AM II 3ª ficha de exercícios - Soluções

LEAmb, LEB,
LEC, LEQ, LET, LQ

1/ a/ $\int_0^1 e^{x+e^x}\,dx = \int_0^1 e^x e^{e^x}\,dx = \left[e^{e^x} \right]_0^1 = e^{e} \ldots$

b/ $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+(\operatorname{sen}^2 x)^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}^2 x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$

c/ $\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx = \left[\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{6}$

d/ $\int_e^{e^2} \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\log x}_{v}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = e^4 - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \ldots\right.$

$= \frac{3}{4} e^4 - \frac{e^2}{4} \ldots$

e/ $\int_0^{\pi} \underbrace{\operatorname{Sh} x}_{u'} \underbrace{\operatorname{Sen} x}_{v}\,dx = \underbrace{\left[\operatorname{Ch} x \operatorname{Sen} x \right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} \underbrace{\operatorname{Ch} x}_{u'} \underbrace{\cos x}_{v}\,dx =$

$= -\left[\operatorname{Sh} x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \operatorname{Sh} x\,(-\operatorname{Sen} x)\,dx = \operatorname{Sh} \pi - \int_0^{\pi} \operatorname{Sh} x \operatorname{Sen} x\,d\ldots$

$(=) \int_0^{\pi} \operatorname{Sh} x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\operatorname{Sh} \pi}{2}$

f/ $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2-1)\cancel{t}}\, 2\cancel{t}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$

$\sqrt{x+1} = t \;(=)\; x = t^2 - 1 = \varphi(t)\;;\; \varphi'(t) = 2t$

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$

$x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$= \left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \ldots \right.$

$= \log\left|\frac{(\sqrt{3}-1)(\ldots}{(\sqrt{3}+1)(\ldots}\right.$

g/ $\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}\right) dx = \left[\log|x| - \frac{1}{2}\log \ldots\right.$

h/ $\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5}\right) dx = \left[\log\sqrt{|x^2-25|}\right]_2^3 = \log 2 - \log\sqrt{5} + \log\sqrt{2}\ldots$

$= \log\frac{4}{\sqrt{21}}$

$= \log\frac{2\ldots}{\ldots}$

2/ $\phi(x) = \int_a^x \varphi(\tau)\, d\tau \quad a \in [0,1]$; φ integrável em $[0,1]$

ϕ é o integral indefinido de uma função integrável φ, logo pelo teorema fundamental do Cálculo Integral ϕ é contínua em $[0,1]$ logo ϕ é integrável em $[0,1]$. Aplicando o teorema da média do cálc. Integral a ϕ e a $[0,1]$ tem-se que:

2

existe $b \in [0,1]$ tal que $\int_0^1 \phi(\tau)\, d\tau = \phi(b)(1-0) = \int_a^b \varphi($

3/ f contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável no ponto 0.

$g(x) = \int_0^x f(\tau)\, d\tau \quad , \forall x \in \mathbb{R} \qquad h = g \circ g$

g é diferenciável em $\mathbb{R}$ pelo Teo. fund. do cálc. Int., pois é o integral indefinido de uma função f contínua em $\mathbb{R}$. h é diferenciável em $\mathbb{R}$ por ser a composta de funções diferenciáveis. Pelo Teo. fund. do cálc. Int. tem-se ainda

$g'(x) = f(x)$. Logo $h'(x) = g'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, f(x)$.

Como $g(0) = 0$ e f é diferenciável em 0 tem-se h' diferenciável em 0 e $h''(0) = f'(g(0))\, g'(0)\, f(0) + f(g(0))\, f'(0) =$

$= f'(0)(f(0))^2 + f(0)\, f'(0)$.

4/ f diferenciável em $\mathbb{R}$ e $\int_0^x f(u)\, du = x f(x)$

Logo $\int_0^x f(u)\, du$ é o integral indefinido de uma função contínua em $\mathbb{R}$, logo pelo Teo. fund. do cálc. integ. $\int_0^x f(u$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e ainda pelo mesmo Teorema:

$\left(\int_0^x f(u)\, du\right)' = f(x)$. Logo, a partir de: $\int_0^x f(u)\, du = x f(x)$ te

$\left(\int_0^x f(u)\, du\right)' = (x f(x))' \Leftrightarrow f(x) = f(x) + x f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Tem-se então: $f'(x) = 0 \;, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Logo f é constante em $\mathbb{R}^+$ e f é constante em $\mathbb{R}^-$
Como f é contínua no ponto 0, f é constante em $\mathbb{R}$.

5/
Como $e \leq e^{x^2} \leq e^{e^2}$ e $\log x \geq 0$ $\forall x \in [1, e]$ temos:

$\forall x \in [1,e]$, $e \log x \leq e^{x^2} \log x \leq e^{e^2} \log x$. Logo:

$$\underbrace{\int_1^e e \log x \, dx}_{= e \int_1^e \log x \, dx} \leq \int_1^e e^{x^2} \log x \, dx \leq \underbrace{\int_1^e e^{e^2} \log x \, dx}_{= e^{e^2} \int_1^e \log x \, dx}$$

$$e \underbrace{\int_1^e \log x \, dx}_{= [x \log x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = e - e + 1 = 1}$$

$$\text{Logo, } e \leq \int_1^e e^{x^2} \log x \, dx \leq e^{e^2}.$$

6/ $f: [0, a] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ f diferenciável. $f(0) = 0$.

$F(x) = \int_0^x f(\tau) \, d\tau + \int_0^{f(x)} g(\tau) \, d\tau - x f(x)$; g é a função inversa de f

F é diferenciável aplicando o teorema fundamental do calc. Integral, resultando de operações (soma, diferença, produto e composta) sobre funções diferenciáveis.

$F(x) = \int_0^x f(\tau) \, d\tau + (G \circ f)(x) - x f(x)$ com $G(x) = \int_0^x g(\tau) \, d\tau$

Logo, pelo Teo. fund. do calc. int.: $G'(x) = g(x)$ e

$$F'(x) = f(x) + G'(f(x)) f'(x) - f(x) - x f'(x) =$$
$$= \cancel{f(x)} + \underbrace{g(f(x))}_{= x} f'(x) - \cancel{f(x)} - x f'(x) = x f'(x) - x f'(x)$$

Logo, F é constante em $[0,a]$. Como $F(0)=0$ então

$F(x)=0, \forall x \in [0,a]$.

7/ $\varphi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t \, dt$

a/ $\varphi(2) = \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t \, dt = \left[\frac{1}{2} \frac{(1+t^2)^{-1}}{-1} \log t \right]_1^2 - \int_1^2 \Big(-\frac{1}{2(1+t^2}$

$= -\frac{1}{10} \log 2 + \frac{1}{2} \left[\log|t| - \frac{1}{2} \log(t^2+1) \right]_1^2 = \log \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[10]{2}\,\sqrt{5}}$

b/ φ é o integral indefinido de uma função contínua em $\mathbb{R}^+$

go, pelo Teo. fund. do Cálc. Integral, φ é diferenciável em $\mathbb{R}$

$\varphi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \log x \quad , \forall x > 0$

c/ Como $\varphi'(x) > 0$, $\forall x > 1$; $\varphi'(x) < 0$, $\forall x \in]0,1[$ e

φ é contínua no ponto 1, Tem-se:

(*) $\begin{cases} \varphi \text{ estritamente crescente em } [1;+\infty[\\ \text{" \quad " \quad decrescente em }]0;1] \end{cases}$

Como $\varphi(1) = 0$ e devido a (*) Temos:

existe um único $c (=1)$ Tal que $\varphi(c) = 0$

8/ $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$

a/ $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^{-t^2} \leq e^0 = 1$. Logo $\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{x^2} 1 \, d$

Assim, $F(x) \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\quad = [t]_0^{x^2} = x^2$

b/ F é a composta de uma função integral indefin

de uma função contínua com a função x^2.

Logo, pelo Teo. fund. do Cálc. Int. F é diferenciável

$F'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x$

9/ $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{\log x} x e^{\tau^2} d\tau - x$

$f(x) = x \int_0^{\log x} e^{\tau^2} d\tau - x = x (G \circ g)(x) - x$

com $G(u) = \int_0^u e^{\tau^2} d\tau$ e $g(x) = \log x$

G é diferenciável em $\mathbb{R}$ pelo Teo. fund. do cálc. Int., uma vez que G é o integral indefinido de uma função contínua em $\mathbb{R}$ (e ...). Assim, f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ por ser o resultado de operações (produto, diferença e composto) sobre funções diferenciáveis.

Pelo teo. fund. do cálculo integral: $G'(u) = e^{u^2}$

Logo: $f'(x) = \int_0^{\log x} e^{\tau^2} d\tau + x\, G'(g(x))\, g'(x) - 1$

$= \int_0^{\log x} e^{\tau^2} d\tau + \cancel{x}\, e^{\log^2 x} \frac{1}{\cancel{x}} - 1$

Assim, $f'(1) = 0$.

Como f' é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ por motivos análogos aos apresentados para f, tem-se:

$f''(x) = e^{\log^2 x} \frac{1}{x} + e^{\log^2 x}\, 2 \log x\, \frac{1}{x}$, $x>0$

Logo $f''(1) = 1 > 0$.

Como $f'(1) = 0$ e $f''(1) > 0$, 1 é ponto de mínimo (local) de ...

10/ f contínua em $\mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(\tau) d\tau$, ... $g(0) = f$...

a/ $\int_0^x f(\tau) d\tau$ é, pelo Teo. fund. do cálc. Int., uma função contínua em $\mathbb{R}$ e até é diferenciável em $\mathbb{R}$ por f ... contínua em $\mathbb{R}$. Logo g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser o produto de duas funções contínuas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Falta ver que g é contínua no ponto 0. Isto é, falta ver que $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(\tau) d\tau}{x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0) = g(0)$

Logo g é contínua em $\mathbb{R}$.

10) ($\Rightarrow$) Suponhamos que g é constante e vamos mostrar que f é constante.

Se g é constante então $g' = 0$. Isto é,

$\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(\tau)\,d\tau\right)' = 0$. Logo, $-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{x} f($

$\forall x$

Isto é, $\underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x f(\tau)\,d\tau}_{g(x)} = f(x)$. Logo $f(x) = g(x)$ em $\mathbb{R}\setminus\{$

Além disso, $f(0) = g(0)$ e g é constante em $\mathbb{R}$. Logo f é constante em

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que f é constante em $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que g é constante em $\mathbb{R}$.

Como f é constante em $\mathbb{R}$, $f(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x k\,d\tau = \frac{1}{x}\left[k\tau\right]_0^x = \frac{1}{\cancel{x}} k \cancel{x} = k = f(x$

$\forall x \neq 0$

Como $g(0) = f(0)$ então $g(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo g é constante em $\mathbb{R}$.

Provámos então que: g é constante se e só se f o for.
($\Leftrightarrow$)

11) $f(x) = \int_{x^2}^{k\log x} e^{-\tau^2}\,d\tau = \int_{x^2}^{1} e^{-\tau^2}\,d\tau + \int_1^{k\log x} e^{-\tau^2}\,d\tau =$

$= -\int_1^{x^2} e^{-\tau^2}\,d\tau + \int_1^{k\log x} e^{-\tau^2}\,d\tau = -G\circ f_1(x) + G\circ f_2(x)$

com $G(x) = \int_1^x e^{-\tau^2}\,d\tau$ e $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = k\log$

G é diferenciável em $\mathbb{R}$ por ser o integral indefinido de uma função contínua em $\mathbb{R}$ (Teo fund. do Cálc. Integ.)

f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ por ser o resultado de operações (diferença e composta) sobre funções diferenciáveis. 7

Ainda pelo Teo fund. do Cálc. Int.: $G'(x) = e^{-x^2}$

Logo $f'(x) = -G'(f_1(x))\, f_1'(x) + G'(f_2(x))\, f_2'(x) = -e^{-x^4} 2x + e^{-k^2 \ldots}$

Assim, $f'(1) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{e}$

12/ $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas.

a/ $x - 1 = t \Leftrightarrow x = t + 1 = \varphi(t)$; $\varphi'(t) = 1$

$$\int_0^2 (x-1)\, f[(x-1)^2]\, dx = \int_{-1}^1 t\, f(t^2)\, dt = \int_{-1}^0 t\, f(t^2)\, dt +$$

$x = 0 \Rightarrow t = -1$

$x = 2 \Rightarrow t = 1$

$$+ \int_0^1 t\, f(t^2)\, dt = \int_1^0 (-y)\, f((-y)^2)(-1)\, dy + \int_0^1 t\, f(t^2)\, dt =$$

$t = -y = \psi(y)$; $\psi'(y) = -1$

$y = -t$; $t = -1 \Rightarrow y = 1$

$$= -\int_0^1 y\, f(y^2)\, dy + \int_0^1 t\, f(t^2)\, dt = -\int_0^1 t\, f(t^2)\, dt + \int_0^1 t\, f(t^2)\, dt$$

b/ $$\int_0^{\pi} g(\operatorname{sen} x) \cos x\, dx = \int_{-1}^1 g(\sqrt{1-t^2})\, t\, \frac{(-1)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt =$$

$\cos x = t \Leftrightarrow x = \arccos t = \varphi(t)$; $\varphi'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = \pi \Rightarrow t = -1$

$$= \int_{-1}^0 g(\sqrt{1-t^2})\, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt + \int_0^1 g(\sqrt{1-t^2})\, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_1^0 g(\sqrt{1-(-y)^2})\, \frac{y}{\sqrt{1-(-y)^2}}(-\ldots$$

$t = -y = \psi(y)$; $\psi'(y) = -1$

$$+ \int_0^1 g(\sqrt{1-t^2})\, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -\int_0^1 g(\sqrt{1-y^2})\, \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy + \int_0^1 g(\sqrt{1-y^2})\, \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

Na realidade, neste nº 12 podia ter-se usado o enunciado do nº 15 d) que diz o seguinte: sendo u contínua e ímpar $\int_{-a}^a u = \ldots$

13) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável $f(a+b-x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b x f(x)\,dx = \int_b^a (a+b-\tau) f(a+b-\tau)(-1)\,d\tau = -\int_a^b (a+b-\tau) f(a+b-\tau)\,d\tau$$

$x = a+b-\tau = \varphi(\tau)$; $\varphi'(\tau) = -1$

$\tau = a+b-x$; $x = a \Rightarrow \tau = b$; $x = b \Rightarrow \tau = a$

$$= (a+b)\int_a^b f(a+b-\tau)\,d\tau - \int_a^b \tau f(a+b-\tau)\,d\tau =$$

$$= (a+b)\int_a^b f(\tau)\,d\tau - \int_a^b \tau f(\tau)\,d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\int_a^b x f(x)\,dx = (a+b)\int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

14) $f(x) = f(x+T)$ $(T>0)$; $a \in \mathbb{R}$

a) $$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x+T)\,dx = \int_T^{a+T} f(\tau)\,d\tau = \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

$x + T = \tau$

$x = \tau - T = \varphi(\tau)$; $\varphi'(\tau) = 1$

$x = 0 \Rightarrow \tau = T$

$x = a \Rightarrow \tau = a+T$

b) f ímpar: $f(-x) = -f(x) \ \forall x$

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T}^0 f(\tau+T)\,d\tau = \int_{-T}^0 f(\tau)\,d\tau = \int_T^0 f(-y)(-1)\,dy$$

$\tau = -y = \varphi(y)$; $\varphi'(y) = -1$

$y = -\tau$

$\tau = -T \Rightarrow y = T$

$x = \tau + T = \varphi(\tau)$

$\varphi'(\tau) = 1$

$\tau = x - T$; $x = 0 \Rightarrow \tau = -T$

$x = T \Rightarrow \tau = 0$

$$= -\int_0^T (-f(y))(-1)\,dy = -\int_0^T f(y)\,dy \Leftrightarrow 2\int_0^T f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T f(x)\,dx = 0$$

15/ f contínua em $\mathbb{R}$.

a/ f é par: $f(x) = f(-x) \quad \forall x$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-\bar{x})(-1)\,d\bar{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,d$$

$$x = -\bar{x} = \varphi(\bar{x}) \quad , \quad \varphi'(\bar{x}) = -$$

$$= -\int_{0}^{a} f(\bar{x})(-1)\,d\bar{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f($$

b/ f ímpar: $f(-x) = -f(x) \quad \forall x$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-\bar{x})(-1)\,d\bar{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,d$$

$$x = -\bar{x} = \varphi(\bar{x}) \;;\; \varphi'(\bar{x}) = -1$$

$$\bar{x} = -x \;;\; x = a \Rightarrow \bar{x} = -a$$

$$= -\int_{0}^{a} (-f(\bar{x}))(-1)\,d\bar{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

16/

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{e^{\frac{\bar{x}^2+1}{\bar{x}}}}{\bar{x}}\,d\bar{x} \quad , \quad x > 0$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{1}^{1/x} \frac{e^{\frac{\bar{x}^2+1}{\bar{x}}}}{\bar{x}}\,d\bar{x} = \int_{1}^{x} \frac{e^{\frac{\frac{1}{y^2}+1}{1/y}}}{1/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\int_{1}^{x} \frac{e^{\frac{y^2+1}{y}}}{y}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{y} = \varphi(y) \quad , \quad \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$= -F(x) \qquad\qquad y = \frac{1}{\bar{x}} \;;\; \bar{x} = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x$$

17/ $f : [a,b] \to \mathbb{R} \;;\; m = \frac{a+b}{2}$

$$\int_{a}^{b} \left(f(x) + (x-m)f'(x)\right)dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} (x-m)\,f'(x)\,dx =$$

$$= \cancel{\int_{a}^{b} f(x)\,dx} + \left[f(x)(x-m)\right]_{a}^{b} - \cancel{\int_{a}^{b} f(x)\,dx} = f(b)(b-m) - f($$

$$= f(b)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) - f(a)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}\left(f(b) + f(a)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b)+f(a)}{2} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} \left(f(x) + (x-m)f'(x)\right)dx$$

18) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em $\mathbb{R}$.

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt \quad , \quad \int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0 \ , \ \forall x \in$$

Logo,

$$\left(\int_{-x}^{x} f(t)\,dt\right)' = \left(2\int_0^x f(t)\,dt\right)' \Leftrightarrow$$

Teo Fund. do Calc Int.

$$\Leftrightarrow \left(-\int_0^{-x} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt\right)' = 2f(x) \Leftrightarrow -f(-x)(-1) + f(x) = 2$$

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$. Logo f é par.

$$\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0 .\ \text{Logo, } \left(-\int_0^{-x} g(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow -g(-x)(-1) + g(x) = 0 \Leftrightarrow g(-x) = -g(x) \quad \forall x \in$$

Teo fund. do Calc Int.

Logo g é ímpar

19) $x > 0$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\int_{1/x}^{1} \frac{1}{y^2+1}(-1)\,dy =$$

$$t = \frac{1}{y} = \varphi(y) \ ; \ \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$y = \frac{1}{t} \ ; \quad t = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$t = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$= \int_{1/x}^{1} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int_{1/x}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

20) $$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x^2 - 2xt + t^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \int_0^x g(t) - x\int_0^x t\,g(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)\,dt$$

Pelo Teo. fund. do Calc. Int.:

$$f'(x) = x\int_0^x g(\tau)\,d\tau + \cancel{\frac{1}{2}x^2 g(x)} - \int_0^x \tau g(\tau)\,d\tau - \cancel{x\, x\, g(x)}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}x^2 g(x)} = x\int_0^x g(\tau)\,d\tau - \int_0^x \tau g(\tau)\,d\tau$$

Nova/ pelo mesmo Teorema:

$$f''(x) = \int_0^x g(\tau)\,d\tau + \cancel{x g(x)} - \cancel{x g(x)} \quad . \quad \text{Logo } f'''(x) = g(x)$$

$\forall x \in$

21/ f contínua em $\mathbb{R}$.

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x)\,dx = \int_b^a f(\tau)(-1)\,d\tau = -\int_a^b f(\tau)(-1)\,d\tau = \int_a^b f(\tau)$$

$c - x = \tau$; $x = c-b \Rightarrow \tau = b$; $x = c-a \Rightarrow \tau =$

$x = c - \tau = \varphi(\tau)$, $\varphi'(\tau) = -1$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

22/ f contínua em $\mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(c\tau)\, c\,d\tau = c\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cx)\,dx$$

$\tau = \frac{x}{c}$; $x = a \Rightarrow \tau = \frac{a}{c}$; $x = b \Rightarrow \tau = \frac{b}{c}$

$x = c\tau = \varphi(\tau)$; $\varphi'(\tau) = c$

23/ Aplicando em cada alínea o Teo. fund. do Cálc. Int.:

a/ $F(x) = \int_x^{2\pi} \operatorname{sen} 2\tau \cos \tau^2\,d\tau = -\int_{2\pi}^x \operatorname{sen} 2\tau \cos\tau^2\,d\tau$; $F'(x) = -\operatorname{sen} 2x \cos x^2$

b/ $F(x) = \int_x^{x^2} \log(1+\tau^2)\,d\tau = -\int_0^x \log(1+\tau^2)\,d\tau + \int_0^{x^2} \log(1+\tau^2)\,d\tau$

$F'(x) = -\log(1+x^2) + \log(1+x^4)\,2x$

c) $F(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt = -x^2 \int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\, dt$

$F'(x) = -2x \int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\, dt - x^2 e^{\operatorname{sen} x}$

d) $F(x) = \int_{\cos x}^{x^3+1} e^{-t^2+x}\, dt = e^x \left(-\int_0^{\cos x} e^{-t^2}\, dt + \int_0^{x^3+1} e^{-t^2}\, dt \right)$

$F'(x) = e^x \int_{\cos x}^{x^3+1} e^{-t^2}\, dt + e^x \left(-e^{-\cos^2 x} (-\operatorname{sen} x) + e^{-(x^3+1)^2}\, 3x^2 \right)$

e) $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{arctg} x}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg} x \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$

$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \operatorname{arctg} x \, \frac{1}{1+x^2}$

f) $F(x) = \int_{2x^2}^{x^4} x\, e^{t^2} \operatorname{ch} t\, dt = x \left(-\int_1^{2x^2} e^{t^2} \operatorname{ch} t\, dt + \int_1^{x^4} e^{t^2} \operatorname{ch} t\, dt \right)$

$F'(x) = \int_{2x^2}^{x^4} e^{t^2} \operatorname{ch} t\, dt + x \left(-e^{4x^4} \operatorname{ch}(2x^2)\, 4x + e^{x^8} \operatorname{ch}(x^4)\, 4x^3 \right)$