Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^o Semestre 2013/2014
15 de Outubro de 2013
Duração: 45 minutos

1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

1) (1.0) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Determine, justificando, os valores de α para os quais o sistema anterior é possível e indeterminado, e calcule a solução geral do sistema correspondente a $\alpha = 1$.

2) (1.0) Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} (2I - A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

3) (1.0) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Factorize a matriz A na forma $A = LU$, obtendo uma matriz L triangular inferior só com 1's na diagonal principal e uma matriz U triangular superior.

4) (1.0) Seja $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathcal{P}_2$:

$$U = L(\{2 + t + t^2, t + t^2\}) \qquad V = L(\{1 + t + t^2, 1 + t^2\}).$$

Determine $u \in \mathcal{P}_2$ tal que

$$U \cap V = L(\{u\}).$$

5) (0.5) Considere o seguinte subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$W = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Determine, justificando, $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$W + L(\{A\}) = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

6) (0.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^2)$. Mostre que $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$.