Análise Matemática I

1º Exame - 6 de Janeiro de 2005

LEAero, LEBiom, LEFT e LMAC

Resolução

1.

a) $\lim \sqrt[3]{\frac{n^2+3}{4n^2+n+2}} = \sqrt[3]{\lim \frac{1+3/n^2}{4+1/n+2/n^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

b) $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{100} = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n-100} = 0$, porque se $|a| < 1 \Rightarrow \lim a^n = 0$.

c) $\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1/2}{n}\right)^n = e^{1/2}$.

2.

a) A série é divergente porque o termo geral tende para 1.

b) Seja $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$. Tem-se $a_n \geq 0$, para $n \geq 2$. Como $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} < 1$, o Critério de Cauchy garante que a série converge.

c) Para $n \geq 1$, seja $a_n = \left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^3 > 0$ e $b_n = \frac{1}{n^3} > 0$. Tem-se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \left(\frac{n^2+n}{n^2+2}\right)^3 = \lim \left(\frac{1+1/n}{1+2/n^2}\right)^3 = 1 \in]0, +\infty[$. Logo, pelo corolário do Critério Geral de Comparação, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são da mesma natureza. Como a segunda destas séries é de Dirichlet, $\sum 1/n^\alpha$, com $\alpha = 3 > 1$, a série dada é convergente.

d) Seja $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$. Tem-se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$. Pelo Critério D'Alembert, a série dada, $\sum a_n$, é convergente.

3.

a)

$$\begin{aligned} s_k &= -\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) - \ldots + \\ &\quad (-1)^{k-2}\left(\cancel{\frac{1}{k-2}} - \cancel{\frac{1}{k}}\right) + (-1)^{k-1}\left(\cancel{\frac{1}{k-1}} - \frac{1}{k+1}\right) + (-1)^k\left(\cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k+2}. \end{aligned}$$

Em alternativa,

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{k+2} (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{k+2} (-1)^n \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{n=k+1}^{k+2} (-1)^n \frac{1}{n} \\ &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{(-1)^{k+2}}{k+2}. \end{aligned}$$

b) Para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, seja $P(k) \Leftrightarrow s_k = -\frac{1}{2} - \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k+2}$.
(i) $s_2 = -\frac{1}{2} - \frac{(-1)}{3} - \frac{(-1)^2}{4} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$, pelo que $P(2)$ é verdadeira.
(ii) Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então,

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + (-1)^{k+1}\left(\tfrac{1}{k+1} - \tfrac{1}{k+3}\right) \\ &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{(-1)^{k-1}}{k+1} - \tfrac{(-1)^k}{k+2} + (-1)^{k+1}\left(\tfrac{1}{k+1} - \tfrac{1}{k+3}\right) \\ &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{(-1)^k}{k+2} - \tfrac{(-1)^{k+1}}{k+3}. \end{aligned}$$

Isto prova $P(k+1)$.
Verificados *(i)* e *(ii)*, o Princípio de Indução Matemática garante que $P(k)$ é verdadeira para todo o $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Observação: Definindo s_1 pelo mesmo somatório, $P(1)$ é verdadeira.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right] = \lim_{k\to\infty} s_k = -\frac{1}{2} + 0 + 0 = -\frac{1}{2}$.

4.

a) A derivada vale $-\sin x\, e^x + \cos x\, e^x + \frac{1}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\left(\ln^2 x\right)\frac{1}{x}$.

b) $\frac{d}{dx}|x-1| = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1, \\ -1 & \text{se } x < 1, \\ \text{não está definida} & \text{se } x = 1. \end{cases}$

c) Pela Regra de Cauchy, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

5.

a) Pela Regra de Cauchy, $\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$.
$\lim_{x\to+\infty} x \ln x = +\infty$.

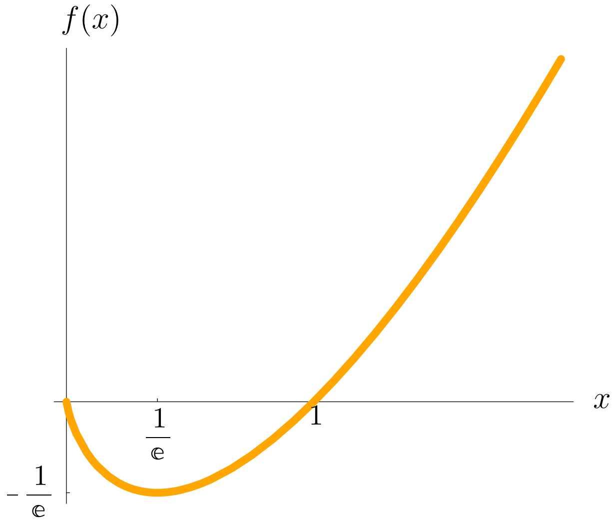
b) $\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ f(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$
$\bar{f}'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$. A função $\bar{f}$ não é diferenciável à direita no ponto 0.

c) $f'(x) = \ln x + 1$. A equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é $y = f(1) + f'(1)(x-1) = x - 1$.

d) Como $f(x) = x \ln x$ e $f'(x) = \ln x + 1$,

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } x < 1, \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 1, \\ f(x) > 0 & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } x < e^{-1}, \\ f'(x) = 0 & \text{se } x = e^{-1}, \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > e^{-1}. \end{cases}$$

A restrição de f ao intervalo $]0, e^{-1}]$ é decrescente e a restrição de f ao intervalo $[e^{-1}, +\infty[$ é crescente. No ponto e^{-1} a função tem um mínimo absoluto de valor $-e^{-1}$. Como $f''(x) = 1/x > 0$, a função f tem a concavidade voltada para cima. Note-se que o gráfico de f tem tangente vertical na origem.



6. Não. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(t) = t^3$ e seja $c = 0$. $f'(0) = 0$ mas $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, porque f é estritamente crescente.
Observação. A interpretação física desta pergunta é a seguinte. Suponhamos que temos uma partícula a deslocar-se ao longo de uma recta, cuja posição no instante $t \in \mathbb{R}$ é $f(t)$. Fixemos um instante c. Tem necessariamente que haver um intervalo que contenha c no qual a velocidade média é igual à velocidade instantânea em c? Como vimos acima, a resposta é negativa. Se $f(t) = t^3$, a partícula tem sempre velocidade instantânea não negativa, tendo velocidade instantânea nula apenas em 0. Em consequência, a velocidade média é positiva em qualquer intervalo não degenerado.
Sugestâo. Interprete geoméricamente a pergunta.

7.

a) Sendo $n \in \mathbb{N}$, a função f tem máximo em $[-n, n]$. Este facto é uma consequência imediata do Teorema de Weierstrass porque f é contínua e o intervalo $[-n, n]$ é limitado e fechado e não vazio.

b) Sim. A condição dada implica que

$$\max_{[-n,n]} f = f(x_n) \leq \max_{[-K,K]} f.$$

Como qualquer $x \in \mathbb{R}$ pertence a um intervalo da forma $[-n, n]$, para algum $n \in \mathbb{N}$ (pela Propriedade Arquimediana),

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\, f(x) \leq \max_{[-K,K]} f;$$

a igualdade é atingida para $x = x_K$. Conclui-se que $f(x_K)$ é máximo de f em $\mathbb{R}$.

c) Não.

Exemplo 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, constante (por exemplo nula) e $x_n = 0$. Qualquer sucessão é maximizante mas nem todas as sucessões são limitadas.

Exemplo 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, $x_n = 0$ e $z_n = 2n\pi$. A sucessão z_n é maximizante mas não é limitada.

Exemplo 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } |x| \leq 1, \\ \frac{2}{\pi} \arctan(x^2 - 1) & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$

o que conduz a $x_n = 0$. Se $|z_n| \to +\infty$, então (z_n) é maximizante mas não é limitada.