CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
1º TESTE (Versão A)

14 /Novembro /2009 Duração: 1h30m

I

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq \frac{2}{x} \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \log \frac{x}{2} \leq 0 \right\}.$$

1. Mostre que $A =]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$ e identifique o conjunto B.

Resolução:

$$|x-1| \geq \frac{2}{x} \iff x-1 \geq \frac{2}{x} \vee x-1 \leq -\frac{2}{x} \iff \frac{x^2-x-2}{x} \geq 0 \vee \frac{x^2-x+2}{x} \leq 0$$

Atendendo a que

		-1		0		2	
x^2-x-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$\frac{x^2-x-2}{x}$	$-$	0	$+$	$//$	$-$	0	$+$

e

		0	
x^2-x+2	$+$		$+$
x	$-$		$+$
$\frac{x^2-x+2}{x}$	$-$	$//$	$+$

vem

$$|x-1| \geq \frac{2}{x} \iff x \in [-1, 0[\cup [2, +\infty[\vee x \in]0, +\infty[\iff x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[= A$$

Quanto ao conjunto B, tem-se

$$x \log \frac{x}{2} \leq 0 \iff x > 0 \wedge \log \frac{x}{2} \leq 0 \iff x > 0 \wedge \frac{x}{2} \leq 1 \iff x \in]0, 2]$$

e, portanto, $B =]0, 2]$.

2. Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\min(A \cap B)$, $\max(B \setminus A)$, $\sup(B \setminus \mathbb{Q})$.

Resolução:
O conjunto A não é majorado, logo não tem supremo.
Além disso,

$$\begin{aligned} \inf B &= 0;\ \min(A \cap B) = \min\{2\} = 2;\ B\setminus A =]0, 2[\,,\ \text{logo } B\setminus A \text{ não tem máximo;} \\ \sup(B\setminus\mathbb{Q}) &= \sup(]0, 2[\cap \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 2. \end{aligned}$$

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{n\sqrt{n}-1}{1-n}, \qquad \lim \frac{(-1)^n n}{n^4+\cos n}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3+4^n}}$$

Resolução:

$$\lim \frac{n\sqrt{n}-1}{1-n} = \lim \frac{\sqrt{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-1} = +\infty$$

$$\lim \frac{(-1)^n n}{n^4+\cos n} = \lim (-1)^n \frac{\frac{1}{n^3}}{1+\frac{\cos n}{n^4}} = 0,$$

visto que é produto de uma sucessão limitada por um infinitésimo.
Seja $a_n = \frac{n}{3+4^n}$ $(n \in \mathbb{N})$; tem-se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n+1}{n}\frac{3+4^n}{3+4^{n+1}} = \lim \frac{n+1}{n}\frac{\frac{3}{4^{n+1}}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4^{n+1}}+1} = \lim \frac{n+1}{n}. \lim \frac{\frac{3}{4^{n+1}}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4^{n+1}}+1} = \frac{1}{4}.$$

Então, também

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n}{3+4^n}} = \frac{1}{4}.$$

2. Considere a sucessão de números reais definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n} \quad \text{se } n \geq 1$$

Mostre por indução que se tem $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$

Resolução:
Base: $n = 1$

$$a_1 = 1 = \frac{2.1}{1+1}, \qquad \text{proposição verdadeira.}$$

Passo 2: supondo que $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$,tem-se

$$a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n} = \frac{4}{4-\dfrac{2n}{n+1}} = \frac{4(n+1)}{4n+4-2n} = \frac{4(n+1)}{2(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

o que mostra que a igualdade é válida para $n+1$.
Por indução, conclui-se que a igualdade é válida para todo o $n \in \mathbb{N}$.

III

1. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\log(x+1)}}{xe^x}$.
a) Determine o domínio de f .

Resolução:
O domínio D de f é dado por

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge 1-\log(x+1) \geq 0 \wedge x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge \log(x+1) \leq 1 \wedge x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x+1 \leq e \wedge x \neq 0\} =]-1,0[\cup]0,e-1]\,. \end{aligned}$$

b) Estude a função f quanto a continuidade.

Resolução

Consideremos a função composta

$$x \longmapsto x+1 = y \longmapsto \log y = z \longmapsto 1-z = w \longmapsto \sqrt{w} = g(x)$$

onde $g(x) = \sqrt{1-\log(x+1)}$. Uma vez que as funções polinomiais, a função logaritmo e a função $\sqrt{x}$ são contínuas nos domínios respectivos, concluímos que g é uma função contínua no seu domínio, isto é , em $]-1,e-1]$. Por outro lado, $h(x) = xe^x$ é contínua em $\mathbb{R}$, visto que é produto de duas funções contínuas.

Então, como $f = \dfrac{g}{h}$, f é contínua em todo o seu domínio, isto é, em $]-1,e-1] \setminus \{0\}$.

2. Considere a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x^2}{1+x} & \text{se } x \geq 0 \\ \\ e^x \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Justificando, diga se h é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 0.

Resolução:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - x^2}{1+x} = \pi = h(0),$$

o que significa que h é contínua à direita no ponto zero.

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x \sin x = 0 \neq h(0)$$

e h não é contínua à esquerda no ponto zero; portanto, h não é contínua no ponto zero.

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} e^x \sin x = 0 \quad \text{(porque } \lim_{x\to -\infty} e^x = 0 \text{ e } \sin x \text{ é função limitada)..}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - x^2}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\pi}{x^2} - 1}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}} = -\infty.$$

3. Seja φ uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$. Supondo que se tem

$$\varphi\left((-1)^n + \frac{n}{n+2}\right) = \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

indique, justificando, os valores de $\varphi(0)$ e de $\varphi(2)$.

Resolução:
Seja $a_n = (-1)^n + \frac{n}{n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tem-se

$$\lim a_{2n} = \lim 1 + \frac{2n}{2n+2} = 2 \text{ e } \lim a_{2n+1} = \lim -1 + \frac{2n+1}{2n+3} = 0.$$

Como φ é contínua no ponto zero, sabemos que, qualquer que seja a sucessão $x_n$de termos em $\mathbb{R}$, se tem

$$\lim x_n = 0 \Rightarrow \lim \varphi(x_n) = \varphi(0).$$

Em particular, e porque $\arcsin x$ é função contínua em 1,

$$\varphi(0) = \lim \varphi(a_{2n+1}) = \lim \arcsin\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Do mesmo modo, porque φ é contínua no ponto 2 ,

$$\varphi(2) = \lim \varphi(a_{2n}) = \lim \arcsin\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$