AULA 13

Séries numéricas

13.1 Séries numéricas

Em certas circunstâncias, uma «soma infinita» parece ser a melhor forma de descrever uma dado objecto matemático. Uma função que possua certas «boas propriedades» pode ser aproximada por um polinómio este é precisamente o conteúdo do Teorema de Taylor. Mais que isso, existe um processo uniforme que permite obter esse polinómio com um grau tão elevado quanto se queira, de modo que a diferença $f(x) - p(x)$ tende para zero, à medida em que o grau do polinómio $p(x)$ aumenta. Assim, no limite, $f(x)$ é um polinómio de «grau infinito», i.e.,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

Factos como este sugerem que estas «somas infinitas» devem ser consideradas como objectos matemáticos dignos de estudo.

Não podemos esperar, no entanto, que a consideração de somas infinitas constitua uma simples extensão das somas finitas. Por exemplo, se considerarmos a soma $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, podemos ser tentados a, tal como no caso finito a usar a propriedade associativa e, tal como o fez Leibniz, considerar que o valor de S é 0 pois,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Mas esta propriedade não pode ser generalizada a estas «somas», pois uma associação diferente das parcelas, por exemplo,

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Ou usando desta vez um argumento diferente,

$$S = 1-1+1-1+1-1+1+\cdots = 1+[-1+1-1+1-1+\cdots] = 1-[1-1+1-1+\cdots] = 1-S,$$

donde resulta que $S = 1/2$.

Estes exemplos mostram que uma teoria geral das somas infinitas, ou *séries numéricas*, como as passaremos a designar, não pode ser conduzida numa simples base intuitiva, orientada pelo caso finito. No fundo, o que é necessário e o que faremos é fundar esta teoria em termos rigorosos.

13.1.1 Séries de termos arbitrários

Do mesmo modo que as parcelas de uma soma finita constituem uma sequência de números reais, as parcelas de uma série numérica são os termos de uma sucessão (a_n). Uma série determinada pela sucessão (a_n), ou como também se diz, uma série de termo geral a_n é um *objecto simbólico* da forma $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$. Enfatizamos a terminologia «objecto simbólico» pois muito embora exista uma semelhança com idêntica simbologia no caso finito, neste caso, como veremos, nem sempre existe um número real que se possa naturalmente associar a

$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots$. Ou seja, a expressão anterior representa uma soma formal, que só corresponderá em certos casos a um número real — a sua *soma*. O estudo das séries reside essencialmente na caracterização das séries às quais uma soma pode ser associada.

Definição 13.1 (sucessão das somas parciais). — *Consideremos uma série de termos geral a_n, digamos $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$. A respectiva* sucessão das somas parciais *é a sucessão (S_n) em que $S_0 = a_p$, $S_1 = a_p + a_{p+1}$, $S_2 = a_p + a_{p+1} + a_{p+2}$, etc.*

Observe-se que a sucessão das somas parciais, a sucessão (S_n) descrita na definição anterior, pode ser definida por recursão de acordo com:

$$S_0 = a_p; \quad S_{n+1} = S_n + a_{p+(n+1)}.$$

Não é difícil verificar que $S_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{p+n}$.

Definição 13.2. — *Sejam $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ uma série e (S_n) a correspondente sucessão das somas parciais. A série $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ diz-se* convergente *se (S_n) converge e dizemos que a sua soma é o* $\lim S_n$. *Se a sucessão das somas parciais não converge, então dizemos que a série $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ é* divergente.

A natureza *de uma série é simplesmente a sua característica de ser convergente ou divergente.*

Vamos começar por ver que a natureza de uma série não depende do termo no qual se inicia a soma.

Lema 13.1. — *Suponhamos que $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ são duas séries com o mesmo termo geral. Nestas condições, as séries têm a mesma natureza.*

Dem. — Suponhamos, sem preda de generalidade, que $q > p$ e denotemos por (S_n) e (S_n^*) as sucessões das somas parciais da primeira e da segunda séries, respectivamente. Tem-se, para n suficientemente grande que

$$S_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{q-1} + a_q + a_{q+1} + \cdots + a_{p+n}.$$

A igualdade acima é claramente equivalente a $S_n = \alpha + S_n^*$ onde

$$\alpha = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{q-1}.$$

Como os termos das duas sucessões diferem de uma mesma constante, uma é conversente sse a outra o for. ■

Em face do resultado anterior, a natureza de uma série depende apenas do seu termo geral e, por essa razão, quando está em causa apenas o estudo da convergência, escreve-se muitas vezes a série omitindo os índices do somatório, i.e., escrevendo simplesmente $\sum a_n$.

Observe-se que se a série $\sum a_n$ converge então a respectiva sucessão das somas parciais também converge e, consequentemente, é uma sucessão de Cauchy. Isto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < n < m$ implica que $|S_n - S_m| < \varepsilon$. Calculando explicitamente $S_n - S_m$, obtemos

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Daqui resulta imediatamente que $(a_n) \to 0$. Obtém-se assim um primeiro critério de convergência.

Lema 13.2. — *Se a séria $\sum a_n$ converge então o seu termo geral é um infinitésimo.*

Em todo o caso as considerações anteriores permitem-nos tirar uma conclusão mais forte. Dada uma série $\sum a_n$ designamos de *segmento* da série $\sum a_n$ qualquer soma finita do tipo

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+\lambda}.$$

Dada uma série $\sum a_n$, uma sucessão (T_n) em que $T_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+\lambda_n}$ é uma sucessão de segmentos de $\sum a_n$. Do facto de $\sum a_n$ ser convergente sse a respectiva sucessão das somas parciais ser de Cauchy resulta imediatamente o resultado seguinte.

Lema 13.3.— *Uma série $\sum a_n$ converge sse qualquer sucessão de segmentos de $\sum a_n$ é um infinitésimo.*

Definição 13.3.— *Uma série $\sum a_n$ diz-se* alternada *se os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja, se $a_n a_{n+1} < 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 13.4 (critério de Leibniz).— *Se $\sum a_n$ uma série alternada onde $(|a_n|) \to 0$ e é decrescente. Nestas condições $\sum a_n$ é convergente.*

Dem.— Seja (S_n) a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Tem-se para $n = m + k > m$:

$$|S_n - S_m| = |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+k}|.$$

Como a série é alternada tem-se, considerando $\alpha_n = |a_n|$ que,

$$|S_n - S_m| = | \pm (\alpha_m - \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} - \cdots + (-1)^k \alpha_{m+k})|.$$

Como a sucessaõ dos α_n é decrescente é fácil concluir que $\alpha_m - \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} - \cdots + (-1)^k \alpha_{m+k}$ é menor que α_m. Tem-se assim que $|S_m - S_n| \leq |\alpha_m| \to 0$. Daqui resulta imediatamente que a sucessão (S_n) é de Cauchy e, consequentemente, converge. ■

13.1.2 Álgebra das séries convergentes

Já vimos na parte introdutória que não é legítimo extrapolar para as somas infinitas as propriedades das somas finitas. Isso é em particular falso no caso da associatividade. Apesar deste resultado negativo, certas operações permanecem válidas no caso infinito e, outras permanecem válidas sob certas hipóteses.

Lema 13.5.— *A propriedade associativa permance válida para as séries convergentes, no seguinte sentido: se*

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots = S$$

e se A_n é tal que $A_0 = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{p+\lambda_0}$, $A_1 = a_{p+k_0+1} + a_{p+k_0+2} + \cdots a_{p+k_2}$, etc. então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n = (a_p + \cdots + a_{p+k_0}) + (a_{p+k_0+1} + \cdots + a_{p+k_1}) + \cdots = S.$$

Dem.— ■

13.1.3 Séries de termos não-negativos

Lema 13.6.— *Seja $\sum a_n$ uma série de termos não negativos. Se $\sum a_n$ converge então, $\langle a_n \rangle \to 0$.*

Dem.— ∎

Lema 13.7.— *Suponhamos que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de termos não negativos. Se a partir de certa ordem se tem que $a_n \leq b_n$ então,*

1. *se $\sum a_n$ diverge então, $\sum b_n$ diverge;*
2. *se $\sum b_n$ converge então, $\sum a_n$ converge.*

Dem.— ∎

Lema 13.8.— *Suponhamos que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries de termos não negativos. Suponhamos ainda que $\lim a_n/b_n = \alpha$ (necessariamente $\alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$). Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$ então as séries têm a mesma natureza. Se $\alpha = +\infty$ e se $\sum b_n$ converge então, $\sum a_n$ converge. Se $\alpha = 0$ e se $\sum b_n$ converge então, □a_n converge.*

Dem.— ∎

Lema 13.9 (critério do quociente).— *Suponhamos que $\sum a_n$ é uma série de termos* positivos. *Suponhamos que $\alpha = \lim a_{n+1}/a_n$ (uma vez mais $\alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$). Nestas condições, se $\alpha < 1$ então $\sum a_n$ converge. Se $\alpha > 1$ então, $\sum a_n$ diverge. Se $\alpha = 1$ não se pode tirar nenhuma conclusão acerca da convergência ou divergência da série.*

Dem.— ∎

Lema 13.10 (critério da raíz).— *Suponhamos que $\sum a_n$ é uma série de termos não negativos. Suponhamos que $\alpha = \lim \sqrt[n]{a_n}$ (com $\alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$). Nestas condições, se $\alpha < 1$ então $\sum a_n$ converge. Se $\alpha > 1$ então, $\sum a_n$ diverge. Se $\alpha = 1$ não se pode tirar nenhuma conclusão acerca da convergência ou divergência da série.*

Dem.— ∎

Lema 13.11.— *Suponhamos que $\langle a_n \rangle$ é decrescente e os a_n são não negativos. Nestas condições, as séries $\sum 2^k a_{2^k}$ e $\sum a_n$ têm a mesma natureza.*

Dem.— ∎

Lema 13.12.— *Suponhamos que $\sum a_n$ é uma série de termos não negativos. Se $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ é uma função crescente que verifica $g(n+1) - g(n) < M(g(n) - g(n-1))$ então, as séries $\sum a_n$ e $\sum [g(n+1) - g(n)] a_{g(n)}$ têm a mesma natureza.*

Lema 13.13.— *Se $\langle a_n \rangle$ é decrescente e $\sum a_n$ converge então $\langle n a_n \rangle \to 0$.*

13.1.4 Convergência absoluta

Lema 13.14.— *Se $\sum |a_n|$ converge, o mesmo sucede com $\sum a_n$.*

Dem.— ■

Definição 13.4.— *Se $\sum |a_n|$ converge dizemos que $\sum a_n$ é* absolutamente convergente. *Se $\sum a_n$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge, dizemos que $\sum a_n$ é* simplesmente convergente.

Lema 13.15.— *Se $\sum a_n$ é uma série absolutamente convergente e se (α_n) é limitada então $\sum \alpha_n a_n$ é absolutamente convergente.*

Dem.— ■

Já vimos, na parte introdutória, que certas leis válidas para as somas finitas, não admitem generalizações para o caso infinito, ou seja, para o caso em que consideramos séries. Também já tivemos a oportunidade de constatar que uma certa versão da propriedade associativa vale entre as séries convergentes. No caso da propriedade comutativa, porém, ela falha mesmo entre as séries convergentes. Antes de analisarmos a questão com maior detalhe importa começar por esclarecer como se deve interpretar a propriedade comutativa no caso infinito.

Começamos por denotar por $S(\mathbb{N})$ o conjunto de todas as bijecções $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Definição 13.5.— *Consideremos uma sucessão $\langle a_n \rangle$. Um* rearranjo *de $\langle a_n \rangle$ é uma sucessão do tipo $\langle a_{\sigma(n)} \rangle$ para algum $\sigma \in S(\mathbb{N})$. Do mesmo modo, um rearranjo da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é uma série do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, para algum $\sigma \in S(\mathbb{N})$.*

A propriedade comutativa das séries convergentes pode então ser expressa do seguinte modo: para qualquer $\sigma \in S(\mathbb{N})$ tem-se que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum a_{\sigma(n)}$, se $\sum a_n$ é convergente.

Veremos agora que a propriedade comutativa, tal como foi expressa acima, não é válida em geral para as séries convergentes, mas é verdadeira para as séries absolutamente convergentes.

Teorema 13.1 (Lejeune-Dirichlet (1837)).— *Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ para qualquer $\sigma \in S(\mathbb{N})$.*

Dem.— ■

A propriedade comutativa falha para as séries simplesmente convergentes.

Teorema 13.2.— *Se $\sum a_n$ converge simplesmente e se $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ então, existe $\sigma \in S(\mathbb{N})$ tal que, sendo $\langle S_n^{\sigma} \rangle$ a sucessão das soma parciais sa série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ se tem que,*

$$\liminf S_n^{\sigma} = \alpha \quad e \quad \limsup S_n^{\sigma} = \beta.$$

Dem.— ■

Teorema 13.3.— *Suponhamos que são dadas séries absolutamente convergentes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} = Z_k$ (com $k \in \mathbb{N}$). Suponhamos ainda que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(k)}| = W_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e que $\sum_{k=0}^{\infty} W_k =$*

A. Nestas condições, as séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_n^{(k)}$ *são absolutamente convergentes e, denotando por* S_n *as respectivas somas tem-se que* $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ *é absolutamente convergente e, além disso,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} W_k,$$

i.e., as soma por linhas e colunas coincidem e são ambas absolutamente convergentes.

Dem.— ■

13.1.5 Séries de potências

Uma série de potências é uma série do tipo $\sum a_n(x-x_0)^n$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ e (a_n) é uma sucessão. O estudo de uma série de potências consiste em determinar para que valores de x a série converge (absolutamente ou simplesmente) e para que valores de x diverge.

Este estudo passa pela determinação do denominado *raio de convergência da série*, que denotamos por R e podeser calculado de uma das duas maneiras seguintes:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ou} \quad R = \lim \frac{1}{\sqrt{|a_n|}}$$

Calculado este limite que pode ser um número real ≥ 0 ou $+\infty$ (se existir), ficamos a saber que, no caso $R = 0$ a série converge absolutamente para $x = x_0$ e diverge em todos os outros pontos. Que converge absolutamente em $\mathbb{R}$ se $R = +\infty$ e que, no caso de R ser um número real diferente de 0 e diferente de $+\infty$ se tem que a série converge absolutamente no intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$ e diverge no conjunto $]-\infty, x_0 - R[\cup]x_0 + R, +\infty[$. Os casos $x = x_0 \pm R$ têm que ser estudados de forma independente em cada caso. (Observe-se que estes valores de x conduzem às séries numéricas $\sum a_n R^n$ e $\sum a_n(-R)^n = \sum (-1)^n a_n R^n$.