Exercício 1.– Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \arctan(3x)$, se $x < 0$ e $x^2\exp(1-x^2)$ se $x \geq 0$.

1. Estude a função quanto à continuidade.
2. Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Defina a função f'.
4. Determine os intervalos de monotonia de f e os pontos em que f tem um extremo local.

Exercício 2.– Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(1+\sin^2(2x))/x$ se $x < 0$ e $\arctan(x)$, se $x \geq 0$.

1. Calcule a derivada de f em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
2. Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
3. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

Exercício 3.– Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Sejam $g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ as funções definidas por $g(x) = f(e^x)$, $h(x) = f(\sin x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

$$g''(0) + h''(\pi/2) = f''(1).$$

Exercício 4.– Mostre que a equação $2x + e^x = 0$ tem uma solução e essa solução é única.

Exercício 5.– Seja $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável no domínio e tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n+2}\right).$$

Admitindo que existe $\lim_{x\to 0} h'(x)$ indique o seu valor. Justifique.

Exercício 6.– Use o Teorema de Lagrange para deduzir as seguintes desigualdades:

1. $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y)$ se $0 < y \leq x$ e $n \in \mathbb{N}$.