INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1
Exame de recuperação
#A

LEE ∞ LEGI ∞ LEIC-T ∞ LERC | 23|06|2012 | 09:00–10:30 **TESTE** | 09:00–12:00 **EXAME**

PRIMEIRA PARTE (CORRESPONDENTE AO PRIMEIRO TESTE)

QUESTÃO 1.1. — Determine, caso existam, os limites das sucessões cujos termos gerais são,

$$\text{(a)}\ \frac{n-\sin(n)}{\sqrt{n^3}+2} \quad \text{(b)}\ \sqrt[n]{n^2+2^n} \quad \text{(c)}\ \frac{3^n+n^2}{2^{2n}-1} \quad \text{(d)}\ \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3}$$

QUESTÃO 1.2. — Considere a sucessão definida por recursão através de,

$$x_0 = 2; \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1}$$

1.2 (a) Mostre que (x_n) é estritamente crescente.

1.2 (b) Sabendo que $x_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

QUESTÃO 1.3. — Prove, recorrendo ao princípio de indução matemática que para todo o natural $n \geq 1$ se tem,

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(3k+2) = (n-1)n(n+2)$$

QUESTÃO 1.4. — Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, para $x \neq 0$ é definida por

$$f(x) = \frac{\arctan(3x)}{x}.$$

1.4 (a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.4 (b) Sabendo que f é contínua em $x = 0$ determine $f(0)$.

1.4 (c) Mostre que f é uma função limitada.

QUESTÃO 1.5. — Considere duas funções contínuas $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Supondo que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = 1$ e $g(1) = 0$, mostre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$. (*Sugestão*: considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$.)

QUESTÃO 1.6. — Indique se são verdadeiras ou falsas (não precisa de justificar):

1.6 (a) Se $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ é contínua então f tem necessariamente um mínimo.

1.6 (b) Se para todo o natural $n > 1$ se tem $f(1/n) = n$ então a função f não pode ser contínua no intervalo $[0,1]$.

1.6 (c) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções e $f \times g$ é uma função contínua então, f e g têm que ser contínuas.

COTAÇÕES:

1.1 (a)	[0.5]
1.1 (b)	[0.5]
1.1 (c)	[0.5]
1.1 (d)	[0.5]
1.2 (a)	[1.0]
1.2 (b)	[1.0]
1.3	[1.0]
1.4 (a)	[1.0]
1.4 (b)	[1.0]
1.4 (c)	[0.5]
1.5	[1.0]
1.6 (a)	[0.5]
1.6 (b)	[0.5]
1.6 (c)	[0.5]

(SEGUNDA PARTE NO VERSO)

SEGUNDA PARTE (CORRESPONDENTE AO SEGUNDO TESTE)

QUESTÃO 2.1. — Calcule, se existirem, os limites seguintes.

$$\text{(A)} \lim_{x\to+\infty} \sin(1/x)(\ln x) \qquad \text{(B)} \lim_{x\to 0^+} [\ln(1/x)]^x$$

QUESTÃO 2.2. — Considere a função real de variável real definida por $f(x) = e^{|x+1|}$. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = -1$.

QUESTÃO 2.3. — O quadro seguinte contém informação relativa ao sinal da derivada de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	n.e	$+$

2.3 (a) Estude f do ponto de vista da monotonia.

2.3 (b) Indique se existem extremos locais de f e em caso afirmativo diga de que tipo são.

QUESTÃO 2.4. — Considere uma função f de classe $C^5(\mathbb{R})$ (i.e., f tem derivada de ordem 5 contínua). Suponha ainda que o polinómio de Taylor de ordem 4 de f no ponto $a = 0$ é $p_{4,0}(x) = 1 + x^4/3$.

2.4 (a) Verifique se f tem um extremo local no ponto $x = 0$ e, em caso afirmativo, indique de que tipo de extremo se trata (i.e., se é um máximo ou mínimo local).

2.4 (b) Supondo que $|f^{(5)}(x)| \leq 1$ para $x \in [0, 1]$, mostre que o erro cometido aproximando $f(x)$ por $p_{4,0}(x)$ no intervalo $[0, 1]$ não excede uma centésima.

QUESTÃO 2.5. — Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \cos^2 t \, dt}{1 - \cos x}.$$

QUESTÃO 2.6. — Determine a área da região do plano que é limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $x = 1$.

QUESTÃO 2.7. — Calcule uma primitiva da função,

$$f(x) = \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)^2}.$$

(*Sugestão*: considere a substituição $t = \ln x$.)

QUESTÃO 2.8. — Considere a série de potências

$$\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^3+5}} x^n.$$

Indique para que valores de x esta série converge absolutamente, converge simplesmente ou diverge.

COTAÇÕES:

2.1	(A)	[1.0]
2.1	(B)	[1.0]
2.2		[1.0]
2.3	(a)	[0.5]
2.3	(b)	[0.5]
2.4	(a)	[1.0]
2.4	(b)	[1.0]
2.5		[1.0]
2.6		[1.0]
2.7		[1.0]
2.8		[1.0]