

6. TEOREMAS DE GAUSS E DE STOKES

1 Operadores Diferenciais

Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 . Para funções escalares $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e vectoriais $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (que representaremos por $F = (F_1, F_2, F_3)$, onde $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ para cada i) definimos, sempre que existam as derivadas, as seguintes funções:

Gradiente de f :

$$\text{grad } f = \nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{grad } f = f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Divergência de F :

$$\text{div } F = \nabla \cdot F : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Rotacional de F :

$$\text{rot } F = \nabla \times F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Laplaciano de f :

$$\text{Lap } f = \Delta f = \nabla^2 f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Lap } f = \Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplaciano de F :

$$\text{Lap } F = \Delta F = \nabla^2 F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{Lap } F = \Delta F = \nabla^2 F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right)$$

Estas definições podem ser mais intuitivas se considerarmos o operador formal *nabla* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Quando este operador é aplicado directamente a uma função escalar, obtemos o gradiente. A divergência de uma função vectorial aparece como o produto interno $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3)$, e o laplaciano $\nabla^2 f$ de uma função escalar equivale a fazer o produto interno de ∇ com ∇f . Para o rotacional de uma função vectorial, obtemos um produto externo:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Propriedades dos Operadores Diferenciais:

$$\boxed{\text{div}(\text{grad } f) = \text{Lap } f} \quad (\text{se } f \text{ for duas vezes diferenciável})$$

$$\text{porque } \text{div}(\text{grad } f) = \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = \text{Lap } f.$$

$$\boxed{\text{div}(\text{rot } F) = 0} \quad (\text{se } F \text{ for de classe } C^2 \text{ em } U)$$

$$\begin{aligned} \text{porque } \text{div}(\text{rot } F) &= \text{div} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde no último passo se usou o Teorema de Schwartz (que garante a igualdade de derivadas parciais em relação às mesmas variáveis sempre que estas derivadas parciais sejam contínuas.)

$$\boxed{\text{rot}(\text{rot } F) = \text{grad div}(F) - \text{Lap } F} \quad (\text{se } F \text{ for de classe } C^2 \text{ em } U)$$

$$\begin{aligned} \text{porque } \text{rot}(\text{rot } F) &= \text{rot} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right) - \text{Lap } F \\ &= \text{grad} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) - \text{Lap } F \\ &= \text{grad div}(F) - \text{Lap } F \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{rot}(\text{grad } f) = 0} \quad (\text{se } f \text{ for duas vezes diferenciável), porque:}$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Estas relações vão ser importantes para as implicações dos teoremas que veremos em seguida.

2 Teorema de Gauss

O Teorema de Gauss generaliza o Teorema de Green, que relacionava integrais de linha de curvas fechadas com integrais duplos nas regiões delimitadas pela curvas.

Teorema de Green

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar delimitada por uma curva fechada e simples c .

Seja $F : (P, Q) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1 .

Então,

$$\oint_c F \cdot dg = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Nota: A curva deve ser percorrida no sentido directo para que se obtenha a igualdade anterior.

O Teorema de Gauss (ou Teorema da Divergência) irá relacionar integrais de funções vectoriais ao longo de superfícies fechadas com integrais triplos no volume delimitado por essas superfícies. Podemos pois ver o Teorema de Gauss como uma versão “uma dimensão acima” do teorema de Green.

Diremos que uma região V de \mathbb{R}^3 é *elementar na direcção z* se puder ser descrita como

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \wedge z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

onde R é uma região limitada e fechada de \mathbb{R}^2 e z_1 e z_2 são funções de classe C^1 em R . Geometricamente, isto significa que consideramos o conjunto limitado verticalmente pelos gráficos das duas funções apresentadas, e limitado em x e y por R . Um exemplo de um conjunto elementar na direcção z é o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ para z entre 0 e 1.

De modo semelhante, podemos considerar regiões elementares *na direcção x* ou *na direcção y* , bastando para tal utilizar no primeiro caso funções $x_1(y, z)$ e $x_2(y, z)$, e no segundo funções $y_1(x, z)$ e $y_2(x, z)$ (sempre definidas em regiões compactas R de \mathbb{R}^2).

Diremos que uma região V de \mathbb{R}^3 é *elementar* se for elementar segundo as três direcções x , y e z . Um exemplo é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Finalmente, diremos que uma região V de \mathbb{R}^3 é *regular* se puder ser decomposta num número finito de regiões elementares. Ou seja, se for obtida pela união de tais regiões elementares, que são “coladas” ao longo de porções das superfícies que as delimitam. Um exemplo de região regular é o volume entre duas superfícies esféricas de raios 1 e 2 (note-se que esta região não é elementar).

É a regiões regulares que se aplica o Teorema de Gauss.

Teorema de Gauss (ou Teorema da Divergência)

Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma região regular delimitada por uma superfície fechada S .

Seja $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 .

Então,

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$$

onde \vec{n} é a normal unitária exterior a V .

Demonstração. Começaremos por provar o teorema para F da forma $(0, 0, F_3)$ e V elementar na direcção de z . Generalizações dessa prova permitem-nos ver que o teorema é válido para qualquer região elementar. Finalmente, usaremos este último resultado para mostrar que o teorema também é válido para qualquer região regular.

Seja então $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \wedge z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ e consideremos $F(x, y, z) = (0, 0, F_3(x, y, z))$. Temos que

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_R \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \, dx \, dy = \iint_R [F_3(x, y, z_2(x, y)) - F_3(x, y, z_1(x, y))] \, dx \, dy$$

A superfície S que delimita V é constituída por três porções:

$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \wedge z = z_2(x, y)\}$ (a superfície de cima),

$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \wedge z = z_1(x, y)\}$ (a superfície de baixo)

e $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial R \wedge z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ (a superfície lateral).

Calculemos o fluxo de F segundo a normal exterior através de cada uma destas três superfícies:

Devido à forma da superfície S_3 , podemos ver que a normal exterior \vec{n} a S_3 é horizontal, donde $F \cdot \vec{n} = 0$ em S_3 , e portanto $\iint_{S_3} F \cdot \vec{n} \, dS = 0$.

Uma parametrização para S_1 é $g : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(x, y) = (x, y, z_2(x, y))$, e por isso $\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = \left(-\frac{\partial z_2}{\partial x}, -\frac{\partial z_2}{\partial y}, 1\right)$ tem o mesmo sentido da normal unitária exterior em S_1 . Obtemos $\iint_{S_1} F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} (0, 0, F_3) \cdot \left(-\frac{\partial z_2}{\partial x}, -\frac{\partial z_2}{\partial y}, 1\right) \, dS = \iint_R F_3(x, y, z_2(x, y)) \, dx \, dy$.

Do mesmo modo, $\iint_{S_2} F \cdot \vec{n} \, dS = -\iint_R F_3(x, y, z_1(x, y)) \, dx \, dy$ (onde o sentido da normal é neste caso oposto ao obtido para S_1).

Ou seja, $\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_R F_3(x, y, z_2(x, y)) \, dx \, dy - \iint_R F_3(x, y, z_1(x, y)) \, dx \, dy$, o mesmo valor obtido para $\iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$. O teorema é portanto válido para este primeiro caso.

O mesmo tipo de argumentos pode ser aplicado para mostrar que $\iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS$ quando V for elementar segundo a direcção de x (com F da forma $(F_1, 0, 0)$), ou segundo a direcção de y (com F da forma $(0, F_2, 0)$).

Para um $F = (F_1, F_2, F_3)$ genérico, e para V elementar, podemos usar estes resultados para obter

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V \operatorname{div} (F_1, 0, 0) \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \operatorname{div} (0, F_2, 0) \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \operatorname{div} (0, 0, F_3) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_S (F_1, 0, 0) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_S (0, F_2, 0) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_S (0, 0, F_3) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS,\end{aligned}$$

e o teorema é portanto também válido neste caso mais geral.

Para provar o teorema no caso de uma região regular, basta subdividi-la num número finito de regiões elementares e aplicar o resultado anterior a cada uma destas regiões, reparando que as contribuições para o fluxo que provêm de duas superfícies contíguas coladas se cancelam devido aos sentidos contrários da normal unitária em cada uma delas.

□

Exemplo:

Pretende-se calcular o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ ao longo da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, no sentido da normal unitária exterior, usando o Teorema de Gauss.

Definimos $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Esta é uma região regular, porque os seus elementos (x, y, z) verificam $f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$,

para $f_1 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_1(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

e $f_2 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Como F é de classe C^1 em V , podemos usar o teorema e concluir que

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS &= \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_V 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \operatorname{Vol}(V) = 4\pi.\end{aligned}$$

Exemplo:

Pretende-se calcular o fluxo do campo $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$ ao longo da superfície cilíndrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

no sentido da normal unitária exterior.

Não é possível usar o Teorema de Gauss directamente para efectuar este cálculo, porque a superfície S não é fechada (a sua fronteira consiste nas circunferências $x^2 + y^2 = 1$, resp. com $z = -1$ e $z = 1$.) Podemos no entanto considerar a região V em \mathbb{R}^3 definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\},$$

que é uma região regular limitada por uma superfície fechada $S \cup S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são as "tampas"

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$$

$$\text{e } S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = -1\}.$$

Como V é uma região regular e F é de classe C^1 , o Teorema de Gauss pode ser aplicado a esta situação, e obtemos

$$\iint_{S \cup S_1 \cup S_2} F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz.$$

Ou seja,

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz - \iint_{S_1} F \cdot \vec{n} \, dS - \iint_{S_2} F \cdot \vec{n} \, dS = *$$

Em S_1 e S_2 , as normais unitárias exteriores são verticais, na direcção do eixo dos zz , dadas resp. por $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$.

Obtemos também que $F \cdot \vec{n}|_{S_1} = (xy^2, x^2y, z) \cdot (0, 0, 1)|_{S_1} = 1$ e que $F \cdot \vec{n}|_{S_2} = (xy^2, x^2y, z) \cdot (0, 0, -1)|_{S_2} = 1$. Assim,

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} 1 \, dS = \text{Área}(S_1) = \pi$$

$$\text{e } \iint_{S_2} F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} 1 \, dS = \text{Área}(S_2) = \pi.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} * &= \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz - 2\pi = \iiint_V (y^2 + x^2) \, dx \, dy \, dz - 2\pi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 (\rho^2 \cdot \rho) \, dz \, d\rho \, d\theta - 2\pi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 - 2\pi = -\pi. \end{aligned}$$

(Foram usadas coordenadas cilíndricas para calcular o integral triplo.)

Exemplo:

Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma região qualquer tal que $(0, 0, 0) \notin \partial V$ e $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$

A divergência de F é dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \cdot 3/2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &\quad + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - y \cdot 3/2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &\quad + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - z \cdot 3/2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se V não contém $(0, 0, 0)$, F é de classe C^1 em V , e podemos portanto usar o Teorema de Gauss e calcular (para a normal unitária exterior \vec{n})

$$\iint_{\partial V} F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Se V contém $(0, 0, 0)$, não podemos usar directamente o Teorema de Gauss, porque F não é de classe C^1 em V . Porém, como $(0, 0, 0) \in \operatorname{int}(V)$ por hipótese, existe uma esfera B_ϵ (de raio suficientemente pequeno) centrada em $(0, 0, 0)$ e contida em V , e podemos então aplicar o Teorema de Gauss à região regular $V \setminus B_\epsilon$, obtendo (para a normal unitária \vec{n} exterior à fronteira de $V \setminus B_\epsilon$):

$$\iint_{\partial(V \setminus B_\epsilon)} F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{V \setminus B_\epsilon} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Ou seja,

$$\iint_{\partial V} F \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{\partial B_\epsilon} F \cdot \vec{n} \, dS = *$$

No cálculo do integral de superfície sobre ∂B_ϵ , a normal unitária em questão é a exterior a $V \setminus B_\epsilon$, e portanto a interior à esfera, cuja expressão é, em cada (x, y, z) da

superfície esférica,

$$\vec{n} = \frac{(-x, -y, -z)}{\|(-x, -y, -z)\|} = -\frac{1}{\epsilon}(x, y, z).$$

Na superfície esférica, temos portanto

$$F \cdot \vec{n} = \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z) \right) \cdot \left(-\frac{1}{\epsilon} (x, y, z) \right) = -1/\epsilon^2, \text{ e assim:}$$

$$* = 1/\epsilon^2 \cdot \text{Área}(B_\epsilon) = 4\pi.$$

Este exemplo mostra que, se $\text{div } F = 0$, e desde que F seja de classe C^1 na região (regular) compreendida entre duas superfícies (regulares) fechadas, o fluxo de F é igual para ambas (segundo o mesmo sentido da normal). Podemos pois, em casos como o do exemplo, alterar as superfícies sobre as quais pretendemos calcular o integral para outras cuja parametrização seja mais simples e que conduzam a cálculos também mais directos.

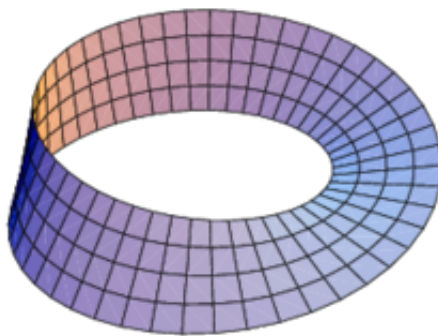
Isto deve ser comparado com o que sucedia para os integrais de linha sobre curvas fechadas: se F fosse um campo fechado na região compreendida entre duas curvas regulares fechadas, então (pelo Teorema de Green) os integrais de linha de F tinham o mesmo valor para ambas as curvas (quando percorridas no mesmo sentido.)

3 Teorema de Stokes

Dizemos que uma superfície S em \mathbb{R}^3 é *orientável* se existir uma função contínua definida em S que a cada ponto atribua um vector unitário normal a S . Se S é orientável, uma tal escolha é uma *orientação* para S . Cada superfície orientável tem duas orientações possíveis, que correspondem a poder-se escolher para a superfície duas faces diferentes. Por exemplo, uma superfície esférica é orientável, e apresenta assim uma face interior e uma face exterior distintas.

Um exemplo de uma superfície não orientável é a *banda de Möbius*, que pode ser construída a partir de um rectângulo identificando-se dois dos seus lados opostos após um deles rodar meia volta:

$$M = [0, 3] \times [0, 1] / \{(0, y) = (3, 1 - y)\}$$



A banda de Möbius possui apenas uma face: não é possível distinguir nela uma face interior e uma exterior, e colori-las com cores diferentes.

Se uma superfície regular S for dada por uma parametrização $g : R \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde R é uma região limitada e fechada de \mathbb{R}^2 , e se a restrição de g a ∂R for injectiva, dizemos que $g(\partial R)$ é a *fronteira* de S , denotada por ∂S . Esta fronteira é dada por uma curva regular fechada e simples, que pode portanto ser percorrida em dois sentidos diferentes.

Em \mathbb{R}^2 , a superfície plana R pode ser orientada escolhendo-se em todos os pontos ou uma normal vertical a apontar para cima ou em todos os pontos uma que aponte para baixo, e a fronteira ∂R pode ser percorrida no sentido directo ou no sentido contrário; se quando escolhermos o sentido directo para ∂R também escolhermos para R a normal a apontar para cima, dizemos que a orientação de R é *compatível* com a de ∂R . A parametrização g transfere estas escolhas de orientação para S e ∂S , que também se dizem então compatíveis. (Um modo intuitivo de comprovar isso é usar a chamada *regra da mão direita*.)

É a superfícies orientáveis que se aplica o Teorema de Stokes, que relaciona integrais de superfícies com integrais de linha, e pode ser considerado uma versão em 3 dimensões do Teorema de Green.

Teorema de Stokes

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável cuja fronteira ∂S é uma curva regular simples. Seja $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 .

Então,

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S} F \cdot dg,$$

onde a orientação \vec{n} de S deve ser compatível com a de ∂S .

Demonstração. Consideremos primeiro que F é da forma $(F_1, 0, 0)$.

Seja $g : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização para S , onde R é uma região limitada e fechada do plano (u, v) . Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização para a fronteira c de R no plano (u, v) .

Então,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F \cdot dg &= \int_a^b F(g(\gamma(t))) \cdot (g \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b F(g(\gamma(t))) Dg(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_c (F \circ g) \cdot Dg d\gamma = \int_c \left((F \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial u}, (F \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \right) \cdot d\gamma \\ &= \iint_R \frac{\partial}{\partial u} \left[(F \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[(F \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \right] dudv = *, \end{aligned}$$

onde no último passo utilizámos o Teorema de Green.

Podemos desenvolver mais explicitamente o último termo, relembrando que $F = (F_1, 0, 0)$ e que $g(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Temos então que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial u} \left[(F \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[(F \circ g) \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u} (F_1 \circ g), 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial v} (F_1 \circ g), 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\
&= \left(\nabla F_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial u}, 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \left(\nabla F_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial v}, 0, 0 \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\
&= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\text{rot} F(g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) &= \left(0, \frac{\partial F_1}{\partial z}, -\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\
&= \left(0, \frac{\partial F_1}{\partial z}, -\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \left(0, \frac{\partial F_1}{\partial z}, -\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}
\end{aligned}$$

Como os dois últimos cálculos produziram a mesma expressão, obtemos,

$$* = \iint_R \text{rot} F(g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du dv = \iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} dS,$$

como queríamos provar.

Note-se que o Teorema de Green obriga a que c seja percorrida no sentido directo. Ou seja, devemos escolher de início uma parametrização $g(u, v)$ que garanta que a normal \vec{n} seja compatível com o sentido que c impõe a ∂S .

Os cálculos anteriores podem ser feitos de modo semelhante para campos F da forma $(0, F_2, 0)$ e $(0, 0, F_3)$. O Teorema de Stokes para um campo genérico (F_1, F_2, F_3) segue-se de o considerar como uma soma de três campos com uma das formas anteriores, e de aplicar o resultado a cada uma dessas parcelas.

□

Exemplo:

Consideremos a meia superfície esférica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$, e seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$.

Pretende-se calcular o fluxo $\iint_S \text{rot } F \cdot \vec{n} \, dS$ segundo a normal exterior. Vamos comparar três maneiras diferentes de o fazer.

1. Directamente, pela definição de integral de superfície:

$$\text{O rotacional de } F \text{ é dado por } \text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & e^{xz} \end{vmatrix} = (0, -ze^{xz}, -2).$$

Como foi visto anteriormente, a meia superfície esférica pode ser parametrizada através de coordenadas esféricas:

$$g(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \text{ com } g : [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \text{ define uma normal exterior.}$$

Obtemos então,

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (0, -\cos \varphi \, e^{\sin \varphi \cos \theta \cos \varphi}, -2) \cdot (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) \, d\varphi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (-\cos \varphi \sin^2 \varphi \sin \theta \, e^{\sin \varphi \cos \theta \cos \varphi} - 2 \sin \varphi \cos \varphi) \, d\varphi \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, e^{\sin \varphi \cos \theta \cos \varphi} \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \, d\varphi + 2\pi \int_0^{\pi/2} -2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\
&= 2\pi \left[\cos^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

2. Usando o Teorema de Stokes:

A superfície S é orientável, como se prova pelo cálculo de $\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi}$ feito acima.

A fronteira ∂S é a circunferência $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, que é uma curva regular simples.

Uma parametrização para esta curva, compatível com a orientação de S , pode ser

$g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.

Obtemos então,

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) \, dg = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dg \\
&= \int_0^{2\pi} -1 \, dg = -2\pi
\end{aligned}$$

3. Usando o Teorema de Gauss:

Não estamos nas condições do Teorema de Gauss, porque S não é uma superfície fechada. No entanto, considerando o círculo $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, obtemos que a superfície $S \cup S_1$ já é fechada, e delimita uma região regular V , e podemos aplicar o teorema a este V .

Como $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$ para qualquer F de classe C^2 , a nota no final da secção anterior permite afirmar que

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS_1 = *$$

se considerarmos as duas normais com o mesmo sentido.

Ou seja,

$$* = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot (0, 0, 1) \, dS = \iint_S -2 \, dS = -2 \operatorname{Área}(S_1) = -2\pi$$

O Teorema de Stokes pode ser extendido ao caso em que a fronteira de S é constituída por mais de uma curva fechada e simples. Cada uma dessas curvas deve ser percorrida de modo compatível com a escolha da normal que orienta a superfície.

Exemplo:

Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (y, -x, 1)$

e S a superfície cilíndrica $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Pretende-se calcular o valor do fluxo $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS$ no sentido da normal exterior.

A fronteira de S é composta por duas circunferências:

$$c_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

$$\text{e } c_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

Para que o sentido em que cada uma destas curvas é percorrida seja compatível com o da escolha da normal unitária exterior a S , devemos percorrer c_1 no sentido directo e c_2 no sentido contrário (quando observamos o cilindro de cima).

Usando o Teorema de Stokes,

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{c_1} F \cdot dg - \oint_{c_2} F \cdot dg = *.$$

Parametrizações para c_1 e c_2 são resp. $g_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ e $g_2(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ (para $t \in [0, 2\pi]$). Com estas parametrizações, as curvas estão a ser percorridas no sentido directo (quando observamos o cilindro de cima). Obtemos então:

$$\begin{aligned}
* &= \int_0^{2\pi} F(g_1(t)) \cdot g_1'(t) dt - \int_0^{2\pi} F(g_2(t)) \cdot g_2'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt - \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt - \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -1 dt - \int_0^{2\pi} -1 dt = 0
\end{aligned}$$

Suponhamos que um F é de classe C^2 em todo o \mathbb{R}^3 . Então, o fluxo

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS$$

(para uma escolha de \vec{n}) não depende de S mas apenas da sua fronteira. Ou seja, se S_1 e S_2 se apoiam na mesma curva, obtemos

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} dS$$

(para o mesmo sentido de \vec{n}). Para além disso, e devido ao Teorema de Stokes, qualquer um destes integrais tem o valor de $\oint_{\partial S} F \cdot dg$ (percorrendo-se a curva num sentido compatível com a escolha de \vec{n}).

Isto pode ser comparado com o que sucedia com os campos conservativos: o integral de um F conservativo ao longo de uma curva que une dois pontos não depende da curva, mas sim da diferença de valores de um potencial φ para F no ponto final e no ponto inicial da curva.

4 Potenciais Vectoriais

Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 . $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo *solenoidal* em U se $\text{div } F = 0$ em U . Se $F = \text{rot } A$ para algum $A : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, F é solenoidal, pela propriedade anteriormente vista: $\text{div } \text{rot } A = 0$ para qualquer A .

Dado um campo solenoidal F , podemos tentar procurar um campo A tal que $F = \text{rot } A$. Um tal A pode nem sempre existir, dependendo esse facto das propriedades do domínio de definição U . Quando exista, diz-se um *potencial vectorial* para F .

Esta situação deve ser comparada com o que acontecia com os campos fechados F definidos em subconjuntos abertos U de algum \mathbb{R}^n : em certos casos (e isso dependia das propriedades topológicas de U), existia um *potencial escalar* para F , que era um campo escalar $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = F$.

Exemplo:

$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (y, z, e^x)$ é um campo solenoidal, porque

$$\text{div } F = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial e^x}{\partial z} = 0.$$

Podemos procurar um potencial vectorial A para F . Como

$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right),$$

devemos portanto resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = F_1 = y \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = F_2 = z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = F_3 = e^x \end{cases}$$

Este sistema não é fácil de resolver em geral, ao contrário do que acontecia com o sistema usado para descobrir um potencial escalar φ . Para facilitar esta resolução, podemos por exemplo procurar um A tal que $A_1 = 0$. Note-se que não é garantido que haja um potencial vectorial que seja desta forma.

O sistema fica agora

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = e^x \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $A_3(x, y, z) = -xz + c_1(y, z)$.

Da terceira equação, obtemos $A_2(y, z) = e^x + c_2(y, z)$.

Substituindo estas expressões na primeira equação, obtemos

$$\frac{\partial c_1}{\partial y} - \frac{\partial c_2}{\partial z} = y.$$

Uma solução possível é $c_1 = \frac{y^2}{2}$ e $c_2 = 0$, e assim um potencial vectorial para F pode ser

$$A(x, y, z) = \left(0, e^x, -xz + \frac{y^2}{2}\right).$$

Se F for um campo solenoidal em todo o \mathbb{R}^3 , a nota no final da secção anterior permite dizer que o valor de $\iint_S F \cdot \vec{n} dS$ (para uma escolha de \vec{n}) não depende de S mas sim da sua fronteira, e esse valor é dado por

$$\oint_{\partial S} A \cdot dg,$$

onde A é um qualquer potencial vectorial para F em \mathbb{R}^3 e se percorre a curva num sentido compatível com a escolha de \vec{n} . Sendo o campo F definido em todo o \mathbb{R}^3 , pode ver-se que existe sempre um potencial vectorial A para F .