CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEE, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{o}}$ TESTE (Versão A)

13 /Novembro /2010 Duração: 1h30m

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-3x^2}{x} \le 1 - 3x \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < e^x \le 5\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \le 3\}$$

a) Identifique os conjuntos A, B e C, escrevendo-os sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap C)$ e $\sup(A \cap C \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.
c) Decida, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:
(i) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em A é não majorada.
(ii) Toda a sucessão estritamente decrescente de termos em C é convergente.
(iii) Toda a sucessão de termos em B tem um sublimite.
(iv) Se (x_n) é sucessão de termos em C, então $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 0$.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{n+1} & \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Mostre por indução que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \le a_n \le 2$$

e conclua que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \le a_n \le 1 + \frac{2}{n}.$$

b) Justifique que a sucessão (a_n) é convergente e indique o valor do seu limite.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{2n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 - 3n^2}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{e^n + 3^n}{n+3}}$$

2. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos(1/x)}{x^3 + \pi}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

III

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ \\ \frac{x-2}{1+e^{-x}} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estude o sinal de f e determine os seus zeros.
b) Justificando, diga se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 2.
c) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
d) Determine o conjunto $f([2, +\infty[)$. Justifique a resposta.

2. Seja g uma função definida em $\mathbb{R}$ que verifica

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad g(1 + \cos \frac{1}{n}) = [(-1)^n + 1] \arctan n.$$

A função g é contínua no ponto $x = 2$? Justifique a sua resposta.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEE, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{0}}$ TESTE (Versão B)

13 /Novembro /2010 Duração: 1h30m

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-2x^2}{x} \leq 1-2x\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \log x < 2\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq 2\}$$

a) Identifique os conjuntos A, B e C, escrevendo-os sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\sup B$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap C)$ e $\sup(A \cap C \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
c) Decida, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:
(i) Toda a sucessão estritamente decrescente de termos em A é não minorada.
(ii) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em C é convergente.
(iii) Toda a sucessão de termos em B tem um sublimite.
(iv) Se (x_n) é sucessão de termos em C, então $\lim \frac{x_n}{1+n} = 0$.

2. Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 1 + \dfrac{b_n}{2n} & \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Mostre por indução que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq b_n \leq 2$$

e conclua que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq b_n \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

b) Justifique que a sucessão (b_n) é convergente e indique o valor do seu limite.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{3n^2 - \sqrt{n} + 1}{4 - 2n^2}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{4^n + \pi^n}{n+2}}$$

2. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x^2 + \pi}, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sin(x^2-4)}$$

III

1. Considere a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^x+2}{x-2} & \text{se } x<2 \\ \\ \frac{x^2-4}{x} & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

a) Estude o sinal de f e determine os seus zeros.
b) Justificando, diga se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 2.
c) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
d) Determine o conjunto $f(]-\infty,2[)$. Justifique a resposta.

2. Seja φ uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad \varphi(1-\sin\frac{1}{n})=(-1)^n\arctan\ n.$$

A função φ é contínua no ponto $x=1$? Justifique a sua resposta.