AULA 09
Funções reais de variável real — Diferenciabilidade

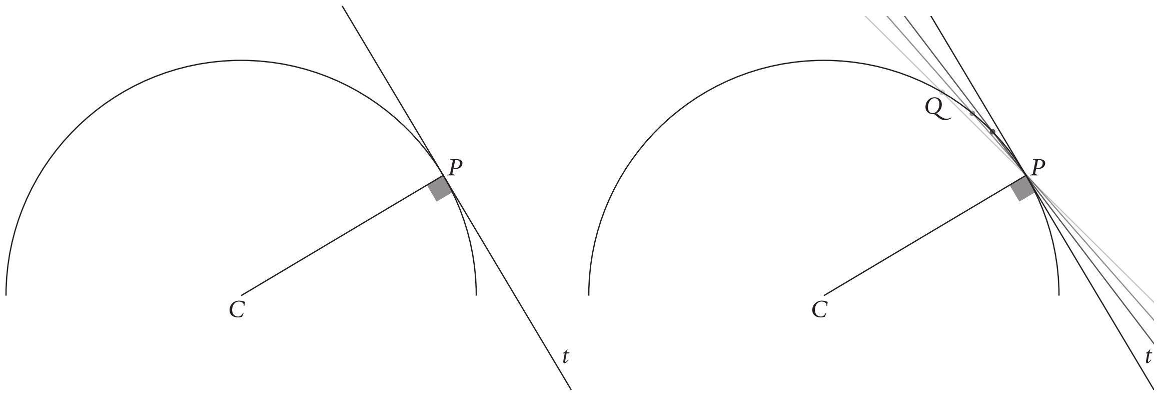
9.1 Considerações introdutórias

Historicamente a noção de derivada está associada à procura de um método que permitisse descrever a tangente a uma curva num dado ponto. Descartes e Fermat procuraram neste conceito uma forma de caracterizar os pontos extremos de uma função ou o ângulo de intersecção de duas curvas, por exemplo.

De modo a motivar a mossa abordagem à noção de tangente a uma curva num dos seus pontos consideremos um caso muito simples, envolvendo uma circunferência. No caso da circunferência a tangente é fácil de descrever. Para obter a recta tangente a um ponto P da circunferência basta considerar a perpendicular t ao raio que passa por P (*ver* fig 9.1(a)). mas esta caracterização serve particularmente o caso da circunferência e é particularmente difícil, senão mesmo impossível, de adaptar ao caso geral — no caso de uma curva arbitrária não dispomos de uma noção correspondente à de «centro da circunferência».

Felizmente, o mesmo exemplo — o da circunferência — mostra-nos que podemos adoptar uma caracterização alternativa, essa sim fácil de adaptar ao caso geral. Considerando a figura 9.2(b) constata-se que uma maneira de aproximar a tangente (pelo menos o caso da circunferência) consiste em considerar a corda determinada por P e por um segundo ponto Q. Fazendo Q tender para P sobre a circunferência, as cordas correspondentes aproximam a tangente.

Usaremos esta segunda caracterização da tangente para considerar o caso geral. No caso de uma curva em geral, pelo menos no caso em que a curva em questão possui uma equação da forma $y = f(x)$ para uma dada função f, a descrição de uma corda que passa por dois pontos da curva pode ser feita com recurso a informação contida na própria curva. Assim, dados dois pontos P e Q da curva dada por uma equação da forma $y = f(x)$, esses pontos são



(a) Tangente (determinada usando o centro)　　(b) Tangente aproximada por cordas

Figura 9.1

da forma $(a, f(a)$ e $b, f(b)$. A recta que passa por estes dois pontos tem declive m dado pela relação $m = (f(b) - f(a))/(b-a)$. Assim, generalizando o caso da circunferência, a tangente à curva $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ tem como declive o valor do limite,

$$\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

O declive da tangente num ponto $(a, f(a))$ de uma curva de equação $y = f(x)$, calculado através da relação anterior, denomina-se de *derivada de f em a* e denota-se por $f'(a)$.

No entanto o cálculo de derivadas, iniciado de forma sistemática por Newton (1643–1727) e Leibniz (1646–1716) não utilizava directamente a noção de limite, que só passaria a ser considerada de forma sistemática depois de Cauchy (1789–1857).

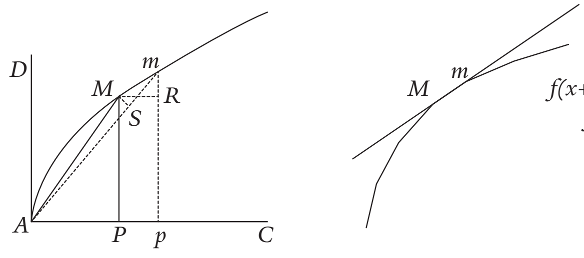
Os percursores do «Cálculo diferencial» recorreram a um outro tipo de intuição: a noção de *infinitesimal* ou *número infinitamente pequeno*. Recorrendo a esta intuição, uma curva podia ser vista como uma «sequência» de segmentos de recta de comprimento infinitesimal (*ver* fig. 9.3(a)). Deste modo, ao nível infinitesimal uma corda e a tangente coincidem.

Esta intuição justifica a utilização do denominado *triângulo fundamental* (*ver* fig. 9.3(b)). Deste ponto de vista o declive da tangente (ou seja, a derivada) pode ser calcula como o declive de uma corda determinada por dois pontos infinitesimalmente próximos. Não se trata assim de calcular um limite mas um «verdadeiro» quociente, ou seja, o quociente

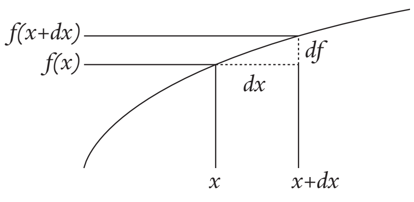
$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx)}{x+dx-x} = \frac{f(x+dx)}{dx},$$

onde $df = f(x+dx) - f(x)$ (ou seja $f(x+dx) = f(x) + df$) e denotamos por dx uma quantidade *infinitesimal*. Este tipo de intuição geométrica não possuía à época uma fundamentação rigorosa que a justificasse. Em todo o caso estamos perante uma intuição fundamental que gerou inúmeros resultados de importância crucial para o subsequente desenvolvimento da Matemática. Em certos aspectos tratava-se mesmo de uma intuição controversa. Para lidar com as quantidades infinitesimais, este tipo de cálculo considerava implicitamente certas regras, regras essas muitas vezes definidas de modo vago. Por exemplo, o produto de dois infinitésimos $du\,dv$ é negligenciável (infinitamente pequeno) relativamente a um produto da forma $u\ dv$ ou $v\ du$ ou mesmo u ou v. Ou seja estas quantidades, em certas circunstâncias, podem ser vistas como sendo nulas. Do mesmo modo dv/u pode ser visto como sendo infinitamente pequeno quando comparado com dv.

Estas considerações permitem calcular derivadas (declives de tangentes) de forma relativamente simples. Se considerarmos como exemplo a função $f(x) = x^2$ temos o seguinte:



(a) Adaptado de L'Hospital (1696), *Analyse des infiniment petits*



(b) Triângulo fundamental

Figura 9.2

$$df = f(x+dx) - f(x) = (x+dx)^2 - x^2 = (x+dx)^2 - x^2$$
$$= x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2 = 2xdx + dx^2 = 2xdx,$$

pois, de acordo com uma das regras acima mencionadas, dx^2 pode desprezar-se relativamente a $2xdx$. Tem-se assim que $df/dx = 2x$, ou seja, a derivada da função $f(x) = x^2$ é a função $f'(x) = 2x$.

Um dos processos que permite obter funções mais complexas, envolve a combinação de funções mais simples recorrendo às operações algébricas. Como poderiam Newton e Leibniz calcular as derivadas de somas, produtos, quocientes, etc.?

O método que descrevemos permite responder facilmente a estas questões. Quanto à soma tem-se,

$$d(f+g) = (f+g)(x+dx) - (f+g)(x) = f(x+dx) + g(x+dx) - f(x) - g(x) =$$
$$= [f(x+dx) - f(x)] + [g(x+dx) - g(x)] = df + dg,$$

pelo que $d(f+g)/dx = (df/dx) + (dg/dx)$, ou seja a derivada da soma coincide com a soma das derivadas.

No que respeita ao produto, as considerações são semelhantes:

$$d(fg) = (fg)(x+dx) - (fg)(x) = f(x+dx)g(x+dx) - f(x)g(x) =$$
$$(f(x)+df)(g(x)+dg) - f(x)g(x) = f(x)\cdot dg + df\cdot g(x) + df\,dg$$
$$= f(x)\cdot dg + df\cdot g(x),$$

uma vez que, pelas regras mencionadas, a quantidade $df\,dg$ pode ser negligenciada. Assim a derivada do produto pode calcular-se de acordo com a fórmula:

$$d(f \times g))/dx = (df/dx) \times g(x) + f(x) \times (dg/dx).$$

Analogamente para o caso do quociente:

$$d(f/g) = (f/g)(x+dx) - (f/g)(x) = \frac{f(x+dx)}{g(x+dx)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+df}{g(x)+dg} - \frac{f(x)}{g(x)} =$$
$$= \frac{df\cdot g(x) - f(x)\cdot dg}{g^2(x) + g(x)\cdot dg} = \frac{df\cdot g(x) - f(x)\cdot dg}{g^2(x)} \cdot \frac{1}{1 + dg/g(x)} = \frac{df\cdot g(x) - f(x)\cdot dg}{g^2(x)},$$

recorrendo uma vez mais às regras que descrevemos anteriormente.

Desta forma obtemos a regra de derivação do quociente:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx}g - f\frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

Usando este tipo de argumentos, é possível calcular derivadas de funções compostas, funções inversas e das funções elementares. Mas não iremos seguir este caminho que só foi aqui ilustrado devido ao seu inegável interesse histórico e pelo inegável potencial heurístico que a abordagem através de infinitesimais encerra em si mesma.

9.2 Derivadas e derivadas laterais

Definição 9.1.— *Diremos que uma função f é diferenciável num ponto α do respectivo domínio se existir um número real β satisfazendo:*

$$\beta = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha},$$

β diz-se a derivada de f em α e escreve-se $f'(\alpha) = \beta$.

Por vezes é conveniente considerar aquelas que se denominam de derivadas laterais. Estas são obtidas do quociente acima considerando limites laterais. Assim, diremos que uma função f é diferenciável à direita (*resp.* à esquerda) num ponto α do seu domínio se, o limite $\lim_{x\to\alpha^+}(f(x) - f(\alpha))/(x - \alpha)$ é finito (*resp.* se o limite $\lim_{x\to\alpha^+}(f(x) - f(\alpha))/(x - \alpha)$ é finito), caso em que se designa de derivada à direira em α (*resp.* derivada à esquerda em α). Quando existe, as derivadas à direita e à esquerda de f em α denotam-se por $f(\alpha^+)$ e $f(\alpha^-)$, respectivamente.

Quando uma função f é diferenciável num ponto α do seu domínio , a recta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(\alpha, f(\alpha))$ tem como equação:

$$f'(\alpha) = \frac{y - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Lema 9.1.— *Se f é diferenciável num ponto α do seu domínio então f é contínua nesse ponto.*

Dem.— A demonstração é simples. Tem-se:

$$|f(x) - f(\alpha)| = \left|\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right| \cdot |x - \alpha|.$$

Passando ao limite quando $x \to \alpha$ obtemos,

$$\lim_{x\to\alpha} |f(x) - f(\alpha)| = |f'(\alpha)| \cdot 0 = 0.$$

Pelo que f é contínua em α. ∎

O recíproco deste resultado é falso. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ no entanto não tem derivada nesse ponto.

Retomando a definição de derivada num ponto, recordamos que a definição corresponde a uma extrapolação de um caso particular — o caso de uma circunferência. Pode colocar-se a questão da legitimidade dessa extrapolação. Ou seja em que sentido corresponde este limite ao declive da recta que designamos de *recta tangente*? O resultado seguinte traz luz sobre esta questão.

Lema 9.2.— *Suponhamos que f é diferenciável. De todas as rectas que passam pelo ponto $(\alpha, (\alpha))$, aquela que melhor aproxima a função, numa vizinhança de α, é a que tem declive igual à derivada.*

Dem.— Considere-se uma recta que passa no ponto de coordenadas $(\alpha, f(\alpha))$. A equação dessa recta é $y = f(\alpha) + m(x - \alpha)$, sendo m o respectivo declive. A diferença entre a recta e a função é assim, $f(x) - f(\alpha) - m(x - \alpha)$. Vamos agora ver que só existe um caso em que esta diferença tende para zero (quando $x \to \alpha$) mais rapidamente que a diferença $x - \alpha$. Esse caso corresponde a tomar $m = f'(\alpha)$. Tem-se,

$$\left|\frac{f(x) - f(\alpha) - m(x - \alpha)}{x - \alpha}\right| = \left|\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} - m\right|$$

Quando $x \to \alpha$ o lado direito tende para $|f'(\alpha) - m|$ que só é zero se $m = f'(\alpha)$. ∎

A recta tangente (com declive igual ao valor da derivada) corresponde assim a uma função linear, i.e., um polinómio de grau 1, que entre as funções deste tipo é a que melhor aproxima a função. Deduz-se facilmente das considerações anteriores que se $y = t(x)$ é a recta tangente a f num ponto de abcissa α então $f(x) = t(x) + o(x)$, onde $o(x)$ é uma função que satisfaz: $\lim_{x\to\alpha} o(x)/(x-\alpha) = 0$. Dito de outro modo, se f é diferenciável num ponto α então,

$$f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)[f'(\alpha) + u(x)],$$

onde $u(x)$ é uma função que tende para zero quando $x \to \alpha$.

9.3 Álgebra de funções composição de funções e diferenciabilidade

Teorema 9.1.— *Suponhamos que f e g são diferenciáveis num ponto a. Temos,*

1. *qualquer combinação linear de f e g é diferenciável em a e, tem-se que $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$;*
2. *o produto fg é diferenciável em a tendo-se $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
3. *se $g'(a) \neq 0$ então f/g é diferenciável em a e tem-se*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Dem.— ■

Outra operação importante é a de composição de funções. Esta operação preserva a diferenciabilidade de funções nas condições exactas do teorema seguinte.

Teorema 9.2.— *Se f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável num ponto $\alpha \in [a,b]$, se g é diferenciável em $f(\alpha)$ então a função $h = g \circ f$ é diferenciável em α e tem-se $h'(\alpha) = g'(f(\alpha))f'(\alpha)$.*

Dem.— Sabemos que,

$$f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)(f'(\alpha) + u(x))$$

$$g(y) - g(f(\alpha)) = (y - f(\alpha))(g'(f(\alpha)) + w(y))$$

onde $u(x) \to 0$ quando $x \to \alpha$ e $w(y) \to 0$ quando $y \to f(\alpha)$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} h(x) - h(\alpha) = g(f(x)) - g(f(\alpha)) &= (f(x) - f(\alpha))(g'(f(\alpha)) + w(f(x))) = \\ &= (x-\alpha)(f'(\alpha) + u(x))(g'(f(\alpha)) + w(f(x))) \end{aligned}$$

dividindo ambos os membros por $x - \alpha$ obtemos,

$$\frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} = (f'(\alpha) + u(x))(g'(f(\alpha)) + w(f(x)))$$

passando ao limite quando $x \to \alpha$, tem-se que $u(x) \to 0$ e, como f é contínua $f(x) \to f(\alpha)$. Assim $w(f(x)) \to 0$. Tudo isto implica que,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x\to\alpha} (f'(\alpha) + u(x))(g'(f(\alpha)) + w(f(x))) = g'(f(\alpha))f'(\alpha),$$

como se pretendia. ■

Observação 1.— Vale a pena observar que usando o «formalismo» de Newton-Leibniz[1], este resultado é muito fácil de estabelecer: se $w = u(v(x))$,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dx},$$

a igualdade é legitimada pelas regras algébricas já que neste formalismo, as derivadas são «verdadeiros» quocientes.

Observação 2.— No mesmo formalismo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

9.4 Extremos locais e teoremas do valor médio

Dada uma função f definida num conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se $a \in A$ dizemos que f tem um *máximo local* no ponto de abcissa a se existe uma vizinhança de a, digamos $V_\epsilon(a)$ tal que

$$(\forall x \in V_\epsilon(a) \cap A) f(x) \leq f(a).$$

A noção de *mínimo local* é definida analogamente substituindo «$\leq$» por «$\geq$» acima.

Pontos de qualquer um dos tipos que acabámos de descrever dizem-se *extremos locais*. Encontrar este tipo de extremos é uma questão da maior relevância e, a noção de derivada providencia uma forma muito eficiente de os encontrar.

Teorema 9.3.— *Suponhamos que f está definida em $[a, b]$. Se f tem um extremo local no ponto $\alpha \in]a, b[$ e se $f'(\alpha)$ existe então, $f'(\alpha) = 0$.*

Dem.— Suponhamos que α corresponde a um máximo local (o caso do mínimo local pode ser abordado de forma análoga). Fixemos uma vizinhança de α, digamos $V_\epsilon(\alpha) \subseteq]a, b[$. Considerando a razão incremental,

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

temos que para valores de $x < \alpha$ se tem que o denominador é negativo enquanto que o numerador é ≥ 0 (porque em α se tem um máximo local). Assim $\phi(x) \geq 0$ à esquerda de α. Idênticas considerações mostram que à direita de α se tem $\phi(x) \leq 0$. Consequentemente, $f'(\alpha^-) \geq 0$ e $f'(\alpha^+) \leq 0$. Como $f'(\alpha) = f'(\alpha^+) = f'(\alpha^-)$ tem-se necessariamente que $f'(\alpha) = 0$. ∎

De acordo com o teorema anterior, para encontrar os extremos locais de uma função diferenciável devemos considerar os pontos onde a derivada se anula—os extremos locais, se existirem encontram-se entre estes pontos. Isto não significa, porém, que os zeros da derivada correspondam a extremos locais. Se considerarmos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, reconhece-se que a derivada, que é definida por $f'(x) = 3x^2$ se anula apenas para $x = 0$. Mas a função x^3 é estritamente crescente, logo não possui extremos locais.

1. De facto a notação é mais leibniziana que newtoniana, mas a intuição subjacente é comum.

Teorema 9.4 (do valor médio de Cauchy).— *Suponhamos que* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas em em* $[a, b]$ *e diferenciáveis em* $]a, b[$*. Nestas condições existe* $\alpha \in]a, b[$ *tal que,*

$$[f(b) - f(a)]g'(\alpha) = [g(b) - g(a)]f'(\alpha).$$

Dem.— Nas condições do enunciado a função $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Além disso tem-se que $h(a) = h(b)$. Tem-se então que ou h é constante, ou então tem um máximo ou mínimo em $]a, b[$ (note-se que f é contínua e $[a, b]$ é compacto). No primeiro caso a derivada de h anula-se em qualquer $\alpha \in]a, b[$, i.e.,

$$h'(\alpha) = [f(b) - f(a)]g'(\alpha) - [g(b) - g(a)]f'(\alpha) = 0,$$

pelo que pode considerar-se um α arbitrário em $]a, b[$. No segundo caso se α é um máximo de h (ou mínimo) pelo teorema anterior tem-se que $h'(\alpha) = 0$, uma vez mais, isto é equivalente a dizer que $[f(b) - f(a)]g'(\alpha) - [g(b) - g(a)]f'(\alpha)$. ■

Um caso particular to teorema do valor médio de Cauchy, acima mencionado é o teorema do valor médio de Lagrange, que é interessante entre outros aspectos pelo seu significado geométrico.

Teorema 9.5 (do valor médio de Lagrange).— *Suponhamos que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em em* $[a, b]$ *e diferenciável em* $]a, b[$*. Nestas condições existe* $\alpha \in]a, b[$ *tal que,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$$

Observe-se que o quociente acima representa o declive da corda que passa pelos pontos do gráfico de f de coordenadas $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, respectivamente. Por outro lado $f'(\alpha)$ é o declive da recta tangente ao ponto do gráfico de f de coordenadas $(\alpha, f(\alpha))$. O teorema afirma assim, do ponto de vista geométrico que dada a corda existe um ponto entre os pontos de abcissas a e b, onde a tangente é paralela a essa corda.

Dem.— Basta considerar o resultado anterior e o caso particular $g(x) = x$. ■

Uma consequência importante deste resultado é relação entre a monotonia de uma função num intervalo e o sinal da respectiva derivada.

Teorema 9.6.— *Suponhamos que* f *é diferenciável em* $]a, b[$*. Temos,*

1. *Se* $f'(x) \geq 0$ *para todo o* $x \in]a, b[$ *então* f *é crescente em* $]a, b[$.
2. *Se* $f'(x) \leq 0$ *para todo o* $x \in]a, b[$ *então* f *é decrescente em* $]a, b[$.
3. *Se* $f'(x) = 0$ *para todo o* $x \in]a, b[$ *então* f *é constante em* $]a, b[$.

Dem.— ■

9.5 Continuidade das funções derivada

A derivada de uma função diferenciável não é necessariamente uma função contínua, e.g., a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas pode verificar-se que a derivada não é contínua em $x = 0$.

Apesar disto as derivadas partilham com as funções contínuas, algumas propriedades interessantes. Por exemplo, as derivadas possuem a propriedade do valor intermédio.

Teorema 9.7.— *Suponhamos que f é diferenciável em $[a.b]$ e que $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (ou que, $f'(a) > \lambda > f'(b)$). Nestas condições existe $\alpha \in]a, b[$ tal que $f'(\alpha) = \lambda$.*

Dem.— Suponhamos que se tem $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (a outra possibilidade pode ser analisada de modo inteiramente análogo). Consideremos a função $h(x) = f(x) - \lambda x$ que é diferenciável em $[a, b]$. Tem-se que $h'(a) < 0$ e $h'(b) > 0$. Assim, numa vizinhança de a tem-se $h(x) > h(a)$. Do mesmo modo, numa vizinhança de b tem-se $h(x) > h(b)$. Deste modo o máximo de h (que existe porque h é contínua e $[a, b]$ é compacto) corre no interior do intervalo $]a, b[$. Neste ponto, digamos α tem-se $h'(\alpha) = 0$ mas, isto é equivalente a dizer que $f'(\alpha) = \lambda$. ■

Lema 9.3.— *Se f é difererenciável em $[a, b]$ então f' não pode apresentar descontinuidades do primeiro tipo.*

9.6 A regra de Cauchy

O resultado seguinte, conhecido sob a designação de «regra de Cauchy» é particularmente útil no cálculo de limites, mais precisamente nos casos que correspondem a certos tipos de indeterminação.

Teorema 9.8.— *Suponhamos que as funções f, g são diferenciáveis em $]a, b[$ onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; suponhamos ainda que $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a, b[$. Supondo que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.$$

e que $f(x), g(x) \to 0$ ou $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$ então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Idênticas considerações valem quando se considera o limite quando x tende para b.

Dem.— ■

É muito importante observar as hipóteses e conclusões do teorema anterior para não tirar conclusões erradas. De facto a regra de Cuachy não pode ser utilizada como um mero dispositivo de simplificação do cálculo. Por exemplo se tentarmos usar a regra para calcular o limite $\lim_{x\to 0}(x+1)/x$, obtemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1} = 1.$$

usando a regra concluiríamos que $\lim_{x\to 0}(x+1)/x = 1$. No entanto este limite não existe (verifique!). Acontece que não é legítimo aplicar a regra de Cauchy, uma vez que embora o denominador da fracção tenda para zero, o mesmo não sucede com o numerador.

Como segundo exemplo considere-se o limite,

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$$

é fácil verificar que se encontram reunidas para a aplicação da regra de Cauchy. Tem-se então que,

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(2x+\sin x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1-\cos x}{2+cosx}$$

este limite não existe (verifique!). Mas isto não significa que o limite original não exista, de facto esse limite é 1/2 (porquê?).