5. Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

Corrente de deslocamento e vetor de Poynting

Exercício 5.1: Um condensador de faces paralelas circulares, de raio a e distanciadas de $d << a$, está a ser carregado por uma corrente elétrica descrita por $I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$. Admitindo que para $t = 0$ o condensador está descarregado, determine:

a) a densidade de carga na armadura positiva em função do tempo;
b) o campo elétrico no interior do condensador em função do tempo;
c) a corrente de deslocamento que atravessa um círculo de raio $r < a$ paralelo e concêntrico com as armaduras;
d) o campo magnético no interior do condensador.

Exercício 5.2: Um condutor cilíndrico de comprimento ℓ, secção circular de raio $a \ll \ell$ e condutividade σ_c está ligado a uma fonte de tensão V.

a) Determine o vetor de Poynting ($\vec{S}$), junto à superfície do condutor, no seu exterior.
b) Determine o fluxo do vetor de Poynting através da superfície do condutor e compare-o com a potência dissipada no condutor por efeito de Joule.

Exercício 5.3: Um cabo coaxial com condutores de raios a e b, liga uma fonte de tensão V a uma resistência R.

a) Determine os campos elétrico e magnético na região entre os condutores.
b) Determine a magnitude e direção do vector de Poynting.
c) Determine o fluxo do vetor de Poynting através da fronteira do cabo.
d) Determine o fluxo do vector de Poynting através da secção reta do cabo. Compare-o com a potência dissipada por efeito de Joule na resistência.

Ondas eletromagnéticas planas

Exercício 5.4: Se a velocidade da luz fosse infinita e o campo elétrico fosse caracterizado pela mesma constante, $(1/4\pi\varepsilon_0)$, qual seria o valor do campo magnético? Existiriam ímanes? E discos HDD ou SSD?

Exercício 5.5: Uma onda plana monocromática de frequência $f = 50\ MHz$ viaja no vácuo com a direção do eixo zz, tendo o campo magnético $\vec{B}$ a direção do eixo xx e uma amplitude B_0.

a) Qual o seu comprimento de onda?
b) Qual a direção do campo elétrico?
c) Admita que usa uma espira condutora para detectar o campo magnético da onda. Em que plano deve ser colocada a espira para que a eficiência de detecção seja máxima?
d) Se a espira, de diâmetro muito menor que o comprimento de onda, tiver uma área A e uma resistência R, qual a amplitude da corrente induzida?

Exercício 5.6: Uma onda plana monocromática com uma frequência $f = 300\ MHz$ viaja no ar, com a direção do eixo zz e o seu campo elétrico tem uma intensidade máxima $E_0 = 0{,}3\ V.m^{-1}$ e tem a direção do eixo yy.

a) Calcule o comprimento de onda, λ, e o período, T.
b) Calcule a frequência angular, ω, e o número de onda, k.
c) Escreva a equação que descreve o campo elétrico.
d) Escreva a equação que descreve o campo magnético.
e) Calcule as densidades de energia elétrica e magnética, e a densidade de energia da onda.
f) Escreva a expressão do vetor de Poynting.
g) Calcule a intensidade da onda, I.

Exercício 5.7: Uma onda plana monocromática de frequência $f = 1\ GHz$ propaga-se no vácuo e é descrita pelo seguinte campo eléctrico:

$$\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y$$
$$E_x = E_0\cos(\omega t - \kappa z)$$
$$E_y = E_0\mathrm{sen}(\omega t - \kappa z)$$

Determine, para esta onda:

a) o comprimento de onda e o período;
b) a direção de propagação;
c) a polarização da onda;
d) o campo magnético;
e) a densidade de energia transportada;
f) o vector de Poynting.

Exercício 5.8: O campo magnético de uma onda eletromagnética plana que se propaga num meio com permeabilidade magnética μ_0 é dada por:

$$B_x = 7{,}5 \times 10^{-9}\text{sen}(7{,}5 \times 10^6\, t - 3 \times 10^{-2}\, y)\ [T]$$

$$B_z = -7{,}5 \times 10^{-9}\text{sen}(7{,}5 \times 10^6\, t - 3 \times 10^{-2}\, y)\ [T]$$

a) Calcule a velocidade de propagação da onda.
b) Qual a permitividade do meio?
c) Qual a direção de propagação da onda?
d) Descreva o estado de polarização da onda.

Exercício 5.9: Uma onda eletromagnética plana e monocromática propaga-se num meio não condutor com permeabilidade magnética μ_0. O seu campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = E_0 \cos\left[6{,}5 \times 10^6 t - 3{,}1 \times 10^{-2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z\right)\right]\ \vec{u}_x$$

a) Qual a direção de propagação da onda?
b) Qual a velocidade de propagação da onda?
c) Qual a polarização da onda?
d) Qual a direção do campo magnético?

Exercício 5.10: Um projetor radia isotropicamente no ar (todas as direções são equivalentes) com uma potência média de 1000 W. Para uma distância de 10 metros, calcule:

a) a intensidade da radiação;
b) o valor médio da densidade de energia transportada pela onda.
c) o valor médio dos quadrados dos módulos dos campos elétrico e magnético, $\langle E^2 \rangle$ e $\langle B^2 \rangle$.

Exercício 5.11: Uma onda eletromagnética plana e monocromática propaga-se no ar e incide com um ângulo de 60° numa placa de vidro de área $A = 2\ m^2$, sendo a placa totalmente iluminada pela onda. A intensidade média da onda é $I = 10^{-4}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\ W.m^{-2}$ e o seu campo elétrico é descrito por:

$$\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_z\vec{u}_z$$
$$E_x = E_0 \cos(\omega t - \kappa y)$$
$$E_y = E_0 \text{sen}(\omega t - \kappa y)$$

a) qual a polarização da onda?
b) Quais as equações que descrevem o seu campo magnético $\vec{B}$?
c) Qual o valor de E_0?
d) Sabendo que 50% da potência transportada pela onda atravessa a placa, qual a energia que a atravessou ao fim de 1 hora?

Exercício 5.12: Um feixe de ondas eletromagnéticas de frequência f propaga-se no ar ao longo do eixo xx. O seu campo elétrico tem uma amplitude E_0 e encontra-se polarizado linearmente fazendo um ângulo de 45° com o eixo yy. Este feixe é detetado por um fotomultiplicador cuja eficiência de deteção é 20%.

a) Escreva as equações que descrevem o campo elétrico do feixe.
b) Escreva as equações que descrevem o campo magnético do feixe.
c) Sabendo que a intensidade de radiação detetada é 200 $mW.m^{-2}$, determine a intensidade do feixe e calcule a amplitude do campo elétrico, E_0.

Soluções

5.1 a) $\sigma(t)=\frac{Q(t)}{\pi a^2}=\frac{I_0}{\alpha\pi a^2}(1-e^{-\alpha t})$
b) $E(t)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{I_0}{\varepsilon_0\alpha\pi a^2}(1-e^{-\alpha t})$
c) $I_d(t)=I_0e^{-\alpha t}\frac{r^2}{a^2}=I(t)\frac{r^2}{a^2}$
d) $B(r,t)=\frac{\mu_0 I(t) r}{2\pi a^2}$

5.2 a) $\vec{S}=-\frac{\sigma V^2 a}{2\ell^2}\ \vec{u}_r$
b) $\Phi_S=\frac{V^2\sigma\pi a^2}{\ell}=\frac{V^2}{R}$

5.3 a) $\vec{E}=\frac{V}{r\ln(\frac{b}{a})}\ \vec{u}_r$
$\overrightarrow{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ \vec{u}_\theta$
b) $\vec{S}=\frac{VI}{2\pi r^2\ln(\frac{b}{a})}\ \vec{u}_z$
c) $\Phi_S=0$
d) $\Phi_S=VI=P$

5.4 $B=0$, *não existiria magnetismo*

5.5 a) $\lambda=\frac{c}{f}=6\ m$
b) $\vec{u}_E=-\vec{u}_y$
c) *No plano* yz $(\overrightarrow{B}\parallel\vec{n})$
d) $I_0=\frac{AB_0\omega}{R}$

5.6 a) $\lambda=\frac{c}{f}=1\ m$; $T=3{,}3\ ns$
b) $\omega=18{,}8\times10^8\ rad.s^{-1}$
$k=2\pi\ rad.m^{-1}$
c) $\vec{E}=0{,}3\text{sen}(\omega t-kz)\ \vec{u}_y$
d) $\overrightarrow{B}=-10^{-9}sen(\omega t-kz)\ \vec{u}_x$
e) $u_E=u_M=$
$3{,}98\times10^{-13}\text{sen}^2(\omega t-kz)$
$J.m^{-3}$
$u=u_E+u_M=$
$7{,}96\times10^{-13}\text{sen}^2(\omega t-kz)$
f) $\vec{S}=2{,}39\times10^{-4}\times$
$\text{sen}^2(\omega t-kz)\ \vec{e}_z\ \ W.m^{-2}$
g) $I=\langle S\rangle=$
$\frac{1}{2}S_{max}=1{,}19\times10^{-4}\ \ W.m^{-2}$

5.7 a) $\lambda=0{,}3m$; $T=10^{-9}\ s.$
b) $\vec{u}_k=\vec{u}_z$
c) *Polarização circular*
d) $\overrightarrow{B}=\frac{1}{c}(E_x\vec{u}_y-E_y\vec{u}_x\ )$
e) $u=\epsilon_0E_0^2$
f) $\vec{S}=\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\ \vec{u}_z$

5.8 a) $v=0{,}83c$
b) $\varepsilon=1{,}44\ \varepsilon_0$
c) $\vec{u}_y$
d) *Polarização linear no plano xz, fazendo um ângulo de* $-45°$ *com o eixo xx.*

5.9 a) $\vec{u}_k=-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_y+\frac{1}{2}\vec{u}_z$
b) $v=2{,}1\times10^8\ m.s^{-1}$ $(0{,}7c)$
c) *Linear*
d) $\vec{u}_B=\frac{1}{2}\vec{u}_y+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_z$

5.10 a) $I=\frac{10}{4\pi}\ W.m^{-2}$
b) $\langle u\rangle=\frac{I}{c}=\frac{10^{-7}}{12\pi}\ J.m^{-3}$
c) $\langle E^2\rangle=\frac{\langle u\rangle}{\varepsilon_0}=300\ \ V^2.m^{-2}$
$\langle B^2\rangle=\mu_0\langle u\rangle=3{,}3\times10^{-15}\ \ T^2$

5.11 a) *Circular*
b) $\overrightarrow{B}=\frac{1}{c}(E_z\vec{u}_x-E_x\vec{u}_z)$
c) $E_0=10^{-2}\ V.m^{-1}$
d) $180\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\ mJ$

5.12 a) $E_y=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0\cos(2\pi f-kx)$
$E_z=\frac{\sqrt{2}}{2}E_0\cos\ (2\pi f-kx)$
b) $B_y=-\frac{\sqrt{2}}{2c}E_0\cos(2\pi f-kx)$
$B_z=\frac{\sqrt{2}}{2c}E_0\cos\ (2\pi f-kx)$
c) $I=1\ W.m^{-2}$; $E_0=\sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}}$