Ficha 3
Resolução dos exercícios de auto-avaliação

III. 1 Aplicando o método de primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

a) $P\dfrac{x^2-2x+5}{e^x}$

Resolução:

$$P\,\frac{x^2-2x+5}{e^x}=P\left(x^2-2x+5\right)e^{-x}\underset{\uparrow}{=}-e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)-P\left(-e^{-x}\right)\cdot\left(2x-2\right)=-e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)+2Pe^{-x}\cdot\left(x-1\right)$$

Usando o método de
primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$
em que $\begin{cases}u'=e^{-x}\\ v=x^2-2x+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=Pe^{-x}=-P(-1)e^{-x}=-e^{-x}\\ v'=2x-2\end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=}-e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)+2\left(-e^{-x}\left(x-1\right)-P\left(-e^{-x}\right)1\right)$$

Usando o método de
primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$
em que $\begin{cases}u'=e^{-x}\\ v=x-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=Pe^{-x}=-P(-1)e^{-x}=-e^{-x}\\ v'=1\end{cases}$

$$=-e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)-2e^{-x}\left(x-1\right)+2Pe^{-x}\underset{\uparrow}{=}-e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)-2e^{-x}\left(x-1\right)-2P\left(-e^{-x}\right)$$

Usando a regra de primitivação: $P\,u'\cdot e^u=e^u$
em que $\begin{cases}u=-x\\ u'=-1\end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=}-e^{-x}\left(x^2-2x+5\right)-2e^{-x}\left(x-1\right)-2e^{-x}=-e^{-x}\left(\left(x^2-2x+5\right)+2\left(x-1\right)+2\right)$$

Usando a regra de primitivação
enunciada na igualdade anterior

$$=-e^{-x}\left(x^2+5\right)=-\frac{x^2+5}{e^x}$$

b) $P\ x\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x$

Resolução:

$$P\ x\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x=\frac{1}{2}P\ x\cdot 2\operatorname{sen}x\cdot\cos x=\frac{1}{2}P\ x\cdot\operatorname{sen}(2x)\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos(2x)-P\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)1\right)$$

Usando o método de
primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$
em que $\begin{cases}u'=\operatorname{sen}(2x)\\ v=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=\frac{1}{2}P2\operatorname{sen}(2x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)\\ v'=1\end{cases}$

$$=-\frac{1}{4}x\cos(2x)+\frac{1}{4}P\cos(2x)\underset{\uparrow}{=}-\frac{1}{4}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\frac{1}{2}P2\cos(2x)=-\frac{1}{4}x\cos(2x)+\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x)$$

Usando a regra de primitivação:
$P\,u'\cos u=\operatorname{sen}u$
em que $u=2x$
$u'=2$

c) $P\frac{\ln x}{x^3}$

Resolução:

$$P\frac{\ln x}{x^3} = P\,x^{-3}\ln x \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2x^2}\ln x - P\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{1}{x} = -\frac{1}{2x^2}\ln x+\frac{1}{2}P\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\ln x+\frac{1}{2}Px^{-3}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=x^{-3}\\ v=\ln x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=Px^{-3}=\frac{x^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2x^2}\\ v'=\frac{1}{x}\end{cases}$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot\ln x + \frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2x^2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$$

d) $P\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Resolução:

$$P\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = P\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = P\,x^{-\frac{1}{2}}\cdot\ln x \underset{\uparrow}{=} 2\sqrt{x}\cdot\ln x - P\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2P\frac{\sqrt{x}}{x} \underset{\uparrow}{=} 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2Px^{-\frac{1}{2}}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=x^{-\frac{1}{2}}\\ v=\ln x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=Px^{-\frac{1}{2}}=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}\\ v'=\frac{1}{x}\end{cases}$

$\frac{\sqrt{x}}{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-1}=x^{\frac{1}{2}-1}=x^{-\frac{1}{2}}$

$$\underset{\uparrow}{=} 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = 2\sqrt{x}\cdot\ln x - 4\sqrt{x}$$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k=\frac{u^{k+1}}{k+1},\ k\neq -1$

em que $\begin{cases}u=x, \quad k=-\frac{1}{2}\\ u'=1\end{cases}$

e) $P\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

Resolução:

$$P\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = P1\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \underset{\uparrow}{=} x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - Px\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=1\\ v=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x\\ v'=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$

$$= x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - Px\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - Px\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}P2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{\uparrow}{=} x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k=\frac{u^{k+1}}{k+1},\ k\neq -1$

em que $\begin{cases}u=1+x^2, \quad k=-\frac{1}{2}\\ u'=2x\end{cases}$

$$= x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$

f) $P\,\dfrac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Resolução:

$$P\,\frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} \underset{\uparrow}{=} P\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,x = -\operatorname{cotg}(x)\cdot x - P\big(-\operatorname{cotg}(x)\big)\cdot 1 \underset{\uparrow}{=} -\operatorname{cotg}(x)\cdot x + P\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \underset{\uparrow}{=} -\operatorname{cotg}(x)\cdot x + \ln\left|\operatorname{sen}(x)\right|$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ v=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cotg}(x) \\ v'=1 \end{cases}$

$\operatorname{cotg}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

Usando a regra de primitivação: $P\dfrac{u'}{u}=\ln|u|$ em que $\begin{cases} u=\operatorname{sen}(x) \\ u'=\cos(x) \end{cases}$

g) $P\operatorname{sen}(\ln x)$

Resolução:

$$P\operatorname{sen}(\ln x) \underset{\uparrow}{=} P1\cdot\operatorname{sen}(\ln x) = x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - Px\cdot\frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\operatorname{sen}(\ln x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=(\ln x)'\cos(\ln x)=\dfrac{1}{x}\cos(\ln x) \end{cases}$

$$= x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - P1\cdot\cos(\ln x) \underset{\uparrow}{=} x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - \left(x\cdot\cos(\ln x) - Px\cdot\left(-\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)\right)\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\cos(\ln x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=(\ln x)'\cos(\ln x)=-\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x) \end{cases}$

$$= x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) - P\operatorname{sen}(\ln x)$$

Temos que,

$$\begin{aligned} & P\operatorname{sen}(\ln x) = x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) - P\operatorname{sen}(\ln x) \\ \Leftrightarrow\ & P\operatorname{sen}(\ln x) + P\operatorname{sen}(\ln x) = x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) \\ \Leftrightarrow\ & 2P\operatorname{sen}(\ln x) = x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) \\ \Leftrightarrow\ & P\operatorname{sen}(\ln x) = \frac{1}{2}\big(x\cdot\operatorname{sen}(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x)\big) \end{aligned}$$

h) $P\left(e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^x\right)\right)$

Resolução:

$$P\left(e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^x\right)\right) = P\left(e^x e^x\operatorname{sen}\left(e^x\right)\right) \underset{\uparrow}{=} -\cos\left(e^x\right)e^x - P\left(-\cos\left(e^x\right)e^x\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=e^x\operatorname{sen}\left(e^x\right) \\ v=e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=P\left(e^x\operatorname{sen}\left(e^x\right)\right)=-\cos\left(e^x\right) \\ v'=e^x \end{cases}$

$$= -e^x\cos\left(e^x\right) + P\left(\cos\left(e^x\right)e^x\right) = -e^x\cos\left(e^x\right) + \operatorname{sen}\left(e^x\right)$$

i) $P5\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Resolução:

Como temos apenas um factor que não sabemos primitivar $\left(5\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, introduzimos o factor 1. Devemos começar a primitivar pelo factor 1, isto é, $u' = 1$.

Assim,

$$P\left(5\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 5P\left(1\cdot\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{\uparrow}{=} 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 5P\left(x\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right) = 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 5P\left(x\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = P1 = x \\ v' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \end{cases}$

$$= 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 5P\left(x\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \underset{\uparrow}{=} 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 5P\left(-x\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1},\ k \neq -1$

em que $\begin{cases} u = 1-\left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad k = -\frac{1}{2} \\ u' = -x \end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 5\frac{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 5\frac{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

$$= 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 10\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \underset{\uparrow}{=} 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 10\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = 5x\,\text{arc sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 5\sqrt{4-x^2}$$

$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$