Ficha 6
Resolução dos exercícios propostos

I.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_1^2 (x^2\text{-}2x+3)\,dx$

Resolução:

$$\int_1^2 (x^2-2x+3)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 3\left[x\right]_1^3$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} - 2\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + 3(3-1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{7}{3}$$

b) $\int_0^8 (\sqrt{2t} + \sqrt[3]{t})\,dt$

Resolução:

$$\int_0^2 (\sqrt{2t} + \sqrt[3]{t})\,dt = \int_0^2 (\sqrt{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{t})\,dt = \sqrt{2}\int_0^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt + \int_0^2 t^{\frac{1}{3}}\,dt = \sqrt{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 + \left[\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_0^2 = \sqrt{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \left[\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^2$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \frac{3}{4}\left[t^{\frac{4}{3}}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_0^2 + \frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{t^4}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{0^3}\right) + \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2^4} - \sqrt[3]{0^4}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}2\sqrt{2} + \frac{3}{4}2\sqrt[3]{2} = \frac{8}{3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

c) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$

Resolução:

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy = \int_1^4 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{\sqrt{y}}{y^2}\right)dy = \int_1^4 \frac{1}{y^2}\,dy + \int_1^4 \frac{\sqrt{y}}{y^2}\,dy = \int_1^4 y^{-2}\,dy + \int_1^4 y^{\frac{1}{2}}y^{-2}\,dy = \int_1^4 y^{-2}\,dy + \int_1^4 y^{-\frac{3}{2}}\,dy$$

$$= \left[\frac{y^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^4 + \left[\frac{y^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^4 = \left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^4 + \left[\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 + \left[-\frac{2}{\sqrt{y}}\right]_1^4$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1}\right) + \left(-\frac{2}{\sqrt{4}}\right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = -\frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{2} + 2 = \frac{7}{4}$$

a) $\int_0^1 \frac{x\text{-}1}{x^2\text{-}2x+5}\,dx$

Resolução:

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2-2x+5\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln\left|1^2-2\cdot 1+5\right| - \ln\left|0^2-2\cdot 0+5\right|\right)$$

$$= \ln(2) - \frac{\ln(5)}{2}$$

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

I.2 Calcule a área da figura limitada pela parábola $y = 4x\text{-}x^2$ e o eixo das abcissas.

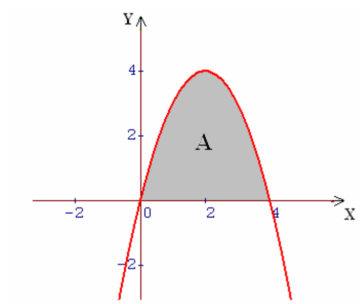
Resolução:

Representação gráfica:

- $y = 4x - x^2$, representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para a esquerda baixo, e com zeros em 0 e 4,

  Para: $x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0 - 0^2 = 0$,

  $y = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$



Cálculo da área (A)

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 4\int_0^4 x\,dx - \int_0^4 x^2\,dx = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4}{2}\left[x^2\right]_0^4 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{4}{2}\left(4^2 - 0^2\right) - \frac{1}{3}\left(4^3 - 0^3\right) = \frac{32}{3}$$

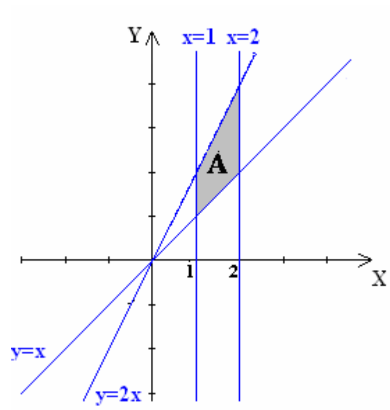
I.3 Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y=x$, $y = 2x$, $x = 1$ e $x = 2$.

Resolução:

Representação gráfica:

- $y = x$ Representa a bissectriz dos quadrantes ímpares
- $y = 2x$ Representa uma recta de declive positivo
- $x = 1$ Representa uma recta vertical
- $x = 2$ Representa uma recta vertical



Cálculo da área (A):

A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

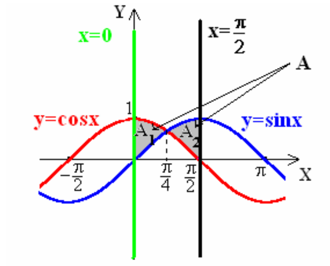
$$A = \int_1^2 (2x - x)\,dx = \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

b) $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ x = 0 \text{ e } x = \frac{\pi}{2}.$

Resolução:

Representação gráfica:

- $y = \operatorname{sen} x$ representa a função seno
- $y = \cos x$ representa a função coseno
- $x = 0$ representa o eixo das ordenadas
- $x = \frac{\pi}{2}$ representa uma recta vertical



Cálculo da área (A):

A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx \underset{\substack{\text{Por simetria}\\ \text{em relação à}\\ \text{recta } x=\frac{\pi}{4}}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$$

$$= 2\left[\operatorname{sen} x - (-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left[\operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (\operatorname{sen} 0 + \cos 0)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0+1)\right) = 2\sqrt{2} - 2$$

c) $y^2 = -4(x-1) \text{ e } y^2 = -2(x-2).$

Resolução:

Representação gráfica:

- $y^2 = -4(x-1) \Leftrightarrow y^2 = -4x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{4-y^2}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}y^2 + 1,$ representa uma parábola de eixo horizontal com concavidade voltada para a esquerda

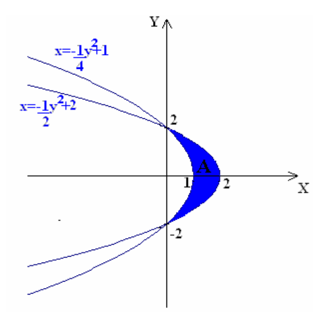
  Para: $x = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{4}y^2 + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}y^2 = -1 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}0^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1$

- $y^2 = -2(x-2) \Leftrightarrow y^2 = -2x + 4 \Leftrightarrow y^2 - 4 = -2x \Leftrightarrow x = \frac{4-y^2}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y^2 + 2,$ representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para a esquerda

  Para: $x = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}y^2 + 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}y^2 = -2 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}0^2 + 2 \Leftrightarrow x = 2$



Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

Cálculo da área (A)

A área pode ser determinada com referência ao eixo das ordenadas. Assim a área da superfície entre as duas parábolas, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{2}y^2+2-\left(-\frac{1}{4}y^2+1\right)\right)dy=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{2}y^2+2+\frac{1}{4}y^2-1\right)dy=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{2}{4}y^2+\frac{1}{4}y^2+1\right)dy$$

$$==\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}y^2+1\right)dy=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Por simetria em}\\ \text{relação ao eixo dos xx}}}{2\int_{0}^{2}}\left(-\frac{1}{4}y^2+1\right)dy=2\left[-\frac{1}{4}\frac{y^3}{3}+y\right]_0^2=2\left[-\frac{1}{12}y^3+y\right]_0^2$$

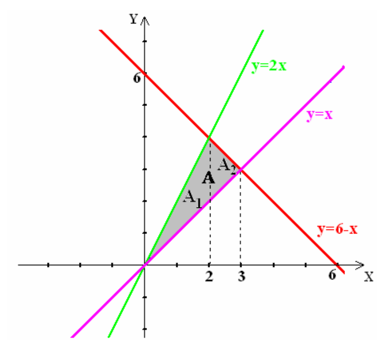
$$=2\left(-\frac{1}{12}2^3+2-\left(-\frac{1}{12}0^3+0\right)\right)=2\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{8}{3}$$

d) $y=x,\ y=2x$ e $y=6-x.$

Resolução:

Representação gráfica:

- $y=x$ representa uma recta
  Para: $x=0\Rightarrow y=0$
  $y=1\Rightarrow 1=x\Leftrightarrow x=1$
- $y=2x$ representa uma recta
  Para: $x=1\Rightarrow y=2\cdot 1=2$
  $y=0\Rightarrow 0=2x\Leftrightarrow x=0$
- $y=6-x$ representa uma recta
  Para: $x=0\Rightarrow y=6-0=6$
  $y=0\Rightarrow 0=6-x\Leftrightarrow x=6$



Determinação dos pontos de intersecção entre

- a recta $y=2x$ e a recta $y=6-x$:

$$\begin{cases}y=2x\\ y=6-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ 2x=6-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ 2x+x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\\ 3x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\cdot 2=4\\ x=2\end{cases}$$

A recta $y=2x$ e a recta $y=6-x$ intersectam-se no ponto $(2,4)$.

- a recta $y=x$ e a recta $y=6-x$:

$$\begin{cases}y=x\\ y=6-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ x=6-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\\ x+x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\\ 2x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\ x=3\end{cases}$$

A recta $y=2x$ e a recta $y=6-x$ intersectam-se no ponto $(3,3)$.

Cálculo da área (A):

A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A=A_1+A_2=\int_0^2(2x-x)\,dx+\int_2^3(6-x-x)\,dx=\int_0^2 x\,dx+\int_2^3(6-2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[6x-2\frac{x^2}{2}\right]_2^3=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}+6\cdot 3-2\frac{3^2}{2}-\left(6\cdot 2-2\frac{2^2}{2}\right)=2+18-9-(12-4)=3$$