

ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)

1^o Sem. 2004/05

3^a Ficha de Exercícios

I. Sucessões Reais

1) Seja (u_n) uma sucessão de números reais. Indique, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras.

(a) Se $u_{2n} \rightarrow a$ e $u_{2n+1} \rightarrow a$, com $a \in \mathbb{R}$, então $u_n \rightarrow a$.

(b) Se $u_{2n} \rightarrow a$ e $u_{2n+1} \rightarrow b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então a e b são os únicos sublimites de (u_n) .

(c) Se as três sucessões u_{2n} , u_{2n+1} e u_{3n} são convergentes, então u_n é convergente.

2) Considere uma sucessão real (y_n) tal que

$$y_{2n-1} < 0 \quad \text{e} \quad y_{2n} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que se (y_n) é convergente então o seu limite é igual a zero.

3) Dê um exemplo de uma sucessão convergente (u_n) , tal que a sucessão $v_n = n \cdot u_n$ possui dois sublimites distintos.

4) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{4} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3/2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

5) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

6) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

7) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{3 + x_n^2}{2}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

8) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

9) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

10) Considere as expressões

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Verifique que definem, por recorrência, uma sucessão (x_n) , i.e. verifique que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por forma a que a segunda expressão faça sentido.
- (b) Prove que $x_n \geq 2$ e $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.
- (c) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

11) Mostre que as expressões

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + 2x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

definem por recorrência uma sucessão (x_n) que é convergente. Calcule o seu limite.

12) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+7} & \text{(b) } x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} & \text{(c) } x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} \\
 & \text{(d) } x_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2} & \text{(e) } x_n = \left(1 - \frac{1}{n!}\right)^{n!} & \text{(f) } x_n = \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3} \\
 & \text{(g) } x_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{1-n} & \text{(h) } x_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{n/2} & \text{(i) } x_n = \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n^2} \\
 & \text{(j) } x_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1} & \text{(k) } x_n = \left(\frac{2n}{n+1} - 1\right)^n & \text{(l) } x_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2+6} \\
 & \text{(m) } x_n = \left(1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n+1}}
 \end{aligned}$$

13) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } x_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} & \text{(b) } x_n = \sqrt[n]{\frac{n^2 + n + 1}{n - 3}} & \text{(c) } x_n = \sqrt[n]{2^n + 1} \\
 & \text{(d) } x_n = \sqrt[n]{(n+1)! - n!} & \text{(e) } x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^{2n}} & \text{(f) } x_n = \sqrt[n]{\frac{n^2}{n+1}} \\
 & \text{(g) } x_n = \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}} & \text{(h) } x_n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} & \text{(i) } x_n = \left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2n}} \\
 & \text{(j) } x_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

14) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 1 - \frac{x_n^2}{4}.$$

(a) Mostre que

$$0 \leq x_n \leq 1 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{(x_n - x_{n+1})(x_n + x_{n+1})}{4}, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

15) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

(a) Mostre que

$$x_n \geq 1 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n + 1}, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

16) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + 2}.$$

(a) Mostre que

$$x_n \geq 0 \quad \text{e} \quad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n - x_{n+1}}{(x_{n+1} + 2)(x_n + 2)}, \quad \forall n \geq 1.$$

(b) Use o resultado da alínea anterior para provar que (x_n) é convergente, e calcule o seu limite.

17) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$(a) \ x_n = \frac{2^{2n} + 6n}{3^n + 4^{n+2}} \quad (b) \ x_n = \frac{n!}{5^n + (n+1)^2} \quad (c) \ x_n = \frac{2^n + (n+1)!}{3^n + n!}$$

$$(d) \ x_n = \frac{(n+1)^n - n!}{7^n - n^n} \quad (e) \ x_n = \sqrt[n]{n! + 2^n} \quad (f) \ x_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}$$

II. Séries Numéricas

1) Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} &= 3 & \text{(c)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} &= \frac{3}{4} \\ \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} &= \frac{3}{2} & \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} &= 1 & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} &= 9 \\ \text{(g)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= 1 & \text{(h)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} &= \frac{50}{3} & \text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{4} \\ \text{(j)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} &= \frac{5}{3} & \text{(k)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} &= 1 & \text{(l)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)} &= 1 \end{aligned}$$

2) Determine a natureza das seguintes séries:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum \frac{n-2}{3n+1} & \quad \text{(b)} \quad \sum \frac{\sqrt{n}}{n+1} & \quad \text{(c)} \quad \sum \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2} & \quad \text{(d)} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \\ \text{(e)} \quad \sum \frac{n+1}{n^3+1} & \quad \text{(f)} \quad \sum \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}} & \quad \text{(g)} \quad \sum \frac{n!}{(n+2)!} & \quad \text{(h)} \quad \sum \frac{n^2}{n^3+4} \\ \text{(i)} \quad \sum \frac{5^n}{4^n+1} & \quad \text{(j)} \quad \sum \frac{2^n}{3^n+1} & \quad \text{(k)} \quad \sum \frac{2^{2n}}{3^n+1} \\ \text{(l)} \quad \sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \right)^3 & \quad \text{(m)} \quad \sum \frac{2^n+n^3}{2^{n+1}(n+1)^3} \end{aligned}$$

3) Determine o conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^n$$

é convergente e, para cada um desses valores, calcule a sua soma.