Exercício 1.— Considere a função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} k+e^{1/x} & (\text{se } x<0)\\ x(2-x) & (\text{se } x>0)\end{cases}$$

1.1 Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

1.2 Determine o valor da constante $k\in\mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

1.3 Denotando por $f^\sharp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de $f^\sharp$.

Exercício 2.— Considere a função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} k\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & (\text{se } x>0)\\ \dfrac{1}{1+x^2} & (\text{se } x<0)\end{cases}$$

2.1 Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio ($\mathbb{R}\setminus\{0\}$).

2.2 Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2.3 Determine o valor da constante $k\in\mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

2.4 Denotando por $f^\sharp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de $f^\sharp$.

Exercício 3.— Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que, $f(-1/n)=1-f(1/n)$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

3.1 Se existirem $f(0^+)=\lim_{x\to0^+} f(x)$ e $f(0^-)=\lim_{x\to0^-} f(x)$ quanto vale a sua soma?

3.2 Se existe $\lim_{x\to0} f(x)$ qual é o seu valor?

Exercício 4.— Sejam $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e (x_n) uma sucessão com termos em $[0,1]$ tal que $(f(x_n))\to0$. Mostre que existe $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=0$.

Exercício 5.— Estude, do ponto de vista da continuidade, a função de Riemann, i.e., a função$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{m} & (\text{se } x\in\mathbb{Q} \text{ e } x=m/n \text{ na forma irredutível, com } n>0)\\ 0 & (\text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\end{cases}$$