CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1
1.º TESTE
#B

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

LEE ∞ LEGI ∞ LEIC-T ∞ LERC 14|04|2012 09:00–11:30

Esta prova tem a duração de 1h30m.[1]

1. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + 5x^3 + 6x^2 \leq 0\}$.

   1.1 Mostre que $A = [-3, -2] \cup \{0\}$.

   1.2 Indique o conjunto dos majorantes de A e o conjunto dos minorantes de A. Indique ainda, caso existam, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$.

2. Prove, recorrendo ao princípio de indução matemática, que para todo o $n \geq 1$ se tem $\sum_{k=1}^{n} k/2^k = 2 - (n+2)/2^n$.

3. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas,

   3.1. Se (a_n) e (b_n) são sucessões tais que (a_n) é limitada e (b_n) converge então a sucessão $(a_n b_n)$ converge.

   3.2. Se (a_n) é uma sucessão de termos positivos e $(a_{n+1}/a_n) \to 0$ então $(a_n) \to 0$

4. Considere a sucessão (a_n) definida por recursão através de:

$$a_0 = 1; \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n + 3}{4} \quad \text{(para qualquer } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

   Sabendo que $a_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

   4.1 Mostre que (a_n) é monótona crescente.

   4.2 Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

5. Para cada uma das sucessões seguintes indique se existe limite e, em caso afirmativo, qual (não apresente os cálculos):

$$\text{(a)} \quad x_n = \sqrt{n(n+1)} - n \qquad \text{(b)} \quad y_n = \frac{2^{2n} + n^{10}}{3^n} \qquad \text{(c)} \quad z_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

6. Indique se existem e, em caso afirmativo, quais os seguintes limites (não apresente os cálculos):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}.$$

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que para $x \neq 1$ satisfaz:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}.$$

   7.1 Mostre que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   7.2 Sabendo que f é contínua em $x = 1$ calcule $f(1)$.

8. [0.5] Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida de acordo com o seguinte $f(x) = x$ se $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ e $f(x) = x^2$ se $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Indique, justificando, dois elementos $a, b \in [0,1]$ tais que f é contínua em a e descontínua em b.

---

1. Cotações: 1.1[0.5], 1.2[0.5]; 2[1.0]; 3.1[0.5], 3.2[0.5]; 4.1[0.5], 4.2[0.5]; 5(a)[0.5], 5(b)[0.5], 5(c)[0.5]; 6(a)[0.5], 6(b)[0.5], 6(d)[0.5]; 7.1[1.0], 7.2[1.0]; 8[1.0].