2 Corrente elétrica estacionária

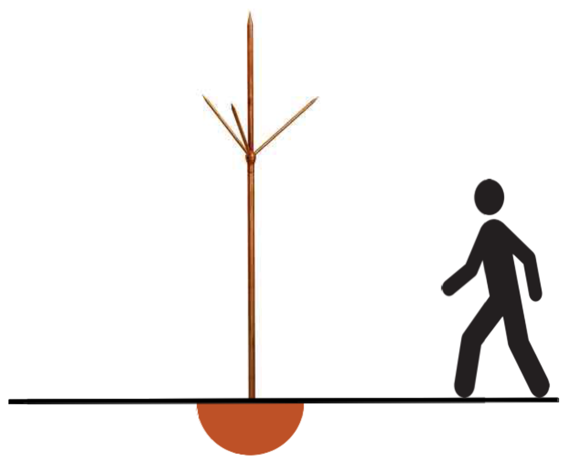
Exercício 2.1: Um feixe de partículas alfa (constituídas por dois protões e dois neutrões), com carga elétrica $q = 2e$, massa $m = 4m_p$, energia cinética 20 $MeV/partícula$ transporta uma corrente elétrica de 0,25 μA (nota: 1 $eV = 1{,}6 \times 10^{-19} C \times 1V$).

a) Determine o número de partículas alpha, N, que atravessam uma superfície plana perpendicular ao feixe em cada segundo.
b) Que diferença de potencial foi aplicada às partículas para as levar do estado de repouso ao estado cinético do feixe?

Exercício 2.2: Um fio de cobre cilíndrico de raio $r = 1$ mm é percorrido por uma corrente de intensidade 1 A.

a) Calcule a carga que passa por unidade de tempo numa secção do fio.
b) Calcule o módulo da densidade de corrente elétrica.
c) Sabendo que a densidade de eletrões livres no cobre é $8{,}5 \times 10^{28}$ $(eletrões.m^{-3})$, calcule a sua velocidade de deriva. Quanto tempo demora um eletrão a percorrer 1 m?

Exercício 2.3: Um para-raios termina num condutor esférico semienterrado no solo. Uma pessoa dirige-se na sua direção quando este recebe uma descarga de 2000 A. Sabendo que quando se dá a descarga a pessoa está a dar um passo, estando o seu pé da frente a 50 metros do para-raios e o seu pé de trás a 51 metros do para-raios, calcule a diferença de potencial entre os seus pés. (Nota: $\sigma_{c,solo} = 10^{-2}$ $\Omega^{-1}.m^{-1}$)



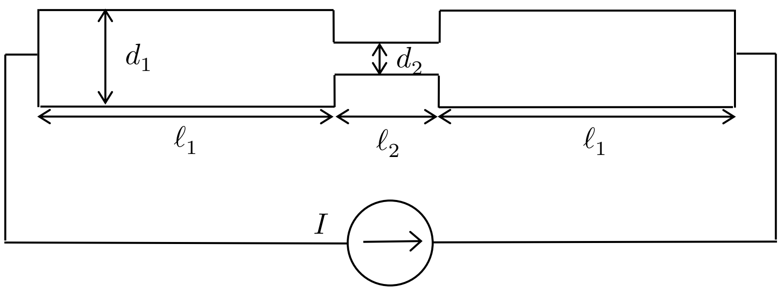
Exercício 2.4: Uma pista de cobre de uma *motherboard* tem 2 mm de largura, 35 μm de espessura e é percorrida por uma corrente de 4 mA quando a sua temperatura é 20℃ (no formulário encontrará as propriedades do cobre relevantes).

a) Calcule o módulo do campo elétrico no interior do cobre.
b) Calcule a resistência elétrica por unidade de comprimento desta pista.
c) Qual a razão entre os valores da resistência elétrica numa situação em que a *motherboard* está desligada, com uma temperatura de 25℃, e numa situação em que a *motherboard está ligada*, com uma temperatura de 40℃? (Nota: no segundo caso a temperatura do cobre é superior à do ambiente devido ao efeito de Joule)

Exercício 2.5: Um automobilista ficou com o carro empanado de noite e não tinha lanterna. Lembrou-se de ter visto no *youtube* um vídeo de como fazer uma lanterna com a bateria do carro e uma mina de um lápis de carvão. Para isso retirou a mina de um lápis que tinha consigo. A mina tinha um diâmetro de 2 mm e um comprimento de 15 cm.

a) Calcule a resistência elétrica da mina sabendo que a resistividade da grafite daquele lápis é $\rho = 16\ \mu\Omega. m$.
b) Sabendo que o automobilista usou a bateria do carro (12 V) calcule a corrente elétrica que percorre a mina do lápis.
c) Calcule a potência dissipada por efeito de Joule na mina (é o suficiente para a pôr incandescente!).

Exercício 2.6: Um fusível é composto por um troço de circuito elétrico em que o condutor tem uma secção muito menor que a dos restantes condutores do circuito. Considere o circuito representado esquematicamente na figura, construído com condutores de dois tipos (1 e 2), de secções circulares de diâmetros d_1 e d_2, comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 e condutividade σ_c.



Neste circuito o condutor do tipo 2 funciona como fusível e uma fonte de corrente impõe uma corrente estacionária I. Determine:

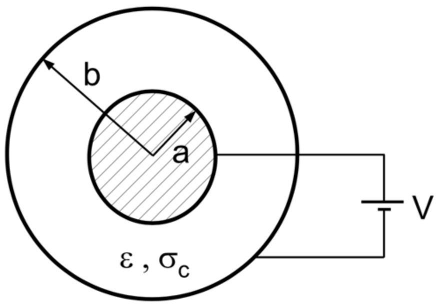
a) a densidade de corrente elétrica em cada um dos condutores.
b) em cada um dos condutores, o campo elétrico no seu interior e a sua resistência elétrica.

c) a razão entre as densidades de potência dissipada por efeito de Joule no condutor do tipo 2 e nos condutores do tipo 1 (p_2/p_1), em função dos respectivos diâmetros. Comente o resultado.

Exercício 2.7: Um cabo coaxial de comprimento L tem um condutor interior de raio a e uma malha condutora de raio interno $b << L$ separados por um plástico de permitividade elétrica ε. O cabo está ligado a uma bateria numa das suas pontas mas a outra ponta não está ligada a nada. No entanto, como o plástico não é um isolante perfeito e tem uma condutividade elétrica σ_c, há uma corrente elétrica I que flui do condutor interior para a malha exterior. Determine:

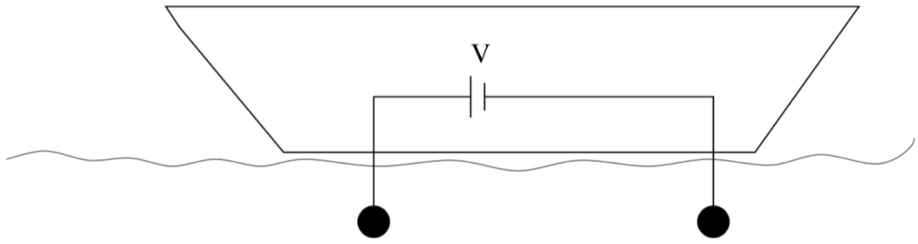
a) a densidade de corrente elétrica no espaço entre os condutores;
b) o campo elétrico no espaço entre os condutores;
c) a resistência elétrica do plástico para esta corrente elétrica;
d) a carga elétrica na superfície dos condutores.

Exercício 2.8: Considere o sistema da figura em que um condutor esférico de raio a está separado por um líquido de condutividade elétrica σ_c e permitividade eléctrica ε, de um outro condutor cuja superfície interna de forma esférica, possui raio b. Os condutores estão ligados a uma bateria que mantém uma diferença de potencial V . Determine:



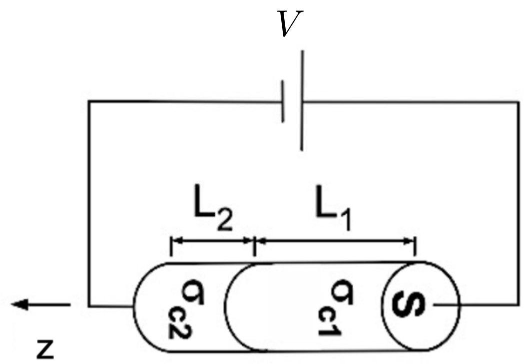
a) a intensidade de corrente elétrica, I, que percorre o circuito;
b) a resistência elétrica do sistema; esboce o gráfico da resistência em função do raio b.
c) Qual a relação entre a e b para a qual a resistência do sistema é 99% da máxima possível (quando $b \to \infty$)?

Exercício 2.9: A medição da condutividade elétrica da água do mar pode fazer-se recorrendo a duas esferas metálicas de raio a, imersas na água e bastante afastadas, que se encontram ligas a uma fonte de tensão V.

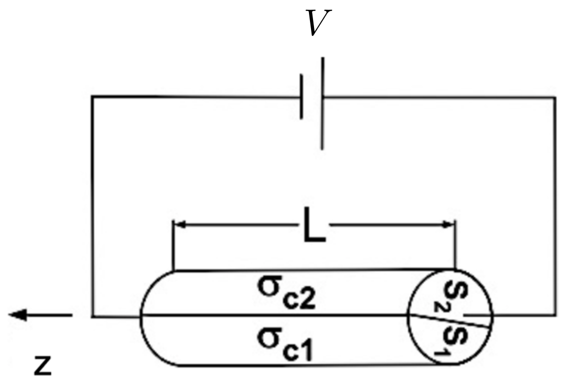


a) Determine a resistência elétrica do circuito (despreze a resistência dos condutores que ligam as esferas e utilize o resultado do problema anterior).
b) Admitindo que a leitura da corrente é I, determine a condutividade elétrica do água do mar.

Exercício 2.10: Calcule a resistência elétrica do sistema representado na figura e compare-a com a resistência de cada uma das suas duas partes.



Exercício 2.11: Calcule a resistência elétrica do sistema representado na figura e compare-a com a resistência de cada uma das suas duas partes.



Soluções

2.1 a) $N = 7{,}8 \times 10^{11}$ *partículas*
b) $V = 10\ MV$

2.2 a) $Q = 1\ C$
b) $J = 3{,}18 \times 10^5\ \ A.m^{-2}$
c) $v = 23{,}4\ \mu m.s^{-1}\ ;\ t \approx 12h$

2.3 a) $V = 12{,}5\ V$

2.4 a) $E = 0{,}96\ mV.m^{-1}$
b) $R' = 0{,}24\ \Omega.m^{-1}$
c) $\frac{R(40°C)}{R(25°C)} = \frac{\rho(40°C)}{\rho(25°C)} = 1{,}057$

2.5 a) $R = 0{,}76\ \Omega$
b) $I = 15{,}7\ A$
c) $P = 188\ W$

2.6 a) $J_1 = \frac{4I}{\pi d_1^2}$, $J_2 = \frac{4I}{\pi d_2^2}$
b) $E_1 = \frac{J_1}{\sigma_c}$, $E_2 = \frac{J_2}{\sigma_c}$
$R_1 = \frac{1}{\sigma_c}\frac{4\ell_1}{\pi d_1^2}$, $R_2 = \frac{1}{\sigma_c}\frac{4\ell_2}{\pi d_2^2}$
c) $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$, *o fusível vai dissipar muito mais potência por efeito de Joule.*

2.7 a) $\vec{J} = \frac{I}{2\pi r L}\ \vec{u}_r$
b) $\vec{E} = \frac{I}{\sigma_c 2\pi r L}\ \vec{u}_r$
c) $R = \frac{1}{\sigma_c}\frac{ln(\frac{b}{a})}{2\pi L}$
d) $Q(a) = \frac{\varepsilon}{\sigma_c} I$, $Q(b) = -Q(a)$

2.8 a) $I = V\sigma_c\ \frac{4\pi ab}{b-a}$
b) $R = \frac{1}{\sigma_c}\frac{b-a}{4\pi ab}$
c) $R_{max} = \frac{1}{\sigma_c}\frac{1}{4\pi a}$
$R = 0{,}99\ R_{max} \Longrightarrow b = 100a$

2.9 a) $R = \frac{1}{2\pi a\sigma_c}$
b) $\sigma_c = \frac{I}{2\pi a V}$

2.10 $R = \frac{L_1}{\sigma_{c1}S} + \frac{L_2}{\sigma_{c2}S} = R_1 + R_2$

2.11 $R = \frac{L}{\sigma_{c1}S_1 + \sigma_{c2}S_2}$, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

2.1

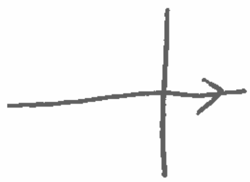
$q = 2e$

$m = 4 m_p$

$E_c = 20$ MeV/partícula

$1\,eV = 1{,}6 \times 10^{-19}\,C \times 1\,V$

$I = 0{,}25\,\mu A$



$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ $\qquad \Delta t = 1s$

a)

$\Delta q = N q$

$N = \frac{I}{q} = \frac{0{,}25\,\mu A}{2e}$

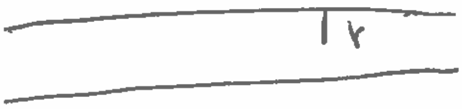
$N = \frac{0{,}25 \times 10^{-6}\,A}{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\,C} = 7{,}8 \times 10^{11}$

b) $qV = E_c$ $\qquad V = \frac{20 \times 10^{6} \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}$

$V = 10 \times 10^{6} = 10^{7}\,V$

2.2

Cobre



$r = 10^{-3}\, m$

$I = 1A$

a) $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ $\qquad \Delta q = I = 1C$

b) $\vec{J} = \rho \vec{v}$

$I = \int_S \bar{J} \cdot \bar{n}\, ds = J S$ $\qquad S = \pi r^2$

$$J = \frac{1A}{\pi (10^{-3})^2} = 3{,}18 \times 10^5\, A/m^2$$

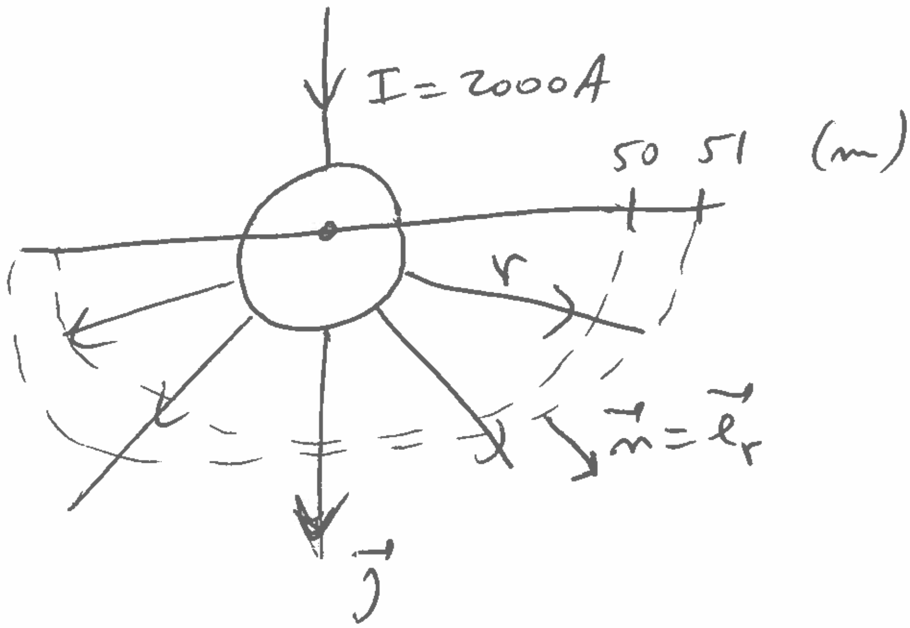
c) $\frac{\rho}{q} = 8{,}5 \times 10^{28}\ el/m^3$

$J = \rho v$ $\qquad v = \dfrac{J}{\rho} = \dfrac{3{,}18 \times 10^5}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 8{,}5 \times 10^{28}}$

$v = 2{,}338 \times 10^{-5}\, m/s$

$l = v t$ $\qquad t = \dfrac{l}{v} = 4{,}27 \times 10^4\, s \simeq 12$ horas

2.3



$$\vec{J} = J_r \vec{e}_r$$

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$i = J_r \frac{4\pi r^2}{2} \qquad J_r = \frac{i}{2\pi r^2}$$

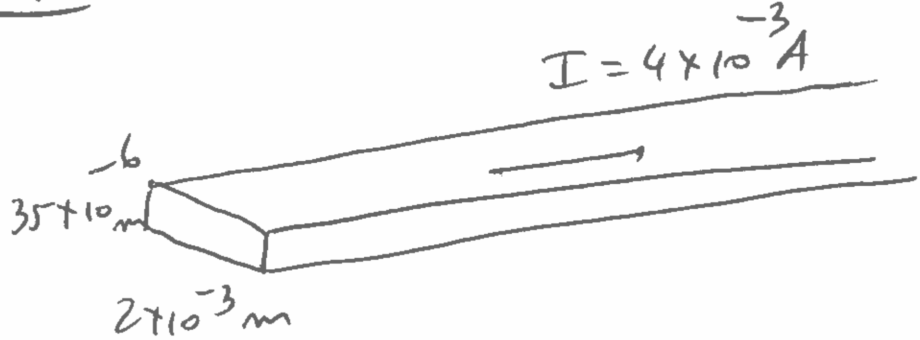
$$E_r = \frac{J_r}{\sigma_c} \qquad \vec{J} = \sigma_c \vec{E} \quad \text{(Ohm)}$$

$$E_r = \frac{i}{2\pi \sigma_c r^2} \qquad \sigma_c = 10^{-2} \Omega^{-1} m^{-1}$$

$$d\phi = -E_r \, dr = -\frac{i}{2\pi\sigma_c} \frac{dr}{r^2}$$

$$V = \frac{i}{2\pi\sigma_c} \left[\frac{1}{50} - \frac{1}{51} \right] = 12{,}5 V$$

2.4



$T = 20°C$

a)

$$\vec{J} = \sigma_c \bar{E}$$

$$S = 2\times10^{-3} \times 35\times10^{-6} = 70\times10^{-9}\, m^2$$

$$JS = I$$

$$E = \frac{I}{\sigma_c S} = \frac{4\times10^{-3}}{70\times10^{-9}} \times 1{,}68\times10^{-8}$$

$$\rho_c = \frac{1}{\sigma_c}$$

$$= 9{,}60\times10^{-3}\ V/m$$

b)

$$R = \rho_c \frac{l}{S} = 1{,}68\times10^{-8} \frac{1}{70\times10^{-9}}$$

$$= 0{,}24\ \Omega$$

2.5

$\updownarrow d = 2mm \rightarrow r = 10^{-3} m$

$l = 15cm = 0{,}15 m$

a) $\rho_c = 16 \times 10^{-6} \Omega m$

$$R = \rho_c \frac{l}{S} = 16 \times 10^{-6} \frac{0{,}15}{\pi \times (10^{-3})^2}$$

$$= 0{,}764 \Omega$$

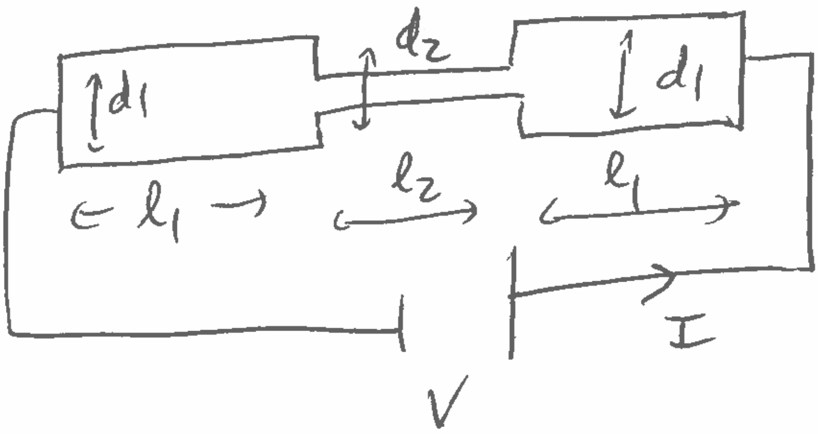
b) $V = RI$ $\qquad V = 12V$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{0{,}76} = 15{,}7 A$$

c) $$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(qV) = IV = RI^2$$

$$P = 0{,}76 \times (15{,}7)^2 = 187{,}5 W$$

2.6



σ_c

a) $J_i = \dfrac{I}{S_i}$

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{I}{S_1} = \dfrac{I}{\pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2} \\[2ex] J_2 = \dfrac{I}{\pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} \end{cases}$$

$$J_1 = \frac{4I}{\pi d_1^2}, \qquad J_2 = \frac{4I}{\pi d_2^2}$$

b) $J = \sigma_c E$

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{4I}{\pi \sigma_c d_1^2} \\[2ex] E_2 = \dfrac{4I}{\pi \sigma_c d_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{1}{\sigma_c} \dfrac{4 l_1}{\pi d_1^2} \\[2ex] R_2 = \dfrac{1}{\sigma_c} \dfrac{4 l_2}{\pi d_2^2} \end{cases}$$

c) $P_1 = R_1 I^2 = \dfrac{1}{\sigma_c} \dfrac{4 l_1}{\pi d_1^2} I^2$

$$P_2 = R_2 I^2 = \frac{1}{\sigma_c} \frac{4 l_2}{\pi d_2^2} I^2$$

$$\left\{ \frac{P_2}{P_1} = \frac{\dfrac{l_2}{d_2^2}}{\dfrac{l_1}{d_1^2}} = \frac{l_2 d_1^2}{l_1 d_2^2} \right.$$

$$P_i = p_i V_i \qquad \begin{aligned} V_1 &= l_1 \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \\ V_2 &= l_2 \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

8

$$\frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{l_2 d_1^2}{l_1 d_2^2}$$

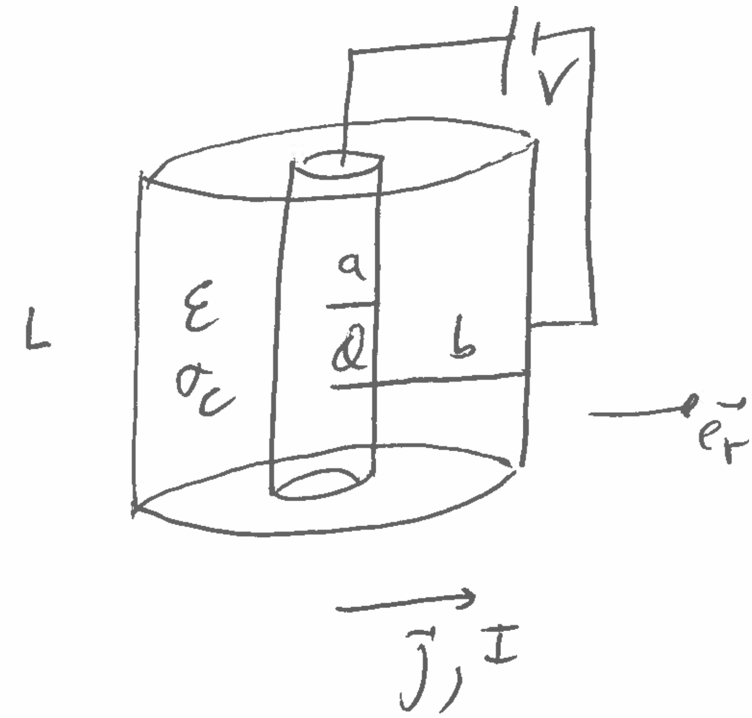
$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{l_1 \pi \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}{l_2 \pi \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} \frac{l_2 d_1^2}{l_1 d_2^2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4$$

$d_2 < d_1$

$\rightarrow \boxed{P_2 >> P_1}$

2.7



Cilíndricas

a) $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$

$$D_r \, 2\pi r L = Q \qquad D_r = \frac{Q}{2\pi r L}$$

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{Q}{2\pi \varepsilon L r} \\[2ex] J_r = \dfrac{Q \sigma_c}{2\pi \varepsilon L r} \end{cases}$$

$$d\phi = -E_r \, dr$$

$$-V = \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} \frac{dr}{r}$$

$$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon L}{} \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$J_r = \frac{2\pi\varepsilon L \sigma_c V}{2\pi\varepsilon L \ln\frac{b}{a}\, r} = \frac{\sigma_c V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r}$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS = 2\pi r L \frac{\sigma_c V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r}$$

$$I = \frac{2\pi \sigma_c L V}{\ln\frac{b}{a}}$$

$$\rightarrow \boxed{J_r = \frac{I}{2\pi L r}} \qquad \rightarrow \vec{J} = J_r \vec{e_r}$$

ou directo

$$I_r = J_r\, 2\pi L r = I$$

b) $$E_r = \frac{J_r}{\sigma_c} = \frac{I}{2\pi \sigma_c L r}$$

c) $V = R I$

$$V = \frac{Q}{2\pi \varepsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$I = \frac{2\pi \sigma_c L}{\ln \frac{b}{a}} V$$

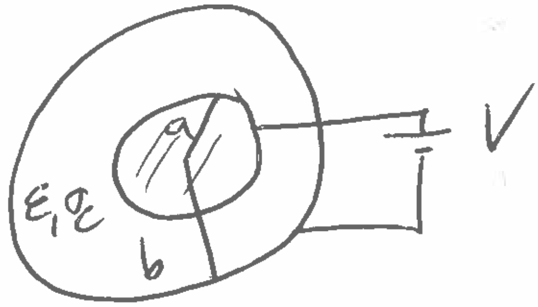
$$\Rightarrow \quad R = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \sigma_c L}$$

d) $$V = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right) I}{2\pi \sigma_c L} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q_a = \frac{\varepsilon}{\sigma_c} I$$

$$Q_b = -Q_a$$

2.8



a) $$\int_S \bar{D} \cdot \bar{n}\, ds = Q \qquad Q = \sigma 4\pi a^2$$

$$D_r 4\pi r^2 = \sigma 4\pi a^2$$

$$D_r = \sigma \left(\frac{a}{r}\right)^2 \qquad E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon}\left(\frac{a}{r}\right)^2$$

$$d\phi = -E_r\, dr$$

$$\phi(r) - \phi(a) = -\frac{\sigma}{\varepsilon} a^2 \int_a^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon} a^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\sigma}{\varepsilon} a^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} a^2 = \frac{V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{abV}{b-a}$$

$$\vec{E} = \frac{abV}{b-a} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$$

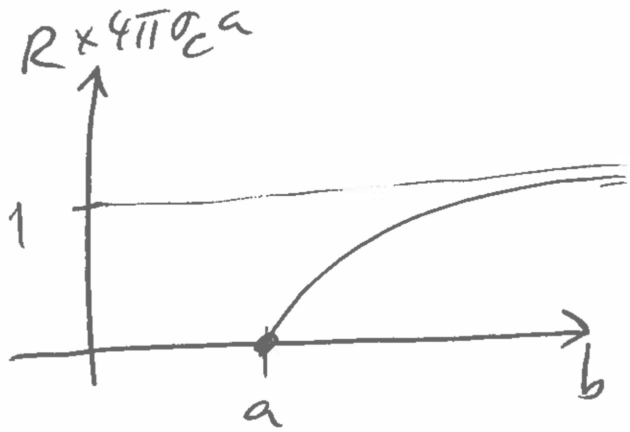
$$i = \int_S \bar{J} \cdot \bar{n} \, ds$$

$$i = JS = \sigma_c ES = \sigma_c \frac{abV}{b-a} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2$$

$$i = 4\pi\sigma_c \frac{abV}{b-a}$$

b) $V = Ri$

$$R = \frac{b-a}{4\pi\sigma_c ab}$$



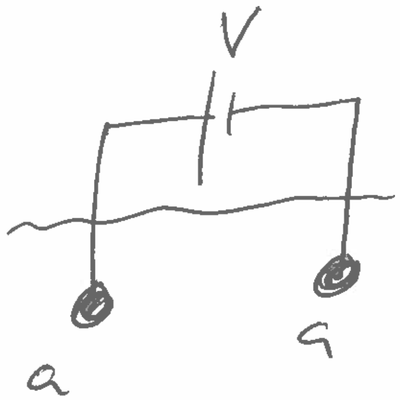
c) $b \gg a$

$$R \to \frac{1}{4\pi\sigma_c a}$$

$R = 0.9 \, R_{max} \Rightarrow b = 10a$

$R = 0.99 \, R_{max} \Rightarrow b = 100a$

2-9



a) $R(1\ esfera) \simeq \dfrac{1}{4\pi\sigma_c a}$ $(b \gg a)$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma_c a}$$

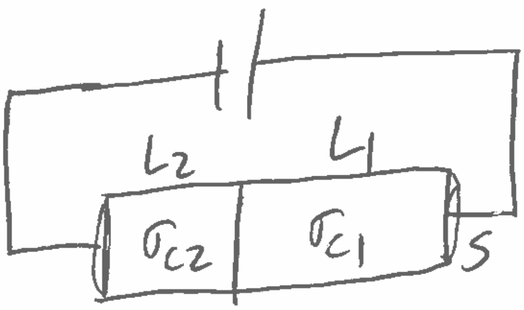
b) $V = R\,i$

$$\frac{V}{i} = R = \frac{1}{2\pi\sigma_c a}$$

$$\sigma_c = \frac{i}{2\pi a V}$$

2.10

✓



$$R = R_1 + R_2$$

$$R_1 = \frac{1}{\sigma_{c1}} \frac{L_1}{S} \qquad R_2 = \frac{1}{\sigma_{c2}} \frac{L_2}{S}$$

$$R = \frac{1}{S}\left(\frac{L_1}{\sigma_{c1}} + \frac{L_2}{\sigma_{c2}}\right)$$

2.11

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R = \frac{\frac{L_1}{\sigma_1 S_1} \cdot \frac{L_2}{\sigma_2 S_2}}{\frac{L_1}{\sigma_1 S_1} + \frac{L_2}{\sigma_2 S_2}} = \frac{L_1 L_2}{\sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \left(\frac{L_1}{\sigma_1 S_1} + \frac{L_2}{\sigma_2 S_2}\right)}$$

$$R = \frac{L_1 L_2}{\cancel{}} \frac{1}{S_2 L_1 \sigma_2 + L_2 \sigma_1 S_1} \quad , L_1 = L_2 = L$$

$$R = \frac{L}{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}$$