CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$2^{\underline{0}}$ TESTE (Versão A)

14 /Janeiro /2012 — Duração: 1h30m

1. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\log(1-x)}$

Resolução: Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^4}}{\frac{-1}{1-x}}=\lim_{x\to 0}-\frac{2x(1-x)}{1+x^4}=0.$$

Então

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\log(1-x)}=0.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

Resolução:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\log(1+3x)}$$

e temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Aplicando a Regra de Cauchy ao expoente,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+3x)}{x}\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{1+3x}=3.$$

Então,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=e^3.$$

2.

a) Resolução:

$$P\frac{x-1}{x^2+9}=P\frac{x}{x^2+9}-P\frac{1}{x^2+9}=\frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+9}-\frac{3}{9}P\frac{1/3}{(\frac{x}{3})^2+1}=\frac{1}{2}\log\left|x^2+9\right|-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)$$

b) Resolução: Primitivando por partes, com $f'(x)=x^2$ e $g(x)=\log^2 x$,

$$Px^2\log^2 x=\frac{x^3}{3}\log^2 x-P\frac{x^3}{3}2\frac{\log x}{x}=\frac{x^3}{3}\log^2 x-\frac{2}{3}Px^2\log x$$

Aplicando nova primitivação por partes, tomando agora $f'(x)=x^2$ e $g(x)=\log x$, vem

$$Px^2\log^2 x=\frac{x^3}{3}\log^2 x-\frac{2}{3}Px^2\log x=\frac{x^3}{3}\log^2 x-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\log x-P\frac{x^2}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\log^2 x-\frac{2}{9}x^3\log x+\frac{2}{27}x^3$$

3. Resolução: A área pretendida é dada por

$$\int_1^2 \left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[e^{x-1} - \log|x|\right]_1^2 = e - \log 2 - 1$$

4. Resolução:

$$\varphi'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$$

$$\varphi''(x) = 2f(x^2) + (2x)^2 f'(x^2) - f'(x)$$

5. Resolução:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-\pi}{4}\right)^n$$

e temos uma série geométrica de razão $\frac{-\pi}{4}$.Como $\left|\frac{-\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{4} < 1$, a série é convergente e tem soma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{2^{2n}} = \frac{1}{1 - (\frac{-\pi}{4})} = \frac{4}{4+\pi}$$

6. Resolução: Dado que $g'(x) > 0$ se $x > 0$, concluímos que g é estritamente crescente em $]0, +\infty[$. Como g é contínua em $[0, +\infty[$ e $g(0) = 0$, vem

$$g(x) > 0 \quad \text{se } x > 0.$$

Por outro lado, fixando $x > 0$, consideremos o intervalo $[0, x]$; uma vez que g é contínua em $[0, x]$ e diferenciável em $]0, x[$, o Teorema de Lagrange garante que

$$\exists c_x \in \,]0, x[\, : \qquad \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c_x) \leq (c_x)^2 \leq x^2$$

e, como pretendíamos,

$$\forall x > 0 \quad g(x) \leq x^3.$$