Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 21 – Equações de Maxwell e ondas electromagnéticas

Equação de onda e ondas electromagnéticas

- Equação de onda
- Ondas electromagnéticas planas
- Intensidade das ondas electromagnéticas

Popovic & Popovic Cap. 21

Serway 34

Equações de Maxwell – caso geral

Lei de Gauss generalizada

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = \int_v \rho dv$$

Lei de Gauss (c. magnético)

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\ dS = 0$$

CAMPO ELÉCTRICO **CAMPO MAGNÉTICO**

Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS$$

Lei de Maxwell-Ampère generalizada

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_S \left(\vec{J}+\frac{\partial D}{\partial t}\right) dS$$

$$\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\int_v \rho dv$$

Equações de Maxwell num meio (forma integral)

Equações de Maxwell – caso geral

Lei de Gauss generalizada

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

Lei de Gauss (c. magnético)

CAMPO ELÉCTRICO

CAMPO MAGNÉTICO

Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Lei de Maxwell-Ampère generalizada

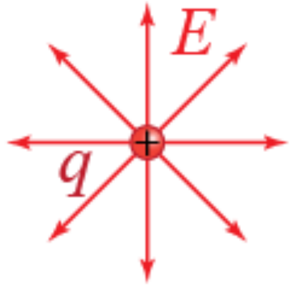
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Equações de Maxwell num meio (forma diferencial)

O que sabemos até agora

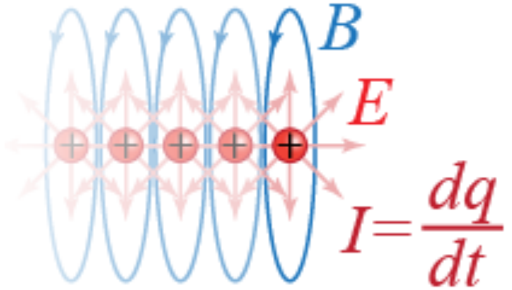
Electrostática
Cargas **paradas** geram campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$



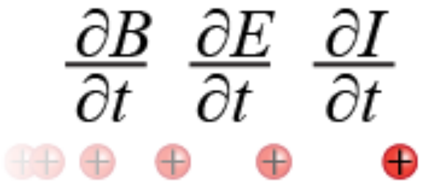
Magnetostática
Cargas com **velocidade** geram campo magnético

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$



Campos variáveis
Cargas com **aceleração** geram campos variáveis

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$



Campo gerado por uma carga acelerada

Qual é a forma do campo quando $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variam?
Consideramos as eqs. de Maxwell numa zona sem cargas nem correntes:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

Calculamos o rotacional de ambas as equações:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right) \qquad \nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{D}\right)$$

Para qualquer função vectorial $\vec{F}$ tem-se $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F}$
(rotacional do rotacional = gradiente da divergência – vector de Laplace)

Campo gerado por uma carga acelerada

Substituindo:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) \qquad \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{D})$$

Numa zona do vácuo, sem cargas nem correntes:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_o\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{D} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

Substituindo:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0} \qquad \boxed{\nabla^2\vec{H} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0}$$

Equação de onda para $\vec{E}$ **Equação de onda para $\vec{H}$**

Equações de onda

As equações obtidas têm a forma de uma **equação de onda**:

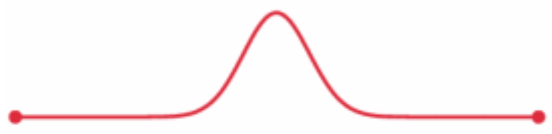
$$\nabla^2 \vec{F} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0$$

A uma dimensão (campo escalar $F = F_x$, propagação segundo o eixo dos z):

$$\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2} = 0$$

A solução é da forma

$$F_x(z,t) = \boxed{F_1(t - z/v)} + \boxed{F_2(t + z/v)}$$



Onda que viaja para $+z$ com velocidade v

Onda que viaja para $-z$ com velocidade v

Equações de onda do campo electromagnético

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

O campo eléctrico e o campo magnético criados por uma carga acelerada têm a forma de uma **onda** que viaja com velocidade

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}$$

O campo e.m. viaja à velocidade da luz: **a luz é uma onda electromagnética!**

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}$$

Velocidade da luz no vácuo

Campo eléctrico de uma carga oscilante

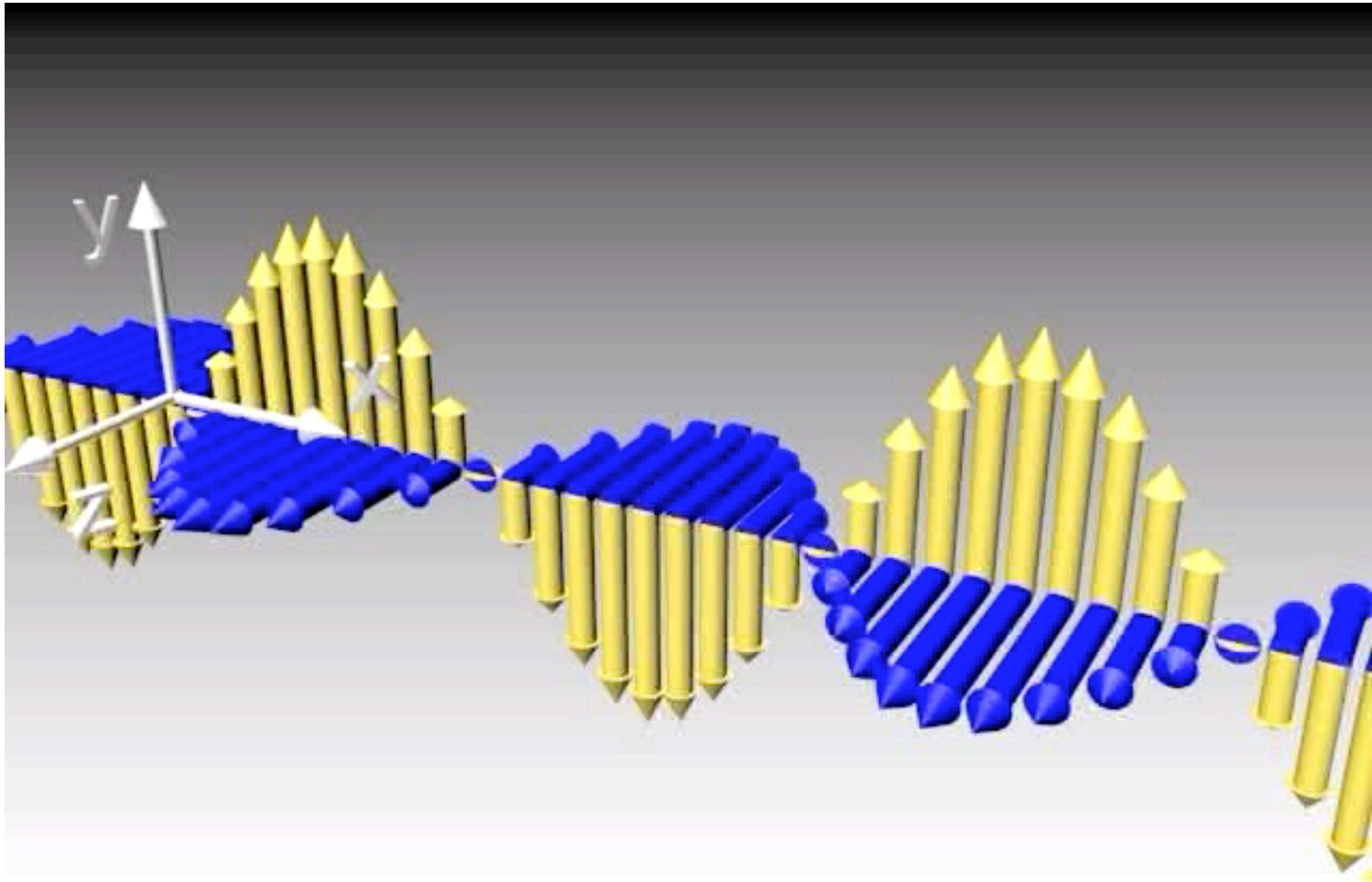
Ver
https://phet.colorado.edu/sims/radiating-charge/radiating-charge_en.html

Onda electromagnética

Faraday: *Campos magnéticos variáveis criam campos eléctricos (perpendiculares)*

Maxwell: *Campos eléctricos variáveis criam campos magnéticos (perpendiculares)*

Numa onda, as variações de um campo criam o outro e vice-versa.



Ondas planas electromagnéticas

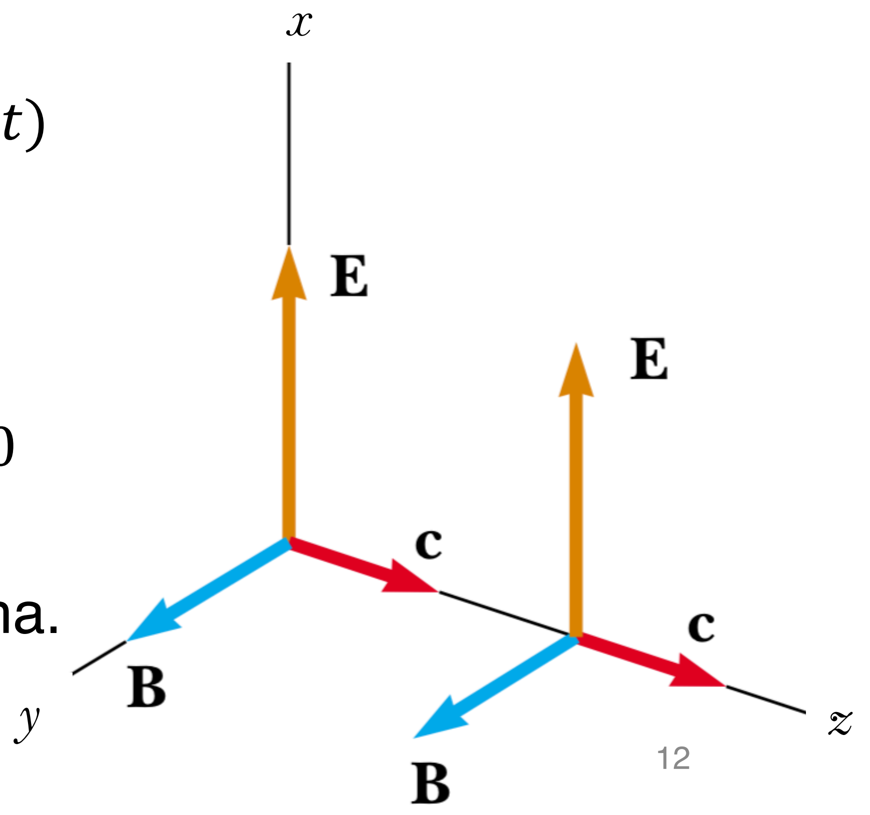
Vamos resolver as eqs. de onda para o campo e.m. assumindo uma forma específica para $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e analisar a forma da solução:

Campos a uma dimensão: $\vec{E} = E\,\vec{e}_x\,, \vec{B} = B\,\vec{e}_y$
Propagação da onda ao longo de z: $E = E(z,t), B = B(z,t)$

Equações de onda:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

As duas eqs. são idênticas, a solução terá a mesma forma.



Ondas planas electromagnéticas

As soluções mais simples são **ondas sinusoidais**:

$$E(z,t) = E_{max}\cos(kz - \omega t) \qquad B(z,t) = B_{max}\cos(kz - \omega t)$$

Os campos têm periodicamente o mesmo valor

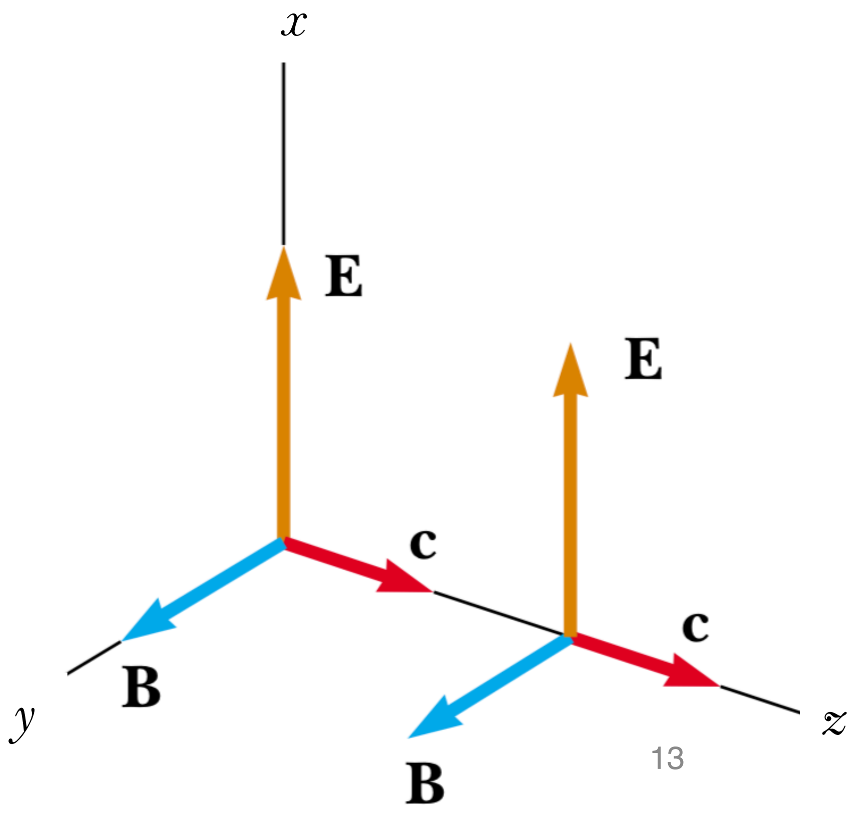
- no espaço: $kz = n2\pi \rightarrow z = n\frac{2\pi}{k} \quad (n = 0,1,2 \ldots)$
- no tempo: $\omega t = n2\pi \rightarrow t = n\frac{2\pi}{\omega} \quad (n = 0,1,2 \ldots)$

Período [s] $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$

Velocidade [m/s] $\boxed{\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = c}$

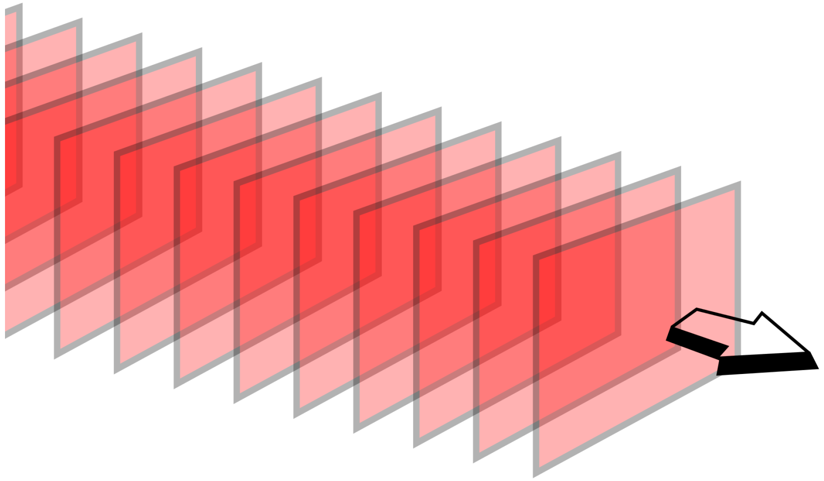
$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ **Comprimento de onda** [m]

$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$ **Número de onda** [m^{-1}]



Ondas planas electromagnéticas

O comprimento de onda λ ou o período T são a separação entre dois pontos da onda com a mesma fase.



Qual a relação entre E e B numa onda plana?

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Temos

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial y}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial z}}_{=0}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial x}}_{=0}, \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial x}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial y}}_{=0} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\, \vec{e}_y$$

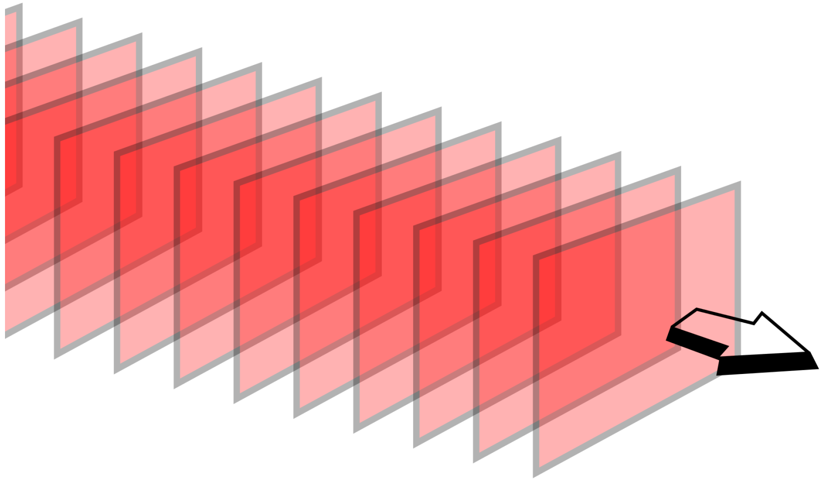
O campo magnético B só tem componente segundo o eixo y

Ondas planas electromagnéticas

Calculando a derivada e substituindo,

$$\nabla \times E = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -kE_{max}\sin(kx - \omega t) = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Definição de rotacional — **Derivada da solução** — **Lei de Faraday**



$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{max}\sin(kx - \omega t)$$

$$\rightarrow kE_{max} = \omega B_{max} \Leftrightarrow \frac{E_{max}}{B_{max}} = \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = c$$

O campo eléctrico E é $c \approx 3\times10^8$ vezes maior que o campo magnético B

Impedância de um meio

No vácuo:

$$\frac{E_{max}}{B_{max}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Usando a relação entre B e H:
Para o vácuo tem-se $Z_0 \approx 377\ \Omega$.

$$\frac{E_{max}}{H_{max}} = \mu_0 c = \boxed{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \equiv Z_0}$$

Impedância do vácuo [Ω]

Para outros meios:

$$\frac{E_{max}}{H_{max}} = \boxed{\sqrt{\mu/\epsilon} \equiv Z}$$

Impedância de um meio [Ω]

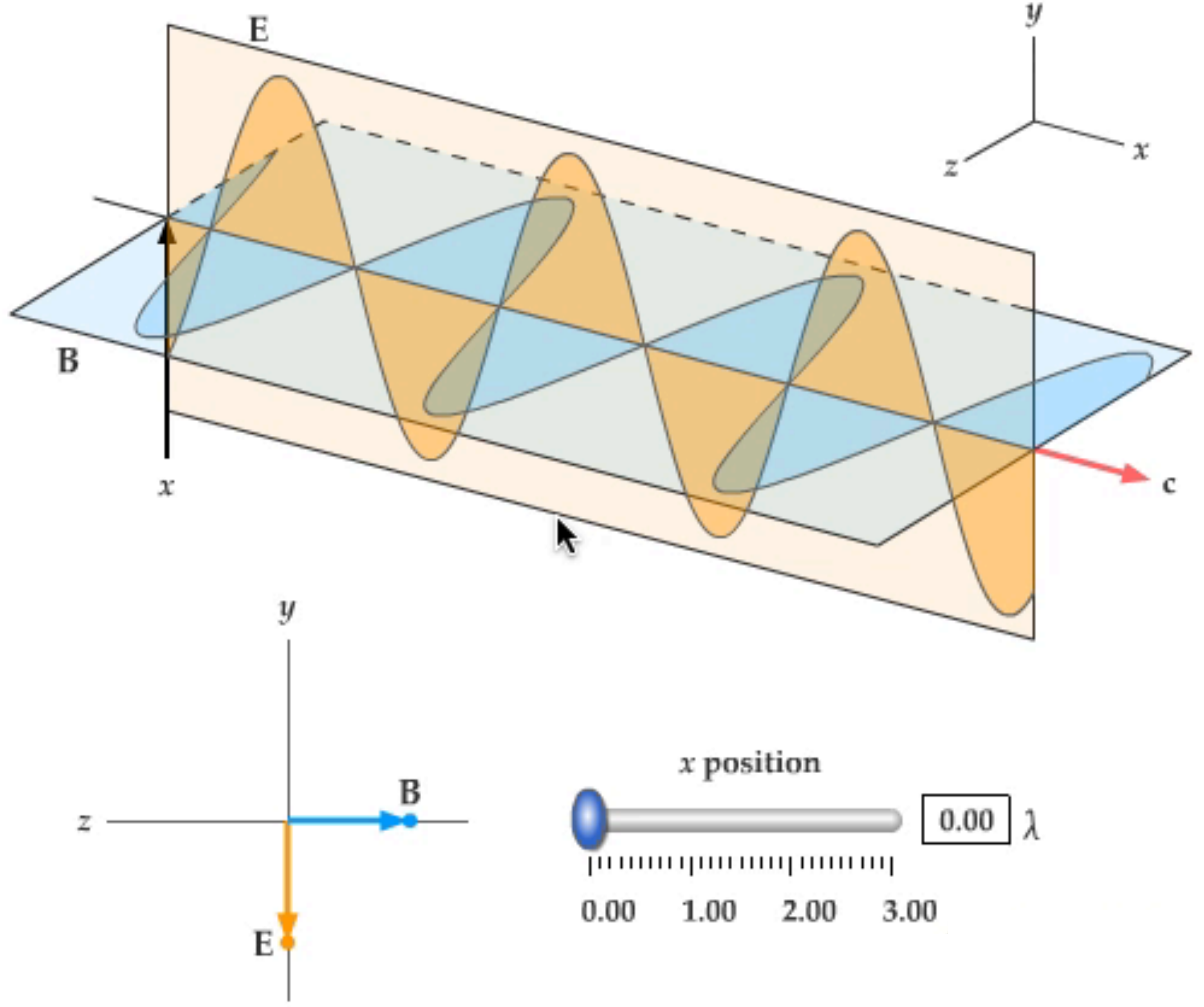
Relação entre impedância Z e índice de refracção n :

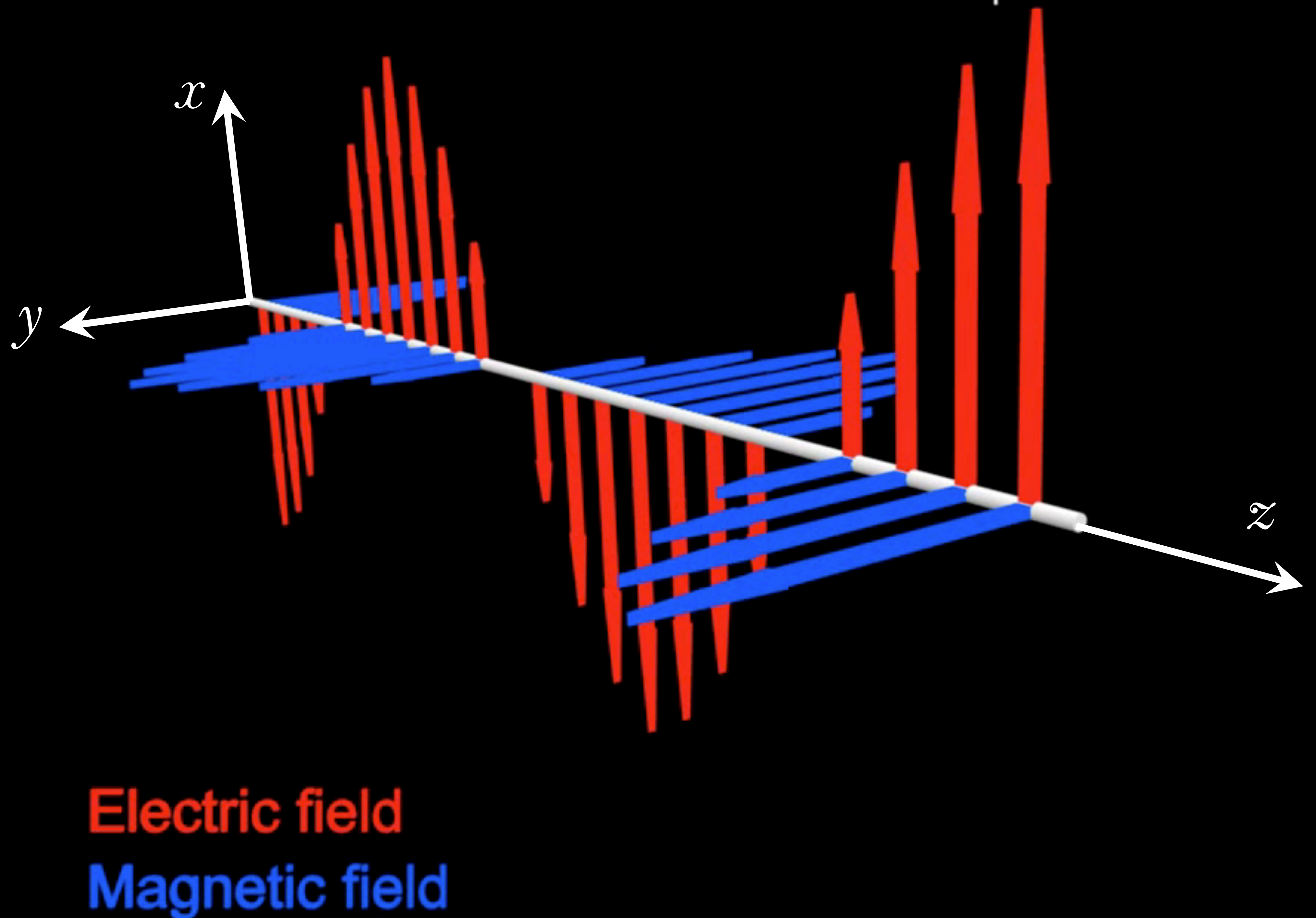
$$\frac{Z}{\mu} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}} = v = \frac{c}{n} \quad \rightarrow \quad \boxed{Z = \frac{\mu c}{n}}$$

Meios não magnéticos ($\mu \approx \mu_0$)

$$Z = \frac{\mu_0 c}{n} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{Z_0}{n}$$

Ondas planas electromagnéticas




x
y
z
Electric field
Magnetic field

Revisão

Cargas aceleradas e campos variáveis

$$\frac{\partial B}{\partial t} \quad \frac{\partial E}{\partial t} \quad \frac{\partial I}{\partial t}$$

Equações de onda

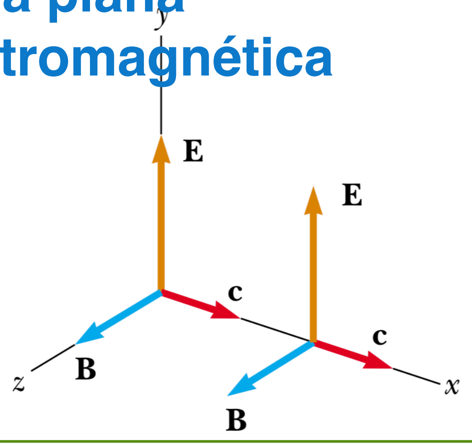
$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

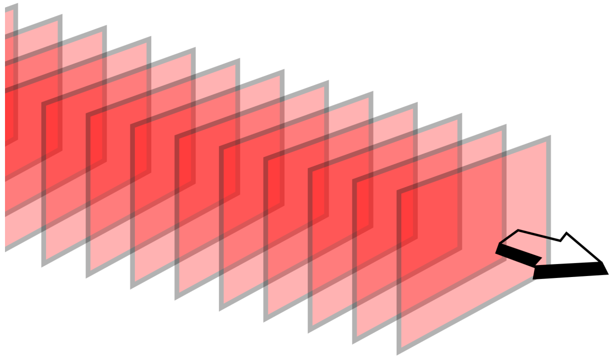
Velocidade da luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Onda plana electromagnética



Comprimento de onda e período



Impedância de um meio

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$$

$$Z = \sqrt{\mu/\epsilon} = Z_0/n$$

Ondas planas no vácuo: propriedades

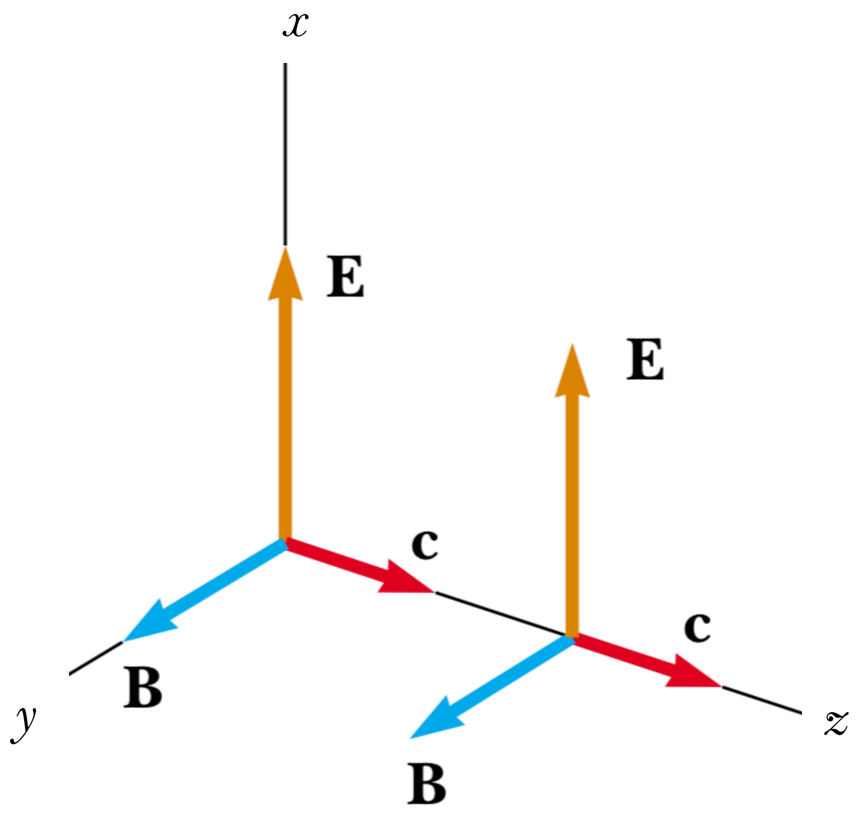
- $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{E} \perp \vec{e}_z$, $\vec{B} \perp \vec{e}_z$

- $\vec{P} \parallel \vec{e}_z$

- E_x e B_y são constantes em todo o espaço para um dado instante t

- Em qualquer ponto do espaço e instante de tempo: $E/B = c$

- Velocidade de propagação: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c$



Revisão: Teorema de Poynting

O termo final do Teorema de Poynting representa a taxa a que é trocada energia através da superfície fechada que rodeia o volume V e tem forma de um **fluxo**:

$$\Phi = \int_S \vec{S} \cdot \vec{n}\, dS, \qquad \boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}} \quad [\,\mathrm{W/m^2}\,]$$

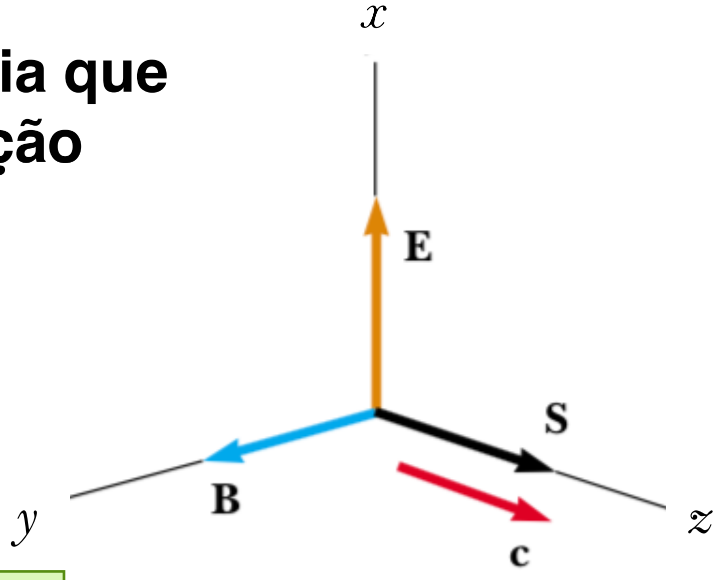
O **vector de Poynting** $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ aponta no sentido de transferência de energia.

O teorema de Poynting diz que a energia e.m. gerada num volume pode variar

- Se for **dissipada** (resistência / efeito de Joule)
- Se for **armazenada** no campo eléctrico (condensador) ou magnético (indutor)
- Se **entrar ou sair** através da superfície (vector de Poynting)

Energia transportada por ondas e.m.

Onda plana e.m.: o vector de Poynting $\vec{S}$ representa **a potência que atravessa uma área perpendicular à direcção de propagação**



$$S = \frac{1}{\mu_0}\left|\vec{E}\times\vec{B}\right| = \frac{EB}{\mu_0}$$

Usando $B = E/c$: $S = E^2/\mu_0 c = cB^2/\mu_0$ (taxa instantânea)

A taxa média durante um ciclo ($T = 2\pi/\omega$) é

$$\langle S\rangle = \frac{1}{\mu_0 c}\int_0^T E_{max}^2 \cos^2(kx-\omega t)\,dt = \boxed{\frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} = \frac{cB_{max}^2}{2\mu_0} \equiv I}$$

Intensidade da onda e.m. [W/m²]

No caso geral de uma superfície com orientação $\vec{n}$: $\boxed{I = \langle\vec{S}\cdot\vec{n}\rangle}$

Relação entre energia, intensidade e vector de Poynting

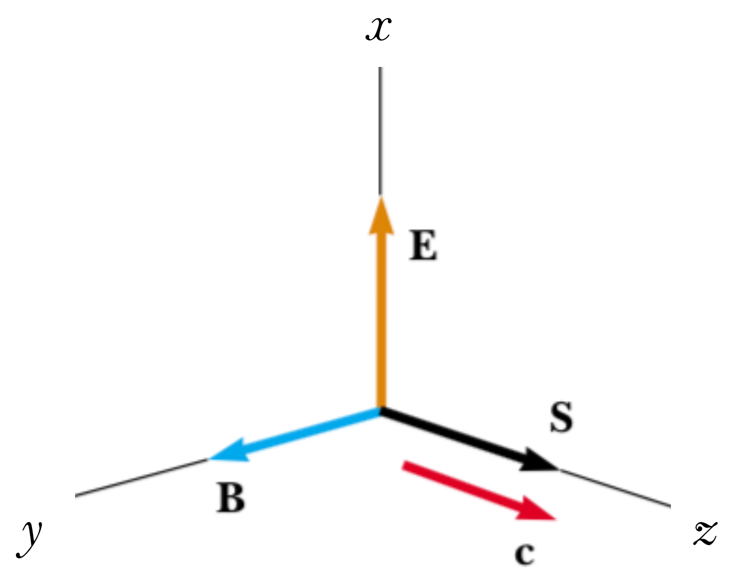
A densidade de energia associada aos campo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é

$$u_E = \epsilon_0 E^2/2 \qquad u_B = B^2/2\mu_0$$

Para uma onda e.m. temos $B = E/c$ e $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$:
As densidade de energia de E e B são iguais:

$$u_B = u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Densidade de energia total: $u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$

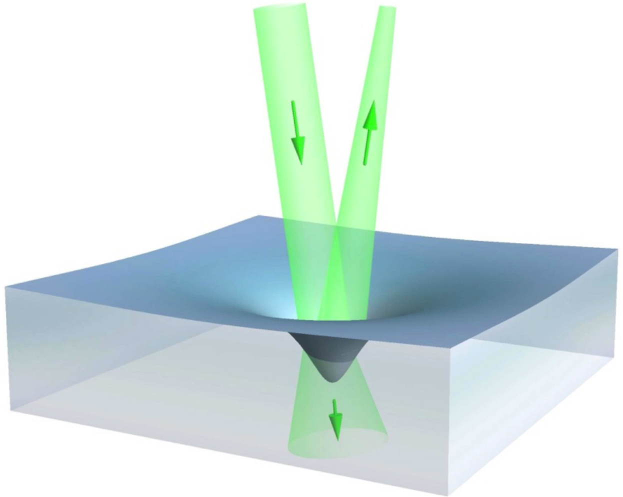


$$\boxed{I = S_{med} = c\, u_{med}}$$

$$u_{med} = \epsilon_0 \int_0^T E_{max}^2 \cos^2(kx - \omega t)\, dt = \boxed{\frac{1}{2}\epsilon_0 E_{max}^2 = \frac{B_{max}^2}{2\mu_0}}$$

Intensidade de uma onda e.m. = dens. média de energia × vel. luz

Momento linear e pressão da radiação



Além de energia, as ondas e.m. também transportam momento linear:

- Expressão relativista (Einstein): $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$
- Como os fotões não têm massa: $E = pc$

Para uma quantidade de energia U num tempo Δt: $p = U/c$

- Se a luz é **absorvida** numa superfície de área A, exerce uma **pressão**

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}\frac{(dU/dt)}{A} = \boxed{\frac{S}{c}}$$

Pressão de radiação para luz absorvida

- No caso de **reflexão** da luz, o momento linear transferido é o dobro:

$$\boxed{P = \frac{2S}{c}}$$

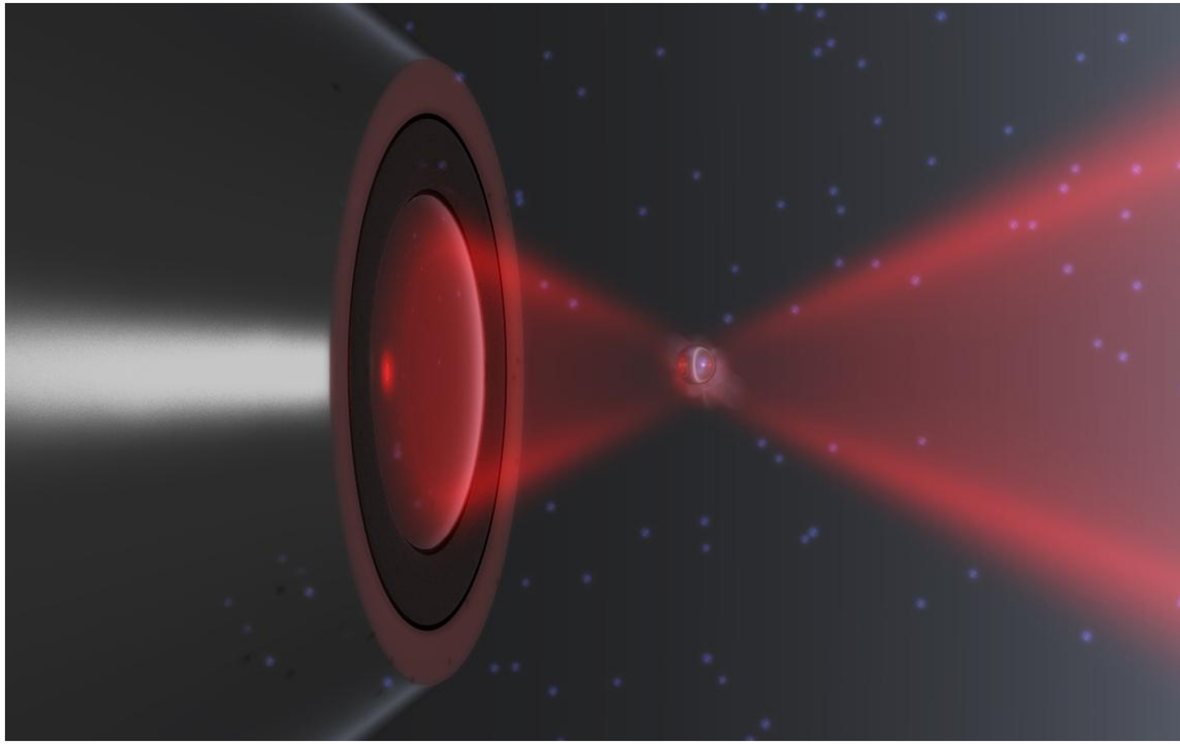
Pressão de radiação para luz reflectida

Pressão de radiação e pinças ópticas

Prémio Nobel da Física 2018

No foco de um laser a intensidade é muito elevada. Apesar de pequena, a pressão da radiação é suficiente para manter aprisionados objectos pequenos.

As pinças ópticas usam pequenas esferas dieléctricas para controlar o movimento à escala do micrómetro.



O espectro electromagnético