Primitivação. Def. $f: I \to \mathbb{R}$, I intervalo não degenerado (tem mais q 1 ponto)

f diz-se primitivável em I, se existir $F: I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

F designa-se por primitiva de f em I.

Exemplo: 1) $f(x) = x^2$, $I = \mathbb{R}$ f é primitivável pois existe $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, e $F'(x) = x^2$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = \mathbb{R}^+$, f é primitivável em $\mathbb{R}^+$ pois existe $F(x) = \ln(x)$.

Nota: A solução deste problema não é única, pois por exemplo, $G(x) = \ln x + 2$, $G'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$ ou seja na alínea anterior, tanto $F(x) = \ln x$ como $G(x) = \ln(x) + 2$ ser primitivas de f em $\mathbb{R}^+$.

Proposição: Sejam F, G primitivas de f em I então $F-G$ é uma função constante

dem: $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ em I, do teorema Lagrange vem que $F-G$ é uma constante.

Obs. Conhecendo uma primitiva, F, de f em I então o conjunto de todas as primitivas é:

$$\{F(x)+C \ , \ C\in\mathbb{R}\}$$

O conjunto de todas as primitivas, F, de $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$

$$\{\ln(x)+C \ , \ C\in\mathbb{R}\}$$

<u>Notação</u>: P designa a operação primitivação

$P(f(x))$ designa uma primitiva de f em I

• Podem usar igualmente o símbolo $\int f(x)dx$, para definir uma primitiva (neste caso, a primitiva onde $C=0$)

• Métodos de primitivação

• A primitivação imediata (resulta da inversão das expressões das derivadas das funções elementares

1) $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = x^p \Rightarrow P(x^p) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$, $p \neq -1$

2) $(\ln(-x))' = \frac{1}{x} \Rightarrow P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(-x)$, $x<0$

$x \neq 0$ $P\left(\frac{1}{x}\right) = \ln|x|$

3) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow P\frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$

composição de funções

$(f \circ u)' = (f(u))' = u' \cdot f'(u)$

1') $\left(\frac{u^{p+1}}{p+1}\right)' = u' \cdot u^p \Rightarrow P(u' u^p) = \frac{u^{p+1}}{p+1}$ $p \neq -1$

2') $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln|u|$

3') $P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arctg}(u)$

funções racionais : $R(x) = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$, grau P_1 < grau P_2 (*)

Caso não ocorra (*) teremos de simplificar R. (Euclides)

funções racionais simples (ficha nº 7)

$$P\, u' u^p = \frac{u^{p+1}}{p+1}, \quad P\,\frac{u'}{u} = \ln|u|, \quad P\,\frac{u'}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u$$

1. d) $P\,\dfrac{2}{1-2x} = -P\,\dfrac{-2}{1-2x} = -P\,\dfrac{(1-2x)'}{1-2x} = -\ln|1-2x|$

e) $P\,\dfrac{1}{4+x^2} = \dfrac{1}{4}P\,\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \dfrac{1}{2}P\,\dfrac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$

h) $P\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)^2 = P(2x-1)^{-2} = \dfrac{1}{2}P\,2\cdot(2x-1)^{-2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x-1)^{-1}}{-1}$

l) $P\,\dfrac{x+1}{x^2+1} = P\,\dfrac{x}{x^2+1} + P\,\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{\ln(x^2+1)}{2} + \operatorname{arctg} x$

Observações:

- $P(f+g) = P(f) + P(g)$
- $c \in \mathbb{R}$ $P(c \cdot f) = c \cdot P(f)$
- $P(f \cdot g) \neq P(f) \cdot P(g)$

1m) $P\frac{x^2}{x^2+2} = P\frac{x^2+2-2}{x^2+2} = P\frac{x^2+2}{x^2+2} - 2P\frac{1}{x^2+2} = \underbrace{P1}_{} - \frac{2}{2}P\frac{1}{\frac{x^2}{2}+1} =$

$$= x - P\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = x - \sqrt{2}\,P\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = x - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

TPC: 1o) q) s)

$$P\,u'u^p = \frac{u^{p+1}}{p+1}$$

- $P(\underset{u}{\mathrm{sen}\,x}\cdot\underset{u'}{\cos x}) = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2}$

$$\frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} - \left(-\frac{\cos^2 x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$-P(\underset{u'}{-\mathrm{sen}\,x}\;\underset{u}{\cos x}) = -\frac{\cos^2 x}{2}$

eq. fundamental da trigonometria

1f) $P\cos^3 x\,\text{sen}^2 x = P(\cos^2 x \cdot \underbrace{\cos x \cdot \text{sen}^2 x}) = P((1-\text{sen}^2 x)\cos x\,\text{sen}^2 x) =$

$= P\cos x\,\text{sen}^2 x - P\underbrace{\cos x}_{u'}\,\underbrace{\text{sen}^4 x}_{u^4} = \frac{\text{sen}^3 x}{3} - \frac{\text{sen}^5 x}{5}$

1g) $P\frac{1}{\text{sen}^2 2x} = \frac{1}{-2}\text{cotg}\,2x$;

$P\frac{-u'}{\text{sen}^2 u} = \text{cotg}\,u$

1i) $P\,\text{cotg}\,x = P\underbrace{\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}}_{\frac{u'}{u}} = \ln|\text{sen}\,x|$

$P -u'\text{sen}\,u = \cos u$

$P\,u'\cos u = \text{sen}\,u$

$P\frac{u'}{\cos^2 u} = \text{tg}\,u$

TPC 1j) l) x)

$$\boxed{\left(\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right)' = \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}}$$

$$P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen}(u)$$

1c) $P\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = P\frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$ TPC 2)

1u) $P\, x\sqrt{1+x^2} = P\, x(1+x^2)^{1/2} = \frac{1}{2} P \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{(1+x^2)^{1/2}}_{u^{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2}$

TPC: 1a) b)

$$P\, u' e^u = e^u$$

1r) $P\frac{e^{1/x}}{x^2} = -e^{1/x}$;

$P\, 2e^{2x} = e^{2x}$

$P\, xe^{2x}$ ñ é imediatamente primitivável

$P\, xe^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2}$

• Primitivação por partes: $\Downarrow$ $(fg)' = f'g + fg'$

$$P(fg)' = Pf'g + Pfg'$$

$$fg = Pf'g + Pfg'$$

$$\boxed{Pf'g = f \cdot g - Pfg'}$$

$$f = Pf', \quad \underset{f'\ g}{P x e^{2x}} = \underset{f\ \cdot\ g}{\frac{x^2}{2} \cdot e^{2x}} - \underset{f\ g'}{P \frac{x^2}{2} \cdot 2e^{2x}} \quad ! \text{ STOP}$$

$$f = Px = \frac{x^2}{2}$$

$$f = Pe^{2x} = \frac{e^{2x}}{2} \qquad P x e^{2x} = \underset{f'\ g}{P e^{2x} \cdot x} = \underset{f\ g}{\frac{e^{2x}}{2} \cdot x} - \underset{f\ g'}{P \frac{e^{2x}}{2} \cdot 1} = \frac{e^{2x}}{2} \cdot x - \frac{e^{2x}}{4}$$

Como exceção: uma primitiva imediata resolvida por partes!

$$P \frac{\ln x}{x} \overset{P.P.}{=} \underset{f}{\ln x} \cdot \underset{g}{\ln x} - P \underset{f}{\ln x} \cdot \underset{g'}{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2P \frac{\ln x}{x} = \ln^2 x \quad \text{ou seja} \quad P \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln^2 x}{2}$$

$$P \underset{u'}{\frac{1}{x}} \cdot \underset{u}{\ln x} = \frac{\ln^2 x}{2}$$