# PRIMITIVAÇÃO

## MÉTODOS DE PRIMITIVAÇÃO

**Definição:** Seja $f(x)$ uma função real de variável real de domínio $\mathscr{D}_f$. Diz-se que a função de variável real $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ num certo intervalo $I \subseteq \mathscr{D}_f$ se, para todo o valor de $x \in I$ , obtemos $F'(x) = f(x)$. Para simbolizar que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ escreve-se $P\left[f(x)\right] = F(x) + C$ ou $\int f(x)dx = F(x) + C$.

**Proposição:** Seja $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva de $f$ em $I$.

(a) Para qualquer constante, $F(x) + C$ é primitiva de $f$ em $I$;

(b) Qualquer outra primitiva de $f$ em $I$ é da forma $F(x) + C$, com C constante.

**Proposição:** Seja $f$ uma função primitivável em $I \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Existe uma e uma só primitiva $F$ de $f$ tal que $F(x) = y$.

## TABELAS DE PRIMITIVAS

Seja $u = f(x)$ e $k$, $a$ e $\alpha$ constantes:

(a) $P[k] = k\,x$;

(b) $P\left[\sec(u)\operatorname{tg}(u)u'\right] = \sec(u)$;

(c) $P[k\,u] = k\,P[u]$;

(d) $P\left[\operatorname{cosec}(u)\operatorname{cotg}(u)u'\right] = -\operatorname{cosec}(u)$;

(e) $P\left[u^\alpha u'\right] = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$;

(f) $P\left[\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right] = \operatorname{arcsen}(u) = -\arccos(u)$;

(g) $P\left[\frac{u'}{u}\right] = \ln|u|$;

(h) $P\left[\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\right] = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) = -\arccos\left(\frac{u}{a}\right)$;

(i) $P\left[\frac{u'}{2\sqrt{u}}\right] = \sqrt{u}$;

(j) $P\left[\frac{u'}{1+u^2}\right] = \operatorname{arctg}(u) = -\operatorname{arccotg}(u)$;

(k) $P\left[e^u u'\right] = e^u$;

(l) $P\left[\frac{u'}{a^2+u^2}\right] = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg}\left(\frac{u}{a}\right)$;

(m) $P\left[a^u u'\right] = \frac{a^u}{\ln(a)}$;

(n) $P\left[\frac{1}{x\ln(x)}\right] = \ln\left|\ln(x)\right|$;

(o) $P\left[\operatorname{tg}(u)u'\right]=-\ln\left|\cos(u)\right|$; (p) $P\left[\operatorname{cotg}(u)u'\right]=\ln\left|\operatorname{sen}(u)\right|$;

(q) $P\left[\operatorname{sen}(u)u'\right]=-\cos(u)$; (r) $P\left[\sec(u)u'\right]=\ln\left|\sec(u)+\operatorname{tg}(u)\right|$;

(s) $P\left[\cos(u)\ u'\right]=\operatorname{sen}(u)$; (t) $P\left[\operatorname{cosec}(u)u'\right]=-\ln\left|\operatorname{cosec}(u)+\operatorname{cotg}(u)\right|$;

(u) $P\left[\sec^2(u)u'\right]=\operatorname{tg}(u)$; (v) $P\left[\operatorname{cosec}^2(u)u'\right]=-\operatorname{cotg}(u)$;

(w) $P\left[\cos^2(u)\right]=P\left[\frac{1+\cos(2u)}{2}\right]$; (x) $P\left[\operatorname{sen}^2(u)\right]=P\left[\frac{1-\cos(2u)}{2}\right]$;

(y) $P\left[\operatorname{tg}^2(u)\right]=P\left[\sec^2(u)-1\right]$; (z) $P\left[\operatorname{cotg}^2(u)\right]=P\left[\operatorname{cosec}^2(u)-1\right]$.

## MÉTODOS GERAIS DE PRIMITIVAÇÃO

| **Regra de Derivação** | **Método de Primitivação** |
|---|---|
| Soma | Por decomposição |
| Produto | Por partes |
| Função composta | Por substituição |

### Primitivação por decomposição

Sejam $f$ e $g$ funções primitiváveis definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$. Atendendo ao facto de que a soma de duas funções é uma função temos:

$$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

### Primitivação por partes

O método de primitivação por partes é um método aplicável ao produto de funções utilizando a regra de derivação do produto de duas funções e a definição de primitiva.

Sejam $u$ e $v$ duas funções reais de variável real definidas em $I \subseteq \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v$, deriváveis e primitiváveis nesse intervalo.

Derivando o produto $uv$ obtemos:

$P\left[(uv)'\right] = P\left[u'v + uv'\right] \Leftrightarrow$ (por definição de primitiva)

$\Leftrightarrow uv = P\left[u'v\right] + P\left[uv\right] \Leftrightarrow$ (pelo método de decomposição)

$\Leftrightarrow P\left[u'v\right] = uv - P\left[uv'\right]$.

<u>Alguns critérios para a escolha de ***u*** e ***v***:</u>

| **Função** | $u'$ | $v$ |
|---|---|---|
| $f(x)e^x$ | $e^x$ | $f(x)$ |
| $f(x)\operatorname{sen}(x)$ | $\operatorname{sen}(x)$ | $f(x)$ |
| $f(x)\operatorname{arctg}(x)$ | $f(x)$ | $\operatorname{arctg}(x)$ |
| $f(x)\log(x)$ | $f(x)$ | $\log(x)$ |

**Nota:** Se pretendermos primitivar apenas a função inversa de uma das funções trigonométricas ou a função logaritmo podemos aplicar o método de primitivação por partes. Nestes casos, consideramos o produto da função a primitivar pelo factor 1 e fazemos $u' = 1$.

## Primitivação por substituição

Seja $f(x)$ uma função que se pretende primitivar, $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x = \varphi(t)$ uma função injectiva, ou seja, invertível em qualquer intervalo contido no seu domínio. Sabemos, por definição de primitiva que $F(x) = P\left[f(x)\right]$, logo $F'(x) = f(x) = f\left[\varphi(t)\right]$ e, aplicando a regra de derivação da função composta, vem:

$$F'(x) = \left[F\left[\varphi(t)\right]\right]' = F'\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$$

Temos assim que:

$$F'(x) = \left[F\left[\varphi(t)\right]\right]' = F'\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$$

e

$$F'(x) = f(x) = f\left[\varphi(t)\right],$$

logo

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t) = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$$

e então,

$$P\left[f(x)\right] = P\left[F'(x)\right] = P\left[F'\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\right] = P\left[f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\right], \text{ com } x = \varphi(t),$$

ou

$$\int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\,.$$

<u>Algumas substituições aconselháveis:</u>

| **Se em $f(x)$ existe** | **Usa-se para $x = g(t)$** |
|---|---|
| $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ | $x = \frac{a}{b}\operatorname{sen}(t) \ \vee \ x = \frac{a}{b}\cos(t)$ |
| $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ | $x = \frac{a}{b}\operatorname{tg}(t)$ |
| $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ | $x = \frac{a}{b}\sec(t)$ |
| $\sqrt{a^2x^2 - b^2}$ | $x = \frac{b}{a}\sec(t)$ |
| $e^{\alpha x}$ | $x = \log(t)$, isto é, $t = e^x$ |
| $\log^{\alpha}(x)$ | $x = e^t$, isto é, $t = \log(x)$ |
| $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ | $x = 2\operatorname{arctg}(t)$, isto é, $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ |

Na tabela acima considera-se $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$.

## Primitivação de funções racionais

Chama-se função racional a uma função da forma $f(x) = \frac{D(x)}{d(x)}$, onde $D(x)$ e $d(x)$ são polinómios em $x$.

**Definição:** Se o grau de $D(x)$ é inferior ao grau de $d(x)$ diz-se que $\frac{D(x)}{d(x)}$ é uma fracção própria. Se o grau de $D(x)$ é superior ou igual ao grau de $d(x)$ diz-se que $\frac{D(x)}{d(x)}$ é uma fracção imprópria.

Ao utilizar a divisão de polinómios, qualquer fracção imprópria se pode transformar na soma de um polinómio com uma fracção própria; assim, dada a fracção $\frac{D(x)}{d(x)}$, com o grau de $D(x)$ superior ou igual ao grau de $d(x)$, obtemos, efectuando a divisão do polinómio:

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

e

$$\frac{D(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)},$$

sendo o grau de $r(x)$ menor que o grau de $d(x)$. Deste modo, a fracção $\frac{r(x)}{d(x)}$ é própria.

<u>1º Caso:</u>

$d(x)$ tem apenas raízes reais simples, isto é, $d(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, então

$$P\left[\frac{r(x)}{d(x)}\right] = P\left[\frac{r(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}\right] = \frac{1}{a}P\left[\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left(A_1 \log|x-x_1| + A_2 \log|x-x_2| + \cdots + A_n \log|x-x_n|\right) + C,\ a, C, A_1 \ldots, A_n \in \mathbb{R}.$$

<u>2º Caso:</u>

$d(x)$ tem raízes reais múltiplas, isto é, $d(x) = a(x-x_1)^k \cdots (x-x_n)^t,\ k, t \in \mathbb{N}$

$$P\left[\frac{r(x)}{d(x)}\right] = P\left[\frac{r(x)}{a(x-x_1)^k \cdots (x-x_n)^t}\right] =$$

$$= \frac{1}{a}P\left[\frac{A_1}{(x-x_1)^k} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x-x_1} + \cdots + \frac{Z_1}{(x-x_n)^t} + \frac{Z_2}{(x-x_n)^{t-1}} + \cdots + \frac{Z_t}{x-x_n}\right] =$$

$$=\frac{1}{a}\left( A_1\,\frac{\left(x-x_1\right)^{-k+1}}{-k+1}+\cdots+A_k\,\log\left|x-x_1\right|+\cdots+Z_t\,\frac{\left(x-x_n\right)^{-t+1}}{-t+1}+\cdots+Z_t\,\log\left|x-x_n\right|\right)+C\,,$$

com $a,C,A_1,\ldots,A_k,Z_1,\ldots,Z_t\in\mathbb{R}$ e $k,t\in\mathbb{N}$.

<u>3º Caso:</u>

$d\left(x\right)$ tem raízes reais simples e/ou múltiplas e raízes não reais simples, isto é, $d\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)^k\cdots\left(bx^2+c\right),\ k\in\mathbb{N}$

$$P\left[\frac{r\left(x\right)}{d\left(x\right)}\right]=P\left[\frac{r\left(x\right)}{a\left(x-x_1\right)^k\cdots\left(bx^2+c\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}P\left[\frac{A_1}{\left(x-x_1\right)^k}+\frac{A_2}{\left(x-x_1\right)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-x_1}+\cdots+\frac{Bx+C}{bx^2+c}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\left[A_1\,\frac{\left(x-x_1\right)^{-k+1}}{-k+1}+\cdots+A_k\,\log\left|x-x_1\right|+\cdots+\frac{B}{2b}\log\left|bx^2+c\right|+\frac{C}{b}\sqrt{\frac{c}{b}}\,\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{c}{b}}x\right)\right]+C\,,$$

com $a,b,c,C,A_1,\ldots,A_k,B\in\mathbb{R}$ e $k\in\mathbb{N}$.

Assim, efectuada a decomposição em elementos simples basta calcular a primitiva de cada um deles. Para isso, recordemos que:

$\int\frac{1}{x-a}\,dx=\ln\left|x-a\right|+C$;

$\int\frac{1}{\left(x-a\right)^k}\,dx=\int\left(x-a\right)^{-k}\,dx=\dfrac{\left(x-a\right)^{-k+1}}{-k+1}+C,\ k\neq 1$;

$\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\operatorname{arctg}\left(x\right)+C$;

$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$;

$\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^k}\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)^{-k}dx=\frac{1}{2}\dfrac{\left(x^2+1\right)^{1-k}}{1-k}+C,\ k\neq 1$.