 \\ 5/3 & -1/2 \end{bmatrix}$.

25 a) $[(3,1,-7)]_{\mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$. b) $\mathbf{w} = (3, 0. - 7)$. c) $[(3,1,-7)]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$.

26) a) É subespaço de $\mathbb{R}^2$. b) É subespaço de $\mathbb{R}^2$. c) É subespaço de $\mathbb{R}^2$.
d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

27) a) É subespaço de $\mathbb{R}^3$. b) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$. c) É subespaço de $\mathbb{R}^3$.
d) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$. e) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$. f) Não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

28) a) Não. b) Sim. c) 1 e 0. d) Recta $y = x$.

29) a) 3; invertível. b) 2; não invertível. c) 2; não invertível.

30) a) $\{1\}$ é base de Col$\mathbf{A}$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 1$, $\{(0,1)\}$ é base de Nul$\mathbf{A}$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 1$.

b) $\{(1,1)\}$ é base de Col$\mathbf{A}$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 1$, $\{(-1,1)\}$ é base de Nul$\mathbf{A}$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 1$.

c) $\{(1,1),(2,1)\}$ é base de Col$\mathbf{A}$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 2$, $\{(-3,1,1)\}$ é base de Nul$\mathbf{A}$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 1$.

d) $\{(1,2,1),(1,1,2)\}$ é base de Col$\mathbf{A} =$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 2$,

$\varnothing$ é base de Nul$\mathbf{A}$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 0$.

e) $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é base de Col$\mathbf{A}$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 3$,

$\varnothing$ é base de Nul$A$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 0$.

f) $\{(1,1,0),(-1,1,1)\}$ é base de Col$\mathbf{A} =$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 2$,

$\{(-2,-1,1)\}$ é base de Nul$\mathbf{A}$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 1$.

g) $\{(1,3,3),(4,6,4)\}$ é base de Col$\mathbf{A} =$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 2$,

$\{(-2,1,1,0),(1,-1,0,1)\}$ é base de Nul$\mathbf{A}$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 2$.

h) $\{(1,0,-1,0),(4,0,-3,1)\}$ é base de Col$\mathbf{A}$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 2$,

$\{(2,-1,1)\}$ é base de Nul$A$, $\mathrm{n}(A) = 1$.

i) $\{(1,2,3,4),(2,1,2,3),(3,2,1,0)\}$ é base de Col$\mathbf{A}$, $\mathrm{c}(\mathbf{A}) = 3$,

$\{(-1,0,-5,4)\}$ é base de Nul$\mathbf{A} =$, $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 1$.

31) $d = bc/a$.

32) a) $h \neq -5$. b) $\mathrm{n}(\mathbf{A}) = 2$.

33) a) V. b) F. c) F. d) F. e) F.

34 a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$,

f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

35) a) $\{(-1,1)\}$ é uma base de S, $\dim S = 1$.

b) $\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$ é uma base de S, $\dim S = 2$.

c) $\{(-1,1,0)\}$ é uma base de S, $\dim S = 1$.

d) $\{(-1,1,0,0),(-1,-1,1,1)\}$ é uma base de S, $\dim S = 2$.

e) $\{(1,1),(1,2)\}$ é uma base de S, $\dim S = 2$.

f) $\{(1,-1,1),(1,1,3)\}$ é uma base de S, $\dim S = 2$.

g) $\{(1,4,-2,3),(3,6,0,3)\}$ é uma base de S, $\dim S = 2$.

36) a) Por exemplo $\{(1,2,3,4),(2,5,6,8),(1,2,4,5)\}$ e $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$. c) Na base $((1,2,3,4),(2,5,6,8),(1,2,4,5))$ o vector $(0,-2,3,3)$ tem coordenadas $(1,-2,3)$. Na base $((1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,1))$ o vector $(0,-2,3,3)$ tem coordenadas $(0,-2,3)$.

37) a) $\{(-1,1,0)\}$ é uma base de S, $\dim S = 1$.

b) $\{(-2,1,1)\}$ é uma base de S, $\dim S = 1$.

c) $\{(1,0,0)\}$ é uma base de S, $\dim S = 1$.

d) $\{(1,0,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ é uma base de S, $\dim(S) = 3$.

e) $\{(1,1,1),(0,1,1),(-1,1,0)\}$ é uma base de S, $\dim S = 3$.

f) $\{(-1,1,0),(-1,0,1),(3,0,1)\}$ é uma base de S, $\dim S = 3$.

38) a) A base de $U \cap V$ e de $U + V$ é o conjunto vazio.

b) A base de $U \cap V$ é o conjunto vazio. Uma base de $U + V$ é $\{(1,1,1)\}$.

c) A base de $U \cap V$ é o conjunto vazio. Uma base de $U + V$ é $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

d) Uma base de $U \cap V$ e de $U + V$ é $\{(1,0,0)\}$.

e) A base de $U \cap V$ é o conjunto vazio. Uma base de $U + V$ é $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

f) A base de $U \cap V$ é $\{(1,0,0)\}$. Uma base de $U + V$ é $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

39) a) A base de $U \cap V$ é o conjunto vazio.

Uma base de $U + V$ é $\{(0,1,-1,1),(1,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}$.

b) Uma base de $U \cap V$ é $\{(0,-1,1,-1)\}$.

Uma base de $U + V$ é $\{(0,1,-1,1),(1,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}$.

c) Uma base de $U \cap V$ é $\{(1,1,0,0),(0,0,0,1)\}$.

Uma base de $U + V$ é $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$.

d) Uma base de $U \cap V$ é $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,-1),(1,1,1,1)\}$.

Uma base de $U + V$ é $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$.

e) Uma base de $U \cap V$ é $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\}$.

Uma base de $U + V$ é $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\}$.

f) Uma base de $U \cap V$ é $\{(1,1,-1,-1)\}$.

Uma base de $U + V$ é $\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,-1,1)\}$.

g) Uma base de $U \cap V$ é $\{(1,1,1,1)\}$.

Uma base de $U + V$ é $\{(1,1,0,0),(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$.

40) U e V são subespaços de $\mathbb{P}_3$. W não.

41) U é subespaço de $\mathbb{P}_3$ se e só se $a = 0$.

42) U, W e X são subespaços de $\mathbb{F}$. V não.

43) W e X são subespaços de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. U, V e Y não.

44) c) G não gera $\mathbb{P}_2$. d) $\mathcal{L}(G) = \{b - c + bt + ct^2 : b, c \in \mathbb{R}\}$.

49) b) $4 + 7t - 2t^2$; c) $(2, 0, -1)$; d) $(2a - b, b - a, c)$.

50) b) $\mathbf{M}_{\mathcal{P}_3\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $(-1/2, 3/2, 3/2, 1)$.

53) a) $\{t, t^2, t^3\}$ é uma base de S. b) $\{t - 1, t^2 - 1, t^3 - 1\}$ é uma base de S.

c) $\{1, t^2 - t, t^3 - t\}$ é uma base de S.

54) a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.