Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) é uma equação da forma

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = f(t, \vec{y})$$

onde $f : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função vectorial definida num aberto

$$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

e a incógnita $\vec{y}(t)$ é uma função

$$\vec{y} : I \to \mathbb{R}^n \text{ com } I \subset \mathbb{R} \text{ um intervalo aberto.}$$

Exemplo

O sistema de EDO's definido por

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{y_1}{t + y_2} \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_2 + ty_1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d\vec{y}}{dt} = f(t, \vec{y}(t))$$

onde a incógnita é $\vec{y} : I \to \mathbb{R}^2$,

$$\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$$

e

$$f(t, y_1, y_2) = \left(\frac{y_1}{t + y_2}, y_2 + ty_1 \right)$$

está definida no aberto

$$U = \left\{ (t, y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : t + y_2 \neq 0 \right\}$$

Teorema de Picard-Lindelöf (caso vectorial)

Seja $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua com derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ contínuas.

Então para qualquer $(t_0, \vec{y}_0) \in U$, o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dt} = f(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

tem solução única $\vec{y} = \vec{y}(t)$ para $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ (para algum $\epsilon > 0$).

Do exemplo anterior, o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{y_1}{t + y_2} \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_2 + t y_1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

tem solução única $\vec{y} = \vec{y}(t)$ para $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, (para algum $\epsilon > 0$).

Sistemas de EDO's lineares

Proposição

Sejam $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, I um intervalo aberto, $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas. Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{cases}$$

tem solução única $\vec{y} = \vec{y}(t)$ para $t \in I$.

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$ é uma matriz $n \times n$,

$\vec{b} = \vec{b}(t)$ o vector dos coeficientes

$\vec{y} = \vec{y}(t)$ é o vector das incógnitas.

Sistemas Lineares Homogéneos

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma função contínua. O conjunto das soluções do sistema linear homogéneo (SLH)

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y}$$

é um espaço vectorial de dimensão n.

Este corolário garante que para resolver o SLH basta determinar n soluções

$$\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$$

que sejam linearmente independentes.

Neste caso formam uma base do espaço das soluções

Definição

Uma solução matricial fundamental (SMF) do SLH é uma função matricial $Y(t)$ que tem por colunas n soluções independentes.

Em notação matricial a solução geral dum sistema linear homogéneo escreve-se:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y}(t) = \alpha_1\, \vec{y_1}(t) + \cdots + \alpha_n\, \vec{y_n}(t) = Y(t) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ são constantes reais.

Observação: Uma SMF é mesmo solução do sistema: $\dfrac{dY}{dt} = A(t)Y$

Um exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t^2}\, x - \dfrac{1}{t}\, y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{t^2} & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada, λ um valor próprio de A e $\vec{v}$ um vector próprio associado. Então

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda\, t}\, \vec{v}$$

é uma solução do sistema linear homogéneo $\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$

Prova: Dado que $(\lambda, \vec{v})$ formam um par valor/vector próprio de A tem-se

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

e verifica-se directamente que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda\, t}\, \vec{v}\right) = e^{\lambda\, t}\,(\lambda\, \vec{v}) = e^{\lambda\, t}\, A\vec{v} = A\left(e^{\lambda\, t}\, \vec{v}\right) \quad \square$$

Observação

Se A é uma matriz diagonalizável obtém-se desta forma uma base para o espaço das soluções e pode escrever-se uma fórmula para a solução geral do sistema .

Exemplo

Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Note-se o sistema, em notação matricial, escreve-se

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim necessitamos de calcular os valores e vectores próprios da matriz A.

Os valores próprios são as raizes do polinómio caracteristico da matriz A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 3$$

Os vectores próprios de 1 são as soluções de

$$(A - I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 0$$

$$\Rightarrow \quad v = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{onde } a \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

Os vectores próprios de 3 são as soluções de

$$(A - 3I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = a$$

$$\Rightarrow \quad v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{onde } a \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

Para a solução geral do sistema tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{3t} \\ y(t) = -\alpha e^{t} + \beta e^{3t} \end{cases} \qquad \text{onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Substituindo a condição inicial tem-se

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = -\alpha + \beta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t} \\ y(t) = -\frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t} \end{cases}$$

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

aula 4 – problema

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e resolva o problema de valor inicial

$$X' = AX, \text{ com } X(0) = (1, 0, 0).$$

Solução

1. A solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \text{ com } c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$$

i. e.

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$