Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra Linear

Teste 1 - 16 de Outubro de 2012 [aula teórica]
Duração: 40 minutos

Resolução

1. Considere o seguinte sistema.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} u & +v & +2w & = & 1 \\ u & -v & -w & = & -1 \\ -u & +3v & +4w & = & 3 \end{array}\right. \qquad (1)$$

(1.25 val.) a) Encontre o conjunto solução S do sistema (1), aplicando o método de eliminação de Gauss à sua matriz aumentada.

Resolução Aplicamos o método de eliminação de Gauss (MEG) à matriz aumentada do sistema.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\begin{array}{c} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\underset{\longrightarrow}{L_3 + 2L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{B}$$

Vemos que

$$car(A) = car(\widetilde{A}) = 2 < \text{número de incógnitas} = 3,$$

pelo que o sistema é possível mas indeterminado com grau de indeterminação 1. O sistema com matriz aumentada $\widetilde{B}$ é

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} u & +v & +2w & = & 1 \\ & 2v & +3w & = & 2. \end{array}\right. \qquad (2)$$

A sua resolução é

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} u & +v & +2w & = & 1 \\ & 2v & +3w & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u & = & 1 - v - 2w \\ v & = & 1 - \frac{3}{2}w \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u & = & -\frac{1}{2}w \\ v & = & 1 - \frac{3}{2}w \end{array}\right. .$$

O conjunto solução de (1) é então

$$\begin{aligned} S &= \left\{(-\frac{1}{2}w, 1-\frac{3}{2}w, w),\ w \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{(0,1,0) + w\ (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1),\ w \in \mathbb{R}\right\}\ . \end{aligned}$$

(0.75 val.) b) Qual o significado geométrico de S na alínea anterior? Indique, caso existam, dois pontos diferentes de S.

Resolução S é a recta que passa no ponto $(0,1,0)$ e é paralela ao vector $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$. Dois pontos diferentes de S são, por exemplo,

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,1,0) \\ P_2 &= (0,1,0) + 2\ (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1) = (-1,-2,2). \end{aligned}$$

2. Sejam $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, invertíveis.

(0.75 val.) a) Seja C a matriz inversa de $AB^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Represente C como produto de quatro matrizes. Verifique o resultado.

Resolução Temos

$$C = \left(AB^{-1}A^{-1}B^{-1}\right)^{-1} = BABA^{-1}. \tag{3}$$

Verifiquemos o resultado:

$$\begin{aligned} C\ \left(AB^{-1}A^{-1}B^{-1}\right) &= \left(BABA^{-1}\right)\left(AB^{-1}A^{-1}B^{-1}\right) = \\ &= B\left(A\left(B(A^{-1}A)B^{-1}\right)A^{-1}\right)B^{-1} = \\ &= B\left(A\left(BIB^{-1}\right)A^{-1}\right)B^{-1} = \\ &= B\left(A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}\right)B^{-1} = \\ &= B\left(AA^{-1}\right)B^{-1} = \\ &= BB^{-1} = I\ . \end{aligned}$$

(1.25 val.) b) Sejam $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule a matriz C da alínea anterior.

(**Nota:** Caso não tenha feito a alínea anterior ou não tenha conseguido verificar o resultado, calcule a seguinte matriz: $D = A^{-1}BAB$).

Resolução Vemos de (3) que, para calcular C vamos precisar de A^{-1}. Pelo método de eliminação de Gauss-Jordan temos

$$\begin{aligned} \widetilde{A} \quad &= \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ &\xrightarrow{-L_2 \to L_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2 \to L_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ &\xrightarrow{-L_1 \to L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pelo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A matriz C é então,

$$\begin{aligned} C &= BABA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Usando só as propriedades enunciadas na definição de função determinante de ordem
(1 val.) 3, calcule $d((0,3,0),(2,0,0),(0,1,3))$.

Resolução As propriedades que podemos usar são a multilinearidade (m), a anulação (a) e a normalização (n). Temos

$$\begin{aligned} d((0,3,0),(2,0,0),(0,1,3)) &= d(3e_2, 2e_1, e_2 + 3e_3) \overset{(m)}{=} d(3e_2, 2e_1, e_2) + 3\ d(3e_2, 2e_1, e_3) = \\ &\overset{(m)}{=} 6\ d(e_2, e_1, e_2) + 18\ d(e_2, e_1, e_3) \overset{(a)}{=} 0 + 18\ d(e_2, e_1, e_3). \end{aligned} \tag{4}$$

Mostremos agora que $d(e_2, e_1, e_3) = -d(e_1, e_2, e_3)$. Temos,

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(a)}{=} d(e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_3) \overset{(m)}{=} d(e_1, e_1, e_3) + d(e_1, e_2, e_3) + d(e_2, e_1, e_3) + d(e_2, e_2, e_3) = \\ &\overset{(a)}{=} d(e_1, e_2, e_3) + d(e_2, e_1, e_3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(e_2, e_1, e_3) = -d(e_1, e_2, e_3) \overset{(n)}{=} -1. \end{aligned} \tag{5}$$

De (4) e (5) obtemos,

$$d((0,3,0),(2,0,0),(0,1,3)) = -18.$$