Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 2 – Primitivas Imediatas

<u>Parte I – Exercícios Propostos</u>

I.1 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P u' \cdot u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1}$$

a) Px^2 **b)** $P(x+5)^3$ **c)** $P(2x+3)^2$

d) $Px^2(2x^3+2)$ **e)** $P2x(5+6x^2)^{\frac{1}{2}}$ **f)** $P\frac{2}{(x+2)^2}$

g) $P\frac{x}{(x^2+3)^3}$ **h)** $P\frac{x}{2\sqrt{x}}$ **i)** $P\frac{2}{\sqrt[3]{(x+4)^2}}$

j) $P(x+1)\sqrt{2x+2+x^2}$ **l)** $P(3x^2+5x+2)$

I.2 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P u' \cdot e^u = e^u + C}$$

a) Pe^{x+1} **b)** $P\left(x^2 e^{2x^3}\right)$

I.3 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P\frac{u'}{u} = \ln|u| + C}$$

a) $P\frac{1}{x+2}$ **b)** $P\frac{5x}{x^2+4}$ **c)** $P(5x+4)^{-1}$

I.4 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P\,u' \cdot a^u = \frac{a^u}{\ln a} + C}$$

a) $P4^x$

b) $P\left(\operatorname{sen} x \cdot 2^{\cos x}\right)$

I.5 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P\,u' \cos u = \operatorname{sen} u + C}$$

a) $P\cos(2x)$

b) $P\left(\frac{-4}{(x+1)^2}\cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\right)$

I.6 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P\,u' \operatorname{sen} u = -\cos u + C}$$

a) $P\left(xe^{x^2+1}\operatorname{sen}\left(e^{x^2+1}\right)\right)$

b) $P\left(x\operatorname{sen}\left(2x^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

I.7 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + C}$$

a) $P\frac{2x+1}{\sqrt{1-\left(3x^2+3x\right)^2}}$

b) $P\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$

c) $P\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

I.8 Calcule as seguintes primitivas, utilizando a regra de primitivação:

$$\boxed{P\frac{u'}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tg}(u) + C}$$

a) $P\left(\frac{x^3}{x^8+4}\right)$

b) $P\left(\frac{x^5}{9x^{12}+16}\right)$

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

Parte II – Exercícios Resolvidos

II.1 Calcule as seguintes primitivas, tendo em conta que a, b e c são constantes arbitrárias:

a) $P\left(\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\right)$

Resolução:

$$P\left(\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\right) = -P\left(-\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}\right) = -e^{\cos x} + C$$

Regra de primitivação: $P\,u' \cdot e^{u} = e^{u} + C$

em que $\begin{cases} u = \cos x \\ u' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

b) $P\left(\dfrac{x^2 e^{\operatorname{arcsen} x^3}}{\sqrt{1-x^6}}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{x^2 e^{\operatorname{arcsen} x^3}}{\sqrt{1-x^6}}\right) = \frac{1}{3} P\left(\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} e^{\operatorname{arcsen} x^3}\right) = \frac{1}{3} e^{\operatorname{arcsen} x^3} + C$$

Regra de primitivação: $P\,u' \cdot e^{u} = e^{u} + C$

em que $\begin{cases} u = \operatorname{arcsen} x^3 \\ u' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

c) $P\left(\sqrt{2x}\right)$

Resolução:

$$P\left(\sqrt{2x}\right) = P\left((2x)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} P\left(2(2x)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{(2x)^3} + C$$

Regra de primitivação: $P\,u' \cdot u^{k} = \dfrac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$

em que $\begin{cases} u = 2x, \quad k = \dfrac{1}{2} \\ u' = 2 \end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

$$= \frac{\sqrt{(2x)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{2^3 x^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2x^2 \cdot x}}{3} + C = \frac{2x\sqrt{2x}}{3} + C$$

d) $P\left(\dfrac{2a}{\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} - 3c\sqrt[3]{x^2}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} - 3c\sqrt[3]{x^2}\right) = 2aP\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - bP\left(\frac{1}{x^2}\right) - 3cP\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = 2aP\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) - bP\left(\frac{1}{x^2}\right) - 3cP\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

Pelas propriedades:
$P[f(x)+g(x)] = P f(x) + P g(x)$;
$P[\alpha f(x)] = \alpha P f(x)$

$$= 2aP\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) - bP\left(x^{-2}\right) - 3cP\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= 2a\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b\frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 3c\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C \quad = 2a\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b\frac{x^{-1}}{-1} - 3c\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = 2a\cdot 2\sqrt{x} + b\frac{1}{x} - 3c\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$$

$\uparrow$

Usando a regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$

em que

$\begin{cases} u = x, & k = -\frac{1}{2} \\ u' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1 = x, & k = -2 \\ u_1' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u_2 = x, & k = \frac{2}{3} \\ u_2' = 1 \end{cases}$

$$= 4a\sqrt{x} + b\frac{1}{x} - 3c\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^3\,x^2} + C = 4a\sqrt{x} + b\frac{1}{x} - \frac{9}{5}cx\sqrt[3]{x^2} + C$$

e) $P\left(6x^2 + 8x + 5\right)$

Resolução:

$$P\left(6x^2 + 8x + 5\right) = 6Px^2 + 8Px + 5P1 = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + 8\frac{x^{1+1}}{1+1} + 5x + C = 6\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 5x + C = 2x^3 + 4x^2 + 5x + C$$

$\uparrow$

Pelas propriedades:
$P[f(x) + g(x)] = P f(x) + P g(x);$
$P[\alpha f(x)] = \alpha P f(x)$

$\uparrow$

Usando as regras de primitivação:
$P\,u'\cdot u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$ e $P\,k = kx + C$

em que $\begin{cases} u = x, & k = 2 \\ u' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1 = x, & k = 1 \\ u_1' = 1 \end{cases}$

f) $P\left(a + bx^3\right)$

Resolução:

$$P\left(a + bx^3\right) = aP1 + bPx^3 = ax + b\frac{x^{3+1}}{3+1} + C = ax + \frac{b}{4}x^4 + C$$

$\uparrow$

Pelas propriedades:
$P[f(x) + g(x)] = P f(x) + P g(x);$
$P[\alpha f(x)] = \alpha P f(x)$

$\uparrow$

Usando as regras de primitivação:
$P\,u'\cdot u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$ e $P\,k = kx + C$

em que $\begin{cases} u = x, & k = 3 \\ u' = 1 \end{cases}$

g) $P\left(\text{sen}^2 x \cos x\right)$

Resolução:

$$P\left(\text{sen}^2 x \cos x\right) = P\left(\cos x\left(\text{sen}\,x\right)^2\right) = \frac{\left(\text{sen}\,x\right)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{\left(\text{sen}\,x\right)^3}{3} + C = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C$$

$\uparrow$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$

em que $\begin{cases} u = \text{sen}\,x, & k = 2 \\ u' = \cos x \end{cases}$

h) $P\left(\frac{\text{arc sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{\text{arc sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc sen}\,x\right) = \frac{\left(\text{arc sen}\,x\right)^{1+1}}{1+1} + C = \frac{\left(\text{arc sen}\,x\right)^2}{2} + C = \frac{\text{arc sen}^2 x}{2} + C$$

$\uparrow$

Usando a regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C,\ k \neq -1$

em que $\begin{cases} u = \text{arc sen}\,x, & k = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

i) $P\left(e^x\sqrt{1+2e^x}\right)$

Resolução:

$$P\left(e^x\sqrt{1+2e^x}\right)=P\left(e^x\left(1+2e^x\right)^{\frac{1}{2}}\right)\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{2}P\left(2e^x\left(1+2e^x\right)^{\frac{1}{2}}\right)\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{2}\frac{\left(1+2e^x\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{2}\frac{\left(1+2e^x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k=\frac{u^{k+1}}{k+1}+C,\ k\neq -1$

em que $\begin{cases} u=1+2e^x,\ k=\frac{1}{2} \\ u'=2e^x \end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

$$=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+2e^x\right)^3}+C=\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+2e^x\right)^2\left(1+2e^x\right)}+C=\frac{1}{3}\left(1+2e^x\right)\sqrt{1+2e^x}+C$$

j) $P\left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^3}}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^3}}\right)=P\left(\frac{x^2}{\left(a^2+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}\right)\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{3}P\left(3x^2\left(a^2+x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{3}\frac{\left(a^2+x^3\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{3}\frac{\left(a^2+x^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{a^2+x^3}+C$$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k=\frac{u^{k+1}}{k+1}+C,\ k\neq -1$

em que $\begin{cases} u=a^2+x^3,\quad k=-\frac{1}{2} \\ u'=3x^2 \end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

l) $P\left(\frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{1+x^2}\right)=P\left(\frac{1}{1+x^2}e^{\operatorname{arc\,tg} x}\right)\underset{\uparrow}{=}e^{\operatorname{arc\,tg} x}+C$$

Usando a regra de primitivação: $P\,u'\cdot e^u=e^u+C$

em que $\begin{cases} u=\operatorname{arc\,tg} x \\ u'=\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

m) $P\left(\frac{1}{(1+x)\ln(x+1)}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{1}{(1+x)\ln(x+1)}\right)=P\left(\frac{\frac{1}{(1+x)}}{\ln(x+1)}\right)\underset{\uparrow}{=}\ln\left|\ln(x+1)\right|+C$$

Usando a regra de primitivação: $P\frac{u'}{u}=\ln|u|+C$

em que $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ u'=\frac{1}{1+x} \end{cases}$

n) $P\left(\dfrac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\right)=P\left(\frac{\frac{1}{x}\ln x}{1-\ln^2 x}\right)=-\frac{1}{2}P\left(\frac{-2\frac{1}{x}\ln x}{1-\ln^2 x}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right|+C$$

Regra de primitivação: $P\frac{u'}{u}=\ln|u|+C$

em que $\begin{cases} u=1-\ln^2 x \\ u'=-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

o) $P\left(\dfrac{1}{x\ln x\ln\left(\ln x\right)}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{1}{x\ln x\ln\left(\ln x\right)}\right)=P\left(\frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\ln\left(\ln x\right)}\right)=\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+C$$

Usando a regra de primitivação: $P\frac{u'}{u}=\ln|u|+C$

em que $\begin{cases} u=\ln\left(\ln x\right) \\ u'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\end{cases}$

p) $P\left(\dfrac{-3x}{x^4+e^4}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{-3x}{x^4+e^4}\right)=P\left(\frac{-3x}{e^4\left(\frac{x^4}{e^4}+1\right)}\right)=-\frac{3}{e^4}P\left(\frac{x}{1+\frac{x^4}{e^4}}\right)=-\frac{3}{e^4}\cdot\frac{e^2}{2}P\left(\frac{\frac{2x}{e^2}}{\left(1+\left(\frac{x^2}{e^2}\right)^2\right)}\right)=-\frac{3}{2e^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{e^2}+C$$

Regra de primitivação: $P\frac{u'}{1+u^2}=\operatorname{arc\,tg} u+C$

em que $\begin{cases} u=\frac{x^2}{e^2} \\ u'=\frac{2x}{e^2}\end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III 1 Calcule as seguintes primitivas:

a) $P\left(x\left(x^2+2\right)^3\right)$ **b)** $P\left(x+\sqrt{x}\right)$ **c)** $P\dfrac{3}{\sqrt[4]{6x}}$

d) $P\left(x^2 e^{2x^3}\right)$ **e)** $P\left(\dfrac{x}{1+x^4}e^{\operatorname{arc\,tg} x^2}\right)$ **f)** $P\left((x+1)\cos\left(x^2+x\right)e^{\operatorname{sen}\left(x^2+x\right)}\right)$

g) $P\left(\dfrac{5}{x+1}e^{\ln(4x+4)}\right)$ **h)** $P\left(\dfrac{1+xe^x}{x}3^{\left(\ln x+e^x\right)}\right)$ **i)** $P\left(\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln 2x)\right)$

III 2 Primitive as seguintes funções:

a) $\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)^2$ **b)** $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ **c)** $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}$

d) $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$ **e)** $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$ **f)** $\dfrac{e^{6x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

g) $\dfrac{x}{1+x^2}$ **h)** $\dfrac{x^5}{1+x^6}$ **i)** $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$

j) $x\sqrt{1+x^2}$ **l)** $\dfrac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}$ **m)** $\operatorname{tg}(2x)$

n) $\dfrac{1}{x^2+2}$ **o)** $\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos^3 x$ **p)** $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arc\,tg} x}$

q) $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ **r)** $\dfrac{e^x}{4+e^{2x}}$