NOTA: $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ < 3 → Crescente

→ $< 1 + 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1-\frac{1}{2}\right)^n < 1+2 = 3$ → <1

! RELEMBRAR

SUCESSÕES

- Crescente, se $u_n \leq u_{n+1}$ — estritamente, se $u_n < u_{n+1}$
- decrescente, se $u_n \geq u_{n+1}$ — estritamente, se $u_n > u_{n+1}$
- majorada, se $\exists M \in \mathbb{R}: u_n < M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- minorada, se $\exists m \in \mathbb{R}: u_n > m \ \forall n \in \mathbb{N}$
- monótona, se for crescente ou decrescente (ou estritamente)
- limitada, se for majorada e minorada — $\exists L > 0 \ \forall n \ |u_n| \leq L$

D

NOTA

$\boxed{\operatorname{sen}(x) \to 0}$

- Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.
- Qualquer sucessão convergente é limitada.

a_n converge $\lim a_n \neq 0$ → $\frac{1}{a_n}$ converge | $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$

$a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$ e u_n limitada → $|a_n \cdot u_n| \to 0$

SÉRIES

Se o termo geral tende para 0 não se conclui nada

- Sucessão somável - série convergente ⇒ sucessão das somas parciais

Série converge sse a sucessão S_n é convergente

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n$ → Soma dos n primeiros termos da soma

↳ termo geral → $\lim_{n\to\infty} a_k = 0$

$a_k \to 0$ quando $S \to \infty$

$S = \lim S_n$ Soma da série

- Caso contrário diz-se divergente. se S_n é divergente → se $\lim_{n\to\infty} a_k \neq 0$

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \to 0$

↳ converge

- Séries Geométricas de primeiro termo a e razão r

Se $|R| < 1$, $S = \frac{1^\circ \text{termo}}{1-R}$

Converge ⟺ $|R| < 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Teorema:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \quad \text{convergente} \\ \sum_{k=0}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k\end{gathered}}$$

$S_n = S'_n + S''_n$

a_n b_n

Exemplo: 0,999

$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$

$S_n = \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n}$

$= \frac{1-(1/10)^n}{1-(1/10)}$

$R = \frac{1}{10}$

$\lim S_n = 1$

Soma da série $= 1 - \frac{1}{10^n}$

exemplo: $\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{K}$ é uma série divergente

Série Harmonica

(1) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ → converge? Se S_{2n} converge $S_{2n} - S_n \to 0$

$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

absurdo!

todas as parcelas iguais à menor

Séries de termos não negativos (STNN)

↳ módulos

$$\sum_{K=0}^{n} a_K \quad , \quad a_K \geq 0, \forall K \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergente → série harmonica alternada $\begin{cases} 2n \to \text{monótona} \\ 2n+1 \to \text{limitada} \end{cases}$ limite

módulo é série harmonica

Uma STNN é convergente sse a sua sucessão de somas parciais for majorada

- ~~Critério~~ geral da comparação para STNN

se $0 < a_K < b_K$, $\forall K \in \mathbb{N}$ (ou apartir de certa ordem)

São crescentes

então

$$\sum_{K=1}^{\infty} b_K \text{ converge} \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} a_K \text{ converge}$$

$S_n^a \leq S_n^b \leq M$

↓ é limitada

$$\sum_{K=1}^{\infty} a_K \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} b_K \text{ diverge}$$

↳ $+\infty$ então ↳ $+\infty$

Corolário

- ~~Critério do limite~~

não é 0 nem $+\infty$

$$\text{Se } \lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{, com } 0 < L < +\infty$$

então as sucessões a_n e b_n são da mesma natureza (ambas divergentes ou ambas convergentes)

NOTA:

~~Se $L = 0$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.~~

~~Se $L = +\infty$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também converge.~~

$a_n > 0$

· Critério da razão / d'Alembert

Se existe $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \overline{\mathbb{R}}$

então se $r < 1$ a série converge

se $r > 1$ a série diverge

Se $r = 1$ não se pode concluir nada

× Convergência simples e absoluta

se $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ converge, então $\sum_{k=n}^{n} |a_k|$ também

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente p/ qualquer subsucessão

absolutamente convergente → $\sum_{n}^{\infty} |b_n|$ é convergente

simplesmente convergente → $\sum_{n}^{\infty} |b_n|$ não é convergente, mas $\sum_{n}^{\infty} |b_n|$ é convergente

só naquela forma

Séries alternadas → termos consecutivos trocam de sinal   ex. S. harmonica alternada

séries de potências → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

Domínio de convergência

$\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ é convergente$\}$

$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Raio de convergência $(0 \leq R \in \overline{\mathbb{R}})$

· Série absolutamente convergente quando

$|x-a| < R \Rightarrow x \in]a-R, a+R[$

· Série divergente quando $|x-a| > R$

$x \in]-\infty, a-R[\cup]a+R, +\infty[$

· Pode convergir ou divergir quando $x = a+R$ / $x = a-R$

* séries de taylor

(página 99/100/101)

---

exemplo de séries convergentes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

(tal como nas primitivas)

é convergente $\rightarrow = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ → exemplo de série redutível ou série de Mengoli

$= \underline{1}$

$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$

$S_2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

...

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left. \right\} S = \lim S_n = \underline{1}$

Convergente

Nota!

A série harmónica alternada só converge naquelas condições → não se podem usar as propriedades associativa e comutativa!

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, converge e $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, divergente

1xemplo

$$n^2 \geq n(n-1) \Rightarrow \forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{(K+1)K}$$

$$K = (n-1)$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n+1)n}$$

$\hookrightarrow$ convergente (inicio da aula)

logo $\frac{1}{n^2}$ convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \quad \forall n \quad n^3 \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\Downarrow$

Convergente

logo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \geq 2)$$

$$n^\alpha \geq n^2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$$

absolutamente convergentes!

exemplo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sqrt{n} \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

↳ divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \forall \alpha \leq 1$$

divergentes

Pelo critério do integral, prova-se que:

$$\forall \alpha > 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{, convergente}$$

Séries de Drichelet

exemplo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\sqrt{n}+2}{1+5n^4} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$a_n = \frac{3\sqrt{n}+2}{1+5n^4} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha = 4 - 1/2 = 7/2 > 0$$

Converge

$$\frac{\frac{3\sqrt{n}+2}{1+5n^4}}{n^{7/2}} = \frac{3n^4+2n^{7/2}}{1+5n^4} = \frac{3}{5} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

an Converge

Prova-se que:

$$x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots = e^x$$

é absolutamente convergente

$$|a_n| = \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \boxed{\text{converge}}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dots \longrightarrow 0 < 1 \quad \boxed{\text{Converge}}$$