Definição

Dado $c \geqslant 0$, a função $H_c : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < c \\ 1 & \text{se } t \geqslant c \end{cases}$$

designa-se por escalão unitário ou função de Heaviside.

Claramente o escalão unitário H_c é uma função seccionalmente contínua e limitada em $[0, +\infty[$, pelo que possui transformada de Laplace e

$$\mathcal{L}[H_c(t)](s) = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-st}\, H_c(t)\, dt = \lim_{r \to +\infty} \int_c^r e^{-st}\, dt = \lim_{r \to +\infty} \left(\frac{e^{-rs} - e^{-cs}}{-s} \right)$$

$$= \frac{e^{-cs}}{s} \qquad \text{para } s > 0.$$

Exemplo

Seja $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(t) = H_\pi(t) - H_{2\pi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < \pi \text{ ou } t \geqslant 2\pi \\ 1 & \text{se } \pi \leqslant t < 2\pi \end{cases}$$

Note-se que g é seccionalmente contínua e limitada e portanto tem transformada de Laplace, aqui dada por

$$G(s) = \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s},$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$ (é claro que $G(0) = \pi$).

A translação de uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de um valor $c \geqslant 0$ é dada por

$$f(t-c)H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant t < c \\ f(t-c) & \text{se } t \geqslant c \end{cases}$$

Mais propriedades da transformada de Laplace

9. (Translação bis) Seja $c \geqslant 0$ e $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função com transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ para $s > a$. Então

$$\mathcal{L}\left[f(t-c)H_c(t)\right](s) = e^{-cs}\, F(s), \qquad \text{para } s > a.$$

Exemplos

Calcule:

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right](t)$;
- Resposta: $\frac{1}{3}\left(e^{t-2} - e^{-2t+4}\right) H(t-2)$.

- $\mathcal{L}[f(t)](s)$ onde $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & \text{se } 0 \leqslant t < \pi \\ 0 & \text{se } t \geqslant \pi. \end{cases}$
- Resposta: $\dfrac{1 + e^{-\pi s}}{s^2+1}$.

Exemplo: Resolva o problema de valores iniciais

- $y'' + 2y' + 2y = H(t-\pi), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
- Resposta: $y(t) = e^{-t}\text{sen}\, t + \frac{H(t-\pi)}{2}\big(1 + e^{-(t-\pi)}(\cos t + \text{sen}\, t)\big)$.