CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

1 Transformação de Funções Elementares

Para certas funções reais de variável real $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, na variável t, definimos a transformada de Laplace $F = \mathcal{L}[f] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, na variável s,

por

$$\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{dt}}$$

A transformada só está definida para os valores de $s \in \mathbb{C}$ para os quais o integral impróprio é convergente.

(Nota: As funções f para as quais definimos a transformada de Laplace são as seccionalmente contínuas e de tipo exponencial. Esta última condição significa que existem constantes reais α_0 e c tais que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq c\, e^{\alpha_0 t}$).

A transformação de Laplace é usada por exemplo na Teoria de Sistemas e Sinais, onde permite obter uma descrição mais simples e computável de um sistema: dado um domínio onde um sinal é descrito a partir da variável temporal t, obtém-se um outro domínio, onde aparecem as frequências complexas relacionadas com o sinal, e onde a análise desse sinal se torna mais acessível. Outra aplicação da transformação é a resolução de equações diferenciais, como vamos ver de seguida.

Exemplo:

Se $f = 1$, temos

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, \mathrm{dt} = \lim_{R\to+\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t=R}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} -\frac{1}{s}\left[e^{-sR} - 1\right] = \frac{1}{s}$$

A transformada é válida para $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Exemplo:

Se $f = e^{at}$ (com $a \in \mathbb{R}$), temos

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{at}\, e^{-st}\,\mathrm{dt} = \lim_{R\to+\infty} -\frac{1}{s-a}\left[e^{-(s-a)R} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

A transformada é válida para $\operatorname{Re} s > a$.

Exemplo:

Se $f = \operatorname{sen}(at)$ (com $a \in \mathbb{R}$), temos

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)](s) = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{iat}\, e^{-st}\,\mathrm{dt}$$

$$= \operatorname{Im} \lim_{R\to+\infty} \left.\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right|_0^R$$

$$= \operatorname{Im}\frac{1}{s-ia} = \operatorname{Im}\frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

A transformada é válida para $\operatorname{Re} s > 0$. O último passo não é directo, porque s pode ter parte imaginária não nula, mas a fórmula está correcta porque, fazendo o integral por partes duas vezes, obtemos:

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)](s) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(at)\, e^{-st}\,\mathrm{dt} = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \operatorname{sen}(at)\, e^{-st}\,\mathrm{dt}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left(\operatorname{sen}(at) \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^R - \int_0^R a\cos(at)\,\frac{e^{-st}}{-s}\,\mathrm{dt} \right)$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left(\operatorname{sen}(at) \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^R - a\cos(at) \left.\frac{e^{-st}}{s^2}\right|_0^R - \int_0^R a^2 \operatorname{sen}(at)\,\frac{e^{-st}}{s^2}\,\mathrm{dt} \right)$$

$$= \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}\,\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)](s)$$

Onde o último passo só é válido para $\operatorname{Re} s > 0$ (nos outros casos os limites mostrados não existem).

Resolvendo a equação obtida em ordem a $\mathcal{L}[\operatorname{sen}(at)](s)$, obtemos a fórmula anterior.

Exemplo:

Se $f = \cos(at)$ (com $a \in \mathbb{R}$), temos

$$\mathcal{L}[f](s) = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{iat}\, e^{-st}\, \mathrm{dt} = \operatorname{Re} \frac{1}{s - ia} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

A transformada é válida para $\operatorname{Re} s > 0$.

Exemplo:

Se $f = t$, temos

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} t e^{-st}\, \mathrm{dt} = \lim_{R \to +\infty} \left[\left. \frac{t e^{-st}}{-s} \right|_0^R - \int_0^R \frac{e^{-st}}{-s}\, \mathrm{dt} \right]$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{s} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^R = \frac{1}{s^2}$$

A transformada é válida para $\operatorname{Re} s > 0$.

Exemplo:

Se $f = t^n$, para n natural superior a 1, temos

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}\, \mathrm{dt}$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left[\left. \frac{t^n\, e^{-st}}{-s} \right|_0^R - \int_0^R \frac{n\, t^{n-1}\, e^{-st}}{-s}\, \mathrm{dt} \right]$$

$$= \frac{n}{s} \lim_{R \to +\infty} \int_0^R t^{n-1}\, e^{-st}\, \mathrm{dt}$$

As passagens acima são válidas para $\operatorname{Re} s > 0$.

Obtemos: $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n}{s}\,\mathcal{L}[t^{n-1}]$

e portanto $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

A transformada é válida para $\operatorname{Re} s > 0$.

2 Propriedades da Transformação de Laplace

- Linearidade:

$\boxed{\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] \ \text{ para quaisquer f e g}}$

$\boxed{\mathcal{L}[\alpha\, f] = \alpha\, \mathcal{L}[f] \ \text{ para quaisquer f e } \alpha}$

Podemos aplicar esta propriedade de modo a obter novamente a transformada de Laplace de $\cos(at)$. Note-se que, apesar de só termos definido esta transformação para funções reais, a mesma pode ser extendida a funções complexas: o integral impróprio em causa deve ser convergente.

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+ia+s-ia}{(s-ia)(s+ia)}\right] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

A transformada é válida para $\operatorname{Re} s > 0$.

Nota:

Em geral, $\mathcal{L}[fg] \neq \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]$.

Por exemplo, $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$ mas $\mathcal{L}[t^2] = \dfrac{2}{s^3} \neq \mathcal{L}[t]\,\mathcal{L}[t]$.

- Translacção:

$\boxed{\mathcal{L}[f(t)\, e^{at}](s) = \mathcal{L}[f](s-a)}$

porque $\mathcal{L}[f(t)\, e^{at}](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{at}\, e^{-st}\, \mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(s-a)t}\, \mathrm{dt}$

Exemplo:

$\mathcal{L}[e^{at}] = \mathcal{L}[1](s-a) = \left.\dfrac{1}{s}\right|_{s-a} = \dfrac{1}{s-a}$

- Derivadas da transformação:

$\boxed{\mathcal{L}[t\ f(t)] = -(\mathcal{L}(f))'(s)}$

porque:

$$(\mathcal{L}[f])'(s) = \frac{d}{ds}\left[\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{dt}\right] = \int_0^{+\infty} -t\,f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{dt} = -\mathcal{L}[t\,f(t)]$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}[t] = -(\mathcal{L}[1])' = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2}$$

Em geral:

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n\,f(t)] = (-1)^n \left(\mathcal{L}[f]\right)^{(n)}(s)}$$

- Transformação de derivadas:

Se $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ for finito e $\mathrm{Re}\,s > 0$,

$$\boxed{\mathcal{L}[f'] = s\,\mathcal{L}[f] - f(0)}$$

porque:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f'(t)\,e^{-st}\,\mathrm{dt} = \lim_{R\to+\infty}\left[f(t)\,e^{-st}\Big|_0^R - \int_0^R -s\,f(t)\,e^{-st}\,\mathrm{dt}\right]$$

$$= -f(0) + s\,\mathcal{L}[f]$$

Se $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t)$ forem ambos finitos e $\mathrm{Re}\,s > 0$,

$$\boxed{\mathcal{L}[f''] = s^2\,\mathcal{L}[f] - s\,f(0) - f'(0)}$$

porque:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f''(t)\,e^{-st}\,\mathrm{dt} = \lim_{R\to+\infty}\left[f'(t)\,e^{-st}\Big|_0^R - \int_0^R -s\,f'(t)\,e^{-st}\,\mathrm{dt}\right]$$

$$= -f'(0) + s\,\mathcal{L}[f'] = -f'(0) + s\,(s\,\mathcal{L}[f] - f(0)) = s^2\,\mathcal{L}[f] - s\,f(0) - f'(0)$$

(Alternativamente, também se pode aplicar a propriedade anterior à função f').

Em geral:

$$\boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n\,\mathcal{L}[f] - s^{n-1}\,f(0) - \cdots - s\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

(com condições adequadas nos limites de f e das suas derivadas no infinito.)

3 Aplicação da Transformação de Laplace à Resolução de Equações Diferenciais

Exemplo:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicamos a transformação de Laplace aos dois membros da equação, incluindo as condições iniciais apresentadas:

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[e^{-t}]$$

$$\Rightarrow \; (s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)) - 3(s\mathcal{L}[y] - y(0)) + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \; (s^2 - 3s + 2)\,\mathcal{L}[y] = 1 + \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \; \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)}$$

$$\Rightarrow \; y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)}\right]$$

$$\Rightarrow \; y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-3/2}{s-1} + \frac{4/3}{s-2} + \frac{1/6}{s+1}\right]$$

$$\Rightarrow \; y = -\frac{3}{2}\,e^{t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} + \frac{1}{6}\,e^{-t}$$

3.1 Inversas de Transformações de Laplace

Exemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4+s}{s^2+2s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4+s}{s(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{1}{s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = 2 - e^{-2t}$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{(s^2+1)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2} + \frac{-s}{s^2+1}\right] = e^{2t} - \cos t$$

A propriedade de translacção que vimos acima pode também ser vista em termos da inversa da transformação de Laplace:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]\, e^{at}}$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\right] = *$$

Temos $F(s-1) = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)^2}$, donde

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 1 + t$$

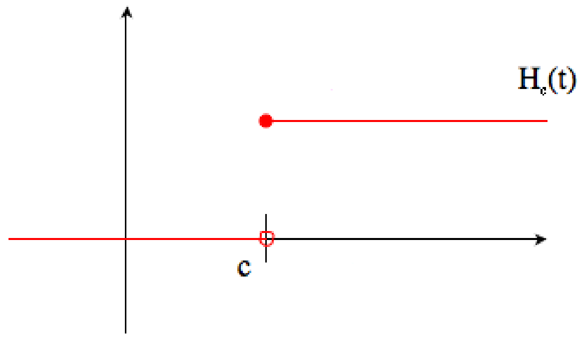
$$\Rightarrow\ * = (1+t)\, e^t$$

4 Funções por Troços

A aplicação da transformação de Laplace à resolução de equações diferenciais é útil sobretudo quando o lado direito dessas equações for dado por uma função com um número finito de descontinuidades.

A *função de Heaviside* $H_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$



Nota: H_0 costuma denotar-se simplesmente por H.

A transformada de Laplace de H_c é, para $c > 0$,

$$\mathcal{L}[H_c(t)] = \int_0^{+\infty} H_c(t)\, e^{-st}\, \mathrm{dt} = \int_c^{+\infty} e^{-st}\, \mathrm{dt} = \lim_{R \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_c^R = \frac{e^{-sc}}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[H_c(t)] = \frac{e^{-sc}}{s}}$$

(válido para $\operatorname{Re} s > 0$)

Para uma função geral:

$$\mathcal{L}[H_c(t)\, f(t-c)] = \int_0^{+\infty} H_c(t)\, f(t-c)\, e^{-st}\, \mathrm{dt} = \int_c^{+\infty} f(t-c)\, e^{-st}\, \mathrm{dt}$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-s\,(u+c)}\, \mathrm{du} = *$$

(Usou-se aqui a transformação $u = t - c$.)

$$* = e^{-sc}\int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-su}\, \mathrm{du} = e^{-sc}\,\mathcal{L}[f]$$

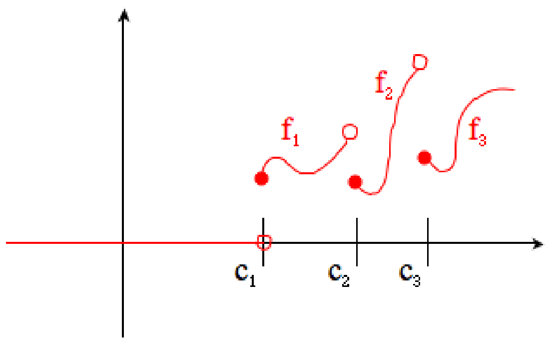
Ou seja:

$$\boxed{\mathcal{L}[H_c(t)\, f(t-c)] = e^{-sc}\,\mathcal{L}[f]}$$

Em termos de transformação inversa, a propriedade anterior fica:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[e^{-sc}\, F(s)] = H_c(t)\,\mathcal{L}^{-1}[F](t-c)}$$

Podemos representar funções por troços (que são as que têm um número finito de descontinuidades) com a ajuda da função de Heaviside (em pontos adequados.) Por exemplo, a função por troços da figura seguinte



é dada por $f = f_1 \cdot (H_{c_1} - H_{c_2}) + f_2 \cdot (H_{c_2} - H_{c_3}) + f_3 \cdot H_{c_3}$.

<u>Exemplo</u>: Aplicação à resolução de equações diferenciais

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = H_1(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Obtemos:

$$\mathcal{L}[y'' - 3y' + 2y] = \mathcal{L}[H_1(t)]$$

$$\Rightarrow\ (s^2 - 3s + 2)\,\mathcal{L}[y] - 1 = \mathcal{L}[H_1(t)] = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} + \frac{1}{s\,(s^2 - 3s + 2)}\, e^{-s}$$

$$\Rightarrow \; y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s^2-3s+2)}\,e^{-s}\right]$$

Para o primeiro termo, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3s+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right] = -e^{t}+e^{2t}$$

Para o segundo termo, usamos a propriedade anterior (para inversas) com $c = 1$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s^2-3s+2)}\,e^{-s}\right] = H_1(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s^2-3s+2)}\right]\Big|_{t-1} = H_1(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}\right]\Big|_{t-1}$$

$$= H_1(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2}{s}+\frac{-1}{s-1}+\frac{1/2}{s-2}\right]\Big|_{t-1} = H_1(t)\left[\frac{1}{2}-e^{t}+\frac{1}{2}e^{2t}\right]\Big|_{t-1}$$

$$= H_1(t)\left[\frac{1}{2}-e^{t-1}+\frac{1}{2}e^{2(t-1)}\right]$$

5 Produto de Convolução e Delta de Dirac

5.1 Produto de Convolução

Vimos que, em geral, $\mathcal{L}[fg] \neq \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]$.

Com o *produto de convolução* já temos uma relação destas.

Dadas f e g, definimos

$(f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,\mathrm{du} \quad (\text{para } t > 0.)$

Vê-se facilmente que $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$ e que $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ e que $(cf) * g = c\,(f * g)$, e portanto o produto de convolução é bilinear.

É também comutativo, porque

$$(g * f)(t) = \int_0^t g(t-u)\,f(u)\,\mathrm{du} = \int_t^0 g(v)\,f(t-v)\,(-1)\,\mathrm{dv} = (f * g)(t)$$

(Usou-se a mudança de variável $v = t - u$.)

Em relação à transformação de Laplace, obtemos:

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{+\infty} (f * g)(t)\,e^{-st}\,\mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,\mathrm{du}\,e^{-st}\,\mathrm{dt}$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} f(t-u)\,g(u)\,e^{-st}\,\mathrm{dt}\,\mathrm{du} = \int_0^{+\infty} g(u) \int_u^{+\infty} f(t-u)\,e^{-st}\,\mathrm{dt}\,\mathrm{du}$$

$$= \int_0^{+\infty} g(u) \int_0^{+\infty} f(v)\,e^{-s(v+u)}\,\mathrm{dv}\,\mathrm{du} = \int_0^{+\infty} g(u)\,e^{-su} \int_0^{+\infty} f(v)\,e^{-sv}\,\mathrm{dv}\,\mathrm{du}$$

$$= \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]$$

(Usou-se a mudança de variável $v = t - u$.)

Ou seja:

$\boxed{\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]}$

e

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F\,G] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G]}$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 * 1 = \int_0^t 1 \cdot 1 \,\mathrm{du} = t$$

5.2 Delta de Dirac

Definimos $\delta(t) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t)$,

onde $\delta_a(t) = \dfrac{1}{2a}\Big[H_{-a}(t) - H_a(t)\Big]$.

Quando $a \to 0$, temos que $\delta_a(t) \to 0$ se $t \neq 0$, mas $\delta_a(0) \to +\infty$.

Não se pode pois dizer que δ é uma função (é o que se chama uma *distribuição*).

Podemos ainda assim definir a sua transformação de Laplace de um modo natural. Para isso, começamos por calcular o valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{dt}$ para qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{dt} &= \lim\nolimits_{a\to 0^+} \frac{1}{2a}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} H_{-a}(t) f(t)\,\mathrm{dt} - \int_{-\infty}^{+\infty} H_a(t) f(t)\,\mathrm{dt}\Big] \\
&= \lim\nolimits_{a\to 0^+} \frac{1}{2a}\Big[\int_{-a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt} - \int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt}\Big] \\
&= \lim\nolimits_{a\to 0^+} \frac{1}{2a}\Big[\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{dt}\Big] \\
&= \lim\nolimits_{a\to 0^+} \frac{f(a) + f(-a)}{2} = f(0)
\end{aligned}$$

Podemos então calcular $\mathcal{L}[\delta(t)] = \displaystyle\int_0^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\,\mathrm{dt} = 1$

Ou seja:

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)] = 1}$$

Temos também:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] &= \int_0^{+\infty} \delta(t - t_0)\, e^{-st}\,\mathrm{dt} = \int_{-t_0}^{+\infty} \delta(u)\, e^{-s(u+t_0)}\,\mathrm{du} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)\, e^{-s(u+t_0)}\,\mathrm{du} = e^{-st_0}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-st_0}}$$

E ainda, para qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta(t-t_0)\, f(t)] &= \int_0^{+\infty} \delta(t-t_0)\, f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{dt} = \int_{-t_0}^{+\infty} \delta(u)\, f(u+t_0)\, e^{-s(u+t_0)}\, \mathrm{du} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)\, f(u+t_0)\, e^{-s(u+t_0)}\, \mathrm{du} = e^{-st_0}\, f(t_0).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t-t_0)\, f(t)] = e^{-st_0}\, f(t_0)}$$

Em relação à transformação inversa, temos:

$\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(t)$

e $\mathcal{L}^{-1}[F] = \mathcal{L}^{-1}[F \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[1] = \mathcal{L}^{-1}[F] * \delta$

Isto implica que $\delta(t)$ é a unidade para o produto de convolução:

$$\boxed{f * \delta = \delta * f = f}$$