Instituto Superior Técnico - TagusPark
Matemática Discreta 2020/2021
Exercícios para as aulas de problemas e teorico-práticas

Lista 6

Após a aula teorico-prática e a de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina. Vários dos exercícios (ou muito semelhantes) são apresentados como exemplos ou exercícios resolvidos no Capítulo 2 do livro (alguns de entre eles estão explicitamente indicados abaixo).

1 Equações diofantinas (conclusão)

Resolva os seguintes problemas recorrendo ao que aprendeu sobre equações diofantinas.

1. Uma empresa de transporte de combustível contribui para o abastecimento diário do aeroporto de Lisboa, de acordo com o tráfego previsto. Num certo dia há que transportar 440t de combustível, e tem disponíveis camiões cisterna comcapacidades de 56t e de 24t. Por razões económicas e de estabilidade dos veículos, estes têm de viajar cheios. Como se pode organizar o transporte?

2. Nesta última Páscoa gastei 40 euros na compra de ovos de chocolate e pacotes de amêndoas para oferecer a vários amigos. Cada ovo de chocolate custou 3.20 euros, e cada pacote de amêndoas 2.40 euros, e 6 dos amigos a quem ofereci um destes doces são alérgicos a amêndoas. Quantos ovos de chocolate e quantos pacotes de amêndoas terei comprado?

3. Para visitar um museu, os bilhetes regulares para adultos custam 4.50 euros, mas há bilhetes especiais de 3.10 euros para estudantes ou cidadãos séniores. Os outros visitantes não pagam. Num certo dia, a receita total obtida pelo museu foi 469.20 euros. Calcule quantos bilhetes regulares e quantos especiais foram vendidos nesses dia, sabendo que um grupo de 60 cidadãos séniores, acompanhados por 10 adultos que pagaram bilhetes regulares, visitaram o museu nesse dia.

4. Dirigi-me a um banco para cobrar um cheque de m euros e n cêntimos. Por engano, o funcionário trocou os euros com os cêntimos e deu-me n euros e m cêntimos. Tendo dado conta do erro, deu-me mais 1 euro e 11 cêntimos. Surpreendido, disse-lhe que ainda estava enganado...Para corrigir o engano, acrescentou ao que já me havia dado uma quantia exatamente igual. Agora o valor estava certo! Determine o valor do cheque (use cêntimos na resolução do problema).

5. Um comerciante encomendou 19 embalagens grandes e 3 embalagens pequenas de berlindes, todos idênticos. A encomenda chegou-lhe com as embalagens rebentadas e os berlindes espalhados no fundo de uma caixa. Ajude o comerciante a refazer a encomenda com novas embalagens, determinando o número original de berlindes nas embalagens grandes e pequenas, sabendo que o número total de berlindes é 224. (Livro: exemplo 17)

6. O *reverso* de um número natural n é o número natural cujos dígitos são os de n, mas por ordem inversa (por exemplo, o reverso 1467 é 7641). A diferença entre um número natural n e o quádruplo do seu reverso é igual a 6. Determine n sabendo que tem três dígitos, e que o seu dígito das unidades é igual ao seu dígito das dezenas

7. Um "mágico" no seu espetáculo faz sempre o seguinte número: escolhe ao acaso um espetador e pede-lhe que, em silêncio, multiplique o dia do mês do seu aniversário por 12, que multiplique o número do mês do seu aniversário por 31 (janeiro é 1, fevereiro é 2, etc.), e, por último, que some os dois valores obtidos

e diga em voz alta o valor dessa soma. Após uns breves instantes, durante os quais efetua alguns cálculos usando apenas uma caneta e uma folha de papel em branco, o mágico anuncia o dia de aniversário do espetador, e acerta sempre!

(i) Represente o papel do "mágico", procedendo como se segue. Sendo S o valor que a pessoa lhe comunicou

- calcule $A = \frac{5}{12} \times S$ e $B = \frac{13}{31} \times S$
- encontre o único número inteiro K tal que $A < K < B$
- calcule $D = 13 \times S - 31 \times K$ e $M = -5 \times S + 12 \times K$
- diga à pessoa que o dia de aniversário dela é o dia D do mês M e verá que acertou!

(ii) Mostre que a justificação para os cálculos do "mágico" reside na resolução da equação diofantina $31M + 12D = S$ (S é o valor que o espetador diz), cujas soluções são dadas por $M = -5S + 12t$ e $D = 13S - 31t$, com $t \in \mathbb{Z}$ (veja os detalhes no fim da secção 2.2.1 do livro).

2 Mínimo múltiplo comum

O inteiro m diz-se *mínimo múltiplo comum* de $a, b \in \mathbb{Z}$ não nulos se m é o menor inteiro positivo que é simultaneamente múltiplo de a e de b. Notação: $a \smile b$ ou $\text{mmc}(a, b)$.

1. Conclua que $\text{mmc}(a, b) = \text{mmc}(-a, b) = \text{mmc}(a, -b) = \text{mmc}(-a, -b)$, para $a, b \in \mathbb{N}_1$.

2. Mostra-se que $\text{mmc}(a, b) = (a \times b)/\text{mdc}(a, b)$. Use o algoritmo de Euclides para calcular o mínimo múltiplo comum de (i) 54 e 28 (ii) 54 e -28 (iii) 81 e 16 (iv) -34 e -42

3. Conclua que se $a \in \mathbb{N}_1$ e de $b \in \mathbb{N}_1$ são primos entre si, então $\text{mmc}(a, b) = a \times b$.

4. O produto de dois números naturais é 14000 e o seu mínimo múltiplo comum é 700. Calcule esses números. (Livro: exercício resolvido na página 55)

5. Mostre que se $c \in \mathbb{N}_1$ é múltiplo de $a \in \mathbb{N}_1$ e de $b \in \mathbb{N}_1$, então c é múltiplo de $\text{mmc}(a, b)$.
   Sugestão: conclua que o resto r da divisão inteira de c por $\text{mmc}(a, b)$ é necessariamente 0.

3 Congruências módulo n

1. A maioria dos números de cartões de crédito é validada através do algoritmo de Luhn: (1) retira-se o último dígito do número e inverte-se a posição dos restantes; (2) substitui-se cada dígito em posição ímpar pelo seu dobro, exceto quando se obtém um número maior que 9, caso em que primeiro se subtrai 9 e depois se substitui; (3) somam-se todos os dígitos, incluindo o que se removeu no início, e o valor assim obtido tem de ser congruente com 0 módulo 10. Indique quais dos seguintes números são válidos segundo este critério: (i) 4556737586899855 (ii) 4556245018072 (iii) 4556245018079

2. Recorde que para qualquer $d \in \mathbb{N}_1$ (em base 10) se tem $d = d_n \times 10^n + d_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + d_1 \times 10 + d_0$ em que $n \in \mathbb{N}$, d_i é um natural menor que 10 ($i = 1, \ldots, n$) e $d_n \neq 0$ (d_0 é o dígito das unidades, d_1 é o dígito das dezenas, e assim por diante). Use as propriedades das congruências para mostrar que:

   (a) $d \in \mathbb{N}_1$ é múltiplo de 3 se e só se $d_n + d_{n-1} + \ldots + d_1 + d_0$ múltiplo de 3

   (b) $d \in \mathbb{N}_1$ é múltiplo de 4 se e só se $2d_1 + d_0$ é múltiplo de 4

   (c) $d \in \mathbb{N}_1$ é múltiplo de 8 se e só se $4d_2 + 2d_1 + d_0$ é múltiplo de 8

   (d) $d \in \mathbb{N}_1$ é múltiplo de 11 se e só se $(d_0 + d_2 + d_4 + \ldots) - (d_1 + d_3 + d_5 + \ldots)$ é múltiplo de 11.

3. Raciocinando como no Exercício 3.2, estabeleça critérios de divisibilidade por (a) 6 (b) 9 (b) 15 (c) 32

4. Usando as propriedades das congruências e calculando apenas quadrados calcule o resto da divisão de (a) 17^{29} por 5 (b) 7784^{13} por 9 (c) 1247^{38} por 11

5. Usando as propriedades das congruências e calculando apenas quadrados indique o dígito das unidades de (a) 17^{29} (b) 28^{36} (c) 157^{120} e indique o dígito das dezenas de (d) 2848^{8} (e) 157^{20}

6. Conclua que o resto da divisão de $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$ por 15 é 3. (Livro: exercício resolvido na página. 104)

7. Use as propriedades das congruências para mostrar que para cada número natural n se tem

   (a) $6^{2n} \equiv_7 1$ e $6^{2n+1} \equiv_7 6$ (b) $8^{2n} \equiv_9 1$ e $8^{2n+1} \equiv_9 8$ (c) $a^{2n} \equiv_{a+1} 1$ e $a^{2n+1} \equiv_{a+1} a$ com $a \in \mathbb{N}_1$

8. Mostre que as equações seguintes não têm solução em $\mathbb{Z}$:

   (a) $x^2 - 3y = 5$ (c) $3x^2 - 4y = 5$ (e) $x^{22} - x^2 - 11y = 5$ (g) $x^3 + y^2 = 87$

   (b) $x^4 - 4y = 3$ (d) $x^2 - 12y = 5$ (f) $x^{41} - x + 55y = 2$ (h) $x^2 - y^2 = 2002$

9. Mostre que $n(n^2 - 169)(n^2 + 169)$ é múltiplo de 30 qualquer que seja o número natural n.

10. Mostre que para todo $x \in \mathbb{Z}$

    (a) $x^3 + 5x \equiv_3 0$ (c) $x^4 - x^2 \equiv_4 0$ (e) $x^8 \equiv_5 x^4$ (g) $x^{25} \equiv_7 x$ (i) $x^5 \equiv_{10} x$

    (b) $x^5 \equiv_3 x$ (d) $x^6 + 4x^2 \equiv_5 0$ (f) $x^3 \equiv_6 7x$ (h) $x^{41} \equiv_{11} x$ (j) $x^{41} \equiv_{55} x$

11. Mostre que para todo o $x \in \mathbb{Z}$ se tem que (a) $\frac{x^8 - x^4}{5} \in \mathbb{Z}$ (b) $\frac{x^{22} - 12x^2}{11} \in \mathbb{Z}$ (c) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{7x}{15} \in \mathbb{Z}$