Exercício 1.— Calcule (se existirem) os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x}}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} (\sin x)(\ln x)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2[\cos(1/x) - 1] \qquad \lim_{x\to +\infty} (\sin(1/x))^{1/(\ln x)} \qquad \lim_{x\to 0^-} (1-2^x)^{(\sin x)}$$

Exercício 2.— Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada crescente e tal que $f(0) = 0$. Mostre que a função definida por $g(x) = f(x)/x$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

Exercício 3.— Supondo que f é uma função de classe $C^1([a,b])$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$ para quaisquer $x, y \in [a,b]$.

Exercício 4.— Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de ordem 5 em $a = 0$ dado por:

$$(1)\ P_{5,0}(x) = 1 + x^4; \qquad P_{5,0}(x) = x^3 - x^5$$

Calcule $f^{(k)}(0)$, para $k = 0, 1, \ldots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto zero.

Exercício 5.— Prove usando o teorema de Taylor que, para todo o $x \in [0,1]$ se tem,

$$(1)\ \left|e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| < \frac{1}{6}; \qquad (2)\ \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| < \frac{1}{100}.$$

Exercício 6.— Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2} \quad (x \neq -2)$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.