Ficha 12
Resolução dos exercícios de auto-avaliação

III.1 Seja $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2y+1$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

Resolução:

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2y+1\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2y+1\right)}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{3x^2}{3}-\frac{2x}{2},\frac{3y^2}{3}-\frac{2y}{2}-2\right)=\left(x^2-x,y^2-y-2\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

b) Obtenha a equação do plano tangente a f no ponto $(2,0)$.

Resolução:

A equação do plano tangente à função no ponto $(2,0)$ é dada por:

$$z=f(2,0)+\nabla f(2,0)\cdot(x-2,y-0)$$

Substituindo na função $f(x,y)$ as variáveis x e y por 2 e 0, vem

$$f(2,0)=\frac{2^3}{3}+\frac{0^3}{3}-\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}-2\cdot 0+1=\frac{5}{3}.$$

Na alínea anterior viu-se que,

$$\nabla f(x,y)=\left(x^2-x,y^2-y-2\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\nabla f(2,0)=\left(2^2-2,0^2-0-2\right)=(2,-2).$$

Assim,

$$z=f(2,0)+\nabla f(2,0)\cdot(x-2,y-0)\Leftrightarrow z=f(2,0)+(2,-2)\cdot(x-2,y)$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{5}{3}+2(x-2)-2y\Leftrightarrow -2x+2y+z+\frac{7}{3}=0$$

c) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(2,0)$ segundo o vector $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Resolução:

O vector v normalizado fica

$$\frac{v}{\|v\|}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

A função f é uma função polinomial.

Sabemos que, toda a função polinomial é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Então, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, em particular é diferenciável no ponto $(2,0)$.

Assim, a derivada de f no ponto $(2,0)$ segundo o vector v (normalizado) é:

$$f'_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(2,0)=\nabla f(2,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\underset{\substack{\text{Pela}\\ \text{alínea b)}}}{=}(2,-2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+(-2)\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

d) Determine os pontos de estacionaridade de f.

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x=0\\ y^2-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-1)=0\\ y^2-y-2=0\end{cases}$$

$$\underset{(*)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=0\vee x=1\\ y=2\vee y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são: $(0,2)$, $(0,-1)$, $(1,2)$ e $(1,-1)$.

Cálculos auxiliares: $(*)$

$$y^2-y-2=0\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1\cdot(-2))}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1\pm 3}{2}\Leftrightarrow y=\frac{4}{2}\vee y=\frac{-2}{2}\Leftrightarrow y=2\vee y=-1$$

e) Calcule a matriz Hessiana de f.

Resolução:

Determinemos a matriz Hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{bmatrix}\underset{\substack{\text{Pela}\\ \text{alínea a)}}}{=}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-x\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-x\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2-y-2\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2-y-2\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1 & 0\\ 0 & 2y-1\end{bmatrix}$$

f) Classifique os pontos obtidos na alínea (d) quanto à sua natureza.

Resolução:

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto $(0,2)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,2)=\begin{bmatrix} 2\cdot 0-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,2)$ é:

$$D_1=-1<0$$
$$D_2=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-1\cdot 3-0\cdot 0=-3<0.$$

Como $D_2<0,$ então a forma quadrática é indefinida e $(0,2)$ é um ponto sela.

- ponto $(0,-1)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,-1)=\begin{bmatrix} 2\cdot 0-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot(-1)-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,-1)$ é:

$$D_1=-1<0$$
$$D_2=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-1\cdot(-3)-0\cdot 0=3>0.$$

Como $D_1<0$ e $D_2>0,$ então a forma quadrática é definida negativa e $(0,-1)$ é um ponto de máximo relativo.

- ponto $(1,2)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(1,2)=\begin{bmatrix} 2\cdot 1-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(1,2)$ é:

$$D_1=1>0$$
$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3-0\cdot 0=3>0.$$

Como $D_1>0$ e $D_2>0$, então a forma quadrática é definida positiva e $(1,2)$ é um ponto de mínimo relativo.

- ponto $(1,-1)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(1,-1)=\begin{bmatrix} 2\cdot 1-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot(-1)-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(1,-1)$ é:

$$D_1=1>0$$
$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-0\cdot 0=-3<0.$$

Como $D_2<0$, então a forma quadrática é indefinida e $(1,-1)$ é um ponto sela.

III. 2 Seja $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{y^3}{3}-y^2+\dfrac{3}{2}$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y)=\nabla f(x,y)&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\\ &=\left(\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{y^3}{3}-y^2+\frac{3}{2}\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{y^3}{3}-y^2+\frac{3}{2}\right)}{\partial y}\right)\\ &=\left(x^2-x-2,\,y^2-2y\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

b) Obtenha a equação do plano tangente a f no ponto $(1,-1)$.

Resolução:

A equação do plano tangente à função no ponto $(1,-1)$ é dada por:

$$z = f(1,-1) + \nabla f(1,-1)\cdot\left(x-1, y-(-1)\right)$$

Substituindo na função $f(x,y)$ as variáveis x e y por 2 e 0, vem

$$f(1,-1) = \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 2\cdot 1 + \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{3}{2} = -2\,.$$

Na alínea anterior viu-se que,

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 - x - 2, y^2 - 2y\right),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Então,

$$\nabla f(1,-1) = \left(1^2 - 1 - 2, (-1)^2 - 2(-1)\right) = (-2,3).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& z = f(1,-1) + \nabla f(1,-1)\cdot(x-1, y+1) \Leftrightarrow z = -2 + (-2,3)(x-1, y+1) \\
& \Leftrightarrow z = -2 + (-2)(x-1) + 3(y+1) \Leftrightarrow z = -2 - 2x + 2 + 3y + 3 \\
& \Leftrightarrow z = -2x + 3y + 3
\end{aligned}$$

c) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(1,-1)$ segundo o vector $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Resolução:

O vector $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ normalizado fica

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

A função f é uma função polinomial.

Sabemos que, toda a função polinomial é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Então, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, em particular é diferenciável no ponto $(1,-1)$.

Assim, a derivada de f no ponto $(1,-1)$ segundo o vector v (normalizado) é:

$$\begin{aligned}
f'_{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}(1,-1) &= \nabla f(1,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \underset{\substack{\text{Pela} \\ \text{alínea b)}}}{=} (-2,3)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 3\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

d) Determine os pontos de estacionaridade de f.

Resolução:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2=0\\ y^2-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\\ y(y-2)=0\end{cases}$$

$$\underset{(*)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=2\vee x=-1\\ y=0\vee y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são: $(2,0)$, $(2,2)$, $(-1,0)$ e $(-1,2)$.

Cálculos auxiliares: $(*)$

$$x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1\cdot(-2))}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1\pm 3}{2}\Leftrightarrow x=\frac{4}{2}\vee x=\frac{-2}{2}\Leftrightarrow x=2\vee x=-1$$

e) Calcule a matriz Hessiana de f.

Resolução:

Determinemos a matriz Hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{bmatrix}\underset{\substack{\text{Pela}\\ \text{alínea a)}}}{=}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x^2-x-2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2-x-2)\\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2-2y) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2-2y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1 & 0\\ 0 & 2y-2\end{bmatrix}$$

f) Classifique os pontos obtidos na alínea (d) quanto à sua natureza.

Resolução:

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto$(2,0)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(2,0)=\begin{bmatrix}2\cdot 2-1 & 0\\ 0 & 2\cdot 0-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,2)$ é:

$$D_1=3>0$$
$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-0\cdot 0=-6<0.$$

Como $D_2<0$, então a forma quadrática é indefinida e $(2,0)$ é um ponto sela.

- <u>ponto $(2,2)$</u>

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(2,2)=\begin{bmatrix} 2\cdot 2-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(2,2)$ é:

$$D_1 = 3 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 0\cdot 0 = 6 > 0.$$

Como $D_1 > 0$ e $D_2 > 0$, então a forma quadrática é definida positiva e $(2,2)$ é um ponto de mínimo relativo.

- <u>ponto $(-1,0)$</u>

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-1,0)=\begin{bmatrix} 2\cdot(-1)-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 0-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-1,0)$ é:

$$D_1 = -3 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 6 > 0.$$

Como $D_1 < 0$ e $D_2 > 0$, então a forma quadrática é definida negativa e $(-1,0)$ é um ponto de máximo relativo.

- <u>ponto $(-1,2)$</u>

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-1,2)=\begin{bmatrix} 2\cdot(-1)-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 2-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-1,2)$ é:

$$D_1 = -3 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 2 - 0\cdot 0 = -6 < 0.$$

Como $D_2 < 0$, então a forma quadrática é indefinida e $(-1,2)$ é um ponto sela.

III.3 Determine e classifique os extremos relativos das seguintes funções:

a) $f(x,y)=x^2y^2-2xy$.

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2xy^2-2y=0\\ 2x^2y-2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y(xy-1)=0\\ 2x(xy-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\vee xy-1=0\\ x=0\vee xy-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\vee xy-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\vee\left(y=\frac{1}{x}\wedge x\neq 0\right)$$

Os pontos de estacionariedade são $(0,0)$ e $\left(x,\frac{1}{x}\right)$, com $x\neq 0$.

Determinemos a matriz hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y^2 & 4xy-2\\ 4xy-2 & 2x^2\end{bmatrix}$$

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto $(0,0)$

  A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,0)=\begin{bmatrix}2\cdot 0^2 & 4\cdot 0\cdot 0-2\\ 4\cdot 0\cdot 0-2 & 2\cdot 0^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}.$$

  A cadeia de menores principais de $H(0,0)$ é:

$$D_1=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-(-2\cdot(-2))=0-4=-4<0.$$

  Como $D_2<0$, então a forma quadrática é indefinida e $(0,0)$ é um ponto sela

- ponto $\left(x,\frac{1}{x}\right)$, com $x\neq 0$.

  A matriz hessiana neste ponto é:

$$H\left(x,\frac{1}{x}\right)=\begin{bmatrix}2\left(\frac{1}{x}\right)^2 & 4x\frac{1}{x}-2\\ 4x\frac{1}{x}-2 & 2x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{x^2} & 2\\ 2 & 2x^2\end{bmatrix}$$

  A cadeia de menores principais de $H\left(x,\frac{1}{x}\right)$ é:

$$D_1=\frac{2}{x^2}>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{2}{x^2} & 2\\ 2 & 2x^2\end{vmatrix}=\frac{2}{x^2}\cdot 2x^2-(2\cdot 2)=4-4=0.$$

  Como $D_2=0$, nada se pode concluir.

b) $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x-y+1$.

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2=0\\ y^2-1=0\end{cases}$$

$$\underset{(*)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=2\vee x=-1\\ y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\vee x=-1\\ y=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\vee x=-1\\ y=-1\vee y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são: $(2,-1)$, $(2,1)$, $(-1,-1)$ e $(-1,1)$.

Cálculos auxiliares: $(*)$

$$x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1\cdot(-2))}}{2\cdot1}\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1\pm3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4}{2}\vee\Leftrightarrow x=\frac{-2}{2}\Leftrightarrow x=2\vee\Leftrightarrow x=-1$$

Determinemos a matriz Hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{bmatrix}\underset{\substack{\text{Pela}\\ \text{alínea a)}}}{=}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x^2-x-2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2-x-2)\\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2-1) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1 & 0\\ 0 & 2y\end{bmatrix}$$

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto $(2,-1)$

  A matriz hessiana neste ponto é:

  $$H(2,-1)=\begin{bmatrix}2\cdot2-1 & 0\\ 0 & 2\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$$

  A cadeia de menores principais de $H(2,-1)$ é:

  $$D_1=3>0$$
  $$D_2=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-0\cdot0=-6<0.$$

  Como $D_2<0$, então a forma quadrática é indefinida e $(2,-1)$ é um ponto sela.

- ponto$(2,1)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(2,1)=\begin{bmatrix} 2\cdot 2-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(2,1)$ é:

$$D_1 = 3 > 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 0\cdot 0 = 6 > 0.$$

Como $D_1 > 0$ e $D_2 > 0$, então a forma quadrática é definida positiva e $(2,1)$ é um ponto de mínimo relativo.

- ponto$(-1,-1)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-1,-1)=\begin{bmatrix} 2\cdot(-1)-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot(-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-1,-1)$ é:

$$D_1 = -3 < 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -3\cdot(-2) - 0\cdot 0 = 6 > 0.$$

Como $D_1 < 0$ e $D_2 > 0$, então a forma quadrática é definida negativa e $(-1,-1)$ é um ponto de máximo relativo.

- ponto$(-1,1)$

A matriz Hessiana neste ponto é:

$$H(-1,1)=\begin{bmatrix} 2\cdot(-1)-1 & 0 \\ 0 & 2\cdot 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-1,1)$ é:

$$D_1 = -3 < 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -3\cdot 2 - 0\cdot 0 = -6 < 0.$$

Como $D_2 < 0$, então a forma quadrática é indefinida e $(-1,1)$ é um ponto sela.