Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 19 – Circuitos eléctricos

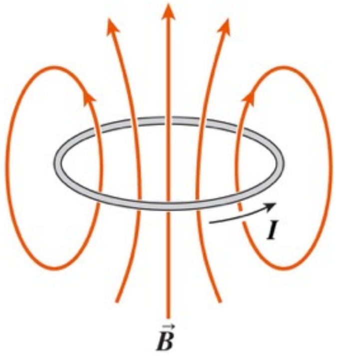
Circuitos eléctricos

- Circuito RC
- Circuito RL
- Circuito LC

Serway Cap. 28.4, 32.2, 32.5,

Revisão

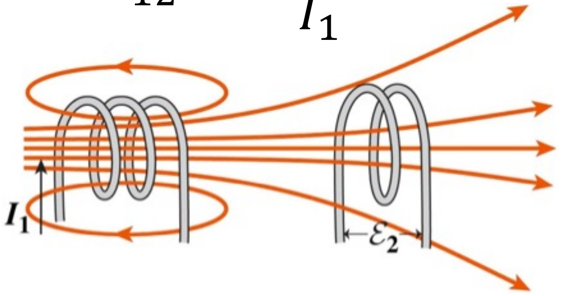
Auto-indução



$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

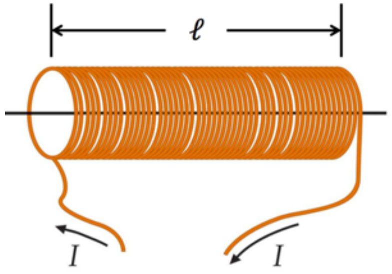
Indução mútua

$$M_{12} \equiv \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$



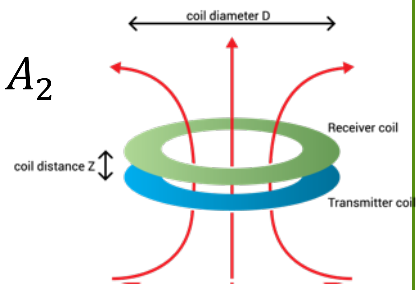
Auto-indutância de um solenóide

$$L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$$

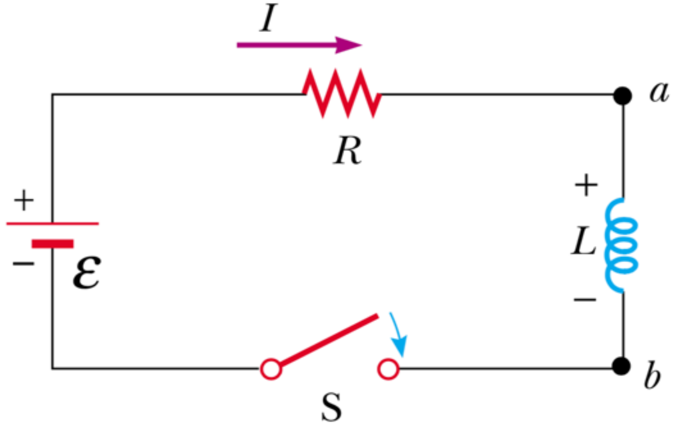


Indutância mútua de dois solenóides

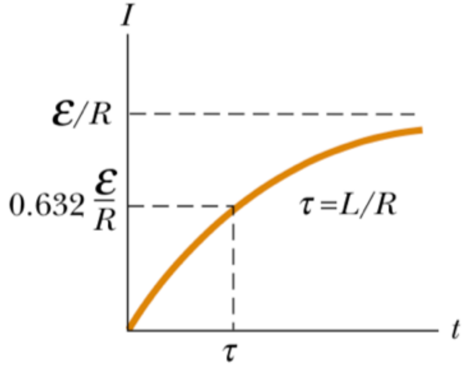
$$M_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2$$



Circuito RL

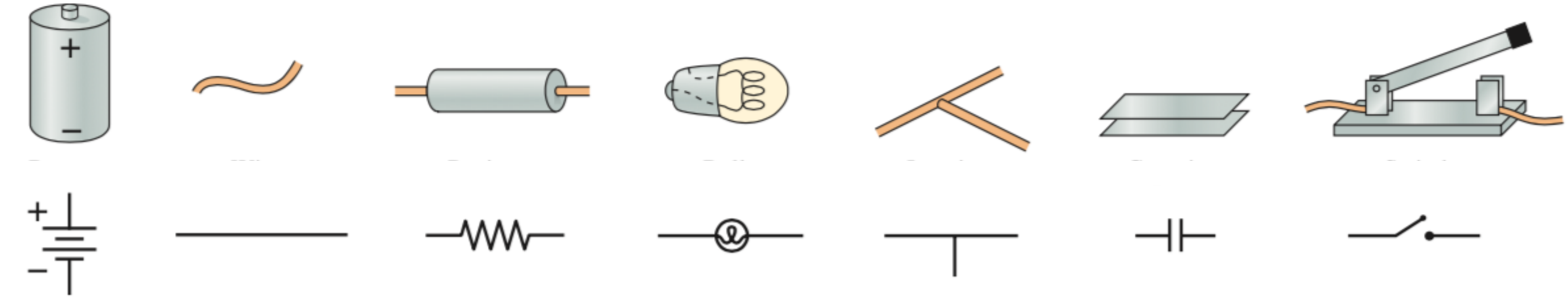


Constante de tempo

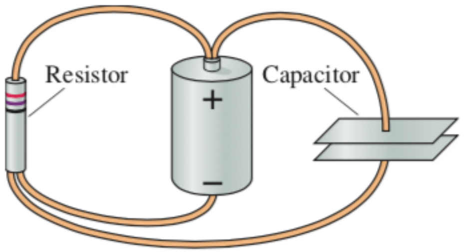


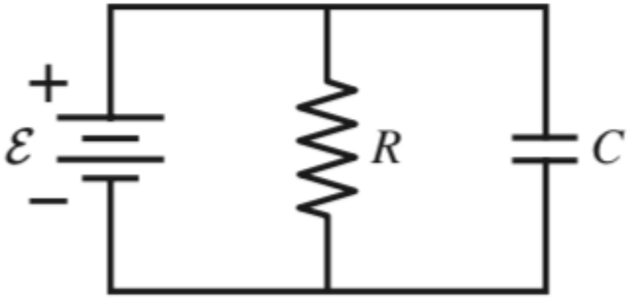
Circuitos eléctricos: símbolos

Para representar componentes eléctricos usam-se diferentes símbolos:



Bateria Cabo Resistência Lâmpada Nó Condensador Interruptor

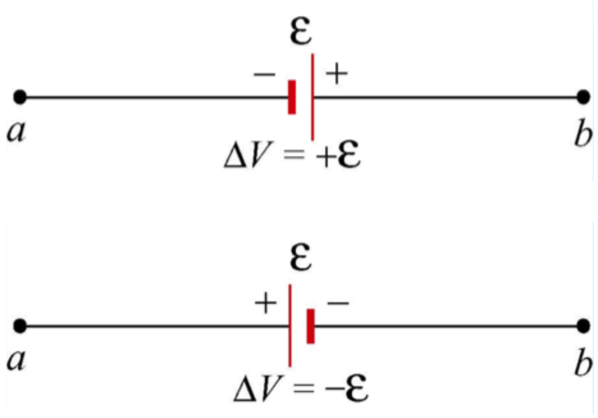




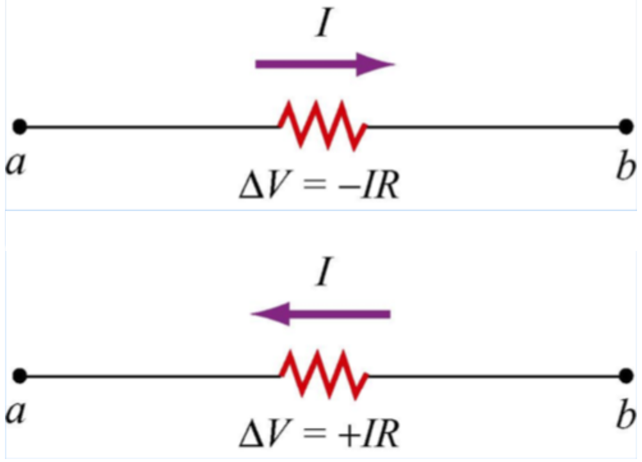
Circuitos eléctricos: convenções

$$(\Delta V = V_b - V_a)$$

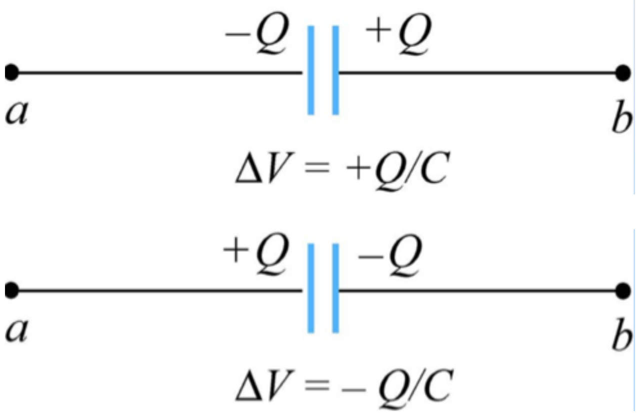
Baterias



Resistências

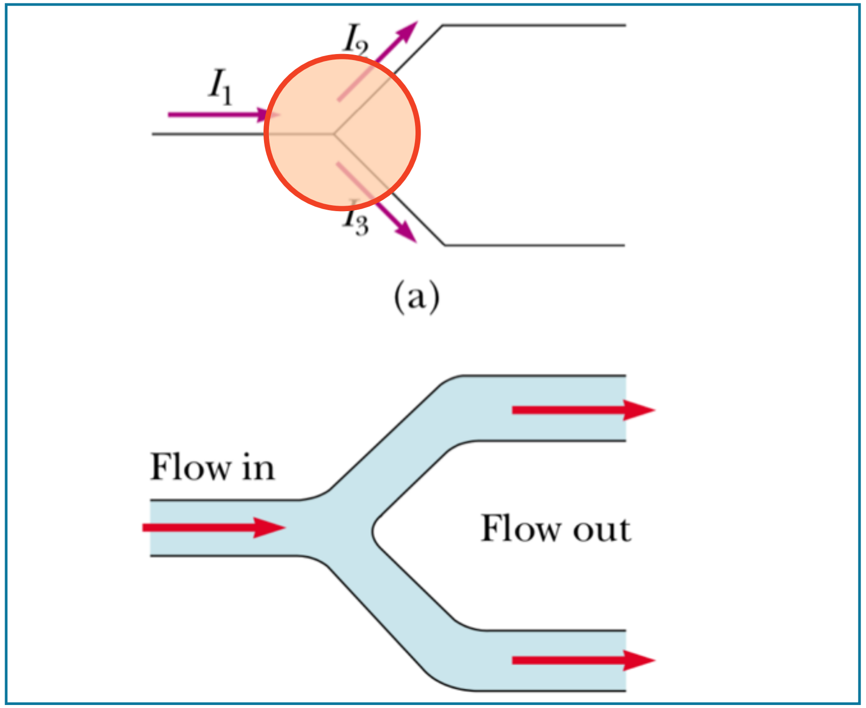


Condensadores

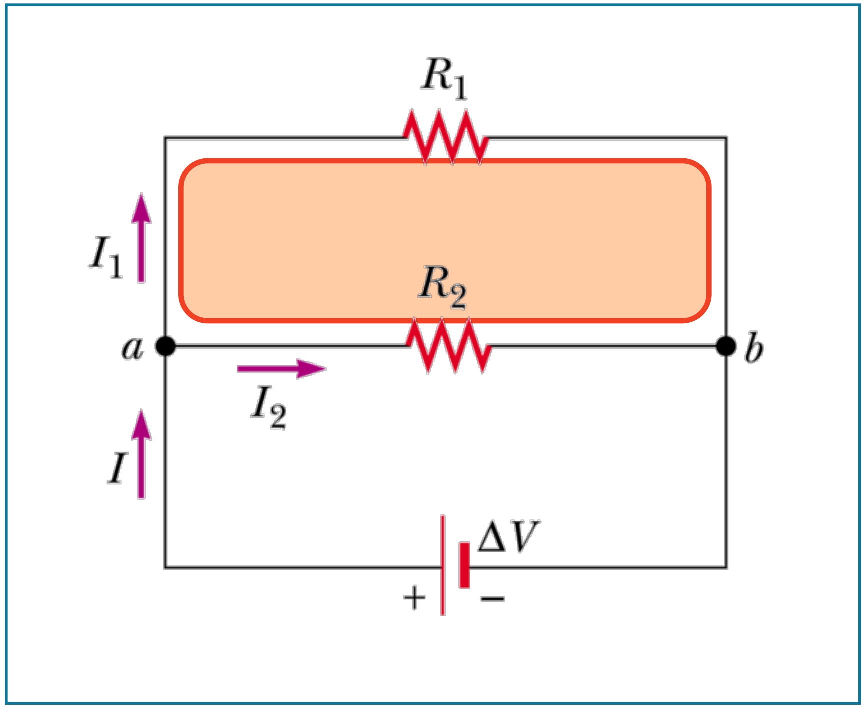


Leis de Kirchhoff

Lei dos nós: $\sum_i I_i = 0$

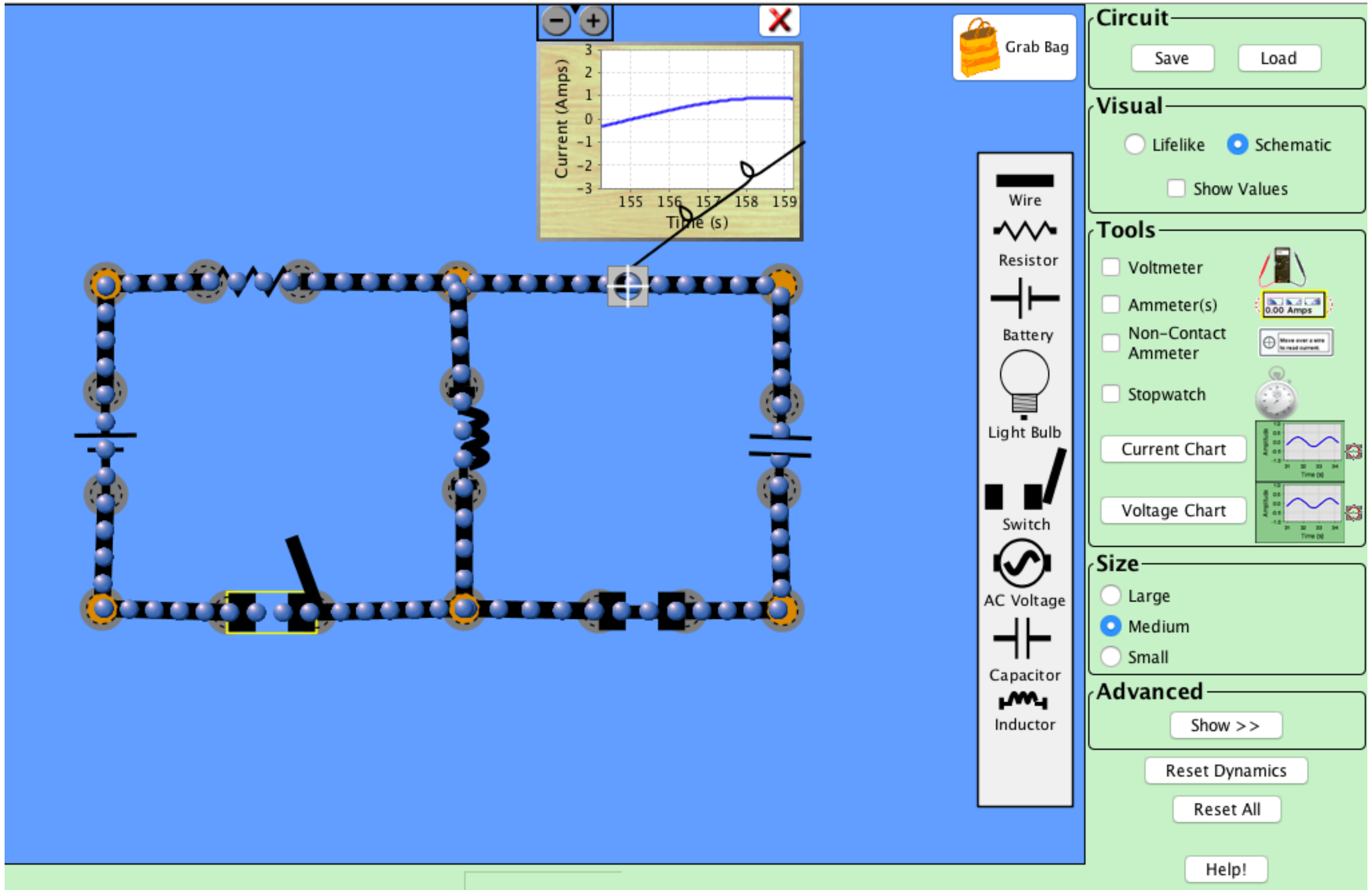


Lei das malhas: $\sum_i V_i = 0$



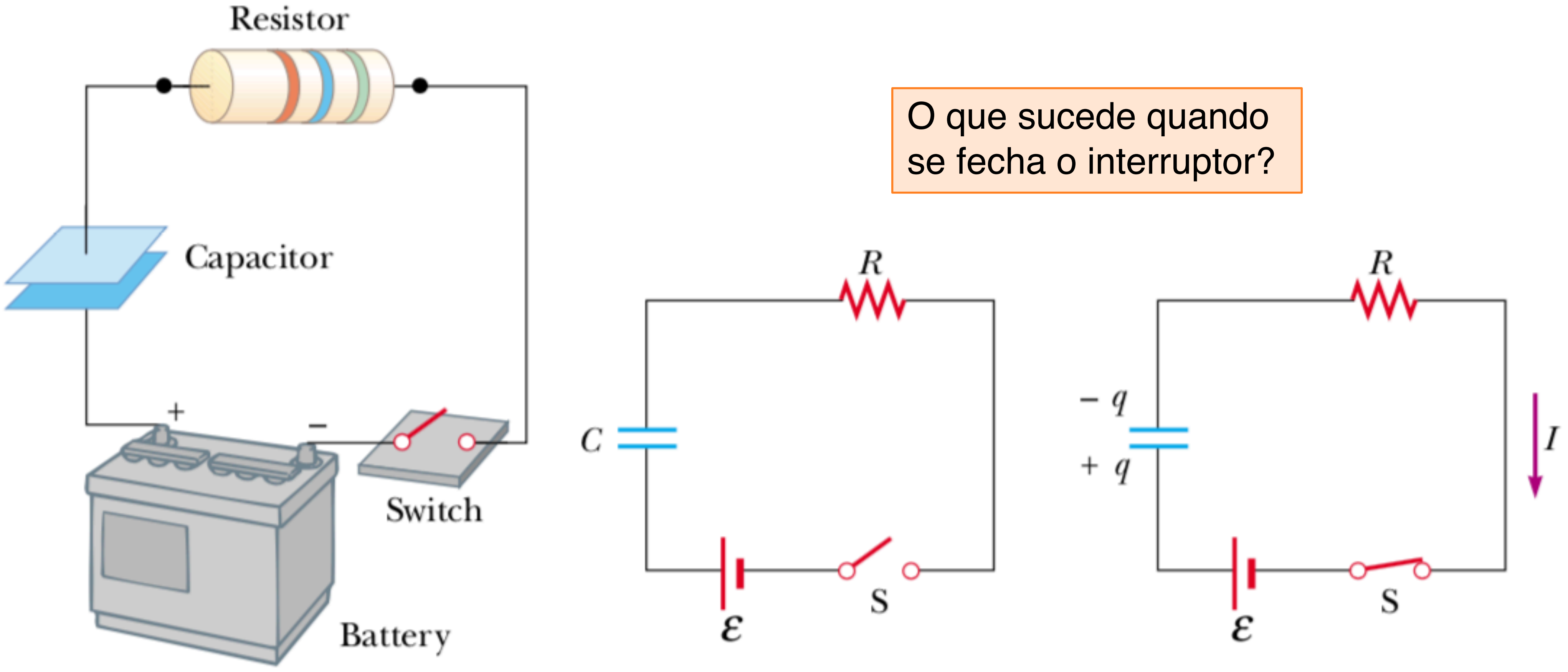
Simulador de circuitos online (Java)

https://phet.colorado.edu/en/simulation/circuit-construction-kit-dc-virtual-lab



Circuito RC

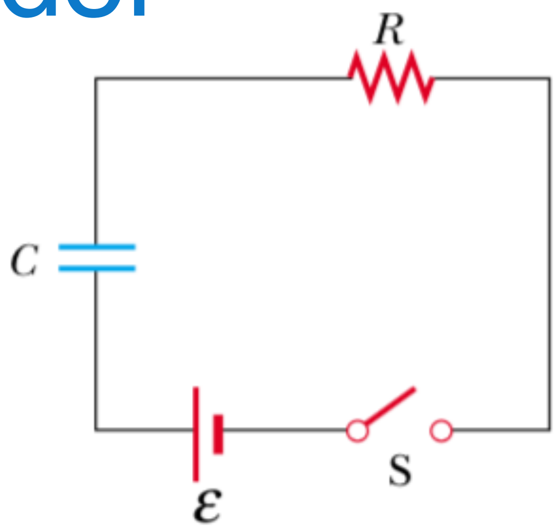
Circuito com um condensador C e uma resistência R em série



(a) (b) $t < 0$ (c) $t > 0$

O que sucede quando se fecha o interruptor?

Circuito RC: carga do condensador

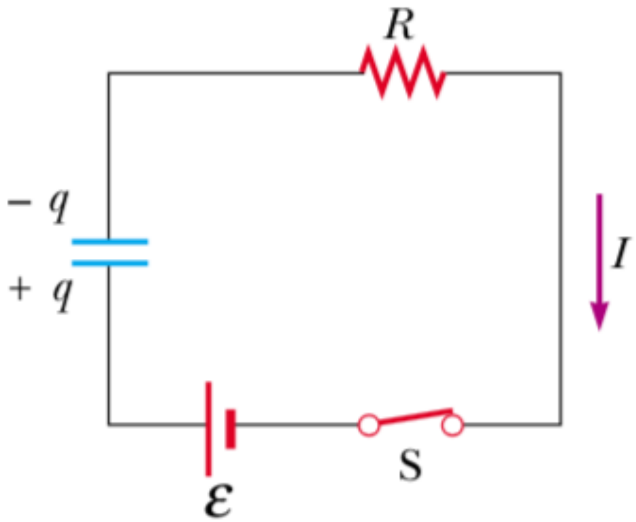


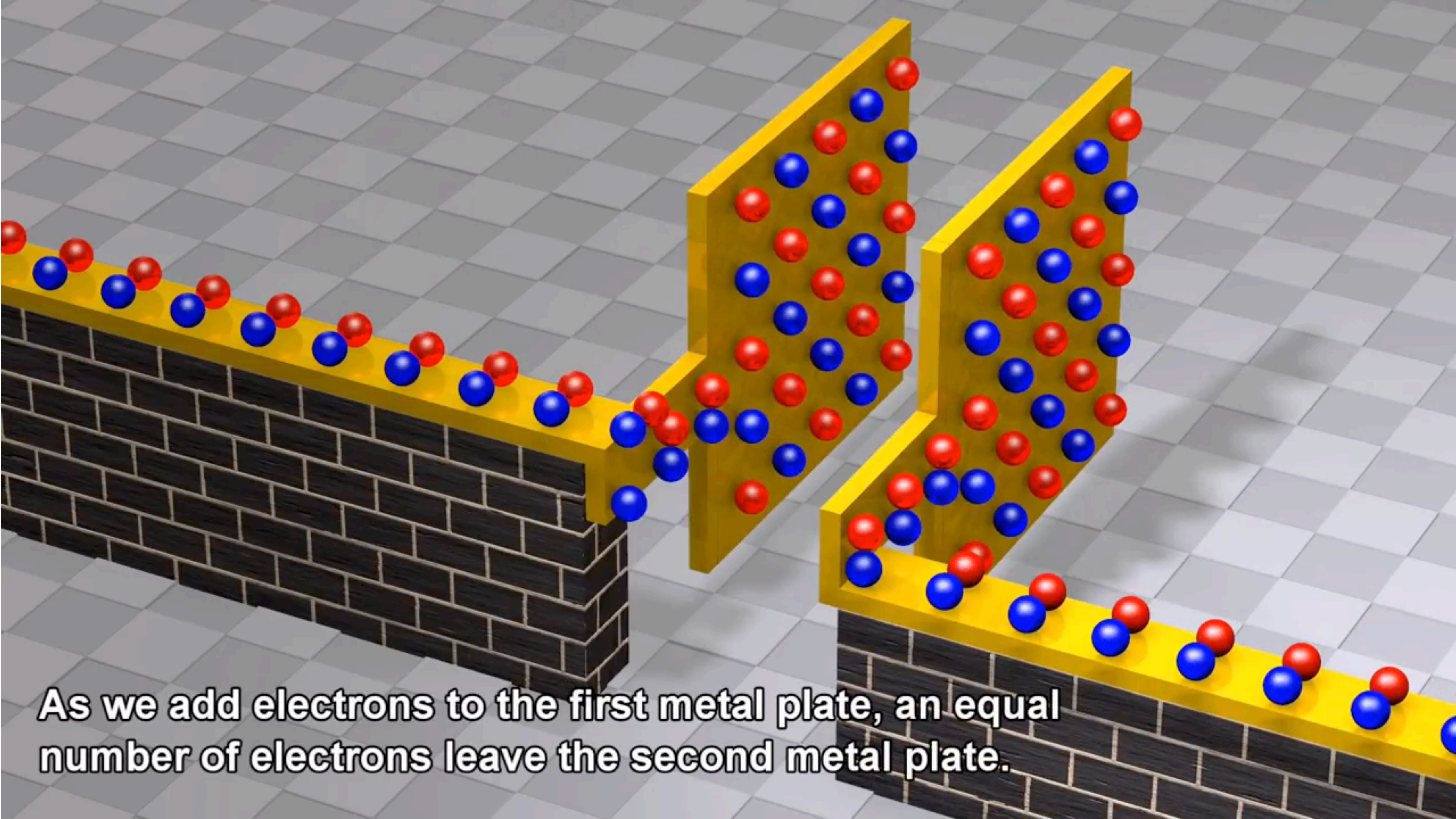
Circuito aberto:

- Não passa corrente: $V_C = V_R = 0 \qquad V_S = -\mathcal{E}$

Circuito fechado:

- Passa corrente: $V_R(t=0) = \mathcal{E}, \quad V_S = 0$
- V_C aumenta de 0 até $\mathcal{E}$
- O campo eléctrico da bateria empurra as cargas através dos fios até às placas do condensador.
- **Não "passa corrente"** através do condensador, mas há movimento de cargas devido à força eléctrica (voltaremos a isto)
- Quando é atingida a carga final (condensador carregado), a corrente pára. Nesse momento, $V_C = \mathcal{E}, \quad V_R = 0$

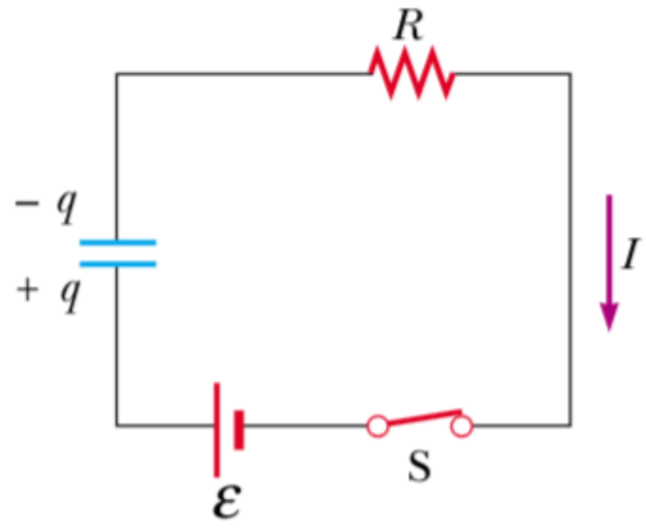



As we add electrons to the first metal plate, an equal number of electrons leave the second metal plate.

Circuito RC: carga do condensador

Vamos analisar o circuito de carga usando as leis de Kirchoff:

$$\underbrace{\mathcal{E}}_{V_{\text{bat}}} - \underbrace{\frac{Q}{C}}_{V_{\text{C}}} - \underbrace{RI}_{V_{\text{R}}} = 0$$



(c) $t > 0$

Circuito fechado ($t = 0$) :

- $Q = 0$ e $I(0) = I_0 = \mathcal{E}/R$ (corrente máxima)
- $V_C = 0$ e $V_R = \mathcal{E}$

Quando $t \to \infty$:

- $I = 0$ e $Q(t \to \infty) = C\mathcal{E} = Q$ (carga máxima)
- $V_C = \mathcal{E}$ e $V_R = 0$

Circuito RC: carga do condensador

Como $I = dQ/dt$:

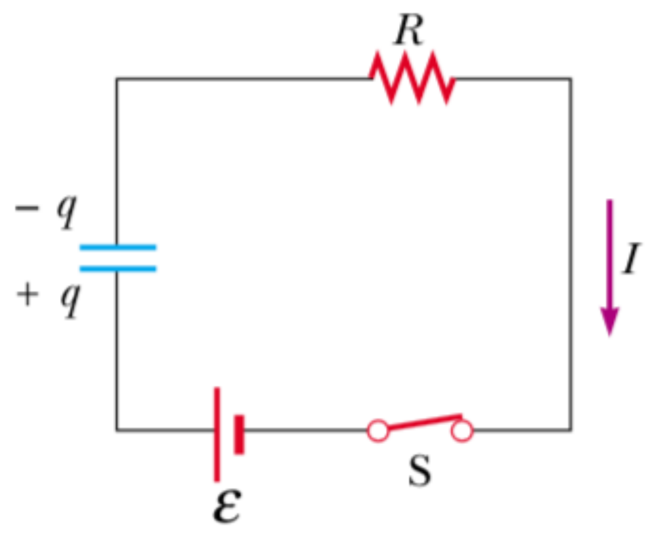
$$\mathcal{E} - \frac{Q}{C} - RI = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{Q}{RC}$$

Para resolver esta eq. diferencial usa-se o mesmo método que para o circuito RL:

Carga: $$Q(t) = C\mathcal{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] = \boxed{Q(1 - e^{-t/\tau})}$$

Corrente: $$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{\tau}e^{-t/\tau} = \boxed{\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{\tau = RC}$$ **Constante temporal** [s]

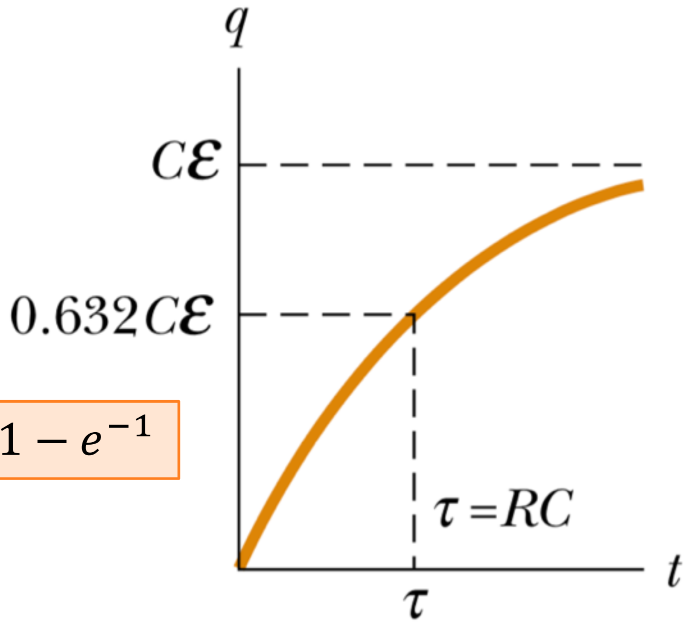


(c) $t > 0$

A constante τ mede a rapidez com que o condensador atinge a carga final

Carga:

$$Q(t) = C\mathcal{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$
$$= Q(1 - e^{-t/\tau})$$



$0.632 \approx 1 - e^{-1}$

Corrente:

$$I(t) = dQdt = \frac{Q}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}$$

rapidez com que o
carga final

$0.368 \approx e^{-1}$

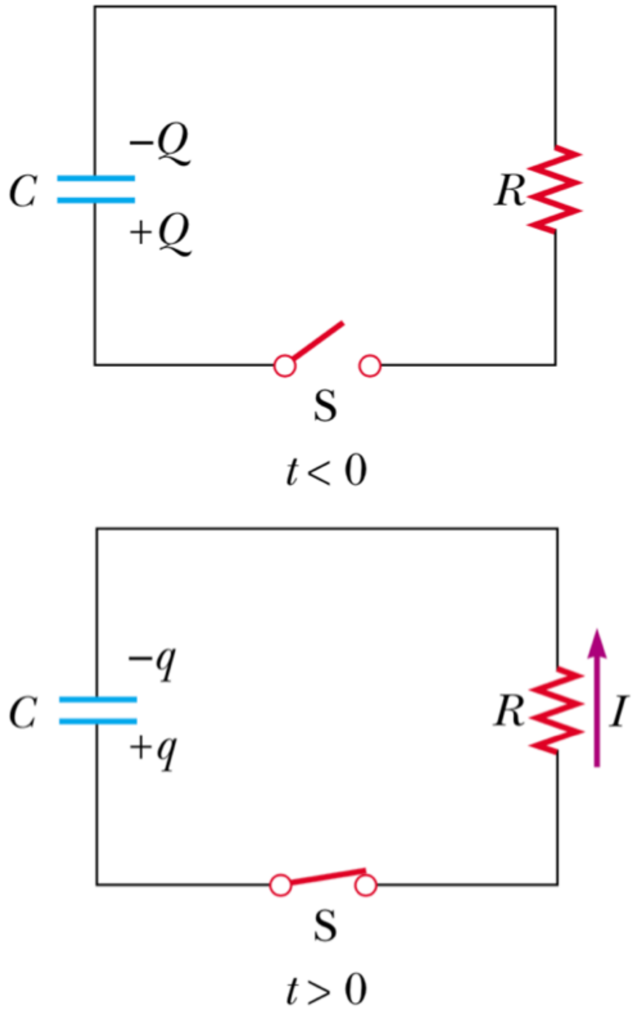
Circuito RC: descarga do condensador

Circuito aberto:

- Não passa corrente: $V_C = \mathcal{E} \quad V_R = V_S = 0$

Circuito fechado:

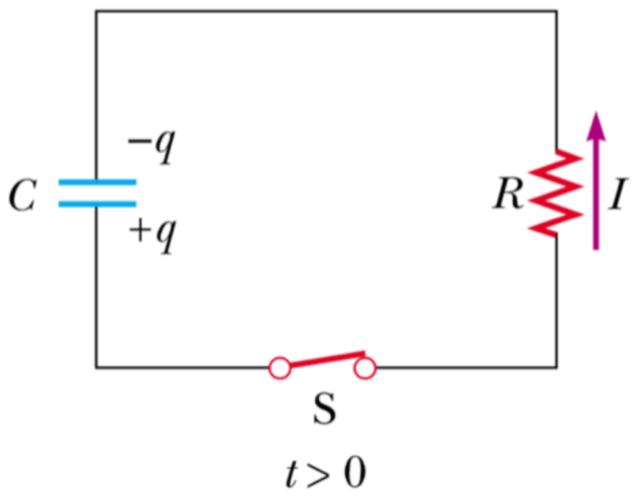
- Passa corrente: $V_R(t = 0) = \mathcal{E}, \quad V_S = 0$
- V_C **diminui** de $\mathcal{E}$ até 0
- O excesso de cargas nas placas do condensador viaja através dos fios até à placa oposta.
- **Não "passa corrente"** através do condensador, mas há movimento de cargas devido à força eléctrica.
- Quando é atingida a carga zero (condensador descarregado), a corrente pára. Nesse momento, $V_C = 0, \quad V_R = 0$



Circuito RC: descarga do condensador

Vamos analisar o circuito de carga usando as leis de Kirchoff:

$$\underbrace{-\frac{Q}{C}}_{V_C} \underbrace{- RI}_{V_R} = 0$$



Circuito fechado ($t = 0$) :

- $Q(0) = Q$ e $I(0) = Q/RC$ (corrente/carga máximas)
- $V_C = -V_R = \mathcal{E}$

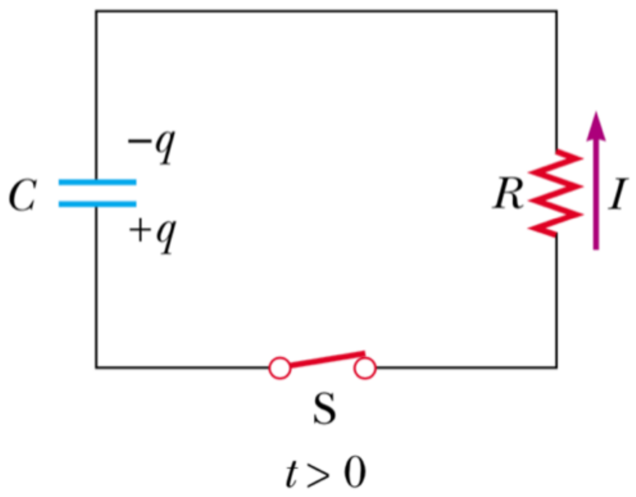
Quando $t \to \infty$:

- $I = 0$ e $Q = 0$ (corrente/carga nulas)
- $V_C = V_R = 0$

Circuito RC: descarga do condensador

Como $I = dQ/dt$:

$$-\frac{Q}{C} - RI = 0 \ \rightarrow \ \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$



Esta eq. diferencial tem uma solução directa:

Carga: $Q(t) = Q\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \boxed{Q\ e^{-t/\tau}}$

Corrente: $I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = \boxed{-\frac{Q}{\tau}e^{-t/\tau}}$

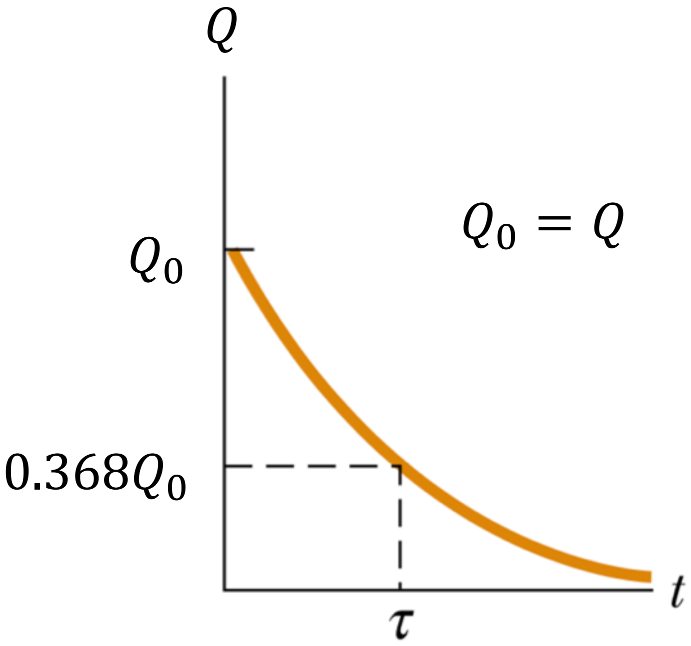
$\boxed{\tau = RC}$ **Constante temporal** [s]

A corrente tem agora o sinal oposto da corrente de carga.

A constante τ mede a rapidez com que o condensador descarrega

Carga:

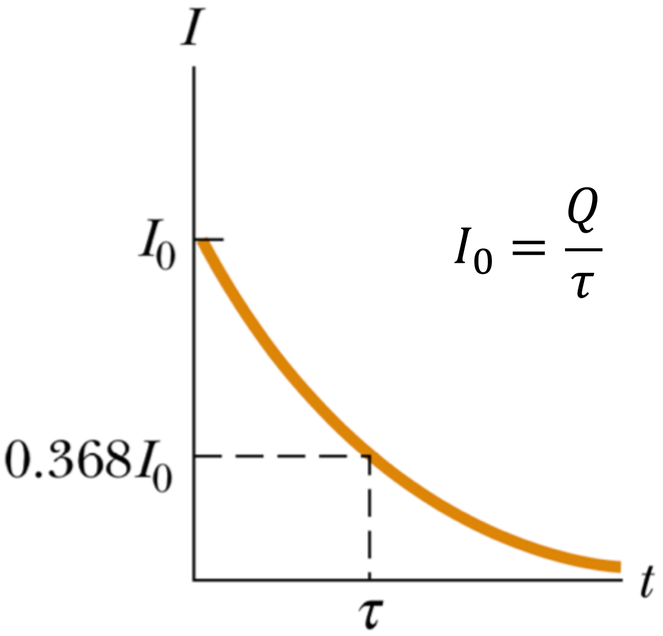
$$Q(t) = Qe^{-t/\tau}$$



$$Q_0 = Q$$

Corrente:

$$|I(t)| = \frac{Q}{\tau}e^{-t/\tau}$$

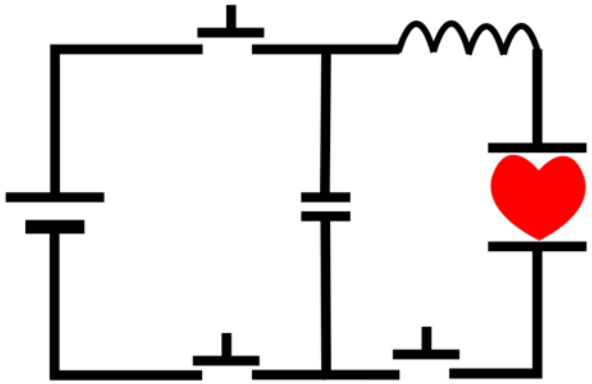


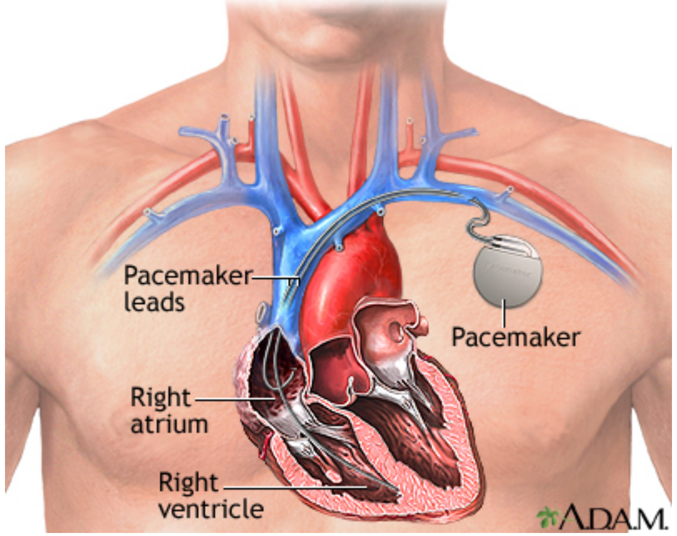
$$I_0 = \frac{Q}{\tau}$$

Aplicações de circuitos RC

Além das aplicações dos condensadores (cf. Aula 7) o ciclo de **carga / descarga** e a **constante temporal** dos circuitos RC tem duas aplicações muito importantes:

- desfibrilador
- pacemaker

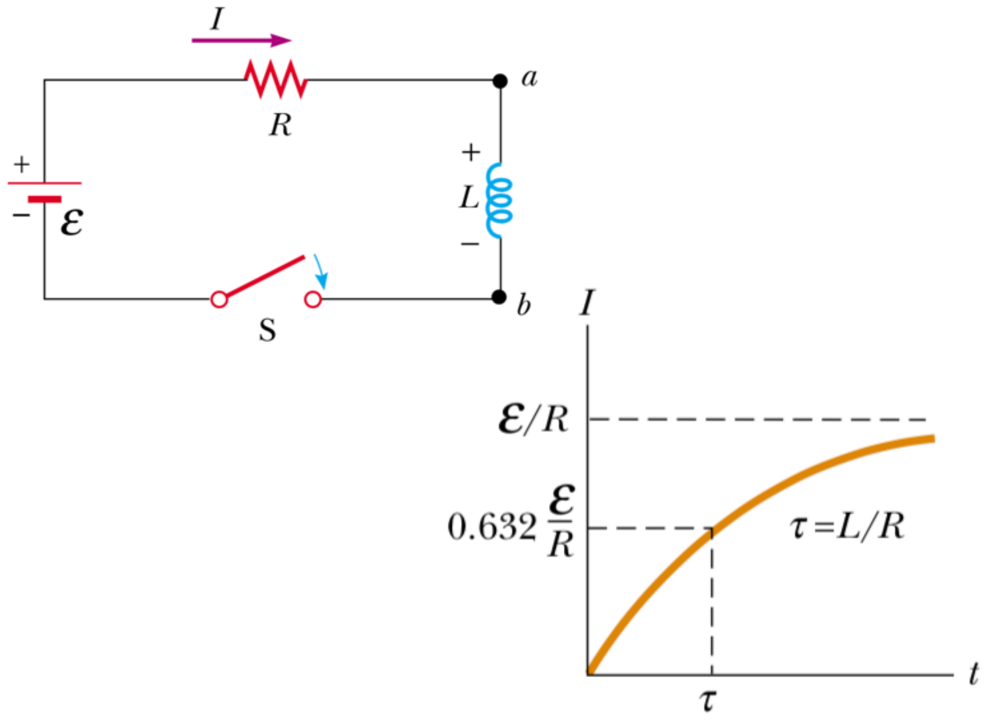




Comparação: circuito RL vs circuito RC

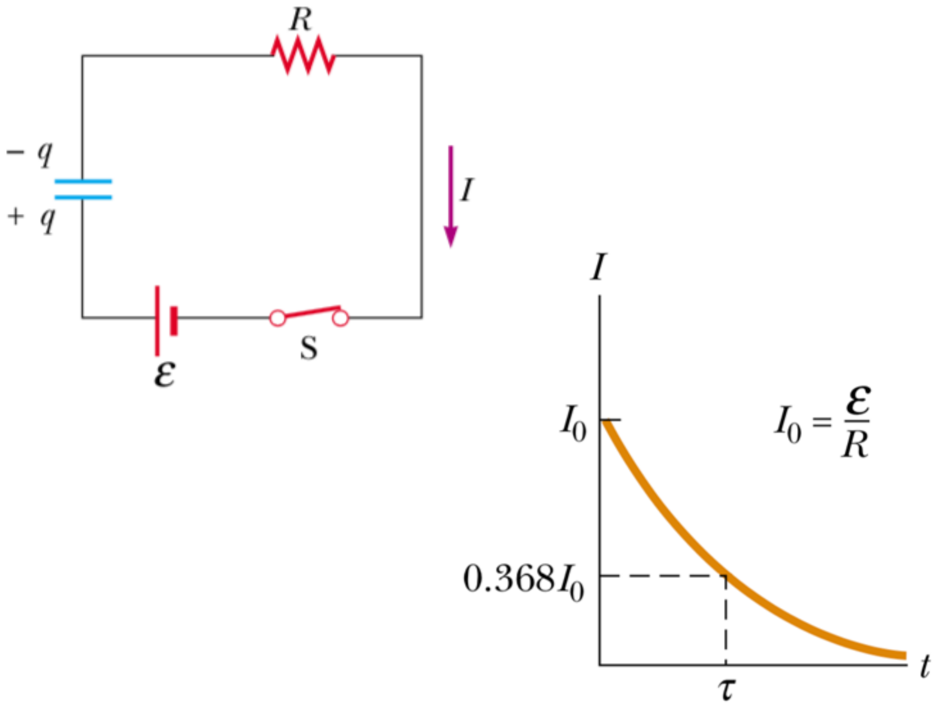
Carga do circuito RL

Constante temporal: $\tau = L/R$



Carga do circuito RC

Constante temporal: $\tau = RC$



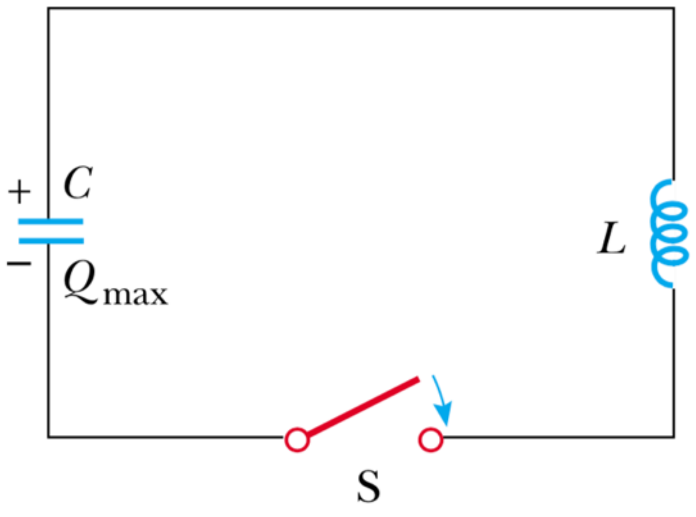
Circuito LC

Circuito com um indutor L e um condensador C em série

Inicialmente o condensador está carregado (Q_{max}) e o interruptor está aberto.

Quando se fecha o interruptor, verifica-se que:

- A **corrente no circuito** oscila entre um máximo e um mínimo
- A **carga no condensador** oscila entre um máximo e um mínimo



O que sucede quando se fecha o interruptor?

Não existindo uma resistência, nenhuma energia é dissipada: oscila entre totalmente **eléctrica** e totalmente **magnética**

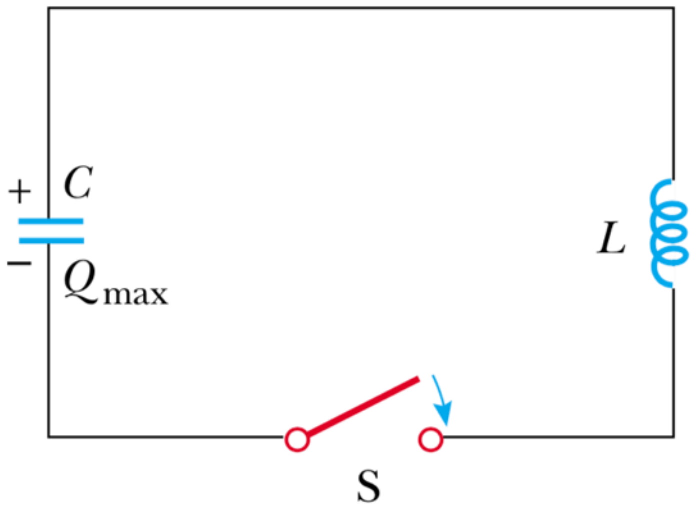
Circuito LC

$t < 0$:

- C armazena toda a energia, $W_e = \frac{Q_{max}^2}{2C}$
- Não existe corrente

$t > 0$:

- C descarrega e Q diminui
- Corrente no circuito varia na mesma proporção
- Energia é transferida do C para o L
- Quando C descarrega completamente, a corrente atinge o valor máximo
- C é carregado *no sentido oposto*, e o processo repete-se

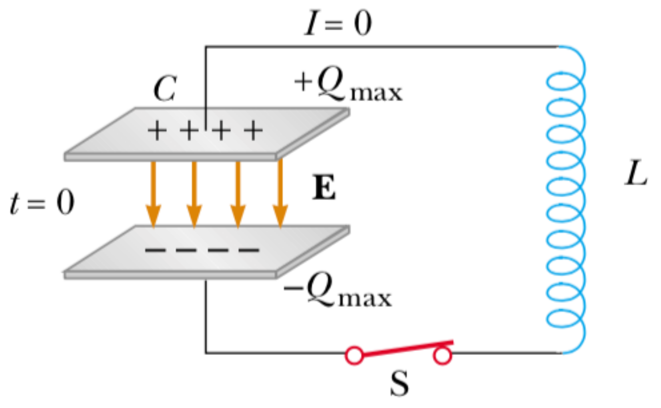


O que sucede quando se fecha o interruptor?

Oscilações no circuito LC

Em qualquer instante, a energia total é:

$$U = U_e + U_m = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$$



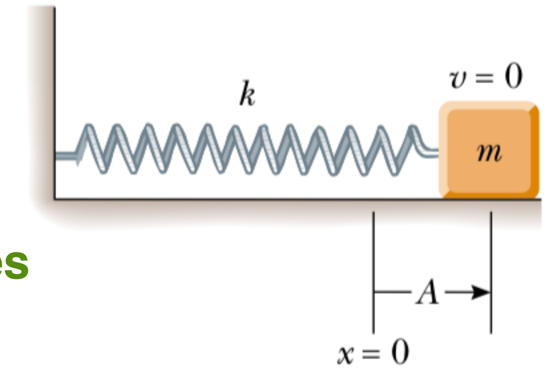
Como não existem perdas:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0$$

Usando $I = dQ/dt$:

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + L\frac{dQ}{dt}\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q}$$

Eq. do oscilador harmónico simples



A eq. tem a mesma forma que a de uma massa + mola

Oscilações no circuito LC

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

A solução tem uma forma periódica:

Frequência de oscilação

$$Q(t) = Q_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

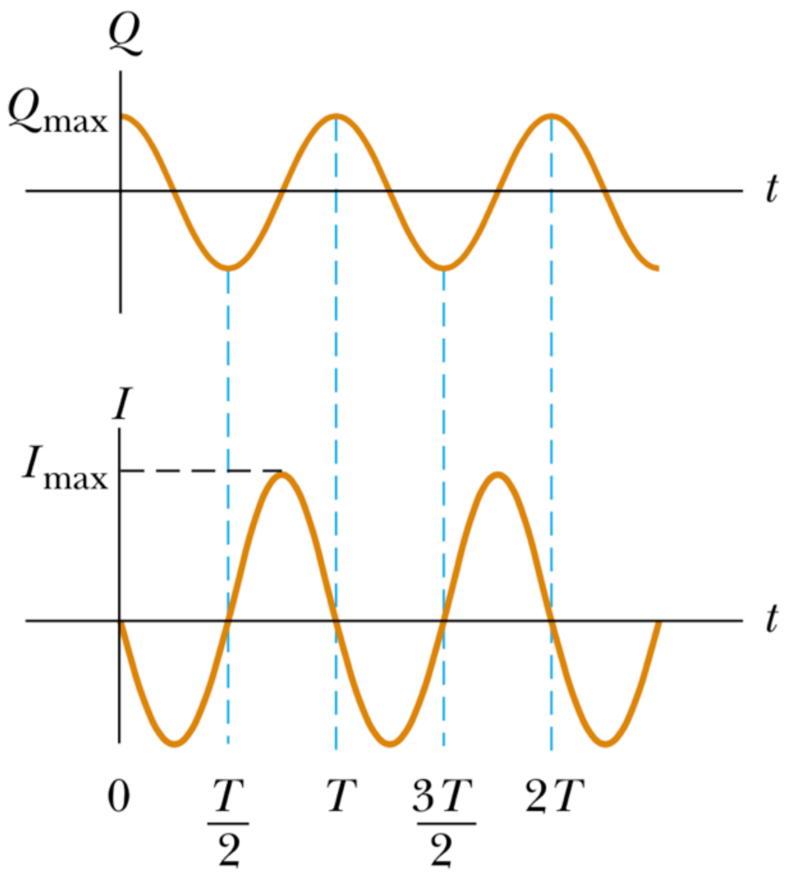
$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Usando $I = dQ/dt$:

$$I(t) = -\omega Q_{max}\sin(\omega t + \phi) = -I_{max}\sin(\omega t + \phi)$$

A corrente está desfasada de 90º com a carga.

Se $Q(0) = Q_{max}$, podemos fazer $\phi = 0$.



Período: $T = 2\pi/\omega$

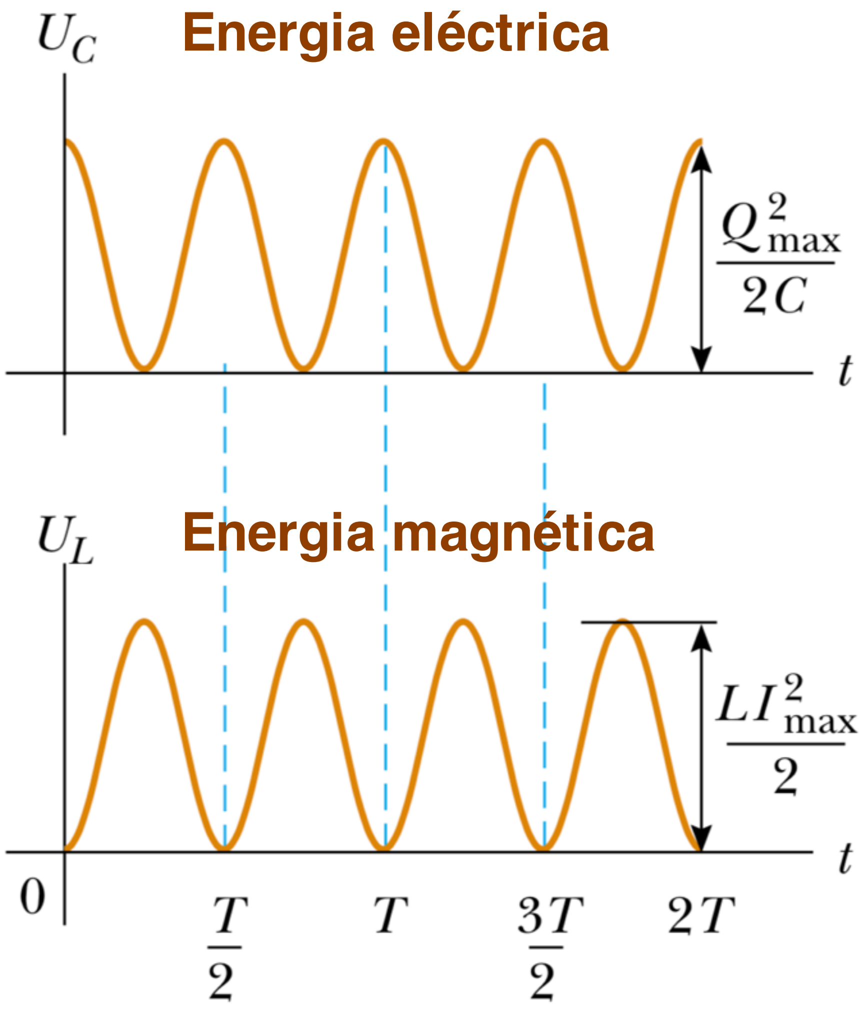
Oscilações no circuito LC

Substituindo na expressão da energia total:

$$U = \frac{1}{2C} Q_{max}^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} L I_{max}^2 \sin^2(\omega t)$$

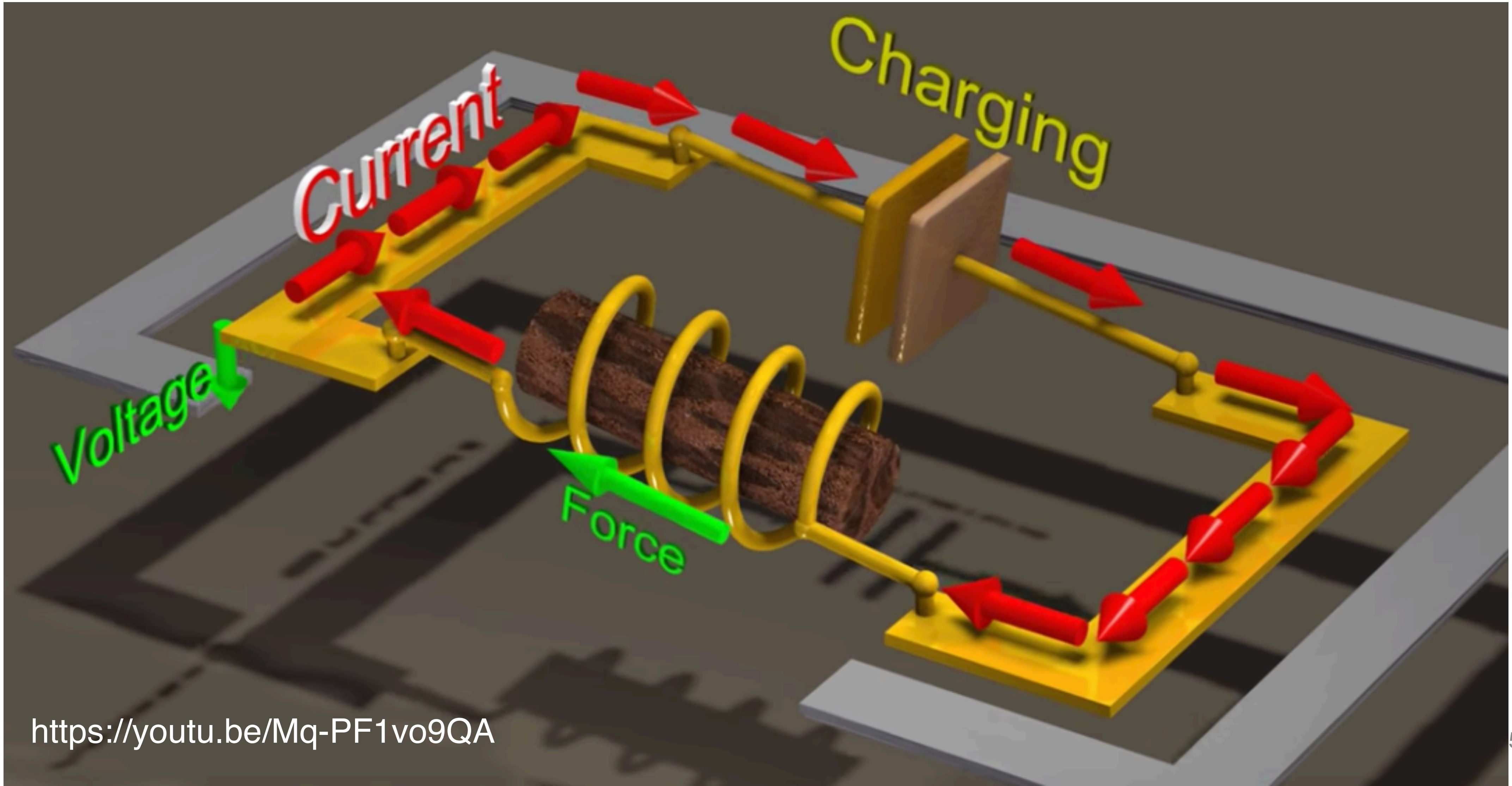
$$\rightarrow U = U_C + U_L$$

- A energia do circuito alterna entre totalmente eléctrica $\left(\frac{Q_{max}^2}{2C}\right)$ e totalmente magnética $\left(\frac{LI_{max}^2}{2}\right)$
- Em qualquer instante, a soma das duas formas de energia é constante
- O sistema é análogo às trocas de en. potencial $\left(\frac{kx^2}{2}\right)$ e cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ num oscilador mecânico *



* Cf. Serway pg. 1017

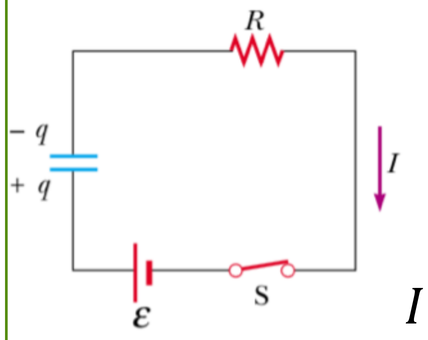
Oscilações num circuito LC



https://youtu.be/Mq-PF1vo9QA

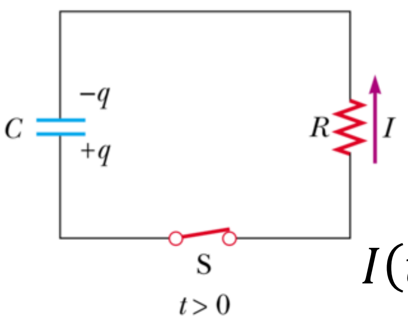
Conclusões

Circuito RC: carga



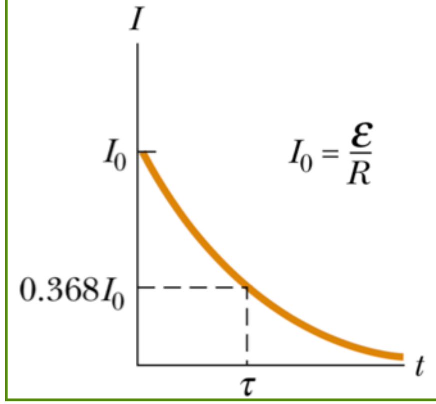
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

Circuito RC: descarga



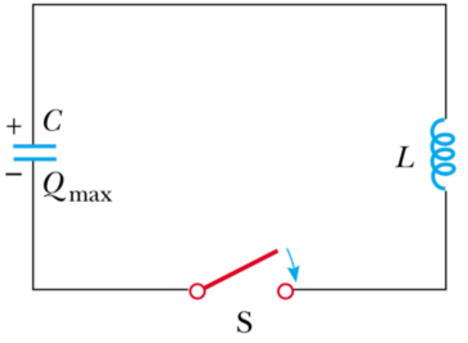
$$I(t) = -\frac{Q}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Constante temporal

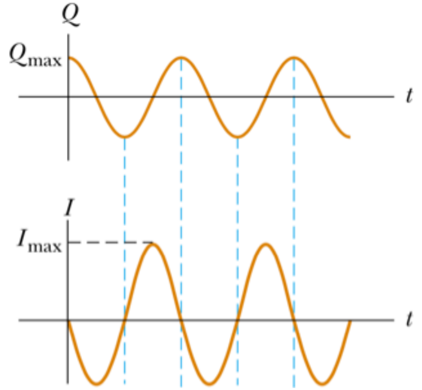


$$\tau = RC$$

Circuito LC



Circuito LC: oscilações



Frequência de oscilação

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$