Cálculo Diferencial e Integral I

6ª Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciabilidade

---

1. Determine os seguintes limites:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$ *c)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ *d)* $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$

2. Calcule

   a) $\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ *b)* $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ *c)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2 e^{\ln^2 x}}$ *d)* $\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{\coth x}$

3. Seja $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) + 1$

   a) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de x.

   b) Determine um majorante para o erro que se comete em $[-1/2, 1/2]$ ao aproximar f pelo polinómio indicado em a).

4. Prove que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então g não pode ter mais do que dois pontos de extremo local. Admitindo agora que g tem de facto extremos locais em α e β, com $\alpha < \beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.
   Escreva a fórmula de Taylor para g e com resto de Lagrange de segunda ordem e aproveite-a para mostrar que $g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^{1-x^2}$

   a) Estude a função f do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade. Em cada ponto em que f não seja diferenciável, calcule as derivadas laterais.

   b) Complete o estudo da função f, considerando em particular os aspectos seguintes: crescimento, extremos, concavidade, inflexões e assíntotas. Esboce o gráfico da função f.