

Números Reais

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:

António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação e alguma revisão editorial.

A versão corrente é de 13 de Maio de 2006. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de <http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlreais.pdf>. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.



Na mesma série:

- Lógica matemática.
- Conjuntos.
- Números reais.
- Sucessões.
- Funções.
- Funções reais de variável real.
- Funções trigonométricas.
- Função exponencial.
- Continuidade.
- Derivadas.

Índice

Índice	3
1 Introdução	5
2 Marcação na recta real dos números racionais	9
3 Uma pedra no meio do caminho	20
4 Uma interpretação geométrica dos números reais	28
5 Esboço de uma teoria axiomática para os números reais	57
Índice remissivo	70
Nomenclatura	72

1 Introdução

Os números são a ciência do tempo e a geometria é a ciência do espaço.

Paráfrase de uma ideia na
Crítica da Razão Pura de
Immanuel Kant.

Frases deste género são sempre radicais — se, por um lado, podem revelar relações profundas entre certos entes, por outro, fazem-no de forma extremamente exagerada: o tempo geometrizou-se na recta e na circunferência e a geometria procurou nos números medida para os seus elementos. Mesmo nas técnicas mais rudimentares se utilizam réguas e relógios que são instrumentos mistos.

Assim, embora o estudo dos números e da geometria se possa fazer de forma independente, o que tem a sua virtude porque permite determinar as respectivas características “puras”, não é desrazoável estudar e complementar o nosso conhecimento sobre os números reais utilizando, como suporte, resultados geométricos que estão ao nosso dispor. É isso que iremos fazer, naturalmente de forma muito sucinta de início (porque já conhecida), levantando-se depois algumas questões que, tanto pela sua delicadeza como pela dificuldade de formalização, são pouco tratadas no ensino secundário.

Referimos, ainda, que não é nosso objectivo uma apresentação formal nem dos números reais nem da geometria euclidiana, porque a achamos desajustada dos conhecimentos dos alunos e até inconveniente ao propósito deste texto. *Nesta perspectiva as “provas” dos resultados que se apresentam baseiam-se, em última análise, em certas propriedades dos números e dos elementos geométricos que consideramos ser do senso comum.*



Algumas observações de natureza geométrica

Na representação dos números reais na recta real utilizamos apenas resultados bem conhecidos do ensino secundário. Sobre os entes (ponto, recta, régua, compasso, etc.) que intervêm nesses resultados, faremos, apenas, algumas observações ingénuas.

O ponto Não foi há muito tempo que me contaram a história (verídica) de uma criança, com não mais de 4 anos, que colocava ao pai a seguinte dificuldade que o preocupava:

— ... é que sabes, pai, por mais que afie o lápis apenas consigo fazer uma bolinha e nunca um ponto.

Não foi certamente esta a frase que ele disse e muito provavelmente também não foi a que me contaram. Mas foi isto, e não creio ter adulterado o sentido, que me ficou e maravilhou.

Tão novo, aquele menino conseguia distinguir entre o que se podia fazer com meios materiais (o lápis e o afia lápis) e o ente ideal que é o ponto.

Quando falamos de um ponto entendêmo-lo no sentido que este menino deu a esse termo.

A recta Quando falamos de uma recta não estamos a pensar nalgum risco que alguém fosse fazer numa folha de papel com uma régua e um lápis vulgares. Por muito afiado que esteja o lápis e por muito perfeita e longa que seja a régua vulgar, nunca obtemos aquele ente matemático que, não só não tem espessura como se prolonga indefinidamente nos dois sentidos.

A régua A régua é um instrumento geométrico que nos serve apenas para traçar segmentos de recta que unem dois pontos distintos. Trata-se de uma régua não graduada, que não serve, portanto, para medir distâncias.

Admitimos que um segmento de recta com mais de um ponto, determina uma e uma só recta.

O compasso O compasso é um instrumento geométrico que nos serve apenas para traçar arcos de circunferência. Um compasso, como o referido, não se pode utilizar para transportar distâncias — supomos que as hastes do compasso colapsam depois da sua utilização.



A recta real

A recta real \mathcal{R} é uma recta que supomos escolhida de uma vez por todas e onde foram marcados dois pontos distintos que designamos por O e I . Uma representação grosseira será



Figura 1: Recta real \mathcal{R} .

As letras O e I não foram escolhidas ao acaso — a letra O será a imagem geométrica do número real zero e a letra I será a imagem geométrica do número real um.

Como se sabe uma recta pode ser percorrida em dois sentidos distintos. Ora, o facto de terem sido marcados dois pontos (O e I) em \mathcal{R} , permite a determinação, por convenção, de um sentido de percurso. Escolhemos o sentido de percurso de O para I .

Assim a recta real tem um sentido de percurso privilegiado, o que, dados dois pontos X e Y de \mathcal{R} , distintos, nos permite dizer que um precede o outro.

Escrevemos $X < Y$ sse X precede Y e é distinto de Y . Esta relação, $<$, introduzida na recta real, tem propriedades semelhantes às da relação menor ($<$) no conjunto dos números reais.

Escrevemos $X = Y$ para dizer que X e Y designam o mesmo ponto da recta real. O símbolo \leq colocado entre dois pontos da recta real tem o significado seguinte:

$$X \leq Y \quad \text{sse} \quad X = Y \quad \text{ou} \quad X < Y.$$

São geometricamente evidentes as seguintes propriedades da relação \leq :

- i) $\forall_{X \in \mathcal{R}} \quad X \leq X.$
- ii) $\forall_{X, Y \in \mathcal{R}} \quad X \leq Y \wedge Y \leq X \Rightarrow X = Y.$
- iii) $\forall_{X, Y, Z \in \mathcal{R}} \quad X \leq Y \wedge Y \leq Z \Rightarrow X \leq Z.$

É igualmente evidente que

- iv) Sendo X e Y dois pontos de \mathcal{R} , é verdadeira uma e uma só das proposições seguintes: $X < Y$, $X = Y$, $Y < X$.

Denotaremos por \mathcal{R}^+ o conjunto dos pontos X da recta real tais que $O < X$. A \mathcal{R}^+ chamaremos a semi-recta real positiva. Analogamente, designaremos por \mathcal{R}^- o conjunto dos pontos X da recta real tais que $X < O$ e chamaremos a \mathcal{R}^- a semi-recta real negativa.



Um breve resumo deste capítulo

Apresentaremos, agora, um breve resumo das orientações gerais deste Capítulo.

- (1) Do conjunto \mathbb{R} dos números reais, *admitimos que são bem conhecidos os números racionais, bem como as suas propriedades elementares.*

Naturalmente, supomos que é sabida a existência de números reais que não são racionais — os chamados números irracionais cuja definição e propriedades, por terem sido apenas ligeiramente abordadas no ensino secundário, nos merecerão uma análise mais detalhada.

- (2) *Admitimos que é do conhecimento geral que os números reais têm uma representação geométrica como pontos da recta real \mathcal{R} , de tal forma que: a cada número real x corresponde um e um só ponto X de \mathcal{R} (a representação geométrica de x), e que para cada ponto $X \in \mathcal{R}$ existe e um e um só $x \in \mathbb{R}$ tal que X é a representação geométrica de x .*

A análise desta correspondência, que se presumiu existir mas nunca foi totalmente definida, será o fio condutor que nos guiará na revisão que vamos fazer dos números reais, bem como dos complementos que, necessariamente, teremos que apresentar.

- (3) Assim começamos por uma apresentação sucinta da representação dos números racionais na recta real, dedicando-nos em seguida, após um parágrafo intermédio onde se estabelece a insuficiência dos números racionais, à introdução dos números irracionais e a algumas das suas propriedades, *tendo sempre em vista uma perspectiva geométrica.*
- (4) No último parágrafo deste Capítulo faremos um esboço de uma Teoria Axiomática para os números reais.

2 Marcação na recta real dos números racionais

Dissemos atrás que são bem conhecidos os números racionais. Trata-se, agora, de lhes dar uma representação geométrica.

Marcação dos números reais na recta real

Começemos, então, a marcar na recta real os números naturais. O número 1 não oferece dificuldade, uma vez que já dissemos que a sua imagem geométrica é o ponto I da recta real. Para marcar o número 2 basta considerar o único ponto $A \in \mathcal{R}^+$ da intersecção com a recta real, da circunferência de centro em I e com raio igual ao comprimento do segmento OI , como é sugerido pela figura seguinte:

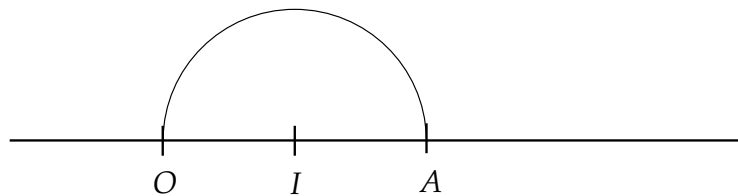


Figura 2: A é a imagem geométrica de 2.

Para marcar o número 3 basta repetir a construção anterior, mantendo o raio e considerando agora, como centro da circunferência, o ponto A

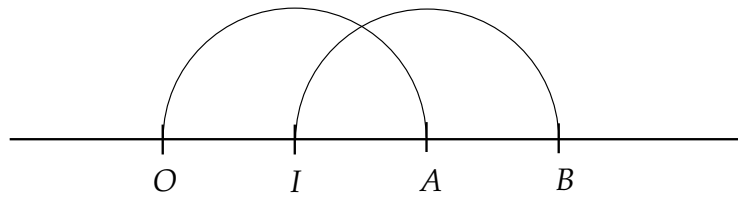


Figura 3: B é a imagem geométrica de 3.

Obtivemos, assim, o ponto B que é a imagem geométrica de 3.

Se prosseguirmos indefinidamente com este processo iremos marcando sucessivamente os números naturais.

Note-se que, se M é a imagem geométrica do número natural m e N é a imagem geométrica do número natural n que se lhe segue ($n = m + 1$), então o ponto P da recta real é a imagem geométrica do número natural que se segue a n , ou seja, de $n + 1$.

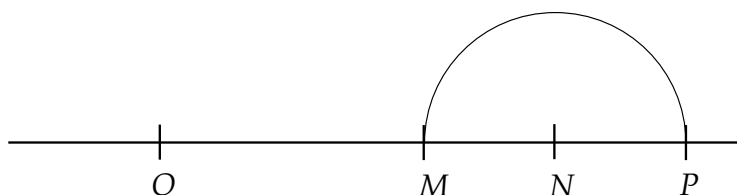


Figura 4: P é a imagem geométrica de $n + 1$.

Assim, o processo gerador dos números naturais que (intuitivamente) consiste em dizer que

1 é um número natural e que todos os outros se obtêm deste por sucessivas adições da unidade

tem aqui a seguinte versão geométrica

I é a imagem geométrica de 1 e todas as outras imagens geométricas de números naturais obtêm-se desta por sucessivas aplicações do processo considerado na figura 4 (ao qual damos o nome de processo elementar).

Exercício 1. Seja n um número natural e designemos por N a sua imagem geométrica. O exercício consiste em marcar¹ na recta real o número $n + 1$, utilizando apenas régua e compasso e tendo apenas conhecimento prévio dos pontos O e I de \mathcal{R} . Note-se que, para aplicar o processo elementar (figura 4), necessitava-se do ponto M (imagem geométrica de $n - 1$) e que só se dispõe agora dos pontos O, I e N .



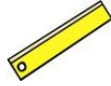
Designaremos, como é usual, por \mathbb{N} o conjunto dos números naturais, e designaremos por \mathcal{N} o conjunto das suas imagens geométricas.

Assim, o conjunto \mathcal{N} pode ser definido como sendo o conjunto dos pontos $X \in \mathcal{R}$ que são imagens geométricas de elementos de \mathbb{N} . Mas, curiosamente, o conjunto \mathcal{N} pode também ser definido da seguinte forma: \mathcal{N} é o subconjunto de \mathcal{R} que satisfaz as condições seguintes:

- (i) $I \in \mathcal{N}$.
- (ii) dado $X \in \mathcal{R}$, X pertence a \mathcal{N} sse $X = I$ ou pode ser obtido de I por um conjunto finito de aplicações sucessivas do processo elementar.

¹Pressupõe-se que num número de passos independente de n , caso contrário poder-se-ia repetir a construção anterior.

Esta introdução do conjunto \mathcal{N} é interessante, porque permite defini-lo em termos puramente geométricos, sem fazer apelo a um conhecimento prévio de \mathbb{N} .



Vejam agora qual a representação geométrica da soma de dois números naturais. Sejam m e n dois números naturais e sejam M e N as suas (respectivas) imagens geométricas. Como podemos representar geometricamente $m + n$?

Começemos por notar que $m + 3$ é igual a $m + (1 + 1 + 1)$ e que, portanto,

$$m + 3 = \{[(m + 1) + 1] + 1\}.$$

Assim, para obter $m + n$, basta adicionar n vezes ao número m o número 1. Desta forma, sendo M a imagem geométrica de m , para obter o ponto $P \in \mathcal{R}$ correspondente a $m + n$, basta tomar o ponto M e utilizar n vezes o processo elementar.



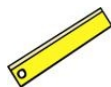
Como vimos atrás, não só os números naturais têm uma representação geométrica, como a adição de dois números naturais também se pode interpretar geometricamente. Ficou assim definida uma operação em \mathcal{N} (ou seja, uma aplicação de $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ em \mathcal{N}) que, a cada par $(M, N) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ associa um (e um só) $S \in \mathcal{N}$

$$\mathcal{N} \times \mathcal{N} \ni (M, N) \mapsto S \in \mathcal{N}$$

onde, sendo M a representação geométrica de m e N a representação geométrica de n , S é a representação geométrica de $m + n$.

A fim de distinguir a adição em \mathbb{N} da correspondente operação em \mathcal{N} , designamos esta última por \oplus . Escrevemos assim

$$S = M \oplus N.$$



Como se sabe, a adição é comutativa e associativa, o que se pode expressar da forma seguinte:

$$\begin{aligned}\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m + n &= n + m \\ \forall m, n, p \in \mathbb{N} \quad (m + n) + p &= m + (n + p).\end{aligned}$$

Claro que a estas propriedades da adição em \mathbb{N} correspondem as seguintes propriedades da operação \oplus em \mathcal{N} :

$$\begin{aligned}\forall M, N \in \mathcal{N} \quad M \oplus N &= N \oplus M \\ \forall M, N, P \in \mathcal{N} \quad (M \oplus N) \oplus P &= M \oplus (N \oplus P).\end{aligned}$$

Ora, tal como o conjunto \mathcal{N} podia ser introduzido sem o conhecimento de \mathbb{N} (ver atrás), também, como vimos, a operação \oplus pode ser definida sem recurso à adição em \mathbb{N} . E, o que é mais, a comutatividade e associatividade de \oplus são geometricamente evidentes.



Para falar da multiplicação em \mathbb{N} (ou em \mathcal{N}) podemos seguir, passo a passo, o que fizemos com a adição, utilizando o mesmo tipo de discurso e só o modificando quando tal fosse necessário — o que terá forçosamente de acontecer, uma vez que a adição e a multiplicação são operações diferentes. Deixamos este trabalho ao cuidado do leitor.



Marcação dos números inteiros na recta real

O conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} surge para que se possa definir a subtracção de um número natural m por um número natural n .

Para que se entenda a impossibilidade de definir a subtracção em \mathbb{N} (e, portanto, a necessidade de introdução do conjunto \mathbb{Z}) é indispensável saber o que é a subtracção.

Começemos com a subtracção em \mathbb{N} :

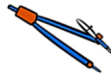
dados dois números naturais m e n , pretendemos que a subtracção de m por n ($m - n$) seja o único número natural p tal que

$$m = n + p$$

Posta assim a questão, temos dois problemas a resolver:

- (1) (existência) dados $m, n \in \mathbb{N}$, existirá pelo menos um $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$?
- (2) (unicidade) mesmo que exista um tal p , será ele único?

Como se sabe, (1) e (2) têm resposta afirmativa sse $m > n$. Na sequência, utilizaremos a representação geométrica dos números naturais para justificar a afirmação precedente.



Sejam M e N as imagens geométricas de m e n , respectivamente, e suponhamos $M > N$ (o que corresponde a $m > n$). Ora N obtém-se de I utilizando $(n - 1)$ vezes o processo elementar, o mesmo acontecendo com M , utilizando-se, agora, o processo elementar $(m - 1)$ vezes. Resulta daqui que, partindo de I e depois de atingido o ponto N , alcançamos o ponto M após um número finito de passos elementares. É também evidente que atingido este ponto (M), quaisquer novas utilizações do processo elementar nos conduzem a pontos $Q > M$.

Assim, sendo p o número de vezes que utilizamos o processo elementar para, partindo de N , atingir o ponto M , se tem $N \oplus P = M$ e portanto $n + p = m$ (ver figura 5).

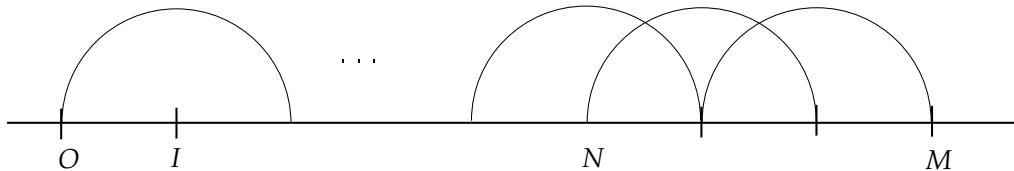


Figura 5: Caso $p = 3$, ou seja, $m = n + 3$, ou ainda, $m - n = 3$.

Conclui-se daqui que a subtração $m - n$ é única em \mathbb{N} , se $m > n$. Se $m = n$, um argumento semelhante à prova da unicidade, mostra que a subtração é impossível em \mathbb{N} .



De acordo com o que foi dito anteriormente, para calcular $7 - 2$ basta contar o número de processos elementares que, partindo da imagem geométrica de 2, atingem a imagem geométrica de 7.

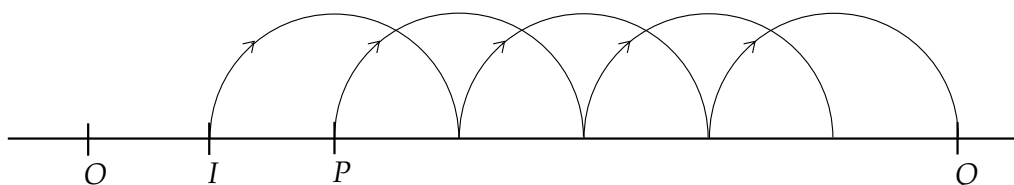


Figura 6: P é a imagem geométrica de 2 e Q é a imagem geométrica de 7.

Assim $7 - 2 = 5$. Note-se que, nesta figura 6, indicamos um sentido de percurso do compasso (o de 2 para 7) em cada um dos processos elementares, sentido esse que foi assinalado por uma seta. Note-se ainda que o resultado da subtracção é o número de processos elementares que se utilizaram para, partindo de P (imagem geométrica de 2), atingir o ponto Q (imagem geométrica de 7).

Utilizando o mesmo exemplo ($7 - 2 = 5$), vamos, agora, indicar um outro processo geométrico que nos permite obter o mesmo resultado.

Neste outro processo, em vez de partirmos do ponto P , partimos do ponto Q e utilizamos processos elementares com sentido de processo inverso.

Vejam como se procede no exemplo ($7 - 2 = 5$) (ver figura 7). Começando no ponto Q (imagem geométrica de 7), utilizamos 2 vezes o processo elementar (com sentido de percurso inverso), o que determina um ponto S da recta real.



Figura 7: Q é a imagem geométrica de 7.

O resultado da subtracção é, então, o único natural (5) cuja imagem geométrica é S , o que é obviamente verdadeiro neste caso. Ora esta equivalência dos dois processos geométricos não é uma casualidade — ela permanece verdadeira sempre que pretendemos fazer a subtracção de m por n , com $m > n$.

Embora sendo redundantes, queremos salientar que na primeira construção o resultado da subtracção é determinado pelo número de processos elementares, enquanto que na segunda construção, o resultado da subtracção é o natural cuja imagem geométrica é o ponto S obtido.



Esta segunda ideia para obter o resultado da subtração de 7 por 2, não é um mero processo alternativo. Ela contém, em potência, o processo gerador da imagem geométrica dos números inteiros não naturais. Vejamos porquê.

Consideremos, em primeiro lugar, a subtração de 3 por 3, que já sabemos não poder ser um número natural. Ora, se utilizarmos o segundo processo, obtemos o ponto O que corresponde ao número 0. O mesmo aconteceria, como é fácil ver, se quiséssemos subtrair m de m ($m \in \mathbb{N}$). Isto conduz-nos a considerar o conjunto $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (bem como $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{O\}$), no qual a subtração de m por n já é sempre possível (e única) desde que $m \geq n$.

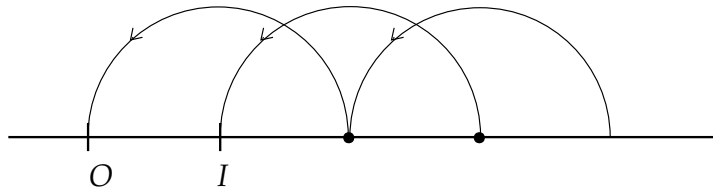


Figura 8: $3 - 3 = 0$.

Consideremos, agora, a subtração de 3 por 4. Uma aplicação automática do processo anterior (ver figura 9) conduz-nos ao ponto J a que, naturalmente, chamamos a imagem geométrica de -1 .

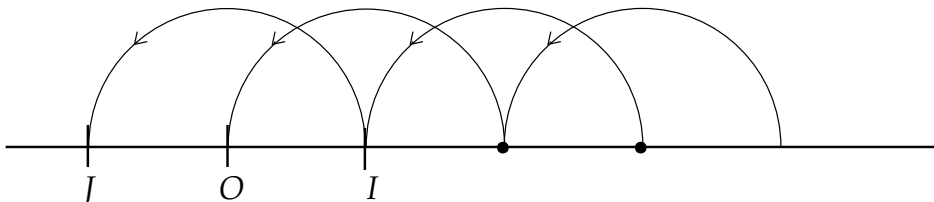


Figura 9: J é a imagem geométrica de $3 - 4$.

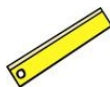
Note-se que J , estando à mesma distância de O do que o ponto I , tem um papel semelhante em \mathcal{R}^- , ao que I tinha em \mathcal{R}^+ .

Em \mathcal{R}^+ , marcavam-se os naturais por aplicações sucessivas, feitas a partir do ponto I , do processo elementar (descrito no sentido de O para I). Da mesma forma podemos proceder em \mathcal{R}^- , marcando os pontos que se obtêm a partir do ponto J , por sucessivas aplicações do processo elementar descrito, agora, no sentido de O para J — designamos tal conjunto por $-\mathcal{N}$.

Encontra-se, desta forma, um conjunto \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = -\mathcal{N} \cup \{O\} \cup \mathcal{N}$$

(que é a imagem geométrica de \mathbb{Z}), onde se encontram todas as imagens geométricas de $m - n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), quer m seja maior que n (caso em que a imagem geométrica está em \mathcal{N}); quer m seja igual a n (caso em que a imagem geométrica é O); quer m seja menor que n (caso em que a imagem geométrica está em $-\mathcal{N}$).

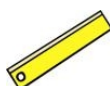


É muito fácil, agora, determinar as construções geométricas² que correspondem às operações de adição e multiplicação no conjunto \mathbb{Z} . Partindo de tais construções, constata-se, sem dificuldade, que as propriedades elementares da adição, da subtracção e da multiplicação em \mathbb{Z} , têm um paralelo geométrico que lhes dá um carácter de evidência.



Das quatro operações elementares (adição, subtracção, multiplicação e divisão), falta-nos tratar a divisão.

Ora, se a impossibilidade de subtracção em \mathbb{N} , nos “obrigou” a passar de \mathbb{N} para \mathbb{Z} , o problema da divisão vai-nos conduzir à criação de um novo conjunto de números — o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais. É esse o assunto que tratamos na sequência.



Marcação dos números racionais na recta real

O conjunto dos \mathbb{Q} surge para que se possa definir a divisão de um número inteiro m , por outro número inteiro n distinto de zero.

Qual a razão da impossibilidade de uma boa divisão em \mathbb{Z} ? Isso resulta da definição de divisão, que ainda não foi dada. Ora,

²Estas construções utilizam apenas o processo elementar, quer descrito no sentido de O para I , quer descrito no sentido de O para J , com as excepções que a seguir se referem:

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad m + 0 = 0 + m, \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad m \cdot 0 = 0 \cdot m.$$

sendo $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, diz-se que o número r divide m por n sse $m = nr$.

Tal como no caso da subtracção temos aqui dois problemas:

- (1) (existência) dados $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, existirá pelo menos um $r \in \mathbb{Z}$ tal que $m = n \cdot r$?
- (2) (unicidade) mesmo que exista um tal r , será ele único?

Como sabemos, só em certos casos a divisão de $m \in \mathbb{Z}$ por $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ é um número inteiro — tal acontece, por exemplo, quando dividimos 4 por 2, ou 15 por 3, ou 120 por 6. Mas, se pretendermos dividir 1 por 2, sabemos que o resultado não vai ser um número inteiro.

Pensamos que, mais uma vez, uma interpretação geométrica põe em evidência o problema e esclarece o seu processo de resolução.

Começemos por pensar em m e n números naturais. Para se ter uma ideia prévia do processo geométrico que a seguir apresentamos, convém notar que se pretende que

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}.$$

Assim, introduziremos, em primeiro lugar, as imagens geométricas dos números da forma $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), seguindo-se depois a apresentação da construção que nos permite obter a imagem geométrica de $m \cdot \frac{1}{n}$.



A representação geométrica de $\frac{1}{n}$ está relacionada com o problema de dividir o segmento OI em n segmentos com igual comprimento. Vejamos como o podemos fazer.

Para simplificar a exposição, vamos descrever um processo geométrico que permite dividir o segmento OI em três partes iguais. Começamos, em primeiro lugar, por marcar na recta real os pontos A (imagem geométrica de 2) e B (imagem geométrica de 3). Seguidamente (ver figura 10) considera-se uma outra recta r , passando pelo ponto O e não coincidente com a recta real, na qual marcamos, utilizando o compasso, os pontos I' , A' e B' .

Tracemos agora, usando a régua, o segmento IB' e façamos passar por I' uma recta l paralela³ à determinada por IB' . Seja R o ponto de intersecção da recta l com a recta real. O ponto R é a imagem geométrica de $\frac{1}{3}$, uma

³Traçar uma paralela a uma recta passando por um ponto é algo possível com régua e compasso. Verifique! (N.E.)

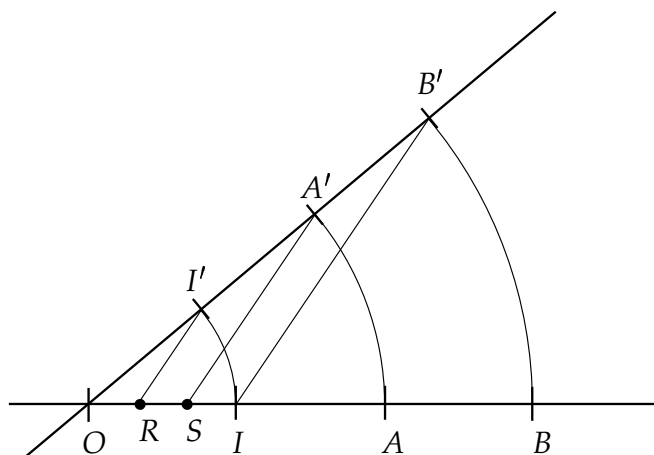


Figura 10: A é a imagem geométrica de 2, B a imagem de 3 e R a imagem de $\frac{1}{3}$.

vez que são iguais os comprimentos dos segmentos OR , RS e SI (como facilmente se prova utilizando apenas argumentos geométricos — faça a demonstração!).

Assim como se marcou $\frac{1}{3}$, se marcariam os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{20}$. Procedendo desta forma podemos ir marcando os pontos da forma $\frac{1}{n}$ com n tão grande quanto se queira.



Consideremos, agora, o problema de marcar na recta real os pontos da forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Trata-se, surpreendentemente, de uma questão trivial. Quando se escolheu o ponto I como imagem geométrica de 1, tal foi feito de forma arbitrária — qualquer outro ponto L ($O < L$) poderia ter sido o escolhido. Assim, fixado $n \in \mathbb{N}$, se escolhêssemos para I o ponto L imagem geométrica de $\frac{1}{n}$, e procedêssemos com L tal como procedíamos com I , iríamos marcando sucessivamente os pontos da forma $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{N}$). Para uma marcação dos pontos da forma $\frac{m}{n}$ (com $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$)⁴ recorreremos ao mesmo argumento e ao procedimento de marcação dos números inteiros.

As figuras 11 e 12 ilustram o discurso anterior.



⁴Se m for zero a imagem geométrica de $\frac{m}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) é o ponto O .

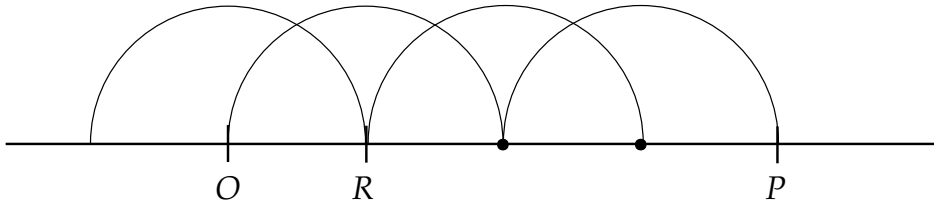


Figura 11: Marcação de $\frac{4}{3}$. R é a imagem geométrica de $\frac{1}{3}$ e P é a imagem geométrica de $\frac{4}{3}$.

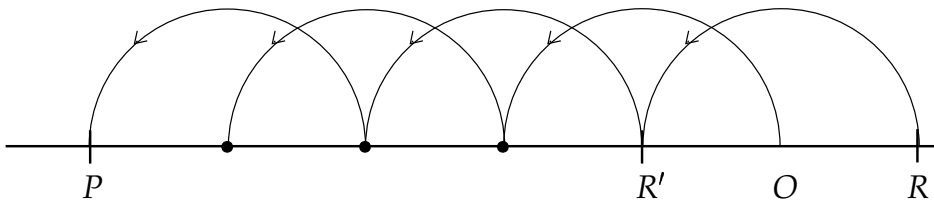


Figura 12: Marcação de $-\frac{5}{2}$. R é a imagem geométrica de $\frac{1}{2}$; R' é a imagem geométrica de $-\frac{1}{2}$; P é a imagem geométrica de $-\frac{5}{2}$.

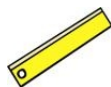
Para obter construções geométricas correspondentes às operações algébricas em \mathbb{Q} , basta-nos notar que:

$$\begin{aligned} \forall p, r \in \mathbb{Z} \forall q, s \in \mathbb{N} \quad \frac{p}{q} + \frac{r}{s} &= \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}, \\ \forall p, r \in \mathbb{Z} \forall q, s \in \mathbb{N} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} &= \frac{p \cdot r}{q \cdot s}, \\ \forall p, r \in \mathbb{Z} \forall q, s \in \mathbb{N} \quad \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} &= \frac{p \cdot s}{q \cdot r}. \end{aligned}$$

Para obter, por exemplo, a imagem geométrica do produto

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$$

basta considerar o natural $n (= q \cdot s)$ e marcar seguidamente a imagem geométrica de $\frac{m}{n}$, onde $m = p \cdot r$.



3 Uma pedra no meio do caminho⁵

Vimos atrás como podíamos marcar na recta real os números racionais e quais as construções geométricas que ilustravam as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão entre esses números. Como estas operações têm as propriedades desejáveis (comutatividade, associatividade, distributividade, etc.) poderíamos pensar ter atingido o nosso objectivo, ou seja, uma representação geométrica dos números e das operações entre eles. Recordemos, contudo, que, no início deste Capítulo, tínhamos admitido existir uma correspondência bijectiva (dada pela representação geométrica) entre os números e os pontos da recta real. Ora, se a cada número racional x corresponde um e um só ponto X de \mathcal{R} , falta ver se, dado um $X \in \mathcal{R}$ existe um e um só x racional cuja imagem geométrica seja X .

Será esta a questão de que nos iremos ocupar, utilizando para isso um problema de do qual daremos uma visão ingénua, que se revelará extremamente significativa, e onde faremos simultaneamente uso das propriedades dos números e da sua representação geométrica.

Um problema de medição

Marquemos na semi-recta positiva um ponto P e procuremos medir o

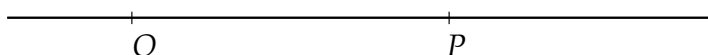


Figura 13: O ponto P na semi-recta positiva.

comprimento do segmento OP utilizando a régua (ideal).

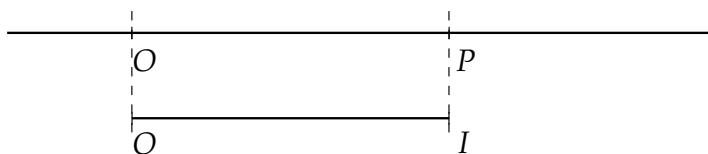


Figura 14: Comprimento do segmento OP (neste caso 1).

Ora, como se mede um segmento, utilizando uma régua? Em primeiro lugar fazemos coincidir o ponto O da régua com o ponto O da recta real e

⁵*Uma pedra no meio do caminho* é uma citação de um poema de Carlos Drummond de Andrade.

marcamos nesta o ponto I (que, aliás, já estava marcado). Se $P < I$ então não conseguimos, com esta régua, determinar o comprimento de OP . Se I coincidir com P dizemos que o comprimento de OP é 1. Se $I < P$ então deslocamos a recta fazendo agora coincidir o ponto O da régua com o ponto I da recta real e, mais uma vez, uma e uma só das três situações pode acontecer:

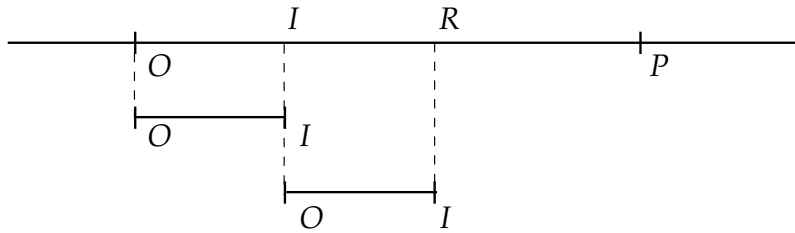


Figura 15: Comprimento do segmento OP .

- i) $P < R$, caso em que, com esta régua, não podemos medir o comprimento do segmento OP ;
- ii) $R = P$, caso em que dizemos que o comprimento de OP é 2 (2 é o número de vezes que utilizámos a régua);
- iii) $R < P$, caso em que temos de repetir o processo, deslocando de novo a nossa régua.

Repetindo este processo concluímos que: ou a régua, após n utilizações, faz coincidir o ponto I com o ponto P (o comprimento de OP é, então, n), ou tal não acontece e ao fim de um certo número de utilizações o ponto I da régua ultrapassa o ponto P da recta real.

Neste último caso podemos dizer que, com esta régua, não se consegue medir o comprimento de OP . É o que se passa com pontos P que sejam imagem geométrica de $1/3$, ou de $5/2$, ou de $33/7$.

Como podemos ultrapassar esta dificuldade? A primeira ideia que nos ocorre é a de que a nossa régua é muito pobre — apenas os pontos O e I estavam marcados. Se utilizarmos uma régua onde se encontrem marcados os pontos O , I e D , sendo este último o ponto médio do segmento OI (ou seja, a imagem geométrica de $1/2$), facilmente se verifica que a imagem geométrica de $5/2$ se obtém após 5 utilizações da “sub-régua” OD . No entanto esta régua (OD) não nos permite calcular o comprimento dos segmentos OP , quando P designa a imagem geométrica de $1/3$ ou de $33/7$.

Somos assim levados a dividir o segmento OI num número cada vez maior de partes iguais. Se o dividirmos em 3 partes podemos medir o comprimento do segmento OP , onde P é a imagem geométrica de $1/3$, mas não o caso em que P corresponde a $33/7$. Para este último caso não basta dividir OI em quatro, cinco ou seis partes iguais. No entanto uma divisão em 7 partes iguais já o permite medir — bastará fazer 33 utilizações da sub-régua correspondente.

Estas considerações levam-nos à seguinte questão:

Dado um ponto P na semi-recta positiva, existirá alguma divisão do segmento OI num número finito de partes iguais, tal que uma destas partes caiba um número finito de vezes no segmento OP ?

Esta pergunta equivale à seguinte:

Será que todo o ponto $X \in \mathcal{R}$ é imagem geométrica de um número racional?

Vamos ver que não!

Uma Consequência Importante do Teorema de Pitágoras

Considerando a recta real \mathcal{R} e, tomando o segmento OI como cateto, construamos um triângulo rectângulo isósceles OIJ , onde IJ é o outro cateto, como se ilustra na figura seguinte (figura 16)⁶.

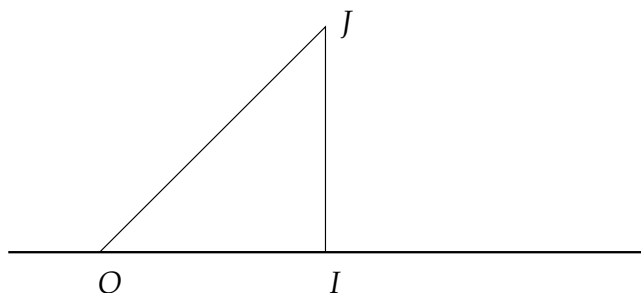


Figura 16: Triângulo OIJ .

Utilizando o compasso com centro em O e raio OJ marquemos o ponto R de intersecção da circunferência descrita pelo compasso com a semi-recta positiva.

⁶É um bom e fácil exercício construir os dois triângulos possíveis utilizando apenas régua e compasso.

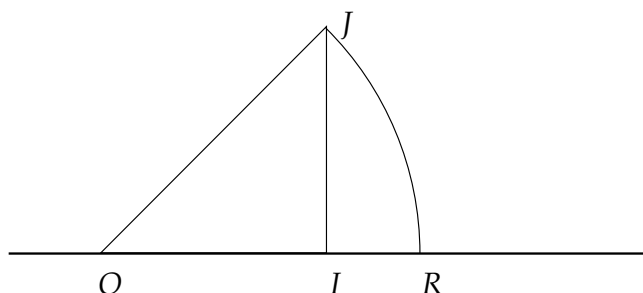


Figura 17: Triângulo OIJ e ponto R .

Vamos provar que não existe nenhuma divisão do segmento OI em partes iguais tal que uma qualquer delas caiba um número m de vezes no segmento OR , ou seja, tal que o comprimento do segmento OR se possa escrever na forma $\frac{m}{n}$, com m e n números naturais.

Designando por d o comprimento do segmento OR (que é igual ao do segmento OJ), sabemos, pelo teorema de Pitágoras, que

$$d^2 = 1 + 1 = 2. \quad (1)$$

Queremos, então, provar que d não pode ser da forma m/n , com m e n números naturais.

Façamos a demonstração por redução ao absurdo, ou seja, suponhamos que d é da forma m/n (com m e n números naturais) e cheguemos a uma contradição. Supomos, sem perda de generalidade, que m e n não são ambos pares, porque os podemos escolher primos entre si, ou seja, sem factores comuns.

Escrevamos então (1) na forma

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

onde m e n são números naturais que não são ambos números pares. Resulta daqui que

$$m^2 = 2n^2 \quad (2)$$

donde se conclui que m^2 é um número par. Ora, o quadrado de um natural ímpar é ainda um número ímpar (exercício), pelo que m terá de ser um número natural par, portanto da forma $2k$, onde k é um número natural. Mas, sendo $m = 2k$, segue-se de (2) que

$$4k^2 = 2n^2$$

donde

$$n^2 = 2k^2.$$

Assim, n^2 é par, e, portanto, usando o mesmo raciocínio que fizemos com m , podemos concluir que n é um número par.

Chegamos assim a uma contradição: *por um lado m e n são números naturais que não são ambos pares, e, por outro, m e n são números naturais pares.*

A demonstração está então concluída — o comprimento do segmento OR não é um número racional, o que é equivalente a dizer que o ponto R não é imagem geométrica de qualquer número racional.

Uma História Verídica e uma Experiência Imaginária

Há já alguns anos, estando eu num café perto do Instituto onde trabalho, dei por mim a ouvir a conversa entre dois alunos do ensino secundário. E o que me chamou a atenção foi a seguinte pergunta que um deles fez:

— ... mas e o que são os números irracionais?

ao qual o outro deu uma resposta lapidar:

— Olha, o $\sqrt{2}$ é um número irracional e parece-me que o π também é — mas não te preocupes porque eles são muito poucos.

Fiquei arrepiado! e só a muito custo me contive de lhes gritar:

— Vocês estão completamente enganados!

Depois, mais calmo, pensei que o erro (e é um erro tremendo) que eles cometiam tinha a sua razão de ser. Com efeito, os números racionais não só são bem conhecidos como também são usados nas mais elementares medições e transacções, bem como em todos os cálculos feitos nas calculadoras e nos computadores.

E os números irracionais?!... Ora esse... bem... para esses basta ver o trabalho que tivemos para demonstrar que $d(= \sqrt{2})$ é um número irracional!; e o π , como se demonstra que é irracional!; e o número e , que também é irracional. Até o facto de usarmos designações especiais (por exemplo π , e) para certos irracionais dá a sensação que eles são poucos ou raros.

Para termos algum vislumbre de como esta ideia (a de que os números irracionais são raros) é incorrecta, consideremos a seguinte experiência imaginária e ideal:

Suponhamos que, numa sala de aula, alguém traça no quadro um segmento da recta real⁷ (o que, como sabemos, é impossível, e, por isso dissemos que se trata de uma experiência imaginária) e suponhamos também

⁷Segmento com mais de um ponto.

que tenho na mão um ponteiro tão ideal que, se colocar a sua extremidade no segmento de recta, determino nele um e um só ponto. Posto isto, fecho os olhos e, com alguma (muitíssima) sorte, consigo que a extremidade do ponteiro toque no segmento de recta.

Perguntem-me agora: o ponto que determinaste no segmento da recta corresponde a um número racional ou a um número irracional?

A uma tal pergunta, a minha resposta é imediata: trata-se de um número irracional.

Como posso eu ter tanta certeza de que acertei num número irracional? É que a esperança de ter acertado num número racional é muito, muito menor do que ganhar um bilião de biliões de vezes seguidas a sorte grande. Quer isto dizer que, em qualquer segmento da recta real (com mais de um ponto), quase todos os pontos correspondem a números irracionais. Poucos são aqueles que correspondem a números racionais, embora, como veremos já a seguir, *o conjunto por eles formado seja infinito*.

Este último parágrafo pode (e deve!) causar alguma confusão no leitor. Adivinhamos a questão:

Então, se num segmento da recta real, o conjunto dos pontos correspondentes aos números racionais é infinito, e se existem muitos, muitos mais pontos correspondentes a números irracionais, o conjunto destes deveria ser mais infinito do que o outro infinito, o que parece não fazer sentido.

O que é espantoso é que tudo isto possa fazer sentido, se utilizarmos definições apropriadas e úteis⁸. Com estas definições pode-se estabelecer uma *hierarquia entre “os infinitos” e pode-se demonstrar que “o infinito do conjunto dos números racionais” é o “menor dos infinitos”*.

Os racionais são poucos mas estão muito bem distribuídos na recta real

Dissemos atrás, sem o demonstrar, que, em qualquer segmento (com mais de um ponto) da recta real, existe uma infinidade de elementos de \mathbb{Q} ⁹. Significa isto que entre dois números reais distintos (por mais próximos que estejam) existem sempre infinitos números racionais.

Ora isto é algo de extraordinário porque, se bem que na hierarquia dos infinitos eles estejam em último lugar, os números racionais têm imagens

⁸Tão úteis que me permitem dizer que o ponto que a contem no segmento da recta real corresponde a um número irracional.

⁹De forma similar às convenções já adoptadas Q designa a imagem de \mathbb{Q} em \mathbb{R} .

geométricas tão bem distribuídas na recta real, que, dados dois pontos A e B distintos, com $A < B$, existe sempre uma infinidade de pontos $R \in \mathcal{Q}$ satisfazendo $A < R < B$.

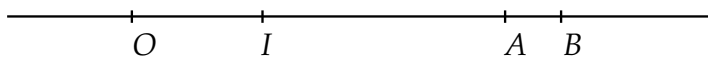


Figura 18: Os pontos A e B na recta real.

Se bem que o nosso objectivo seja demonstrar tal proposição, vamos começar por provar um resultado mais modesto e que é o seguinte:

Proposição 1. *Se $C \in \mathcal{R}^+$ então existe $R \in \mathcal{Q}$ tal que $O < R < C$.*

Demonstração. Se $I < C$, tem-se $R = I$. Suponha-se, então, que $C \leq I$. É geometricamente evidente que, após um número suficientemente grande de utilizações do processo ilustrado na figura 19 se obtém um ponto P tal que $I < P$.

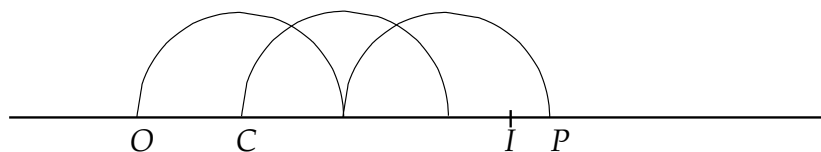


Figura 19: Os pontos C e P na recta real.

Designemos por m um número de utilizações do compasso que conduza a um ponto P , com $I < P$, e tomemos para R a imagem geométrica do número racional $\frac{1}{m+1}$.

Se $R < C$ o problema está resolvido. Se $R = C$ basta considerar o ponto médio do segmento OR (que é ainda a imagem geométrica de um número racional) para obter a solução do problema. Finalmente, provemos, por redução ao absurdo, que é impossível que se tenha $C < R$.

Suponhamos, então, que $C < R$. Como R é a imagem geométrica de $\frac{1}{m+1}$, após m utilizações do processo ilustrado na figura, obtemos o ponto I . Por outro lado, sendo agora o raio das circunferências o comprimento do segmento OR (em vez do comprimento do segmento OC), resulta imediatamente de $C < R$, que o ponto S que iremos obter satisfaz a $I < S$, donde resulta a contradição ($S = I$ e $I < S$).

□

Na proposição anterior provou-se que entre O e C ($C \in \mathcal{R}^+$) existe pelo menos um $R \in \mathcal{Q}$. Na proposição seguinte provaremos que o mesmo acontece em qualquer segmento AB ($A, B \in \mathcal{R}^+$, com $A < B$).

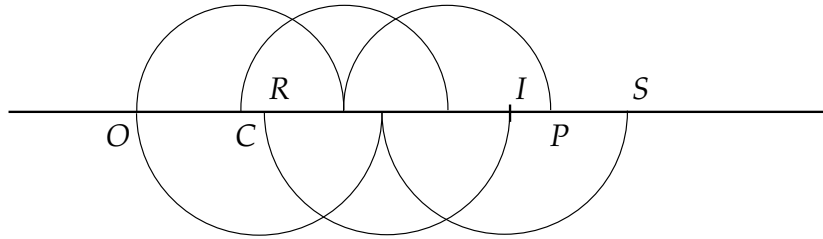


Figura 20: Os pontos C , R e S na recta real.

Proposição 2. *Sejam A e B dois pontos da semi-recta real positiva (com $A < B$), existe $R \in \mathbb{Q}$ tal que $A < R < B$.*

Demonstração. Consideremos, então, dois pontos A e B da semi-recta real positiva e suponhamos que $A < B$. Designemos por C o único ponto da semi-recta real positiva tal que OC tem comprimento igual ao de AB , como é ilustrado na figura seguinte:

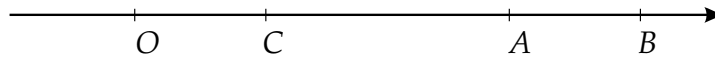


Figura 21: Os pontos A , B e C na recta real.

Exercício 2. Utilizando apenas régua e compasso, construa o ponto C .

Sabemos, pela proposição anterior, existir um $P \in \mathbb{Q}$ tal que $O < P < Q$. Consideremos, agora, os pontos da recta real que se obtêm por sucessivas aplicações ao ponto P do processo indicado na figura. Após um número (que pode ser grande) de utilização deste processo, obtemos um ponto S tal que $A < S$. Designemos por n o menor número de utilizações do processo que conduza a um ponto R , com $A < R$, e provemos que tal ponto R não só satisfaz a $A < R$ como também a $R < B$.

Ora, $(n - 1)$ vezes a utilização do processo referido conduz-nos a um ponto $L < A$ e uma nova utilização desse processo leva-nos ao ponto R ($A < R$). Atendendo a que o comprimento do segmento LR é igual ao de OP , conclui-se imediatamente que $R < B$. \square

Proposição 3. *Sejam A e B dois pontos da recta real (com $A < B$), existe $R \in \mathbb{Q}$ tal que $A < R < B$.¹⁰*

¹⁰A demonstração trata-se dum exercício geométrico simples (N. E.).

Proposição 4. *Seja A e B dois pontos da recta real (com $A < B$), o conjunto $\{R \in \mathbb{Q} : A < R < B\}$ é infinito.¹¹*

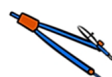
4 Uma interpretação geométrica dos números reais

Encontramo-nos na seguinte situação:

- (i) sabemos que existe uma correspondência bijectiva (dada pela representação geométrica) entre \mathbb{R} e \mathcal{R} ;
- (ii) sabemos, também, marcar na recta real os números racionais, mas vimos que existem pontos de \mathcal{R} que não são imagem geométrica de nenhum elemento de \mathbb{Q} ;
- (iii) foi-nos dito que \mathbb{Q} é um subconjunto (infinito) de \mathcal{R} com “poucos elementos”, ou seja, que quase toda a recta real é formada pelas imagens geométricas de números que não sabemos quais são (mas a que chamamos números irracionais).

Uma vez que não sabemos definir os números irracionais (aqueles cuja imagem geométrica não está em \mathbb{Q}), mas acreditamos que eles preenchem os inúmeros “buracos” da recta real, vamos aceitar que os *números reais são as suas imagens geométricas*.

Assim, em vez de falarmos de \mathcal{R} , falamos de \mathbb{R} (o que corresponde a identificar cada número racional com a sua imagem geométrica) e os restantes pontos de \mathcal{R} serão (aceite a identificação entre \mathbb{R} e \mathcal{R}) os números irracionais.



Os irracionais também estão muito bem distribuídos na recta real

Seja Y um número irracional e seja m um número natural maior que 1. Designamos por $m \cdot Y$ o número real que se obtém de Y através de $(m - 1)$ utilizações do processo elementar¹².

Seja W um número irracional e $n \in \mathbb{N}$. Para definir $\frac{W}{n}$, utilizaremos o mesmo processo que foi usado para introduzir a imagem geométrica de $\frac{1}{n}$ (ver figura 10). A figura 22 sugere o processo de construção de $\frac{W}{n}$ (o ponto Z) e evidencia que, se $X = \frac{W}{n}$, então $n \cdot X = W$.

¹¹Se fossem em número finito existe um, designemo-lo por C , que precede os restantes; aplique-se a proposição anterior a A e C (N. E.).

¹²Naturalmente, supomos, que, se $m = 1$, então $1 \cdot Y = Y$. Consideramos $0 \cdot Y = Y$.

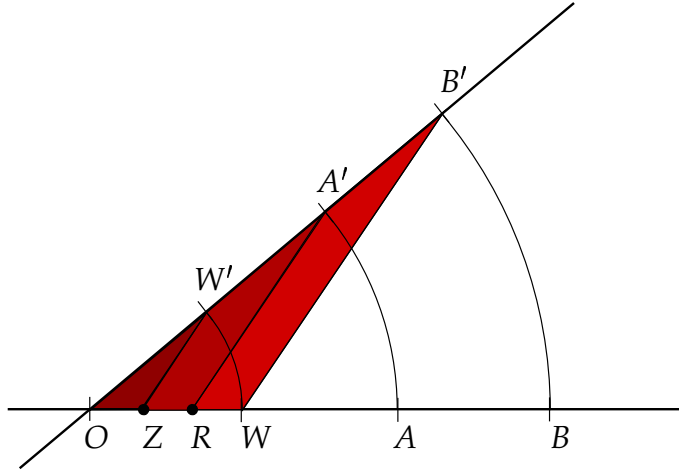


Figura 22: Caso em que $n = 3$, sendo, então, $Z = \frac{W}{3}$. $A \equiv 2W$ e $B \equiv 3W$. Note que os triângulos $W'OZ$, $A'OR$ e $B'OW$ são semelhantes, o que implica $3Z = W$.

Assim, sendo X um número irracional e $m, n \in \mathbb{N}$, se

$$\frac{mX}{n} = L$$

tem-se

$$mX = nL$$

e, portanto,

$$X = \frac{n}{m}L.$$

Estamos, agora, em condições de provar a seguinte proposição.

Proposição 5. Se X é um número irracional, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{mX}{n}$ é um número irracional.

Demonstração. Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que m e n são números naturais, e façamos a demonstração por redução ao absurdo. Suponhamos, então, que

$$\frac{mX}{n}$$

é um número racional, que designamos por l . De

$$\frac{mX}{n} = l$$

segue-se que

$$X = \frac{nl}{m}$$

o que é absurdo, uma vez que, sendo $l \in \mathbb{Q}$, se tem imediatamente, $\frac{nl}{m} \in \mathbb{Q}$, o que está em contradição com o facto de X ser irracional.

O caso em que $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ obtém-se de forma análoga, desde que se tenha definido previamente $m \cdot X$, com m inteiro não nulo. \square

Resulta desta proposição que basta encontrar um número irracional X , para provar que o conjunto por eles formado é infinito. Com efeito, todos os números da forma

$$\frac{X}{n}$$

são irracionais.

Ora, nós já conhecemos um número irracional — o $\sqrt{2}$.

Estamos agora em condições de provarmos, para os irracionais, uma proposição análoga àquela que mostrava que os racionais estavam muito bem distribuídos na recta real (proposição 4).

Proposição 6. *Se A e B (com $A < B$)¹³ são dois pontos da recta real, então existe uma infinidade de pontos $R \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{Q}$ tais que $A < R < B$.*

Demonstração. Recorde-se que a proposição 4 era o culminar de uma sequência de três proposições (as proposições 1, 2 e 3), onde o resultado final ia sendo apresentado de uma forma cada vez mais geral. A demonstração da proposição 6 pode seguir uma via análoga. Acontece, contudo, que as provas das proposições 2, 3 e 4 permanecem, com os ajustes naturais, válidas nesta nova situação. Só a prova da proposição correspondente à proposição 1 necessita de algumas (poucas) considerações suplementares, que passaremos a apresentar.

Como a escolha de I (na recta real) foi arbitrária, a proposição 1 permanece verdadeira se tivermos escolhido para imagem geométrica da unidade, o ponto $\sqrt{2}$. Leiamos, então, a proposição 1, com esta nova escolha:

Se $C \in \mathcal{R}^+$, existe um R da forma $\frac{m\sqrt{2}}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), tal que $0 < R < C$.

Ora, a proposição 5 diz-nos que R é irracional. \square



¹³Tendo identificado \mathbb{R} com \mathcal{R} , passamos a utilizar (em \mathcal{R}) o símbolo $<$ em vez do símbolo $<$.

As operações algébricas em \mathcal{R}

Em \mathcal{Q} tínhamos introduzido as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão. Temos, agora, o problema de introduzir tais operações em \mathcal{R} .¹⁴

Pretende-se, naturalmente, que as construções geométricas que definem as operações algébricas em \mathcal{R} , satisfaçam às condições seguintes (que, para simplificar a exposição se referem, apenas, à adição):

- (1) devemos saber adicionar dois elementos de \mathcal{R} ;
- (2) se os dois elementos a adicionar pertencerem a \mathcal{Q} , então a nova adição deve dar o mesmo resultado que obtínhamos anteriormente em \mathcal{Q} ;
- (3) esta nova adição em \mathcal{R} deve satisfazer, se possível, a todas as propriedades que eram verdadeiras em \mathcal{Q} .

Claro que o que se disse para a adição é também válido para as outras operações.

Nota. Uma observação sobre o ponto (2): trata-se de uma questão de coerência — quando, sobre os mesmos entes, definimos, de duas formas distintas, uma operação, cabe-nos provar que o resultado não depende das definições dadas.



Apresentamos, agora, as construções geométricas que definem as operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão em \mathcal{R} . A tais construções, ilustradas por figuras, segue-se a descrição do modo como foram obtidas. Para cada uma das construções, que *não carece de prova porque se trata de uma definição*, apresenta-se o argumento que esteve na origem e motivou a construção escolhida.

Os argumentos que apresentamos baseiam-se em resultados geométricos conhecidos — os dois primeiros (sobre a adição e subtracção) relativos à

¹⁴Quando atrás tratámos da boa distribuição dos irracionais em \mathcal{R} , já, sem o referir, havíamos abordado tal assunto: considerámos reais da forma

$$\frac{mX}{n} \quad (X \text{ irracional})$$

o que corresponde ao produto de um racional por um irracional. No entanto o tratamento sumário aí feito destinava-se exclusivamente a ser usado na prova da proposição 6 e, tendo cumprido o seu objectivo, pode agora ser esquecido.

igualdade de triângulos, os dois seguintes (sobre a multiplicação e divisão) relativos à semelhança de triângulos.

Referimos atrás que as construções geométricas são ilustradas por certas figuras. Em tais figuras está sempre presente uma representação (grosseira) da recta real, onde se encontram marcados, não só os pontos O e I , como também os pontos X e Y que irão ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos. Para o resultado de cada uma destas operações escolhemos a letra Z .

Em todas as figuras, além da recta real, foi escolhido um ponto P , não pertencente a \mathcal{R} , que determina com o ponto O , uma recta que designamos por r .

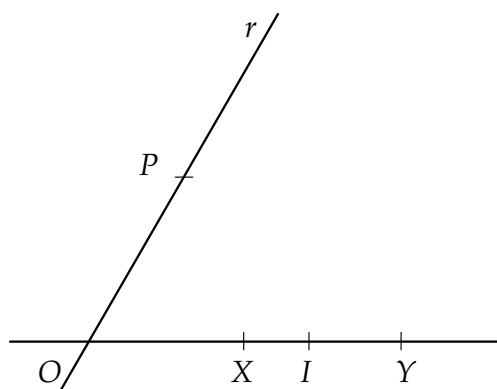


Figura 23: Recta real e recta r .

Uma figura deste tipo estará sempre presente nas definições de adição, subtracção, multiplicação e divisão.



Adição

Começemos por ilustrar com uma figura a adição de X com Y , que vamos designar por Z ($Z = X + Y$).

Descrição do modo como foi obtido Z

- (1) Faça-se passar por P uma recta paralela à recta real.
- (2) Trace-se o segmento de recta XP .

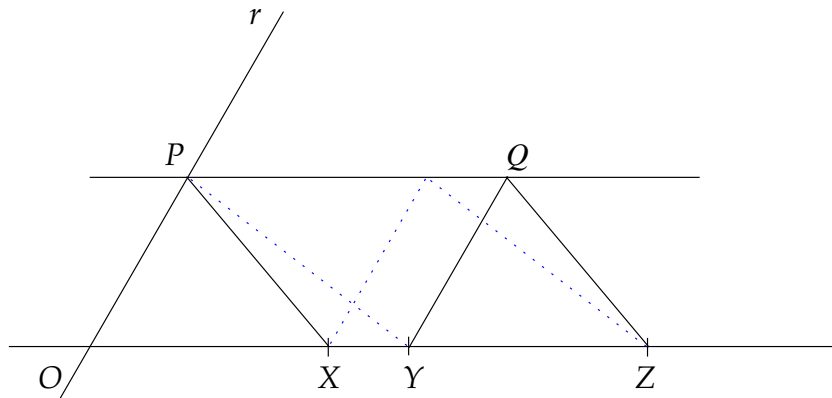


Figura 24: Adição de X com Y .

- (3) Faça-se passar por Y uma recta paralela à recta determinada por OP e designe-se por Q o ponto de intersecção desta recta com a recta referida em (1).
- (4) Faça-se passar por Q uma recta paralela à recta determinada por XP .
- (5) Designe-se por Z o ponto de intersecção da recta referida em (4) com a recta real.

Nota. Observe-se que no passo (2) traçou-se o segmento XP e não o segmento YP . É, no entanto, um exercício (faça-o!) provar que é indiferente ter começado com o segmento XP ou com o segmento YP — o ponto Z obtido seria o mesmo.

Resulta desta observação que $X + Y = Y + X$.

Argumento que motivou a construção

Note-se que os triângulos $\triangle OPX$ e $\triangle YQZ$ são iguais — os lados OP e YQ , bem como os lados XP e ZQ são iguais e os ângulos $\angle OPX$ e $\angle YQZ$ também o são. Assim o comprimento do segmento OX é igual ao comprimento do segmento YZ , o que nos conduziu a chamar a Z a soma de X com Y .

Exercício 3. Determine $X + Y$ nos casos em que

- (i) $X \in \mathcal{R}^-$ e $Y \in \mathcal{R}^-$;
- (ii) $X \in \mathcal{R}^-$ e $Y \in \mathcal{R}^+$;
- (iii) $X = O$ e $Y \in \mathcal{R}^+$.



Subtracção

Comecemos por ilustrar com uma figura a subtracção de X por Y , que vamos designar por Z ($Z = X - Y$).

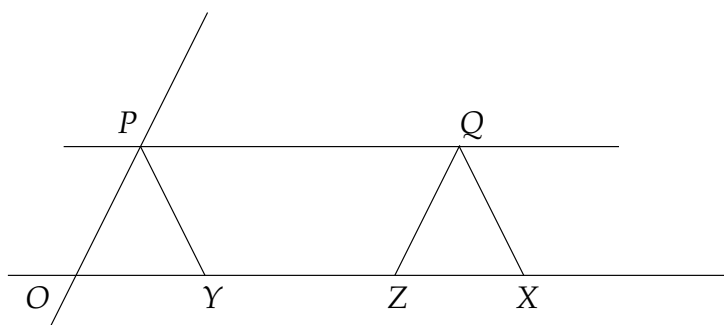


Figura 25: Subtracção de X por Y .

Descrição do modo como foi obtido Z

- (1) Faça-se passar por P uma recta paralela à recta real.
- (2) Trace-se o segmento de recta YP (note-se que se escolheu YP e não XP).
- (3) Faça-se passar por X uma recta paralela à recta determinada por YP e designe-se por Q o ponto de intersecção desta recta com a recta referida em (1).
- (4) Faça-se passar por Q uma recta paralela à recta determinada por OP .
- (5) Designe-se por Z o ponto de intersecção da recta referida em (4) com a recta real.

Argumento que motivou a construção

Note-se que os triângulos $\triangle OPY$ e $\triangle ZQX$ são iguais e que, portanto, o comprimento do segmento OY é igual ao comprimento do segmento ZX .

Nota. Observe-se que, neste caso, não é indiferente a escolha de Y no passo (2) — a adição é comutativa mas a subtracção não o é!

Exercício 4. Determine $X - Y$ nos casos em que

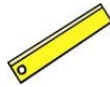
- (i) $X, Y \in \mathcal{R}^+$ e $X < Y$;
- (ii) $X, Y \in \mathcal{R}^+$ e $X = Y$;

(iii) $X, Y \in \mathcal{R}^-$ e $X < Y$;

(iv) $X \in \mathcal{R}^-$ e $Y \in \mathcal{R}^+$.

Que a construção geométrica apresentada está de acordo com o que pretendemos para a subtracção, é o objectivo do exercício seguinte.

Exercício 5. Prove que $Z = X - Y$ sse $X = Z + Y$.



Multiplicação

Comecemos por ilustrar com uma figura a multiplicação de X por Y , que vamos designar por Z ($Z = X \cdot Y$).

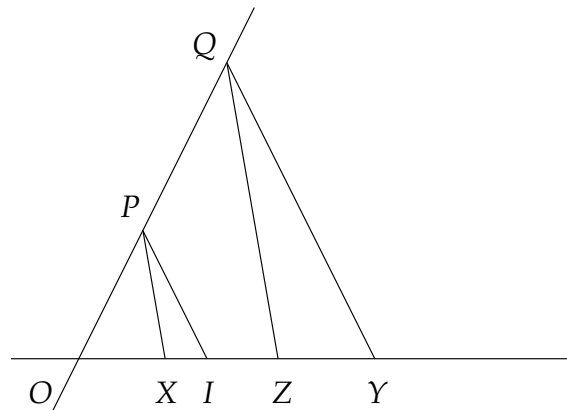


Figura 26: Multiplicação de X por Y .

Descrição do modo como foi obtido Z

- (1) Trace-se os segmentos de recta XP e IP .
- (2) Faça-se passar por Y uma recta paralela à recta determinada por IP , e designe-se por Q o ponto de intersecção desta recta com a recta determinada por OP .
- (3) Faça-se passar por Q uma recta paralela à recta determinada por XP .
- (4) Designe-se por Z o ponto de intersecção da recta referida em (3) com a recta real.

Argumento que motivou a construção

Note-se que os triângulos $\triangle OPX$ e $\triangle OQZ$ são semelhantes, pelo que¹⁵

$$\frac{c(OX)}{c(OZ)} = \frac{c(OP)}{c(OQ)}.$$

Também os triângulos $\triangle OPI$ e $\triangle OQY$ são semelhantes, pelo que

$$\frac{c(OI)}{c(OY)} = \frac{c(OP)}{c(OQ)}.$$

Assim

$$\frac{c(OX)}{c(OZ)} = \frac{c(OI)}{c(OY)},$$

donde

$$c(OX) \cdot c(OY) = c(OZ) \cdot c(OI),$$

o que se interpreta como

$$X \cdot Y = Z.$$

Nota. Observe-se que no passo (1) da descrição do modo como foi marcado o ponto Z , se traçou o segmento XP e não o segmento YP . É, no entanto indiferente ter começado com o segmento XP ou com o segmento YP — o ponto Z obtido seria o mesmo. Este resultado, a cuja prova nos iremos referir adiante, é equivalente à comutatividade da multiplicação ($X \cdot Y = Y \cdot X$).

Exercício 6. Determine $X \cdot Y$ nos casos em que

- (i) $X \in \mathcal{R}^-$ e $Y \in \mathcal{R}^-$;
- (ii) $X \in \mathcal{R}^-$ e $Y \in \mathcal{R}^+$;
- (iii) $X = 0$ e $Y \in \mathcal{R}$;
- (iv) $X = I$ e $Y \in \mathcal{R}$.



Exercício 7. Considere a figura 27, onde $0 < X < Y$. Utilizando resultados relativos à semelhança de triângulos, prove que $c(OZ) = c(OX) \cdot c(OY)$.

¹⁵Dado um segmento AB designamos por $c(AB)$ o comprimento desse segmento.

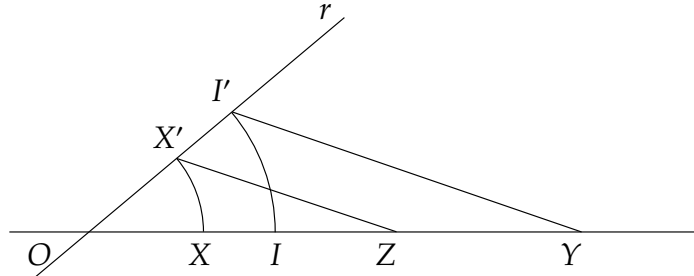


Figura 27: Utilizando o compasso, marcaram-se os pontos X' e I' . Traçou-se o segmento de recta $I'Y$ e fez-se passar por X' uma recta paralela à determinada por $I'Y$. Designou-se por Z o ponto de intersecção desta recta com a recta real.



Divisão

Começemos por ilustrar com uma figura a divisão de I por $Y \neq 0$, que vamos designar por Z ($Z = \frac{I}{Y}$).

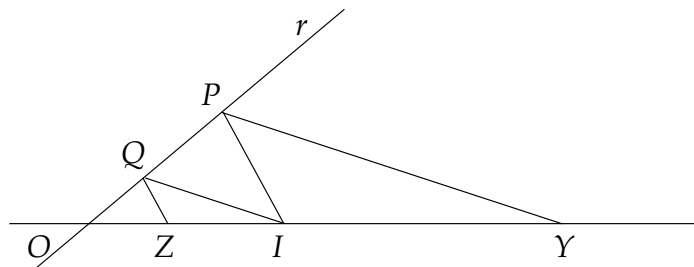


Figura 28: Divisão de I por Y .

Descrição do modo como foi obtido Z

- (1) Trace-se os segmentos de recta YP e IP .
- (2) Faça-se passar por I uma recta paralela à recta determinada por YP e designe-se por Q o ponto de intersecção desta recta com a recta determinada por OP .
- (3) Faça-se passar por Q uma recta paralela à recta determinada por IP .

- (4) Designe-se por Z o ponto de intersecção da recta referida em (3) com a recta real.

Argumento que motivou a construção

Note-se que os triângulos ΔOQZ e ΔOPI são semelhantes, pelo que

$$\frac{c(OZ)}{c(OI)} = \frac{c(OQ)}{c(OP)}.$$

Também os triângulos ΔOQI e ΔOPY são semelhantes, pelo que

$$\frac{c(OI)}{c(OY)} = \frac{c(OQ)}{c(OP)}.$$

Assim

$$\frac{c(OZ)}{c(OI)} = \frac{c(OI)}{c(OY)},$$

o que se interpreta como

$$Z = \frac{I}{Y}.$$

Exercício 8. Determine $\frac{I}{Y}$ nos casos em que

- (i) $0 < Y < I$;
- (ii) $Y \in \mathcal{R}^-$.

O exercício seguinte mostra que a construção ilustrada pela figura 28 está de acordo com o que pretendemos para o inverso de um número real distinto de zero.

Exercício 9. Prove que $X = \frac{I}{Y}$ sse $Y \cdot X = I$.

Finalmente, definimos a *divisão* de X por Y ($X \in \mathcal{R}, Y \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$) por

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \frac{I}{Y}.$$

Exercício 10. Considere a figura 29, onde $0 < X < Y$.

Utilizando resultados relativos à semelhança de triângulos, prove que:

- (i)

$$c(OZ) = \frac{c(OX)}{c(OY)}.$$

- (ii) Releia o exercício onde se encontra a figura 27 (bem como a observação que se lhe segue) e mostre que a construção ilustrada pela figura 29 conduz à noção de divisão desejada, quaisquer que sejam $X \in \mathcal{R}$ e $Y \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$.

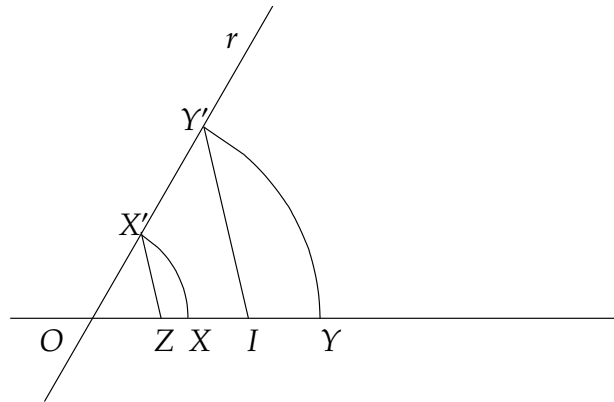


Figura 29: Utilizando o compasso, marcaram-se os pontos X' e Y' . Traçou-se o segmento de recta $Y'I$ e fez-se passar por X' uma recta paralela à determinada por $Y'I$. Designou-se por Z o ponto de intersecção desta recta com a recta real.

Algumas propriedades das operações algébricas

Proposição 7. $\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X + Y = Y + X$.

Demonstração. É o exercício proposto na nota que se segue à figura 24. \square

Proposição 8. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$.

Demonstração. Considera-se a figura 30.

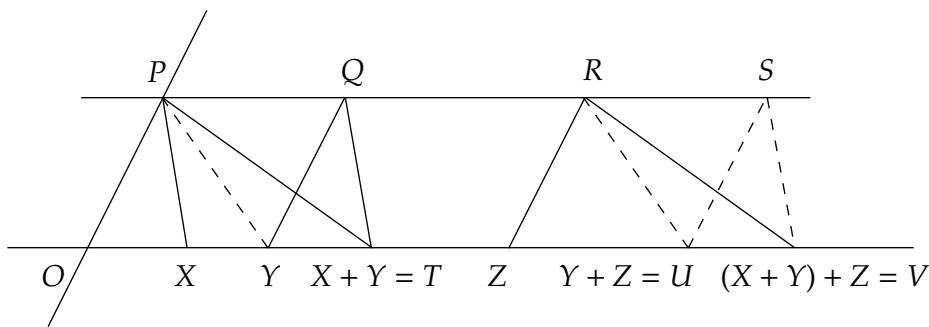


Figura 30: Marcou-se a traço contínuo a construção de $(X+Y)+Z$ e a tracejado a construção de $X+(Y+Z)$. Resulta destas construções que $OP \parallel YQ \parallel ZR \parallel US$, $PX \parallel QT$, $PY \parallel RU$ e $PT \parallel RV$.

Para provar a proposição faça-se, em primeiro lugar, a construção de $(X + Y) + Z$. Seguidamente construa-se $Y + Z$. Para obter $X + (Y + Z)$ faça-se passar por $U (= Y + Z)$ uma recta paralela à determinada por OP , que intersecta a recta determinada por PQ num ponto S . Se provarmos

que, fazendo passar por S uma recta paralela à determinada por PX , ela intersecta a recta real no ponto V , demonstrámos que $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$. Ora, a prova desse resultado é uma consequência de serem iguais os triângulos $\triangle OPT$ e $\triangle ZRV$, os triângulos $\triangle OPY$ e $\triangle ZRY$, e os triângulos $\triangle YQT$ e $\triangle USV$. \square

Proposição 9. (a) Se A e B são números reais tais que

$$\forall X \in \mathcal{R} \quad X + A = X \quad (3)$$

$$\forall X \in \mathcal{R} \quad X + B = X \quad (4)$$

então $A = B$.

(b)

$$\forall X \in \mathcal{R} \quad X + O = X \quad (5)$$

Demonstração. (a) diz-nos que, se existir elemento neutro da adição, ele é único. (b) diz-nos que O é o (único) elemento neutro da adição.

Prova de (a). De (3) resulta que $B + A = B$ e de (4) resulta que $A + B = A$. Como $A + B = B + A$ (proposição 7), vem $A = B$.

Prova de (b). É um exercício (geométrico) simples. \square

Proposição 10. $\forall X \in \mathcal{R} \exists^1 Y \in \mathcal{R} \quad X + Y = O$.¹⁶

Demonstração. Para provar a existência, escolha-se para Y o ponto $O - X$ (que passaremos a designar, apenas, por $-X$), e mostre-se que $X + (-X) = O$. Para provar a unicidade, suponha-se que, dado $X \in \mathcal{R}$, A é um número real satisfazendo a

$$X + A = O \quad (6)$$

e mostremos que $A = -X$. Ora

$$\begin{aligned} A &= A + O = A + (X + (-X)) = (A + X) + (-X) \\ &= (X + A) + (-X) = O + (-X) = (-X) + O = -X. \end{aligned}$$

(a primeira igualdade resulta de (5); a segunda resulta da primeira parte desta prova; a terceira resulta da proposição 8; a quarta da proposição 7; a quinta de (6); a sexta da proposição 7; a sétima da proposição 9). \square

Proposição 11.

$$\forall X \in \mathcal{R} \quad -(-X) = X \quad (7)$$

$$\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X - Y = X + (-Y) \quad (8)$$

$$\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad -(X + Y) = (-X) - Y \quad (9)$$

¹⁶ $\exists^1 Y \in \mathcal{R}$ lê-se “existe um e um só Y em \mathcal{R} ”.

Demonstração. (7) e (8) Provas geométricas simples.

(9) Como $-(X + Y)$ é o único real que adicionado a $(X + Y)$ dá zero (proposição 10), basta provar que

$$(X + Y) + ((-X) - Y) = O.$$

Ora,

$$\begin{aligned} (X + Y) + ((-X) - Y) &= (X + Y) + ((-X) + (-Y)) \\ &= (X + (-X)) + (Y + (-Y)) = O + O = O. \end{aligned}$$

(a primeira igualdade resulta de (8); a segunda resulta de um uso repetido da comutatividade e associatividade; a terceira da proposição 10; a quarta de (5)).

□

Proposição 12.

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X - Y = Z \Leftrightarrow X = Z + Y \quad (10)$$

Demonstração. (10) já tinha sido proposto como exercício (geométrico) quando introduzimos a subtracção em \mathcal{R} . Esboçaremos a prova de uma das implicações sem recorrer a argumentos geométricos. Omitiremos alguns detalhes e aconselhamos o leitor a fazer a prova da outra implicação.

Se adicionarmos Y a ambos os membros da igualdade $X - Y = Z$, obtemos

$$(X - Y) + Y = Z + Y.$$

Ora,

$$(X - Y) + Y = (X + (-Y)) + Y = X + (Y + (-Y)) = X.$$

□

Relacionaremos, agora, as operações de adição e subtracção com as relações de ordem $<$ e \leq . Por comodidade de escrita, introduzimos as relações “maior” ($>$) e “maior ou igual” (\geq), que se definem por:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in \mathcal{R} \quad Y > X &\Leftrightarrow X < Y; \\ \forall X, Y \in \mathcal{R} \quad Y \geq X &\Leftrightarrow X \leq Y. \end{aligned}$$

Proposição 13.

$$\forall X \in \mathcal{R} \quad X < O \Rightarrow -X > O \quad (11)$$

Demonstração. É um exercício (geométrico) simples.

□

Proposição 14. (a) $\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X < Y \Leftrightarrow X - Y < O$.

(b) $\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X < Y \Leftrightarrow (Y - X) \in \mathcal{R}^+$.

Demonstração. (a) É um exercício (geométrico) simples provar que

$$\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X < Y \Rightarrow X - Y < O.$$

Para provar a outra implicação, suponha que $X = Y$ ou $X < Y$ e mostre que, em ambos os casos, se obtém uma contradição.

(b) Como $Z \in \mathcal{R}^+$ é equivalente a $Z > O$, basta provar que

$$\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X - Y < O \Leftrightarrow (Y - X) \in \mathcal{R}^+,$$

o que resulta de (11), (9) e (8).

□

Proposição 15. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X < Y \Rightarrow X + Z < Y + Z$.

Demonstração. Começemos por notar que (proposição 14 (b)):

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X < Y &\Leftrightarrow (Y - X) \in \mathcal{R}^+ \\ \forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X + Z < Y + Z &\Leftrightarrow ((Y + Z) - (X + Z)) \in \mathcal{R}^+. \end{aligned}$$

Assim, para provar a proposição 15, basta ver que, se $(X - Y) \in \mathcal{R}^+$, então

$$((Y + Z) - (X + Z)) \in \mathcal{R}^+.$$

Ora, é fácil verificar (verifique!) que

$$(Y + Z) - (X + Z) = (Y - X) + (Z - Z) = Y - X.$$

□



Nas proposições 7 a 15 provámos algumas das propriedades que se consideravam desejáveis para as noções de adição e subtracção em \mathcal{R} . Vamos, agora, fazer o mesmo para as noções de multiplicação e divisão. Antes, porém, é conveniente fazer algumas observações.

As proposições 7 e 8 (comutatividade e associatividade da adição) são de fácil demonstração. Ora, o mesmo não acontece com as correspondentes propriedades para a multiplicação¹⁷. Por esta razão, deixámos para um sub-parágrafo posterior as suas provas. Nas restantes proposições utilizaremos, quando tal for necessário, as proposições 16 e 17 (comutatividade e associatividade da multiplicação). Se este procedimento chocar o espírito cartesiano do leitor, ele pode ler as demonstrações das proposições referidas quando quiser.

Proposição 16. $\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X \cdot Y = Y \cdot X$.

Proposição 17. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$.

Proposição 18. (a) Se A e B são números reais tais que

$$\forall X \in \mathcal{R} \quad X \cdot A = X$$

$$\forall X \in \mathcal{R} \quad X \cdot B = X$$

então $A = B$.

(b) $\forall X \in \mathcal{R} \quad X \cdot I = X$.

Demonstração. (a) diz-nos que, se existir elemento neutro da multiplicação, ele é único. (b) diz-nos que I é o (único) elemento neutro da multiplicação.

A prova de (a) é análoga à da proposição 9 (a). A prova de (b) é um exercício (geométrico) simples. \square

Proposição 19. $\forall X \in \mathcal{R} \setminus \{O\} \quad \exists^1 Y \in \mathcal{R} \quad X \cdot Y = I$.

Demonstração. Para a existência escolhe-se para Y o número real $\frac{I}{X}$ (que também designaremos por X^{-1}) e resolve o segundo exercício do sub-parágrafo divisão. Para provar a unicidade adapte a correspondente demonstração feita na proposição 10. \square

Proposição 20. $\forall X, Z \in \mathcal{R} \quad \exists Y \in \mathcal{R} \setminus \{O\} \quad \frac{X}{Y} = Z \Leftrightarrow X = Z \cdot Y$.

¹⁷A razão desta inesperada dificuldade resulta dos factos seguintes: A construção geométrica para a multiplicação foi *sugerida* pelas propriedades dos triângulos semelhantes. Ora, tais propriedades fazem intervir a multiplicação e divisão de números reais (os comprimentos dos segmentos) pelo que não as podemos usar para justificar as proposições que, agora, pretendemos demonstrar.

O mesmo não acontece com a construção geométrica para a adição, uma vez que ela foi *sugerida* pelos casos de igualdade de triângulos, onde não é necessário nenhum conhecimento prévio dos números reais.

Demonstração. Seja $\frac{X}{Y} = Z$ e multipliquemos ambos os membros desta igualdade por Y . Obtém-se

$$\frac{X}{Y} \cdot Y = Z \cdot Y.$$

Ora,

$$\frac{X}{Y} \cdot Y = \left(X \cdot \frac{I}{Y}\right) \cdot Y = X \cdot \left(\frac{I}{Y} \cdot Y\right) = X \cdot I = X$$

o que demonstra uma das implicações da proposição 20. Para provar a outra implicação, multiplique-se por $\frac{I}{Y}$ ambos os membros da igualdade

$$X = Z \cdot Y.$$

Obtém-se

$$X \cdot \frac{I}{Y} = (Z \cdot Y) \cdot \frac{I}{Y} = Z \cdot \left(Y \cdot \frac{I}{Y}\right) = Z \cdot I = Z$$

com o que termina a prova. □



Vamos agora relacionar a multiplicação com a adição, a subtracção e a relação de ordem¹⁸. O resultado que escolhemos para fazer a ligação entre a multiplicação e a adição é, naturalmente, a propriedade distributiva. Antes de a provarmos, convém referir um resultado, que passamos a enunciar, e que deixamos como exercício (geométrico) simples.

Exercício 11. A construção geométrica da adição foi feita utilizando o ponto P , que supúnhamos fixo. Se na recta r (determinada por O e P) escolhermos um qualquer outro ponto distinto de O , a construção correspondente feita utilizando este ponto (em vez de P) conduz ao mesmo $Z (= X + Y)$.

Proposição 21. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z.$

Demonstração. Considere-se a figura 31.

Construção de $X \cdot (Y + Z)$

(a) Constrói-se S ($SY \parallel PI$).

(b) Constrói-se $Y + Z$, usando S em vez de P .

¹⁸Na proposição 20 já relacionávamos a multiplicação com a divisão.

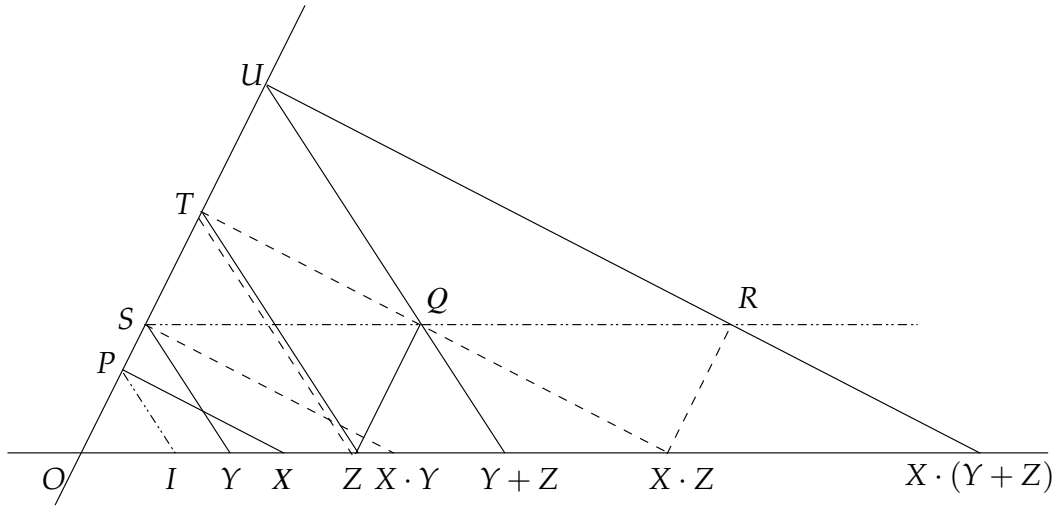


Figura 31: Marcou-se a traço contínuo a construção de $X \cdot (Y + Z)$ e a tracejado a construção de $X \cdot Y + X \cdot Z$.

- (c) Constrói-se $X \cdot (Y + Z)$, determinando primeiro o ponto U e fazendo seguidamente passar por U uma recta paralela a PX . Note que a recta, paralela a PI , que passa por $Y + Z$ e determina o ponto U , também passa pelo ponto Q , uma vez que o segmento $Q(Y + Z)$ é paralelo a SY , que é paralelo a PI .

Construção de $X \cdot Y + X \cdot Z$

Em primeiro lugar constrói-se $X \cdot Y$ e $X \cdot Z$. Para determinar a soma de $X \cdot Y$ com $X \cdot Z$ (onde voltamos a utilizar o ponto S em vez do ponto P), fazemos passar por $X \cdot Z$ uma recta paralela a OP e determinamos o ponto de intersecção desta recta com a recta que passa por S e é paralela à recta real. Se tal ponto for o ponto R o resultado está demonstrado, uma vez que $UR \parallel PX$ e PX é paralelo à recta determinada pelo segmento $S(X \cdot Y)$.

Assim, para concluirmos a demonstração, basta provar que o segmento $(X \cdot Z)R$ é paralelo ao segmento OS . É o que vamos fazer.

Começemos por ver que o triângulo ΔQUR é igual ao triângulo cujos vértices são Z, T e $X \cdot Z$. Para tal basta ver que são iguais os segmentos TZ e UQ (o que resulta de ser um paralelogramo, o quadrilátero de vértices T, U, Q, Z) e que também se tem

$$\begin{aligned}\angle UQR &= \angle TZ(X \cdot Z) \\ \angle QUR &= \angle ZT(X \cdot Z).\end{aligned}$$

Finalmente, considere-se o quadrilátero de vértices $Z, Q, R, (X \cdot Z)$. Como os segmentos QR e $Z(X \cdot Z)$ são paralelos e iguais (o que resulta da igualdade dos triângulos que acima considerámos), segue-se que este quadrilátero é um paralelogramo, pelo que $R(X \cdot Z) \parallel QZ \parallel OP$, o que conclui a prova. \square

A proposição seguinte é um resultado auxiliar para a demonstração da distributividade da multiplicação relativamente à subtracção.

Proposição 22.

$$\begin{aligned} (a) \quad & \forall X \in \mathcal{R} \quad -X = (-I) \cdot X, \\ (b) \quad & \forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X \cdot (-Y) = (-X) \cdot Y = -(X \cdot Y). \end{aligned} \quad (12)$$

Demonstração. (a) é um exercício (geométrico) simples.

(b) Primeira igualdade de (12).

$$X \cdot (-Y) = X \cdot ((-I) \cdot Y) = (X \cdot (-I)) \cdot Y = ((-I) \cdot X) \cdot Y = (-X) \cdot Y.$$

Segunda igualdade de (12).

$$(-X) \cdot Y = ((-I) \cdot X) \cdot Y = (-I) \cdot (X \cdot Y) = -(X \cdot Y).$$

\square

Proposição 23. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X \cdot (Y - Z) = X \cdot Y - X \cdot Z.$

Demonstração.

$$X \cdot (Y - Z) = X \cdot (Y + (-Z)) = X \cdot Y + X \cdot (-Z) = X \cdot Y + (-(X \cdot Z)) = X \cdot Y - X \cdot Z$$

(a primeira igualdade resulta de (8); a segunda resulta da proposição 21; a terceira de (12); a quarta de (8)). \square

Finalmente, em (13) da proposição seguinte, faremos a ligação entre a multiplicação e a relação de ordem $<$.

Proposição 24.

$$(a) \quad \forall X, Y \in \mathcal{R}^+ \quad X \cdot Y \in \mathcal{R}^+ \quad (13)$$

$$(b) \quad \forall X, Y \in \mathcal{R} \quad \forall Z \in \mathcal{R}^+ \quad X < Y \Rightarrow X \cdot Z < Y \cdot Z \quad (14)$$

Demonstração. (13) É um exercício (geométrico) simples.

(14) Sejam X e Y pertencentes a \mathcal{R} e $Z \in \mathcal{R}^+$. De acordo com a proposição 14 (b), queremos provar que, se

$$X - Y \in \mathcal{R}^+ \quad (15)$$

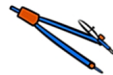
então

$$(Y \cdot Z - X \cdot Z) \in \mathcal{R}^+.$$

Ora, das proposições 23 e 16 resulta que

$$Y \cdot Z - X \cdot Z = (Y - X) \cdot Z.$$

(14) é, então, consequência de (13), (15) e de $Z \in \mathcal{R}^+$. □



Vamos agora provar, como tínhamos prometido, as proposições 16 e 17. Para tal necessitamos de um resultado, de natureza puramente geométrica, provavelmente desconhecido dos leitores. Trata-se do chamado teorema de Pascal¹⁹, cuja demonstração omitiremos.

Teorema 1 (Pascal). *Sejam A, B, C e A', B', C' dois ternos de pontos sobre cada uma de duas rectas que se intersectam num ponto U distinto de qualquer daqueles pontos, respectivamente; se CB' é paralelo a BC' e CA' paralelo a AC' , então é também BA' paralelo a AB' .*

Consoante a disposição dos pontos de cada um dos ternos, na recta onde se encontram, podemos obter figuras essencialmente diferentes.

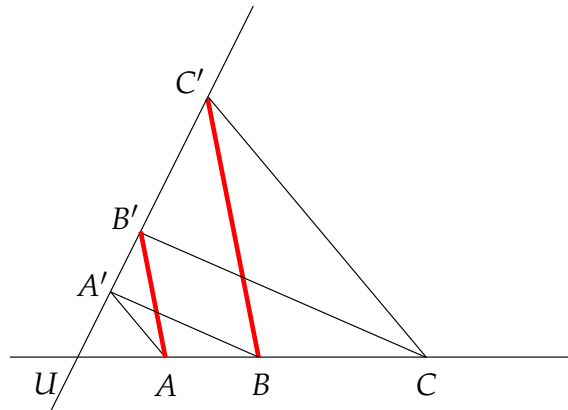


Figura 32: O teorema de Pascal (exemplo 1).

Nas figuras 32, 33 e 34, supusemos que os pontos de cada um dos ternos estavam na mesma semi-recta com origem em U . As três figuras descrevem todos os casos possíveis para as semi-rectas escolhidas.

¹⁹O resultado que apresentaremos é, na realidade, um caso particular do teorema de Pascal das secções cónicas.

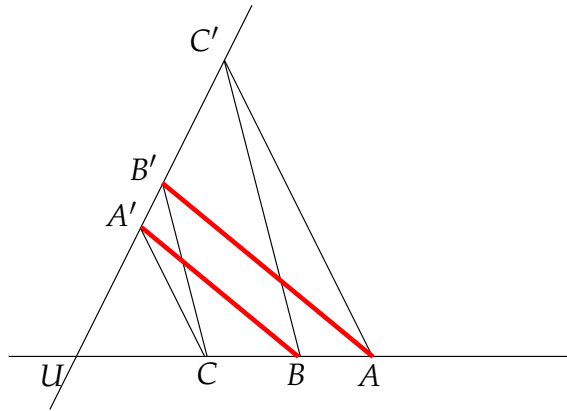


Figura 33: O teorema de Pascal (exemplo 2).

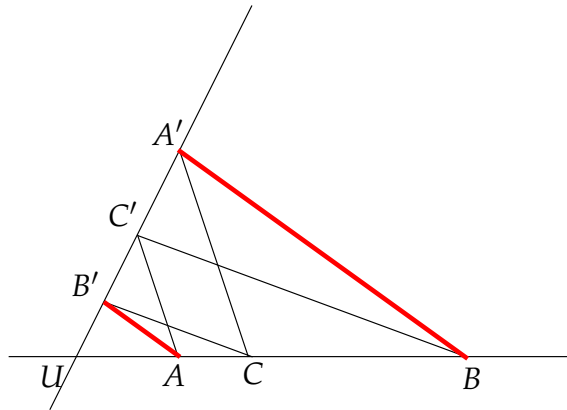


Figura 34: O teorema de Pascal (exemplo 3).

Nas figuras 32, 33 e 34 **deu-se ênfase gráfica** aos segmentos que o teorema de Pascal afirma serem paralelos.

Estamos agora em condições de demonstrar as proposições 16 e 17.

Proposição 25. (*proposição 16*) $\forall X, Y \in \mathcal{R} \quad X \cdot Y = Y \cdot X.$

Demonstração. Considere a figura 35.

Para provar que $X \cdot Y = Y \cdot X$ basta mostrar que o segmento de recta $Q(X \cdot Y)$ é paralelo ao segmento PY . Ora, isso resulta do teorema de Pascal (figura 33). \square

Proposição 26. (*proposição 17*) $\forall X, Y, Z \in \mathcal{R} \quad X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z.$

Demonstração. Como já provámos a comutatividade da multiplicação,

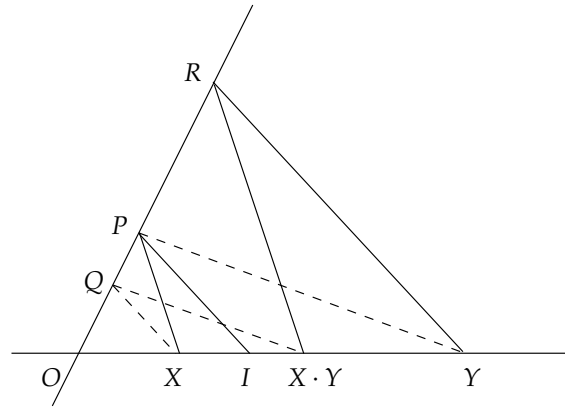


Figura 35: Marcou-se a traço contínuo a construção de $X \cdot Y$ e a tracejado a construção de $Y \cdot X$. Resulta destas construções que $RY \parallel PI \parallel QX$ e $R(X \cdot Y) \parallel PX$.

basta mostrarmos que

$$X \cdot (Z \cdot Y) = Z \cdot (X \cdot Y). \quad (16)$$

Considere a figura 36.

Constrói-se, em primeiro lugar, $X \cdot Y$ e depois $Z \cdot (X \cdot Y)$. Seguidamente construiu-se $Z \cdot Y$ e fez-se passar por este ponto uma paralela a PI , que intersecta a recta determinada por OP no ponto S . Para determinar $X \cdot (Z \cdot Y)$, fazemos passar por este ponto uma recta paralela a PX e determinamos a sua intersecção com a recta real. Assim, para provar (16), basta-nos ver que SV é paralelo a PX .

Considere-se o teorema de Pascal (figura 32) com

$$C' = R, \quad B' = Q, \quad A' = S, \quad A = T, \quad B = V, \quad C = W.$$

Note-se que os resultados de paralelismo incluídos na legenda da figura 36, permitem-nos justificar que as hipóteses do teorema de Pascal são satisfeitas. Obtém-se, assim, $SV \parallel QT$, mas como $QT \parallel PX$ (ver legenda da figura 36) segue-se que $SV \parallel PX$, como queríamos provar. \square

Radiciação e três problemas famosos

No parágrafo 3 tínhamos visto que não existia nenhum número racional x tal que x^2 fosse igual a 2. Este aparentemente pequeno problema (na realidade enorme!) fez-nos rever as nossas concepções sobre a noção de número. Como os números racionais não nos bastavam, identificou-se \mathbb{R}

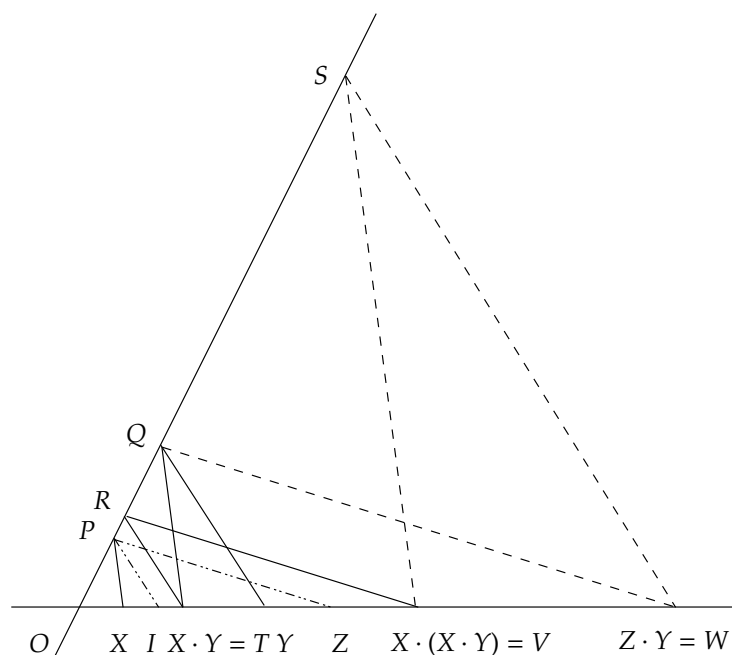


Figura 36: Marcou-se a traço contínuo a construção de $Z \cdot (X \cdot Y)$ e a tracejado a construção de $X \cdot (Z \cdot Y)$. Resulta destas construções que $RT \parallel PI$, $QW \parallel PZ$, $QT \parallel PX$, $RV \parallel PZ$ e $SW \parallel PI$.

com \mathcal{R} e desta identificação resultou que não só os números não racionais eram muitos²⁰, como também estavam muito bem distribuídos na recta real.

Ao (único) número real $X > 0$ tal que $X^2 (= X \cdot X)$ é igual a 2, chamámos a raiz de 2 e designámo-la por $\sqrt{2}$.

Veremos, agora, que, em \mathcal{R} , é possível, não só determinar $\sqrt{2}$, como também a raiz de qualquer número real X positivo, que designamos por \sqrt{X} . Pretende-se, assim, introduzir uma operação em \mathcal{R}^+

$$\mathcal{R}^+ \ni X \mapsto \sqrt{X} \in \mathcal{R}^+$$

a que chamamos radiciação.

Comecemos por ilustrar com a figura 37 a raiz de X , que vamos designar por $Z (= \sqrt{X})$.

A descrição do modo como foi obtido Z encontra-se na legenda da figura 37.

²⁰ Até afirmámos que, num sentido a precisar, eles eram quase todos os números reais.

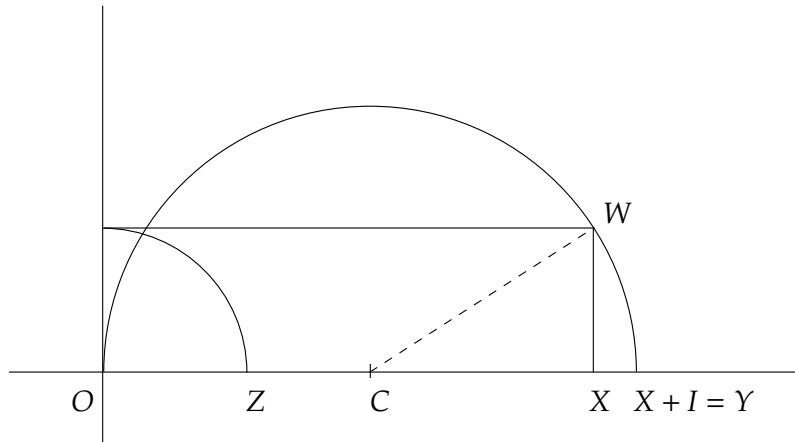


Figura 37: Marcou-se na recta real os pontos X e $X + I = Y$ e traçou-se uma semi-circunferência que tem OY por diâmetro (C é o centro dessa semi-circunferência). Seguidamente fez-se passar por X uma recta perpendicular à recta real e designou-se por W o ponto de intersecção desta recta com a semi-circunferência. Será ao comprimento de XW que chamaremos \sqrt{X} , mas, como os números reais são pontos da recta real, devemos marcar o comprimento deste segmento em \mathcal{R}^+ . É esse o objectivo das construções seguintes que dispensam qualquer descrição.

Argumento que motivou a construção

Designa-se por

x o comprimento de OX

y o comprimento de XW

u o comprimento de CX

v o comprimento de CW (igual ao comprimento de OC)

e considere-se o triângulo rectângulo CWX .

Como $v = (x + 1)/2$, tem-se

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{x+1}{2}\right)^2$$

donde

$$\frac{(x+1)^2}{4} = y^2 + \frac{(x-1)^2}{4}$$

pelo que

$$4y^2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

o que permite concluir que $y^2 = x$.

Justifica-se, assim, que, ao comprimento do segmento XW (ou seja, ao ponto Z), se chame a raiz de x .



Vimos atrás (Proposição 5) que todos os números reais da forma

$$r\sqrt{2}$$

onde $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, eram números irracionais. Na proposição seguinte provaremos a irracionalidade de outros números reais.

Proposição 27. (1) Se $p \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito²¹, então \sqrt{p} é um número irracional.

(2) Se $p \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito, então os números reais da forma

$$r\sqrt{p}$$

onde $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, são números irracionais.

Demonstração. Começaremos por provar que, sendo s um número racional positivo escrito na forma

$$s = \frac{k}{l} \tag{17}$$

com $k, l \in \mathbb{N}$ primos entre si²², então

$$s \in \mathbb{N} \text{ sse } l = 1 \tag{18}$$

Ora, se $l = 1$, então $s = k$ e portanto $s \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, de (17) conclui-se que $k = s \cdot l$ e, como k e l são primos entre si, tem de se ter $l = 1$ (l divide tanto k como l).

(1) Sendo $p \in \mathbb{N}$, vamos provar que, se \sqrt{p} é um número racional, então p é um quadrado perfeito (o que é equivalente a (1)).

Ora, se \sqrt{p} é um número racional ele pode escrever-se na forma

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n}$$

²¹Um natural p diz-se um quadrado perfeito sse existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = m^2$.

²²Recorde-se que dois naturais k e l se dizem primos entre si sse 1 é o único divisor comum a k e l .

com m e n primos entre si. É então fácil ver que

$$p = \frac{m^2}{n^2}$$

e que m^2 e n^2 são primos entre si²³. Assim, como $p \in \mathbb{N}$, segue-se de (18) que $n^2 = 1$ e, portanto, que $p = m^2$.

- (2) Suponhamos que $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e que p não é um quadrado perfeito, e demonstremos, por redução ao absurdo, que $r \cdot \sqrt{p}$ é um número irracional.

Ora, se $r \cdot \sqrt{p}$ fosse um número s racional, então

$$\sqrt{p} = \frac{s}{r}$$

donde se concluiria que \sqrt{p} era um número racional, o que está em contradição com (1), uma vez que se admitiu que p não era um quadrado perfeito.

□

Observações

- (1) Evidentemente, se $p (= m^2)$ é um quadrado perfeito, então $\sqrt{p} (= m)$ não é irracional.
- (2) Se X é um irracional positivo, então \sqrt{X} também é um número irracional. Com efeito, se \sqrt{X} fosse racional ele poderia escrever-se na forma

$$\sqrt{X} = \frac{m}{n}$$

com m e n pertencentes a \mathbb{N} . Assim, ter-se-ia,

$$X = \frac{m^2}{n^2}$$

o que é absurdo, porque, então, X seria racional.



²³Se m e n não têm factores comuns, o mesmo acontece com m^2 e n^2 .

Depois de termos tratado com tanto detalhe as propriedades das operações algébricas em \mathcal{R} , seria de esperar que fizéssemos algo de semelhante com a radiciação, não só por uma questão de equidade, mas também porque foi a radiciação que nos permitiu introduzir alguns números irracionais — primeiro o $\sqrt{2}$, depois os da forma $r \cdot \sqrt{2}$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$) e, finalmente, os da forma $r \cdot \sqrt{p}$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; p natural, não quadrado perfeito).

Surpreendentemente, vamos começar por referir três problemas célebres da antiguidade (formulados durante o século quinto antes de Cristo), cuja resolução apenas foi feita na segunda metade do século XVIII e no século XIX, e que achamos serem esclarecedores, tanto para as virtudes como para as insuficiências, do método de abordagem dos números reais que até agora descrevemos.

Esses três problemas célebres são:

- (i) a quadratura do círculo;
- (ii) a duplicação do cubo;
- (iii) a trissecção do ângulo.

Estes são os nomes, vejamos quais os problemas.

O problema da quadratura do círculo consiste em encontrar, *utilizando apenas régua e compasso*, o lado de um quadrado cuja área seja igual à de um círculo previamente dado.

O problema da duplicação do cubo consiste em encontrar, *utilizando apenas régua e compasso*, a aresta de um cubo cuja volume seja o dobro daquele de um cubo previamente dado.

O problema da trissecção do ângulo consiste em encontrar, *utilizando apenas régua e compasso*, um ângulo cuja medida seja um terço da de um ângulo previamente dado.

Estes problemas foram resolvidos, e de diversas maneiras, pelos gregos antigos, mas recorrendo a processos de construção que não usavam exclusivamente régua e compasso — argumentos utilizando processos “mecânicos” são conhecidos desde o século V antes de Cristo.

A matemática grega antiga (dos séculos VI a.c. a III a.c.) foi fértil em resultados e em problemas. Muitos dos problemas só foram resolvidos durante e depois do século XVIII e bastantes ainda estão por resolver. Entre os resolvidos encontram-se os três problemas célebres citados (que

são, de longe, os mais populares), o problema dos irracionais e o problema dos números construtíveis com régua e compasso.

Ora, no que concerne os problemas (i), (ii), (iii), o que se demonstrou foi “a sua impossibilidade”, ou seja, que o resultado desejado em cada um deles era impossível de obter utilizando apenas régua e compasso.

Vamos ver, na sequência, qual a importância que os problemas (i) e (ii) (os únicos a que nos iremos referir) têm para nós.

Começemos com o segundo problema (duplicação do cubo). Consideremos um cubo cujo comprimento da aresta seja 1 (o seu volume será, então, $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$) e outro cubo cujo comprimento de aresta seja a e cujo volume seja o dobro do do cubo precedente (ou seja, 2). Deverá, então, ter-se $a^3 = 2$, pelo que a é o (único) número real que, usualmente, se designa por $\sqrt[3]{2}$.

Assim, da impossibilidade de resolver este problema, resulta que $\sqrt[3]{2}$ não só não é um número racional, como também não é construtível com régua e compasso. Segue-se daqui, como facilmente se vê, que os números da forma

$$r \cdot \sqrt[3]{2}$$

com $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, são também números irracionais que não podem ser construídos utilizando apenas régua e compasso.

Analisemos, agora, o primeiro problema (quadratura do círculo). Consideremos um círculo de raio 1 (cuja área é π) e procuremos um quadrado (com comprimento de lado a) tal que a sua área, a^2 , seja igual à área do círculo dado. Trata-se do problema algébrico “simples”

$$a^2 = \pi$$

cujas únicas soluções (evidentemente positivas, porque a é o comprimento do lado de um quadrado) é

$$a = \sqrt{\pi}.$$

Resulta da impossibilidade de resolução deste problema que a não pode ser obtido com o uso exclusivo da régua e compasso. Daqui se segue que o mesmo acontece com a^2 , pois que, se ele o fosse, tal acontecia também com $\sqrt{a^2}$ (note que a radiciação só utiliza régua e compasso).

Assim π é um número real que não pode ser marcado em \mathcal{R} utilizando apenas régua e compasso.

As considerações anteriores evidenciam as limitações do método que utilizámos para introduzir os números reais. Com efeito as raízes cúbicas

de uma infinidade de naturais (por exemplo, todos eles da forma $2n^3$, com $n \in \mathbb{N}$) não podem ser definidas pelos processos até agora usados.

É precisamente porque algo de diferente tem de ser feito que tratámos sumariamente a raiz quadrada.

Quanto ao número π , note-se que a única definição que dele demos foi a da área de um círculo com raio 1. Ora, mesmo admitindo uma ideia intuitiva de área, tal número, que deverá pertencer à recta real, é impossível de marcar com os instrumentos que foram até agora utilizados.



Resumimos, agora, o estado em que nos encontramos

- (1) Os números racionais (poucos mas cujo conjunto é infinito) estão muito bem distribuídos na recta real (Proposição 4).
- (2) Todos os números racionais são construtíveis com régua e compasso.
- (3) Existem números reais que não são racionais (irracionais, portanto) e que também são construtíveis com régua e compasso. O conjunto por eles formado é infinito, uma vez que são seus elementos todos os reais da forma

$$r \cdot \sqrt{p} \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}; p \text{ natural, não quadrado perfeito}).$$

- (4) Existem números reais não construtíveis com régua e compasso, como π e $\sqrt[3]{2}$. Ora é fácil ver que todos os números da forma

$$r \cdot \pi \quad \text{ou} \quad r \cdot \sqrt[3]{2} \quad (r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$$

também não são construtíveis com régua e compasso, e, uma adaptação da prova da proposição , mostra que também eles estão muito bem distribuídos na recta real.

- (5) Obtém-se (recorrendo a (2) das observações anteriores) novos números irracionais, utilizando a radiciação. Por exemplo, todos os números da forma

$$\sqrt{r \cdot \sqrt{p}}, \quad \sqrt{r \cdot \sqrt[3]{2}}, \quad \sqrt{r \cdot \pi}, \quad \sqrt{\sqrt{r \cdot \pi}}, \quad \text{etc.}$$

(onde $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, e $p \in \mathbb{N}$ não é um quadrado perfeito) são também números irracionais.



Muito fizemos até agora com régua e compasso. Chegou a altura de passarmos a outra abordagem dos números reais, que, fazendo uso desta, nos permita dar resposta aos problemas que levantámos.

5 Esboço de uma teoria axiomática para os números reais

O parágrafo anterior termina num impasse — a régua e o compasso não nos chegam para provarmos tudo o que pretendemos dos números reais, identificados como pontos da recta real.

Como prosseguir? O processo que nos ocorre em primeiro lugar é o de introduzir outros instrumentos geométricos para além da régua e compasso. Mas quais? E quantos seriam precisos?

A estas dúvidas podemos acrescentar mais uma, que é de peso: embora tenhamos uma melhor intuição para a geometria do que a que temos para os números, não nos devemos esquecer que sobre os fundamentos da geometria sabemos tão pouco como sobre os fundamentos dos números reais — e o tão pouco aqui é um eufemismo: até agora sobre os fundamentos não sabemos nada.

Foi por esta razão que logo no início da introdução dissemos que

as “provas” dos resultados que se apresentam baseiam-se, em última análise, em certas propriedades dos números reais e dos elementos geométricos que consideramos ser do senso comum.

Ora, numa teoria matemática (que não pode, de maneira nenhuma, dispensar a intuição na sua concepção e na sua aprendizagem) não se pode fundamentar no senso comum — utilizando o senso comum, e não cometendo erros grosseiros, muitos disparates se podem dizer em matemática.

Definir e demonstrar com rigor é essencial numa teoria matemática. Os fundamentos de uma teoria matemática são a base (cuidadosamente explicitada) a partir da qual se dão as definições e se demonstram as proposições.

Estas considerações conduzem-nos ao problema seguinte: devemos fundamentar a geometria euclidiana ou devemos fundamentar directamente os números reais? A escolha da segunda hipótese parece-nos óbvia (porque é dos números reais que estamos a tratar) desde que tal fundamentação seja possível (e é!) e que ela não seja muito mais difícil do que a fundamentação da geometria euclidiana (e não é! — consideramo-la mesmo mais simples).

O trabalho feito no parágrafo precedente, embora sendo de natureza geométrica, não será esquecido e, como veremos na sequência, será dele feito um uso constante.

Nota. Existem, essencialmente, duas vias de fundamentar os números reais. Na primeira começa-se por fundamentar os números naturais construindo-se depois, a partir destes, os números inteiros, os números racionais e finalmente os números reais. Na segunda via (que será a escolhida, por ser mais rápida) apresenta-se directamente uma fundamentação para os números reais.



Vamos introduzir axiomáticamente o conjunto dos números reais. Convém recordar²⁴ que uma teoria axiomática se apresenta e desenvolve segundo o seguinte padrão:

- (i) Certos termos (chamados os termos primitivos) não são definidos. Todos os outros termos são definidos à custa dos termos primitivos, ou de termos que já haviam sido definidos recorrendo aos termos primitivos.
- (ii) Certas proposições, chamadas axiomas ou proposições primitivas, não são demonstradas. Todas as outras proposições da teoria (apelidadas Teoremas) deverão ser demonstradas a partir dos axiomas ou de proposições que já foram demonstradas recorrendo aos axiomas.

Numa teoria matemática as palavras “definição” e “demonstração” são fundamentais. Com efeito gostaríamos

- (a) de definir todos os termos da nossa Teoria e é, precisamente, a impossibilidade de tudo definir que nos conduz a aceitar alguns termos sem definição — os termos primitivos.
- (b) de demonstrar todas as proposições da nossa teoria e é, precisamente, a impossibilidade de tudo demonstrar que nos conduz a aceitar algumas proposições sem demonstração — os axiomas.

²⁴Ver o capítulo Lógica.

Os axiomas utilizam, além dos símbolos lógicos e dos símbolos próprios da teoria dos conjuntos²⁵, os termos primitivos, muitas vezes também designados por símbolos primitivos. Assim o significado, de início indeterminado, dos termos primitivos fica, de certa forma, condicionado pelo facto de terem de satisfazer aos axiomas. Podemos, então, pensar que os termos primitivos designam quaisquer entes que satisfaçam aos axiomas — é a maneira como “operam” entre si que se considera fundamental, privilegiando-se assim o aspecto formal e não o seu conteúdo, que se considera irrelevante para a formulação da teoria (se bem que não para a sua concepção).

Se pensarmos nas aplicações é este aspecto formal que dá à matemática o estatuto de ciência base das outras ciências — a igualdade $3 + 5 = 8$ não depende de estarmos a falar de grandezas medidas em metros, quilómetros, quilos, ohms, ou de casas, ou de pessoas.



Os símbolos primitivos

Os símbolos primitivos da teoria axiomática dos números reais que vamos apresentar, são

$$\mathbb{R} \quad + \quad \cdot \quad \mathbb{R}^+$$

dos quais diremos apenas que:

\mathbb{R} é um conjunto (aos elementos de \mathbb{R} chamaremos números reais).

\mathbb{R}^+ é um conjunto (aos elementos de \mathbb{R}^+ chamaremos números reais positivos).

$+$ é uma aplicação (a que chamaremos adição) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R} . A cada par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associamos assim um (e um só) elemento de \mathbb{R} , que designaremos por $x + y$ (soma de x com y)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto (x + y) \in \mathbb{R}.$$

\cdot é uma aplicação (a que chamaremos multiplicação) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R} . A cada par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associamos assim um (e um só) elemento de \mathbb{R} , que designaremos por $x \cdot y$ (produto de x por y)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto (x \cdot y) \in \mathbb{R}.$$

²⁵E de símbolos de outras teorias que se tenham anteriormente desenvolvido.

Os símbolos primitivos \mathbb{R} , $+$ e \cdot são naturais — \mathbb{R} porque é o que pretendemos definir axiomáticamente, a adição e a multiplicação porque, tendo destas operações apenas uma definição geométrica, e querendo prescindir da geometria, a sua escolha como símbolos primitivos é o que nos ocorre em primeiro lugar. O que nos pode causar confusão é não termos, igualmente, introduzido símbolos primitivos para a subtracção e divisão, que também foram definidos recorrendo à geometria. A razão porque não o fizemos, não é, por enquanto, clara, mas adiantaremos que os axiomas que iremos escolher para a adição e multiplicação, nos permitem *definir* as operações de subtracção e divisão. Ora, se elas podem ser definidas, não há necessidade de introduzir símbolos primitivos para estas operações.

O símbolo primitivo \mathbb{R}^+ é, talvez, o mais misterioso. Os números reais positivos, considerados como pontos da recta real, foram introduzidos a partir da relação $<$, que resultara do facto de termos fixado os pontos O e I numa recta fixa (a que depois chamámos recta real).

Pareceria, assim, natural que o símbolo primitivo escolhido fosse $<$ (a relação “menor”) ou \leq (a relação “menor ou igual”). Deixamos a resposta a esta questão (pertinente) para quando tratarmos dos axiomas relativos ao símbolo primitivo \mathbb{R}^+ .



Sobre a escolha dos axiomas

Vamos, agora, indicar o critério utilizado para a escolha dos axiomas.

Os enunciados das proposições 7 a 24 do parágrafo precedente podem classificar-se em dois grupos: num grupo colocamos aqueles cuja demonstração é geométrica, num segundo grupo os que são demonstrados sem recurso a qualquer argumento geométrico, a partir de resultados já obtidos. Estão no primeiro grupo, por exemplo, as proposições 7, 8 e 9(b) (mas não 9(a)), 16, 17, 21. No segundo grupo encontram-se, entre outras, as proposições 9(a), 11(9)), 12, 23.

Como não podemos utilizar argumentos geométricos (dado que estamos a fazer uma teoria axiomática dos números reais e só admitimos como conhecimento prévio alguns elementos de lógica matemática e da teoria dos conjuntos) o que nos ocorre, em primeiro lugar, é introduzir como axiomas todos os enunciados cuja demonstração utiliza algum resultado de natureza geométrica.

É este, em geral, o critério que iremos utilizar na escolha dos axiomas, mas, como veremos, não vai ser necessário impor como axiomas todos

esses enunciados²⁶.



Os axiomas da adição

Vamos agora listar os axiomas que dizem respeito apenas à adição.

Naturalmente os enunciados das proposições 7 e 8 devem ser postos como axiomas.

Axioma 1 (comutatividade da adição).

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x \quad (19)$$

Axioma 2 (associatividade da adição).

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad (20)$$

Com a proposição 9 tem de se ter algum cuidado. Ela diz-nos que O é o único elemento neutro da adição. Ora, não sendo O um símbolo primitivo, o mais que podemos afirmar, nesse sentido, é que existe um e um só elemento neutro para a adição. Contudo, basta-nos introduzir como axioma a existência de pelo menos um elemento neutro

Axioma 3 (existência de elemento neutro da adição).

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x + a = x \quad (21)$$

Com efeito, o raciocínio feito na demonstração da proposição 9(a) mostra-nos, sem recorrer a algum argumento geométrico, que, se existir elemento neutro, ele é único — tal raciocínio faz apenas uso do axioma 1. Assim, de (19) e de (21) segue-se que

$$\exists^1 a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x + a = x$$

o que, embora não o tenhamos escrito nessa forma, é o primeiro teorema da nossa teoria. A esse *único* elemento “ a ” chamamos zero (trata-se da nossa primeira definição) e designamo-lo por 0 .

Algo de semelhante se passa com a proposição 10, onde se prova em \mathcal{R} a existência e unicidade de simétrico no axioma, bastando-nos supor a sua existência:

²⁶Isso resulta de podermos definir a subtração e a divisão a partir da adição e da multiplicação e dos respectivos axiomas, e a relação de ordem a partir de \mathbb{R}^+ e seus axiomas.

Axioma 4 (existência de elemento simétrico).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0.$$

A demonstração da unicidade faz-se de forma análoga à efectuada na prova da proposição 10. Podemos, assim, escrever (trata-se do nosso segundo teorema):

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists^1 y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0.$$

Designamos este único y por $(-x)$. Tem-se, então

$$x + (-x) = 0$$

ou, pelo axioma 1,

$$(-x) + x = 0.$$

Concluimos, assim, do axioma 4 e da unicidade do simétrico, que x é o simétrico de $(-x)$, pelo que, de acordo com a notação utilizada acima,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x = -(-x)$$

que é um novo teorema da nossa teoria. Note que a prova desta proposição (11) no parágrafo precedente, era de natureza geométrica e que, aqui, não foi utilizado nenhum argumento geométrico.

Dissemos atrás que não era necessário introduzir um símbolo primitivo para a subtracção. Com efeito, dados $x, y \in \mathbb{R}$, podemos *definir* $x - y$ por²⁷

$$x - y = x + (-y).$$

Que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad -(x + y) = (-x) - y$$

(novo teorema desta teoria) prova-se da mesma forma que a proposição 11(9).

Finalmente o enunciado da proposição 12

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x - y = z \Leftrightarrow x = z + y$$

que é um novo teorema, tem a mesma demonstração.

As proposições 13, 14 e 15 do parágrafo precedente, ainda não fazem sentido nesta teoria, uma vez que nos falta definir o símbolo $<$.

Exercício 12. Prove o seguinte teorema (lei do corte):

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + z = y + z \Rightarrow x = y.$$



²⁷O que, no parágrafo precedente, era uma proposição (11(b)), é agora uma definição!

Os axiomas da multiplicação

Os axiomas relativos à adição e algumas das suas consequências foram tratados com bastante detalhe, não só na sua apresentação como também na sua ligação às proposições 7 a 24 do parágrafo precedente. Seremos, no concerne à multiplicação, muito mais sucintos.

Os dois axiomas seguintes são de escolha natural:

Axioma 5 (comutatividade da multiplicação).

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axioma 6 (associatividade da multiplicação).

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Quanto à existência e unicidade de elemento neutro para a multiplicação, as considerações e resultados são idênticos aos feitos para a adição.

Escolhe-se como axioma a proposição

Axioma 7 (existência de elemento neutro da multiplicação).

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot a = x.$$

e prova-se que o elemento neutro é único, o que permite escolher um símbolo para o designar — o símbolo 1.

Quanto à existência e unicidade de elemento inverso (questão correspondente à posta para o elemento simétrico) a escolha natural é a proposição

Axioma 8 (existência de elemento inverso²⁸).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1.$$

demonstrando-se posteriormente a unicidade de elemento inverso. Uma vez provada a unicidade podemos, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, escolher um símbolo para designar o inverso de x — escolhe-se o símbolo $\frac{1}{x}$.

Estamos, agora, em condições de definir a divisão de $x \in \mathbb{R}$ por $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que designaremos por²⁹ $\frac{x}{y}$. Por definição

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

²⁸Que “0” não deve ter inverso resultará de um exercício que formularemos depois de apresentar outros axiomas.

²⁹Como tínhamos anunciado, a divisão pode ser definida recorrendo à multiplicação e seus axiomas.

Demonstra-se facilmente o seguinte resultado (outro teorema da nossa teoria)

$$\forall x, z \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \frac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = y \cdot z$$



Axiomas de ligação entre a adição e a multiplicação

É usual, numa teoria axiomática, que à medida que são introduzidos novos símbolos primitivos, se listem axiomas que estabeleçam ligações entre o símbolo primitivo introduzido e os anteriores, por forma a que se possa trabalhar, não só com cada um deles individualmente, mas também com todos em conjunto.

No nosso caso, em que temos a adição e a multiplicação como símbolos primitivos (cada um com os seus axiomas), um axioma que ligue estas duas operações é, naturalmente, o

Axioma 9 (distributividade da multiplicação relativamente à adição³⁰).

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Curiosamente, ainda vamos necessitar de um outro axioma que surge de uma forma mais subtil. Recordemos que a recta real \mathcal{R} era uma recta fixa onde se marcaram dois pontos O e I *distintos*. Estando nós a axiomatizar o conjunto dos números reais, que anteriormente considerávamos ser \mathcal{R} , e sendo inerente à construção de \mathcal{R} que O e I sejam pontos distintos, é natural conjecturar que esse facto se repercuta na axiomática. Ora, como O é a imagem geométrica de 0 e I é a imagem geométrica de 1, somos conduzidos a impor o

Axioma 10 (distinção dos elementos neutros).

$$0 \neq 1.$$

Exercício 13. Prove o seguinte teorema:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 0 = 0.$$

(Sugestão: Note que $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)$.)

³⁰Note que este axioma corresponde à proposição 21 cuja demonstração é de natureza geométrica.

Exercício 14. Prove o seguinte teorema:

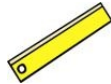
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-1) \cdot x = -x.$$

Exercício 15. (a) Considere uma teoria axiomática cujos símbolos primitivos sejam \mathbb{R} , $+$, \cdot , e cujos axiomas sejam os axiomas 1 a 10 excepto o 8. Introduza ainda (em vez do axioma 8) o axioma seguinte

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1.$$

Mostre que esta teoria conduz a uma contradição.

(b) (difícil) Suprima na teoria axiomática da alínea (a), o axioma 10. Será esta nova teoria contraditória?



Os axiomas de \mathbb{R}^+

Quando fizemos algumas considerações sobre os termos primitivos, tínhamos manifestado estranheza pela escolha de \mathbb{R}^+ como um tal símbolo. Dissemos, então, que o que acharíamos natural seria a introdução da relação $<$ como símbolo primitivo, uma vez que ela determinava, em \mathcal{R} , o conjunto dos números reais positivos. Vamos, agora, ver que o símbolo \mathbb{R}^+ e os seus axiomas, permitem definir uma relação de ordem com as propriedades desejadas³¹.

Começemos por listar os axiomas que dizem respeito apenas a \mathbb{R}^+ .

Axioma 11.

$$\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}.$$

Nota. Convém, neste ponto, ser muito cuidadoso. O facto de termos chamado aos elementos de \mathbb{R}^+ números reais positivos³², destinou-se apenas a que se não perdesse a intuição sobre o que se iria fazer na sequência. Poderíamos ter dado aos elementos de \mathbb{R}^+ o nome de elementos α e, se assim tivéssemos procedido, por que razão deveriam os elementos α serem números reais?

É muito importante, quando trabalhamos com os elementos de \mathbb{R}^+ , *saber distinguir entre o que queremos que eles sejam, e o que efectivamente sabemos deles*. Por enquanto sabemos que todos os elementos de \mathbb{R}^+ são números reais.

³¹Poderíamos também ter escolhido como símbolo primitivo, a relação $<$, mas optámos por outra solução (a escolha de \mathbb{R}^+). Esta escolha deve-se, essencialmente, ao facto de não havermos definido o termo “relação”.

³²o que poderia levar a pensar que eles eram necessariamente números reais

Definimos o conjunto \mathbb{R}^- (a cujos elementos chamamos números reais negativos) como sendo o subconjunto de \mathbb{R} formado pelos números reais cujo simétrico pertence a \mathbb{R}^+ .

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}; \quad (-x) \in \mathbb{R}^+\}$$

ou, o que é equivalente³³, pelo subconjunto de \mathbb{R} formado pelos simétricos dos elementos de \mathbb{R}^+

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}; \quad \exists y \in \mathbb{R}^+ \ x = (-y)\}.$$

Axioma 12.

$$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset.$$

Axioma 13.

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset (\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-).$$

O axioma 12 diz-nos que não existem números reais que sejam ao mesmo tempo positivos e negativos. O axioma 13 diz-nos que todo o número real não nulo ou é positivo ou é negativo.

Vejam, agora, alguns resultados (teoremas) que se podem provar usando, apenas, estes dois axiomas e consequências dos axiomas anteriores.

Do exercício 14, vem que $(-1) \cdot 0 = -0$ e do exercício 13 que $(-1) \cdot 0 = 0$, donde se segue³⁴ que $0 = -0$. Assim (axioma 12), $0 \notin \mathbb{R}^+$ e $0 \notin \mathbb{R}^-$. Conclui-se daqui que, se $x \in \mathbb{R}^+$ ou se $x \in \mathbb{R}^-$, então x é um número real diferente de zero, o que nos permite afirmar que

$$(\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

o que, em conjunto com o axioma 13, demonstra a proposição seguinte:

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-.$$

Tem-se, portanto

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \tag{22}$$

sendo esta reunião *disjunta*, o que significa que nenhum dos conjuntos tem algum elemento comum com os outros conjuntos

$$\mathbb{R}^- \cap \{0\} = \emptyset, \quad \mathbb{R}^+ \cap \{0\} = \emptyset, \quad \mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset.$$

³³A equivalência resulta de se ter $-(-x) = x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

³⁴ $0 = -0$ é também uma consequência fácil dos primeiros quatro axiomas.



Estamos, agora, em condições de definir a relação “menor”. Dados dois números reais x e y , dizemos que x é menor que y , e escrevemos $x < y$, sse³⁵

$$(y - x) \in \mathbb{R}^+.$$

Assim

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x < y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}^+ \quad (23)$$

Vejamos, sucintamente, alguns resultados (teoremas) que se podem obter utilizando a relação “menor”.

(i)

$$\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R}; 0 < y\}.$$

Basta, em (23), escolhermos $x = 0$.

(ii)

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}.$$

Basta, em (23), escolhermos $y = 0$.

(iii) Para cada x e y reais verifica-se uma e uma só das proposições seguintes

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

Considere $y - x$ e utilize (22) para provar que é verdadeira uma e uma só das proposições seguintes:

$$(y - x) \in \mathbb{R}^-, \quad (y - x) \in \{0\}, \quad (y - x) \in \mathbb{R}^+.$$

(iv)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x < y \Rightarrow (x + z) < (y + z).$$

Reveja a demonstração da proposição 15.



³⁵O que, no parágrafo precedente, era uma proposição (14(b)) é agora uma definição.

Axiomas de ligação entre a adição, a multiplicação e \mathbb{R}^+

A proposição 24(13) estabelece uma ligação (de prova geométrica) entre a multiplicação e \mathbb{R}^+ , o que a torna, assim, uma candidata natural a axioma. Para a adição escolhemos como axioma uma proposição semelhante.

Axioma 14. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (x + y) \in \mathbb{R}^+.$

Axioma 15. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (x \cdot y) \in \mathbb{R}^+.$

Vejamos, sucintamente, algumas consequências (teoremas) destes axiomas.

(i)

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x < y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z).$$

Basta ver que, $(y - x) \in \mathbb{R}^+$ e $(z - y) \in \mathbb{R}^+$, então $(z - x) \in \mathbb{R}^+$. Ora, $z - x = (z - y) + (y - x)$.

(ii)

$$\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} \quad (x < y \wedge u < v) \Rightarrow (x + u) < (y + v).$$

Basta ver que, $(y - x) \in \mathbb{R}^+$ e $(v - u) \in \mathbb{R}^+$, então $((y + v) - (x + u)) \in \mathbb{R}^+$. Ora, $(y + v) - (x + u) = (y - x) + (v - u)$.

(iii)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}^+ \quad x < y \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z.$$

Reveja a demonstração da proposição 24(14).



No meu fim está o meu princípio³⁶

Teremos acabado a lista dos axiomas?

Basta reler a última parte da secção 4 para suspeitar que não! A radiciação foi aí introduzida utilizando régua e *compasso*³⁷, e não foi definida à custa das operações elementares — se a pudéssemos definir agora, certamente a poderíamos ter definido então. E foi a radiciação que nos deu o primeiro exemplo de um número real que não era racional!

³⁶... *in my end is my beginning*, frase amplamente citada (por exemplo, por Jorge Luís Borges) e atribuída a Mary Stuart, rainha da Escócia, como um comentário à sua própria vida.

³⁷O compasso não intervinha nas definições das operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão.

Pensando melhor, concluímos que os axiomas 1 a 15, não nos permitem introduzir muitos dos irracionais. Com efeito, se pudéssemos agora definir o número $\sqrt[3]{2}$, também anteriormente o poderíamos ter feito, o que implicaria que ele podia ser construído com régua e compasso, o que sabemos ser falso.

Para concluir estas considerações, observemos (e este é um argumento decisivo) que *os racionais* (tal como os conhecemos, *satisfazem*³⁸ *aos axiomas 1 a 15*. Segue-se daqui que *tudo o que se possa deduzir desses axiomas tem de ser verdadeiro para os números racionais*. Assim, da actual teoria axiomática, nem a existência de $\sqrt{2}$ é possível demonstrar.

A nossa teoria está, então, incompleta. Faltam-nos axiomas (e, quem sabe, mesmo termos primitivos) que nos permitam distinguir os números racionais dos irracionais e dar destes últimos propriedades bastantes que nos habilitem a deduzir delas tudo o que pretendemos.

Parece que voltámos de novo ao princípio. É certo que formalizámos os números racionais, mas o que falta (os irracionais que são “quase todos os reais”) deve requerer um esforço ainda maior do que aquele até agora feito — quantos mais termos primitivos serão necessários? E quantos mais axiomas?

A resposta a esta questão é surpreendente:

Não necessitamos de mais símbolos primitivos e apenas introduzimos mais um axioma.

Como pode isto ser possível! E só mais um axioma?

Não se esqueça o leitor que *os primeiros quinze axiomas também são impostos para os números irracionais e que um novo axioma só destinado a estes, tem a sua acção potenciada pelos quinze axiomas!*

Qual é então, este último axioma?

Poderíamos dar já o seu enunciado (que requer, apenas, algumas poucas definições), mas pensamos que é no capítulo das sucessões que a sua necessidade nos conduzirá a uma formulação natural. Assim a teoria axiomática esboçada para os números reais só ficará completa no capítulo das sucessões.

³⁸Verifique, cuidadosamente, esta observação.

Índice remissivo

- adição, 11, 32
- associatividade
 - da adição, 39
 - da multiplicação, 43, 48
- axioma
 - da associatividade da adição, 61
 - da associatividade da multiplicação, 63
 - da comutatividade da adição, 61
 - da comutatividade da multiplicação, 63
 - da distributividade da multiplicação relativamente à adição, 64
 - da existência de elemento neutro da adição, 61
 - da existência de elemento neutro da multiplicação, 63
 - da existência de simétrico, 62
 - da existência do inverso, 63
 - da não existência de reais simultaneamente positivos e negativos, 66
 - de inclusão dos reais positivos nos reais, 65
 - de ligação entre a adição e \mathbb{R}^+ , 68
 - de ligação entre a multiplicação e \mathbb{R}^+ , 68
 - que garante que um real não nulo é positivo ou negativo, 66
- compasso, 6
- comutatividade
 - da adição, 39
 - da multiplicação, 43, 48
- distributividade
 - da multiplicação em relação à adição, 44
 - da multiplicação em relação à subtracção, 46
- divisão, 16, 37
- duplicação do cubo, 54
- elemento neutro
 - da adição, 40
- medição, 20
- menor, 67
- multiplicação, 12, 35
- números
 - racionais, 16
 - inteiros, 12
 - naturais, 9
 - racionais, 8, 16
 - reais
 - negativos, 66
 - positivos, 65
- ponto, 6
- produto, *ver* multiplicação
- quadratura do círculo, 54
- régua, 6
- radiciação, 50
- raiz, 50
- recta, 6
- real, 7
- semi-recta real
 - negativa, 8
 - positiva, 8
- sentido, 7
- simétrico, 40
- soma, *ver* adição
- subtracção, 12, 34
- teorema

de Pascal, 47
trisseção do ângulo, 54
unicidade
do elemento neutro da multipli-
cação, 43

Nomenclatura

$+$	adição, 59
$-\mathcal{N}$	imagem dos inteiros negativos na recta real, 15
$<$	menor, 67
$>$	maior, 41
\mathcal{N}	imagem dos naturais na recta real, 10
\mathcal{Q}	imagem dos racionais na recta real, 25
\mathcal{R}	recta real, 7
\mathcal{Z}	imagem dos inteiros na recta real, 16
\geq	maior ou igual, 41
\oplus	adição em \mathcal{N} , 11
\leq	precede na recta real, 7
\mathbb{R}^+	reais positivos, 59
\mathbb{R}^-	reais negativos, 66
\mathcal{R}^+	semi-recta real positiva, 8
\mathcal{R}^-	semi-recta real negativa, 8