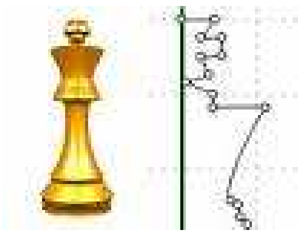
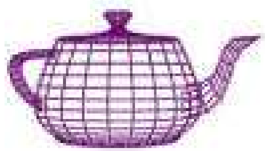


Transformações Gráficas Bidimensionais (2D)

Antonio L. Bajuelos
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro



Introdução

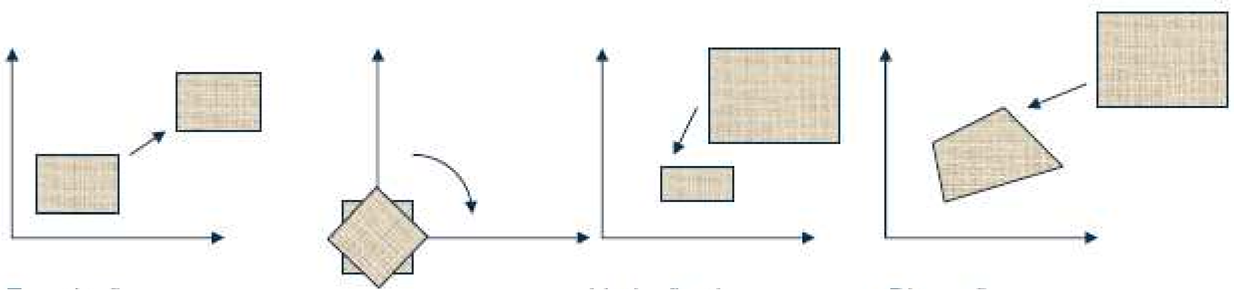
Um sistema gráfico que permita ao utilizador definir objectos deve incluir a capacidade de simular o movimento e a manipulação de objectos segundo determinadas regras.

- Exemplo:
  - Deve ser capaz de **ampliar** o objecto de modo a tornar claro alguns detalhes ou;
  - **Reduzi-lo** de modo a permitir a sua completa visualização ou;
  - **Desloca-lo** de um ponto para outro. etc.
- **Transformações Geométricas (TG) são a base de inúmeras aplicações gráficas.**
  - Exemplos:
    - para representar *layouts* de circuitos electrónicos;
    - em programas de planeamento de cidades;
    - em sistemas de *software* sofisticados que permitem a construção de cenas realistas.

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

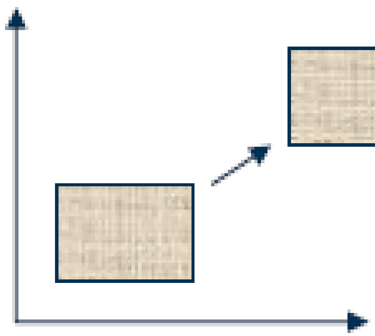
Introdução

- Neste capítulo abordaremos as:
  - Transformações primárias:
    - **Translação**
    - **Rotação**
    - **Variação de Escala (*Scaling*)**
  - Transformações secundárias:
    - **Reflexão**
    - **Distorção (*Shearing*)**
  - Combinação de Transformações



Introdução

- Consideremos um sistema coordenado num plano ***xOy***
- Um objecto ***Obj*** no plano pode ser considerado como um conjunto de pontos.
- Cada ponto $P \in Obj$ pode ser definido como $P(x, y)$
- Então
  - $Obj = \cup P_i(x_i, y_i), \; P_i \in Obj$
  - Se ***Obj*** é movido para uma nova posição ele pode ser considerado como um novo objecto ***Obj´*** no qual todos os pontos ***P´*** podem ser obtidos a partir dos pontos originais ***P***, através da aplicação de uma transformação geométrica.



Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações primárias: **Translação**

Translação: Um objecto é *deslocado uma dada distância*, segundo uma dada direcção, em relação à sua posição original.

- Assim, cada ponto ***P(x,y)*** pode ser movido por ***dx*** unidades em relação ao eixo *x*, e por *dy* unidades em relação ao eixo ***y***
- Logo, o ponto ***P'(x',y')***, pode ser escrito como:

$$x' = x + dx \text{ e } y' = y + dy \qquad (1)$$

- E se definimos os vectores colunas:

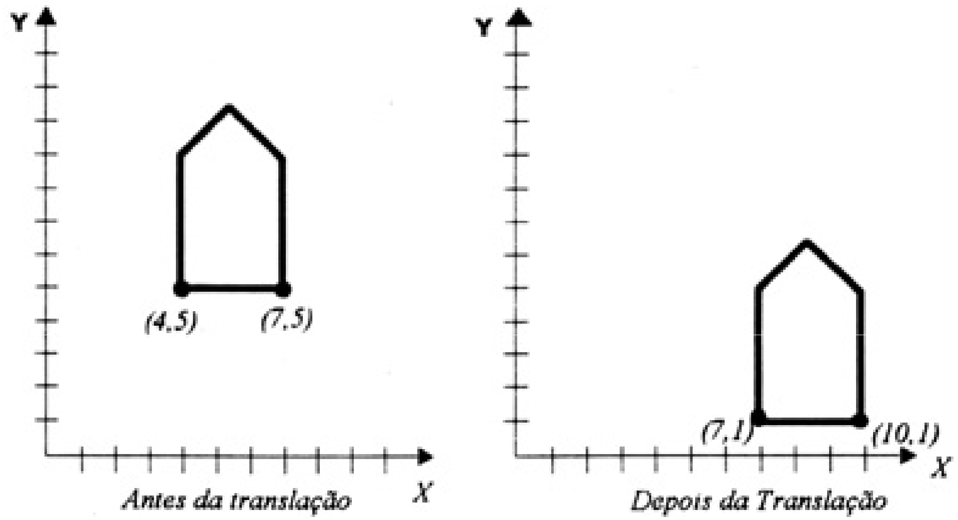
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

- Então **(1)** pode ser expressa como:

$$P' = P + T$$

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- **Transformações primárias: Translação (cont…)**
  - **Exemplo:** Translação de um objecto por **(3, -4)**



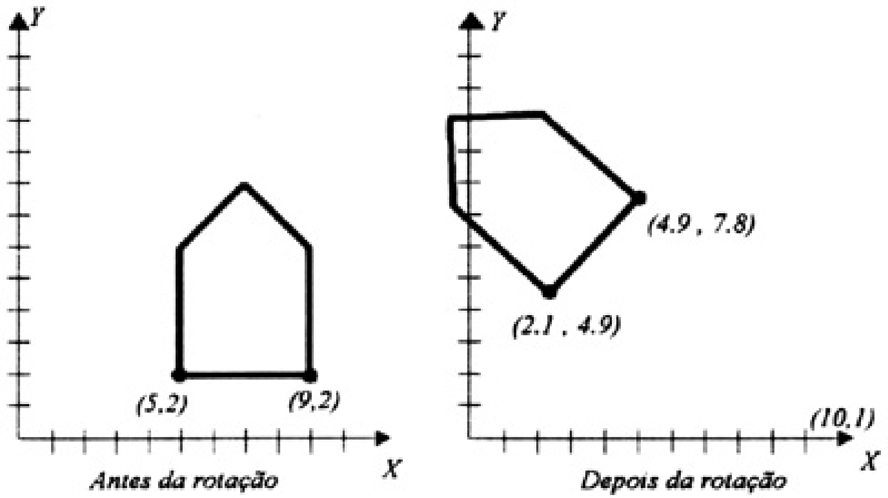
  - **Atenção:**
    - Podemos trasladar um objecto, fazendo-o a todos os seus pontos trasladar (o que não é muito eficiente!)
      - Para **transladar** uma linha podemos fazê-lo apenas para seus pontos limites e sobre estes pontos redesenhar a linha.
      - Isso também é válido para **variações de Escala** e **Rotações**

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações primárias: **Rotação**

Rotação: Mudança de posição de uma entidade geométrica num plano, por forma a que todos os seus pontos descrevam arcos de circunferência com a mesma amplitude e concêntricas

- **Exemplo:** Rotação de um objecto por 45º (em relação a origem)



- **Atenção:**
  - Os **ângulos positivos** são definidos quando a rotação é feita no sentido contrário aos do ponteiro do relógio (**CCW**).
  - Os **ângulos negativos** quando a rotação é feita no sentido dos ponteiros do relógio (**CW**).

Transformações primárias: **Rotação (cont…)**

- A **rotação** de pontos através de um ângulo θ é definida por:

$$x' = x \cdot cos(\theta) - y \cdot sin(\theta)$$

$$y' = x \cdot sin(\theta) + y \cdot cos(\theta)$$

- e matricialmente:

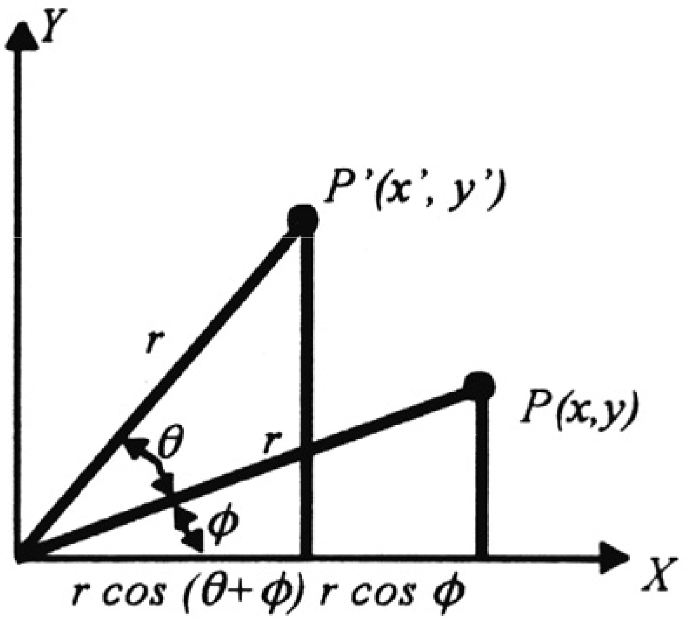
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad ou \quad P' = R.P$$

- R – matriz da rotação

- Transformações primárias: **Rotação (cont…)**
  - Lembremos que: $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ e que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
  - Observemos a seguinte figura que a rotação por θ transforma $P(x,y)$ em $P'(x',y')$
  - Assim temos que:

$$x = r \cdot \cos(\phi),\ y = r \cdot \sin(\phi) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= r \cdot \cos(\theta+\phi) = \\ &= r \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \\ y' &= r \cdot \sin(\theta+\phi) = \\ &= r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) + r \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) \end{aligned}\right] \qquad (2)$$



  - Podemos obter a equação:

$$x' = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta)$$

$$y' = x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta)$$

substituindo a equação **(1)** na equação **(2)**

- Transformações primárias: **Rotação (cont…)**
  - É de notar que as fórmulas de transformação apresentadas em:

$$x' = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta)$$
$$y' = x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta)$$

são independentes do raio r do arco da circunferência e do ângulo inicial ϕ

  - Estes valores só foram introduzidos para podermos deduzir as fórmulas de transformação para rotação de um ponto em torno da origem do sistema de eixos coordenados.
  - É fácil obter que no caso da rotação de um ponto em torno de um ponto pivot (x_p, y_p) e equação da rotação ficaria como:

$$x' = (x - x_p) \cdot \cos(\theta) - (y - y_p) \cdot \sin(\theta) + x_p$$
$$y' = (x - x_p) \cdot \sin(\theta) + (y - y_p) \cdot \cos(\theta) + y_p$$

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- **Transformações primárias: Rotação (cont...)**
  - **Exercício:**

    Aplique uma rotação de 45º ao triângulo A(0,0), B(1,1), C(5,2):

    (a) Em torno da origem

    (b) Em torno de P(-1, -1)

    Atenção:

Transformações primárias: **Variação de Escala**

Variação de Escala: É o processo que permite a expansão ou a compressão das dimensões de um objecto.

- Geralmente são utilizadas constantes positivas de variação de escala s_x e s_y para descrever variações de comprimento em relação à direcção x e a direcção y, respectivamente.
- Uma constante de variação de escala:
  - **> 1 indica uma expansão**
  - **< 1 indica uma compressão**
- A transformação de variação de escala é dada por:

$$x' = s_x \cdot x \, , \; y' = s_y \cdot y$$

ou em forma matricial

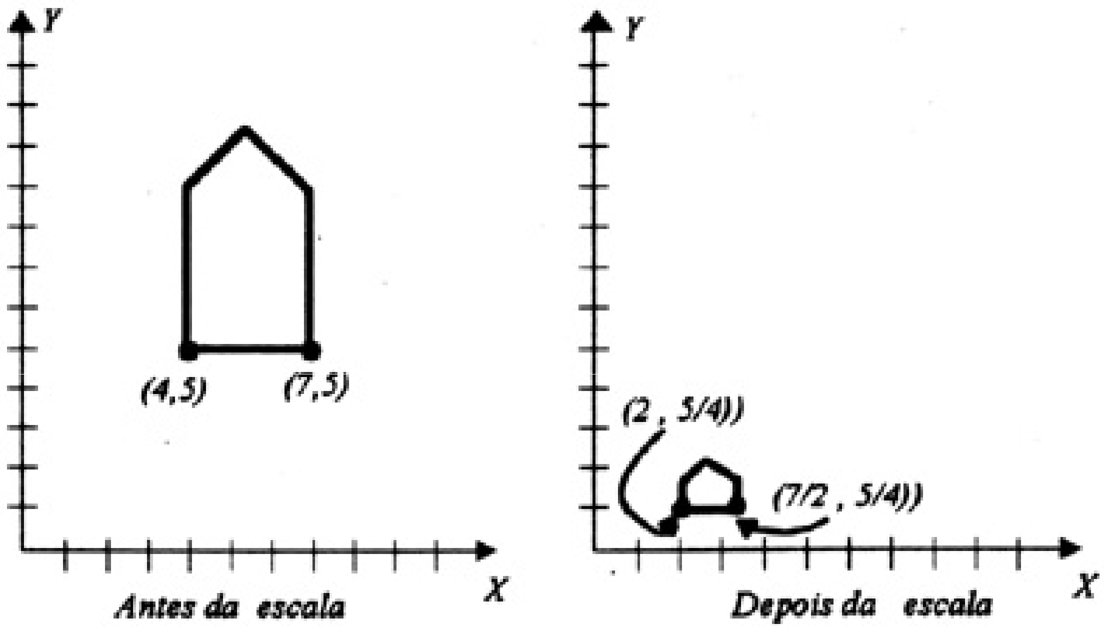
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ou \quad P' = S.P$$

- S – matriz da variação de escala

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações primárias: **Variação de Escala (cont...)**

  Exemplo: Na figura a seguir a casa sofre uma escala de **½ e**m ***x*** e de **¼** em ***y***.



- **Observe que:**
  - a variação de escala é feita em relação a origem. Assim a "casa" fica menor e mais próxima da origem.
  - as proporções da casa são alteradas, isto é, uma escala em que s_x é diferente de s_y
  - **Se são utilizadas escalas uniformes ($s_x = s_y$) as proporções não são afectadas.**

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- **Transformações primárias: Variação de Escala (cont...)**
  - **Exercícios:**

    1. Determine a forma geral da matriz de variação de escala $M(S_x,S_y,P)$ em relação a um ponto fixo $P(h, k)$.

    Sugestão: utilizar a representação $v = - hI - kJ$

    2. Amplie o tamanho do triângulo com os vértices A(0,0), B(1,1) e C(5,2) para o dobro, mantendo o ponto C(5,2) fixo.

    Sugestão: utilizar os resultados do exercício anterior

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações secundárias: **Reflexão**

Reflexão: A transformação de reflexão, ou ***espelhamento***, aplicada a um objecto, produz um objecto que é o *espelho* do original.

- No caso de uma reflexão **2D,** pode-se considerar a
  - **Reflexão em relação a um ponto**
  - **Reflexão em relação a uma recta**
- Em ambos casos a transformação pode ser obtida através de uma **rotação de 180º** em torno do ponto ou em torno da recta.
- Casos mais vulgares:
  - Reflexão em relação à origem: $x' = -x; \; y' = -y$
  - Reflexão segundo o eixo Ox: $x' = x; \; y' = -y$
  - Reflexão segundo o eixo Oy: $x' = -x; \; y' = y$
  - Reflexão segundo a recta $x = y$: $x' = y; \; y' = x$
  - Reflexão em relação a recta $x = -y$: $x' = -y; \; y' = -x$

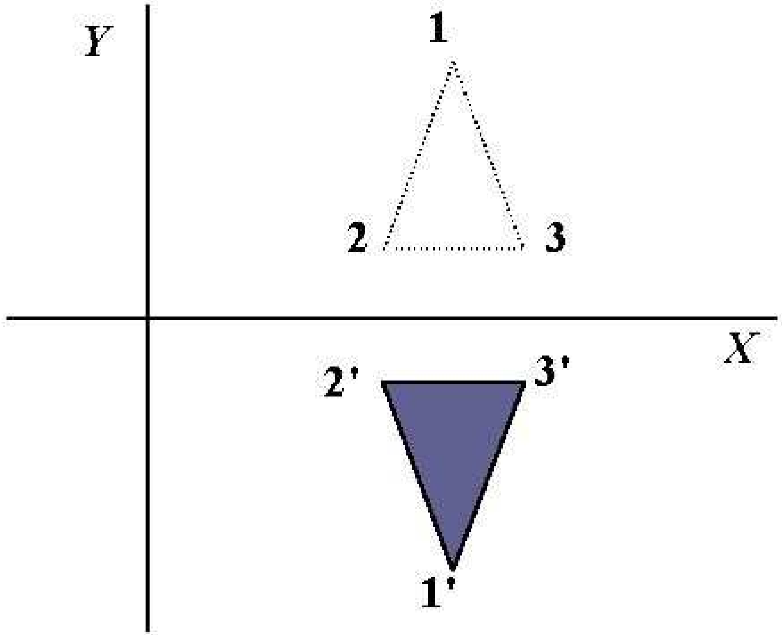
Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações secundárias: **Reflexão (cont…)**

Exemplo: Pode-se aplicar uma reflexão em torno do eixo ***x***, (***y = 0***) utilizando a seguinte matriz de transformação:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ou \quad P' = E \, . \, P$$

Esta transformação mantém as coordenadas *x* do objecto inalteradas, mas inverte os valores das coordenadas *y*, alterando a *orientação espacial* do objecto.



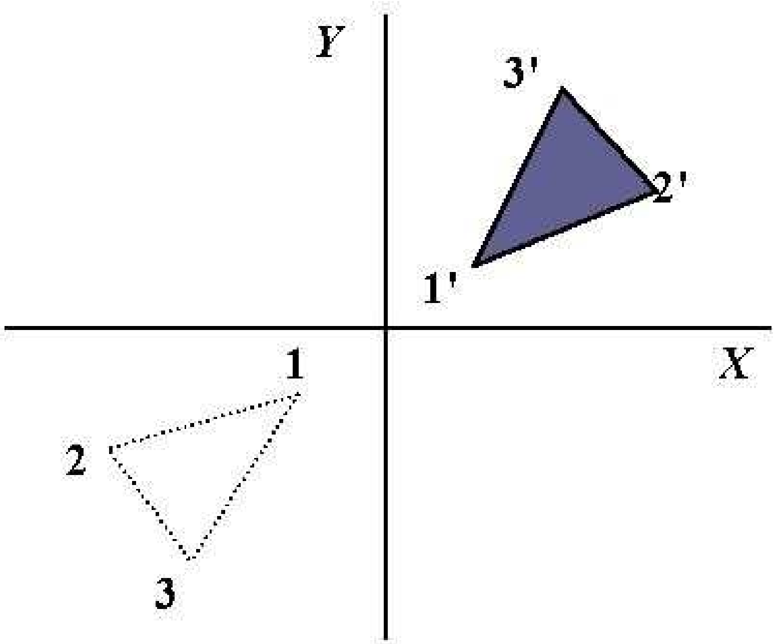
Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações secundárias: **Reflexão (cont…)**

Exemplo: Podemos também definir uma reflexão em torno de um eixo perpendicular ao plano ***xy*** e passando (por exemplo) pela origem do sistema de coordenadas, invertendo nesse caso ambas as coordenadas *x* e *y*. A matriz de transformação é dada por:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta operação é ilustrada na figura a seguir:



Transformações secundárias: Reflexão (cont...)

- **Exercício:**

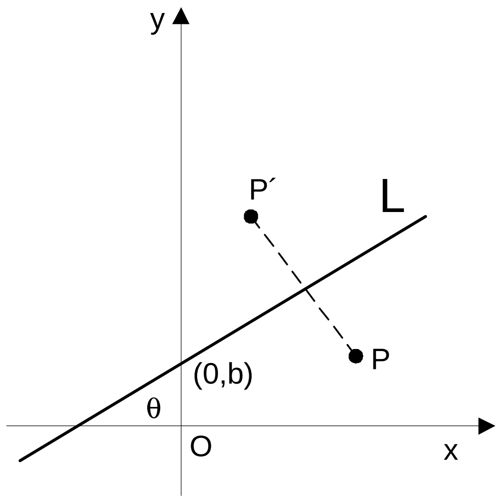
  1. Determine a matriz de reflexão em relação à linha L, cujo declive é *m* e que intersecta o eixo Oy em (0,b).

  - **Sugestão:**
    - Utilizar os resultados do exemplo anterior e as seguintes expressões:

$$Se\ \tan(\theta) = m\ então$$

$$sen(\theta) = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\ e$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$$



  2. Determine a reflexão do losango cujos vértices são A(-1,0), B(0,-2), C(1,0), D(0,2) em relação à (a) linha horizontal y=2, (b) linha vertical x=2.

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- **Generalizando….**

$$P' = M_1 \cdot P + M_2$$

onde

- P e P' (coordenadas de posição): vectores coluna
- M_1: matriz 2x2 com factores de multiplicação.
- M_2: matriz coluna de dois elementos com termos de translação.
- **Observação:**
  - para translações: M_1 é matriz identidade

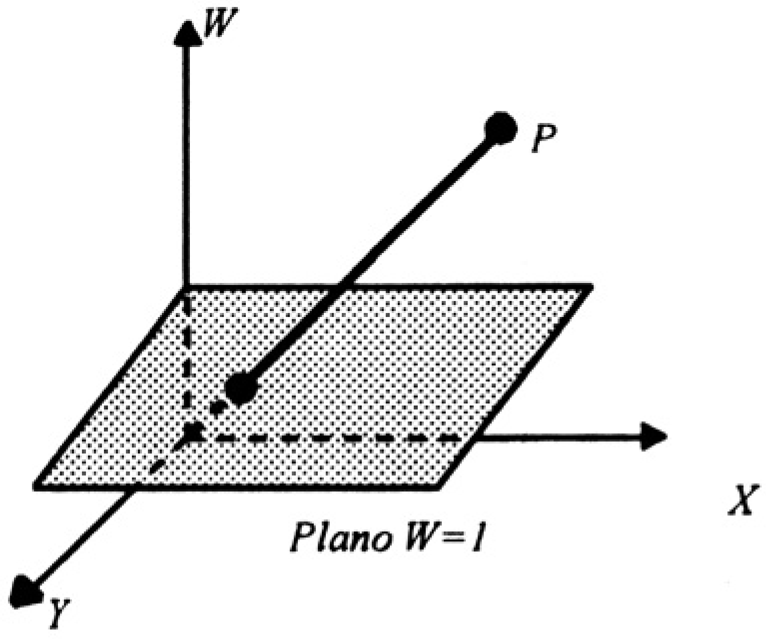
Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Sistema de Coordenadas Homogéneas **(SCH)**
  - Infelizmente, a translação em $\Re^2$ é formalizada de forma diferente das outras - Rotação e Escala, etc. - que são tratadas através de **multiplicações**.

    para poder combinar convenientemente essas transformações, devemos tratar do mesmo modo todas as 3 transformações.
  - **Como podem ser calculadas as transformações geométricas pelo produto concatenado das suas respectivas matrizes?**
  - **R/** Utilizando um **sistema de coordenadas homogéneas**
  - Nas coordenadas homogéneas adiciona-se ao tuplo **(x, y)** uma terceira coordenada ***W*** passando a estar representado por um triplo **(x, y, W)**
  - Por definição **(x, y, W)** e **(x', y', W')** representam o mesmo ponto em coordenadas homogéneas sse um é múltiplo do outro

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Sistema de Coordenadas Homogéneas **(SCH)**
  - É obvio que cada ponto **(*x*, *y*)** tem uma infinidade de representações em coordenadas homogéneas
  - Se W é não zero então **(*x*, *y*, *W*)** representam o mesmo ponto que **(*x*/*W*, *y*/*W*, 1)**
  - Homogeneizar um par de coordenadas é obter a sua representação na forma de **(*x*, *y*, 1)**



Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações secundárias: **Distorção (*Shearing*)**

Distorção: É uma transformação que produz distorção de um objecto e em geral, é realizada quando se aplica uma deslocação aos valores das coordenadas ***x*** (***x-shearing***) ou das coordenadas ***y*** (***y-shearing***) do objecto.

Exemplo: Por exemplo: uma distorção na direcção *x* é produzida com a seguinte matriz de transformação:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad ou \quad P' = D \, . \, P$$

As coordenadas do objecto são transformadas da seguinte maneira:

$$x' = x + sh_x \cdot y;$$
$$y' = y$$

- Transformações secundárias: **Distorção (cont…)**
  - **Exemplo:** Se sh_x é 2, então um quadrado será transformado num paralelogramo.
  - Pode-se gerar distorções na direcção relativamente a outros eixos de referência. Por exemplo $y = y_{ref}$ com a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & sh_x & -sh_x \cdot y_{ref} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - que produz as seguintes transformações sobre as coordenadas:

$$x' = x + sh_x \cdot (y - y_{ref}),$$
$$y' = y$$

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Transformações secundárias: **Distorção (cont…)**
  - Analogamente, pode-se aplicar uma distorção na direcção $\boldsymbol{y}$, relativa a uma linha $\boldsymbol{x = x_{ref}}$, utilizando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & -sh_y \, . \, x_{ref} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - que gera as seguintes transformações nas posições das coordenadas:

$$\boldsymbol{x' = x,}$$

$$\boldsymbol{y' = y + sh_y \cdot (x - x_{ref})}$$

Transformações de Sistemas de Coordenadas

Exercício:

1. Ilustre o efeito das transformações *x-shearing*, *y-shearing* e *xy-shearing* sobre o quadrado A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1), quando $S_x = 2$ e $S_y = 3$

Transformações secundárias: *Shearing (cont...)*

Exemplo:

Um observador colocado no ponto (0,0) vê o ponto P(1,1). Se o ponto é trasladado uma unidade na direcção v = I, a sua nova posição é P'(2,1). Suponha que, em vez disto, o observador dá um passo atrás de uma unidade segundo o eixo Ox. Quais as coordenadas do ponto P relativamente ao observador?

Resolução: O problema pode ser considerado como uma transformação entre sistemas de coordenadas. Se trasladarmos a origem na direcção v = -I (para uma nova posição O'), então as coordenadas de P neste sistema podem ser determinadas pela transformação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Isto tem a seguinte interpretação trivial: **o deslocamento de uma unidade, numa dada direcção, pode ser alcançado quer movendo o objecto para frente relativamente ao observador quer deslocando o observador para trás em relação ao objecto.**

Translação em SCH

- Num **SCH** no plano os pontos são representados por vectores de 3 elementos. Então as matrizes de transformações que multiplicam um ponto por outro também precisam ser de 3x3.
- A equação de **Translação**

  $P' = P + T(t_x, t_y)$

  para coordenadas homogéneas fica da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Então e equação da **Translação em SCH** pode ser expressa como:

$P' = T(t_x, t_y) \cdot P$ onde $T(t_x, t_y)$ é a matriz de **Translação em SCH**

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- **Translação, Rotação e Variação de Escale em SCH**
  - **Translação:** $P' = T(t_x, t_y) \cdot P$
  - **Rotação:** $P' = R(\theta) \cdot P$
  - **Variação de escala:** $P' = S(s_x, s_y) \cdot P$

Composição de Transformações

- Com as representações matriciais anteriores podemos:
  - compor um matriz que realize qualquer sequência de transformadas. Chamamos essa matriz de ***matriz composta de transformada***
- O propósito fundamental de compor-se transformações, é o **ganho de eficiência** que se obtém ao aplicar-se uma **transformação composta** a um ponto em vez de aplicar-lhe uma **série de transformações**, uma após a outra.
- **Exemplo:** Duas translações sucessivas (t_{x1}, t_{y1}) e (t_{x2}, t_{y2}):

  $$P' = T(t_{x2}, t_{y2}) \cdot (T(t_{x1}, t_{y1}) \cdot P) = (T(t_{x2}, t_{y2}) \cdot T(t_{x1}, t_{y1})) \cdot P$$

  A ***matriz composta da transformação*** neste exemplo será:

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Composição de Transformações
  - **Exemplo:** Duas varições de escalas sucessivas:

$$P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P \quad \text{e} \quad P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P'$$

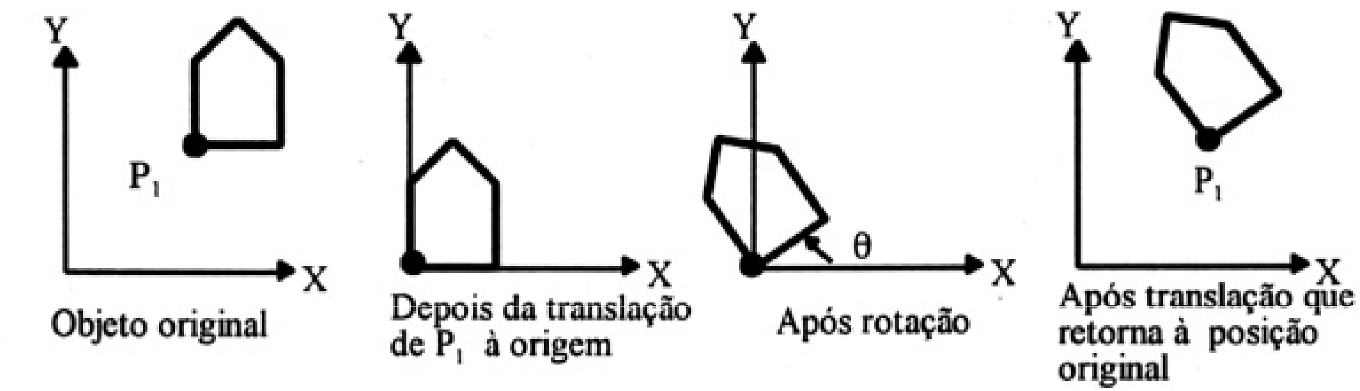
pode ser expressa como

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot (S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P) = (S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})) \cdot P$$

a matriz produto $S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})$ é:

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Composição de Transformações (cont…)
  - **Exemplo:** Transladar $P_1(x_1, y_1)$ p/ origem, rotacionar e transladar de volta p/ P_1



A transformação em sequência é:

$$T(x_1,y_1).R(\Theta).T(-x_1,-y_1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & y_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos(\Theta) & -\sin(\Theta) & 0\\ \sin(\Theta) & \cos(\Theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_1\\ 0 & 1 & -y_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

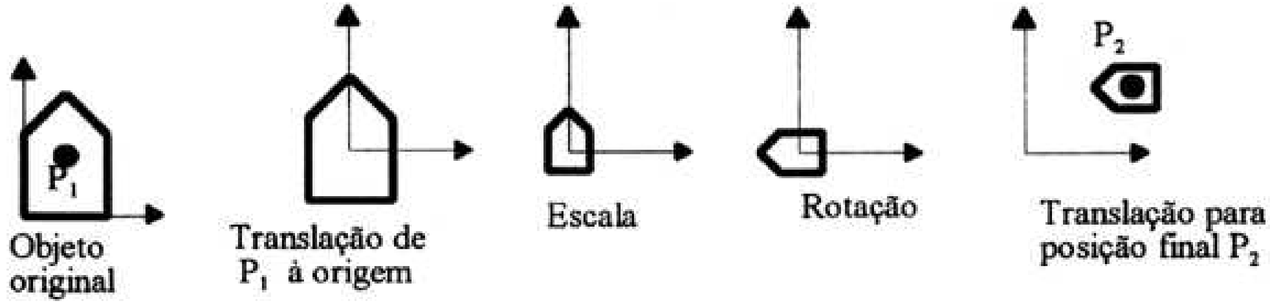
$$=\begin{bmatrix}\cos(\Theta) & -\sin(\Theta) & x_1.(1-\cos(\Theta))+y_1.\sin(\Theta)\\ \sin(\Theta) & \cos(\Theta) & y_1(1-\cos(\Theta))-x_1.\sin(\Theta)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Composição de Transformações (cont…)
  - O procedimento anterior pode ser utilizado de forma similar para efectuar a **variação de escala** de um objecto em relação a um ponto arbitrário $P_1(x_1, y_1)$
  - Neste caso primeiramente o ponto P_1 é transladado para a origem, então é feita a variação de escala desejada. A continuação o ponto P_1 é transladado de volta.
  - Dessa forma, a transformação em sequência é:

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Composição de Transformações (cont…)
  - **Exemplo:** Suponhamos que desejamos a seguinte sequencia de transformações: **variação de escala**, **rotação** e t**ranslação**, tomando o ponto $P_1(x_1,y_1)$ como o centro da rotação e da variação de escala (ver figura)



  - **A sequência de transformações fica da seguinte maneira:**

    1. Transladar $P_1(x_1,y_1)$ para a origem;
    2. Efectuar a escala e a rotação desejadas;
    3. Efectuar a translação da origem para a nova posição $P_2(x_2,y_2)$, onde a casa deve ser posicionada.

$$T(x_2,y_2)\cdot R(\theta)\cdot S(s_x,s_y)\cdot T(-x_1,-y_1)$$ é a **MCT**

Se a Variação de Escala S for uniforme ($s_x = s_y$) a ordem de S e R pode ser comutada sem alterar o resultado final da transformação composição.

Transformações Gráficas Bi-dimensionais

- Composição de Transformações (cont…)
  - Se M_1 e M_2 representam duas transformações fundamentais (**translação**, **rotação** ou **variação de escala**). Então,

$$\boldsymbol{\mathit{Em\ que\ casos}\ M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1?}$$

  - **Isto é,**

    Quando as matrizes da transformação podem ser comutadas ser alterar o resultado final da transformação composição?
  - É conhecido que nem sempre a multiplicação de matrizes é comutativa.
  - Entretanto é fácil mostrar que nos seguintes casos especiais esta comutatividade existe:

M_1	M_2
Translação	**Translação**
V. De Escala	**V. De Escala**
Rotação	**Rotação**
V. De Esacla (com sx=sy)	**Rotação**

- **Nestes casos não precisamos estar atentos a ordem de construção da matriz de transformação.**