Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

10^a Ficha de exercícios para as aulas práticas: 4 - 15 Dezembro de 2006

1) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{x+e^x}dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$ **d)** $\displaystyle\int_e^{e^2} x \log x dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sh} x \operatorname{sen} x dx$ **f)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$ **g)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx$ **h)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}dx$

2) Seja φ uma função integrável em $[0,1]$ e $\phi(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi(t)dt$, com $a \in [0,1]$. Justifique que ϕ é uma função integrável em $[0,1]$ e mostre que existe $b \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^1 \phi(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

3) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável no ponto 0,

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ e $h = g \circ g$, calcule $h''(0)$ expresso em $f(0)$ e $f'(0)$.

4) Prove que se f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e verifica a condição:

$$\int_0^x f(u)du = xf(x),$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, então f é constante.

5) Verifique que se tem:

$$e \leq \int_1^e e^{x^2} \log x dx \leq e^{e^2}.$$

6) Seja $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a > 0)$, diferenciável tal que $f(0) = 0$. Seja g a função inversa de f e

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - xf(x)$$

para $x \in [0,a]$. Verifique que $F(x) = 0$ para todo o $x \in [0,a]$.

7) Considere a função $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t dt.$$

a) Calcule $\varphi(2)$.
b) Justifique que φ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule $\varphi'(x)$, para $x > 0$.
c) Estude φ quanto à monotonia e verifique que há um e um só ponto $c > 0$ tal que $\varphi(c) = 0$.

8) Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

a) Verifique que $F(x) \leq x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
b) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.

9) Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_0^{\log x} x e^{t^2} dt - x.$$

Verifique que f tem um mínimo em 1.

10) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad \text{se} \quad x \neq 0, \\ g(0) &= f(0). \end{aligned}$$

a) Verifique que g é contínua em $\mathbb{R}$.
b) Mostre que g é uma função constante se e só se f o fôr.

11) Sendo $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{K \log x} e^{-t^2} dt$, determine K sabendo que $f'(1) = 0$.

12) Sejam $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Verifique que:

a) $\displaystyle\int_0^2 (x-1) f[(x-1)^2] dx = 0$ **b)** $\displaystyle\int_0^\pi g(\sin x) \cos x dx = 0.$

13) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável tal que $f(a + b - x) = f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. Verifique que:

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

14) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periódica de período T (com $T \in \mathbb{R}^+$), isto é,

$$f(x) = f(x + T), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Verifique que $\int_0^a f(x)dx = \int_T^{a+T} f(x)dx$, com $a \in \mathbb{R}$.

b) Mostre que, se f é ímpar, $\int_0^T f(x)dx = 0$.

15) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Verifique que:

a) Se f é par então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. **b)** Se f é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

16) Seja $F(x) = \int_1^x \frac{e^{\frac{t^2+1}{t}}}{t}dt$, com $x > 0$. Verifique que $F(1/x) = -F(x)$.

17) Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada integrável e seja $m = (a+b)/2$. Verifique que

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx.$$

18) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt \qquad \text{e} \qquad \int_{-x}^{x} g(t)dt = 0.$$

Mostre que f é uma função par e g é uma função ímpar.

19) Verifique que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{1/x}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

20) Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt.$$

Verifique que $f'''(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

21) Mostre que, sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

22) Mostre que, sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = c\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} f(cx)dx,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$.

23) Justifique a diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule as respectivas derivadas.

a) $\displaystyle\int_x^{2\pi} \operatorname{sen} 2t \cos t^2 dt$ **b)** $\displaystyle\int_x^{x^2} \log(1+t^2) dt$ **c)** $\displaystyle\int_x^{3} x^2 e^{\operatorname{sen} t} dt$

d) $\displaystyle\int_{\cos x}^{x^3+1} e^{-t^2+x} dt$ **e)** $\displaystyle\int_1^{x} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+t^2} dt$ **f)** $\displaystyle\int_{2x^2}^{x^4} x e^{t^2} \operatorname{ch} t \; dt$

24) Sejam u e v duas funções contínuas em $\mathbb{R}$ tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^x u(t) dt = \int_b^x v(t) dt,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Verifique que $u = v$ e $\displaystyle\int_a^b u(x) dx = 0$.

25) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, verifique que: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \int_0^{1/x} f(t) dt\right)^x = e^{f(0)}$.

26) Calcule, em função de x, os integrais: **a)** $\displaystyle\int_0^x t dt$ **b)** $\displaystyle\int_x^{x+1} (3 \operatorname{sen} t + 2t^5) dt$.

27) Verifique que se tem: $\displaystyle\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$, para quaisquer m, n inteiros positivos.

28) Verifique que se tem: $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \int_e^{e^x} \frac{1}{\log s} ds$, para qualquer $x > 0$.

29) Calcule a área dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5, \;\; y \geq -5x + 5 \;\text{ e }\; y \geq \log x\}$,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 10 \;\text{ e }\; |x| + |y| \geq 4\}$, **c)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$,

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \;\; y \geq x, \;\; y \geq x^3 \;\text{ e }\; y \leq 4x\}$.

30) Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de equação:

a) $y = 0$, $y = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$, $x = e$ **b)** $x = |y|$, $y = \dfrac{3}{x^2+2}$, $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$

c) $y = 5 - (2x+1)^2$, $y = \dfrac{4}{(2x+1)^2}$, com $x \in [0, 10]$

31) Calcule o comprimento

a) do arco de parábola $x = y^2$, $x \leq 1$ **b)** da curva $y = \operatorname{ch} x$, $-1 \leq x \leq 2$

c) da curva $y = \log(\cos x)$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$.

32) Determine o volume da parte do espaço gerada por uma rotação completa (de um ângulo de 2π) em torno do eixo dos xx da região do plano limitada pelas linhas de equação:

a) $y = x$, $y = \dfrac{x}{4}$, $y = x^3$ **b)** $y = 0$, $y = \dfrac{x}{e}$, $y = \log x$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, $y = \dfrac{1}{2}$

d) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ **e)** $y = x^2$, $y^2 = x$ **f)** $x = -y^2 + 3$, $y^2 = x$;

g) $y = 3^x$, $y = 1 - x^2$, $x = 1$, $x = 0$.

33) Calcule, em intervalos apropriados, a soma de cada uma das seguintes séries de funções:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}+1}$ **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} e^{-nx}$ **c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+2}{2^{n+1}} x^n$ **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n+1)x^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n-1}$ **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{nx}{2}}$ **g)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{2n}$

34) Desenvolva em série de potências, as funções que se seguem em relação aos pontos indicados e determine em cada caso o maior intervalo aberto onde o respectivo desenvolvimento é válido.

a) $\log(1+x)$, $x_0 = 0$ **b)** $\dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 0$ **c)** $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $x_0 = 0$ **d)** $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, $x_0 = 0$

e) $x^3 + \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ **f)** $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$, $x_0 = 0$ **g)** $(x+1)\operatorname{arctg}(x^2+2x+1)$, $x_0 = -1$

h) $\dfrac{4}{3x}$, $x_0 = 2$ **i)** $\dfrac{x}{2x+1}$, $x_0 = 0$ **j)** $\dfrac{3x}{2x-1}$, $x_0 = 1$ **k)** $x^2(1+x)^{3/2}$, $x_0 = 0$

l) $\sqrt{1-2x}$, $x_0 = 0$ **m)** $\operatorname{sen}^2 x$, $x_0 = 0$ **n)** $\log(1+x)$, $x_0 = 1$ **o)** $\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x_0 = 0$

p) $\dfrac{1}{(2-x)^2}$, $x_0 = 1$ **q)** $\dfrac{1}{x(x-2)}$, $x_0 = 0$ **r)** $\dfrac{1}{(1-x)^3}$, $x_0 = 0$ **s)** e^{1-x}, $x_0 = 0$

t) $\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $x_0 = 0$ **u)** $\dfrac{e^x - 1}{e^x}$, $x_0 = -1$ **v)** $\dfrac{x}{x+1}$, $x_0 = 1$ **w)** $\dfrac{x-1}{2x+1-x^2}$, $x_0 = 1$

x) $\log x$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$ **y)** $x^2\log(3+2x^2)$, $x_0 = 0$ **z)** $\dfrac{1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} 2x$, $x_0 = 0$