

Análise Matemática I
2º Exame - 29 de Janeiro de 2003
LEBM, LEFT e LMAC

Resolução

1.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2^{10}}{2^{n+3} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^{10-n}}{2^3 + 2^{-n}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \frac{2^n}{n^2} = \frac{\pi}{2}$, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$ se $a > 1$ e $p \in \mathbb{R}$.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{1 + \frac{n^3}{2^n}} = 2$. De facto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$, pelo que esta sucessão é limitada; existe uma constante $L > 0$ tal que $1 \leq 1 + \frac{n^3}{2^n} \leq 1 + L$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + L} = 1$, o Teorema das Sucessões Enquadradas garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{n^3}{2^n}} = 1$.
- d) $\frac{d}{dx} \arctan e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$.
- e) $\frac{d}{dx} \ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{3x}$.
- f) $\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = - \frac{\sin x (x^2 + 1) + 2x \cos x}{(x^2 + 1)^2}$.
- g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\arctan x} = +\infty$. Nota: como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ não há indeterminação, pelo que não se pode aplicar a regra de Cauchy.
- h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.

2.

- a) $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n(n+1)} \times \frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}$.
- b) Se $x = \frac{1}{3}$, vem $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Se $x = -\frac{1}{3}$, vem $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$; a série dos módulos é, justamente, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Conclui-se que a série de potências é absolutamente convergente nos extremos do seu intervalo de convergência.
- c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$ (série de Mengoli).

3. Devemos provar que

$$\forall_{\delta > 0} \exists_{\epsilon > 0} \forall_{x \in \mathbb{R}^+} x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} < \delta.$$

Seja $\delta > 0$. A condição $\frac{1}{\sqrt{x}} < \delta$ é equivalente a $x > \frac{1}{\delta^2}$. Se $\epsilon \leq \delta^2$ e $x > \frac{1}{\epsilon}$, então $x > \frac{1}{\delta^2}$, pelo que $\frac{1}{\sqrt{x}} < \delta$.

4. Seja $y = \operatorname{arcsinh} x$, ou seja, $\sinh y = x$. Então, $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Usaram-se os factos da função coseno hiperbólico ser positiva e de $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$.

5.

- a) Para cada $n \in \mathbb{N}_1$, seja $P(n)$ a proposição $x_n > 2$. A proposição $P(1)$ é verdadeira pois $2 + 10^{-9} > 2$. Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira para um dado $n \in \mathbb{N}_1$. Então, como $2 > 6/5$, $x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6} > \sqrt{5 \times 2 - 6} = 2$, pelo que $P(n+1)$ é verdadeira. Provou-se por indução que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.
- b) Vamos provar que a sucessão é estritamente crescente, ou seja, $x_n < x_{n+1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Como na alínea anterior se provou que todos os seus termos são positivos (de facto, superiores a 2), esta condição de monotonia é equivalente a $x_n^2 < x_{n+1}^2$. Como $x_n > 6/5$, devemos provar que $x_n^2 - 5x_n + 6 < 0$, ou seja, $(x_n - 2)(x_n - 3) < 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}_1$, seja $Q(n)$ a proposição $x_n < 3$. A proposição $Q(1)$ é verdadeira pois $2 + 10^{-9} < 3$. Suponhamos que $Q(n)$ é verdadeira para um dado $n \in \mathbb{N}_1$. Então, como $x_n > 2$, $x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6} < \sqrt{5 \times 3 - 6} = 3$, pelo que $Q(n+1)$ é verdadeira. Provou-se por indução que $Q(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Como $2 < x_n < 3$, $(x_n - 2)(x_n - 3) < 0$ pelo que a sucessão é estritamente crescente.
- c) Como a sucessão é crescente e majorada, a sucessão converge. Seja l o seu limite. Aplicando limites a ambos os membros de $x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 6}$, e usando as propriedades dos limites, vem $l = \sqrt{5l - 6}$, porque (x_{n+1}) é uma subsucessão de (x_n) . Portanto, $l = 2$ ou $l = 3$. Como $x_1 > 2$ e a sucessão é crescente, $l \neq 2$. Conclui-se que $l = 3$.
- d) A resposta à primeira alínea seria exactamente a mesma. Na segunda alínea, provar-se-ia por indução que $x_n > 3$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, e seguidamente que a sucessão era estritamente decrescente. Finalmente, na terceira alínea concluir-se-ia que a sucessão convergia para um limite $l = 3$.

6. Se $|x_n|^2 \leq 65|x_n| + 99$, então $|x_n|^2 - 65|x_n| - 99 \leq 0$, ou

$$\left(|x_n| - \frac{65 - \sqrt{65^2 + 4 \times 99}}{2}\right) \left(|x_n| - \frac{65 + \sqrt{65^2 + 4 \times 99}}{2}\right) \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{65 - \sqrt{65^2 + 4 \times 99}}{2} \leq |x_n| \leq \frac{65 + \sqrt{65^2 + 4 \times 99}}{2}.$$

Como $\frac{65 - \sqrt{65^2 + 4 \times 99}}{2} < 0$ e $|x_n| \geq 0$,

$$|x_n| \leq \frac{65 + \sqrt{65^2 + 4 \times 99}}{2}.$$

Portanto, a sucessão (x_n) é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem uma subsucessão convergente.

7.

- a) Pelo Teorema de Lagrange, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um c_x , verificando $x < c_x < x + 2$, tal que $f(x + 2) - f(x) = 2f'(c_x)$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + 2) - f(x)] = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c_x) = \lim_{c_x \rightarrow +\infty} f'(c_x) = 0.$$

- b) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 1, \\ \log x & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Facilmente se verifica que f é diferenciável e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. No entanto, se $x \geq 1$, $f(x^2) - f(x) = \log x \rightarrow +\infty$, quando $x \rightarrow +\infty$. Nota: este exemplo mostra que uma função nas condições do enunciado não tem que ter limite em $+\infty$.