Análise Matemática I

6 de Janeiro de 2005

LEAero, LEBiom, LEFT e LMAC

2º Teste –	Perguntas 4, 5, 6 e 7 –	90 minutos
1º Exame –	Todas as Perguntas –	3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule em $\overline{\mathbb{R}}$, caso exista:

a) $\lim \sqrt[3]{\frac{n^2+3}{4n^2+n+2}}$, (1)

b) $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{100}$, (1)

c) $\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$. (1)

2. Estude a convergência das séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, (1)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$, (1)

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^3$, (1)

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. (1)

3. Seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ e

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} \left[(-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right].$$

a) Determine uma fórmula simplificada para s_k. (1)

b) Prove por indução a igualdade que obteve na alínea anterior. (1.5)

c) Calcule a soma da série que tem como sucessão das somas parciais a sucessão (s_k). (0.5)

4. Calcule

a) $\frac{d}{dx}\left(\cos x\, e^x + \arctan\sqrt{x} + \ln^3 x\right)$, (1.5)

b) $\frac{d}{dx}|x-1|$, (0.5)

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$. (0.5)

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \ln x$.

a) Calcule os limites de f em 0 e $+\infty$. (1)

b) Designando por $\bar{f}$ o prolongamento por continuidade de f a 0, analise a existência de derivada à direita de $\bar{f}$ no ponto 0. (0.5)

c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1. (1)

d) Determine os intervalos de monotonia, os extremos locais e esboce o gráfico de f. (2.5)

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e $c \in \mathbb{R}$. Existirão necessariamente $a, b \in \mathbb{R}$, com $c \in]a, b[$, tais que (0.5)

$$f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ?$$

Justifique ou apresente um contraexemplo.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $n \in \mathbb{N}$.

a) A função f tem máximo em $[-n, n]$. Justifique. (1)

Suponha que

$$\exists_{K\in\mathbb{N}} \forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \in [-K, K],$$

para uma certa sucessão (x_n) tal que x_n é ponto de máximo de $f|_{[-n,n]}$.

b) Será que f tem necessariamente máximo em $\mathbb{R}$? Justifique. (0.5)

c) Será que toda a sucessão maximizante (i.e. toda a sucessão (z_n) tal que $f(z_n) \to \sup_{\mathbb{R}} f \in \overline{\mathbb{R}}$) tem que ser limitada? Justifique. (0.5)