

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-TAGUS, LERC, LEGI E LEE – 1^o SEM. 2008/09
7^a FICHA DE EXERCÍCIOS

I. Polinómio e Teorema de Taylor.

- 1) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ das funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas respectivamente por

$$f(x) = e^{\sin x} \quad \text{e} \quad g(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

- 2) Determine o polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\cos x}.$$

- 3) Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x - 3)$.

i) $x^2 - 4x - 9$

ii) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$

iii) x^5

- 4) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ dado por:

$$i) p_{5,0}(x) = 1 + x^4; \quad ii) p_{5,0}(x) = x^3 - x^5.$$

Em cada um dos casos, determine $f^{(k)}(0)$, para $k = 0, 1, \dots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto zero.

- 5) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 1$ dado por

$$p_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Determine $f^{(k)}(1)$, para $k = 0, 1, \dots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto um.

- 6) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| < \frac{1}{6}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- 7) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left| \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \right| < 0.01, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- 8) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \right| < 0.1, \quad \forall x \in [0, 2].$$

- 9) Prove, usando o Teorema de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é $(n + 1)$ -vezes diferenciável e

$$f^{(n+1)}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

então f é um polinómio de grau menor ou igual a n .

II. Sucessões.

1) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$\begin{array}{lll}
 a) x_n = \frac{2n+1}{3n-1} & b) x_n = \frac{2n+3}{3n+(-1)^n} & c) x_n = n - \frac{n^2}{n+2} \\
 d) x_n = \frac{n+\cos(n)}{2n-1} & e) x_n = \frac{n^2-2}{5n^2} & f) x_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \\
 g) x_n = \sqrt{n} - \frac{n}{\sqrt{n}+2} & h) x_n = \frac{\sqrt{n^4-1}}{n^2+3} & i) x_n = (-1)^n \frac{n}{1+n^2} \\
 j) x_n = \frac{n^2-1}{\sqrt{3n^4+3}} & k) x_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} & l) x_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} \\
 m) x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & n) x_n = \sqrt{n(n+1)} - n & o) x_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}-1} \\
 p) x_n = \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}} & q) x_n = na^n, \text{ com } |a| < 1 & r) x_n = \frac{2^{2n}+6n}{3^n-4^{n+2}} \\
 s) x_n = \frac{2^{2n}-3^n}{2^n-3^{2n}} & t) x_n = \frac{(3^n)^2}{1+7^n} &
 \end{array}$$

2) Sendo (u_n) e (v_n) sucessões de termos positivos tais que

$$1 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N},$$

prove que (u_n) converge sse (v_n) converge. Mostre também que, quando existem, os seus limites são iguais.

3) Prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 0$.

4) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{4} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3/2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

5) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

6) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

7) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{3 + x_n^2}{2}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

8) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

9) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

10) Considere as expressões

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Verifique que definem, por recorrência, uma sucessão (x_n) , i.e. verifique que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por forma a que a segunda expressão faça sentido.
 (b) Prove que $x_n \geq 2$ e $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.
 (c) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

11) Mostre que as expressões

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + 2x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

definem por recorrência uma sucessão (x_n) que é convergente. Calcule o seu limite.

12) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$\begin{array}{lll} a) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+7} & b) x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} & c) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ d) x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n & e) x_n = \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3} & f) x_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{1-n} \\ g) x_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{n/2} & h) x_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1} & i) x_n = \left(\frac{2n}{n+1} - 1\right)^n \end{array}$$

13) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$\begin{array}{lll}
 a) x_n = \sqrt[n]{n} & b) x_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} & c) x_n = \sqrt[n]{n^2 + n} \\
 d) x_n = \sqrt[n]{2^n + 1} & e) x_n = \sqrt[n]{2^n + n^2} & f) x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^{2n}} \\
 g) x_n = \left(\frac{n-1}{2n^2+1} \right)^{\frac{2}{n}} & h) x_n = \left(1 - \frac{n}{n+1} \right)^{\frac{1}{n}} & i) x_n = \left(\frac{2^n}{n+1} \right)^{\frac{1}{2n}}
 \end{array}$$

III. Séries Numéricas.

1) Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado.

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2} & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9 \\
 d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3} & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3} &
 \end{array}$$

2) Determine a natureza das seguintes séries.

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum \frac{n-2}{3n+1} & b) \sum \frac{\sqrt{n}}{n+1} & c) \sum \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2} & d) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \\
 e) \sum \frac{n+1}{n^3+1} & f) \sum \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}} & g) \sum \frac{n!}{(n+2)!} & h) \sum \frac{n^2}{n^3+1} \\
 i) \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} & j) \sum \frac{5^n}{4^n+1} & k) \sum \frac{2^n}{3^n+1} & l) \sum \frac{2^{2n}}{3^n+1}
 \end{array}$$

3) Determine a natureza das seguintes séries.

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum \frac{n^{1000}}{(1,001)^n} & b) \sum \frac{2^n n}{e^n} & c) \sum \frac{n^3}{3^n} & d) \sum \frac{n^2}{n!} \\
 e) \sum \frac{(1000)^n}{n!} & f) \sum \frac{n!}{(2n)!} & g) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} & h) \sum \frac{n!}{n^n} \\
 i) \sum \frac{2^n n!}{n^n} & j) \sum \frac{3^n n!}{n^n} & &
 \end{array}$$

4) Determine a natureza das seguintes séries.

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum \frac{\log n}{n} & b) \sum \frac{1}{\log n} & c) \sum \frac{1}{n \log n} & d) \sum \frac{1}{n(\log n)^2} \\
 e) \sum \frac{1}{n^2 \log n} & f) \sum \frac{1}{(\log n)^n} & g) \sum \sin \left(\frac{1}{n} \right) & h) \sum \sin \left(\frac{1}{n^2} \right)
 \end{array}$$

- 5) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim n a_n = +\infty$. Mostre que a série $\sum a_n$ é divergente.
- 6) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim n^2 a_n = 0$. Mostre que a série $\sum a_n$ é convergente.
- 7) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries.

a) $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$	b) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$	c) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$
d) $\sum \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$	e) $\sum (-3)^{-n}$	f) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$
g) $\sum (-1)^n \frac{\log n}{n}$	h) $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$	i) $\sum (-1)^n \frac{\sin(n\theta)}{n^2}$

- 8) Mostre que se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n^2$ também converge. Dê um exemplo em que $\sum a_n^2$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge.

IV. Séries de Potências.

- 1) Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

a) $\sum \frac{x^n}{2^n}$	b) $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$	c) $\sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$
d) $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$	e) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n$	f) $\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$
g) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$	h) $\sum \frac{2n}{n^2+1}(x+1)^n$	i) $\sum \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+1}$
j) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(1-x)^n$	k) $\sum \frac{(5x+1)^n}{n^2+1}$	l) $\sum \frac{(1-3x)^{2n}}{4^n(n+1)}$
m) $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$	n) $\sum \frac{n!}{n^n} x^n$	o) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

- 2) Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo a que a série

$$\sum \frac{a^{n+1}}{n+1} x^n$$

seja convergente no ponto $x = -3$ e divergente no ponto $x = 3$.

- 3) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

- 4) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 0$.

- 5) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

V. Séries de Taylor.

- 1) Desenvolva a função $\log x$ em série de potências de $(x - 1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 2) Desenvolva a função $x \log x$ em série de potências de $(x - 1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 3) Desenvolva a função $\log(x^2 + 2x + 2)$ em série de potências de $(x + 1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 4) Desenvolva a função $1/x$ em série de potências de $(x - 1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 5) Desenvolva a função $1/x^2$ em série de potências de $(x - 1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 6) Desenvolva a função $1/(x + 2)$ em série de potências de $(x + 1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 7) Desenvolva a função $1/(x + 2)$ em série de potências de x . Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 8) Desenvolva a função $1/(x + 1)$ em série de potências de $(x - 2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 9) Desenvolva a função $1/x$ em série de potências de $(x - 2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 10) Desenvolva a função $1/x^2$ em série de potências de $(x - 2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 11) Desenvolva a função $\int_0^x \sin(t^2) dt$ em série de potências de x . Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 12) Desenvolva a função $\int_0^x \cos(t^2) dt$ em série de potências de x . Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 13) Desenvolva a função $\int_0^x e^{t^2} dt$ em série de potências de x . Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?
- 14) Desenvolva a função

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} \log(1 + t^2) dt$$

em série de potências de x . Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função? A função φ tem um extremo no ponto zero? Justifique com base na série que obteve para φ .