

4 Cálculo Diferencial (Soluções)

1. a) $(\operatorname{tg} x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x$,
 b) $\left(\frac{x+\cos x}{1-\sin x}\right)' = 1 + \frac{\cos x(x+\cos x)}{(1-\sin x)^2}$,
 c) $(e^{\operatorname{arctg} x})' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$,
 d) $(e^{\log^2 x})' = e^{\log^2 x} 2\frac{1}{x} \log x$, para $x > 0$,
 e) $(\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x)' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,
 f) $(x^2(1 + \log x))' = 3x + 2x \log x$,
 g) $(\cos \arcsen x)' = \frac{-\sin(\arcsen x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
 h) $((\log x)^x)' = (e^{\log((\log x)^x)})' = (e^{x \log(\log x)})' = (\log x)^x \left(\log(\log x) + \frac{1}{\log x} \right)$,
 i) $(x^{\sin 2x})' = (e^{\sin 2x \log x})' = x^{\sin 2x} \left(2 \cos 2x \log x + \frac{\sin 2x}{x} \right)$.
2. a) $(\operatorname{arctg} x^4 - (\operatorname{arctg} x)^4)' = \frac{4x^3}{1+x^8} - \frac{4 \operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}$.
 b) $((\sin x)^x)' = (e^{x \log \sin x})' = (\log \sin x + \frac{x \cos x}{\sin x}) e^{x \log \sin x}$
 $= (\log \sin x + \frac{x \cos x}{\sin x})(\sin x)^x$.
 c) $(\log \log x)' = \frac{1}{x \log x}$.
 d) $\left(\frac{\sin \sin x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos(\sin x) \cos x \sin x - \sin(\sin x) \cos x}{\sin^2 x}$.
 e) $((\operatorname{arctg} x)^{\arcsen x})' = (\operatorname{arctg} x)^{\arcsen x} \left(\frac{\log \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsen x}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} \right)$.
3. a) $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser o produto de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em $x = 0$, temos

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0.$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0)$, a função é também diferenciável para $x = 0$, ou seja é diferenciável em \mathbb{R} , com derivada $f'(x) = 2x$, se $x > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = -2x$, se $x < 0$.

- b) $f(x) = e^{-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser dada pela composição da função exponencial que é diferenciável em \mathbb{R} e $|x|$, que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em $x = 0$, tem-se $f'_e(0) = 1$ e $f'_d(0) = -1$ (justifique!), logo f não é diferenciável em 0.
- c) $f(x) = \log |x|$ é diferenciável no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por ser dada pela composição de \log , que é diferenciável no seu domínio \mathbb{R}^+ e $|x|$ que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- d) $f(x) = e^{x-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (como em b)). Em $x = 0$, $f'_d(0) = 0$, $f'_e(0) = 2$ (justifique!), logo f não é diferenciável em 0.
4. a) $\log(x \operatorname{sh} x)$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, domínio de diferenciabilidade $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(\log(x \operatorname{sh} x))' = \frac{\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x}{x \operatorname{sh} x}$.
- b) $\arcsen(\operatorname{arctg} x)$: domínio $[-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1]$, domínio de diferenciabilidade $]-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1[$, $(\arcsen(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-\operatorname{arctg}^2 x}}$.
- c) $\frac{e^x}{1+x}$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, domínio de diferenciabilidade $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $(\frac{e^x}{1+x})' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.
5. $f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$;
 $f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$.
 (Nota: Logo f é contínua mas não diferenciável em 0.)
6. Para calcularmos as derivadas laterais, é necessário determinar primeiro $f(0)$. Como f é contínua em 0, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

e portanto $f(0) = 0$.

(Também podíamos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{e^{-\frac{1}{x}} + 1}{2e^{-\frac{1}{x}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0.)$$

Agora,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} + 1}{2e^{-\frac{1}{x}} + 1} = 1,$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

(Nota: De novo, f é contínua mas não diferenciável em 0.)

7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Para $x \neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis: $x \mapsto x^2$ que é uma função polinomial, e $x \mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ que é a composta de uma função trigonométrica, diferenciável em \mathbb{R} , com $\frac{1}{x}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos para $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ porque não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(e uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (justifique!)).

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Logo f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

8. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em \mathbb{R} e sen também:

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x) \cos x + \cos(f(x))f'(x).$$

Logo, dado que $f(0) = f(\pi) = 0$, temos $g'(0) = f'(\operatorname{sen} 0) \cos 0 + \cos(f(0))f'(0) = f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$ e $g'(\pi) = f'(\operatorname{sen} \pi) \cos \pi + \cos(f(\pi))f'(\pi) = -f'(0) + f'(\pi)$. Então,

$$g'(0) + g'(\pi) = 2f'(0) - f'(0) + f'(\pi) = f'(0) + f'(\pi).$$

9. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em \mathbb{R} e arctg também,

$$(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{1 + f^2(x)} f'(x) + f'(\operatorname{arctg} x) \frac{1}{1 + x^2}.$$

10. Do teorema de derivação da função composta, para $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = e^{g(\log x)} (g(\log x))' = e^{g(\log x)} g'(\log x) \frac{1}{x}.$$

Logo,

$$\varphi'(1) = e^{g(0)} g'(0).$$

Derivando φ' , temos

$$\varphi''(x) = e^{g(\log x)} \frac{1}{x^2} \left((g'(\log x))^2 - g'(\log x) + g''(\log x) \right).$$

Logo,

$$\varphi''(e) = e^{g(1)-2} \left((g'(1))^2 - g'(1) + g''(1) \right).$$

11.

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) f'(x) \\ &= g'(x^4 e^{-x}) (4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x}) \\ &= g'(x^4 e^{-x}) x^3 e^{-x} (4 - x). \end{aligned}$$

12. a) \arcsen é diferenciável em $] - 1, 1[$ e g é diferenciável em \mathbb{R} , logo em $] - 1, 1[$, f é dada pela composição de funções diferenciáveis e é assim diferenciável. Temos

$$f'(x) = g'(\arcsen x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = g'(0) \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

b) Como g é estritamente monótona e \arcsen é injectiva, temos que f também será injectiva. Pelo Teorema de derivação da função inversa,

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))},$$

se $f'(f^{-1}(2)) \neq 0$. Como $f(0) = g(0) = 2$, temos $f^{-1}(2) = 0$, e $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$, logo $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

13. a) Uma vez que \arcsen é diferenciável em $] - 1, 1[$ e f é diferenciável em \mathbb{R} com contradomínio $] - 1, 1[$, a função composta será também diferenciável em \mathbb{R} . Por outro lado, f é bijectiva, em particular injectiva, e \arcsen é também injectiva. Conclui-se que a composta será uma função injectiva.

Temos

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}.$$

Logo $g'(2) = -\frac{f'(2)}{\sqrt{1-f(2)^2}} = -2$.

Do Teorema de derivação da função inversa, temos agora que

$$(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

Como $g(2) = \arcsin(f(2)) = \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$, temos $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, ou seja $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2}$.

- b) O domínio de g^{-1} é o contradomínio de g . Como f é sobrejectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ e

$$D_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \arcsin(]-1, 1[) =]0, \pi[.$$

Uma vez que g^{-1} é injectiva e contínua, será monótona, e portanto

$$g^{-1}(0^+) < g^{-1}(x) < g^{-1}(\pi^-)$$

e g^{-1} não terá máximo nem mínimo. Aliás, o contradomínio de g^{-1} é o domínio de g , ou seja, \mathbb{R} , e assim g^{-1} não é limitada.

14. a) i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1;$

iv) $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x;$

v) De i) e iv), temos $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$. Logo, $\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$.

- b) Resulta directamente da definição.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

- d) $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ são contínuas e diferenciáveis no seu domínio \mathbb{R} , uma vez que a função exponencial o é. Tem-se

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \operatorname{sh} x.$$

- e) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, logo sh é estritamente crescente em \mathbb{R} , e não tem extremos.

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x > 0$ para $x > 0$ e $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x < 0$ para $x < 0$. Logo $\operatorname{ch} x$ é decrescente em $] -\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$, tendo um ponto de mínimo absoluto em 0, $\operatorname{ch} 0 = 1$.

- f) Temos $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente crescente, logo a sua inversa $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh} x = y &\Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Como $e^y > 0$, temos

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Para argch, é semelhante, sendo que temos de restringir ch a $y \geq 0$.

15. a) Verdadeira, uma vez que f sendo diferenciável em $]0, 1[$ será também contínua em qualquer intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, para $n \geq 2$. Logo, pelo Teorema de Weierstrass tem máximo e mínimo no intervalo fechado $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.
- b) Falsa: por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x}$ verifica $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ e f não é limitada (justifique!).
- c) Verdadeira: para $n \geq 2$, f é contínua em $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ e diferenciável em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, com $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Logo, do Teorema de Rolle, f' tem um zero em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
16. Note-se primeiro que o gráfico de f cruza a recta $y = x$ em três pontos sse a equação $f(x) = x$ tem três soluções. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Então, g tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle, g' tem pelo menos dois zeros e g'' tem pelo menos um zero. Mas

$$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g''(x) = f''(x).$$

Logo f'' tem pelo menos um zero.

17. Seja $f(x) = 3x^2 - e^x$. Então f é contínua e diferenciável em \mathbb{R} . Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -1$$

conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que f tem um zero em $] - \infty, 0[$. Por outro lado,

$$f(1) = 3 - e > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

logo, de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, f tem um zero em $]0, 1[$ e também terá um zero em $]1, +\infty[$. Conclui-se que f tem pelo menos 3 zeros.

Para vermos que não pode ter mais do que 3 zeros, calculamos as suas derivadas:

$$f'(x) = 6x - e^x, \quad f''(x) = 6 - e^x.$$

Como e^x é injectiva, f'' tem um único zero. Logo, do Teorema de Rolle, f terá no máximo três zeros.

18. Se $f(n) = (-1)^n$, então $f(n+1) - f(n) = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}$. Agora, como f é diferenciável em \mathbb{R}^+ , é contínua em $[n, n+1]$ e diferenciável em $]n, n+1[$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Lagrange temos então que existe $c_n \in]n, n+1[$ tal que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) \Leftrightarrow f'(c_n) = 2(-1)^{n+1}$$

e concluímos que $f'(c_n)$ é uma sucessão divergente (tem dois sublimites, -2 e 2). Como $n < c_n < n+1$, temos que $c_n \rightarrow +\infty$, logo f' não tem limite no infinito (se tivesse, $f'(c_n)$ seria convergente).

19. A função g será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto será crescente em \mathbb{R}^+ se $g'(x) \geq 0$ para $x > 0$. Temos

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow xf'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$$

(note-se que $x > 0$). Agora, aplicando o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[0, x]$, temos que, como $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c)$$

para algum $c \in]0, x[$. Como f' é crescente, $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$.

20. Se $a < 0$ e $b > 0$ são as soluções não-nulas de $f(x) = x^2$, temos $f(b) = b^2$, $f(a) = a^2$ e também $f(0) = 0$. Aplicando o Teorema de Lagrange nos intervalos $[a, 0]$ e $[0, b]$, temos que existem $c_1 \in]a, 0[$, $c_2 \in]0, b[$ tais que

$$\frac{f(a)}{a} = f'(c_1), \quad \frac{f(b)}{b} = f'(c_2),$$

ou seja, $f'(c_1) = a < 0$ e $f'(c_2) = b > 0$. Como f' é contínua (f é de classe C^1), temos do Teorema do Valor Intermédio que existe $d \in]c_1, c_2[$ tal que $f'(d) = 0$.

21. a) $\frac{x}{x^2+1}$: (estritamente) crescente¹ em $[-1, 1]$, (estritamente) decrescente em $] -\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$, ponto de mínimo em -1 , ponto de máximo em 1 , que são absolutos uma vez que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, $f(-1) = -1/2$ e $f(1) = 1/2$;
- b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$: crescente em $[-2, 0[$, decrescente em $] -\infty, -2]$ e em $]0, +\infty[$, ponto de mínimo em -2 , que é absoluto, uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ e $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$.

¹Neste e noutros esboços de solução dos exercícios aplica-se, geralmente sem explicações adicionais, o seguinte raciocínio muito útil: se f é uma função diferenciável num intervalo aberto, com derivada positiva (resp. negativa), e contínua no respectivo intervalo fechado então f é estritamente crescente (resp. decrescente) no intervalo fechado. Além disso o advérbio *estritamente* será omitido pois do contexto tal é geralmente óbvio.

- c) $|x^2 - 5x + 6|$: crescente em $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ e em $[3, +\infty[$, decrescente em $] - \infty, 2]$ e em $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$, pontos de mínimo em 2, 3, absolutos uma vez que $|x^2 - 5x + 6| > 0$, para $x \neq 2, 3$, e ponto de máximo em $\frac{5}{2}$, local uma vez que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x^2 - 5x + 6| = +\infty$. (Nota: $|x^2 - 5x + 6|$ não é diferenciável em 2 e 3.)
- d) $x \log x$: crescente em $[e^{-1}, +\infty[$, decrescente $]0, e^{-1}]$, ponto de mínimo em e^{-1} , absoluto.
- e) e^{-x^2} : crescente em $] - \infty, 0]$, decrescente em $[0, +\infty[$, ponto de máximo em 0, absoluto.
- f) $\frac{e^x}{x}$: crescente em $[1, +\infty[$, decrescente em $] - \infty, 0[$ e em $]0, 1]$, ponto de mínimo em 1, relativo uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$.
- g) xe^{-x} : crescente em $] - \infty, 1]$, decrescente em $[1, +\infty[$, ponto de máximo em 1 que é absoluto.
- h) $\arctg x - \log \sqrt{1+x^2}$: crescente em $] - \infty, 1]$, decrescente em $[1, +\infty[$, ponto de máximo em 1, que é absoluto.

22. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Escrevendo $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que podemos resolver usando a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Como a função é par, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

- b) A função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é diferenciável em \mathbb{R} e $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis, sendo portanto diferenciável. Para $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{-\frac{x^2}{2}} = -1.$$

Logo, $f'_d(0) \neq f'_e(0)$ e f não é diferenciável em 0. Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e neste caso

$$f'(x) = \begin{cases} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2), & \text{se } x > 0, \\ \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Usamos a alínea anterior.

Para $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 1, \end{aligned}$$

logo f é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $[1, +\infty[$.

Para $x < 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \vee x > 1) \wedge x < 0 \Leftrightarrow x < -1 \\ f'(-1) &= 0 \end{aligned}$$

logo f é crescente em $] -\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0]$.

Conclui-se que 1 e -1 são pontos de máximo, absolutos uma vez que $f(-1) = f(1)$. Como f é decrescente em $[-1, 0]$ e crescente em $[0, 1]$, temos também que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, para $x \neq 0$.

d) Temos da alínea anterior que f tem um máximo absoluto em 1, com $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ e um mínimo absoluto em 0 com $f(0) = 0$, logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, e^{-\frac{1}{2}}]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, temos também, do Teorema do Valor Intermediário, que $[0, e^{-\frac{1}{2}}] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

23. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Se g tem derivada finita em 0, será contínua em 0, logo $g(0) = g(0^+) = g(0^-)$, ou seja,

$$g(0) = 1 + \beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

logo $\beta = \frac{\pi}{4} - 1$. Por outro lado, g é diferenciável em 0 logo $g'_e(0) = g'_d(0)$ e temos

$$\begin{aligned} g'_e(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + \alpha x + \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} + \alpha = \alpha + 1, \\ g'_d(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} = 0 \end{aligned}$$

(onde se usou a Regra de Cauchy na indeterminação $\frac{0}{0}$) logo $\alpha = -1$.

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x + \frac{\pi}{4} - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(e^x + e^{-x} - 1) = \frac{\pi}{2}$$

(Justifique!).

c) g é diferenciável em \mathbb{R} (justifique) e

$$g'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

d) Temos para $x \leq 0$: $g'(x) = e^x - 1 < 0$ para qualquer $x < 0$ e $g'(0) = 0$. Logo g é decrescente em $] - \infty, 0]$.

Para $x > 0$: $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Logo g é crescente em $]0, +\infty[$. Conclui-se que 0 é um ponto de mínimo, absoluto usando a continuidade de g em 0.

e) Da alínea anterior temos que $g(0) = \frac{\pi}{4}$ é um mínimo absoluto, logo $g(x) \geq \frac{\pi}{4}$ para qualquer x e $g(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$. Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ e g é contínua em $] - \infty, 0]$. Conclui-se do Teorema do Valor Intermediário que $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[\subset g(\mathbb{R})$.

Logo o contradomínio de g é $g(\mathbb{R}) = \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$.

24. $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Escrevendo $-xe^{x-1} = \frac{-x}{e^{1-x}}$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ a que podemos aplicar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0.$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

b) A função é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ por ser dada nesse conjunto pelo produto de duas funções diferenciáveis: $|x|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $e^{-|x-1|}$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (por ser a composta de duas funções: exponencial diferenciável em \mathbb{R} e $|x-1|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). Em $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{xe^{-x+1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-x+1}(1 - x) = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$) e da mesma forma,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{xe^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1}(1 + x) = 2.$$

Logo, $f'_d(1) = 0 \neq f'_e(1) = 2$ e f não é diferenciável em 1.

No ponto 0, pode ver-se (justifique!) que $f'_d(0) = e^{-1} \neq f'_e(0) = -e^{-1}$, logo f não é diferenciável em 0, e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} (xe^{-x+1})' = e^{-x+1}(1 - x), & \text{se } x > 1, \\ (xe^{x-1})' = e^{x-1}(1 + x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ (-xe^{x-1})' = -e^{x-1}(1 + x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Temos (justifique!): $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, estudando o sinal de f' e usando a continuidade de f ,

- f crescente em $] -\infty, -1]$ e em $[0, 1]$,
- f decrescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$.

Logo, -1 é ponto de máximo, 0 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Como $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ para $x \neq 0$, 0 é mínimo absoluto. Por outro lado, $f(1) = 1$ e $f(-1) = e^{-2} < 1$, logo 1 é ponto de máximo absoluto, e consequentemente, -1 é ponto de máximo relativo.

d) Da alínea anterior, temos que $0 = f(0)$ é mínimo absoluto de f e $1 = f(1)$ é máximo absoluto de f . Logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, do Teorema do Valor Intermédio, $[0, 1] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

25. $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 \operatorname{arctg} |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \pi = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \operatorname{arctg} |x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \pi = +\infty.$$

b) A função arctg é diferenciável em \mathbb{R} e a função $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, $\operatorname{arctg} |x|$ é dada pela composição de funções diferenciáveis, e é portanto diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e também o será $f(x)$.

Quanto a $x = 0$:

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + x^2} = 3$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ resultante de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x}$.) Por outro lado,

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \frac{2 \operatorname{arctg}(-x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{1 + x^2} = -1.$$

Logo, como $f'_d(0) \neq f'_e(0)$, f não é diferenciável em 0.

Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x > 0, \\ 1 - \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- c) Para $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{2}{1+x^2} > 0$ para qualquer x , logo f é crescente em $]0, +\infty[$.
Para $x < 0$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$. Temos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

e, como $1 + x^2 > 0$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$, ou seja, f é crescente em $] - \infty, -1]$, e $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$, ou seja f é decrescente em $] - 1, 0[$.

Conclui-se assim que -1 é ponto de máximo, relativo uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Por outro lado, como f é contínua e decrescente em $] - 1, 0[$, crescente em $]0, +\infty[$, temos que 0 é ponto de mínimo, de novo relativo uma vez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- d) Temos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $f(0) = 0$, e temos um máximo relativo em -1 com $f(-1) = -1 + 2 \operatorname{arctg} 1 = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$. Como f é crescente e contínua em $] - \infty, -1]$ temos que, pelo Teorema do Valor Intermédio, $f(]-\infty, -1]) =]-\infty, -1 + \frac{\pi}{2}]$. Por outro lado, como f é decrescente e contínua em $[-1, 0]$ temos que $f([-1, 0]) = [0, -1 + \frac{\pi}{2}]$. Logo $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, -1 + \frac{\pi}{2}]$.

26. Do teorema de derivação da função composta,

$$\begin{aligned} (\varphi(x))' &= (2 \operatorname{tg}(g(x)) - g(x))' \\ &= (2 + 2 \operatorname{tg}^2(g(x)))g'(x) - g'(x) \\ &= g'(x)(2 \operatorname{tg}^2(g(x)) + 1). \end{aligned}$$

Logo $\varphi'(0) = 0$. Como $g'(0) = 0$ e g' é estritamente monótona, temos que g' muda de sinal numa vizinhança de 0 (se g' é crescente, $g'(x) < g'(0) = 0$, para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$) e portanto, como $2 \operatorname{tg}^2(g(x)) + 1 > 0$ para qualquer x , φ' também muda de sinal numa vizinhança de 0. Conclui-se que $\varphi(0)$ é extremo de φ (mínimo, se g' for crescente).

27. a) Como $xf'(x) > 0$ para $x \neq 0$, temos que para $x > 0$, $f'(x) > 0$, ou seja f é crescente em $]0, \epsilon[$, e para $x < 0$, $f'(x) < 0$, ou seja f é decrescente em $] - \epsilon, 0[$. Como f é contínua em 0, 0 é um ponto de mínimo local.

Se f é diferenciável em 0 então $f'(0) = 0$, uma vez que 0 é ponto de extremo.

- b) Por exemplo, a função $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $f'(x) = 2x$, e satisfaz $xf'(x) > 0$ para $x \neq 0$. Mas 0 não é ponto de extremo, uma vez que para $x < 0$, $f(x) > f(0)$ e para $x > 0$, $f(x) < f(0)$.

28. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log a \cdot a^x - \log b \cdot b^x = \log a - \log b = \log \frac{a}{b}. \quad (4.1)$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de Cauchy (duas vezes):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{x+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1.$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} (\log x \cdot \log \log x)$ é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log x \cdot \log \log x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log \log x}{\frac{1}{\log x}}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log \log x}{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x \log x}}{-\frac{1}{x \log^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\log x = 0.$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}},$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

(Nota: a Regra de Cauchy aplicada directamente a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ não simplifica a questão. . .)

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{-1/x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$.

(Note que a Regra de Cauchy *não* é aplicável!)

f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\log \log x}$ é uma indeterminação do tipo 1^∞ . Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\log \log x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\log(x^{\log \log x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\log \log x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \log \log x \log x}.$$

Agora, de c), $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log \log x \log x = 0$ logo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\log \log x} = e^0 = 1.$$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0 . Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-1} \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} \log x}.$$

Agora, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} \log x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1.$$

29. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 5^x}{x} = \log 2$ (ver 4.1).

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$.

(Note que não existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'}'$ logo a Regra de Cauchy não é aplicável.)

30. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (duas vezes):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log 2 \cdot 2^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log 2)^2 \cdot 2^x}{2} = +\infty.$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} 2^x = 0 \cdot 0 = 0$.

31. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0 . Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log \sin x}.$$

Temos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \log \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \sin x}{\frac{1}{\sin x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \sin x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0.$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0 . Temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log \log x}.$$

Agora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log \log x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \log x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \log x} = 0$$

$$\text{logo } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

32. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$ (justifique!).

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1}$ (justifique!).

33. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0 . Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{sen} x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \log x}.$$

Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \log x$, que é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Escrevendo $\operatorname{sen} x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e podemos usar a Regra de Cauchy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

Pela definição de limite, como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, temos agora

$$\lim \left(\frac{1}{n} \right)^{\operatorname{sen} \frac{1}{n}} = 1.$$

34. a) $f(x) = e^{2x}$: $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f'''(x) = 8e^{2x}$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}e^{2\xi}x^3,$$

em que ξ está entre 0 e x . A fórmula de Taylor, de ordem 2, relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^{2\xi}(x-1)^3, \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x .

$f(x) = \log(1+x)$: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\xi)^3}x^3,$$

em que ξ está entre 0 e x . A fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ = \log 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\xi)^3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x .

$f(x) = \cos(\pi x)$: $f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$, $f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x)$, $f'''(x) = \pi^3 \sin(\pi x)$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^3}{6} \sin(\pi\xi)x^3,$$

em que $\xi \in]0, x[$ ou $\xi \in]x, 0[$. A fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{6} \sin(\pi\xi)(x-1)^3 \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x .

b) $f(x) = e^{2x}$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left| \frac{4}{3} e^{2\xi} x^3 \right| \leq \frac{4e^2}{3}.$$

$f(x) = \log(1+x)$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left| \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\xi)^3} x^3 \right| \leq \frac{1}{3}.$$

$f(x) = \cos(\pi x)$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left| \frac{\pi^3}{6} \sin(\pi\xi) x^3 \right| \leq \frac{\pi^3}{6}.$$

36. A fórmula de MacLaurin da função exponencial, de ordem 2 é dado por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + r_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

em que $r_2(x) = \frac{e^\xi}{3!} x^3$, com ξ entre 0 e x . Então, para $x \in [0, 1]$ temos

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \right| = |r_2(x)| = \frac{e^{-\xi}}{3!} |x|^3 \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

37. Sendo a exponencial uma função indefinidamente diferenciável, em \mathbb{R} , temos que g é uma função de classe C^2 num vizinhança de 0 com

$$g(x) = f(e^x), \quad g'(x) = f'(e^x) e^x, \quad g''(x) = f''(e^x) e^x + f'(e^x) e^{2x}.$$

Em particular temos

$$g(0) = f(1), \quad g'(0) = f'(1), \quad g''(0) = f'(1) + f''(1).$$

Atendendo ao polinómio de Taylor de f , de ordem 2, relativo ao ponto 1 obtemos $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 4$ e consequentemente

$$g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2} x^2 = 2 - x + \frac{3}{2} x^2$$

é o polinómio de Maclaurin de g , de ordem 2.

38. Nas condições dadas, $f \in C^n(\mathbb{R})$. A fórmula de MacLaurin de f , de ordem $n - 1$ é dada por

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + r_{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sendo $f^{(n)}(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a fórmula do resto de Lagrange permite concluir que

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

em particular que f é um polinómio de grau menor que n .

39. Dado que $f \in C^2(I)$ a fórmula de Taylor de f , de ordem 1, relativa a um ponto $a \in I$ é

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2} (x - a)^2, \quad \forall x \in I,$$

em que ξ está entre a e x . Tomando $h > 0$ temos, para $x = a + h$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2} h$$

e para $x = a - h$

$$\frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -f'(a) + \frac{f''(\xi_2)}{2} h$$

em que $\xi_1, \xi_2 \in]a-h, a+h[\setminus \{a\}$. Resulta da igualdade

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2},$$

do facto de $\xi_1, \xi_2 \rightarrow a$, quando $h \rightarrow 0$, e da continuidade de f'' no ponto a , o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

41. Dado que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (\arctg x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^4}\right)' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

$$f'''(x) = 8x^3 \frac{3x^4 - 5}{(1+x^4)^3}.$$

Sendo 0 o único ponto crítico de f , ou seja solução de $f'(x) = 0$, a segunda derivada $f''(0) = 1 > 0$ mostra que f tem um mínimo no ponto 0. Atendendo a que $f(0) = 0$ e f é não negativa 0 é um mínimo absoluto.

Os pontos de inflexão de f são as soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso $\pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Tal facto decorre de $f'''(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}) \neq 0$.

42. Dado que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (x^4 e^{-x})' = x^3 (4-x) e^{-x}, \quad f''(x) = x^2 (12-8x+x^2) e^{-x},$$

$$f'''(x) = x (24-36x+12x^2-x^3) e^{-x},$$

$$f^{(4)}(x) = (24-96x+72x^2-16x^3+x^4) e^{-x}.$$

Os pontos críticos de f , i.e. as solução de $f'(x) = 0$, são 0 e 4. A função é estritamente crescente no intervalo $]0, 4[$ e estritamente decrescente nos intervalos $] -\infty, 0[$ e $]4, +\infty[$ porque, em tais intervalos, a função f' é, respectivamente, positiva e negativa.

A segunda derivada $f''(4) = -64e^{-4} < 0$ mostra que f tem um máximo local no ponto 4, enquanto que as derivadas de ordem 3 e 4, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ revelam que f tem um mínimo local no ponto 0.

Os pontos de inflexão de f são soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em 2 e 6. Tal facto decorre de $f^{(3)}(2) = -16e^{-2} \neq 0$ e $f^{(3)}(6) = 48e^{-6} \neq 0$.

Os limites de f em $\pm\infty$ existem, em $\overline{\mathbb{R}}$, e são dados por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 e^{-x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

O gráfico de f pode agora ser esboçado:

