Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

Soluções da 2^a Ficha de Exercícios

1. **(a)** Se $x \leq 1$, $|x-1|+|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow -x+1-x+2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$. Logo $x \in]-\infty, 1]$.

   Se $1 < x < 2$, $|x-1|+|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow x-1-x+2 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$. Logo $x \in]1, 2[$.

   Se $x \geq 2$, $|x-1|+|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow x-1+x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$. Logo $x \in [2, +\infty[$.

   Assim
$$\{x \in \mathbb{R} : |x-1|+|x-2| \geq 1\} = \mathbb{R}.$$

   (b) Se $x \leq 1$, $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow -x+1-x+2-x+3 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$. Logo $x \in]-\infty, 1]$.

   Se $1 < x < 2$, $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow x-1-x+2-x+3 \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 2$. Logo $x \in]1, 2[$.

   Se $2 \leq x \leq 3$, $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow x-1+x-2-x+3 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2$. Logo $x \in [2, 3]$.

   Se $x > 3$, $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2 \Leftrightarrow x-1+x-2+x-3 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{3}$. Logo $x \in]3, +\infty[$.

   Assim
$$\{x \in \mathbb{R} : |x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2\} = \mathbb{R}.$$

2. **(1)** Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1|+|x-2| = 7\}$.

   Se $x \leq -1$, $|x+1|+|x-2| = 7 \Leftrightarrow -x-1-x+2 = 7 \Leftrightarrow x = -3$. Logo $x \in \{-3\}$.

   Se $-1 < x < 2$, $|x+1|+|x-2| = 7 \Leftrightarrow x+1-x+2 = 7 \Leftrightarrow 3 = 7$. Logo $x \in \emptyset$.

   Se $x \geq 2$, $|x+1|+|x-2| = 7 \Leftrightarrow x+1+x-2 = 7 \Leftrightarrow x = 4$. Logo $x \in \{4\}$.

   Assim
$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1|+|x-2| = 7\} = \{-3, 4\}.$$

   Conjunto dos majorantes de A: $[4, +\infty[$.

   Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -3]$.

   $\sup A = 4, \quad \inf A = -3, \quad \max A = 4, \quad \min A = -3.$

   (2) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3x-2\}$.

   $x^2 \geq 3x-2 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

   Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3x-2\right\} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[\,.$$

   Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

   Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

   A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(3) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 4\}$.

$1 < x^2 < 4 \Leftrightarrow ((x-1)(x+1) > 0 \ \text{ e } \ (x-2)(x+2) < 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[) \cap]-2, 2[\, = \,]-2, -1[\cup]1, 2[$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 4\right\} = \left]-2, -1\right[\cup \left]1, 2\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -2]$.

$\sup A = 2, \quad \inf A = -2$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(4) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x} < x\right\}$.

$\dfrac{1}{x} < x \Leftrightarrow \dfrac{(1-x)(1+x)}{x} < 0 \Leftrightarrow [[x > 0 \ \text{ e } \ (x < -1 \ \text{ ou } \ x > 1)] \ \text{ ou } \ (x < 0 \ \text{ e } \ -1 < x < 1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > 1 \ \text{ ou } \ -1 < x < 0) \Leftrightarrow x \in \,]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < x\right\} = \left]-1, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -1]$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf A = -1$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(5) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x} < x^2\right\}$.

$\dfrac{1}{x} < x^2 \Leftrightarrow \dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow [(x > 0 \ \text{ e } \ x > 1) \ \text{ ou } \ (x < 0 \ \text{ e } \ x < 1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > 1 \ \text{ ou } \ x < 0) \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < x^2\right\} = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, +\infty\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(6) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x} + 1\right\}$.

$\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 \leq x + 1 + 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x \leq 2\sqrt{x} \underset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 \leq 4x \Leftrightarrow x(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [0, 4]$.

Assim
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{2x+1}\leq\sqrt{x}+1\right\}=[0,4]\,.$$
Conjunto dos majorantes de A: $[4,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,0]$.

$\sup A=4,\quad \inf A=0,\quad \max A=4,\quad \min A=0.$

(7) Seja $A=\{x\in\mathbb{R}:|3-2x|>1\}$.

Se $x\leq\dfrac{3}{2}$, $|3-2x|>1\Leftrightarrow 3-2x>1\Leftrightarrow x<1$. Logo $x\in\,]-\infty,1[$.

Se $x>\dfrac{3}{2}$, $|3-2x|>1\Leftrightarrow -3+2x>1\Leftrightarrow x>2$. Logo $x\in\,]2,+\infty[$.

Assim
$$A=\{x\in\mathbb{R}:|3-2x|>1\}=\,]-\infty,1[\,\cup\,]2,+\infty[\,.$$
Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(8) Seja $A=\{x\in\mathbb{R}:|3-2x|=1\}$.

Se $x\leq\dfrac{3}{2}$, $|3-2x|=1\Leftrightarrow 3-2x=1\Leftrightarrow x=1$. Logo $x\in\{1\}$.

Se $x>\dfrac{3}{2}$, $|3-2x|=1\Leftrightarrow -3+2x=1\Leftrightarrow x=2$. Logo $x\in\{2\}$.

Assim
$$A=\{x\in\mathbb{R}:|3-2x|=1\}=\{1,2\}\,.$$
Conjunto dos majorantes de A: $[2,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,1]$.

$\sup A=2,\quad \inf A=1,\quad \max A=2,\quad \min A=1.$

(9) Seja $A=\{x\in\mathbb{R}:|3-2x|<1\}$.

Se $x\leq\dfrac{3}{2}$, $|3-2x|<1\Leftrightarrow 3-2x<1\Leftrightarrow x>1$. Logo $x\in\left]1,\dfrac{3}{2}\right]$.

Se $x>\dfrac{3}{2}$, $|3-2x|<1\Leftrightarrow -3+2x<1\Leftrightarrow x<2$. Logo $x\in\left]\dfrac{3}{2},2\right[$.

Assim
$$A=\{x\in\mathbb{R}:|3-2x|<1\}=\,]1,2[\,.$$
Conjunto dos majorantes de A: $[2,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,1]$.

$\sup A=2,\quad \inf A=1.$

A não tem máximo pois $\sup A\notin A$.

A não tem mínimo pois $\inf A\notin A$.

(10) Seja $A=\{x\in\mathbb{R}: |1-x|-x\geq 0\}$.

Se $x\leq 1$, $|1-x|-x\geq 0 \Leftrightarrow 1-x-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{2}$. Logo $x\in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

Se $x>1$, $|1-x|-x\geq 0 \Leftrightarrow -1+x-x\geq 0 \Leftrightarrow -1\geq 0$. Logo $x\in\emptyset$.

Assim
$$A=\{x\in\mathbb{R}: |1-x|-x\geq 0\}=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right].$$

Conjunto dos majorantes de A: $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

$\sup A=\max A=\frac{1}{2}$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(11) Seja $A=\left\{x\in\mathbb{R}: \left|1+\frac{1}{x}\right|<6\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: \left|\frac{x+1}{x}\right|<6\right\}$.

Se $x\leq -1$, $\left|\frac{x+1}{x}\right|<6 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x}<6 \Leftrightarrow x+1>6x \Leftrightarrow x<\frac{1}{5}$. Logo $x\in\,]-\infty,-1]$.

Se $x>0$, $\left|\frac{x+1}{x}\right|<6 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x}<6 \Leftrightarrow x+1<6x \Leftrightarrow x>\frac{1}{5}$. Logo $x\in\left]\frac{1}{5},+\infty\right[$.

Se $-1<x<0$, $\left|\frac{x+1}{x}\right|<6 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x}<6 \Leftrightarrow -x-1>6x \Leftrightarrow x<-\frac{1}{7}$. Logo $x\in\left]-1,-\frac{1}{7}\right[$.

Assim
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}: \left|1+\frac{1}{x}\right|<6\right\}=\,]-\infty,-1]\cup\left]-1,-\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{1}{5},+\infty\right[=\left]-\infty,-\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{1}{5},+\infty\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(12) Seja $A=\left\{x\in\mathbb{R}: \left|\frac{x^2-x}{1+x}\right|>x\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: \left|\frac{x\,(x-1)}{1+x}\right|>x\right\}$.

Se $x<-1$, $\left|\frac{x\,(x-1)}{1+x}\right|>x \Leftrightarrow -\frac{x\,(x-1)}{1+x}>x \Leftrightarrow -\frac{2x^2}{1+x}>0 \Leftrightarrow x<-1$.

Logo $x\in\,]-\infty,-1[$.

Se $-1<x\leq 0$, $\left|\frac{x\,(x-1)}{1+x}\right|>x \Leftrightarrow \frac{x\,(x-1)}{1+x}>x \Leftrightarrow \frac{-2x}{1+x}>0 \Leftrightarrow x<0$. Logo $x\in\,]-1,0[$.

Se $0<x\leq 1$, $\left|\frac{x\,(x-1)}{1+x}\right|>x \Leftrightarrow -\frac{x\,(x-1)}{1+x}>x \Leftrightarrow -\frac{2x^2}{1+x}>0 \Leftrightarrow x<-1$. Logo $x\in\emptyset$.

Se $x>1$, $\left|\frac{x\,(x-1)}{1+x}\right|>x \Leftrightarrow \frac{x\,(x-1)}{1+x}>x \Leftrightarrow \frac{-2x}{1+x}>0 \Leftrightarrow x<0$. Logo $x\in\emptyset$.

Assim
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\left|\frac{x^2-x}{1+x}\right|>x\right\}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[.$$
Conjunto dos majorantes de A: $[0,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

$\sup A=0$.

A não tem máximo pois $\sup A\notin A$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(13) Seja $A=\{x\in\mathbb{R}:|1-4x^{-1}|>1\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\left|\dfrac{x-4}{x}\right|>1\right\}$.

Se $x<0$, $\left|\dfrac{x-4}{x}\right|>1\Leftrightarrow\dfrac{x-4}{x}>1\Leftrightarrow-\dfrac{4}{x}>0\Leftrightarrow x<0$. Logo $x\in\,]-\infty,0[$.

Se $0<x\leq4$, $\left|\dfrac{x-4}{x}\right|>1\Leftrightarrow-\dfrac{x-4}{x}>1\Leftrightarrow\dfrac{-2x+4}{x}>0\Leftrightarrow0<x<2$. Logo $x\in\,]0,2[$.

Se $x>4$, $\left|\dfrac{x-4}{x}\right|>1\Leftrightarrow\dfrac{x-4}{x}>1\Leftrightarrow-\dfrac{4}{x}>0\Leftrightarrow x<0$. Logo $x\in\emptyset$.

Assim
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\left|1-4x^{-1}\right|>1\right\}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,2\right[.$$
Conjunto dos majorantes de A: $[2,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

$\sup A=2$.

A não tem máximo pois $\sup A\notin A$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(14) Seja $A=\{x\in\mathbb{R}:|x^2-1|\leq3\}=\{x\in\mathbb{R}:|(x-1)(x+1)|\leq3\}$.

Se $x\leq-1$, $|(x-1)(x+1)|\leq3\Leftrightarrow(x-1)(x+1)\leq3\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\leq0\Leftrightarrow-2\leq x\leq2$. Logo $x\in[-2,-1]$.

Se $-1<x<1$, $|(x-1)(x+1)|\leq3\Leftrightarrow-(x-1)(x+1)\leq3\Leftrightarrow-2-x^2\leq0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. Logo $x\in\,]-1,1[$.

Se $x\geq1$, $|(x-1)(x+1)|\leq3\Leftrightarrow(x-1)(x+1)\leq3\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\leq0\Leftrightarrow-2\leq x\leq2$. Logo $x\in[1,2]$.

Assim
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\left|x^2-1\right|\leq3\right\}=[-2,-1]\cup\left]-1,1\right[\cup[1,2]=[-2,2].$$
Conjunto dos majorantes de A: $[2,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,-2]$.

$\sup A=2,\quad\inf A=-2,\quad\max A=2,\quad\min A=-2.$

(15) Seja $A=\{x\in\mathbb{R}:|x^2-2x-15|\geq9\}=\{x\in\mathbb{R}:|(x+3)(x-5)|\geq9\}$.

Se $x\leq-3$, $|(x+3)(x-5)|\geq9\Leftrightarrow(x+3)(x-5)\geq9\Leftrightarrow(x-6)(x+4)\geq0\Leftrightarrow(x\leq-4\ \text{ ou }\ x\geq6)$. Logo $x\in\,]-\infty,-4]$.

Se $-3<x<5$, $|(x+3)(x-5)|\geq9\Leftrightarrow-(x+3)(x-5)\geq9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{7}\right)\left(x-1-\sqrt{7}\right) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}\right]$. Logo $x \in \left[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}\right]$.

Se $x \geq 5$, $|(x+3)(x-5)| \geq 9 \Leftrightarrow (x+3)(x-5) \geq 9 \Leftrightarrow (x-6)(x+4) \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -4 \text{ ou } x \geq 6)$. Logo $x \in [6, +\infty[$.

Assim

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - 2x - 15\right| \geq 9\right\} =]-\infty, -4] \cup \left[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}\right] \cup [6, +\infty[\,.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(16) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x\,|x-1| \leq 2\}$.

Se $x \leq 1$, $x\,|x-1| \leq 2 \Leftrightarrow x(-x+1) \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Logo $x \in]-\infty, 1]$.

Se $x > 1$, $x\,|x-1| \leq 2 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$. Logo $x \in]1, 2]$.

Assim

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x\,|x-1| \leq 2\} =]-\infty, 1] \cup]1, 2] =]-\infty, 2]\,.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

$\sup A = \max A = 2$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(17) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : 4 < |x+2| + |x-1| < 5\}$.

Se $x \leq -2$, $4 < |x+2| + |x-1| < 5 \Leftrightarrow 4 < -x-2-x+1 < 5 \Leftrightarrow -3 < x < -\dfrac{5}{2}$. Logo $x \in \left]-3, -\dfrac{5}{2}\right[$.

Se $-2 < x < 1$, $4 < |x+2| + |x-1| < 5 \Leftrightarrow 4 < x+2-x+1 < 5 \Leftrightarrow 4 < 3 < 5 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Logo $x \in \emptyset$.

Se $x \geq 1$, $4 < |x+2| + |x-1| < 5 \Leftrightarrow 4 < x+2+x-1 < 5 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < x < 2$. Logo $x \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$.

Assim

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 4 < |x+2| + |x-1| < 5\} = \left]-3, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, 2\right[\,.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -3]$.

$\sup A = 2, \quad \inf A = -3$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(18) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{4}{|x|} < 2\right\}$.

Se $x < 0$, $\dfrac{4}{|x|} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{-x} < 2 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{x} < 2 \Leftrightarrow -4 > 2x \Leftrightarrow x < -2$. Logo $x \in]-\infty, -2[$.

Se $x > 0$, $\dfrac{4}{|x|} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x} < 2 \Leftrightarrow 4 < 2x \Leftrightarrow x > 2$. Logo $x \in \left]2, +\infty\right[$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{4}{|x|} < 2\right\} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(19) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : (2x+3)^6 (x-2) \geq 0\right\}$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : (2x+3)^6 (x-2) \geq 0\right\} = \left\{-\frac{3}{2}\right\} \cup \left[2, +\infty\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right]$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf A = \min A = -\dfrac{3}{2}$.

(20) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+4| < |x-3|\}$.

Se $x \leq -4$, $|x+4| < |x-3| \Leftrightarrow -x-4 < -x+3 \Leftrightarrow -4 < 3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Logo $x \in \left]-\infty, -4\right]$.

Se $-4 < x < 3$, $|x+4| < |x-3| \Leftrightarrow x+4 < -x+3 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$. Logo $x \in \left]-4, -\dfrac{1}{2}\right[$.

Se $x \geq 3$, $|x+4| < |x-3| \Leftrightarrow x+4 < x-3 \Leftrightarrow 7 < 0$. Logo $x \in \emptyset$.

Assim
$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+4| < |x-3|\} = \left]-\infty, -4\right] \cup \left]-4, -\frac{1}{2}\right[= \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

$\sup A = -\dfrac{1}{2}$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(21) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : |x(x-3)| > |1-3x|\}$.

Se $x \leq 0$, $|x(x-3)| > |1-3x| \Leftrightarrow x(x-3) > 1-3x \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 1)$. Logo $x \in \left]-\infty, -1\right[$.

Se $0 < x < \dfrac{1}{3}$, $|x(x-3)| > |1-3x| \Leftrightarrow -x(x-3) > 1-3x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2}$. Logo $x \in \left]3 - 2\sqrt{2}, \dfrac{1}{3}\right[$.

Se $\frac{1}{3} \leq x < 3$, $|x(x-3)| > |1-3x| \Leftrightarrow -x(x-3) > -1+3x \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow -1<x<1$.
Logo $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right[$.

Se $x \geq 3$, $|x(x-3)| > |1-3x| \Leftrightarrow x(x-3) > -1+3x \Leftrightarrow x^2-6x+1>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x > 3+2\sqrt{2} \text{ ou } x < 3-2\sqrt{2}\right)$. Logo $x \in \left]3+2\sqrt{2}, +\infty\right[$.

Assim

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x(x-3)| > |1-3x|\} =]-\infty, -1[\cup \left]3-2\sqrt{2}, \frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{3}, 1\right[\cup \left]3+2\sqrt{2}, +\infty\right[= \\ &=]-\infty, -1[\cup \left]3-2\sqrt{2}, 1\right[\cup \left]3+2\sqrt{2}, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(22) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log\frac{x}{2} \leq 0\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} > 0\right\}$.

$\log\frac{x}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$.

$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{k}$, com $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Assim

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log\frac{x}{2} \leq 0\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} > 0\right\} =]0,2] \setminus \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 0]$.

$\sup A = \max A = 2, \quad \inf A = 0$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(23) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| = 2|x|\}$.

Se $x \leq 0$, $|x-3| = 2|x| \Leftrightarrow -x+3 = -2x \Leftrightarrow x = -3$. Logo $x \in \{-3\}$.

Se $0 < x < 3$, $|x-3| = 2|x| \Leftrightarrow -x+3 = 2x \Leftrightarrow x = 1$. Logo $x \in \{1\}$.

Se $x \geq 3$, $|x-3| = 2|x| \Leftrightarrow x-3 = 2x \Leftrightarrow x = -3$. Logo $x \in \{-3\}$.

Assim

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| = 2|x|\} = \{-3, 1\}.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[1, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -3]$.

$\sup A = 1, \quad \inf A = -3, \quad \max A = 1, \quad \min A = -3$.

(24) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x + |x| < 1\} \cup \{0\}$.

Se $x \leq 0$, $x + |x| < 1 \Leftrightarrow x - x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Logo $x \in]-\infty, 0]$.

Se $x > 0$, $x + |x| < 1 \Leftrightarrow x + x < 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$. Logo $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.

Assim
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x + |x| < 1\} \cup \{0\} =]-\infty, 0] \cup \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \{0\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

$\sup A = \dfrac{1}{2}$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(25) Seja $A = \{x : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \wedge x > 0\}$.

Assim
$$A = \{x : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \wedge x > 0\} =]0, +\infty[\cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}).$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 0]$.

$\inf A = 0$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(26) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x^3+2x} \leq 0\right\}$.

$\dfrac{x+1}{x^3+2x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x(x^2+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x^3+2x} \leq 0\right\} = [-1, 0[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[0, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -1]$.

$\sup A = 0$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

$\inf A = \min A = -1$.

(27) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q} : \dfrac{x+1}{x^3+2x} \leq 0\right\}$.

$\dfrac{x+1}{x^3+2x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x(x^2+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q} : \frac{x+1}{x^3+2x} \leq 0\right\} = \emptyset.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\mathbb{R}$.

Conjunto dos minorantes de A: $\mathbb{R}$.

A não tem nem supremo nem ínfimo. Logo A não tem nem máximo nem mínimo.

(28) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x \geq e^{-x}\}$.

$e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : e^x \geq e^{-x}\right\} = [0, +\infty[\,.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 0]$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf A = \min A = 0$.

(29) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^3 + 2x^2 \leq 0\}$.

$x^4 - 3x^3 + 2x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \left(x^2 - 3x + 2\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 3x + 2 \leq 0 \;\text{ ou }\; x = 0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left((x-1)(x-2) \leq 0 \;\text{ ou }\; x = 0\right) \Leftrightarrow (1 \leq x \leq 2 \;\text{ ou }\; x = 0)$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^3 + 2x^2 \leq 0\right\} = \{0\} \cup [1, 2]\,.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 0]$.

$\sup A = \max A = 2$.

$\inf A = \min A = 0$.

(30) Seja $A = \{x \in \mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q} : |x - 2| \geq 2\,|x + 4|\}$.

Se $x \leq -4$, $|x - 2| \geq 2\,|x + 4| \Leftrightarrow -x + 2 \geq -2x - 8 \Leftrightarrow x \geq -10$. Logo $x \in [-10, -4]$.

Se $-4 < x < 2$, $|x - 2| \geq 2\,|x + 4| \Leftrightarrow -x + 2 \geq 2x + 8 \Leftrightarrow x \leq -2$. Logo $x \in\,]-4, -2]$.

Se $x \geq 2$, $|x - 2| \geq 2\,|x + 4| \Leftrightarrow x - 2 \geq 2x + 8 \Leftrightarrow x \leq -10$. Logo $x \in \emptyset$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q} : |x - 2| \geq 2\,|x + 4|\right\} = \left([-10, -4] \cup\,]-4, -2]\right) \cap \left(\mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q}\right) = [-10, -2] \backslash \mathbb{Q}.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[-2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -10]$.

$\sup A = -2, \quad \inf A = -10$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(31) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2 - 9}{\log(x - 1)} \leq 0\right\}$. Tem-se $\dfrac{x^2 - 9}{\log(x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\left((x-3)(x+3) \leq 0 \;\text{ e }\; \log(x-1) > 0\right) \;\text{ ou }\; \left((x-3)(x+3) \leq 0 \;\text{ e }\; \log(x-1) < 0\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[(-3 \leq x \leq 3 \;\text{ e }\; x > 2) \;\text{ ou }\; \left((x \geq 3 \;\text{ ou }\; x \leq -3) \;\text{ e }\; x < 2\right)\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2 < x \leq 3 \;\text{ ou }\; x \leq -3)$. Logo $x \in\,]-\infty, -3] \cup\,]2, 3]$.

Assim
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 9}{\log(x - 1)} \leq 0\right\} = \,]-\infty, -3] \cup\,]2, 3]\,.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[3, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

$\sup A = \max A = 3$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(32) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log \frac{1}{x} \geq 1\right\}$. Tem-se

$\log \frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq e \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e}$ (pois $x > 0$). Logo $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$.

Assim

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log \frac{1}{x} \geq 1\right\} = \left]0, \frac{1}{e}\right].$$

Conjunto dos majorantes de A: $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 0]$.

$\sup A = \max A = \frac{1}{e}, \quad \inf A = 0$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(33) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{e^x(x+1)} \leq 0\right\}$. Tem-se

$\frac{x}{e^x(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 0$. Logo $x \in]-1, 0]$.

Assim

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{e^x(x+1)} \leq 0\right\} =]-1, 0].$$

Conjunto dos majorantes de A: $[0, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -1]$.

$\sup A = \max A = 0, \quad \inf A = -1$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(34) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^2} \geq 0\right\}$. Tem-se

$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2(x-1)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \text{ e } x \notin \{-1, 0, 1\}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > 1 \text{ ou } x < -1)$. Logo $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Assim

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - x^2} \geq 0\right\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(35) Seja $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{\log x} \geq 1 \right\}$. Tem-se

$\dfrac{1}{\log x} \geq 1 \Leftrightarrow [(1 \geq \log x \;\text{ e }\; x > 1) \quad \text{ou} \quad (1 \leq \log x \;\text{ e }\; 0 < x < 1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x \leq e \;\text{ e }\; x > 1) \quad \text{ou} \quad (x \geq e \;\text{ e }\; 0 < x < 1)] \Leftrightarrow 1 < x \leq e$. Logo $x \in \,]1, e]$.

Assim

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\log x} \geq 1 \right\} = \,]1, e] \, .$$

Conjunto dos majorantes de A: $[e, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 1]$.

$\sup A = \max A = e, \quad \inf A = 1$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(36) Seja $A = \left\{ 1 - \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $[2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\left] -\infty, \dfrac{1}{2} \right]$.

$\sup A = \max A = 2, \quad \inf A = \min A = \dfrac{1}{2}$.

(37) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $\left[1 + \dfrac{1}{e}, +\infty \right[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 1]$.

$\sup A = \max A = 1 + \dfrac{1}{e}, \quad \inf A = 1$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(38) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x| < 2x\} \cap [0, 2]$. Tem-se

$|3 - 2x| < 2x \Leftrightarrow -2x < 3 - 2x < 2x \Leftrightarrow \left(0 < 3 \;\text{ e }\; x > \dfrac{3}{4} \right) \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{4}$.

Assim $A = \left] \dfrac{3}{4}, +\infty \right[\cap [0, 2] = \left] \dfrac{3}{4}, 2 \right]$.

Conjunto dos majorantes de A: $[2, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\left] -\infty, \dfrac{3}{4} \right]$.

$\sup A = \max A = 2$.

$\inf A = \dfrac{3}{4}$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(39) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \left(2\,|x + 2| - |x - 1|\right) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 4| - |x - 1| \leq 0\} \cup \{0\}$.

Se $x \leq -2$, $|2x + 4| - |x - 1| \leq 0 \Leftrightarrow -2x - 4 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$. Logo $x \in [-5, -2]$.

Se $-2 < x < 1$, $|2x + 4| - |x - 1| \leq 0 \Leftrightarrow 2x + 4 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$. Logo $x \in \,]-2, -1]$.

Se $x \geq 1$, $|2x+4| - |x-1| \leq 0 \Leftrightarrow 2x+4-x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -5$. Logo $x \in \emptyset$.

Assim

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \left(2\left|x+2\right| - \left|x-1\right|\right) \leq 0\right\} = [-5,-2] \cup \left]-2,-1\right] \cup \{0\} = [-5,-1] \cup \{0\}.$$

Conjunto dos majorantes de A: $[0,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,-5]$.

$\sup A = \max A = 0, \quad \inf A = \min A = -5$.

(40) Seja $A = \{x : \operatorname{sen} x \geq 0\}$.

Tem-se $A = \{x : \operatorname{sen} x \geq 0\} = \underset{k\in\mathbb{Z}}{\cup} [2k\pi, (2k+1)\pi]$.

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

(41) Seja $A = \{x : |x| < 2\pi\}$.

Tem-se $A = \{x : |x| < 2\pi\} =]-2\pi, 2\pi[$.

Conjunto dos majorantes de A: $[2\pi,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,-2\pi]$.

$\sup A = 2\pi$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

$\inf A = -2\pi$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(42) Seja $A = \{x : \operatorname{sen} x \geq 0\} \cap]-2\pi, 2\pi[$.

Tem-se $A =]-2\pi,-\pi] \cup [0,\pi]$.

Conjunto dos majorantes de A: $[\pi,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,-2\pi]$.

$\sup A = \max A = \pi$.

$\inf A = -2\pi$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(43) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n};\, m,n \in \mathbb{N}\right\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $[2,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,0]$.

$\sup A = \max A = 2, \quad \inf A = 0$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(44) Seja $A = \left\{m + \dfrac{1}{n} : m,n \in \mathbb{N}\right\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 1]$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf A = 1$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(45) Seja $A = \left\{n^{(-1)^m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 0]$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf A = 0$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(46) Seja $A = \left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Tem-se $A = \left\{1 - \dfrac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $[1, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.

$\sup A = 1$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

$\inf A = \min A = \dfrac{1}{2}$.

(47) Seja $A = \left\{x \in]-2\pi, 2\pi[\,:\, \dfrac{(x-\pi)\cos\frac{x}{2}}{x} \leq 0\right\} \cap \mathbb{Q}$. Seja $x \in]-2\pi, 2\pi[$. Tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(x-\pi)\cos\frac{x}{2}}{x} &\leq 0 \Leftrightarrow \left[\left(x > 0 \;\text{ e }\; (x-\pi)\cos\frac{x}{2} \leq 0\right) \;\text{ ou }\; \left(x < 0 \;\text{ e }\; (x-\pi)\cos\frac{x}{2} \geq 0\right)\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (0 < x < 2\pi \;\text{ ou }\; -2\pi < x \leq -\pi) \Leftrightarrow x \in]-2\pi, -\pi] \cup]0, 2\pi[\,. \end{aligned}$$

Logo, $A = (]-2\pi, -\pi] \cup]0, 2\pi[) \cap \mathbb{Q}$.

Conjunto dos majorantes de A: $[2\pi, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -2\pi]$.

$\sup A = 2\pi$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

$\inf A = -2\pi$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(48) Seja $A = \{x \in [0, 2\pi] : |\operatorname{sen} x| = |\cos x|\}$. Tem-se $A = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $\left[\dfrac{7\pi}{4}, +\infty\right[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\left]-\infty, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

$\sup A = \max A = \dfrac{7\pi}{4}$.

$\inf A = \min A = \dfrac{\pi}{4}$.

(49) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+2)^2 \log \dfrac{2x-4}{x+1} \leq 0\right\}$. Tem-se $x = -2$ ou $\log \dfrac{2x-4}{x+1} \leq 0$.

$$\begin{aligned}
\log \frac{2x-4}{x+1} &\leq 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{2x-4}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \left(0 < \frac{2x-4}{x+1} \ \text{ e } \ \frac{2x-4}{x+1} \leq 1\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[(x < -1 \ \text{ ou } \ x > 2) \ \text{ e } \ \frac{x-5}{x+1} \leq 0\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [(x < -1 \ \text{ ou } \ x > 2) \ \text{ e } \ -1 < x \leq 5] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2 < x \leq 5 \Leftrightarrow x \in \left]2, 5\right].
\end{aligned}$$

Logo, $A = \{-2\} \cup \left]2, 5\right]$.

Conjunto dos majorantes de A: $[5, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -2]$.

$\sup A = \max A = 5$.

$\inf A = \min A = -2$.

(50) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2}\right)^2 \log \dfrac{x-1}{2} < 0\right\}$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}\right)^2 \log \frac{x-1}{2} &< 0 \Leftrightarrow \left(x \neq 2 \ \text{ e } \ 0 < \frac{x-1}{2} < 1\right) \Leftrightarrow (x \neq 2 \ \text{ e } \ 0 < x-1 < 2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x \neq 2 \ \text{ e } \ 1 < x < 3) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x \in \left]1, 2\right[\cup \left]2, 3\right[.
\end{aligned}$$

Logo, $A = \left]1, 2\right[\cup \left]2, 3\right[$.

Conjunto dos majorantes de A: $[3, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 1]$.

$\sup A = 3$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

$\inf A = 1$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(51) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x\left(e^{2x} + e^x - 2\right)\left(\dfrac{\pi}{3} - \arccos \dfrac{1}{1+x^2}\right) > 0\right\}$. Tem-se

$$\begin{aligned}
x\left(e^{2x} + e^x - 2\right)\left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{1}{1+x^2}\right) &> 0 \Leftrightarrow \left(x > 0 \ \text{ e } \ \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} \leq 1\right) \ \text{ ou } \ \left(x < 0 \ \text{ e } \ \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2}\right. \\
&\Leftrightarrow (x > 0 \ \text{ e } \ -1 < x < 1) \ \text{ ou } \ (x < 0 \ \text{ e } \ -1 < x < 1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow [(0 < x < 1) \ \text{ ou } \ (-1 < x < 0)].
\end{aligned}$$

Logo, $A = \left]-1, 0\right[\cup \left]0, 1\right[$.

Conjunto dos majorantes de A: $[1, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,-1]$.

$\sup A=1$.

A não tem máximo pois $\sup A\notin A$.

$\inf A=-1$.

A não tem mínimo pois $\inf A\notin A$.

(52) Seja $A=\left\{y:\dfrac{y}{y-1}<\dfrac{y-1}{y}\right\}$. Tem-se

$$\begin{aligned}\frac{y}{y-1} \quad &< \quad \frac{y-1}{y}\Leftrightarrow\frac{y^2-(y-1)^2}{y\,(y-1)}<0\Leftrightarrow\frac{2y-1}{y\,(y-1)}<0\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \quad \left[\left(y>\frac{1}{2}\ \text{ e }\ 0<y<1\right)\ \text{ ou }\ \left(y<\frac{1}{2}\ \text{ e }\ (y>1\ \text{ ou }\ y<0)\right)\right]\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}<y<1\ \text{ ou }\ y<0\right).\end{aligned}$$

Logo, $A=]-\infty,0[\,\cup\left]\dfrac{1}{2},1\right[$.

Conjunto dos majorantes de A: $[1,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

$\sup A=1$.

A não tem máximo pois $\sup A\notin A$.

(53) Seja $A=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2\left(e^{x-1}-1\right)\log\left(x+2\right)\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}<0\right\}$. Note-se que, para todo o $x\in\mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Tem-se

$$\begin{gathered}x^2\left(e^{x-1}-1\right)\log\left(x+2\right)\arccos\frac{1}{\operatorname{ch}x}<0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\left[x\neq 0\ \text{ e }\ \left[(x>1\ \text{ e }\ 0<x+2<1)\ \text{ ou }\ (x<1\ \text{ e }\ x+2>1)\right]\right]\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\left(x\neq 0\ \text{ e }\ -1<x<1\right).\end{gathered}$$

Logo, $A=]-1,0[\,\cup\,]0,1[$.

Conjunto dos majorantes de A: $[1,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,-1]$.

$\sup A=1$.

A não tem máximo pois $\sup A\notin A$.

$\inf A=-1$.

A não tem mínimo pois $\inf A\notin A$.

(54) Seja $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{|x+1|-1}{x-1}\leq 0\right\}$.

Se $x \leq -1$, $\dfrac{|x+1|-1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-1-1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$. Logo $x \in \,]-\infty, -2]$.

Se $x > -1$, $\dfrac{|x+1|-1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1-1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} \leq 0$. Logo $x \in [0, 1[$.

Assim, tem-se $A = \,]-\infty, -2] \cup [0, 1[$.

Conjunto dos majorantes de A: $[1, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $\emptyset$.

A não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

$\sup A = 1$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

(55) Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arctg} x - \pi)\, x^2 \log(2+x) \geq 0\}$. Note-se que

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Tem-se

$$(\operatorname{arctg} x - \pi)\, x^2 \log(2+x) \geq 0 \Leftrightarrow (-2 < x \leq -1 \quad \text{ou } x = 0)\,.$$

Assim, tem-se $A = \,]-2, -1] \cup \{0\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $[0, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, -2]$.

$\sup A = \max A = 0$.

$\inf A = -2$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

(56) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : |\operatorname{sen} x| < \dfrac{1}{2} \;\text{ e }\; x\,(2x-\pi) \leq 0\right\}$.

Tem-se

$$\left(|\operatorname{sen} x| < \frac{1}{2} \;\text{ e }\; x\,(2x-\pi) \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} \;\text{ e }\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{6}.$$

Assim, tem-se $A = \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right[$.

Conjunto dos majorantes de A: $\left[\dfrac{\pi}{6}, +\infty\right[$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty, 0]$.

$\sup A = \dfrac{\pi}{6}$.

A não tem máximo pois $\sup A \notin A$.

$\inf A = \min A = 0$.

3. Sejam $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x \log x} > 0\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x\log x} &> 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{x-1}{x}>0 \ \text{ e } \ \log x>0\right) \ \text{ ou } \ \left(\frac{x-1}{x}<0 \ \text{ e } \ \log x<0\right)\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ [((x>1 \ \text{ ou } \ x<0) \ \text{ e } \ x>1) \ \text{ ou } \ (0<x<1 \ \text{ e } \ x<1)] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ (x>1 \ \text{ ou } \ 0<x<1)\,.
\end{aligned}$$

Assim, tem-se $A =]0,1[\cup]1,+\infty[= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $]-\infty,0]$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf A = 0$.

A não tem mínimo pois $\inf A \notin A$.

Tem-se $A \cup B =]0,1[\cup]1,+\infty[\cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Conjunto dos majorantes de $A \cup B$: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de $A \cup B$: $]-\infty,-1]$.

$A \cup B$ não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf (A \cup B) = \min (A \cup B) = -1$.

4. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < x^2 - 1\right\}, \qquad B = [-2,2]\,.$$

(a) Tem-se

$$\begin{aligned}
|x-1| &< x^2-1 \Leftrightarrow -x^2+1 < x-1 < x^2-1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ \left(-x^2+1 < x-1 \ \text{ e } \ x-1 < x^2-1\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ \left(x^2+x-2>0 \ \text{ e } \ x(x-1)>0\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ ((x>1 \ \text{ ou } \ x<-2) \ \text{ e } \ (x>1 \ \text{ ou } \ x<0)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ (x>1 \ \text{ ou } \ x<-2)\,.
\end{aligned}$$

Assim, tem-se $A =]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$.

(b) Tem-se $A \cap B =]1,2]$.

Conjunto dos majorantes de $A \cap B$: $[2,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de $A \cap B$: $]-\infty,1]$.

$\sup (A \cap B) = \max (A \cap B) = 2$.

$\inf (A \cap B) = 1$.

$A \cap B$ não tem mínimo pois $\inf (A \cap B) \notin (A \cap B)$.

Tem-se $A \cap B \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) =]1,2] \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

Conjunto dos majorantes de $A \cap B \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$: $[2,+\infty[$.

Conjunto dos minorantes de $A \cap B \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$: $]-\infty,1]$.

$\sup(A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) = 2$.

$A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ não tem máximo pois $\sup(A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) \notin (A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}))$.

$\inf(A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) = 1$.

$A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ não tem mínimo pois $\inf(A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})) \notin (A \cap B \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}))$.

5. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1| \right\}, \qquad B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\}, \qquad C = \mathbb{Q}.$$

(a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{x} \quad &\geq \quad |x-1| \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{x} \leq x - 1 \leq \frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{-x^2+1}{x} \leq x - 1 \ \text{ e } \ x - 1 \leq \frac{x^2-1}{x} \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2x^2 - x - 1}{x} \geq 0 \ \text{ e } \ \frac{x-1}{x} \geq 0 \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\left(x \geq 1 \ \text{ ou } \ -\frac{1}{2} \leq x < 0 \right) \ \text{ e } \ (x \geq 1 \ \text{ ou } \ x < 0) \right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x \geq 1 \ \text{ ou } \ -\frac{1}{2} \leq x < 0 \right).
\end{aligned}$$

Assim, tem-se $A = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right[\cup [1, +\infty[$.

(b) Conjunto dos majorantes de A: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de A: $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$.

A não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf A = \min A = -\frac{1}{2}$.

Tem-se $B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Conjunto dos majorantes de B: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de B: $\emptyset$.

B não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

B não é minorado, logo não tem ínfimo nem mínimo.

Tem-se $A \cap C = \left(\left[-\frac{1}{2}, 0 \right[\cup [1, +\infty[\right) \cap \mathbb{Q}$.

Conjunto dos majorantes de $A \cap C$: $\emptyset$.

Conjunto dos minorantes de $A \cap C$: $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$.

$A \cap C$ não é majorado, logo não tem supremo nem máximo.

$\inf(A \cap C) = \min(A \cap C) = -\frac{1}{2}$.

Tem-se $B \cap C = \{0\}$.

Conjunto dos majorantes de $B \cap C$: $[0, +\infty[$.

Conjunto dos minorantes de $B \cap C$: $]-\infty, 0]$.

$\sup(B \cap C) = \max(B \cap C) = 0$.

$\inf(B \cap C) = \min(B \cap C) = 0$.

6. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{1}{2}x + 2\right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.$$

(a) Tem-se

$$\begin{aligned} |x| &\geq \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \left(x \geq \frac{1}{2}x + 2 \;\text{ ou }\; x \leq -\frac{1}{2}x - 2\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x \geq 4 \;\text{ ou }\; x \leq -\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Logo $A \cap B = \left[-3, -\dfrac{4}{3}\right] \cup \{4\}$.

(b) Tem-se

$\sup(A)$ não existe pois A não é majorado;

$\min(A \cap B) = -3$;

$\max(A \cap B) = 4$;

$\inf(A \cap B \cap C) = -3$;

$\sup(A \cap B \cap C) = -\dfrac{4}{3}$;

$\min(A \cap B \cap C)$ não existe pois $\inf(A \cap B \cap C) = -3 \notin A \cap B \cap C$.

7. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq 0\} = [1, +\infty[\,.$$

Tem-se

$\inf A = 0$;

$\min(A \cup C)$ não existe pois $\inf(A \cup C) = 0 \notin A \cup C$;

$\sup(A \cup C)$ não existe pois $A \cup C$ não é majorado;

$\inf(A \cap C) = \inf\{1\} = 1$;

$\min(B \cap C)$ não existe pois $\inf(B \cap C) = 1 \notin B \cap C$;

$\sup(A \cap B)$ não existe pois $A \cap B = \emptyset$ e $\mathbb{R}$ é o conjunto dos majorantes de $\emptyset$.