Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Definição

Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície se para qualquer ponto $P \in S$ existir uma bola $B(P)$ tal que o conjunto $M \cap B(P)$ pode ser descrito de uma das três maneiras seguintes:

1. Como um conjunto de nível de uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na classe C^1 num aberto U, tal que $\nabla F(P) \neq 0$ para qualquer $P \in M \cap B(P)$:

   $$M \cap B(P) = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = c\}.$$

   onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante real. Ajustando F pode sempre usar-se $c = 0$.

   Num ponto $P \in M \cap B(P)$ o vector $\nabla F(P)$ é um vector normal à superfície M no ponto P e os vectores tangentes à superfície M no ponto P obtêm-se como soluções da equação

   $$\nabla F(P) \cdot \vec{t} = 0.$$

2. Como a imagem de uma parametrização $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, que é uma função $g(u, v)$ na classe $C^1(U)$ (i. e. existem e são contínuas, no interior de U, as derivadas parciais de g).

   Para algum (u, v) no interior de U, considere-se o ponto $P = g(u, v) \in M$ e os vectores

$$\vec{t_1} = \frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{e} \quad \vec{t_2} = \frac{\partial g}{\partial v}.$$

   Então

   - O ponto $P \in M$ diz-se regular se $\vec{t_1} \times \vec{t_2}$ é um vector não-nulo;
   - Se $P \in M$ é regular, $\vec{t_1}$ e $\vec{t_2}$ são vectores tangentes à superfície M no ponto P;
   - Se $P \in M$ é regular, $\vec{t_1} \times \vec{t_2}$ é um vector normal à superfície M no ponto P.

Revisão: Produto externo em $\mathbb{R}^3$

Dados dois vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ com $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ define-se o vector produto externo de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ por

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \mathbf{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ designam os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Algumas propriedades:

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j};$
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b};$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$;

3. Como o gráfico de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na classe $C^1(U)$. Por exemplo

$$M \cap B(P) = \{(x, y, z) : z = f(x, y), \quad (x, y) \in U\}.$$

Neste caso tem-se para um ponto regular $P = (x, y, z) \in M$

$$\vec{t_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ e } \vec{t_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

são vectores tangentes à superfície M no ponto P e

$$\vec{t_1} \times \vec{t_2} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

é um vector normal à superfície M no ponto P.

Definição: Plano tangente e recta normal

Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $P \in M$ um ponto regular. Suponhamos $\vec{t_1}$ e $\vec{t_2}$ geram $T_P M$ e $\vec{n} \in (T_P M)^\perp$, então

- O plano tangente a M em P é o conjunto dos pontos $T \in \mathbb{R}^3$ dados por

$$\vec{n} \cdot (T - P) = 0 \qquad \text{(equação cartesiana)}$$

ou

$$T = P + \alpha\,\vec{t_1} + \beta\,\vec{t_2} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{(equação vectorial)}$$

- A recta normal a M em P é o conjunto dos pontos $N \in \mathbb{R}^3$ dados por

$$\begin{cases} \vec{t_1} \cdot (N - P) = 0 \\ \vec{t_2} \cdot (N - P) = 0 \end{cases} \qquad \text{(equações cartesianas)}$$

ou

$$N = P + \lambda \vec{n} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{(equação vectorial)}$$

Definição: Integral de superfície de um campo escalar

Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, com uma parametrização $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e uma função $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrável e definida num aberto V que contém M. Então define-se o integral de f sobre M como

$$\iint_M f\, dS = \iint_U f(g(u,v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| dudv.$$

Em particular, a área da superfície M é dada por

$$A(M) = \iint_M 1\, dS = \iint_U \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| dudv.$$

Nota: Mostra-se que a definição de integral de superfície é independente da parametrização utilizada.