Limites em R^2

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

(1) Substituir (x_0,y_0).

Indeterminação ? Não – o limite está calculado

Sim – passa a (2)

(2) Calcular os limites direccionais.

Por exemplo segundo as direcções :

$$y = mx$$

$$y = mx^2$$

$$x = my^2$$

$$x = 0 \quad e \quad y = 0$$

(3) Se algum dos limites de (2) depender de m, ou não existir, ou pelo menos dois dos limites forem diferentes, então, o limite dado não existe.

(4) Se os limites direccionais existirem e forem iguais, nada se conclui.

Só se pode concluir que se o limite dado existir toma o valor obtido em (2).

(4) Para se mostrar que o limite existe e tem o valor obtido em (2), por exemplo l, tem que se provar por definição :

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \|(x,y) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - l| < \delta$$

Nota : $\|(x,y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$