Matemática Discreta
Guião Aula Teórica 1

Cálculo de formas fechadas de somatórios

SEGUNDO MÉTODO:

- útil para somatórios $\sum_{k=p}^{n} u_k$ onde u_k é um polinómio
- baseia-se na noção de POTÊNCIA FATORIAL DE EXPOENTE $r \in \mathbb{N}$

$\boxed{u_k}$	**perturbação da soma** (cap 4)	**cálculo finito explícito** (cap 5)	**cálculo finito implícito** (cap 5)
$a_n k^n + \ldots + a_1 k + a_0$ (polinómio)	$\surd$		$\surd$ (potência fatorial com expoente natural)
$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x)$, $q(x)$ polinómios)			$\surd$ (potência fatorial com expoente negativo)
a^k ou $k^p a^k$ ($a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$)	$\surd$	$\surd$ (estudado hoje aula teorico-prátia)	$\surd$ (integração finita por partes)

DEFINIÇÃO: POTÊNCIA FATORIAL DE EXPOENTE $r \in \mathbb{N}$ E BASE u_k

- $u_k{}^{\underline{0}} =$

- $u_k{}^{\underline{r}} =$ quando $r \geq 1$

Nota que $u_k^{\underline{1}} = u_k$

EXEMPLOS:

- $u_k = 2k$

- $u_k = k + 1$

CASO PARTICULAR: POTÊNCIA FATORIAL DE EXPOENTE $r \in \mathbb{N}$ E BASE $u_k = k$

- $k^{\underline{0}} = 1$
- $k^{\underline{r}} = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times (k-(r-1))$ quando $r \geq 1$

Nota que $k^{\underline{1}} = k$

monómios fatoriais:

polinómios fatoriais:

TEOREMA: $n, p, r \in \mathbb{N}, \quad n \geq p$

Justificação:

<u>SEGUNDO MÉTODO:</u> aplica-se a somatórios $\sum_{k=p}^{n} u_k$ onde u_k é um polinómio

- transforma-se u_k numa potência fatorial de base k e expoente $r \in \mathbb{N}$ (ou combinação linear destas potências)

- usa-se $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} k^{\underline{r}} = \left[\frac{k^{\underline{r+1}}}{r+1}\right]_p^{n+1}$ (teorema anterior)

EXEMPLO SIMPLES:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) =$$

EXEMPLO: Calcular forma fechada para $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(5k^3 + k^2 + k)}$

EXEMPLO: Calcular forma fechada para $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(5k^4 - k^3 - k)}$

EXEMPLO: Calcular forma fechada para $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k^4 - k^3 - k + 2)}$

<u>TEOREMA:</u> $a, b \in \mathbb{R}, \quad n, p \in \mathbb{N}, \quad n \geq p, \quad r \in \mathbb{N}_1$

Justificação: Generalização do resultado anterior (ver cap 5 do livro pags 283/283)

EXEMPLO: Calcular forma fechada para $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k+5)(2k+3)}$

EXEMPLO: Calcular forma fechada para $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(3k+2)(3k-1)(3k-4)}$