Instituto Superior Técnico - TagusPark
Matemática Discreta 2020/2021
Exercícios para as aulas de problemas e teorico-práticas

Lista 3

Após a aula teorico-prática e a de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina. Vários dos exercícios (ou muito semelhantes) são apresentados como exemplos ou exercícios resolvidos nos Capítulos 1 e 5 do livro (alguns de entre eles estão explicitamente indicados abaixo).

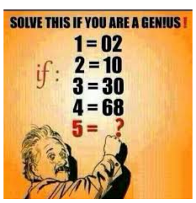
1 Teorema de Newton

1. Use o teorema de Newton para conjeturar o termo geral (polinomial) de uma sucessão cujos primeiros termos são

   (a) $1, \quad 2, \quad 5, \quad 16, \quad 41, \quad 86, \quad \ldots$ (b) $6, \quad 13, \quad 36, \quad 129, \quad 346, \quad \ldots$ (c) $12, \quad 40, \quad 90, \quad 168, \quad 280, \quad \ldots$

2. Indicam-se na tabela seguinte valores que permitem calcular a densidade média observada ρ_p da água do oceano em função da profundidade p (em metros), para certos perfis de temperatura e salinidade: $\rho_p = 1024 + u_p$ kg/m^3. Assumindo uma conjetura polinomial, determine uma expressão que permita calcular a densidade a $k \times 10^2$m de profundidade. Calcule depois o valor para 600m de profundidade.

Profundidade p	0	100	200	300	400	500
u_p	0.98	1.37	1.81	2.27	2.71	3.10

3. 

   Assumindo uma conjetura polinomial, descubra a lei sugerida pela figura à esquerda.

2 Indução matemática

1. Demonstre por indução matemática cada uma das afirmações seguintes. Note que $\binom{m}{p}$ é uma outra forma de denotar ${}^mC_p$, o número de combinações de m, p a p, isto é, $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+10)!}{k!} = \frac{(n+11)!}{11n!}$, para cada $n \in \mathbb{N}$

   (d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{j+5}{5} = \binom{n+6}{6}$, para cada $n \in \mathbb{N}$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ((k^2+2k+2)(k+1)!) = (n+1)(n+2)!$, para cada $n \in \mathbb{N}$

   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{2n}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$

   (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$

   (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 1 + \frac{n}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$

   (i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} \geq \sqrt{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$

   (j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k+1}{k} \geq \frac{(n+1)2^{n+1}-2}{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$

2. Calcule o valor da expressão seguinte para $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

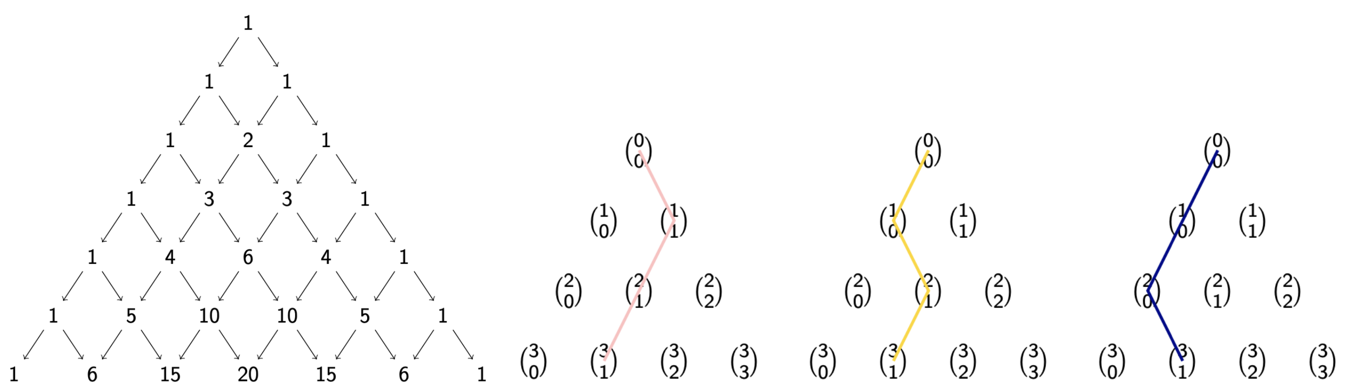
A partir desses valores proponha uma forma fechada para esta expressão e demonstre, por indução matemática, que a sua proposta está correta (note que $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$).

3. Calcule o valor da expressão seguinte[1] para $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$$

A partir dos valores obtidos proponha uma forma fechada para esta expressão, e demonstre, por indução matemática, que a sua proposta está correta. Pode ser útil recordar que $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$.

4. Considere o triângulo de Pascal e os caminhos que unem o vértice superior[2] $\binom{0}{0}$ e o vértice arbitrário $\binom{n}{k}$. Os troços do caminho são as arestas que unem dois vértices do triângulo, de cima para baixo, ou da direita para a esquerda (por exemplo, os caminhos que unem o vértice superior $\binom{0}{0}$ e o vértice $\binom{3}{1}$ são exatamente 3 $(=\binom{3}{1})$ - ver figuras abaixo do lado direito). Demonstre, por indução matemática, que, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, o número desses caminhos é exatamente $\binom{n}{k}$ $(0 \leq k \leq n)$. Pode ser útil recordar que $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$.



5. Recorde a definição recursiva dos números de Stirling de segunda espécie

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \qquad \left\{ {n \atop i} \right\} = \left\{ {i \atop 0} \right\} = 0 \quad (i \in \mathbb{N}_1, n < i) \qquad \left\{ {n \atop i} \right\} = \left\{ {n-1 \atop i-1} \right\} + i \left\{ {n-1 \atop i} \right\} \quad (i \in \mathbb{N}_1, n \geq i)$$

e note que decorre desta definição que $\left\{ {n \atop n} \right\} = \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$ $(n \in \mathbb{N}_1)$. Use indução matemática para concluir que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, o polinómio fatorial correspondente à potência k^n pode ser obtido à custa destes números como se segue:

$$k^n = \left\{ {n \atop n} \right\} k^{\underline{n}} + \left\{ {n \atop n-1} \right\} k^{\underline{n-1}} + \ldots + \left\{ {n \atop 2} \right\} k^{\underline{2}} + \left\{ {n \atop 1} \right\} k^{\underline{1}} \quad \text{isto é} \quad k^n = \sum_{i=1}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} k^{\underline{i}}$$

(livro: página 293)

[1] Recorde que $\binom{m}{p}$ é uma outra forma de denotar ${}^mC_p$, o número de combinações de m, p a p, isto é, $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$.

3 Indução matemática completa

1. Considere a sucessão definida como se segue: $u_0 = 1$ e $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_0 + 1$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Use indução matemática completa para mostrar que $u_n = 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Explique depois porque não se poderia neste caso usar indução simples.

2. Use indução matemática completa para mostrar que todo o $n \in \mathbb{N}_2$ se pode escrever como produto de potências de números primos. Explique depois porque não se poderia neste caso usar indução simples.

3. A *sucessão de Fibonacci*[2] $f = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ define-se por recorrência como se segue:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1 \ \text{ e } \ f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \ \text{ para } k \in \mathbb{N}_2$$

   Use indução matemática completa para estabelecer os resultados seguintes:

   (a) $f_k < 2^k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$

   (b) $f_k \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$ para todo o $k \in \mathbb{N}_1$

   (c) $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$ para todo o $k \in \mathbb{N}_1$, com $n \in \mathbb{N}_1$ fixo (livro: página 19)

   (d) Cada número natural $n \in \mathbb{N}$, ou é um número de Fibonacci, ou pode exprimir-se como soma de números de Fibonacci não consecutivos. Sugestão: na demonstração da tese de indução pode ser útil pensar no maior número de Fibonacci f_k tal que $f_k < n + 1 < f_{k+1}$.

4. Escolha o tipo de indução mais adequado para estabelecer os seguintes resultados:

   (a) $f_0 + f_1^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ (livro: página 14)

   (b) $f_{n+1} f_{n-1} = (-1)^n + f_n^2$ Sugestão: note que $f_{n+2} = f_{n+1} + f_{n-1} + f_{n-2}$.

[2] Um número de Fibonacci é qualquer dos termos desta sucessão. Apesar da definição aparentemente simples, esta sucessão é famosa porque os números de Fibonacci têm propriedades muito curiosas e ocorrem em situações muito diversas, nomeadamente, na botânica, nas artes visuais e na música. Pode obter em *http://www.studentguide.org/the-ultimate-resource-on-the-fibonacci-sequence* muita informação sobre a sucessão de Fibonacci, bem como acesso a diversas outras páginas sobre o mesmo assunto.