Instituto Superior Técnico - TagusPark
Matemática Discreta 2020/2021
Exercícios para as aulas de problemas e teorico-práticas

Lista 10

Após a aula teorico-prática e a de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina. Vários dos exercícios (ou muito semelhantes) são apresentados como exemplos ou exercícios resolvidos no Capítulo 7 do livro.

1 Calendários: determinação da data do domingo de Páscoa

Calcule o dia em que se celebra/celebrou a Páscoa em: 1. 1385 2. 1500 3. 2022 4. 2050
Pode confirmar em `https://www.staff.science.uu.nl/~gent0113/easter/easter_text2a.htm`, por exemplo.

2 Representação computacional de grafos

Grafos/multigrafos podem ser representados computacionalmente de diversas formas. A melhor representação a escolher dependerá do problema que se pretende resolver. Dois exemplos:

- **Matriz de adjacência**: um grafo $\mathcal{G}$ com n vértices, designados por $1, 2, \ldots, n$, é representado por uma matriz $n \times n$ de números inteiros (matriz de adjacência de $\mathcal{G}$), na qual o inteiro que está na linha i e coluna j é o número de arestas incidentes nos vértices i e j.

- **Matriz de incidência**: um grafo $\mathcal{G}$ com n vértices, designados por $1, 2, \ldots, n$, e k arestas, designadas por $1, 2, \ldots, k$, é representado por uma matriz $n \times k$ de 0's e 1's (matriz de incidêncio de $\mathcal{G}$), na qual o número que está na linha i e coluna j é 1 se a aresta j incide no vértice v_i, e é 0 em caso contrário.

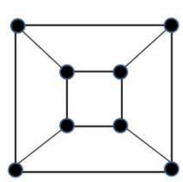
1. Construa matrizes de adjacência para os grafos do Exercício 3.1.
2. Construa matrizes de incidência para os grafos do Exercício 3.1.

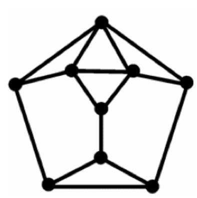
3 Grafos planares

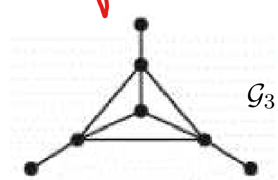
$p - q + r = 2$

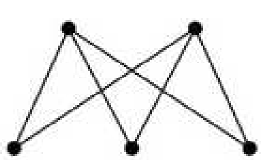
1. Considere os seguintes grafos e recorde a fórmula de Euler que relaciona o número p de vértices, q de arestas e r de regiões de um grafo conexo planar.

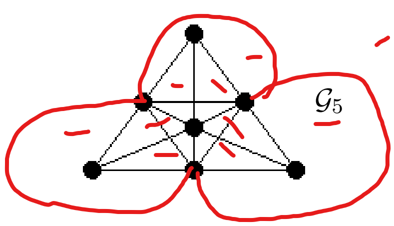
$q \leq 3p - 6$

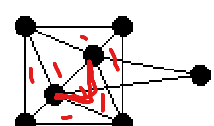

$\mathcal{G}_1$


$\mathcal{G}_2$


$\mathcal{G}_3$


$\mathcal{G}_4$


$\mathcal{G}_5$


$\mathcal{G}_6$

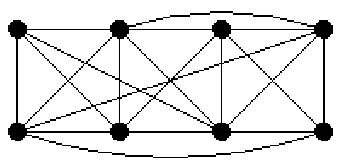
(a) Confirme que os grafos $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ e $\mathcal{G}_3$ verificam a fórmula de Euler.

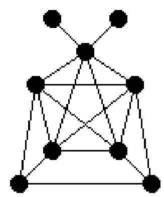
(b) Mostre que grafos $\mathcal{G}_4$, $\mathcal{G}_5$ e $\mathcal{G}_6$ são planares e confirme que verificam a fórmula de Euler.

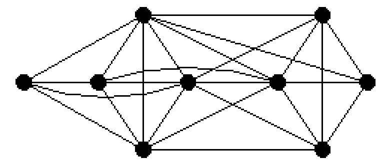
2. Mostre que o grau médio dos vértices de um grafo conexo planar é menor que ou igual a 5.

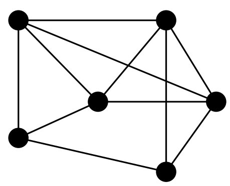
3. Mostre que nenhum grafo conexo que tenha 8 vértices e seja 5-regular é um grafo planar (um grafo diz-se k-regular se todos os vértices têm grau k).

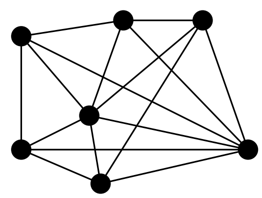
4. Mostre que os seguintes grafos não são planares, recorrendo a resultados sobre este assunto que estudou.

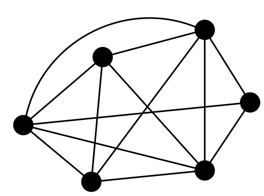

$\mathcal{G}_1$

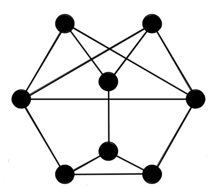

$\mathcal{G}_2$

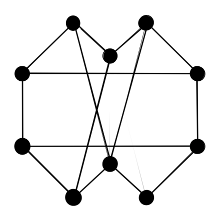

$\mathcal{G}_3$


$\mathcal{G}_4$


$\mathcal{G}_5$

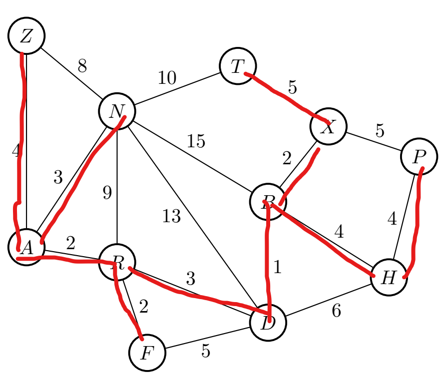

$\mathcal{G}_6$

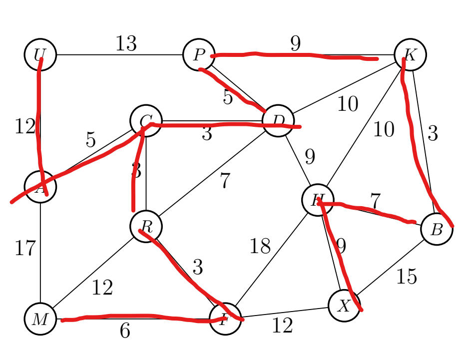

$\mathcal{G}_7$

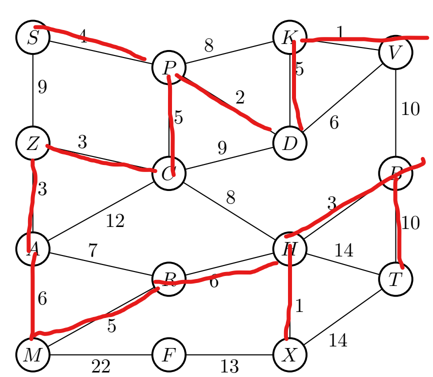

$\mathcal{G}_8$

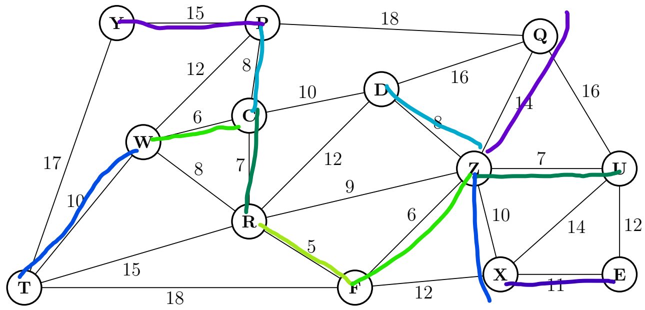
4 Algoritmo de Kruskal

Considere as redes seguintes e aplique o algoritmo de Kruskal a cada uma para obter uma árvore de cobertura de custo mínimo (o exercício relativamente à rede $\mathcal{R}_4$ está resolvido no guião da aula teórica 18).


$\mathcal{R}_1$


$\mathcal{R}_2$

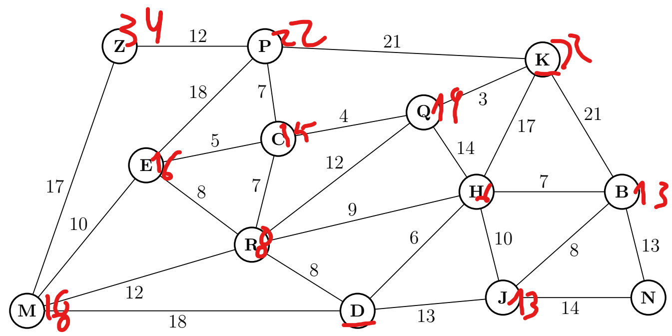

$\mathcal{R}_3$



$\mathcal{R}_4$

5 Algoritmo de Dijkstra

1. Responda às questões indicadas relativamente à rede seguinte:

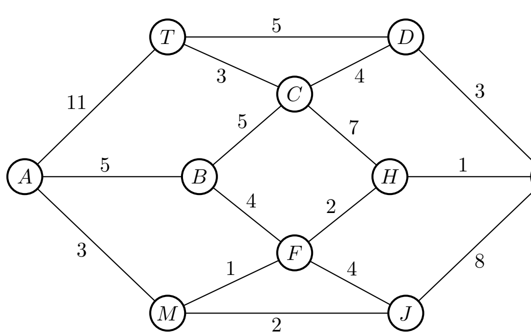


   (a) Use o algoritmo de Dijkstra para obter uma árvore de Dijkstra relativa ao vértice D (este exercício está resolvido no guião da aula teórica 18).

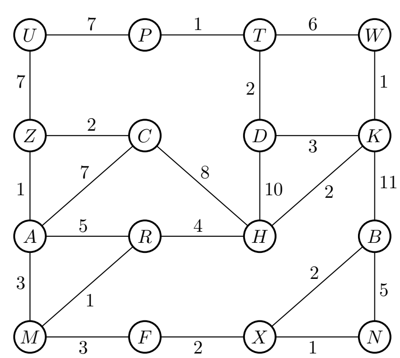
   (b) A partir da árvore construída, indique uma trajetória $\widetilde{DK}$ de custo mínimo na rede e o respetivo custo, e uma trajetória $\widetilde{DZ}$ de custo mínimo na rede e o respetivo custo.

   22

2. Responda às questões indicadas relativamente às redes seguintes:

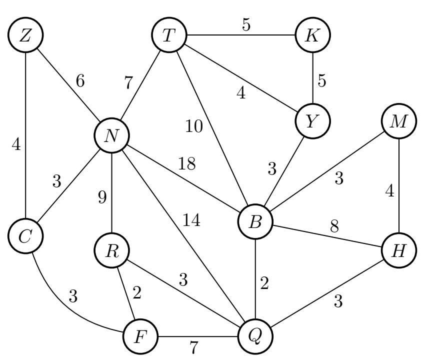


$\mathcal{R}_1$

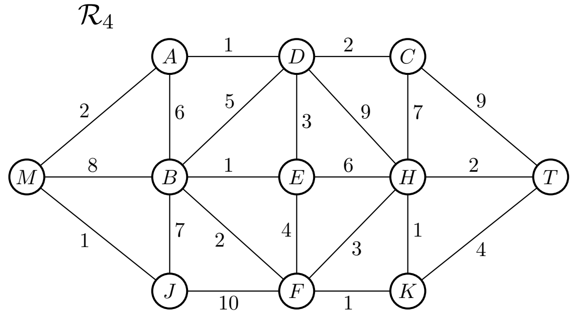


$\mathcal{R}_2$

$\mathcal{R}_3$



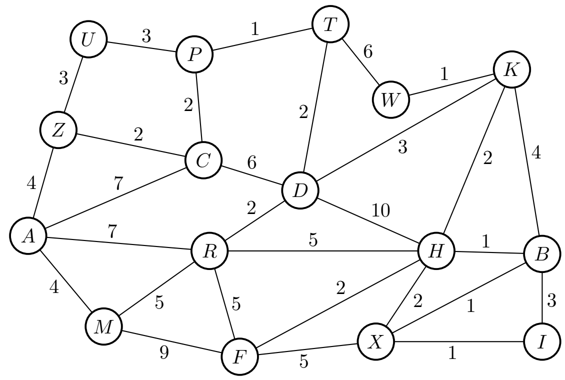
$\mathcal{R}_4$



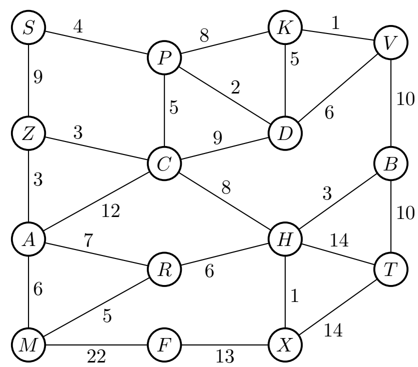
(a) Use o algoritmo de Dijkstra para obter uma árvore de Dijkstra relativa ao vértice M.

(b) A partir da árvore construída, indique uma trajetória $\widetilde{MC}$ de custo mínimo na rede e o respetivo custo, e uma trajetória $\widetilde{MT}$ de custo mínimo na rede e o respetivo custo.

3. Use o algoritmo de Dijkstra para calcular uma trajetória $\widetilde{IC}$ de custo mínimo na rede seguinte, e indique depois o custo dessa trajetória.



4. Use o algoritmo de Dijkstra para calcular uma trajetória $\widetilde{MK}$ de custo mínimo na rede da seguinte, e indique depois o custo dessa trajetória.



5. Explique como usar o algoritmo de Dijkstra para, dado um grafo conexo $\mathcal{G}$ e dois vértices V_1 e V_2 de $\mathcal{G}$, calcular um caminho mais curto (com o menor número possível de arestas) que ligue V_1 a V_2 em $\mathcal{G}$.