Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Álgebra Linear

Cursos
1 Semestre — 16 de Novembro de 2015

VA

Nome:______________________________
Número:____________________ Curso:__________

Prob.	A	B	C	D	Classificação
1.					
2.					
3.					

4.	1.0	
5.	0.7	
6.	0.7	
7.	0.8	
Nota Final		

- A prova que vai realizar tem a duração de **45 minutos**.
- **Não é** permitido o uso de dispositivos electrónicos de transmissão ou recepção de dados, nem calculadoras ou computadores.
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas no quadro acima, assinalando uma única resposta. As cotações de cada pergunta de escolha múltipla são:

  Certa: **0.6 val.** Errada: - **0.1 val.** Branco: **0.0 val.**

- As perguntas que não são de escolha múltipla devem ser respondidas neste caderno de folhas no espaço em branco após o enunciado da respectiva pergunta. **Não deve desagrafar o caderno de respostas**.

1. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$? **[0.6]**

I.) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-3z=2\}$.
II.) $\mathrm{Sp}\{(1,1,-1)\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=z\}$.
III.) $\mathrm{Sp}\{(1,0,-1)\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0\}$.
IV.) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y+1 \text{ e } x=0\}$.

A) I e III. B) III. C) IV. D) II e III.

---

2. **[0.6]**

I.) Qualquer conjunto formado por seis vectores em $\mathbb{R}^4$ gera $\mathbb{R}^4$.
II.) Se quatro vectores geram o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$ então eles são linearmente independentes.
III.) Se A é uma matriz quadrada $n \times n$ e as suas colunas são constituídas por vectores linearmente independentes, então o sistema $Ax=0$ tem apenas a solução nula.
IV.) Se A é uma matriz de tipo $m \times n$ e as suas colunas são constituídas por vectores linearmente independentes, então o sistema $Ax=0$ tem apenas a solução nula.

Indique a lista completa de afirmações verdadeiras.

A) I, II e III. B) II e III. C) II, III e IV. D) II e IV.

---

3. O espaço vectorial das funções polinomiais de grau menor ou igual a 4 com coeficientes reais e cujo coeficiente de grau 2 é nulo tem dimensão igual a: **[0.6]**

A) 5
B) 4
C) 3
D) 2

4. Considere o conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde

$$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (2, 5, 3), v_3 = (-1, -4, c).$$

[0.4]

a) Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ são os vectores linearmente independentes?

b) Considere $c = -3$. Seja $E = \mathrm{Sp}(\{v_1, v_2, v_3\})$ e $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$. **[0.6]**
Quais as dimensões dos espaços vectoriais $E + F$ e $E \cap F$?

5. a) Qual dos seguintes conjuntos constitui uma base de $\mathbb{P}_2$ (o espaço vectorial das funções polinomiais de grau menor ou igual a dois e coeficientes reais)? **[0.4]**

$$\mathcal{A} = \{1+t, t+t^2, -1+t^2\}$$
$$\mathcal{B} = \{1, -1+t, 1-2t+t^2\}$$

b) Calcule as coordenadas de $p(t) = 6 - 5t + 2t^2$ na base que considerou na alínea anterior. **[0.3]**

6. Indicar uma base do espaço vectorial constituído pelas matrizes quadradas de tipo 2×2 cuja diagonal é nula. **[0.7]**

7. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{E}$ a canónica do mesmo espaço. Sabendo que **[0.8]**

$$M_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

quais os vectores da base $\mathcal{B}_2$?