Ficha 5
Resolução dos exercícios de auto-avaliação

III.1 Primitive as seguintes funções

a) $P\dfrac{x^4-3x^3}{x^2-3x+2}$

Resolução:

$$P\left(\frac{x^4-3x^3}{x^2-3x+2}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 1^{\circ}\text{passo}}}{=}P\left(x^2-2+\frac{-6x+4}{x^2-3x+2}\right)=P\left(x^2-2\right)+P\frac{-6x+4}{x^2-3x+2}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\circ}\text{Passo}}}{=}\frac{x^3}{3}-2x+2\ln|x-1|-8\ln|x-2|+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}\left(x^4-3x^3\right)=4>2=\text{grau}\left(x^2-3x+2\right)$, então efectua-se a divisão do polinómio $\left(x^4-3x^3\right)$ pelo polinómio $\left(x^2-3x+2\right)$:

$$\begin{array}{rl|l}
x^4-3x^3 & & x^2-3x+2 \\ \cline{3-3}
-x^4+3x^3-2x^2 & & x^2-2 \\ \cline{1-1}
-2x^2 & & \\
2x^2-6x+4 & & \\ \hline
-6x+4 & &
\end{array}$$

Assim,

$$\frac{x^4-3x^3}{x^2-3x+2}=x^2-2+\underbrace{\frac{-6x+4}{x^2-3x+2}}_{\text{função própria}}$$

2º Passo: Determinação das raízes do denominador da função própria e respectiva factorização

- $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}\Leftrightarrow x=2 \vee x=1$

  As raízes do denominador são: $x=2$ (raiz simples) e $x=1$ (raiz simples).

- $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{-6x+4}{x^2-3x+2}=\frac{-6x+4}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{-6x+4}{x^2-3x+2}=\frac{-6x+4}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\Rightarrow -6x+4=A(x-2)+B(x-1)$$

- Para $x=1$ vem $-6\cdot 1+4=A(1-2)+B(1-1)\Leftrightarrow -2=-A\Leftrightarrow A=2$

- Para $x=2$ vem $-6\cdot 2+4=A(2-2)+B(2-1)\Leftrightarrow -8=B\Leftrightarrow B=-8$

Assim,

$$\frac{-6x+4}{x^2-3x+2}=\frac{2}{x-1}+\frac{-8}{x-2}.$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{-6x+4}{x^2-3x+2}=P\left(\frac{2}{x-1}+\frac{-8}{x-2}\right)=P\frac{2}{x-1}+P\frac{-8}{x-2}=2P\frac{1}{x-1}-8P\frac{1}{x-2}=2\ln|x-1|-8\ln|x-2|+C.$$

b) $P\dfrac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}$

Resolução:

$$P\left(\frac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=}-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-\ln|x+2|+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(9-x^3-5x)=3<4=\text{grau}((x-1)^3(x+2))$, então a função $\dfrac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}$ já é própria.

2º Passo: Determinação das raízes do denominador da função própria e respectiva factorização

As raízes do denominador são: $x=1$ (raiz tripla) e $x=-2$ (raiz simples).

O denominador já se encontra factorizado sendo: $(x-1)^3(x+2)$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A}{x+2}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A}{x+2}$$

$$\Rightarrow 9-x^3-5x=A_1(x+2)+A_2(x-1)(x+2)+A_3(x-1)^2(x+2)+A(x-1)^3$$

- Para $x=1$ vem $9-1^3-5\cdot 1=A_1(1+2)+A_2(1-1)(1+2)+A_3(1-1)^2(1+2)+A(1-1)^3 \Leftrightarrow 3=3A_1 \Leftrightarrow A_1=1$

- Para $x=-2$ vem $9-(-2)^3-5\cdot(-2)=A_1(-2+2)+A_2(-2-1)(-2+2)+A_3(-2-1)^2(-2+2)+A(-2-1)^3$

$$\Leftrightarrow 9+8+10=-27A \Leftrightarrow 27=-27A \Leftrightarrow A=-1$$

- Para $x=0$ vem $9-0-5\cdot 0=A_1(0+2)+A_2(0-1)(0+2)+A_3(0-1)^2(0+2)+A(0-1)^3$

$$\Leftrightarrow 9=2A_1-2A_2+2A_3-A \Rightarrow 9=2\cdot 1-2A_2+2A_3-(-1)$$
$$\Leftrightarrow 9=2-2A_2+2A_3+1 \Leftrightarrow 9-2-1=-2A_2+2A_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6=-2A_2+2A_3 \Leftrightarrow 3=-A_2+A_3 \Leftrightarrow A_3=3+A_2\ (*)$$

- Para $x=-1$ vem $9-(-1)-5\cdot(-1)=A_1(-1+2)+A_2(-1-1)(-1+2)+A_3((-1)-1)^2(-1+2)+A(-1-1)^3$

$$\Leftrightarrow 9+1+5=A_1 1+A_2(-2)1+A_3(-2)^2 1+A(-2)^3$$
$$\Leftrightarrow 15=A_1-2A_2+4A_3-8A \underset{\substack{A_1=1,\ A=-1,\\ A_3=3+A_2}}{\Leftrightarrow} 15=1-2A_2+4(3+A_2)-8(-1)$$
$$\Leftrightarrow 15=1-2A_2+12+4A_2+8 \Leftrightarrow 15-21=2A_2 \Leftrightarrow -6=2A_2 \Leftrightarrow A_2=-3$$

Substituindo o valor de $A_2=-3$ em $(*)$ vem que $A_3=3-3=0$.
Assim,

$$\frac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{-3}{(x-1)^2}+\frac{0}{x-1}+\frac{-1}{x+2}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{-3}{(x-1)^2}+\frac{-1}{x+2}.$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{9-x^3-5x}{(x-1)^3(x+2)}=P\left(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{-3}{(x-1)^2}+\frac{-1}{x+2}\right)=P\frac{1}{(x-1)^3}+P\frac{-3}{(x-1)^2}+P\frac{-1}{x+2}$$
$$=P\frac{1}{(x-1)^3}-3P\frac{1}{(x-1)^2}-P\frac{1}{x+2}=P(x-1)^{-3}-3P(x-1)^{-2}-P\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1}-3\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}-\ln|x+2|+C=\frac{(x-1)^{-2}}{-2}-3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-\ln|x+2|+C$$
$$=-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-\ln|x+2|+C$$

c) $P\dfrac{x^4}{1-x}$

Resolução:

$$P\left(\frac{x^4}{1-x}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 1^{\text{o}}\text{passo}}}{=} P\left(-x^3-x^2-x-1+\frac{1}{1-x}\right) = P\left(-x^3\right)+P\left(-x^2\right)+P\left(-x\right)+P\left(-1\right)+P\frac{1}{1-x}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=} -\frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{x^{2+1}}{2+1}-\frac{x^{1+1}}{1+1}-x-\ln\left|1-x\right|+C = -\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln\left|1-x\right|+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}\left(x^4\right)=4>1=\text{grau}\left(1-x\right)$, então efectua-se a divisão do polinómio $\left(x^4\right)$ pelo polinómio $\left(1-x\right)$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 & -x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4+x^3 & -x^3-x^2-x-1 \\ \cline{1-1}
x^3 & \\
-x^3+x^2 & \\ \cline{1-1}
x^2 & \\
-x^2+x & \\ \cline{1-1}
x & \\
-x+1 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Assim,

$$\frac{x^4}{1-x}=-x^3-x^2-x-1+\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{função própria}}.$$

2º Passo: Determinação das raízes do denominador da função própria e respectiva factorização

A raiz do denominador é $x=1$.

O denominador já se encontra factorizado sendo: $1-x$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{1}{1-x}=-P\frac{-1}{1-x}=-\ln\left|1-x\right|+C$$

d) $P\dfrac{3x+1}{x^3-x}$

Resolução:

$$P\left(\frac{3x+1}{x^3-x}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pelo} \\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=} -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\operatorname{grau}(3x+1) = 1 < 3 = \operatorname{grau}(x^3-x)$, então a função $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{3x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{3x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 3x+1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

- Para $x = 0$ vem $\quad 3\cdot 0+1 = A(0-1)(0+1) + B\cdot 0(0+1) + C\cdot 0(0-1) \Leftrightarrow 1 = -A \Leftrightarrow A = -1$
- Para $x = 1$ vem $\quad 3\cdot 1+1 = A(1-1)(1+1) + B\cdot 1(1+1) + C\cdot 1(1-1) \Leftrightarrow 4 = 2B \Leftrightarrow 2 = B \Leftrightarrow B = 2$
- Para $x = -1$ vem $\quad 3(-1)+1 = A(-1-1)(-1+1) + B(-1)(-1+1) + C(-1)(-1-1) \Leftrightarrow -2 = 2C \Leftrightarrow C = -1$

Assim,

$$\frac{3x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{3x+1}{x(x-1)(x+1)} = P\left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\right) = P\frac{-1}{x} + P\frac{2}{x-1} + P\frac{-1}{x+1}$$

$$= -P\frac{1}{x} + 2P\frac{1}{x-1} - P\frac{1}{x+1} = -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

e) $P\dfrac{x+1}{x^3(x-2)^2}$

Resolução:

$$P\left(\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{7}{16}\ln|x|-\frac{3}{8(x-2)}-\frac{7}{16}\ln|x-2|+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(x+1)=1<5=\text{grau}\left(x^3(x-2)^2\right)$, então a função $\dfrac{x+1}{x^3(x-2)^2}$ já é própria.

2º Passo: Determinação das raízes do denominador da função própria e respectiva factorização

As raízes do denominador são: $x=0(\text{raiz tripla})$ e $x=2(\text{raiz dupla})$.

O denominador já se encontra factorizado sendo: $x^3(x-2)^2$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{B_1}{(x-2)^2}+\frac{B_2}{x-2}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pelo método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{B_1}{(x-2)^2}+\frac{B_2}{x-2}$$

$$\Rightarrow x+1=A_1(x-2)^2+A_2(x-2)^2x+A_3(x-2)^2x^2+B_1x^3+B_2(x-2)x^3$$

$$\Leftrightarrow x+1=A_1(x^2-4x+4)+A_2(x^2-4x+4)x+A_3(x^2-4x+4)x^2+B_1x^3+B_2(x-2)x^3$$

$$\Leftrightarrow x+1=A_1(x^2-4x+4)+A_2(x^3-4x^2+4x)+A_3(x^4-4x^3+4x^2)+B_1x^3+B_2(x^4-2x^3)$$

$$\Leftrightarrow x+1=A_1x^2-4A_1x+4A_1+A_2x^3-4A_2x^2+4A_2x+A_3x^4-4A_3x^3+4A_3x^2+B_1x^3+B_2x^4-2B_2x^3$$

$$\Leftrightarrow x+1=(A_3+B_2)x^4+(A_2-4A_3+B_1-2B_2)x^3+(A_1-4A_2+4A_3)x^2+(-4A_1+4A_2)x+4A_1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A_3+B_2=0\\A_2-4A_3+B_1-2B_2=0\\A_1-4A_2+4A_3=0\\-4A_1+4A_2=1\\4A_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B_2=-\dfrac{7}{16}\\B_1=\dfrac{3}{8}\\A_3=\dfrac{7}{16}\\A_2=\dfrac{1}{2}\\A_1=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Assim,

$$\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{7}{16}}{x}+\frac{\frac{3}{8}}{(x-2)^2}+\frac{-\frac{7}{16}}{x-2}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{x+1}{x^3(x-2)^2}=P\left(\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{7}{16}}{x}+\frac{\frac{3}{8}}{(x-2)^2}+\frac{-\frac{7}{16}}{x-2}\right)=P\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+P\frac{\frac{1}{2}}{x^2}+P\frac{\frac{7}{16}}{x}+P\frac{\frac{3}{8}}{(x-2)^2}+P\frac{-\frac{7}{16}}{x-2}$$
$$=\frac{1}{4}P\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}P\frac{1}{x^2}+\frac{7}{16}P\frac{1}{x}+\frac{3}{8}P\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{7}{16}P\frac{1}{x-2}$$
$$=\frac{1}{4}Px^{-3}+\frac{1}{2}Px^{-2}+\frac{7}{16}\ln|x|+\frac{3}{8}P(x-2)^{-2}-\frac{7}{16}\ln|x-2|$$
$$=\frac{1}{4}\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+\frac{1}{2}\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{7}{16}\ln|x|+\frac{3}{8}\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1}-\frac{7}{16}\ln|x-2|+C$$
$$=\frac{1}{4}\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{1}{2}\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{7}{16}\ln|x|+\frac{3}{8}\frac{(x-2)^{-1}}{-1}-\frac{7}{16}\ln|x-2|+C$$
$$=-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{7}{16}\ln|x|-\frac{3}{8(x-2)}-\frac{7}{16}\ln|x-2|+C$$

f) $P\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$

Resolução:

$$P\left(\frac{x+1}{x^5+4x^3}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{16}\ln|x|+\frac{1}{32}\ln|x^2+4|-\frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(x+1)=1<5=\text{grau}(x^5+4x^3)$, então a função $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x^5+4x^3=x^3\underbrace{(x^2+4)}_{\text{não tem raízes reais}}$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{x+1}{x^3(x^2+4)}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+4}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pelo método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{x+1}{x^3\left(x^2+4\right)}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x+1=A_1\left(x^2+4\right)+A_2\left(x^2+4\right)x+A_3\left(x^2+4\right)x^2+\left(Mx+N\right)x^3$$

$$\Leftrightarrow x+1=A_1x^2+4A_1+A_2x^3+4A_2x+A_3x^4+4A_3x^2+Mx^4+Nx^3$$

$$\Leftrightarrow x+1=\left(A_3+M\right)x^4+\left(A_2+N\right)x^3+\left(4A_3+A_1\right)x^2+4A_2x+4A_1\Rightarrow\begin{cases}A_3+M=0\\A_2+N=0\\4A_3+A_1=0\\4A_2=1\\4A_1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M=\frac{1}{16}\\N=-\frac{1}{4}\\A_3=-\frac{1}{16}\\A_2=\frac{1}{4}\\A_1=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Assim,

$$\frac{x+1}{x^3\left(x^2+4\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{-\frac{1}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{16}x-\frac{1}{4}}{x^2+4}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{x+1}{x^3\left(x^2+4\right)}=P\left(\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{-\frac{1}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{16}x-\frac{1}{4}}{x^2+4}\right)=P\frac{\frac{1}{4}}{x^3}+P\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+P\frac{\frac{-1}{16}}{x}+P\frac{\frac{1}{16}x-\frac{1}{4}}{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{4}P\frac{1}{x^3}+\frac{1}{4}P\frac{1}{x^2}-\frac{1}{16}P\frac{1}{x}+\frac{1}{16}P\frac{x-4}{x^2+4}$$

$$\underset{(*)}{=}\frac{1}{4}Px^{-3}+\frac{1}{4}Px^{-2}-\frac{1}{16}\ln|x|+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{1}{4}\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{16}\ln|x|+\frac{1}{32}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{4x}-\frac{1}{16}\ln|x|+\frac{1}{32}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

Cálculos auxiliares: $(*)$

$$P\frac{x-4}{x^2+4}=P\left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{-4}{x^2+4}\right)=P\frac{x}{x^2+4}+P\frac{-4}{x^2+4}=\frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+4}-4P\frac{1}{4\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-P\frac{1}{\frac{x^2}{2^2}+1}+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-2P\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|-2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

III.2 Calcule a primitiva $P\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right)$

Resolução:

Na função que se pretende primitivar existem vários radicais com diferentes radicandos.

Assim, dividindo ambos os termos da fracção por um dos radicais vem:

$$P\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right)=P\left(\frac{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}}\right)=P\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right).$$

A função a primitivar $\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$ é da forma $R(x,x^{\frac{p}{q}},x^{\frac{r}{s}},...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x=t^m\text{, onde } m=\text{m.m.c}(q,s,...).$$

Efectuando a substituição: $\frac{x-1}{x+1}=t^2 \Rightarrow x-1=(x+1)t^2 \Leftrightarrow x-1=xt^2+t^2 \Leftrightarrow x-xt^2=t^2+1$

$$\Leftrightarrow x\left(1-t^2\right)=t^2+1 \Leftrightarrow x=\underbrace{\frac{1+t^2}{1-t^2}}_{g(t)}$$

Tem-se

- $$g'(t)=\frac{\left(1+t^2\right)'\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)\left(1-t^2\right)'}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{(2t)\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{(2t)\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}$$
$$=\frac{2t-2t^3+2t+2t^3}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}$$
- $$\frac{x-1}{x+1}=t^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=t \Leftrightarrow t=\underbrace{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}_{g^{-1}(x)}$$

Assim,

$$\underbrace{P\left(\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right)=}_{\substack{\text{Usando o método de primitivação}\\ \text{por substituição: } Pf(x)=P\left[f(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}\\ \text{em que } f(g(t))g'(t)\underset{(*)}{=}\frac{4t}{(1-t)^3(1+t)}}}\left[P\left(\frac{4t}{(1-t)^3(1+t)}\right)\right]_{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\left[4P\left(\frac{t}{(1-t)^3(1+t)}\right)\right]_{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$\underset{(**)}{=}\left[4\left(\frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{4(1-t)}+\frac{1}{8}\ln|1-t|-\frac{1}{8}\ln|t+1|+A\right)\right]_{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$=\left[\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\ln|1-t|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+4A\right]_{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$\underset{\substack{\text{Fazendo}\\ C=4A}}{=}\left[\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\ln|1-t|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C\right]_{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2}-\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}+\frac{1}{2}\ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1\right|+C$$

Cálculos auxiliares: (*)

$$f\left(g(t)\right)g'(t)=f\left(t^2\right)g'(t)=\frac{1+\sqrt{t^2}}{1-\sqrt{t^2}}\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1+t}{1-t}\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1+t}{1-t}\frac{4t}{\left((1-t)(1+t)\right)^2}$$

$$=\frac{1+t}{1-t}\frac{4t}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{4t}{(1-t)^3(1+t)}$$

Cálculos auxiliares: (**)

Primitivação da função racional:

$$P\left(\frac{t}{(1-t)^3(1+t)}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^{\text{o}}\text{passo}}}{=}\frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{4(1-t)}+\frac{1}{8}\ln|1-t|-\frac{1}{8}\ln|t+1|+A$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(t)=1<4=\text{grau}\left((1-t)^3(1+t)\right)$, então a função $\dfrac{t}{(1-t)^3(1+t)}$ já é própria.

2º Passo: Determinação das raízes do denominador da função própria e respectiva factorização

As raízes do denominador são: $t=-1$ (raiz simples) e $t=1$ (raiz tripla).

O denominador já se encontra factorizado sendo: $(1-t)^3(1+t)$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{t}{(1-t)^3(1+t)}=\frac{A_1}{(1-t)^3}+\frac{A_2}{(1-t)^2}+\frac{A_3}{1-t}+\frac{B}{t+1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pelo método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{t}{(1-t)^3(1+t)}=\frac{A_1}{(1-t)^3}+\frac{A_2}{(1-t)^2}+\frac{A_3}{1-t}+\frac{B}{t+1}\Rightarrow t=A_1(1+t)+A_2(1-t)(1+t)+A_3(1-t)^2(1+t)+B(1-t)^3$$

$$\Leftrightarrow t=A_1(1+t)+A_2(1-t)(1+t)+A_3\left(1-2t+t^2\right)(1+t)+B(1-t)\left(1-2t+t^2\right)$$

$$\Leftrightarrow t=A_1(1+t)+A_2\left(1-t^2\right)+A_3\left(1-t-t^2+t^3\right)+B\left(1-3t+3t^2-t^3\right)$$

$$\Leftrightarrow t=A_1+A_1t+A_2-A_2t^2+A_3-A_3t-A_3t^2+A_3t^3+B-3Bt+3Bt^2-Bt^3$$

$$\Leftrightarrow t=(A_3-B)t^3+(-A_2-A_3+3B)t^2+(A_1-A_3-3B)t+A_1+A_2+A_3+B$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_3 - B = 0 \\ -A_2 - A_3 + 3B = 0 \\ A_1 - A_3 - 3B = 1 \\ A_1 + A_2 + A_3 + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = B \\ -A_2 - B + 3B = 0 \\ A_1 - B - 3B = 1 \\ A_1 + A_2 + B + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ A_2 = 2B \\ A_1 - 4B = 1 \\ A_1 = -4B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ A_2 = 2B \\ -4B - 4B = 1 \\ A_1 = -4B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ A_2 = 2B \\ -8B = 1 \\ \overline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = -\frac{1}{8} \\ A_2 = 2\left(-\frac{1}{8}\right) \\ B = -\frac{1}{8} \\ A_1 = -4\left(-\frac{1}{8}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = -\frac{1}{8} \\ A_2 = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{8} \\ A_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{t}{(1-t)^3(1+t)} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{(1-t)^2} + \frac{-\frac{1}{8}}{1-t} + \frac{-\frac{1}{8}}{t+1}.$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{t}{(1-t)^3(1+t)} = P\left(\frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{(1-t)^2} + \frac{-\frac{1}{8}}{1-t} + \frac{-\frac{1}{8}}{t+1}\right) = P\frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^3} + P\frac{-\frac{1}{4}}{(1-t)^2} + P\frac{-\frac{1}{8}}{1-t} + P\frac{-\frac{1}{8}}{t+1}$$

$$= \frac{1}{2}P\frac{1}{(1-t)^3} - \frac{1}{4}P\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{8}P\frac{1}{1-t} - \frac{1}{8}P\frac{1}{t+1}$$

$$= \frac{1}{2}(-1)P\left((-1)(1-t)^{-3}\right) - \frac{1}{4}(-1)P\left((-1)(1-t)^{-2}\right) - \frac{1}{8}(-1)P\frac{-1}{1-t} - \frac{1}{8}\ln|t+1|$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-t)^{-3+1}}{-3+1} + \frac{1}{4}\frac{(1-t)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{1}{8}\ln|1-t| - \frac{1}{8}\ln|t+1| + A$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-t)^{-2}}{-2} + \frac{1}{4}\frac{(1-t)^{-1}}{-1} + \frac{1}{8}\ln|1-t| - \frac{1}{8}\ln|t+1| + A$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{8}\ln|1-t| - \frac{1}{8}\ln|t+1| + A$$