IST - 1º Semestre de 2016/17

EXERCÍCIOS DE ÁLGEBRA LINEAR [1]

FICHA 5 - Ortogonalidade

1 Produto interno e ortogonalidade

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ define-se o **produto interno (usual) de u por v**, como sendo o valor real

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + ... + u_n v_n.$$

Também se usa a notação $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ com o mesmo significado de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Considerando os vectores coluna

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix},$$

o produto interno pode descrever-se em termos de um produto matricial:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

O produto interno possui as seguintes propriedades:

i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (comutatividade).

ii) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributividade).

iii) $\mathbf{u} \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geqslant 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ se e só se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

À custa do produto interno definimos a **norma** de um vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u}\|$, através da relação

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}.$$

No caso de $\mathbb{R}^3$ (e $\mathbb{R}^2$) o valor real não negativo $\|\mathbf{u}\|$, coincide com a habitual noção do comprimento do vector $\mathbf{u}$. Tem-se ainda que com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ (e $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \theta,$$

[1] Coligidos por: João Ferreira Alves, Ricardo Coutinho e José M. Ferreira.

onde $\theta \in [0, \pi]$ é o (menor) ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. A distância entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é definida pelo valor $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

São válidas as seguintes propriedades da norma:

i) $\|\mathbf{u}\| \geqslant 0$ e $\|\mathbf{u}\| = 0$ se e só se $\mathbf{u} = 0$.

ii) $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \ \|\mathbf{u}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

iii) $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\|$ (desigualdade de Cauchy[2]-Schwarz[3]).

iv) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdade triangular).

1.1 Vectores e subespaços ortogonais

Dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ são ditos **ortogonais** ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Dois subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$ dizem-se **ortogonais** se

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \ \forall \mathbf{u} \in U, \ \forall \mathbf{v} \in V.$$

Dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais se e só se $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

Dado um subespaço U de $\mathbb{R}^n$, toma o nome de **complemento ortogonal** de U, o conjunto

$$U^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0, \ \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

A respeito deste conceito são válidas as seguintes afirmações:

- $U^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
- U e $U^\perp$ são subespaços ortogonais.
- $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
- $\dim U + \dim U^\perp = n$.
- $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$
- $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.
- $\mathcal{L}\left(\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}\right)^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_1 = 0, ..., \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_p = 0\}$.
- Dada uma matriz real, $\mathbf{S}$, $n \times p$ então:

$$\text{i)} \ (\operatorname{Col} \mathbf{S})^\perp = \operatorname{Nul} \mathbf{S}^T. \quad \text{ii)} \ (\operatorname{Nul} \mathbf{S})^\perp = \operatorname{Col} \mathbf{S}^T.$$

[2] Augustin Louis Cauchy, n. em Paris, França, a 21 de Agosto de 1789, m. em Sceaux, França, a 23 de Maio de 1857.

[3] Herman Amandus Schwarz, n. em Hermsdorf, Polónia, a 25 de Janeiro de 1843, m. em Berlim, Alemanha, a 30 de Novembro de 1921.

1.2 Exercícios

Exercício 1 *Para os casos a seguir indicados calcule* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *e* $\cos\theta$ $(\theta = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$.

a) $\mathbf{u} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$.

b) $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 0)$.

c) $\mathbf{u} = (-2, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$.

Exercício 2 *Os vectores* $\mathbf{u} = (3, -2, 1)$ *e* $\mathbf{v} = (1, -3, 5)$ *constituem os lados dum triângulo rectângulo? Qual a área do triângulo?*

Exercício 3 *Mostre que*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2}{4}$$

Exercício 4 *Prove a identidade do paralelogramo:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

Exercício 5 *Determine uma base do complemento ortogonal do subespaço* U *de* $\mathbb{R}^3$ *quando:*

a) $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

b) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 2)\}$.

c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.

d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0,\ y + z = 0\}$.

Exercício 6 *Encontre uma base do complemento ortogonal do subespaço* U *de* $\mathbb{R}^4$ *nos seguintes casos:*

a) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 1)\}$.

b) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0,\ x + 2y - z = 0\}$.

c) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$.

d) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 2, 0)\}$.

e) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0,\ 2y - z = 0,\ x + y - w = 0\}$.

f) $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.

g) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0,\ 2y - z = 0,\ z - w = 0,\ z + w = 0\}$.

2 Bases ortogonais

$U = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um **conjunto ortogonal** de $\mathbb{R}^n$ se os vectores de U forem ortogonais dois a dois. Isto é, se

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k = 0, \quad \forall j \neq k.$$

Se além disso, se tiver

$$\|\mathbf{u}_j\| = 1, \quad \forall j,$$

diremos que U é um **conjunto ortonormado**.

Relativamente a estes conjuntos é possível obter as seguintes conclusões:

- São linearmente independentes os vectores de qualquer conjunto ortogonal que não contenha o vector nulo.
- Qualquer conjunto ortogonal de n vectores diferentes do vector nulo é uma base de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Projecção ortogonal sobre um vector

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, chama-se **projecção ortogonal de v sobre u**, ao vector

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}.$$

Tem-se que o vector $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$ é tal que $\mathbf{w} \perp \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$ e que

$$\min \{\|\mathbf{v} - \mathbf{u}'\| : \mathbf{u}' \in \mathcal{L}(\{\mathbf{u}\})\} = \text{distância de } \mathbf{v} \text{ a } \mathcal{L}(\{\mathbf{u}\}) = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}\|.$$

2.2 Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

As projecções ortogonais sobre um vector permitem-nos formular um algoritmo que, a partir de uma qualquer base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ de um dado subespaço U de $\mathbb{R}^n$, nos dê uma base ortogonal de U, $\Omega = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$, onde:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \\
&\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 \\
&\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_3 - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{u}_3 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathbf{v}_p = \mathbf{u}_p - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_p - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{u}_p - \ldots - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}_{p-1}} \mathbf{u}_p
\end{aligned}$$

Este algoritmo toma o nome de **método de ortogonalização de Gram[4]-Schmidt[5]**.

[4]Jorgen Pederson Gram, n. em Nurstrup, Dinamarca, a 27 de Junho de 1850, m. em Copenhaga, Dinamarca, a 29 de Abril de 1916.

[5]Erhard Schmidt, n. em Tartu, Estónia, a 13 de Janeiro de 1876, m. em Berlim, Alemanha, a 6 de Dezembro de 1959.

A partir deste método podemos generalizar o noção de projecção de um vector sobre um subespaço U de $\mathbb{R}^n$. Se $\Omega = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ for uma base ortogonal de U, com $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ chama-se **projecção ortogonal de v sobre** U ao vector

$$\mathrm{Proj}_U\, \mathbf{v} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_1}\, \mathbf{v} + ... + \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_p}\, \mathbf{v}.$$

Tem-se que o vector $\mathbf{v} - \mathrm{Proj}_U\, \mathbf{v} = \mathrm{Proj}_{U^\perp}\, \mathbf{v}$ é ortogonal a U e que

$$\text{distância de } \mathbf{v} \text{ a } U = \min\{\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| : \mathbf{u} \in U\} = \|\mathbf{v} - \mathrm{Proj}_U\, \mathbf{v}\| = \|\mathrm{Proj}_{U^\perp}\, \mathbf{v}\|.$$

Em particular, a projecção de $\mathbf{v}$ sobre um vector $\mathbf{u}$ é tal que

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v} = \mathrm{Proj}_{\mathcal{L}(\{\mathbf{u}\})}\, \mathbf{v}.$$

2.3 Matrizes ortogonais

Uma matriz $\mathbf{A}$, real e $n \times n$, diz-se uma **matriz ortogonal** se for invertível e se a sua matriz inversa coincidir com a sua transposta, ou seja se

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\,\mathbf{A} = I.$$

A este propósito são equivalentes as seguintes afirmações:

- $\mathbf{A}$ é ortogonal.
- As colunas de $\mathbf{A}$ formam um conjunto ortonormado.
- $(\mathbf{Ax}) \cdot (\mathbf{Ay}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- $\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{x}\|$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.4 Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis

Uma matriz $\mathbf{A}$, real e $n \times n$, diz-se uma **matriz ortogonalmente diagonalizável** se for semelhante a uma matriz diagonal, $\mathbf{D}$, cuja matriz de semelhança, $\mathbf{S}$, seja ortogonal. Isto é, se

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$$

com $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Facilmente se verifica que uma matriz ortogonalmente diagonalizável, $\mathbf{A}$ é necessariamente uma matriz simétrica, ou seja, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. O inverso também sucede como se estabelece no seguinte teorema:

Teorema espectral das matrizes simétricas. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real, $n \times n$ e simétrica. Então:

- $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$.
- Os espaços próprios de $\mathbf{A}$ são ortogonais.
- $\mathbf{A}$ é ortogonalmente diagonalizável.

2.5 Exercícios

Exercício 7 *Dos casos seguintes indique aqueles em que* $\Omega = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ *é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$*. Nos casos afirmativos transforme* Ω *numa base ortonormada.*

a) $\mathbf{u}_1 = (-1, 4, -3)\,,\ \mathbf{u}_2 = (5, 2, 1)\,,\ \mathbf{u}_3 = (3, -4, -7)\,.$

b) $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 1)\,,\ \mathbf{u}_2 = (0, 1, 2)\,,\ \mathbf{u}_3 = (-5, -2, 1)\,.$

c) $\mathbf{u}_1 = (2, -5, -3)\,,\ \mathbf{u}_2 = (0, 0, 0)\,,\ \mathbf{u}_3 = (4, -2, 6)\,.$

Exercício 8 *Seja* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0,\ x + y + z = 0\}\,.$

a) *Determine a projecção ortogonal de* $(3, 0, -1)$ *sobre* U*.*

b) *Qual a distância de* $(3, 0, -1)$ *a* U*?*

Exercício 9 *Seja* U *um subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, .., \mathbf{b}_p\}$ *uma base ortogonal de* U*. Verifique que para qualquer* $\mathbf{x} \in U$ *é válida a seguinte igualdade:*

$$\mathbf{x} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}_1}(\mathbf{x}) + \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}_2}(\mathbf{x}) + ... + \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}_p}(\mathbf{x})$$

Exercício 10 *Verifique que os vectores* $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$*,* $\mathbf{b}_2 = (1, -1, -1)$*,* $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 2)$ *formam uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *e determine as coordenadas do vector* $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ *nesta base.*

Exercício 11 *Com* $\mathbf{u} \neq 0$*, vector de* $\mathbb{R}^3$*, considere a recta* $L = \mathcal{L}(\mathbf{u})$*. Para cada* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ *designe por* $\mathbf{x}^*$ *a reflexão de* $\mathbf{x}$ *relativamente a* L*.*

a) *Justifique que*

$$\mathbf{x}^* = 2\ \mathrm{Proj}_L(\mathbf{x}) - \mathbf{x}.$$

b) *Justifique que transformação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*$ *é linear.*

c) *Para* $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$*, qual a matriz que representa* T *na base canónica de* $\mathbb{R}^3$*?*

Exercício 12 *Em* $\mathbb{R}^3$*, com o produto interno usual, considere o subespaço*

$$U = L\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}\,.$$

a) *Calcule a projecção ortogonal de* $(1, 0, 1)$ *sobre* U*.*

b) *Qual é a distância de* $(1, 0, 1)$ *a* U*?*

Exercício 13 *Em* $\mathbb{R}^3$*, com o produto interno usual, considere o subespaço*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\ \right\}.$$

a) *Calcule a projecção ortogonal de* $(1, 0, 0)$ *sobre* U*.*

b) *Qual é a distância de* $(1, 0, 0)$ *a* U*?*

Exercício 14 *Considere o subespaço* $U = \mathcal{L}\{(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

a) *Obtenha uma base ortonormada para* U.

b) *Determine a projecção ortogonal de* $(0,1,0,2)$ *sobre* U.

c) *Qual a distância de* $(0,1,0,2)$ *a* U?

Exercício 15 *Considere o subespaço* $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0\}$ *como subespaço do espaço euclidiano usual* $\mathbb{R}^4$.

a) *Determine uma base de* $U^\perp$ *que seja ortonormada.*

b) *Qual a projecção ortogonal de* $(1,0,1,0)$ *sobre* U?

c) *Calcule a distância de* $(1,0,1,0)$ *a* U?

Exercício 16 *Seja* $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0,\ y - z + w = 0\}$.

a) *Obtenha uma base ortonormada de* U.

b) *Determine a projecção ortogonal de* $(0,0,1,0)$ *sobre* U.

c) *Indique a distância de* $(0,0,1,0)$ *a* U.

Exercício 17 *Considere o produto interno usual em* $\mathbb{R}^4$ *e os seguintes dois vectores ortogonais e normalizados:*

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \quad e \quad \mathbf{u}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

Considere ainda $\mathbf{v} = (1,0,0,0)$. *Determine um vector* $\mathbf{u}_3$ *de modo que* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *e* $\mathbf{u}_3$ *formem uma base ortonormada do subespaço* $S = \mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$. *Quais as coordenadas de* $\mathbf{v}$ *na base* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ *de* S.

Exercício 18 a) *Verifique que*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

b) *Qual a inversa de*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}?$$

Exercício 19 *Determine* a *e* b *de modo que*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & a & b \\ \frac{2}{3} & b & a \end{bmatrix}$$

seja uma matriz ortogonal.

Exercício 20 *Sejam* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *duas matrizes ortogonais. Verifique se* $\mathbf{AB}$ *ou* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *são também ortogonais.*

3 Formas quadráticas

Uma **forma quadrática** é uma função $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuja expressão analítica do seguinte tipo:

$$Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i.j=1} a_{ij} x_i x_j,$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = 1, ..., n.$

Com

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

qualquer forma quadrática pode assumir a forma

$$Q(x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x},$$

com $\mathbf{A}$ matriz real, $n \times n$ e simétrica. Por exemplo, a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= 2x_1^2 - 3x_1 x_2 + 4x_2^2 \\ &= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.1 Classificação das formas quadráticas

Pondo $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, uma forma quadrática $Q(\mathbf{x})$ e as matrizes simétricas que lhe estão associadas são classificadas em:

1. **Definidas positivas** se $Q(\mathbf{x}) > 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$.
2. **Definidas negativas** se $Q(\mathbf{x}) < 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$.
3. **Semidefinidas positivas** se $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
4. **Semidefinidas negativas** se $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
5. **Indefinidas** se $Q(\mathbf{x})$ tomar valores positivos e negativos.

3.2 Formas quadráticas e valores próprios

A partir da relação

$$Q(x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x},$$

com $\mathbf{A}$ matriz real, $n \times n$ e simétrica, como $\mathbf{A}$ é ortogonalmente diagonalizável temos que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^T\, \mathbf{x}$$

em que $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal, $n \times n$, e $\mathbf{S}$ uma matriz ortogonal também $n \times n$. Com $\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} y_1 & ... & y_n \end{bmatrix}$, fazendo então

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}^T \mathbf{x}$$

temos que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\, \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{D}\, \mathbf{y}.$$

Isto significa que através da mudança de variável $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$, a forma quadrática Q pode ser descrita, na nova variável, através da expressão

$$Q(y_1, ..., y_n) = \mathbf{y}^T \mathbf{D}\, \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2,$$

onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$, são os números reais que constituem o espectro de $\mathbf{A}$, ou seja os seus valores próprios.

Este facto permite-nos então concluir:

1. Q é uma forma definida positiva se e só se todos os valores próprios de $\mathbf{A}$ são positivos.
2. Q é uma forma definida negativa se e só se todos os valores próprios de $\mathbf{A}$ são negativos.
3. Q é uma forma semidefinida positiva se e só se todos os valores próprios de $\mathbf{A}$ são não negativos.
4. Q é uma forma semidefinida negativa se e só se todos os valores próprios de $\mathbf{A}$ são não positivos.
5. Q é uma forma indefinida se e só se $\mathbf{A}$ tiver valores próprios positivos e negativos.

3.3 Exercícios

Exercício 21 *Classifique as seguintes matrizes simétricas.*

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{c)} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 22 *Com base no exercício anterior classifique as seguintes formas quadráticas.*

a) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$.

b) $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

c) $Q(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_2x_1 - 2x_2^2$.

d) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2x_1$.

e) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_1$.

f) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_3x_1$.

Exercício 23 *Para cada uma das formas quadráticas do exercício anterior, à excepção da c), proceda a uma mudança de variável* $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$*, indicando a respectiva matriz* $\mathbf{S}$*, de modo a obter* Q *sem termos com produtos cruzados.*

4 Produto interno em espaços vectoriais gerais

Dado um espaço vectorial V sobre $\mathbb{R}$, um produto interno definido em V é uma aplicação $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades válidas para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (simetria).

ii) $\langle (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (linearidade).

iii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geqslant 0$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e só se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positividade).

Dado um espaço vectorial V sobre $\mathbb{C}$, um produto interno definido em V é uma aplicação $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades válidas para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ (simetria hermiteana).

ii) $\langle (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (linearidade).

iii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geqslant 0$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e só se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positividade).

Note-se que $\langle \mathbf{u}, (\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\beta} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

À custa dum produto interno $\langle .,. \rangle$ definido em V definimos a correspondente **norma** de um vector $\mathbf{u} \in V$, $\|\mathbf{u}\|$, através da relação

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}.$$

São válidas as seguintes propriedades da norma:

i) $\|\mathbf{u}\| \geqslant 0$ e $\|\mathbf{u}\| = 0$ se e só se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

ii) $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \ \|\mathbf{u}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

iii) $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant \|\mathbf{u}\| \ \|\mathbf{v}\|$ (desigualdade de Cauchy[6]-Schwarz[7]).

iv) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (desigualdade triangular).

[6] Augustin Louis Cauchy, n. em Paris, França, a 21 de Agosto de 1789, m. em Sceaux, França, a 23 de Maio de 1857.

[7] Herman Amandus Schwarz, n. em Hermsdorf, Polónia, a 25 de Janeiro de 1843, m. em Berlim, Alemanha, a 30 de Novembro de 1921.

Dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ são ditos **ortogonais** ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Se dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais, então $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

Define-se o **ângulo θ entre dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$** do espaço vectorial V sobre $\mathbb{R}$ munido do produto interno $\langle ., . \rangle$ de forma a que seja válida a fórmula

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta, \quad \text{ou seja} \quad \theta = \arccos \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

Dois subespaços U e W de V dizem-se **ortogonais** se

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{u} \in U, \ \forall \mathbf{v} \in W.$$

Dado um subespaço U de V, toma o nome de **complemento ortogonal** de U, o subespaço de V definido por

$$U^{\perp} = \{\mathbf{w} \in V : \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

4.1 Projecções em subespaços de dimensão finita

$U = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\} \subset V$, diz-se um **conjunto ortogonal** do espaço vectorial V munido de um produto interno $\langle ., . \rangle$ se os vectores de U forem ortogonais dois a dois. Isto é, se

$$\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = 0, \quad \forall j \neq k.$$

Se além disso, se tiver

$$\|\mathbf{u}_j\| = 1, \quad \forall j,$$

diremos que U é um **conjunto ortonormado**.

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, chama-se **projecção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$**, ao vector

$$\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}.$$

Tem-se que o vector $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ é tal que $\mathbf{w} \perp \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ e que

$$\min \{\|\mathbf{v} - \mathbf{u}'\| : \mathbf{u}' \in \mathcal{L}(\{\mathbf{u}\})\} = \text{distância de } \mathbf{v} \text{ a } \mathcal{L}(\{\mathbf{u}\}) = \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}\|.$$

O **método de ortogonalização de Gram-Schmidt** mantém a mesma forma e permite a partir de uma qualquer base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ de um dado subespaço U (de dimensão finita) de V obter uma base ortogonal $\Omega = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p\}$ de U:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \\
&\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \operatorname{Proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_2 \\
&\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \operatorname{Proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_3 - \operatorname{Proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{u}_3 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathbf{v}_p = \mathbf{u}_p - \operatorname{Proj}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{u}_p - \operatorname{Proj}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{u}_p - \ldots - \operatorname{Proj}_{\mathbf{v}_{p-1}} \mathbf{u}_p
\end{aligned}$$

Dado U um subespaço de V de dimensão finita e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, .., \mathbf{u}_p\}$ uma base ortogonal de U, então para qualquer $\mathbf{u} \in U$ é válida a seguinte igualdade:

$$\mathbf{u} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{u}) + \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{u}) + ... + \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_p}(\mathbf{u})$$

Se $\Omega = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$ for uma base ortogonal de U, com $\mathbf{v} \in V$ chama-se **projecção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre U** ao vector

$$\mathrm{Proj}_U \mathbf{v} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v} + ... + \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}_p} \mathbf{v}.$$

Tem-se que o vector $\mathbf{v} - \mathrm{Proj}_U \mathbf{v}$ é ortogonal a U e que

$$\text{distância de } \mathbf{v} \text{ a } U = \min\{\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| : \mathbf{u} \in U\} = \|\mathbf{v} - \mathrm{Proj}_U \mathbf{v}\|.$$

Em particular, a projecção de $\mathbf{v}$ sobre um vector $\mathbf{u}$ é tal que $\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \mathrm{Proj}_{\mathcal{L}(\{\mathbf{u}\})} \mathbf{v}$.

4.2 Produtos internos em espaços de dimensão finita

A espaço vectorial de dimensão finita V munido de um produto interno $\langle .,. \rangle$ dá-se o nome de **espaço euclidiano**.

Dada uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ do espaço vectorial V sobre $\mathbb{R}$ (resp. sobre $\mathbb{C}$) a cada produto interno $\langle .,. \rangle$ corresponde uma matriz $\mathbf{M}$ simétrica (resp. hermítica *i.e.* $\mathbf{M}^T = \overline{\mathbf{M}}$) e definida positiva que o representa: se $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}^T = [x_1, ..., x_n]$ e $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}^T = [y_1, ..., y_n]$ são as coordenadas de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in V$ na base $\mathcal{B}$, então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} \qquad (\text{resp. } \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \overline{\mathbf{y}}),$$

onde

$$\mathbf{M} = [\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

4.3 Exercícios

Exercício 24 *Identifique as aplicações* $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *que definem em* $\mathbb{R}^2$ *um produto interno:*

a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$

b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2$

c) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$

d) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + 3x_2 y_2$

Exercício 25 *Identifique as aplicações* $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *que definem um produto interno em* $\mathbb{R}^3$*:*

a) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

b) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2 + 3x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_3$

c) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Exercício 26 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *o produto interno definido por*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2.$$

a) *Calcule* $\|\mathbf{x}\|$, *para um qualquer vector* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$*;*

b) *Calcule o ângulo determinado pelos vectores* $(1, 0)$ *e* $(1, 1)$*;*

c) *Conclua pelas alíneas anteriores que os vectores* $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ *e* $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ *constituem uma base ortonormada de* $\mathbb{R}^2$*. Calcule as componentes de um vector* $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *em relação a esta base.*

Exercício 27 *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o produto interno definido por*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3 + 5x_3y_3.$$

a) *Calcule* $\|\mathbf{x}\|$, *para um qualquer vector* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$*;*

b) *Considere os vectores* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1/2, 0)$ *e* $\mathbf{v}_3 = (0, -1/4, 1/2)$*. Calcule os ângulos determinados pelos vectores:* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$*;* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_3$*;* $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{v}_3$*.*

c) *Conclua pelas alíneas anteriores que* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *é uma base ortonormada de* $\mathbb{R}^3$*. Calcule as componentes de um vector* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *em relação a esta base.*

Exercício 28 *Considere em* $\mathbb{P}_2$ *o produto interno definido por:*

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

a) *Calcule* $\|p(t)\|$ *para um qualquer polinómio* $p(t) \in \mathbb{P}_2$*.*

b) *Mostre que os polinómios*

$$p_1(t) = 1 - t^2, \;\; p_2(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 \;\text{ e }\; p_3(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2$$

constituem uma base ortonormada de $\mathbb{P}_2$*. Calcule as componentes do polinómio* $p(t) = 1$ *nesta base.*

Exercício 29 *Considere em* $\mathbb{P}_2$ *o produto interno definido por:*

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(0)\, q(0) + p'(0)\, q'(0) + p'(1)\, q'(1).$$

a) *Calcule* $\|p(t)\|$ *para um qualquer polinómio* $p(t) \in \mathbb{P}_2$*.*

b) *Calcule o ângulo determinado pelos polinómios* $p(t) = 1$ *e* $q(t) = 2 + t^2$*.*

Exercício 30 *Considere o espaço linear* $\mathbb{P}_2$ *com o seguinte produto interno:*

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere ainda o subespaço de $\mathbb{P}_2$

$$U = \{p(t) \in \mathbb{P}_2 : p(0) = 0 \}.$$

a) *Calcule a projecção ortogonal do polinómio* $1 + t$ *sobre* U*.*

b) *Qual é a distância de* $1 + t$ *a* U*?*

5 Geometria dos k-planos

Num espaço euclidiano V, um k-plano é um conjunto da forma

$$\mathcal{P}_k = \{\mathbf{p}_0\} + U,$$

onde $\mathbf{p}_0 \in V$ e U é um subespaço de V com $\dim U = k$.

Um 0-plano é um ponto, um 1-plano é uma recta e um 2-plano é um plano. Se $\dim V = n$, então um n-plano é o próprio espaço V e não existem k-planos com $k > n$.

Se $\mathcal{P}_k = \{\mathbf{p}_0\} + U$ e $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{P}_k$, então $\mathcal{P}_k$ também admite a representação $\mathcal{P}_k = \{\mathbf{p}_1\} + U$.

Sejam $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_k \in V$, $k+1$ pontos distintos do espaço euclidiano V, então existe o menor k'-plano que passa nesses pontos definido por

$$\mathcal{P}_{k'} = \{\mathbf{p}_0\} + \mathcal{L}\{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\}$$

e se $\{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\}$ é linearmente independente $k' = k$.

5.1 Representações paramétricas e cartesianas de k-planos

Se $\mathcal{P}_k = \{\mathbf{p}_0\} + \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}$, então $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_k$ é equivalente a

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k, \qquad \text{com } x_1, ..., x_k \text{ escalares},$$

que constituem **equações paramétricas** do k-plano $\mathcal{P}_k$.

Se $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-k}\}$ é uma base de $U^\perp$ então $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_k = \{\mathbf{p}_0\} + U$ se e só se

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{w}_j \rangle = 0, \qquad \text{para } j = 1, ..., n-k,$$

que constituem **equações cartesianas** do k-plano $\mathcal{P}_k$.

5.2 Distância entre k-planos

Seja $\mathcal{P}_k = \{\mathbf{p}_0\} + U$ um k-plano e $\mathcal{Q}_s = \{\mathbf{q}_0\} + W$ um s-plano de um espaço euclidiano V, a distância entre estes conjuntos é dada por

$$\min\{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| : \mathbf{p} \in \mathcal{P}_k, \quad \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_s\} = \left\|\operatorname{Proj}_{(U+W)^\perp}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0)\right\|.$$

Em particular a distância de um ponto $\mathbf{q} \in V$ a $\mathcal{P}_k = \{\mathbf{p}_0\} + U$ é dada por

$$\min\{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| : \mathbf{p} \in \mathcal{P}_k\} = \|\operatorname{Proj}_{U^\perp}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{q})\|.$$

Note-se que por definição $\operatorname{Proj}_{\{\mathbf{0}\}} v = \mathbf{0}$.

5.3 Exercícios

Exercício 31 *Para cada uma das rectas de* $\mathbb{R}^3$*, calcule um ponto* $\mathbf{p}$ *e um subespaço* S *tais que* $r = \{\mathbf{p}\} + S$:

a) r *é a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(1,1,1)$ *e* $(1,0,1)$;

b) r *é a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelo ponto* $(1,0,2)$ *e tem a direcção do vector* $(1,1,0)$;

c) r *é a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelo ponto* $(1,3,-1)$ *e é ortogonal aos vectores* $(1,2,1)$ *e* $(1,0,1)$.

Exercício 32 *Determine uma equação cartesiana para cada uma das rectas do exercício anterior.*

Exercício 33 *Para cada um dos planos de* $\mathbb{R}^3$*, calcule um ponto* $\mathbf{p}$ *e um subespaço* S *tais que* $\alpha = \{\mathbf{p}\} + S$:

a) α *é o plano de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ *e* $(1,0,0)$.

b) α *é o plano de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelo ponto* $(1,0,2)$ *e é paralelo ao plano que passa pelos pontos* $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ *e* $(1,-1,0)$.

c) α *é o plano de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelo ponto* $(1,3,-1)$ *e é ortogonal ao vector* $(1,0,-2)$.

Exercício 34 *Determine uma equação cartesiana para cada um dos planos do exercício anterior.*

Exercício 35 *Seja* r_1 *a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(1,1,1)$ *e* $(1,0,1)$*, e* r_2 *a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(2,5,1)$ *e* $(0,5,1)$*. Determine a intersecção destas rectas.*

Exercício 36 *Seja* r *a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(2,-1,3)$ *e* $(4,-5,5)$*, e* α *o plano de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(1,0,0)$, $(2,1,1)$ *e* $(1,1,2)$ *. Determine a intersecção da recta* r *com o plano* α.

Exercício 37 *Seja* β *o plano* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelo ponto* $(0,1,0)$ *e é ortogonal ao vector* $(1,1,1)$*. Determine uma equação cartesiana para a intersecção do plano* β *com o plano* α *do exercício anterior.*

Exercício 38 *Considere a recta* $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 1 \quad \text{e} \quad 3x - z = 2\}$.

a) *Escreva esta recta na forma* $\{p\} + S$*, onde* $p \in \mathbb{R}^3$ *e* S *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$.

b) *Calcule a distância entre o ponto* $(5,6,7)$ *e a recta* r.

Exercício 39 *Considere o plano* α *de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ *e* $(2,0,-5)$.

a) *Escreva a equação cartesiana do plano* α.

b) *Calcule a distância entre o ponto* $(1,6,7)$ *e o plano* α.

Exercício 40 *Mostre que se r_1 e r_2 são rectas não paralelas de $\mathbb{R}^3$, então existe um único par de planos paralelos α_1 e α_2 tais que $r_1 \subset \alpha_1$ e $r_2 \subset \alpha_2$.*

Exercício 41 *Considere a recta $r_1 \subset \mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $(1,0,0)$ e $(2,-4,3)$, e a recta r_2 definida por*

$$r_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \quad e \quad y = 1\right\}.$$

a) *Escreva estas rectas na forma $\{p\} + S$, onde $p \in \mathbb{R}^3$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.*

b) *Calcule a distância entre r_1 e r_2.*

Exercício 42 *Seja $z \in \mathbb{R}$ e considere-se em $\mathbb{R}^3$ a recta r que passa nos pontos $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ e o plano α que passa nos pontos $(0,0,1)$, $(1,0,2)$ e $(0,1,z)$.*

a) *Escreva r e α na forma $\{p\} + S$, onde $p \in \mathbb{R}^3$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.*

b) *Determine z tal que a distância de r a α não seja nula.*

c) *Para esse valor de z calcule a distância de r a α.*

Exercício 43 *Calcule a distância entre os seguintes 2-planos de $\mathbb{R}^4$:*

$$\mathcal{P} = \{(0,0,1,1)\} + \mathcal{L}\{(1,1,1,1),(1,2,0,0)\} \quad e \quad \mathcal{Q} = \{(0,1,3,0)\} + \mathcal{L}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}.$$

Exercício 44 *Calcule $w \in \mathbb{R}$ tal que a distância entre os seguintes 2-planos de $\mathbb{R}^4$ é não nula e determine-a para esse valor de w.*

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}\{(1,1,1,1),(1,2,1,1)\} \quad e \quad \mathcal{Q} = \{(1,1,1,0)\} + \mathcal{L}\{(1,1,2,1),(3,4,5,w)\}.$$

Exercício 45 *Mostre que a distância de um ponto (x_0,y_0,z_0) a um plano de $\mathbb{R}^3$ com equação cartesiana $ax+by+cz=d$ é*

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exercício 46 *Sejam r_1 e r_2 duas rectas não paralelas de $\mathbb{R}^3$, e $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ um vector ortogonal a r_1 e r_2. Mostre que se (x_1,y_1,z_1) é um ponto de r_1 e (x_2,y_2,z_2) é um ponto de r_2, então a distância de r_1 a r_2 é dada por*

$$\frac{|a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

6 Soluções

1) a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0,\ \cos\theta=0$. b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=5,\ \cos\theta=\sqrt{15}/6$. c) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-9,\ \cos\theta=-3\sqrt{21}/14$.

2) Sim. Área $=7\sqrt{6}/2$.

5) a) $\{(-1,0,1)\}$. b) $\{(0,1,0),(-2,0,1)\}$. c) $\{(1,1,-1)\}$. d) $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.

6) a) $\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$. b) $\{(1,2,1,2),(1,2,-1,0)\}$.

c) $\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0)\}$. d) $\{(2,1,-2,0)\}$. e) $\{(1,-1,1,-1),(0,2,-1,0)\}$. f) Conjunto vazio (porque $U^{\perp}=\{(0,0,0,0)\}$). g) $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ (porque $U^{\perp}=\mathbb{R}^4$).

7) a) Ω não é conjunto ortogonal. b) Ω é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. A respectiva base ortonormada é $\left\{\left(1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6}\right),\left(0,1/\sqrt{5},2/\sqrt{5}\right),\left(-5/\sqrt{30},-2/\sqrt{30},1/\sqrt{30}\right)\right\}$ .c) Ω é um conjunto ortogonal, mas não constitui uma base.

8) a) $(0,1/2,-1/2)$. b) $\sqrt{38}/2$.

10) $(5/2,0,1/2)$.

11) c) A matriz que representa T é $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

12) a) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13) a) $(1/2,1/2,0)$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14) a) $\left\{\left(\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2,0\right),(0,\sqrt{2}/2,0,\sqrt{2}/2)\right\}$. b) $(0,3/2,0,3/2)$. c) $\sqrt{2}/2$.

15) a) $\{(1/2,-1/2,1/2,-1/2)\}$. b) $(1/2,1/2,1/2,1/2)$. c) 1.

16) a) $\left\{\left(0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0\right),\left(-\sqrt{10}/5,-\sqrt{10}/10,\sqrt{10}/10,\sqrt{10}/5\right)\right\}$.

b) $(-1/5,2/5,3/5,1/5)$. c) $\sqrt{10}/5$

17) $\mathbf{u}_3=(1/3,0,-2/3,-2/3)$. As coordenadas de $\mathbf{v}$ na base indicada são $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, ou seja, $\mathbf{v}=\frac{2}{3}\mathbf{u}_1+\frac{2}{3}\mathbf{u}_2+\frac{1}{3}\mathbf{u}_3$..

18) b) $\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

19) $a=-2/3$ e $b=1/3$ ou $a=1/3$ e $b=-2/3$.

20) $\mathbf{AB}$ é ortogonal, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ pode não ser.

21) a) Os valores próprios da matriz são 0 e 2, logo é semidefinida positiva.

b) Os valores próprios da matriz são 1 e 3, logo é definida positiva.

c) Os valores próprios da matriz são $-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{5}{2}$ (ambos negativos), logo é definida negativa.

d) Os valores próprios da matriz são -1 e 4, logo é indefinida.

e) Os valores próprios da matriz são -1 e 3, logo é indefinida.

f) Os valores próprios da matriz são -2, 1 e 3, logo é indefinida.

22) a) Semidefinida positiva. b) Definida positiva. c) Definida negativa. d) Indefinida.

e) Indefinida. f) Indefinida.

23) a) $Q(y_1, y_2) = 2y_2^2$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

b) $Q(y_1, y_2) = y_1^2 + 3y_2^2$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

d) $Q(y_1, y_2) = 4y_1^2 - y_2^2$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

e) $Q(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

f) $Q(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

24) a) Define um produto interno; b) Não define um produto interno; c) Não define um produto interno; d) Define um produto interno.

25) a) Define um produto interno; b) Não define um produto interno; c) Define um produto interno.

26) a) $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; c) $(x_1 - x_2, x_2)$.

27) a) $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3}$; b) $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$; c) $(x_1, 2x_2 + x_3, 2x_3)$.

28) a) $\|p(t)\| = \sqrt{p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2}$; c) $(1, 1, 1)$.

29) a) $\|p(t)\| = \sqrt{p(0)^2 + p'(0)^2 + p'(1)^2}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

30) a) $t + t^2$; b) 1.

31) a) $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$ e $S = L\{(0, 1, 0)\}$; b) $\mathbf{p} = (1, 0, 2)$ e $S = L\{(1, 1, 0)\}$; c) $\mathbf{p} = (1, 3, -1)$ e $S = L\{(1, 0, -1)\}$.

32) a) $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x + y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y = 3 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

33) a) $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$ e $S = L\{(0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$; b) $\mathbf{p} = (1, 0, 2)$ e $S = L\{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$; c) $\mathbf{p} = (1, 3, -1)$ e $S = L\{(2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

34) a) $x = 1$; b) $z = 2$; c) $-x + 2z = -3$.

35) $r_1 \cap r_2 = \{(1, 5, 1)\}$.

36) $r \cap \alpha = \{(1, 1, 2)\}$.

37) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$.

38) a) $r = \{(1, 1, 1)\} + \mathcal{L}\{(1, 2, 3)\}$; b) $d((5, 6, 7), r) = \frac{3}{7}\sqrt{21}$.

39) a) $5x + z = 5$; b) $d((1, 6, 7), \alpha) = \frac{7}{26}\sqrt{26}$.

41) a) $r_1 = \{(1, 0, 0)\} + \mathcal{L}\{(1, -4, 3)\}$ e $r_2 = \{(0, 1, 0)\} + \mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$; b) $d(r_1, r_2) = \frac{3}{17}\sqrt{17}$.

42) a) $r = \{(1, 0, 0)\} + \mathcal{L}\{(-1, 1, 0)\}$ e $\alpha = \{(0, 0, 1)\} + \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (0, 1, z - 1)\}$; b) $z = 2$; c) $d(r, \alpha) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

43) $d\left(\mathcal{P},\mathcal{Q}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

44) Para $w=3$ vem $d\left(\mathcal{P},\mathcal{Q}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$