Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

4^a Ficha de exercícios para as aulas práticas: 16 - 20 Outubro de 2006

1. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} &= (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Verifique que se (u_n) é convergente então $\lim u_n = 0$.

2. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n + 3}{4} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Verifique que $u_n < \frac{3}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é monótona.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

(d) A sucessão (u_n) é contractiva? Justifique.

3. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{2}{3}\alpha u_n + 1 \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Seja $\alpha = 1$.

(a1) Verifique que $u_n < 3$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a2) Verifique que (u_n) é monótona.

(a3) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

(b) Para $\alpha = -1$, verifique que (u_n) é convergente. (Note que neste caso (u_n) não é monótona.)

4. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2 + 2}{3} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Verifique que $1 < u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é decrescente.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

5. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(1 - u_n^2\right) \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

(a) Verifique que $0 \leq u_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é contractiva.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule o seu limite.

6. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3 + 2u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

(a) A sucessão (u_n) é limitada? Justifique.

(b) Verifique se (u_n) é monótona.

(c) A sucessão (u_n) é contractiva? Justifique.

(d) A sucessão (u_n) é de Cauchy? Justifique. Determine se possível $\lim u_n$.

7. Considere as expressões:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

(a) Verifique que as expressões anteriores definem, por recorrência, uma sucessão de termos positivos.

(b) Verifique que $u_n \geq 2$, para todo o $n \geq 2$.

(c) Verifique que (u_n) é monótona, para todo o $n \geq 2$.

(d) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

8. Considere as expressões:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n}{1 + 2u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

(a) Verifique que as expressões anteriores definem, por recorrência, uma sucessão de termos positivos.

(b) Verifique que $u_n \geq \frac{1}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) Verifique que (u_n) é monótona.

(d) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

9. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = 1, \qquad\qquad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} - \frac{1}{4n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

(a) Verifique que $u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é crescente.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

10. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = 2, \qquad\qquad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

(a) Verifique que (u_n) é decrescente.

(b) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

11. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = \sqrt{5}, \qquad\qquad u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

(a) Verifique que $u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é contractiva.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

12. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3 - u_n} + \frac{1}{n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

(a) Verifique que $0 \leq u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é decrescente.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

13. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

(a) Verifique que (u_n) não é monótona.

(b) Verifique que

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_{n+1} - u_n| \,,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

14. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} & u_1 = u_2 = \frac{1}{2}, \\ & u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n = 0 \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).} \end{aligned}$$

(a) Verifique que $u_{n+1} > \frac{1}{2} u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é decrescente.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

15. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 3, \\ u_{n+1} &= \frac{3(1+u_n)}{3+u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).} \end{aligned}$$

Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

16. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = \sqrt{2}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{u_n}} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).}$$

Justifique que (u_n) é convergente.

17. **(a)** Seja $\alpha \in]0, 1[$. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1-\alpha}, \\ u_{n+1} &= \alpha u_n + 2^{-n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).} \end{aligned}$$

(a1) Verifique que $(1-\alpha)\, u_n \geq 2^{-n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a2) Verifique que (u_n) é decrescente.

(a3) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

(b) Considere a sucessão (x_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= x_n + 2^{-n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).} \end{aligned}$$

Justifique que (x_n) é convergente e calcule $\lim x_n$.

18. Seja $a > 0$. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = \sqrt{a}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{a + u_n} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).}$$

(a) Verifique que $u_n < 1 + \sqrt{a}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifique que (u_n) é crescente.

(c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule $\lim u_n$.

19. Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) cada uma das seguintes séries, determinando as somas das que forem convergentes.

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$ **(2)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n+2}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ **(4)** $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n-2)}$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)\,(2n+3)}$ **(6)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ **(7)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2n}$ **(8)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2}$ **(10)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$ **(11)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,(2n+1)}{n\,(n+1)}$ **(12)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ **(14)** $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-n+1}}{2^{-n+1}}$ **(15)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^{n-1}}{2^{2n}}$ **(16)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^{-n-1}}{5^{n-1}3^{-(2n+1)}}$

(17) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ **(18)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5+(-1)^n}{3^{n-1}}$ **(19)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$ **(20)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n-1}{n!}\right]$

(21) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{ne^{1/n}-n}-\frac{1}{(n+1)\,e^{1/(n+1)}-n-1}\right]$ **(22)** $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{2e\,(-\pi)^{-n+2}}{(-e)^{-n+1}}$

(23) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n+2}+(n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{n+3}\right)\right]$ **(24)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$

20. Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) cada uma das seguintes séries.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{3^n+1}$ **(2)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$ **(3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ **(4)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{n+1}}{1+2^n}$ **(5)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^3 2^n}$

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(n^2\pi\right)$ **(7)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(e^{-n})$ **(8)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^2+2^n}$ **(9)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos^2\frac{1}{n^n}$ **(10)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[5]{n}}{1+\log n}$ **(12)** $\sum_{n=1}^{+\infty}e^{1/n!}$ **(13)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!\,(-n)^{-n}}$ **(14)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+n!}{n!}$ **(15)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{e}$

(16) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]$ **(17)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{(-2)^n}{n!}\right)$ **(18)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2+\cos\left(n\pi\right)}$ **(19)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$

(20) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{n+2^n}$ **(21)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ **(22)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\log\left(1+1/n\right)}$ **(23)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+\log n}{2n+\log^2 n}$

(24) $\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-1/n}$ **(25)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+2}\frac{n^2}{n^2+2}$ **(26)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1+(-1)^n\right]^n$ **(27)** $\sum_{n=1}^{+\infty}n^n e^{-n}$

(28) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^n}{n^n}$ **(29)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{1+\operatorname{arctg} n}$ **(30)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arcsen}\left(1-\frac{1}{n!}\right)$ **(31)** $\sum_{n=1}^{+\infty}n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$

(32) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^{n+2}+2^n+n!}{\log n+(n^2+1)\,n^n}$