Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 6 – Electrostática VI

Campo eléctrico no vácuo e conceitos fundamentais da electrostática

- Lei de Gauss generalizada
- Condições de fronteira do campo eléctrico na superfície de dieléctricos

Popovic & Popovic Cap. 7.6 – 7.8

Vector deslocamento do campo eléctrico

Para ter em conta o campo gerado por um dieléctrico, a lei de Gauss deve ter em conta as **cargas livres** e as **cargas de polarização**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q_{livre} + Q_{pol}}{\epsilon_0}$$

Q_{livre} = carga livre total
Q_{pol} = carga de polarização total

Como $Q_{\text{pol}} = -\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n}\, dS$, podemos substituir na equação acima e passar para o lado esquerdo:

$$\oint_S \underbrace{\boxed{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}}_{\equiv \vec{D}} \cdot \vec{n}\, dS = Q_{livre}$$

$\equiv \vec{D}$ = **Deslocamento do campo eléctrico**

No caso de um meio em que $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \underbrace{\boxed{\epsilon_0 (1 + \chi_e)}}_{\equiv \varepsilon} \vec{E}$$

$\equiv \varepsilon$ = **Permitividade eléctrica**

(ϵ mede a *polarizabilidade* do dieléctrico)

Lei de Gauss generalizada

Podemos assim escrever a Lei de Gauss numa forma que é válida para o vácuo, condutores e dieléctricos:

O fluxo do campo de **deslocamento eléctrico** $\vec{D}$ através de uma superfície fechada é igual à **carga livre** total no interior da superfície

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q_{livre}}$$

Lei de Gauss generalizada

ou na forma local

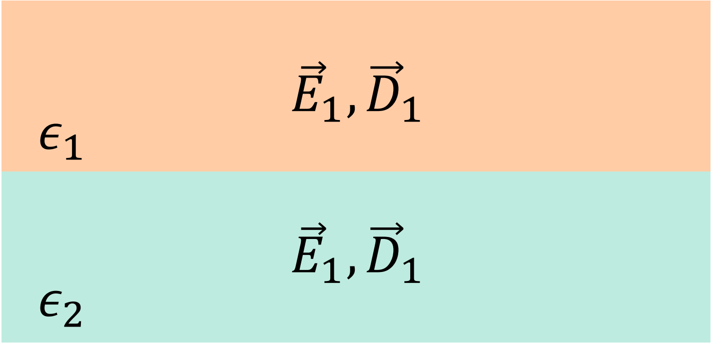
$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{livre}}$$

Condições fronteira em dieléctricos

Um dieléctrico pode ser composto por diversas secções homogéneas, mas com propriedades diferentes entre si.

Considere-se a fronteira entre duas regiões de um dieléctrico. Caso exista um campo eléctrico externo, também existirá um vector deslocamento $\vec{D}$.

Como se relacionam os campos
- $\vec{E}_1$ e $\vec{D}_1$ na região 1
- $\vec{E}_2$ e $\vec{D}_2$ na região 2 ?



Têm que obedecer às **condições fronteira**.

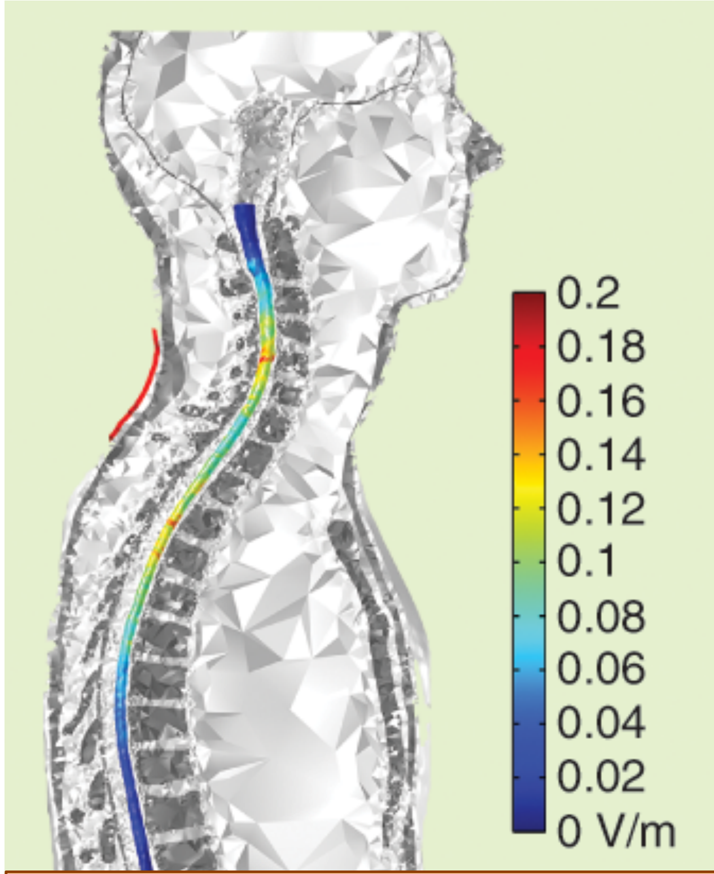
O que são condições fronteira?

Dentro de cada meio homogéneo, o campo eléctrico é contínuo.

Contudo, na **fronteira** entre os meios tal não é obrigatório. A forma do campo eléctrico é ditada pelas equações fundamentais:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad\qquad \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q_{livre}$$

Estas equações dão origem às relações entre as componentes **normais** (n) e **tangenciais** (t) dos campos em cada lado da fronteira.



Aplicação transcutânea de corrente eléctrica à medula espinal

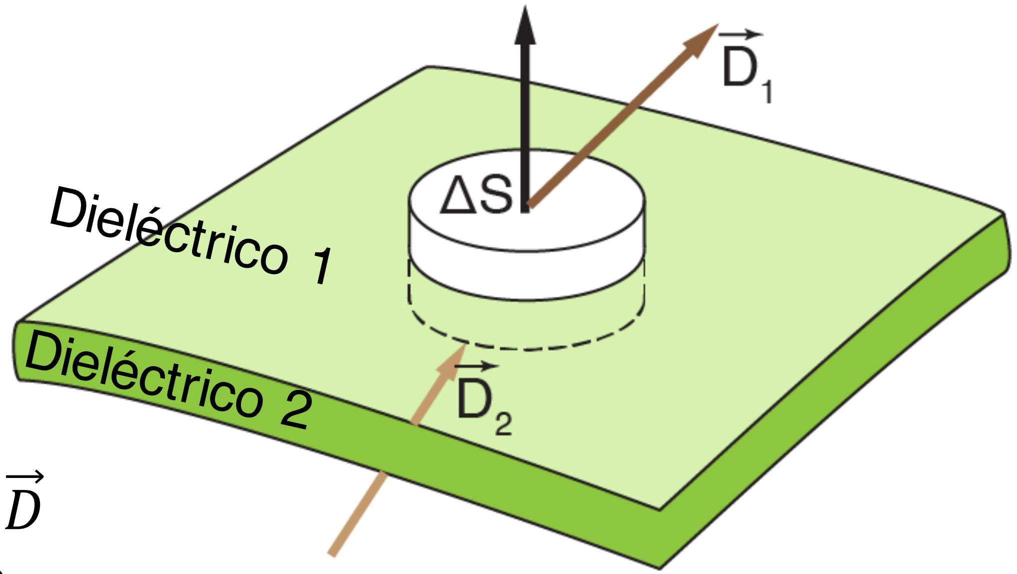
Condições fronteira em dieléctricos

Aplicando a Lei de Gauss generalizada:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q_{livre} = \sigma \Delta S$$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} - \vec{D}_2 \cdot \vec{n} = \sigma$$

$$\rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$



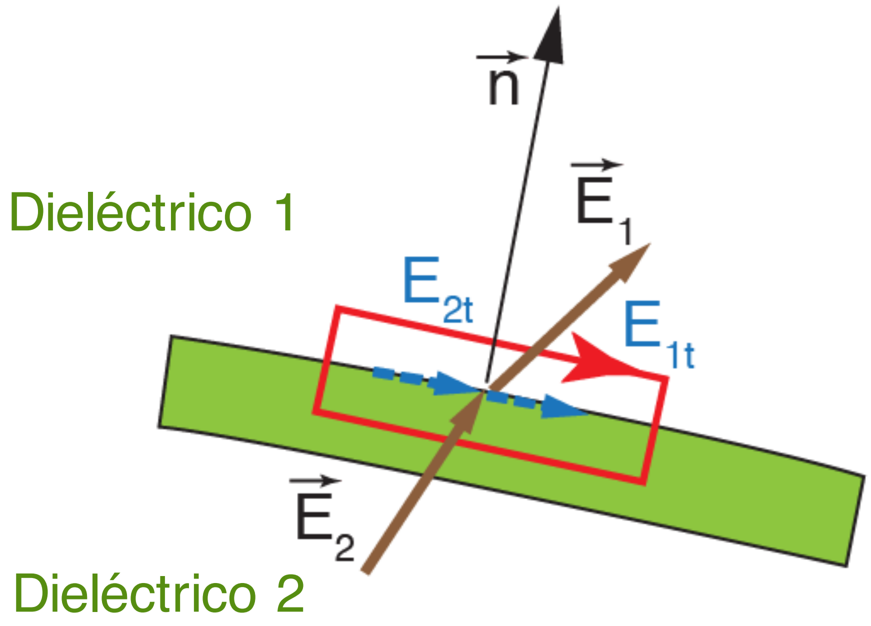
A componente **normal** do vector deslocamento $\vec{D}$ tem uma descontinuidade igual à densidade de carga em superfície na fronteira.

No caso particular de não existir carga em superfície: $D_{1n} = D_{2n}$
No caso da fronteira entre um dieléctrico (1) e um condutor (2): $D_{1n} = \sigma$

Condições fronteira em dieléctricos

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 . d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 . d\vec{l}_2 = 0$$

$$\rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$



A componente **tangencial** do campo eléctrico $\vec{E}$ é contínua.

Equações de Poisson e Laplace

Da relação $\vec{E} = -\nabla V$ podemos escrever $\quad \vec{D} = \epsilon\vec{E} = -\epsilon\nabla V$

Usando a Lei de Gauss generalizada $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{livre}$: $\quad \nabla \cdot \vec{D} = -\nabla \cdot \epsilon(\nabla V) = \rho$

$\nabla \cdot (\nabla V) = -\rho/\epsilon$ ou $\boxed{\nabla^2 V = -\rho/\epsilon}$ **Eq. Poisson**

Se $\rho = 0$: $\nabla \cdot (\nabla V) = 0$ ou $\boxed{\nabla^2 V = 0}$ **Eq. Laplace**

Laplaciano: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Sumário

1. A Lei de Gauss generalizada é válida para o vácuo, condutores e dieléctricos

2. A Lei faz uso do campo vectorial auxiliar $\vec{D}$: o seu fluxo através de uma superfície fechada é igual à carga no interior

3. Condições fronteira na superfície de dieléctricos
   - **Descontinuidade** da componente **normal**: $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$
   - **Continuidade** da componente **tangencial**: $E_{1t} - E_{2t} = 0$