Ficha 7
Resolução dos exercícios de auto-avaliação

III.1 Verifique se os seguintes integrais são ou não convergentes.

No caso afirmativo, indique o seu valor.

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ é contínua em $]0,+\infty[$, logo, em particular, é contínua em $[2,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty\sqrt{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\,x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+1}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_2^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_2^b$$

$$= -2\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right]_2^b = -2\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_2^b = -2\left(\frac{1}{\sqrt{+\infty}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\left(\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Logo, o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ é convergente e $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+x^2}\,dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\dfrac{1}{x+x^2}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, logo, em particular, é contínua em $]0,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{+\infty+(+\infty)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{0^+ + (0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo inferior, então podemos concluir que este integral trata-se de um integral impróprio misto.

Assim, o integral será:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+x^2}dx = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{1}{x+x^2}dx \underset{(*)}{=} \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_a^b = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to+\infty}} \left(\ln\left|\frac{b}{b+1}\right| - \ln\left|\frac{a}{a+1}\right|\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{b}{b+1} - \lim_{a\to 0^+} \frac{a}{a+1} = \ln \lim_{b\to+\infty}\frac{b}{b+1} - \ln\frac{0^+}{0^+ +1} \underset{\substack{\text{Regra}\\ \text{Cauchy}}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \ln \lim_{b\to+\infty}\frac{(b)'}{(b+1)'} - \ln 0^+$$

$$\underset{(**)}{=} \ln \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1} - (-\infty) = \ln 1 - (-\infty) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Logo, o integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+x^2}dx$ é divergente.

Cálculos auxiliares: $(*)$

Calculemos a $P\frac{1}{x+x^2}$. Trata-se da primitiva de uma função racional.

Primitivação da função racional:

$$P\frac{1}{x+x^2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pelo}\\ 5^\text{o}\text{passo}}}{=} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(1) = 0 < 2 = \text{grau}(x+x^2)$ então a função $\frac{1}{x+x^2}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x + x^2 = x(1+x) = x(x+1)$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 1 = A(x+1) + Bx$$

• Para $x = 0$ vem $\quad 1 = A(0+1) + B0 \Leftrightarrow 1 = A \Leftrightarrow A = 1$

• Para $x = -1$ vem $\quad 1 = A(-1+1) + B(-1) \Leftrightarrow 1 = A0 - B \Leftrightarrow B = -1$

Assim,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{1}{x(x+1)} = P\left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) = P\frac{1}{x} + P\frac{-1}{x+1} = \ln|x| - P\frac{1}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

Observação (**) *:*

Sabemos que a base do logaritmo $(\ln(x))$ é a=e*, então observando o gráfico, para o caso em que* a> 1 *(folhas de apoio de Matemática I - página 20), podemos concluir que quando* $x \to 0^+$ *tem-se que* $y \to -\infty$*, sendo* $y = \ln(x)$ *, isto é,* $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \ln(0^+) = -\infty$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\right)$ é contínua em $]0,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{+\infty}(1+(+\infty))} = \frac{1}{+\infty} = 0$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{\sqrt{0^+}(1+0^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo inferior, então podemos concluir que este integral é impróprio misto.

Assim, o integral será:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \lim_{\substack{a\to 0^+ \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx \underset{(*)}{=} \lim_{\substack{a\to 0^+ \\ b\to+\infty}} \left[2\arctan\sqrt{x}\right]_a^b = \lim_{\substack{a\to 0^+ \\ b\to+\infty}} \left(2\arctan\sqrt{b} - 2\arctan\sqrt{a}\right)$$

$$= 2\arctan\sqrt{+\infty} - 2\arctan\sqrt{0} \underset{(**)}{=} 2\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0 = \pi.$$

Logo, o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ é convergente e $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \pi$.

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

***Cálculos auxiliares**:* $(*)$

Calculemos a $P\left(\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right)$. Para calcular esta primitiva iremos utilizar o método de substituição.

Seja $\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1+x)}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}+1}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}$.

Fazendo a substituição: $x=t^2 \Leftrightarrow x=\underbrace{t^2}_{g(t)}$

Tem-se

- $g'(t)=2t$
- $x=t^2 \Rightarrow t=\underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$

Logo,

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usando o método de primitivação}\\ \text{por substituição:} Pf(x)=P\left[f(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=}\left[P\left(\frac{1}{t\left(1+t^2\right)}2t\right)\right]_{t=\sqrt{x}}=\left[P\frac{2}{1+t^2}\right]_{t=\sqrt{x}}=\left[2P\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=\sqrt{x}}=\left[2\arctan t+C\right]_{t=\sqrt{x}}=2\arctan\sqrt{x}+C.$$

***Observação** $(**)$:*

Observando o gráfico nas folhas de apoio de Matemática I (página 15), podemos concluir que quando $x\to 0^+$ *tem-se que* $y\to 0$, *sendo* $y=\arctan x$, *isto é,* $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan x=0$ *e quando* $x\to+\infty$ *tem-se que* $y\to\frac{\pi}{2}$, *isto é,* $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$

d) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{1}{x^3}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, logo, em particular, é contínua em $[1,+\infty[$. Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{(+\infty)^3}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{1}=1$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-3}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b=-\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2x^2}\right]_1^b=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2\cdot 1}\right)=-\left(\frac{1}{2(+\infty)}-\frac{1}{2}\right)=-\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Logo, o integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ é convergente e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\frac{1}{2}$.

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

e) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$

Resolução:

A função integranda $\left(\dfrac{1}{x \cdot \ln(x)}\right)$ é contínua em $]1,+\infty[$, logo, em particular, é contínua em $[2,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \frac{1}{+\infty \cdot \ln(+\infty)} = \frac{1}{+\infty \cdot (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \frac{1}{2 \cdot \ln(2)}$

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln\left|\ln(x)\right|\Big]_{2}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \Big(\ln\left|\ln(b)\right| - \ln\left|\ln(2)\right|\Big)$$
$$= \ln\left|\ln(+\infty)\right| - \ln\left|\ln(2)\right| = \ln(+\infty) - \ln\left|\ln(2)\right| = +\infty - \ln\left|\ln(2)\right| = +\infty$$

Logo, o integral $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$ é divergente.

f) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^3(x)} dx$

Resolução:

A função integranda $\left(\dfrac{1}{x \cdot \ln^3(x)}\right)$ é contínua em $]1,+\infty[$, logo, em particular, é contínua em $[2,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^3(x)} = \frac{1}{+\infty \cdot \ln^3(+\infty)} = \frac{1}{+\infty \cdot (+\infty)^3} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x \cdot \ln^3(x)} = \frac{1}{2 \cdot \ln^3(2)}$

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^3(x)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x\cdot\ln^3(x)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x}\frac{1}{\ln^3(x)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x}\ln^{-3}(x)dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{\ln^{-2}(x)}{-2}\right]_2^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln^2(x)}\right]_2^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2(b)}-\frac{1}{\ln^2(2)}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2(+\infty)}-\frac{1}{\ln^2(2)}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{\ln^2(2)}\right)=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{\ln^2(2)}\right)=\frac{1}{2\ln^2(2)}$$

Logo, o integral $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^3(x)}dx$ é convergente e $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^3(x)}dx=\frac{1}{2\ln^2(2)}$.

g) $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}\right)$ é contínua em $\left]-\infty,0\right[$.

Como o extremo inferior do intervalo de integração é infinito $(-\infty)$ e atendendo a que

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}=\frac{e^{-\infty}}{\sqrt{1-\left(e^{-\infty}\right)^2}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$
- $\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo inferior, então podemos concluir que se trata de um integral impróprio misto.

Assim, o integral será:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to0^-}}\int_{a}^{b}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to0^-}}\left[\operatorname{arcsen}\left(e^x\right)\right]_a^b=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to0^-}}\left(\operatorname{arcsen}\left(e^b\right)-\operatorname{arcsen}\left(e^a\right)\right)$$

$$=\operatorname{arcsen}\left(e^0\right)-\operatorname{arcsen}\left(e^{-\infty}\right)=\operatorname{arcsen}(1)-\operatorname{arcsen}(0)\underset{(*)}{=}\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

Logo, o integral $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx$ é convergente e $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx=\frac{\pi}{2}$.

Observação $(*)$ **:**

Para se poder definir a função inversa da função seno, isto é, a função arco seno, consideremos a restrição principal da função tangente $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\operatorname{arcsen}1=a\Leftrightarrow 1=\operatorname{sen}a\Leftrightarrow \operatorname{sen}a=1\underset{a\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow}a=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsen}0=a\Leftrightarrow 0=\operatorname{sen}a\Leftrightarrow \operatorname{sen}a=0\underset{a\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow}a=0$$