Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

8^a Ficha de exercícios para as aulas práticas: 13 - 24 Novembro de 2006

1. Determine os pontos onde a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3$ tem máximos ou mínimos locais.

2. Determine os pontos onde a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{12}x^4$ tem pontos de inflexão.

3. Escreva cada uma das seguintes funções como soma de potências de $x+2$.

   (i) x^3+x^2+x+1 **(ii)** x^3-2x^2-5x-2

4. Estabeleça o desenvolvimento binomial

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1+nx+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{p}x^p+\cdots+x^n= \\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{p}x^p+\cdots+\binom{n}{n}x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k,\end{aligned}$$

   com $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ (combinações de n elementos k a k), usando a fórmula de Taylor.

5. **(i)** Determine o polinómio de Taylor P_2 de ordem 2 relativamente à função $f(x)=2\log(\cos x)$ e ao ponto $x_0=0$.

   (ii) Indique um majorante para o erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 (determinado na alínea anterior) no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

6. Como se pode obter $\operatorname{sen}(10^o)$ com erro inferior a 10^{-4} usando a fórmula de Taylor?

7. Determine um polinómio que aproxime a função sen no intervalo $[-1,1]$ com um erro inferior a 10^{-3}.

8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(0)=0$ e $f''(x)>0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$. Seja $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(x)=f(\operatorname{sen}x)$.

   (i) Determine os extremos locais de φ.

   (ii) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x)=0$?

9. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty,\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty.$$

   (i) Mostre que existe um único $c\in\mathbb{R}$ tal que $f'(c)=0$, e que $f(c)$ é o mínimo absoluto de f.

   (ii) Sendo m esse mínimo absoluto, seja $b\in\,]m,+\infty[$. Verifique que o conjunto

$$f^{-1}(b)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=b\}$$

   tem exactamente dois elementos.

10. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ diferenciável em $]0, +\infty[$ tal que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = b \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $b = 0$.

11. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0, 2]$, diferenciável em $]0, 2[$ e tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 1$.

(i) Mostre que existe $c_1 \in]0, 1[$ tal que $f'(c_1) = 1$.

(ii) Mostre que existe $c_2 \in]1, 2[$ tal que $f'(c_2) = 0$.

(iii) Mostre que existe $c \in]0, 2[$ tal que $f'(c) = \dfrac{1}{5}$.

12. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \lim \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

(i) Estude f e g quanto à continuidade.

(ii) Justifique que, qualquer que seja $a > 0$, ambas as funções f e g têm máximo e mínimo no intervalo $[-a, a]$.

13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen} x + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 \log x + b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Determine a e b de modo a que f seja diferenciável no ponto $x = 0$.

(ii) Para $b = 1$ determine os valores de a para os quais f não tem extremo no ponto 0. Justifique.

14. Mostre que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6},$$

para qualquer $x \in [0, 1]$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ três vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'''(x) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(i) Mostre que f não pode ter mais de dois pontos de extremo local.

(ii) Se f tiver extremos locais nos pontos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha < \beta$, diga se $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ são máximos ou mínimos locais de f. Justifique.

(iii) Mostre que $f(x) > f(\beta)$, se $x > \beta$.

16. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função diferenciável em 0 e definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0, \\ \\ \operatorname{arctg}(\alpha x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(i) Determine α.

(ii) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(iii) Estude f quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada f'.

(iv) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

(v) Estude f quanto à existência de assímptotas.

(vi) Determine o contradomínio de f.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{se } x > 0, \\ \\ \dfrac{e^x - 1}{e} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Estude f quanto à continuidade e quanto à diferenciabilidade, e determine a sua função derivada f'.

(ii) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

(iii) Estude f quanto à existência de assímptotas.

(iv) Determine o contradomínio de f.

18. Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k_1 \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) & \text{se } x < 0, \\ \\ k_2 + \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determine k_1 e k_2 de modo a que f fique contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, e mostre que, com esses valores, a função f não tem extremos locais.

19. Seja $f : \left]-1, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in \left]-1, 0\right], \\ \\ x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x \in \left]0, +\infty\right[. \end{cases}$$

(i) Estude f quanto à continuidade e calcule $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(ii) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e a função derivada f'.

(iii) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

(iv) Determine, se existirem, as assímptotas ao gráfico de f.

(v) Determine f''.

(vi) Determine o contradomínio de f.

(vii) Determine as inflexões e o sentido das concavidades do gráfico de f.

(viii) Esboce o gráfico de f.

20. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{se } x < 0, \\ 2e^{-x}\operatorname{ch} x - 1 + \dfrac{x}{2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) Determine f'.

(iii) A função f tem extremos locais em $\mathbb{R}^+$?

(iv) Escreva o polinómio de Taylor de 2^a ordem da função f relativo ao ponto 1.

(v) Indique um majorante para o erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 (determinado na alínea anterior) no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

21. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^4 \operatorname{sen} x$.

(i) Mostre que 1 é ponto de estacionaridade de f, isto é, $f'(1) = 0$, e recorra à fórmula de Taylor de f para determinar a sua natureza (máximo, mínimo, ou ponto de inflexão).

(ii) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 0 da função sen relativa ao ponto 1, e aproveite para resolver o problema da alínea anterior de maneira alternativa.

22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(i) Mostre que f não tem extremo local em 0.

(ii) Determine f'.

(iii) Determine f''.

(iv) Mostre que f não tem um ponto de inflexão em 0.

23. Calcule os seguintes limites.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/4} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x}}$ **(2)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^4 \cos^2 x}$ **(3)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ **(4)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{\sqrt{(x\operatorname{sen} x)^3}}$ **(6)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{\operatorname{sen} x^2}$ **(7)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\log^2 x}$ **(8)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x-\cos x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-2}{x^2}$ **(10)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$ **(11)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ **(12)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3\log x$

(13) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log\operatorname{sen} x$ **(14)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\log x}{x\log x}$ **(15)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg} x-x}$ **(16)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen} 2x-2\operatorname{arcsen} x}{x^3}$

(17) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-1\right)$ **(18)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\log(x+e^{3x})$ **(19)** $\lim\limits_{x\to 1} \log x\log\log x$

(20) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{e^{1/x}}$ **(21)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\log\dfrac{x}{x+1}$ **(22)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log\dfrac{x}{x+1}$ **(23)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

(24) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}}$ **(25)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}$ **(26)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ **(27)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x+\cos x-e^x}{\log(1+x^2)}$

(28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x+1}$ **(29)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{x^2e^{\log^2 x}}$ **(30)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \log x\log\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ **(31)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, com $a\in\mathbb{R}$.

(32) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log\operatorname{tg}(ax)}{\log\operatorname{tg}(bx)}$, com $a,b\in\mathbb{R}^+$. **(33)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x$, com $a,b\in\mathbb{R}^+$.

(34) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$, com $a,b\in\mathbb{R}^+$. **(35)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$ **(36)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \log\dfrac{e^x+(e^x)^2}{e^{2x}+x^2}$

(37) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{\operatorname{arctg} x}-b^{\operatorname{arctg} x}}{x}$, com $a,b\in\mathbb{R}^+$. **(38)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ **(39)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ **(40)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}e^{-x}$

(41) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ **(42)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ **(43)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$ **(44)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$ **(45)** $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$

(46) $\lim n^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$ **(47)** $\lim \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$ **(48)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x}$ **(49)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

(50) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{1-x}}$ **(51)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$ **(52)** $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+1)^{1/x^2}$ **(53)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\log\dfrac{1}{x}\right)^x$

(54) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ **(55)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ **(56)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **(57)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\log x}$

(58) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\log x)^{1/x}$ **(59)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)}-1$ **(60)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$ **(61)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$

(62) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{cotgh} x}$ **(63)** $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\operatorname{sen} x}$ **(64)** $\lim\limits_{x\to a} \left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

24. Faça um estudo tão completo quanto possível das seguintes funções, tendo em conta os seguintes aspectos.

 (i) Continuidade.

 (ii) Diferenciabilidade. Cálculo da função derivada.

 (iii) Intervalos de monotonia e extremos locais.

(iv) Assímptotas.

(v) Contradomínio.

(vi) Cálculo da derivada de 2^a ordem.

(vii) Inflexões e sentido das concavidades do gráfico de f.

(viii) Esboço do gráfico de f.

(1) $\operatorname{sen}^2 x$ **(2)** $x\left(x^2-4\right)$ **(3)** $x^2(x-6)+9x+5$ **(4)** $x-\operatorname{sen} x$ **(5)** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$

(6) $\dfrac{x^3+1}{x^2}$ **(7)** $\frac{x^2-2}{x^2-4}$ **(8)** $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ **(9)** $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ **(10)** $xe^{1/x}$ **(11)** $\dfrac{x}{1+x^2}$

(12) $\left|x^2-5x+6\right|$ **(13)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ **(14)** $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ **(15)** $\sqrt{x(x-2)}$ **(16)** xe^{-x}

(17) $\dfrac{2x^3-x^2+1}{x^2+1}$ **(18)** $\dfrac{1-|x|}{1+|x|}$ **(19)** $\dfrac{|x|}{1+|x|}$ **(20)** $\dfrac{|x|}{1-|x|}$ **(21)** e^{-x^2} **(22)** $\dfrac{e^x}{x}$

(23) $e^{1/\left(x^2-1\right)}$ **(24)** xe^x **(25)** $(x-1)^2 e^{-x}$ **(26)** $xe^{-x^2/2}$ **(27)** $|x|\, e^{1-x^2}$

(28) $xe^{-\left|1-x^2\right|}$ **(29)** $e^{-\log^2 x}$ **(30)** $x\log x$ **(31)** $\dfrac{x}{1+\log x}$ **(32)** $\dfrac{x^2}{2+\log x^2}$

(33) $\dfrac{x}{\log|x|}$ **(34)** $\dfrac{\log|x|}{x}$ **(35)** $\dfrac{\log|x|}{x^2}$ **(36)** $\dfrac{1-\log|x|}{1+\log|x|}$ **(37)** $x^2\log x^2$ contínua em 0.

(38) $x\log\dfrac{1}{x^2}$ contínua em 0. **(39)** $x+2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ **(40)** $2\operatorname{arctg} x-x$ **(41)** $\operatorname{arctg}\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

(42) $\operatorname{arctg}\left|2x^2-x\right|$ **(43)** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$ **(44)** $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)^2$

(45) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$ se $x\neq 0,\ f(0)=0.$ **(46)** $\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ **(47)** $e^{\frac{|x-1|}{|x+2|}}$ **(48)** $\dfrac{e^{x-2}}{x-1}$

(49) $\dfrac{2x^2+\log|x|}{x}$ **(50)** $|x|\, e^{-|x-1|}$ **(51)** $\operatorname{arctg} x-\log\sqrt{1+x^2}$