CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$2^{\underline{o}}$ TESTE / $1^{\underline{o}}$ EXAME (Versão A)

11/Janeiro/2010 Duração: 1h30m / 3h

Para o 2^oTeste responda apenas às seguintes questões:

I.3., II.1.c), II.2.b), II.3., III. e IV.

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x} \geq 2 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-e| \geq \frac{e}{2} \right\}$$

a) Mostre que $A \cap B = \left]0, \frac{e}{2}\right]$.

Resolução:

Dado que

$$\frac{x+2}{x} \geq 2 \Longleftrightarrow \frac{2-x}{x} \geq 0$$

e

		0		2	
$2-x$	$+$	//	$+$	0	$-$
x	$-$	//	$+$	0	$+$
$\frac{2-x}{x}$	$-$	//	$+$	0	$-$

vem $A =]0, 2]$. Por outro lado,

$$|x-e| \geq \frac{e}{2} \Longleftrightarrow x-e \geq \frac{e}{2} \vee x-e \leq -\frac{e}{2} \Longleftrightarrow x \geq \frac{3e}{2} \vee x \leq \frac{e}{2} \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{e}{2}\right] \cup \left[\frac{3e}{2}, +\infty\right[= B.$$

Assim, $A \cap B = \left]0, \frac{e}{2}\right]$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$,
$\max A, \quad \inf(A \cap B), \quad \max(A \cap B \cap \mathbb{Q}), \quad \min(A \cap \mathbb{Z}), \quad \sup B.$

Resolução:

$$\max A = 2, \quad \inf(A \cap B) = 0, \quad \text{não existe } \max(A \cap B \cap \mathbb{Q})$$

$$\min(A \cap \mathbb{Z}) = \min\{1, 2\} = 1, \quad \text{não existe } \sup B$$

2. Por indução, mostre que

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

Resolução:
Base: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2 = 2 + (1-1)2^2, \quad \text{proposição verdadeira.}$$

Passo 2: supondo que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$,tem-se

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} = 2 + (n-1)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} = 2 + 2n2^{n+1} = 2 + n2^{n+2},$$

o que mostra que a igualdade é válida para $n + 1$.
Por indução, conclui-se que a igualdade é válida para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3. [**2**^{o} **Teste**] Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{1+3^n}$.

Resolução:
Com $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{1+3^n} > 0 (n \in \mathbb{N})$, tem-se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+2}}{1+3^{n+1}} \frac{1+3^n}{2^{n+1}} = \lim 2 \frac{1+3^n}{1+3^{n+1}} = 2 \lim \frac{\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{2}{3} < 1$$

e, pelo critério de D'Alembert, concluímos que a série dada é (absolutamente) convergente.

II

1. [**2**^{o} **Teste**: resolva apenas a alínea **c)**]
Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}\right)^{\log x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\arctan 2x}{1+3x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_{x^2}^{x}\sqrt{t}e^t dt}{x-1}$

Resolução:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}\right)^{\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\log x.\log\frac{2}{x}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\arctan 2x}{1+3x^2} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+3x^2} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3+1/x^2} = \frac{\pi}{6}$$

c) Temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Do Teorema Fundamental do Cálculo e aplicando a regra de Cauchy, vem

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x}e^x - 2x\sqrt{x^2}e^{x^2} = e - 2e = -e,$$

pelo que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_{x^2}^{x}\sqrt{t}e^t dt}{x-1} = -e.$$

2. [**2**^{o} **Teste**: resolva apenas a alínea **b)**]
Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

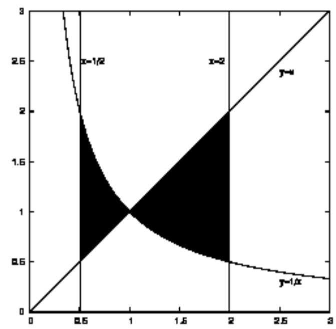
a) $\cos x(1+\sin x)^4$ **b)** xe^{2x} **c)** $\frac{2x+1}{(x-2)(1+x^2)}$

Resolução:

$$\textbf{a)}\ P\cos x(1+\sin x)^4 = \frac{1}{5}(1+\sin x)^5$$

b) Primitivando por partes,

$$Pxe^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - P\frac{1}{2}e^{2x} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$



c) Temos uma função racional própria; sabemos que existem constantes A,B e C tais que

$$\frac{2x+1}{(x-2)(1+x^2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

Assim,

$$A(1+x^2) + (Bx+C)(x-2) = 2x+1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 5A = 5 \\ A - 2C = 1 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$P\frac{2x+1}{(x-2)(1+x^2)} = P\left(\frac{1}{x-2} + \frac{-x}{1+x^2}\right) = P\frac{1}{x-2} - P\frac{x}{1+x^2} =$$

$$= \log|x-2| - \frac{1}{2}\log\left|1+x^2\right| = \log\frac{|x-2|}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3. [**2**^{o} **Teste**]
Calcule a área do subconjunto do plano delimitado pelas linhas de equação

$$x = \frac{1}{2}, x = 2, y = \frac{1}{x} \text{ e } y = x.$$

Resolução:

(Ver figura no início da página)
A área vem dada por

$$\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x} - x\right)dx + \int_{1}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \left[\log|x| - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - \log|x|\right]_{1}^{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \left(\log\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + 2 - \log 2 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

III [2^o Teste]

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f não é contínua no ponto zero.

Resolução:

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \neq f(0) = 0.$$

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada f'.

Resolução:
A função f é diferenciável em $]0, +\infty[$, visto que é a composta de uma função racional e da função arcotangente; também é diferenciável em $]-\infty, 0[$, dado que é o produto de uma função polinomial e da função exponencial. No ponto zero, a função não é contínua, logo não é diferenciável. Assim, f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Tem-se,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{se } x > 0$$

e

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x \qquad \text{se } x < 0.$$

c) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0$$

visto que, aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x} = \arctan 0 = 0.$$

d) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais e absolutos .

Resolução:
De alínea **b)**,

		-1		0	
$-\frac{1}{1+x^2}$	//	//	//	//	$-$
$(x+1)e^x$	$-$	0	$+$	//	//
f'	$-$	0	$+$	//	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$	//	$\searrow$

Então,

$$f \text{ é estritamente decrescente no intervalo }]-\infty,-1[\text{ e no intervalo }]0,+\infty[$$

$$f \text{ é estritamente crescente no intervalo }]-1,0[\,.$$

$x=-1$ é ponto de mínimo local de f. Como, por alínea **c)**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $f(-1) = -e^{-1} < 0$, concluímos que $x=-1$ é ponto de mínimo absoluto de f (ou, $f(-1) = -e^{-1}$ é mínimo absoluto de f).

Por alínea **a)**,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} > f(0) = 0,$$

logo $x=0$ não é ponto de extremo de f.

IV [2^o Teste]

Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e considere a função dada por

$$\phi(x) = \int_x^{2x} \frac{g(t)}{t}\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

a) Se g é uma função par, mostre que ϕ é função par.

Resolução:

Supondo que $g(-t)=g(t)$, para todo o $t\in\mathbb{R}$, vem

$$\phi(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{g(t)}{t}dt=\int_{x}^{2x}\frac{g(-t)}{-t}(-1)dt=\int_{x}^{2x}\frac{g(t)}{t}dt=\phi(x),\text{ se } x\neq 0$$

o que mostra que ϕ é função par.

b) Supondo que $g(0)=1$ e que g é diferenciável na origem, mostre que existe $\lim_{x\to 0^+}\phi(x)$ e indique o seu valor.

[Sugestão: Atenda a que se tem $g(t)=(g(t)-g(0))+g(0)$ e utilize o Teorema da média.]

Resolução:

Tem-se

$$\phi(x)=\int_{x}^{2x}\frac{g(t)}{t}dt=\int_{x}^{2x}\frac{g(t)-g(0)}{t}dt+\int_{x}^{2x}\frac{g(0)}{t}dt$$

Ora,

$$\int_{x}^{2x}\frac{g(0)}{t}dt=\int_{x}^{2x}\frac{1}{t}dt=[\log|x|]_x^{2x}=\log 2\,|x|-\log|x|=\log 2.$$

Por outro lado, e uma vez que a função integranda é contínua em $\mathbb{R}^+$, do teorema da média sabemos que

$$\forall x>0\quad \exists c_x\in\,]x,2x[\,:\qquad \int_{x}^{2x}\frac{g(t)-g(0)}{t}dt=\frac{g(c_x)-g(0)}{c_x}(2x-x)=x\frac{g(c_x)-g(0)}{c_x}$$

Mas g é diferenciável em zero, o que significa que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(c_x)-g(0)}{c_x}=g'(0)\in\mathbb{R}.$$

e, consequentemente,

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{2x}\frac{g(t)-g(0)}{t}dt=0$$

Então,

$$\lim_{x\to 0^+}\phi(x)=\lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{2x}\frac{g(t)-g(0)}{t}dt+\lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{2x}\frac{g(0)}{t}dt=\log 2.$$