Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica, Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 3 – Primitivas Por Partes

Parte I – Exercícios Propostos

I.1 Aplicando o método de primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

a) $\mathrm{P}xe^{3x}$

b) $\mathrm{P}x^2e^{2x}$

c) $\mathrm{P}x^7e^{x^4}$

d) $\mathrm{P}\,x\operatorname{sen}(5x)$

e) $\mathrm{P}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$

f) $\mathrm{P}\left(\dfrac{x\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

I.2 Aplicando o método de primitivação por partes, determine a seguinte primitiva:

$$\mathrm{P}e^x\operatorname{sen}(2x)$$

I.3 Aplicando o método de primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

a) $\mathrm{P}\ln(3x)$

b) $\mathrm{P}3\ln^2(5x)$

c) $\mathrm{P}\operatorname{arc\,tg}(2x)$

Parte II – Exercícios Resolvidos

II.1 Aplicando o método de primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

a) $P\left((1-x)e^{1+2x}\right)$

Resolução:

$$P\left((1-x)e^{1+2x}\right) = \frac{1}{2}e^{1+2x}(1-x) - P\frac{1}{2}e^{1+2x}(-1) = \frac{1}{2}e^{1+2x}(1-x) + \frac{1}{2}Pe^{1+2x} = \frac{1}{2}e^{1+2x}(1-x) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}P2e^{1+2x}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = e^{1+2x} \\ v = 1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = Pe^{1+2x} = \frac{1}{2}P2e^{1+2x} = \frac{1}{2}e^{1+2x} \\ v' = -1 \end{cases}$

Usando a regra de primitivação: $P\,u' \cdot e^{u} = e^{u} + C$ em que $\begin{cases} u = 1+2x \\ u' = 2 \end{cases}$

$$= \frac{1}{2}e^{1+2x}(1-x) + \frac{1}{4}e^{1+2x} + C = e^{1+2x}\left(\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{4}\right) + C = e^{1+2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + C = e^{1+2x}\left(\frac{3-2x}{4}\right) + C$$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

b) $P\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) = P\left(\frac{1}{x}\ln(\ln x)\right) = \ln x \ln(\ln x) - P\ln x \frac{1}{x\ln x} = \ln x \ln(\ln x) - P\frac{1}{x} = \ln(x)\ln(\ln x) - \ln x + C$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = \ln(\ln x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = P\frac{1}{x} = \ln x \\ v' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} \end{cases}$

Utilizando a regra de primitivação: $P\frac{u'}{u} = \ln u + C$

c) $P\left(x^2 e^{-x}\right)$

Resolução:

$$P\left(x^2e^{-x}\right) = -e^{-x}x^2 - P\left(-e^{-x}2x\right) = -e^{-x}x^2 - \left(e^{-x}2x - P\left(e^{-x}2\right)\right) = -e^{-x}x^2 - e^{-x}2x + 2Pe^{-x}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = e^{-x} \\ v = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = -P{-e^{-x}} = -e^{-x} \\ v' = 2x \end{cases}$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = u\,v - P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u' = -e^{-x} \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = P-e^{-x} = e^{-x} \\ v' = 2 \end{cases}$

$$= -e^{-x}x^2 - e^{-x}2x + 2\quad(-1)P\left(-e^{-x}\right) = -e^{-x}x^2 - e^{-x}2x - 2e^{-x} + C$$

Usando a regra de primitivação: $P\,u' \cdot e^{u} = e^{u} + C$ em que $\begin{cases} u = -x \\ u' = -1 \end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

d) $P(\operatorname{arc\,sen} x)$

Resolução:

$$P(\operatorname{arc\,sen} x) = P(1\cdot \operatorname{arc\,sen} x) \underset{\uparrow}{=} x \operatorname{arc\,sen} x - P\left(x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x\operatorname{arc\,sen} x - P\left(x\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = x\operatorname{arc\,sen} x - P\left(x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\operatorname{arc\,sen} x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} x\operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{-2}P\left(-2x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \underset{\uparrow}{=} x\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = x\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot u^k = \dfrac{u^{k+1}}{k+1}+C,\ k\neq -1$

em que $\begin{cases} u=1-x^2,\ k=-\dfrac{1}{2} \\ u'=-2x\end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

$$= x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

e) $P(\cos(\ln x))$

Resolução:

Como temos apenas um factor que não sabemos primitivar $(\cos(\ln x))$, introduzimos o factor 1. Devemos começar a primitivar pelo factor 1, isto é, $u'=1$.

Assim,

$$P(\cos(\ln x)) = P(1\cdot\cos(\ln x)) \underset{\uparrow}{=} x\cos(\ln x) - P\left(x\left(-\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)\right)\right) = x\cos(\ln x) + P(\operatorname{sen}(\ln x))$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\cos(\ln x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=-(\ln x)'\operatorname{sen}(\ln x) = -\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)\end{cases}$

$$\underset{\uparrow}{=} x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - P\left(x\left(\frac{1}{x}\cos(\ln x)\right)\right)$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=1 \\ v=\operatorname{sen}(\ln x)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=P1=x \\ v'=(\ln x)'\cos(\ln x) = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)\end{cases}$

$$= x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - P(\cos(\ln x))$$

Temos que,

$$P(\cos(\ln x)) = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - P(\cos(\ln x))$$

$$\Leftrightarrow P(\cos(\ln x)) + P(\cos(\ln x)) = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) + C$$

$$\Leftrightarrow 2P(\cos(\ln x)) = x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) + C$$

$$\Leftrightarrow P(\cos(\ln x)) = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x)\right) + C$$

f) $P\left(\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)$

Resolução:

Como temos apenas um factor que não sabemos primitivar $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, introduzimos o factor 1. Devemos começar a primitivar pelo factor 1, isto é, $u'=1$.

Assim,

$$P\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)=P\left(1\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)\underset{\uparrow}{=}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-Px\frac{2}{1-x^2}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=1\\ v=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=P1=x\\ v'=\dfrac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}=\dfrac{\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\dfrac{\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\dfrac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\dfrac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}=\dfrac{2}{(1-x)^2}\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{2}{(1-x)(1+x)}=\dfrac{2}{1-x^2}\end{cases}$

$$=x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-(-1)P\frac{-2x}{1-x^2}\underset{\uparrow}{=}x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln\left|1-x^2\right|+C$$

Utilizando a regra de primitivação : $P\frac{u'}{u}=\ln|u|+C$

g) $P\left(x^2\ln(2x+5)\right)$

Resolução:

$$P\left(x^2\ln(2x+5)\right)\underset{\uparrow}{=}\frac{x^3}{3}\ln(2x+5)-P\frac{x^3}{3}\frac{2}{2x+5}=\frac{x^3}{3}\ln(2x+5)-\frac{1}{3}P\frac{2x^3}{2x+5}$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases}u'=x^2\\ v=\ln(2x+5)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=Pu'=\dfrac{x^{2+1}}{2+1}=\dfrac{x^3}{3}\\ v'=\dfrac{(2x+5)'}{2x+5}=\dfrac{2}{2x+5}\end{cases}$

$$\underset{(*)}{=}\frac{x^3}{3}\ln(2x+5)-\frac{1}{3}P\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}+\frac{-\frac{125}{4}}{2x+5}\right)$$

$$\underset{\uparrow}{=}\frac{x^3}{3}\ln(2x+5)-\frac{1}{3}\left(Px^2-\frac{5}{2}Px+\frac{25}{4}P1-\frac{125}{4}P\frac{1}{2x+5}\right)$$

Pelas propriedades:
$P[f(x)+g(x)]=Pf(x)+Pg(x)$;
$P[\alpha f(x)]=\alpha Pf(x)$

$$\underset{\uparrow}{=}\frac{x^3}{3}\ln(2x+5)-\frac{1}{3}\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}-\frac{5}{2}\frac{x^{1+1}}{1+1}+\frac{25}{4}x-\frac{125}{4}\cdot\frac{1}{2}P\frac{2}{2x+5}\right)$$

Utilizando as regras de primitivação : $Pu'\cdot u^k=\frac{u^{k+1}}{k+1}+C,\ k\neq-1$ e $Pk=kx+C$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Utilizando a regra de primitivação :} \\ P\frac{u'}{u}=\ln|u|+C}}{=} \frac{x^3}{3}\ln(2x+5) \quad -\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{25}{4}x-\frac{125}{8}\ln|2x+5|\right)$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln(2x+5)-\frac{1}{9}x^3+\frac{5}{12}x^2-\frac{25}{12}x+\frac{125}{24}\ln|2x+5|+C$$

Cálculos auxiliares: (*) [esta parte da resolução será justificada na ficha 5 – Funções Racionais]

Efectuemos a divisão do polinómio ($2x^3$) pelo polinómio ($2x+5$):

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 & 2x+5 \\ \cline{2-2}
-2x^3-5x^2 & x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4} \\ \cline{1-1}
\quad -5x^2 & \\
\quad 5x^2+\frac{25}{2}x & \\ \cline{1-1}
\qquad \frac{25}{2}x & \\
\qquad -\frac{25}{2}x-\frac{125}{4} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -\frac{125}{4} &
\end{array}$$

Assim,

$$\frac{2x^3}{2x+5}=x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}+\frac{-\frac{125}{4}}{2x+5}.$$

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III. 1 Aplicando o método de primitivação por partes, determine as seguintes primitivas:

a) $P\frac{x^2-2x+5}{e^x}$ **b)** $P\ x\cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ **c)** $P\frac{\ln x}{x^3}$

d) $P\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **e)** $P\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ **f)** $P\ \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$

g) $P\operatorname{sen}(\ln x)$ **h)** $P\left(e^{2x}\operatorname{sen}\left(e^x\right)\right)$ **i)** $P5\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata