ficha nº 10

1. Determine $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{\int_0^{x^2} sh(t)\,dt} = \dfrac{0}{\int_0^0 sh t\,dt} = \dfrac{0}{0}$ ind.

$sh\,x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$

$ch\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$ch(0) = 1$

$(sh\,x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' =$

$= ch\,x$

Para utilizarmos a regra de Cauchy, falta clarificar o que é $\left(\int_0^{x^2} sh(t)\,dt\right)'$.

$\int_0^{x^2} sh(t)\,dt = F(x^2)$, onde $F(x) = \int_0^x sh\,t\,dt$ integral indefinido

uma vez q $sh\,x$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ do TFC

F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = sh(x), x \in \mathbb{R}$

$\left(\int_0^{x^2} sh(t)\,dt\right)' = \left(F(x^2)\right)' = (x^2)' \cdot F'(x^2) = 2x\,sh\,x^2$

$x \in \mathbb{R}$.

Assim $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x^4)'}{\left(\int_0^{x^2} sh(t)\,dt\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x\cdot sh(x^2)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{sh(x^2)} = \frac{0}{0}$

para aplicarmos a regra de Cauchy, necessitamos de determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(sh(x^2))'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x\, ch x^2} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{1}{ch(x^2)} = \frac{1}{\frac{e^0+e^0}{2}} = 1$ então conclui-se

da regra de Cauchy que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\int_0^{x^2} sh(t)\,dt} = 2$

2. Mostre q : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $x>0$

Integrar por substituição:

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_1^{1/x}\frac{du}{u^2+1}$$

$t=\frac{1}{u}=\varphi(u)$, $\varphi'(u)=-\frac{1}{u^2}$

$\varphi(1)=1$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=x$ $x\neq 0$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\int_1^{1/x}\frac{1}{1+u^2}\,du \underset{u=t}{=} \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

4. $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt$, $x\in\mathbb{R}$, mostre q F é ímpar ($\Leftrightarrow F(-x)=-F(x)$)

$$F(-x)=\int_0^{-x^3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt \underset{t=-u=\varphi(u)}{=} -\int_0^{x^3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)du = -F(x).$$

Séries numéricas: CNC $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ série convergente $\Rightarrow a_n \to 0$

Aplicar $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ série divergente

- Critérios para séries de termos não negativos.

1- Critérios de comparação: a) Geral b) sob a forma de limite.

a) $a_n, b_n \geq 0$, $a_n \leq b_n$ i) $\sum b_n$ série convergente $\Rightarrow \sum a_n$ série convergente

ii) $\sum a_n$ série divergente $\Rightarrow \sum b_n$ série divergente

b) $a_n \geq 0, b_n > 0$ $\lim \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}^+$ então as séries $\sum a_n, \sum b_n$ são ambas da mesma natureza

ficha 11 1. Analise a natureza das séries: a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+\cos(n\pi)}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$

De facto, a série em b) é divergente pois $\frac{1}{2+\cos(n\pi)} \not\to 0$ (conj. sublimites é $\{\frac{1}{3}, 1\}$)

Aqui não é satisfeita a condição necessária para a convergência de séries

As séries em a) e c) satisfazem a CNC ($a_n \to 0 \Rightarrow$ nada se conclui quanto à natureza de $\sum a_n$)

Vamos aplicar um dos critérios para estudar a natureza de cada uma das séries.

Séries Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}; \quad \alpha>1 \text{ séries converg.} \quad \alpha\leq 1 \text{ séries div.}$$

a) $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2+\underbrace{3n+2}_{>0}} < \frac{1}{n^2} \quad (a_n < b_n)$

$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $b_n = 1/n^2$, $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ série de Dirichlet convergente $\alpha=2>1$

do critério geral de comparação a série $\sum a_n$ é convergente

c) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$, pretendemos estudar a natureza da série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

$$a_n = \sqrt{\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{=b_n} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}}$$

; $\sum b_n$ é uma série de Dirichlet divergente.

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}} = 1 \in \mathbb{R}^+$ satisfeita a condição

do critério comparação (limite) as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries divergentes.

2. Estude a natureza das séries e determine o valor da $\underbrace{\text{soma}}_{\in \mathbb{R}}$ de uma delas (séries convergentes)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-e}{e^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{3^n\, n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-e}{e^n} = (1-e)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n}$, $\displaystyle a_n = \frac{1}{e^n}$, $\displaystyle \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{e^{n+1}}}{\frac{1}{e^n}} = \frac{1}{e} = r < 1$

do critério da razão, $\sum a_n$ é uma série convergente

Também podemos neste caso, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$, ter justificado que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ é uma série geométrica convergente pois a razão é $\displaystyle\frac{1}{e} < 1$

$$s = \frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}$$

Concluímos que a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-e}{e^n} = \frac{1-e}{e-1} = -1$

b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $a_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$, par usarmos o critério D'Alembert

vamos calcular $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n \cdot n!}} = \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}}{n^n \cdot 3 \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{(n+1)} \cancel{n!}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{e}{3} = l \text{ , como } l<1$$

a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é convergente.

c) $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\operatorname{arctg}(0) = 0$

$\Rightarrow a_n \to 0$ nada se conclui qt. à natureza da série

em $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{R. Cauchy}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \overset{x_n \to 0}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$$

em particular $\lim \frac{\operatorname{arctg}(x_n)}{x_n} = 1$, satisfeita a condição

$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0$

do critério de comparação (limite)

as séries $\sum \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ são série ambas

convergentes, pois $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente.

4. $a_n > 0$, $a_n \to +\infty$

a) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ é uma série divergente pois

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_n}+1} \longrightarrow \frac{1}{0+1} = 1 \neq 0$$

b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^n + a_n}$, $\frac{1}{3^n + \underset{>0}{a_n}} < \frac{1}{3^n}$ e

$\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ série geométrica convergente pois a razão é $\frac{1}{3} < 1$

do critério geral de comparação $\sum \frac{1}{3^n + a_n}$ é uma série convergente.