Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 9 – Limites e continuidade

Parte I – Exercícios Propostos

Cálculo de Limites

I.1 Calcule, se existirem, os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^8+\left(y-x^2\right)^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Definição de limite

I.2 Calcule, se existir, o limite seguinte: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Continuidade

I.3 Estude a seguinte função quanto à continuidade:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Prolongamento por continuidade

I.4 Verifique se a função $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{4x^2y^2+(y-x)^2}$ é prolongável por continuidade à origem.

Parte II – Exercícios Resolvidos

Cálculo de Limites

II.1 Considere o limite seguinte: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

a) Mostre que conduz a uma indeterminação.

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 0\cdot 0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

b) Calcule os limites iterados para o ponto (0,0).

Resolução:

Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2\cdot 0y}{0^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

c) Calcule alguns limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Resolução:

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{2xmx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2m}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2m}{x^2\left(1+m^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

d) Calcule, se existir, o limite dado.

Resolução:

Na alínea anterior vimos que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \dfrac{2m}{1+m^2}$, logo para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite.

Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y = mx$ são diferentes.

Como o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

II. 2 Considere o limite seguinte: $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)} \dfrac{y-2}{x+3}$.

a) Mostre que conduz a uma indeterminação.

$$\lim_{(x,y)\to(-3,2)} \frac{y-2}{x+3} = \frac{2-2}{-3+3} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

b) Calcule os limites direccionais na vizinhança do ponto $(-3,2)$.

Resolução:

Vamos determinar limites, ao longo de rectas que passam pelo ponto $(-3,2)$.

Seja $f(x,y) = \dfrac{y-2}{x+3}$, cujo domínio é

$$D_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+3\neq 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq -3\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) : x=-3\right\}.$$

Note que não podemos determinar o limite ao longo da direcção da recta $x=-3,$ uma vez que esta não faz parte de D_f .

Sabemos que as rectas que passam no ponto $(-3,2)$ são do tipo:
$y-2=m\left(x-(-3)\right)$, isto é, $y=m\left(x+3\right)+2$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(-3,2)$ segundo a direcção da recta $y=m\left(x+3\right)+2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=m(x+3)+2}} f\left(x,y\right)=\lim_{x\to 0} f\left(x,m\left(x+3\right)+2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{m\left(x+3\right)+2-2}{x+3}=\lim_{x\to 0}\frac{m\left(x+3\right)}{x+3}=\lim_{x\to 0} m=m$$

c) Calcule, se existir, o limite dado.

Resolução:

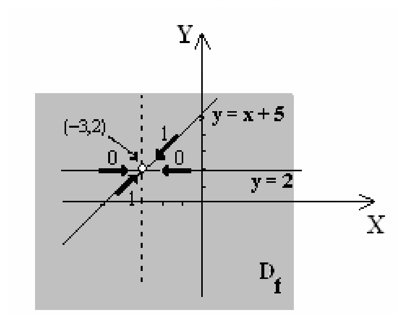
Na alínea anterior vimos que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=m(x+3)+2}} f\left(x,y\right)=m$, logo para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite.

Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y=m\left(x+3\right)+2$ são diferentes $(*)$.

Como o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)}\frac{y-2}{x+3}$.

Observação $(*)$ ***:***

No gráfico que se segue, podemos observar que o valor do limite ao longo da recta $y=0\left(x+3\right)+2$, isto é, y = 2 é 0 e o valor do limite ao longo da recta $y=1\left(x+3\right)+2,$ isto é, $y=x+5$ é 1.



Outra forma de resolver:

Este exercício também se pode resolver fazendo uma mudança de variável. Vejamos como:

$$\lim_{(x,y)\to(-3,2)}\frac{y-2}{x+3}\underset{\uparrow}{=}\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{v}{u}=\frac{0}{0}\text{ (Indeterminação).}$$

Fazendo mudança de variável
$u=x+3$ e $v=y-2$.
Como $x\to-3$ então $x+3\to 0$.
Assim, $u\to 0$.
Como $y\to 2$ então $y-2\to 0$.
Assim, $v\to 0$.

Como o $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\frac{v}{u}=\frac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0). Quer isto dizer, que vamos determinar limites, ao longo de várias direcções, que passem pelo ponto (0,0).

Seja $f(u,v)=\frac{v}{u}$, cujo domínio é $D_f=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u\neq 0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(u,v):u=0\}$.

Note que não podemos determinar o limite ao longo da direcção da recta u = 0, uma vez que esta não faz parte de D_f.

Calculemos o limite quando (u,v) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $v=mu$:

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(0,0)\\ v=mu}} f(u,v)=\lim_{u\to 0} f(u,mu)=\lim_{u\to 0}\frac{mu}{u}=\lim_{u\to 0} m=m.$$

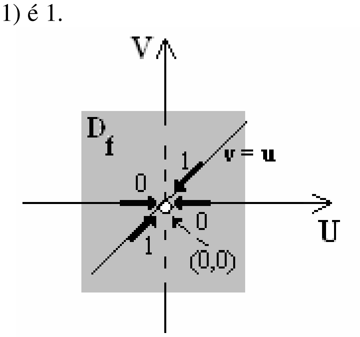
Para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite.

Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas v=mu são diferentes $(**)$.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)}\frac{y-2}{x+3}$.

Observação $(**)$ ***:***

No gráfico que se segue, podemos observar que o valor do limite ao longo do eixo dos uu, isto é, ao longo da recta v = 0 (a recta tem declive nulo, isto é, m = 0) é 0 e o valor do limite ao longo da recta v = u (a recta tem declive 1, isto é, m = 1) é 1.



II. 3 Discuta a existência dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}=\frac{0+0}{0-0}=\frac{0}{0}\text{ (Indeterminação).}$$

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$

- segundo a direcção $x=0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0+y}{0-y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-y}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1.$$

- segundo a direcção $y=0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,o)=\lim_{x\to 0}\frac{x+0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{y\to 0}(1)=1.$$

Como estes limites são diferentes, podemos concluir que não existe o limite inicial.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x+3y^4}{x+y^4}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y^4}{x+y^4} = \frac{2\cdot 0+3\cdot 0^4}{0+0^4} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x+3y^4}{x+y^4} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{2x+3y^4}{x+y^4}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da linha $x = my^4$ com $m \neq -1$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^4\\ m\neq -1}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(my^4, y) = \lim_{y\to 0} \frac{2my^4+3y^4}{my^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4(2m+3)}{y^4(m+1)} = \frac{2m+3}{m+1}.$$

Para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite.
Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das linhas $x = my^4$ com $m \neq -1$ são diferentes.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x+3y^4}{x+y^4}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{0^2\cdot 0}{0^4+0^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da parábola $y = mx^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx^2}{x^4+(mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4m}{x^4+m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4m}{x^4(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite. Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das parábolas $y = mx^2$ são diferentes.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$.

Resolução:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3} = \dfrac{0^40^4}{\left(0^2+0^4\right)^3} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação).

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$

- segundo a direcção da recta $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to0} f(x,mx) = \lim_{x\to0}\frac{x^4(mx)^4}{\left(x^2+(mx)^4\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^4m^4x^4}{\left(x^2+m^4x^4\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^8m^4}{\left(x^2\left(1+m^4x^2\right)\right)^3}.$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^8m^4}{\left(x^2\right)^3\left(1+m^4x^2\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^8m^4}{x^6\left(1+m^4x^2\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^2m^4}{\left(1+m^4x^2\right)^3} = \frac{0^2m^4}{\left(1+m^40^2\right)^3} = 0.$$

Como os limites na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas y=mx, existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y^2}{x^2+y^2}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

- segundo a parábola $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to0} f\left(x,x^2\right) = \lim_{x\to0}\frac{x^4\left(x^2\right)^4}{\left(x^2+\left(x^2\right)^4\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^4x^8}{\left(x^2+x^8\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^{12}}{\left(x^2\left(1+x^6\right)\right)^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^{12}}{\left(x^2\right)^3\left(1+x^6\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^{12}}{x^6\left(1+x^6\right)^3} = \lim_{x\to0}\frac{x^6}{\left(1+x^6\right)^3} = \frac{0^6}{\left(1+0^6\right)^3} = 0.$$

Como o limite na vizinhança do ponto (0,0), ao longo da parábola $y = x^2$, existe e é igual a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

- segundo a parábola $x = y^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \lim_{y\to0} f\left(y^2,y\right) = \lim_{y\to0}\frac{\left(y^2\right)^4y^4}{\left(\left(y^2\right)^2+y^4\right)^3} = \lim_{y\to0}\frac{y^8y^4}{\left(y^4+y^4\right)^3} = \lim_{y\to0}\frac{y^{12}}{\left(2y^4\right)^3}.$$

$$= \lim_{y\to0}\frac{y^{12}}{8y^{12}} = \lim_{y\to0}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Logo, como o limite segundo a parábola $x = y^2$ é diferente dos limites direccionais segundo as rectas y=mx e segundo a parábola $y = x^2$, então não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y^2}{x^2+y^2}$.

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2y^2}{x^2+y^2} = \frac{0^3-2\cdot 0^2}{0^2+0^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0). Quer isto dizer, que vamos determinar limites, ao longo de várias direcções, que passem pelo ponto (0,0).

Considere-se a função $f(x,y) = \dfrac{x^3-2y^2}{x^2+y^2}$, cujo domínio é

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo os eixos coordenados:

- eixo dos xx:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-2\cdot 0^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

O limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta y = 0 é zero.

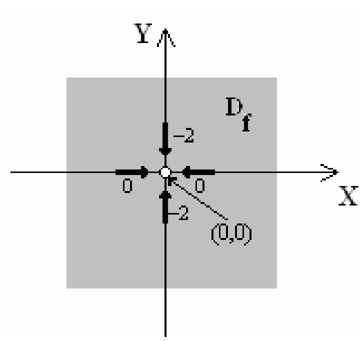
- eixo dos yy:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^3-2y^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-2y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-2) = -2$$

O limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta x = 0 é (-2).

Assim, os limites iterados na vizinhança do ponto (0,0), ao longo dos eixos coordenados são diferentes $(*)$. Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y^2}{x^2+y^2}$.

Observação $(*)$ ***:*** No gráfico que se segue, podemos observar que o valor do limite ao longo do eixo dos xx é 0 e o valor do limite ao longo do eixo dos yy é -2.



II.4 – Discuta a existência dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy-y)}{x-1}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy-y)}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} y\frac{\operatorname{sen}(y(x-1))}{y(x-1)} = \left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} y\right)\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\operatorname{sen}(y(x-1))}{y(x-1)}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Atendendo à observação}(*)\text{ e}\\ \text{usando a definição de limite da}\\ \text{função composta em que}\\ z=\lim_{(x,y)\to(1,2)} y(x-1)=0,\\ \text{isto é, } z\to 0}}{=2\cdot\lim_{z\to0}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}} \underset{\substack{\text{limite}\\ \text{conhecido}}}{=} 2\cdot1=2$$

Observação $(*)$***:***

Seja $h(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(y(x-1))}{y(x-1)}$.

Podemos decompor $h(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(y(x-1))}{y(x-1)}$ como se segue:

$$h=g\circ f:\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$(x,y)\mapsto z=f(x,y)=y(x-1)\mapsto w=h(x,y)=g(f(x,y))=g(z)=\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{\sqrt{xy-2}-2}{xy-6}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{\sqrt{xy-2}-2}{xy-6} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Atendendo à observação}(*)\text{ e}\\ \text{usando a definição de limite da}\\ \text{função composta em que}\\ z=\lim_{(x,y)\to(1,2)} xy=6,\\ \text{isto é, } z\to 6}}{=} \lim_{z\to6}\frac{\sqrt{z-2}-2}{z-6} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Regra}\\ \text{de Cauchy}}}{=} \lim_{z\to6}\frac{\left(\sqrt{z-2}-2\right)'}{(z-6)'} = \lim_{z\to6}\frac{\frac{1}{2\sqrt{z-2}}}{1}$$

$$=\lim_{z\to6}\frac{1}{2\sqrt{z-2}}=\frac{1}{2\sqrt{6-2}}=\frac{1}{2\sqrt4}=\frac{1}{2\cdot2}=\frac14.$$

Observação $(*)$***:***

Seja $h(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy-2}-2}{xy-6}$.

Podemos decompor $h(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy-2}-2}{xy-6}$ como se segue:

$$h=g\circ f:\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$(x,y)\mapsto z=f(x,y)=xy\mapsto w=h(x,y)=g(f(x,y))=g(z)=\frac{\sqrt{z-2}-2}{z-6}$$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Resolução:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{0^2-0^2}{0^2+0^2} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação). Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to0} f(x,mx) = \lim_{x\to0} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to0} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite. Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y = mx$ são diferentes.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Definição de limite

II.5 Considere o limite seguinte: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) Mostre que conduz a uma indeterminação.

Resolução:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{0\cdot0}{\sqrt{0^2+0^2}} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação).

b) Calcule os limites iterados para o ponto (0,0). O que pode concluir?

Resolução:

Seja $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Temos

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x\cdot0}{\sqrt{x^2+0^2}}\right) = \lim_{x\to0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim_{y\to0}\left(\frac{0y}{\sqrt{0^2+y^2}}\right) = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

Como os limites iterados existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

c) Verifique recorrendo à definição que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Resolução:

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, isto é,

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0:(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\wedge\left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}<\varepsilon\Rightarrow\left|f(x,y)-0\right|<\delta.$$

Fixemos $\delta>0$ qualquer.

Queremos encontrar $\varepsilon>0$ tal que se

$$\left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}=\left\|(x-0,y-0)\right\|_{\mathbb{R}^2}=\left\|(x,y)\right\|_{\mathbb{R}^2}\underset{\substack{\text{Usando a norma}\\\text{Euclideana}}}{=}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

então $\left|f(x,y)-0\right|<\delta$.

Temos,

$$\left|f(x,y)-0\right|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|xy|}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|}=\frac{|x||y|}{\underset{\substack{\uparrow\\ \sqrt{x^2+y^2}>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}}{\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|}}=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\underset{(*)}{\le}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\underset{\substack{\text{Por}\\\text{hipótese}}}{<}\varepsilon<\delta\Leftrightarrow\varepsilon<\delta$$

Logo, basta tomar $\varepsilon<\delta$ para que

$$\forall\delta>0\ \exists 0<\varepsilon<\delta:(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\wedge 0\le\left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}<\varepsilon\Rightarrow\left|f(x,y)-0\right|<\delta.$$

Observação $(*)$ ***:***

Atendendo a que

- $|x|=\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+y^2},\forall x,y\in\mathbb{R}$
- $|y|=\sqrt{y^2}\le\sqrt{x^2+y^2},\forall x,y\in\mathbb{R}.$

II.6 – Determine o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2}$.

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2}=\frac{7\cdot0\cdot0^2+2\cdot0^2|0|}{0^2+0^2}=\frac{0}{0}\text{ (indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y)=\dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$:

- segundo a direcção da recta $y=mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,mx)=\lim_{x\to0}\frac{7x(mx)^2+2x^2|x|}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{7xm^2x^2+2x^2|x|}{x^2+m^2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(7m^2x+2|x|\right)}{x^2\left(1+m^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{7m^2x+2|x|}{1+m^2}=\frac{7m^2\cdot0+2|0|}{1+m^2}=0$$

- segundo a direcção da recta $y=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}\frac{7x\cdot0^2+2x^2|x|}{x^2+0^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2|x|}{x^2}=\lim_{x\to0}2|x|=2|0|=0$$

Como os limites na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y = mx$ e da recta $y = 0$ existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{7xy^2 + 2x^2|x|}{x^2 + y^2}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, isto é,

$$\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \wedge \|(x,y) - (0,0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \delta.$$

Fixemos $\delta > 0$ qualquer.

Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x-0, y-0)\| = \|(x,y)\| \underset{\substack{\text{Usando a norma} \\ \text{Euclideana}}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

então $|f(x,y) - 0| < \delta$.

Temos,

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{7xy^2 + 2x^2|x|}{x^2 + y^2} - 0\right| = \left|\frac{7xy^2 + 2x^2|x|}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|7xy^2 + 2x^2|x||}{|x^2 + y^2|} \underset{\substack{\text{Desigualdade} \\ \text{triangular}}}{\leq} \frac{|7xy^2| + |2x^2|x||}{|x^2 + y^2|} = \frac{7|xy^2| + 2|x^2|x||}{x^2 + y^2}$$

$$\underset{(*)}{\leq} \frac{7(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} + 2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{9(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 9\sqrt{x^2 + y^2} \underset{\substack{\text{Por} \\ \text{hipótese}}}{<} 9\varepsilon < \delta \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\delta}{9}$$

Logo, basta tomar $\varepsilon < \dfrac{\delta}{9}$ para que

$$\forall\delta > 0\ \exists 0 < \varepsilon < \frac{\delta}{9} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \wedge \|(x,y) - (0,0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \delta.$$

Observação $(*)$ ***:***

Atendendo a que

- $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$
- $x^2 \leq x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$
- $y^2 \leq x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$

vem

- $\left|x^2|x|\right| \underset{|x|\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}}{=} |x||x^2| = |x|x^2 \underset{\text{Por 1 e 2}}{\leq} (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|xy^2| = |x \cdot y^2| = y^2|x| \underset{\text{Por 3 e 1}}{\leq} (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

II.7 Determine o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3y+5y^4|\cos x|}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$.

Resoluções:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y+5y^4|\cos x|}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{3\cdot 0\cdot 0+5\cdot 0|\cos 0|}{\left(0^2+0^2\right)^{3/2}} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação),}$$

temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{3x^3y+5y^4|\cos x|}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3mx+5(mx)^4|\cos x|}{\left(x^2+(mx)^2\right)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{|x|^3}\frac{3m+5m^4\cdot|\cos x|}{\left(1+m^2\right)^{3/2}} = 0$$

Como os limites na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y = mx$ existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3y+5y^4|\cos x|}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, isto é,

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0 : (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \wedge \|(x,y)-(0,0)\|<\varepsilon \Rightarrow |f(x,y)-0|<\delta.$$

Fixemos $\delta > 0$ qualquer.
Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x-0,y-0)\| = \|(x,y)\| \underset{\substack{\text{Usando a norma}\\ \text{Euclideana}}}{=} \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

então $|f(x,y)-0| < \delta$.
Temos,

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{3x^3y+5y^4|\cos x|}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} - 0\right| = \left|\frac{3x^3y+5y^4|\cos x|}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right| = \left|\frac{3x^3y+5y^4|\cos x|}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\right| = \frac{\left|3x^3y+5y^4|\cos x|\right|}{\left|\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\right|}$$

$$= \frac{\left|3x^3y+5y^4|\cos x|\right|}{\left|\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2\left(x^2+y^2\right)}\right|} = \frac{\left|3x^3y+5y^4|\cos x|\right|}{\left|\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\right|} = \frac{\left|3x^3y+5y^4|\cos x|\right|}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\substack{\text{Desigualdade}\\ \text{triangular}}}{\leq} \frac{\left|3x^3y\right|+\left|5y^4|\cos x|\right|}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{3\left|x^3y\right|+5|\cos x|\left|y^4\right|}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{A função coseno}\\ \text{é limitada, isto é,}\\ |\cos x|\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}}}{\leq} = \frac{3\left|x^3y\right|+5\left|y^4\right|1}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(*)}{\leq} \frac{3\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}+5\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{3\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)+5\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{8\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{8\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{8\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{8\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 8\sqrt{x^2+y^2} \underset{\substack{\text{Por}\\ \text{hipótese}}}{<} 8\varepsilon < \delta \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\delta}{8}$$

Logo, basta tomar $\varepsilon < \dfrac{\delta}{8}$ para que

$$\forall\delta>0\ \exists 0<\varepsilon<\frac{\delta}{8} : (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \wedge \|(x,y)-(0,0)\|<\varepsilon \Rightarrow |f(x,y)-0|<\delta.$$

Observação $(*)$ **:**

Atendendo a que

$$\bullet |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$
$$\bullet x^2 \le x^2+y^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$
$$\bullet y^2 \le x^2+y^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

vem

$$\bullet |x^3 y| = |x^3||y| = |x^2 \cdot x||y| = x^2|x||y| \underset{\text{Por 1, 2 e 3}}{\le} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$\bullet |y^4| = |y^2 \cdot y^2| = y^2 \cdot y^2 \underset{\text{Por 3}}{\le} \left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Continuidade

II. 8 Estude a seguinte função quanto à continuidade:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^4+y-\text{sen } x}, & \text{se } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Resolução:

Estudemos a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}^2$.
Pela forma como f está definida, por ramos, iremos estudar a continuidade em duas partes:

- Num ponto $(x,y) \ne (0,0)$

  A função é contínua, porque é a soma, a composta e o quociente de funções contínuas em pontos onde o denominador não se anula.

- No ponto $(x,y) = (0,0)$

  A função f é contínua no ponto $(0,0)$ sse

$$\text{existe } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ e } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Verifiquemos se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^4+y-\text{sen } x} = \frac{0-0}{0^4+0-\text{sen } 0} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^4+y-\text{sen } x} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$:

- segundo a direcção da recta $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{x-mx}{x^4+mx-\text{sen } x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1-m)}{x^4+mx-\text{sen } x} \underset{\substack{\text{Regra}\\ \text{de}\\ \text{Cauchy}}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(x(1-m)\right)'}{\left(x^4+mx-\text{sen } x\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-m)}{4x^3+m-\cos x} = \frac{(1-m)}{4\cdot 0^3+m-\cos 0} = \frac{1-m}{0^3+m-1} = \frac{1-m}{m-1} = \frac{-(m-1)}{m-1} = -1 \text{ com } m \ne 1$$

- segundo a direcção da recta $y = x$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^4+x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4+x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Como o limite direccional segundo a recta $y = x$ é diferente dos limites direccionais segundo as rectas y=mx, com $m \neq 1$ então não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^4+y-\operatorname{sen} x}$.

Assim, a função f não é contínua no ponto $(0,0)$.

Outra forma de raciocinar:

Já verificamos que o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = mx$, com $m \neq 1$ é (-1). Assim, se o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existir tem que ser (-1), devido a unicidade do limite. Como $f(0,0) = 0 \neq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, podemos concluir que f não é contínua no ponto $(0,0)$.

<u>Conclusão final:</u>

A função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Prolongamento por continuidade

II. 9 Verifique se a função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)$ é prolongável por continuidade à origem, em caso afirmativo defina o prolongamento contínuo $\overline{f}(x,y)$:

<u>Resoluções:</u>

A função f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$ sse o limite existe e é finito nesse ponto.

Temos, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) = \dfrac{0^2}{\sqrt{0^2+0^2}}\operatorname{sen}\left(0^2+0^2\right) = \dfrac{0}{0}$ (indeterminação).

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x^2}}\operatorname{sen}\left(x^2+x^2\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^2}}\operatorname{sen}\left(2x^2\right)\right) \underset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{|x|\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2x^2\right)\right)$$

Calculemos os limites laterais no ponto x=0:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2x^2\right) = \dfrac{0}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2\cdot 0^2\right) = 0\cdot 0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{-x\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2x^2\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2x^2\right) = \dfrac{0}{-\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(2\cdot 0^2\right) = 0\cdot 0 = 0$

Como os limites laterais no ponto x=0 são iguais, então $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=0$. Assim, atendendo a que o limite direccional na vizinhança do ponto (0,0), ao longo da recta $y=x$, existe e é igual a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)$, apenas que se o seu limite existir é zero.

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, isto é,

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0:(x,y)\in\mathbb{R}^2\{(0,0)\}\wedge\left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}<\varepsilon\Rightarrow\left|f(x,y)-0\right|<\delta.$$

Fixemos $\delta>0$ qualquer.

Queremos encontrar $\varepsilon>0$ tal que se

$$\left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}=\left\|(x-0,y-0)\right\|_{\mathbb{R}^2}=\left\|(x,y)\right\|_{\mathbb{R}^2}\underset{\substack{\text{Usando a norma}\\ \text{Euclideana}}}{=}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

então $\left|f(x,y)-0\right|<\delta$.

Temos,

$$\left|f(x,y)-0\right|=\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)-0\right|=\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)\right|=\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\left|\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)\right|\backslash$$

$$\underset{\substack{\text{Atendendo a que}\\ x^2\le x^2+y^2,\forall x,y\in\mathbb{R}.}}{\le}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2}}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\underset{\substack{\text{Por}\\ \text{hipótese}}}{<}\varepsilon<\delta\Leftrightarrow\varepsilon<\delta$$

Logo, basta tomar $\varepsilon<\delta$ para que

$$\forall\delta>0\ \exists 0<\varepsilon<\delta:(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\wedge\left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}<\varepsilon\Rightarrow\left|f(x,y)-0\right|<\delta.$$

Assim, como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, podemos concluir que a função f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$ e o prolongamento é a função

$$\overline{f}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right), & \text{se } (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & , \text{ se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III.1 Discuta a existência dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y}{2x^3+5y}$ **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2-1+\left(x-1\right)^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$ **e)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{-\frac{1}{x^2(y-1)^2}}$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{\left(x+y-4\right)^2}{x^2+y^2-2x-6y+10}$

III.2 Considere a função real definida por:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} xy^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}, & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{, se } y=0 \end{cases}$$

Prove que f é contínua na origem.

III.3 Considere a função:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} \dfrac{7xy^2+2x^2\left|x\right|}{x^2+y^2} & \text{, se } \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right) \\ 0 & \text{se } \left(x,y\right)=\left(0,0\right) \end{cases}$$

Estude $f\left(x,y\right)$ quanto à continuidade.

III.4 Verifique se a função $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2}{x^3+y+\operatorname{tg} x}$ é prolongável por continuidade à origem.

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata