CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
1º TESTE (Versão A)

18 /Abril /2009 Duração: 1h30m

I

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x-1}{x} \geq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x+2|}{x^2-1} \leq 0 \right\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} : \log x = 1\}$$

1. Mostre que $A \cap B = \left]-1, 0\right[$.

Resolução:

$$\frac{x^2+x-1}{x} \geq 1 \iff \frac{x^2-1}{x} \geq 0$$

e

		-1		0		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	$//$	$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	$//$	$+$		$+$
$\frac{x^2-1}{x}$	$-$	0	$+$	$//$	$-$	0	$+$

donde se conclui que

$$A = \left[-1, 0\right[\cup \left[1, +\infty\right[.$$

Por outro lado,

		-2		-1		1	
$\|x+2\|$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-1	$+$		$+$	$//$	$-$	$//$	$+$
$\frac{\|x+2\|}{x^2-1}$	$+$	0	$+$	$//$	$-$	$//$	$+$

logo $B = \left]-1, 1\right[\cup \{-2\}$.
Então,

$$A \cap B = \left]-1, 0\right[.$$

2. Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\inf(A \cap B)$, $\sup A$, $\min B$, $\min((A \cap B) \cup C)$, $\max((A \cap B) \cup C)$ e $\sup(A \cap B \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Resolução:

$\inf(A\cap B)=-1$, não existe $\sup A$, $\min B=-2$.

Como $C=\{e\}$, não existe $\min((A\cap B)\cup C)$ e $\max((A\cap B)\cup C)=e$. Por fim, $\sup(A\cap B\cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})=0$.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{\sqrt{n}-n^3}{n+4n^3+2}, \qquad \lim\left(1-\frac{2}{n!}\right)^{n!}, \qquad \lim \frac{\pi+n\sin n}{n^2+1}, \qquad \lim \sqrt[n]{n+2^n}$$

Resolução:

$$\lim \frac{\sqrt{n}-n^3}{n+4n^3+2}=\lim\frac{\frac{1}{n^{3-\frac{1}{2}}}-1}{4+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=-\frac{1}{4} \qquad ; \qquad \lim\left(1-\frac{2}{n!}\right)^{n!}=\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}=e^{-2}$$

$$\lim\frac{\pi+n\sin n}{n^2+1}=\lim\frac{\frac{\pi}{n^2}+\frac{\sin n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0,$$

uma vez que $\lim\frac{\sin n}{n}=0$ (produto da sucessão limitada $\sin n$ pelo infinitésimo$1/n$).

Porque se tem

$$\lim\frac{(n+1)+2^{n+1}}{n+2^n}=\lim\frac{\frac{n+1}{2^n}+2}{\frac{n}{2^n}+1}=2,$$

sabemos que

$$\lim\sqrt[n]{n+2^n}=2.$$

2. Mostre por indução que se tem, para todo o $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} 9k4^{k-1}=1+4^n\,(3n-1)$$

Resolução:

(i) Com $n=1$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{1} 9k4^{k-1}=1+4^1\,(3.1-1)=9$$

(ii) Supondo o resultado válido para n, provemos para $n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 9k4^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} 9k4^{k-1}+9(n+1)4^n=1+4^n\,(3n-1)+9(n+1)4^n=\\ &= 1+4^n(3n-1+9n+9)=1+4^{n+1}(3n+2)=1+4^{n+1}(3(n+1)-1),\end{aligned}$$

o que termina a demonstração.

III

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+2}-1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ \frac{x-1}{1+e^{-x}} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estude o sinal de f e determine os seus zeros.

Resolução:

Dado que

$$e^{x+2} - 1 = 0 \iff x = -2,$$

vem

		-2		1	
$e^{x+2}-1$	$-$	0	$+$	//	//
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$1+e^{-x}$	//	//	//		$+$
f	$+$	0	$-$	0	$+$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \iff x = -2 \vee x = 1 \\ f(x) &> 0 \quad \text{se} \quad x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]1, +\infty\right[\\ f(x) &< 0 \quad \text{se} \quad x \in \left]-2, 1\right[. \end{aligned}$$

b) Justificando, diga se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 1.

Resolução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{1+e^{-x}} = 0 = f(1) \\ \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{e^{x+2}-1}{x-1} = -\infty \end{aligned}$$

logo f é contínua à direita e não é contínua à esquerda no ponto 1; portanto não é contínua em 1.

c) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x+2}-1}{x-1} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{1+e^{-x}} = +\infty. \end{aligned}$$

d) A função f é majorada? E minorada? Justifique a resposta.
Resolução:
Como, por exemplo,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

a função f não é majorada. Por b),

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -\infty,$$

o que mostra que a função f não é minorada.

IV

Seja φ uma função contínua no ponto 0. Se

$$g(x) = \varphi(1 - \sin x)$$

em que pontos pode garantir que a função g é contínua? Justifique.
Resolução:
Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = 1 - \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, $g = \varphi \circ f$

Da continuidade da função composta e dado que φ é contínua no ponto 0, g é necessariamente contínua em todo o ponto x tal que $1 - \sin x = 0$. Porque se tem

$$1 - \sin x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

concluímos que g é contínua em todos os pontos da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.