.

Exercícios de Álgebra Linear

Mestrado Integrado em Engenharia do Ambiente

Mestrado Integrado em Engenharia Biológica

Nuno Martins

Departamento de Matemática

Instituto Superior Técnico

Setembro de 2010

Índice

1^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas (Sistemas de equações lineares)

1. Quais das seguintes equações são equações lineares em x, y e z ?

   (a) $\pi^3 x + \sqrt{3}y + z = 1$ **(b)** $\frac{1}{2}x + z = 0$ **(c)** $x^{-1} + 3y - z = 2$ **(d)** $x - yz = 1$

2. Diga qual dos seguintes pontos: $(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1)$ é a solução do seguinte sistema de equações lineares nas variáveis x, y.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 3 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

3. Diga quais dos seguintes pontos: $(0,0,0,0), (1,-1,1,0), (1,-1,1,2), \left(3,-9,7,\frac{\sqrt[3]{\pi}}{2}\right)$ são soluções do sistema de equações lineares nas variáveis x, y, z e w.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

4. Determine valores para x, y, z e w de modo a que nas reacções químicas seguintes os elementos químicos envolventes ocorram em iguais quantidades em cada lado da respectiva equação.

   (a) $x\mathbf{C_3H_8} + y\mathbf{O_2} \to z\mathbf{CO_2} + w\mathbf{H_2O}$ **(b)** $x\mathbf{CO_2}+\mathbf{yH_2O} \to z\mathbf{C_6H_{12}O_6} + w\mathbf{O_2}$

5. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss.

   (a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$ **(e)** $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$ **(g)** $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

   (h) $\begin{cases} x + 2y \ - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w = 10 \end{cases}$ **(i)** $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$

   (j) $\begin{cases} 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 100x_2 + 150x_3 - 200x_4 = 50 \end{cases}$ **(k)** $\begin{cases} x - 2y + 3z - w = 1 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ -3x + 6y - 9z + 3w = -6 \end{cases}$

6. Discuta em função do parâmetro real α os seguintes sistemas de equações lineares (nas variáveis x, y e z) quanto à existência ou não de solução (isto é, determine os valores (reais) de α para os quais os seguintes sistemas de equações lineares: **(i)** tenham solução única, **(ii)** não tenham solução, **(iii)** tenham mais do que uma solução.) Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

(a) $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y + 8z = 3 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} x + y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases}$ **(e)** $\begin{cases} -x + y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - 2\alpha z = \alpha \\ -\alpha x + \alpha y + z = -1 + 2\alpha \end{cases}$

7. Discuta a existência ou não de solução dos seguintes sistemas de equações lineares em termos dos parâmetros reais α e β. Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

(a) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2z + \alpha w = \beta \\ x + y + z + 3w = 1 \\ 2x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 3z + 14w = 4 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} \alpha x + y - z + \alpha w = 0 \\ x - 2y + 2z + w = 1 \\ x - y + z + (\alpha + 1)\, w = \beta \end{cases}$

8. Determine as condições a que a, b e c devem obedecer de forma a que os seguintes sistemas de equações lineares tenham solução:

(a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

9. Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:

(a) $S = \{(1 + t, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$

(b) $S = \{(t, 1 - 2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

(c) $S = \{(3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

(d) $S = \{(3t - s, t + 2s - 1, s - 2t + 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$

(e) $S = \{(2t - 3s, t + s - 1, 2s + 1, t - 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$

(f) $S = \{(1 - s, s - t, 2s, t - 1) : s, t \in \mathbb{R}\}$

(g) $S = \varnothing$

10. **(i)** Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.

(ii) Determine os coeficientes a, b e c da equação da circunferência

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 7), P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$.

Resolução da 1^a Ficha de exercícios

1. As equações das alíneas **(a)** e **(b)** são lineares.

2. O ponto $(1,-1)$ é a solução desse sistema de equações lineares.

3. Os pontos: $(1,-1,1,0)\,,(1,-1,1,2)\,,\left(3,-9,7,\dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{2}\right)$ são soluções desse sistema de equações lineares.

4 (a)

Tem-se $\begin{cases} 3x-z=0\\ 2y-2z-w=0\\ 8x-2w=0\end{cases}$ e assim, $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right] \underset{-\frac{8}{3}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -2 & 0\end{array}\right]$.

Logo, $\begin{cases} 3x-z=0\\ 2y-2z-w=0\\ \frac{8}{3}z-2w=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4}w\\ y=\frac{5}{4}w\\ z=\frac{3}{4}w.\end{cases}$

A solução geral do sistema é: $X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}s\\ \frac{5}{4}s\\ \frac{3}{4}s\\ s\end{bmatrix}$, para qualquer $s\in\mathbb{R}$, isto é, o conjunto solução é dado por: $S=\left\{\left(\frac{1}{4}s,\frac{5}{4}s,\frac{3}{4}s,s\right):s\in\mathbb{R}\right\}$.

Para $s=4$, tem-se a seguinte solução da equação química: $x=1,y=5,z=3,w=4$.

(b) Tem-se $\begin{cases} x-6z=0\\ 2x+y-6z-2w=0\\ 2y-12z=0\end{cases}$ e assim,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0\end{array}\right] \underset{-2L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0\end{array}\right] \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0\end{array}\right].$$

Logo, $\begin{cases} x-6z=0\\ y+6z-2w=0\\ -24z+4w=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=w\\ y=w\\ z=\frac{1}{6}w.\end{cases}$ A solução geral do sistema é $S=\left\{\left(s,s,\frac{1}{6}s,s\right):s\in\mathbb{R}\right\}$.

Para $s=6$, tem-se a seguinte solução para a equação química: $x=6,y=6,z=1,w=6$.

5. (a) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{5}{2}L_1+L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$. Logo, $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -\frac{1}{2}y=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$

A solução geral do sistema é $S=\{(2,-1)\}$.

(b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{3}{2}L_1+L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Logo, $2x+4y=10 \Leftrightarrow x=5-2y$.

A solução geral do sistema é $S=\{(5-2s,s) : s\in\mathbb{R}\}$.

(c) $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 5 \\ -6 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{3}{2}L_1+L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} \end{array}\right]$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S=\varnothing$.

(d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-\frac{3}{2}L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{5}{2}L_1+L_3\to L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -7/2 & 13/2 & -5/2 \\ 0 & -11/2 & 13/2 & 7/2 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{11}{7}L_2+L_3\to L_3]{}$

$\xrightarrow[-\frac{11}{7}L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -7/2 & 13/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & -26/7 & 52/7 \end{array}\right]$.

Logo, $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ -\frac{7}{2}y+\frac{13}{2}z=-\frac{5}{2} \\ -\frac{26}{7}z=\frac{52}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=-2. \end{cases}$ A solução geral do sistema é $S=\{(1,-3,-2)\}$.

(e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -7/2 & 4 & -1/2 \\ 0 & -7 & 8 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[-2L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -7/2 & 4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$.

Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S=\varnothing$.

(f) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[-4L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Logo, $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -y+2z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7z-1 \\ y=2z+2. \end{cases}$

A solução geral do sistema é $S=\{(-7s-1,2s+2,s) : s\in\mathbb{R}\}$.

(g) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -3L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 8 & -8 \end{array}\right] \underset{-\frac{8}{7}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

Logo, $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 7y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$ A solução geral do sistema é $S = \{(3, -1)\}$.

(h) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & -1 & 8 & 10 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -3L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{3}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

Logo, $\begin{cases} x + 2y \; - z + 3w = 3 \\ 6z - 3w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - \frac{5}{2}w + \frac{7}{2} \\ z = \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}. \end{cases}$

A solução geral do sistema é $S = \left\{\left(-2s - \frac{5}{2}t + \frac{7}{2}, s, \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, t\right) : s, t \in \mathbb{R}\right\}$.

(i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-3L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & -5 \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$

$\underset{-\frac{1}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right].$

Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S = \varnothing$.

(j) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 100 & 150 & -200 & 50 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \frac{1}{50}L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$

$\underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \underset{-L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow}$

$\underset{-L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

Logo, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_2 - x_3 + 7x_4 = 3 \\ 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19}{2} - 9x_4 \\ x_2 = \frac{17}{4}x_4 - \frac{5}{2} \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_4 + 2 \end{cases}$

A solução geral do sistema é dada por $S = \left\{\left(\frac{19}{2} - 9s, \frac{17}{4}s - \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}s + 2, s\right) : s \in \mathbb{R}\right\}$.

(k) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & -9 & 3 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{-3L_1+L_2\to L_2 \\ 3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$.

Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S = \varnothing$.

6. (a) Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$[A_\alpha \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -\alpha L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -\alpha L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right] \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(\alpha+2) & 1-\alpha \end{array}\right].$$

Se $\alpha = 1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 1 < 3 =$ n^o de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se $x + y + z = 1$. A solução geral deste sistema é então dada por $S_\alpha = \{(1 - s - t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Se $\alpha = -2$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=2} < \underbrace{\operatorname{car}[A_\alpha \mid B]}_{=3}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S_\alpha = \varnothing$.

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 3 =$ n^o de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e determinado, tendo-se

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ (\alpha - 1)\, y + (1 - \alpha)\, z = 0 \\ (1 - \alpha)(\alpha + 2)\, z = 1 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/(\alpha + 2) \\ y = 1/(\alpha + 2) \\ z = 1/(\alpha + 2). \end{cases}$$

A solução geral do sistema é então dada por $S_\alpha = \left\{\left(\dfrac{1}{\alpha+2}, \dfrac{1}{\alpha+2}, \dfrac{1}{\alpha+2}\right)\right\}$.

(b) Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$[A_\alpha \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & 8 & 3 \end{array}\right] \underset{-2L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-4 & 8-2\alpha & 1 \end{array}\right].$$

Se $\alpha \neq 4$ então $\text{car}\, A_\alpha = \text{car}\, [A_\alpha \mid B] = 2 < 3 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 1 \\ (\alpha - 4)\, y + (8 - 2\alpha)\, z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{2}{\alpha - 4} - (\alpha + 4)\, z \\ \\ y = \dfrac{1}{\alpha - 4} + 2z. \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por $S_\alpha = \left\{ \left(1 - \dfrac{2}{\alpha - 4} - (\alpha + 4)\, s, \dfrac{1}{\alpha - 4} + 2s, s \right) : s \in \mathbb{R} \right\}$.

Se $\alpha = 4$ então $\underbrace{\text{car}\, A_\alpha}_{=1} < \underbrace{\text{car}\, [A_\alpha \mid B]}_{=2}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S_\alpha = \varnothing$.

(c) Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$. $\quad [A_\alpha \mid B_\alpha] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-3L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow}$

$$\underset{\substack{-3L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2 - 3\alpha & \alpha - 6 \\ 0 & 1 & -1 - 2\alpha & -3 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2 - 3\alpha & \alpha - 6 \\ 0 & 0 & -3 + \alpha & 3 - \alpha \end{array}\right].$$

Se $\alpha = 3$ então $\text{car}\, A_\alpha = \text{car}\, [A_\alpha \mid B_\alpha] = 2 < 3 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 7z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 10z \\ \\ y = -3 + 7z. \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por $S_\alpha = \{(8 - \alpha + (2 - 4\alpha)\, s, \alpha - 6 + (3\alpha - 2)\, s, s) : s \in \mathbb{R}\}$.

Se $\alpha \neq 3$ então $\text{car}\, A_\alpha = \text{car}\, [A_\alpha \mid B_\alpha] = 3 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e determinado, tendo-se

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 2 \\ y + (2 - 3\alpha)\, z = \alpha - 6 \\ (-3 + \alpha)\, z = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + 3\alpha \\ y = -4 - 2\alpha \\ z = -1. \end{cases}$$

A solução geral do sistema é então dada por $S_\alpha = \{(6 + 3\alpha, -4 - 2\alpha, -1)\}$.

(d) Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix}$. $\quad [A_\alpha \mid B_\alpha] = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -\alpha L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & \alpha - \alpha^2 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & 1 - \alpha^3 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & \alpha(1-\alpha) \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(\alpha+2) & (1+\alpha)(1-\alpha^2) \end{array}\right].$$

Se $\alpha = 1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\alpha] = 1 < 3 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se $x + y + z = 1$. A solução geral deste sistema é então dada por $S_\alpha = \{(1-s-t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Se $\alpha = -2$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=2} < \underbrace{\operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\alpha]}_{=3}$. O sistema não tem solução (é impossível). $S_\alpha = \varnothing$.

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\alpha] = 3 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e determinado, tendo-se

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha^2 \\ (\alpha - 1)\, y + (1-\alpha)\, z = \alpha(1-\alpha) \\ (1-\alpha)(\alpha+2)\, z = (1+\alpha)(1-\alpha^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -(\alpha+1)/(\alpha+2) \\ y = 1/(\alpha+2) \\ z = (1+\alpha)^2/(\alpha+2). \end{cases}$$

A solução geral do sistema é então dada por $S_\alpha = \left\{\left(-\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}, \dfrac{1}{\alpha+2}, \dfrac{(1+\alpha)^2}{\alpha+2}\right)\right\}$.

(e) $\begin{cases} -x + y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - 2\alpha z = \alpha \\ -\alpha x + \alpha y + z = -1 + 2\alpha \end{cases}$ Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & -2\alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1+2\alpha \end{bmatrix}$.

$$[A_\alpha \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -2\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 & -1+2\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ -\alpha L_1+L_3\to L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha+2 & 0 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(1+\alpha) & -1+\alpha \end{array}\right].$$

Se $\alpha = 1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 2 < 3 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 3y = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 1. \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por

$$S_1 = \{(s, 1, s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\alpha = -2$ então então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 2 < 3 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ -3z = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ z = 1. \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por

$$S_{-2} = \{(s-3, s, 1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\alpha = -1$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=2} < \underbrace{\operatorname{car}[A_\alpha \mid B]}_{=3}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível).

$$S_{-1} = \varnothing.$$

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq -2$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 3 =$ n^o de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e determinado, tendo-se

$$\begin{cases} -x + y + \alpha z = 1 \\ (\alpha + 2)\, y = \alpha + 2 \\ (1 - \alpha)(1 + \alpha)\, z = -1 + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha / (\alpha + 1) \\ y = 1 \\ z = -1/(\alpha + 1). \end{cases}$$

A solução geral do sistema é então dada por

$$S_\alpha = \left\{ \left(-\frac{\alpha}{\alpha + 1}, 1, -\frac{1}{\alpha + 1} \right) \right\}.$$

7. (a) Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & \alpha \end{bmatrix}$ e $B_\beta = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ \beta \end{bmatrix}$. $[A_\alpha \mid B_\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 10 \\ 2 & 7 & -2 & | & 10 \\ 1 & 5 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow}$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 10 \\ 0 & -1 & -8 & | & -10 \\ 0 & 1 & \alpha - 3 & | & \beta - 10 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 10 \\ 0 & -1 & -8 & | & -10 \\ 0 & 0 & \alpha - 11 & | & \beta - 20 \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 11$ e $\beta = 20$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta] = 2 < 3 =$ n^o de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ -y - 8z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -30 + 29z \\ y = 10 - 8z. \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por $S_{\alpha,\beta} = \{(-30 + 29s, 10 - 8s, s) : s \in \mathbb{R}\}$.

Se $\alpha = 11$ e $\beta \neq -20$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=2} < \underbrace{\operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta]}_{=3}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível).

$S_{\alpha,\beta} = \varnothing$.

Se $\alpha \neq 11$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta] = 3 =$ n^o de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e determinado, tendo-se

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ -y - 8z = -10 \\ (\alpha - 11)\, z = \beta - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -(30\alpha - 29\beta + 250)/(\alpha - 11) \\ y = (10\alpha - 8\beta + 50)/(\alpha - 11) \\ z = (\beta - 20)/(\alpha - 11). \end{cases}$$

A solução geral do sistema é então dada por $S_{\alpha,\beta} = \left\{ \left(-\frac{30\alpha - 29\beta + 250}{\alpha - 11}, \frac{10\alpha - 8\beta + 50}{\alpha - 11}, \frac{\beta - 20}{\alpha - 11} \right) \right\}$.

(b) Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 14 \end{bmatrix}$ e $B_\beta = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. $\quad [A_\alpha \mid B_\beta] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 14 & 4 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 3 & 14 & 4 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 3 & 14 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 2 & 11 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{2L_2+L_3 \to L_3 \\ 2L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta \end{array}\right] \underset{-(\alpha-10)L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3(\alpha-10)+\beta \end{array}\right].$$

Se $\beta = 3(\alpha - 10)$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta] = 3 < 4 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema.
Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} x+y+z+3w = 1 \\ -z-5w = 0 \\ w = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7-y \\ z = -15 \\ w = 3. \end{cases}.$$

A solução geral deste sistema é então dada por $S_{\alpha,\beta} = \{(7-s, s, -15, 3) : s \in \mathbb{R}\}$.

Se $\beta \neq 3(\alpha-10)$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=3} < \underbrace{\operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta]}_{=4}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S_{\alpha,\beta} = \varnothing$.

(c) Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$ e $B_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$. $[A_\alpha \mid B_\beta] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha & 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \alpha+1 & \beta \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha+1 & \beta \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & \alpha & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -\alpha L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha+1 & \beta \\ 0 & -1 & 1 & -\alpha & 1-\beta \\ 0 & \alpha+1 & -\alpha-1 & -\alpha^2 & -\alpha\beta \end{array}\right] \underset{(\alpha+1)L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{(\alpha+1)L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & \alpha+1 & \beta \\ 0 & -1 & 1 & -\alpha & 1-\beta \\ 0 & 0 & 0 & (-2\alpha-1)\alpha & \alpha-2\alpha\beta+1-\beta \end{array}\right].$$

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta] = 3 < 4 = \text{n}^o$ de incógnitas do sistema.
Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z+(\alpha+1)\,w=\beta \\ -y+z-\alpha w=1-\beta \\ (-2\alpha-1)\,\alpha w=\alpha+1+(-2\alpha-1)\,\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}-1-\frac{(\alpha+1)^2}{(-2\alpha-1)\alpha}-\frac{\beta}{\alpha} \\ y=z-\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}-1 \\ w=\frac{\alpha+1}{(-2\alpha-1)\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}. \end{array}\right.$$

A solução geral do sistema é então dada por

$$S_{\alpha,\beta}=\left\{\left(-\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}-1-\frac{(\alpha+1)^2}{(-2\alpha-1)\,\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}, s-\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}-1, s, \frac{\alpha+1}{(-2\alpha-1)\,\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}.$$

Se $\alpha=0$ e $\beta=1$ então $\operatorname{car} A_\alpha=\operatorname{car}\left[A_\alpha \mid B_\beta\right]=2<4=\text{n}^o$ de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z+w=1 \\ -y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-w \\ y=z. \end{array}\right.$$

A solução geral deste sistema é então dada por $S_{\alpha,\beta}=\{(1-s,t,t,s): s,t\in\mathbb{R}\}$.

Se ($\alpha=0$ e $\beta\neq 1$) ou $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=2}<\underbrace{\operatorname{car}\left[A_\alpha \mid B_\beta\right]}_{=3}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $S_{\alpha,\beta}=\varnothing$.

8. (a) Sejam $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$ e $B_{a,b,c}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. $[A \mid B_{a,b,c}]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \mid & a \\ 3 & -1 & 2 & \mid & b \\ 1 & -5 & 8 & \mid & c \end{bmatrix} \underset{\substack{-3L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}$

$$\underset{\substack{-3L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \mid & a \\ 0 & -7 & 11 & \mid & b-3a \\ 0 & -7 & 11 & \mid & c-a \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \mid & a \\ 0 & -7 & 11 & \mid & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & \mid & c-b+2a \end{bmatrix}.$$

Para que haja solução é necessário que $\operatorname{car} A=\operatorname{car}\left[A \mid B_{a,b,c}\right]$, isto é, é necessário que

$$c-b+2a=0.$$

(b) Sejam $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B_{a,b,c}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. $[A \mid B_{a,b,c}]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & \mid & a \\ 2 & 3 & -1 & \mid & b \\ 3 & 1 & 2 & \mid & c \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & \mid & a \\ 0 & 7 & -9 & \mid & b-2a \\ 0 & 7 & -10 & \mid & c-3a \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & \mid & a \\ 0 & 7 & -9 & \mid & b-2a \\ 0 & 0 & -1 & \mid & c-b-a \end{bmatrix}.$$

Como $\operatorname{car} A=\operatorname{car}\left[A \mid B_{a,b,c}\right]$, este sistema tem solução para quaisquer valores de a,b,c.

9. (a) Sejam $x = 1 + t$ e $y = 1 - t$. Logo

$$x + y = 2.$$

(b) Sejam $x = t$, $y = 1 - 2t$ e $z = 1$. Tem-se então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

(c) Sejam $x = 3t$, $y = 2t$ e $z = t$. Tem-se então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

(d) Sejam $x = 3t - s$, $y = t + 2s - 1$ e $z = s - 2t + 1$. Logo $s = 3t - x$ e assim

$$y = t + 2(3t - x) - 1 = 7t - 2x - 1 \Leftrightarrow t = \frac{y + 2x + 1}{7}.$$

Deste modo:

$$s = 3\frac{y + 2x + 1}{7} - x = \frac{3y - x + 3}{7}$$

Com

$$s = \frac{3y - x + 3}{7} \quad \text{e} \quad t = \frac{y + 2x + 1}{7}$$

Tem-se então a seguinte equação linear:

$$z = s - 2t + 1 = \frac{3y - x + 3}{7} - 2\frac{y + 2x + 1}{7} + 1.$$

Isto é:

$$5x - y + 7z = 8.$$

(e) Sejam $x = 2t - 3s$, $y = t + s - 1$, $z = 2s + 1$ e $w = t - 1$. Logo $t = w + 1$ e $s = \dfrac{z - 1}{2}$. Assim:

$$\begin{cases} x = 2(w + 1) - 3\dfrac{z - 1}{2} \\ y = w + 1 + \dfrac{z - 1}{2} - 1. \end{cases}$$

Deste modo, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3z - 4w = 7 \\ \\ 2y - z - 2w = -1. \end{cases}$$

(f) Seja $S = \{(1-s, s-t, 2s, t-1) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Sejam $x = 1-s, \quad y = s-t, \;\; z = 2s, \quad w = t-1$. Uma vez que $s = 1-x \quad$ e $\quad t = w+1$, tem-se então o seguinte sistema linear não homogéneo

$$\begin{cases} y = 1 - x - (w+1) \\ z = 2\,(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + w = 0 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

(g) Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \\ x + y = 0. \end{cases}$$

10. (i) Para que o gráfico da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe pelos pontos $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$, é necessário que

$$\begin{cases} p(0) = 10 \\ p(1) = 7 \\ p(3) = -11 \\ p(4) = -14. \end{cases}$$

O que é equivalente a existir solução para o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis a, b, c e d:

$$\begin{cases} d = 10 \\ a + b + c + d = 7 \\ 27a + 9b + 3c + d = -11 \\ 64a + 16b + 4c + d = -14. \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} d = 10 \\ a + b + c = -3 \\ 27a + 9b + 3c = -21 \\ 16a + 4b + c = -6. \end{cases}$$

Atendendo a que:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 27 & 9 & 3 & -21 \\ 16 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{-27L_1 + L_2 \to L_2 \\ -16L_1 + L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -18 & -24 & 60 \\ 0 & -12 & -15 & 42 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{6}L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & -12 & -15 & 42 \end{array}\right] \xrightarrow[-4L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

tem-se

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 2 \\ d = 10. \end{cases}$$

(ii) Para que os pontos $P_1 = (-2, 7), P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$ pertençam à circunferência de equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, é necessário que

$$\begin{cases} (-2)^2 + 7^2 + a(-2) + 7b + c = 0 \\ (-4)^2 + 5^2 + a(-4) + 5b + c = 0 \\ 4^2 + (-3)^2 + 4a + b(-3) + c = 0. \end{cases}$$

O que é equivalente a existir solução para o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis a, b e c:

$$\begin{cases} -2a + 7b + c = -53 \\ -4a + 5b + c = -41 \\ 4a - 3b + c = -25. \end{cases}$$

Atendendo a que:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 1 & -53 \\ -4 & 5 & 1 & -41 \\ 4 & -3 & 1 & -25 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ 2L_1+L_3\to L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 1 & -53 \\ 0 & -9 & -1 & 65 \\ 0 & 11 & 3 & -131 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{11}{9}L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 7 & 1 & -53 \\ 0 & -9 & -1 & 65 \\ 0 & 0 & 16/9 & -464/9 \end{array}\right],$$

tem-se

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \\ c = -29. \end{cases}$$

2^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas (Matrizes)

1. Efectue, sempre que possível, as seguintes operações.

(i) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -\pi \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ -3 & \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iv) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \right)^T$

(ix) $\left(2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right)^T$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}$ **(xi)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine as características e as nulidades das seguintes matrizes reais, identificando os respectivos pivots.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(viii) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **(ix)** $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(x)** $\begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 8 & -4 \\ -1 & -5 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & -10 & 6 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

3. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Em função do parâmetro α, calcule a característica e a nulidade das seguintes matrizes. Em cada alínea, indique ainda (se existirem), justificando, os valores de α para os quais essas matrizes são invertíveis.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha^2-1 \end{bmatrix}$

4. Determine (se existirem) as inversas das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $[1]$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$, com $k \neq 0$ **(x)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$

(xi) $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$ **(xii)** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

5. Seja $A_{\lambda,\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda\mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda+\lambda\mu \end{bmatrix}$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a característica e a nulidade de $A_{\lambda,\mu}$ em função de λ e μ.

(b) Determine os valores dos parâmetros λ e μ para os quais $A_{\lambda,\mu}$ é invertível.

6. Seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 2 & \beta & \beta^2 & 4 \\ -4 & 0 & -\beta^3 & -8 \\ \beta & 0 & \beta^2 & \beta^2 \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a característica e a nulidade de A_β em função do parâmetro β e diga, justificando, quais são os valores de β para os quais A_β é invertível.

(b) Para $\beta = 1$, determine a inversa da matriz A_1.

7. Seja $B_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a característica e a nulidade de $B_{a,b}$ em função de a e b.

(b) Para $a = 1$ e $b = 0$ calcule a matriz inversa da matriz $B_{1,0}$, isto é, $(B_{1,0})^{-1}$.

(c) Determine a solução geral do sistema linear $B_{1,0}X = C$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(d) Para $b = 1$, determine a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$, em que D é o simétrico da 3^a coluna de $B_{a,1}$.

Resolução da 2^a Ficha de exercícios

1. **(i)** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -\pi \end{bmatrix} = [-2\pi - 1]$ **(ii)** Não é possível.

(iii) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ -3 & \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & 3-2\sqrt{5} & 5 \\ \frac{8}{3} & 2-\sqrt{5} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

(iv) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{20}{3} & -2 \end{bmatrix}$ **(v)** Não é possível. **(vi)** Não é possível.

(vii) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -12 & \frac{3}{2} & -6 \end{bmatrix}$

viii) $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -12 & \frac{3}{2} & -6 \end{bmatrix}$

(ix) $\left(2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(x) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -18 \\ \frac{5}{6} & -10 \\ -\frac{7}{6} & -16 \\ -\frac{7}{3} & -3 \end{bmatrix}$

(xi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} & -\frac{7}{3} \\ -18 & -10 & -16 & -3 \end{bmatrix}$

2. **(i)** Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\operatorname{car} A = 0$, $\operatorname{nul} A = 2$. Não existem pivots.

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Assim, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, tem-se $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{nul} A = 1$. Pivots: 1 e 1.

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2 \to L_2 \\ 2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Assim, sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, tem-se $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{nul} A = 0$. Pivots: -1 e -3.

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \underset{\substack{-5L_1+L_2 \to L_2 \\ -9L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Assim, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{nul} A = 2$. Pivots: 1 e -4.

(v) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$

$\underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$

Assim, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, tem-se $\operatorname{car} A = 3$ e $\operatorname{nul} A = 1$. Pivots: $1, 1$ e 3.

(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ -3L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & -12 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3\\ L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -4 & -11 \end{bmatrix}\underset{3L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim, sendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 3 & -2 & -1\\ 2 & 7 & -1 & 9 & 8\\ 3 & 3 & -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$, tem-se car $A=4$ e nul $A=1$. Pivots: $1,3,-1$ e 2.

(vii) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_3\to L_3\\ -4L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 0 & -11 & 5 & -3\\ 0 & -11 & 5 & -3 \end{bmatrix}\underset{\substack{L_2+L_3\to L_3\\ L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, sendo $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 11 & -5 & 3\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, tem-se car $A=2$ e nul $A=2$. Pivots: 1 e 11.

(viii) Sendo $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se car $A=2$ e nul $A=1$. Pivots: 5 e 2.

(ix) $$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, sendo $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, tem-se car $A=1$ e nul $A=2$. Pivot: 1.

(x) $$\begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 8 & -4\\ -1 & -5 & 3 & -4 & 2\\ -2 & -10 & 6 & -8 & 4 \end{bmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2\\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, sendo $A=\begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 8 & -4\\ -1 & -5 & 3 & -4 & 2\\ -2 & -10 & 6 & -8 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se car $A=1$ e nul $A=4$. Pivot: 2.

3. (i) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ -1 & \alpha & \alpha\\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}\underset{L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & \alpha+1\\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & \alpha+1\\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$. Se $\alpha \neq 0$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 3$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$.

Se $\alpha = 0$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 2$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 1$.

Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 0$, uma vez que é só neste caso que $\operatorname{car} A_\alpha =$ n^o de colunas de A_α.

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2-\alpha & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1+2\alpha & 2+2\alpha \\ 0 & -2-4\alpha & -1-3\alpha \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 1+2\alpha & 2(1+\alpha) \\ 0 & 0 & 3+\alpha \end{bmatrix}.$$

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$. Se $\alpha \neq -3$ e $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 3$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$.

Se $\alpha = -3$ ou $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 2$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 1$.

Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \neq -3$ e $\alpha \neq -\dfrac{1}{2}$, uma vez que é só neste caso que $\operatorname{car} A_\alpha =$ n^o de colunas de A_α.

(iii) $$\begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 0 & (1-\alpha)(1+\alpha) & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 2(\alpha+1) \end{bmatrix}.$$

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$. Se $\alpha = -1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 1$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 2$.

Se $\alpha = 1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 2$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 1$.

Se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 3$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$.

Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 1$, uma vez que é só neste caso que $\operatorname{car} A_\alpha =$ n^o de colunas de A_α.

(iv) $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{3L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & 3\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix} \underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix}.$$

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Se $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 3$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 1$.

Se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$ então car $A_\alpha = 4$ e nul $A_\alpha = 0$.

Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -3$, uma vez que é só neste caso que car $A_\alpha =$ n^o de colunas de A_α.

(v) $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(1+\alpha) & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2(\alpha-1) \end{bmatrix}.$$

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. Se $\alpha = 1$ então car $A_\alpha = 2$ e nul $A_\alpha = 2$.

Se $\alpha = -1$ então car $A_\alpha = 3$ e nul $A_\alpha = 1$.

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ então car $A_\alpha = 4$ e nul $A_\alpha = 0$.

Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, uma vez que é só neste caso que car $A_\alpha =$ n^o de colunas de A_α.

(vi) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha^2-1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha+1 & -1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha-1)(\alpha+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha-1)(\alpha+1) \end{bmatrix}.$$

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. Se $\alpha = 1$ então car $A_\alpha = 2$ e nul $A_\alpha = 2$.

Se $\alpha = 0$ então car $A_\alpha = 3$ e nul $A_\alpha = 1$.

Se $\alpha = -1$ então car $A_\alpha = 1$ e nul $A_\alpha = 3$.

Se $\alpha = 1$ então car $A_\alpha = 2$ e nul $A_\alpha = 2$.

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ então car $A_\alpha = 4$ e nul $A_\alpha = 0$.

Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, uma vez que é só neste caso que car $A_\alpha =$ n^o de colunas de A_α.

4. (i) $\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Logo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $[1]^{-1} = [1]$

(iv) $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-3L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2+L_1 \to L_1}{\longrightarrow}$

$\underset{L_2+L_1 \to L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$

Logo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(v) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-4L_1+L_2 \to L_2 \\ -7L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$

$\underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$

Logo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ é singular e como tal não é invertível.

(vi) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{-4L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{2}{3}L_3+L_1 \to L_1}{\longrightarrow}$

$\underset{\frac{2}{3}L_3+L_1 \to L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{3}L_2 \to L_2 \\ -\frac{1}{3}L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$

Logo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(vii) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-4L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{3}{4}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$

$$\xrightarrow[\frac{3}{4}L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -4 & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{2}{3}L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2L_3+L_2\to L_2 \\ -L_3+L_1\to L_1}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{-2L_3+L_2\to L_2 \\ -L_3+L_1\to L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -8 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{8}L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[-2L_2+L_1\to L_1]{}$$

$$\xrightarrow[-2L_2+L_1\to L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array}\right].$$

Logo $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{8}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$

(viii) Para $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(\cos\alpha)L_1\to L_1 \\ (\operatorname{sen}\alpha)L_2\to L_2}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2\alpha & -\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[L_2+L_1\to L_1]{}$$

$$\xrightarrow[L_2+L_1\to L_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[(-\operatorname{sen}^2\alpha)L_1+L_2\to L_2]{}$$

$$\xrightarrow[(-\operatorname{sen}^2\alpha)L_1+L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & -\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha\,(1-\operatorname{sen}^2\alpha) \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}L_2\to L_2]{}$$

$\xrightarrow[\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{array}\right].$ Note que $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \neq 0$ para todo o $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Logo $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, para todo o $\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$

Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = \pi + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Logo, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

(ix) Seja $k \neq 0$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{1}{k}L_1+L_2\to L_2 \\ \frac{1}{k}L_3\to L_3 \\ \frac{1}{k}L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -\frac{1}{k} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{1}{k^2}L_2+L_3\to L_3 \\ \frac{1}{k}L_1\to L_1}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-\frac{1}{k^2}L_2+L_3\to L_3 \\ \frac{1}{k}L_1\to L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -\frac{1}{k} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{1}{k}L_3+L_4\to L_4 \\ \frac{1}{k}L_2\to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{array}\right].$$

Logo $$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} & 0 \\ -\frac{1}{k^4} & \frac{1}{k^3} & -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

(x) Sejam $k_1, k_2, k_3, k_4 \neq 0$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{k_4} L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{k_3} L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{k_2} L_3 \to L_3 \\ \frac{1}{k_1} L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{k_4} L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{k_3} L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{k_2} L_3 \to L_3 \\ \frac{1}{k_1} L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_1}1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\text{Logo} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1}1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(xi) $$\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & -7 & 2 \\ -8 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 2 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 6 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1 + L_2 \to L_2 \\ -\frac{5}{2} L_1 + L_3 \to L_3 \\ 4L_1 + L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_1 + L_2 \to L_2 \\ -\frac{5}{2} L_1 + L_3 \to L_3 \\ 4L_1 + L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 6 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 13 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & \frac{39}{2} & -13 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 26 & -26 & 13 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2 + L_3 \to L_3 \\ 2L_2 + L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[\substack{-L_2+L_3\to L_3\\ 2L_2+L_4\to L_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 6 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 13 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & -13 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}L_1\to L_1\\ -\frac{1}{13}L_2\to L_2\\ \frac{2}{13}L_3\to L_3\\ \frac{1}{13}L_4\to L_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}L_1\to L_1\\ -\frac{1}{13}L_2\to L_2\\ \frac{2}{13}L_3\to L_3\\ \frac{1}{13}L_4\to L_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{2}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-L_4+L_1\to L_1\\ 2L_4+L_3\to L_3}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{-L_4+L_1\to L_1\\ 2L_4+L_3\to L_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -\frac{7}{2} & 0 & 0 & -\frac{2}{13} & \frac{9}{26} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3+L_2\to L_2\\ \frac{7}{2}L_3+L_1\to L_1}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3+L_2\to L_2\\ \frac{7}{2}L_3+L_1\to L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{7}{13} & \frac{5}{13} & \frac{8}{13} & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right] \xrightarrow[-3L_2+L_1\to L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right].$$

Logo
$$\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}^{-1} = \left(\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & -7 & 2 \\ -8 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= 13\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & 0 \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(xii) $$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2L_4+L_3 \to L_3 \\ -\frac{1}{2}L_4+L_2 \to L_2 \\ -L_4+L_1 \to L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}L_3 \to L_3 \\ \frac{1}{2}L_4 \to L_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}L_3 \to L_3 \\ \frac{1}{2}L_4 \to L_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3+L_2 \to L_2 \\ L_3+L_1 \to L_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2+L_1 \to L_1]{}$$

$$\xrightarrow[L_2+L_1 \to L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right].$$

Logo $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

5. $A_{\lambda,\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda\mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda+\lambda\mu \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda\mu \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda+\lambda\mu \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$

$\underset{\substack{-L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & \lambda & \lambda^2+\mu+1 & \lambda\mu \\ 0 & \lambda & \lambda^2+\mu+1 & \lambda+\lambda\mu \end{bmatrix} \underset{\substack{-\lambda L_2+L_3\to L_3 \\ -\lambda L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \mu+1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu+1 & \lambda \end{bmatrix} \underset{-L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$

$\underset{-L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \mu+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$

Se $\mu = -1$ e $\lambda = 0$ então $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{nul} A = 2$.

Se ($\mu = -1$ e $\lambda \neq 0$) ou ($\mu \neq -1$ e $\lambda = 0$) então $\operatorname{car} A = 3$ e $\operatorname{nul} A = 1$.

Se $\mu \neq -1$ e $\lambda \neq 0$ então $\operatorname{car} A = 4$ e $\operatorname{nul} A = 0$.

Assim, $A_{\lambda,\mu}$ é invertível se e só se $\mu \neq -1$ e $\lambda \neq 0$, uma vez que é só neste caso que $\operatorname{car} A_{\lambda,\mu} =$ n^o de colunas de $A_{\lambda,\mu}$.

6. (a) Tem-se

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 2 & \beta & \beta^2 & 4 \\ -4 & 0 & -\beta^3 & -8 \\ \beta & 0 & \beta^2 & \beta^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ 4L_1+L_3\to L_3 \\ -\beta L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \beta & \beta(\beta-2) & 0 \\ 0 & 0 & (2-\beta)(2+\beta)\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\beta-2) \end{bmatrix}.$$

Logo, como $\operatorname{car} A_\beta + \operatorname{nul} A_\beta = 4$,
se $\beta = 0$ então $\operatorname{car} A_\beta = 1$ e $\operatorname{nul} A_\beta = 3$;
se $\beta = 2$ então $\operatorname{car} A_\beta = 2$ e $\operatorname{nul} A_\beta = 2$;
se $\beta = -2$ então $\operatorname{car} A_\beta = 3$ e $\operatorname{nul} A_\beta = 1$;
se $\beta \neq 0$ e $\beta \neq 2$ e $\beta \neq -2$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 4$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$.

Assim, A_β é invertível se e só se $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{-2,0,2\}$, uma vez que é só nestes casos que car $A_\beta =$ n^o de colunas de A_β.

(b) $\left[\begin{array}{c|c} A_1 & I \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ 4L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{2L_4+L_1\to L_1 \\ -\frac{1}{3}L_3+L_1\to L_1 \\ \frac{1}{3}L_3+L_2\to L_2}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{2L_4+L_1\to L_1 \\ -\frac{1}{3}L_3+L_1\to L_1 \\ \frac{1}{3}L_3+L_2\to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_4\to L_4 \\ \frac{1}{3}L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Logo

$$(A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. (a) $B_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow}$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{3}{2}L_1+L_2\to L_2 \\ -L_3+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & -3 & 6 & -\frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{bmatrix}.$$

Se $a = 0$ ou ($a \neq 0$ e $b = 1$) então car $B_{a,b} = 3$ e nul $B_{a,b} = 1$.

Se $a \neq 0$ e $b \neq 1$ então car $B_{a,b} = 4$ e nul $B_{a,b} = 0$.

(b) $[B_{1,0} \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2\to L_2 \\ -L_3+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$

$$\underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2\to L_2 \\ -L_3+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_4+L_2\to L_2 \\ -6L_3+L_1\to L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & -1 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{2}L_2\to L_2 \\ \frac{1}{3}L_1\to L_1}}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}L_1 \to L_1]{\frac{1}{2}L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[2L_3+L_2 \to L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Logo $(B_{1,0})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Como $B_{1,0}$ é invertível,

$$B_{1,0}X = C \Leftrightarrow X = (B_{1,0})^{-1} C \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{3} \\ \\ \frac{19}{3} \\ \\ 3 \\ \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(d) Seja $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$B_{a,1}X = D \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ -a \\ -6 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $B_{a,1}X = D$ é dada por:

$$(\text{Solução particular de } B_{a,1}X = D) + (\text{Solução geral de } B_{a,1}X = \mathbf{0}).$$

O vector $(0, 0, -1, 0)$ é uma solução particular de $B_{a,1}X = D$. Determinemos a solução geral de $B_{a,1}X = \mathbf{0}$.

Tem-se $\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{3}{2}L_2+L_4 \to L_4]{-L_1+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -\frac{3}{2}a \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_1 \leftrightarrow L_2}$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -\frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & -3 & 6 & -\frac{3}{2}a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + ax_4 = 0 \\ -3x_2 + 6x_3 - \frac{3}{2}ax_4 = 0 \\ ax_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x_3 \\ x_2 = \left(2 + \dfrac{a^2}{2}\right) x_3 \\ x_4 = -ax_3 \end{cases}$

Assim, a solução geral de $B_{a,1}X = \mathbf{0}$ é dada por:

$$\left\{(-2s, \left(2+\frac{a^2}{2}\right)s, s, -as) : s \in \mathbb{R}\right\}$$

Logo, a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$ é dada por:

$$\{(0,0,-1,0)\} + \left\{\left(-2s, \left(2+\frac{a^2}{2}\right)s, s, -as\right) : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(-2s, \left(2+\frac{a^2}{2}\right)s, s-1, -as\right) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Resolução Alternativa.

$$[B_{a,1} \mid D] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & a & 1 & -a \\ 2 & 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & -a \\ 3 & 0 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_3\to L_3 \\ -\frac{3}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & a & 1 & -a \\ 2 & 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -\frac{3}{2}a & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2 \\ L_3\leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2 \\ L_3\leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & -a \\ 0 & -3 & 6 & -\frac{3}{2}a & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -\frac{3}{2}a & -6 \\ 0 & 0 & a & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tem-se então
$$\begin{cases} 2x+2y \ +aw = 0 \\ -3y+6z-\dfrac{3}{2}aw = -6 \\ az+w = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z-2 \\ y = \left(\frac{a^2}{2}+2\right)(z+1) \\ w = -a-az \end{cases}$$

Logo, a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$ é dada por:

$$\left\{\left(-2s-2, \left(\frac{a^2}{2}+2\right)(s+1), s, -a-as\right) : s \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(-2s, \left(2+\frac{a^2}{2}\right)s, s-1, -as\right) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

3^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas (Determinante)

1. Classifique quanto à paridade as seguintes permutações de números de 1 a 6:

   (i) (312645) **(ii)** (234516) **(iii)** (654321) **(iv)** (123456)

   (v) (546321) **(vi)** (453261) **(vii)** (634125) **(viii)** (123465)

2. Na expressão do determinante de uma matriz do tipo 6×6 diga qual o sinal que afecta cada uma das seguintes parcelas:

   (i) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ **(ii)** $a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$

   (iii) $a_{54}a_{45}a_{63}a_{32}a_{26}a_{11}$ **(iv)** $a_{16}a_{23}a_{34}a_{41}a_{62}a_{55}$

3. Verifique que

   (i) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\, a_{13}a_{22}a_{31}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

4. Calcule os seguintes determinantes e diga quais são as matrizes singulares:

   (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 18563 & 18573 \\ 21472 & 21482 \end{vmatrix}$ **(iii)** $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$

   (iv) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ **(v)** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **(vi)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

   (vii) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **(viii)** $\begin{vmatrix} 8 & 12 & 8 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **(ix)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **(x)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

   (xi) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **(xii)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ **(xiii)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

   (xiv) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$ **(xv)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **(xvi)** $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$

5. Que condições devem os parâmetros reais a, b e c verificar para que a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

   seja invertível?

6. Verifique que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.

7. Determine todos os valores do escalar λ para os quais a matriz $A - \lambda I$ é singular, onde A é dada por:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

8. Use a fórmula de inversão de matrizes para inverter:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

9. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sem calcular A^{-1} e B^{-1}, determine a entrada $(2, 2)$ de A^{-1} e a entrada $(2, 3)$ de B^{-1}.

10. Use a regra de Cramer para calcular as soluções dos sistemas:

(i) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$ **(ii)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$

11. Sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Verifique que C e D são invertíveis e calcule:

(i) $\det\left(2C^{-1}\right)$ **(ii)** $\det\left(C^3 (2C)^{-1}\right)$ **(iii)** $\det\left(\left(C^T (\operatorname{tr} C)\, C\right)^{-1}\right)$

(iv) $\det\left(C^T \operatorname{tr}\left(\left(\tfrac{1}{4}C\right)^T\right) C^{-2}\right)$ **(v)** $\det\left(-2C^T \left(\left(-\tfrac{2}{3}D^3\right)^{-1}\right) \left(\left(D^T\right)^{-1} C\right)^{-1}\right)$

Sugestão: Sejam $m \in \mathbb{N}$, λ escalar, A, B e S matrizes $n \times n$ com S invertível, tem-se

(a) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ **(b)** $\det(\lambda B) = \lambda^n \det B$ **(c)** $\det\left(A^T\right) = \det A$

(d) $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$ **(e)** $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}\left(B^T\right)$ **(f)** $(\lambda B)^T = \lambda B^T$ **(g)** $S^{-m} = \left(S^{-1}\right)^m$

12. Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule:

(i) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$ **(iii)** $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$ **(v)** $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$

13. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule:

(i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+2 & 2b+1 & 2c \\ a+1 & b+2 & c+1 \end{vmatrix}$ **(iii)** $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix}$

14. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \beta & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+\beta & 2 \end{vmatrix} = 1$, calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \beta & \beta\alpha+\beta^2 & 2\beta \\ \beta\alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix}$.

15. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Verifique que

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

16. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcule o determinante da seguinte matriz do tipo $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \dots & & 1 \\ \vdots & 1 & \lambda+1 & \ddots & & \\ & \vdots & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

17. Verifique que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2).$$

18. Mostre que:

(i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

19. Verifique que

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

20. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ se tem

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

21. Sem calcular o determinante, diga qual o coeficiente de x^3 na expressão

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 9 & 8 & 7 & x \end{vmatrix}.$$

22. Resolva as seguintes equações.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ **(ii)** $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 4 & x & x \\ x & x & 4 & x \\ x & x & x & 4 \end{vmatrix} = 0$ **(iii)** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

23. Sabendo que $533, 715$ e 871 são múltiplos de 13, justifique que $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é também múltiplo de 13, sem calcular o determinante.

24. Sem calcular o determinante, verifique que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 5.

25. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ com n ímpar e tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, ..., n$. Mostre que A não é invertível.

Resolução da 3ª Ficha de exercícios

1.(i) (312645) é par pois tem 4 inversões.
(ii) (234516) é par pois tem 4 inversões.
(iii) (654321) é ímpar pois tem 15 inversões.
(iv) (123456) é par pois tem 0 inversões.
(v) (546321) é ímpar pois tem 13 inversões.
(vi) (453261) é par pois tem 10 inversões.
(vii) (634125) é ímpar pois tem 9 inversões.
(viii) (123465) é ímpar pois tem 1 inversão.

2. (i) (234516) é par pois tem 4 inversões e (312645) é par pois tem 4 inversões. Logo, tem-se

$$+a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$$

uma vez que (234516) e (312645) têm a mesma paridade.

(ii) (123456) é par pois tem 0 inversões e (654321) é ímpar pois tem 15 inversões. Logo, tem-se

$$-a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$$

uma vez que (123456) e (654321) têm paridades diferentes.

(iii) (546321) é ímpar pois tem 13 inversões e (453261) é par pois tem 10 inversões. Logo, tem-se

$$-a_{54}a_{45}a_{63}a_{32}a_{26}a_{11}$$

uma vez que (546321) e (453261) têm paridades diferentes.

(iv) (123465) é ímpar pois tem 1 inversão e (634125) é ímpar pois tem 9 inversões. Logo, tem-se

$$+a_{16}a_{23}a_{34}a_{41}a_{62}a_{55}$$

uma vez que (123465) e (634125) têm a mesma paridade.

3. (i) (123) é par pois tem 0 inversões e (321) é ímpar pois tem 3 inversões. Atendendo à definição de determinante, tem-se

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\, a_{13}a_{22}a_{31}$$

uma vez que (123) e (321) têm paridades diferentes.

(ii) (1234) é par pois tem 0 inversões e (4321) é par pois tem 6 inversões. Atendendo à definição de determinante, tem-se

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

uma vez que (1234) e (4321) têm a mesma paridade.

4. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(ii) $\begin{vmatrix} 18563 & 18573 \\ 21472 & 21482 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18563 & 10 \\ 21472 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18563 & 10 \\ 2909 & 0 \end{vmatrix} = -29090 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(iii) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 - 2 - (4-3) = -2 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(iv) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\operatorname{sen}^2\theta) = 1 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(v) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 5 - (-15) = 8 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(vi) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 18 + 10 - 4 - 15 - (-6) = 13 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(vii) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{por (vi)}}{=} -13 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(viii) $\begin{vmatrix} 8 & 12 & 8 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{por (vi)}}{=} 52 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(ix) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, logo a matriz é singular.

(x) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(xi) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(xii)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\,[-6 + 1 + (-2) - (-1) - (-2) - 6] + 2\,[1 + 12 - 2 - 2] = 20 + 18 = 38 \neq 0,$$

logo a matriz é não singular.

(xiii) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{por (xi)}}{=} 30 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(xiv) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$
$= 0$, logo a matriz é singular.

(xv) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \left[4(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right] =$
$= 120 \neq 0$, logo a matriz é não singular.

(xvi) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a^5 + b^5 \neq 0$ se e só se $a \neq -b$, logo a matriz é não singular se e só se $a \neq -b$.

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. A matriz A é invertível se e só se $\det A \neq 0$. Tem-se

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 0$$

se $a = b$ ou $a = c$. Se $a \neq b$ e $a \neq c$ então

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-a)\left[(c+a)-(b+a)\right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix} = 0$$

se $b = c$. Logo, a matriz A é invertível se e só se $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$.

6. Seja

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix},$$

com $a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbb{R}$. Se $a=0$ ou $h=0$ então $\det A=0$, isto é, A não é invertível. Se $a\neq 0$ e $h\neq 0$ então

$$\det A=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{vmatrix}=0,$$

isto é, A não é invertível. Logo, A não é invertível para quaisquer $a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbb{R}$.

7. Determinemos todos os valores do escalar λ para os quais a matriz $A-\lambda I$ é singular, isto é, todos os valores próprios de A.

(i) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda(1+\lambda)-6=\lambda^2+\lambda-6.$

Logo, $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow(\lambda=2 \text{ ou } \lambda=-3)$.

(ii) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda\left(1-\lambda^2\right)+4(1+\lambda)-4(1-\lambda)=$

$=\lambda\left[\left(1-\lambda^2\right)+8\right]$. Logo, $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow(\lambda=0 \text{ ou } \lambda=-3 \text{ ou } \lambda=3)$.

8. **(i)** $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\operatorname{cof}A)^T=\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(ii) $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\operatorname{cof}A)^T=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\operatorname{cof}A)^T=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 18 & 0 & 6 \\ 24 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 1 & 1 & 1/6 \end{bmatrix}$

9. Tem-se

$$\det A=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-2)(2+18-(-4)-9)=-30.$$

Logo,

$$\left(A^{-1}\right)_{(2,2)} = \frac{1}{\det A}\left(\left(\operatorname{cof} A\right)^T\right)_{(2,2)} = \frac{1}{\det A}\left(\operatorname{cof} A\right)_{(2,2)} = \frac{1}{-30}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{5}.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -17.$$

Logo,

$$\left(B^{-1}\right)_{(2,3)} = \frac{1}{\det B}\left(\left(\operatorname{cof} B\right)^T\right)_{(2,3)} = \frac{1}{\det B}\left(\operatorname{cof} B\right)_{(3,2)} = \frac{1}{-17}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{14}{17}.$$

10. **(i)** $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{-1} = 2$ e $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{-1} = -1$

(ii)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = 0 \text{ e } z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-5} = -1$$

11. $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, logo C é invertível. $\det D = \begin{vmatrix} 9 & -8 & -1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, logo D é invertível.

(i) $\det\left(2C^{-1}\right) = 2^3\,\dfrac{1}{\det C} = -\dfrac{4}{3}$

(ii) $\det\left(C^3\left(2C\right)^{-1}\right) = \left(\det C\right)^3\dfrac{1}{2^3}\dfrac{1}{\det C} = \left(\det C\right)^2\dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{2}$

(iii) $\det\left(\left(C^T\left(\operatorname{tr} C\right)C\right)^{-1}\right) = \det\left(C^{-1}\dfrac{1}{\operatorname{tr} C}\left(C^{-1}\right)^T\right) = \dfrac{1}{\left(\operatorname{tr} C\right)^3}\det\left(C^{-1}\right)\det\left(C^{-1}\right) =$

$= \dfrac{1}{2^3}\left(\dfrac{1}{\det C}\right)^2 = \dfrac{1}{288}$

(iv) $\det\left(C^T \operatorname{tr}\left(\left(\tfrac{1}{4}C\right)^T\right)C^{-2}\right) = \dfrac{1}{2^3}\det\left(C^T\right)\det\left(C^{-2}\right) = \dfrac{1}{2^3}\det C\dfrac{1}{\left(\det C\right)^2} =$

$$= \frac{1}{2^3}\frac{1}{\det C} = -\frac{1}{48}$$

(v) $\det\left(-2C^T\left(-\frac{2}{3}D^3\right)^{-1}\left(\left(D^T\right)^{-1}C\right)^{-1}\right) = (-2)^3\det\left(C^T\right)\frac{1}{\det\left(-\frac{2}{3}D^3\right)}\frac{1}{\det\left(\left(D^T\right)^{-1}C\right)} =$

$$= -8\left(\det C\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^3\frac{1}{(\det D)^3}\frac{\det D}{\det C} = 8\frac{1}{(\det D)^2}\frac{27}{8} = \frac{27}{36} = \tfrac{3}{4}.$$

12. **(i)** $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 5$ **(ii)** $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 10$ **(iii)** $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$

(iv) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 10$ **(v)** $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix} = -5$

13.(i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+2 & 2b+1 & 2c \\ a+1 & b+2 & c+1 \end{vmatrix} = 1$ **(iii)** $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(iv)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \beta & \beta\alpha+\beta^2 & 2\beta \\ \beta\alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha\beta.$

15.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

16.

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \dots & & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \dots & & 1 \\ \vdots & 1 & \lambda+1 & \ddots & & \\ & \vdots & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & & \\ & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n.$$

17.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 - x_1 & y_1 - x_1 \\ x_2 & 0 & y_2 - x_2 \end{vmatrix} = (y_1 - x_1)(-1)^{2+2} \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & y_2 - x_2 \end{vmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2).$$

18.(i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ 2a_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ 2a_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_1 & -b_1 & c_1 \\ 2a_2 & -b_2 & c_2 \\ 2a_3 & -b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

19.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

20.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

21. O coeficiente de x^3 na expressão $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ é -1.

22. **(i)** $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1 + x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(ii) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 4 & x & x \\ x & x & 4 & x \\ x & x & x & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\,(4-x)^3 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 4)$

(iii) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1-x & 1-x & 1-x \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 1-x & 1-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3-2x-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3-2x-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2x-x^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2\,(3-2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -3)$

23. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 53 & 3 \\ 7 & 71 & 5 \\ 8 & 87 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 53 & 533 \\ 7 & 71 & 715 \\ 8 & 87 & 871 \end{vmatrix}$. Como $533, 715$ e 871 são múltiplos de 13 então a 3^a coluna é também múltipla de 13. Logo $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 13.

24. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8+(-3)\times 1 \\ -1 & 0 & 10+(-3)\times 0 \\ 3 & -7 & 4+(-3)\times(-7) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 25 \end{vmatrix}$. Como a 3^a coluna é múltipla de 5, logo $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 25 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 5.

25. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ com n ímpar e tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, ..., n$. Mostre que A não é invertível.

Dem. ($a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, ..., n$)$\Leftrightarrow A^T = -A$. Logo

$$\det A = \det\left(A^T\right) = \det(-A) = (-1)^n \det A \underset{n \text{ é ímpar}}{=} -\det A \Leftrightarrow \det A = 0.$$

Pelo que A não é invertível.

4^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas (Espaços lineares)

1. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ **(ii)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ **(iii)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

2. Verifique que os seguintes conjuntos, com as operações usuais, são (todos os) subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(0, 0)\}$

   (ii) $V_k = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$

   (iii) $U = \{(0, a) : a \in \mathbb{R}\}$

   (iv) $\mathbb{R}^2$

3. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto

$$U_k = \{(x, y, k) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

   onde k é uma constante real. Determine os valores de k para os quais U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere o espaço linear $V = \mathbb{R}^3$. Diga quais dos seguintes subconjuntos de V, com as operações usuais, são subespaços de V e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\}$ **(ii)** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

   (iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ **(iv)** $\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$

   (v) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x\}$ **(vi)** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$

   (vii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x - y - z = 0\}$

   (viii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ou } y = z\}$

   (ix) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \text{ e } 2y + z = 0\}$ **(x)** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

5. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n, com as operações usuais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_2$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{P}_2$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$ **(ii)** $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \ e\ a_1 = 0\}$

   (iii) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$ **(iv)** $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$

   (v) $\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$

6. Seja $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) : b = a + c \right\}$ **(ii)** $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) : b < 0 \right\}$

   (iii) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) : a = -2c \text{ e } f = 2e + d \right\}.$

7. Determine o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Verifique que, com as operações usuais, o seguinte conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

gera o subespaço

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

9. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Mostre que os seguintes vectores são combinações lineares de v_1, v_2 e v_3.

(i) $(3, 3, 0)$ **(ii)** $(2, 1, 5)$ **(iii)** $(-1, 2, 0)$ **(iv)** $(1, 1, 1)$

10. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem ao subespaço $L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(i) $(-1, 4, 2, 2)$ **(ii)** $(2, 0, 2, 2)$ **(iii)** $(1, 1, -2, 2)$ **(iv)** $(0, 1, 1, 0)$

11. Determine o valor de k para o qual o vector $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3, 0, -2) \quad \text{e} \quad w = (2, -1, -5).$$

12. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector

$$q(t) = 2 + t + t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$?

13. Verifique que os seguintes conjuntos de vectores geram $\mathbb{R}^3$.

(i) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ **(ii)** $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

(iii) $\{(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1)\}$

14. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Antes de a determinar, explique porque é que essa matriz existe.

15. Determine os vectores (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ que pertencem a $L(\{u, v, w\})$ onde

$$u = (2, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad w = (0, 3, -4).$$

16. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que o espaço das linhas de A é igual ao espaço das linhas de B. Conclua então que os espaços das colunas de A^T e de B^T são iguais.

17. Encontre um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

(i) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \;\text{ e }\; y + z = 0\}$

(ii) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$

(iii) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \;\text{ e }\; x + y + 2w = 0 \;\text{ e }\; y - z + w = 0\}$

18. Defina por meio de sistemas de equações homogéneas os seguintes subespaços.

(i) Em $\mathcal{P}_2$: $L(\{1 - t^2, 1 + t\})$ **(ii)** $L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, -2)\})$

(iii) $L(\{(0, 1, 0), (-2, 1, -2)\})$ **(iv)** $L(\{(1, 1, 2), (2, 1, 1)\})$ **(v)** $L(\{(1, 0, -1, 1)\})$

(vi) $L(\{(1, -2, 5, -3), (2, -4, 6, 2), (3, -6, 11, -1), (0, 0, 1, -2)\})$

19. Determine as condições que os parametros $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ devem verificar para que os vectores $(\alpha_1, \beta_1, 3)$ e $(\alpha_2, \beta_2, 9)$, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, sejam linearmente independentes.

20. Diga se os seguintes conjuntos de vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Nos casos em que sejam linearmente dependentes, indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

(i) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$ **(ii)** $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$

(iii) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ **(iv)** $\{(1, 0, -1), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

(v) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (x, y, z)\}$ (com $x, y, z \in \mathbb{R}$).

21. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

22. Sejam $U = L(\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\})$ e $V_k = L(\{(2, k, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$.

23. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, construa uma base que inclua os vectores:

(i) $(1, 0, 2)$ e $(0, 1, 2)$. **(ii)** $(2, -1, 1)$ e $(-4, 2, 1)$. **(iii)** $(-1, 2, 1)$ e $(1, 0, -1)$.

24. Verifique que os seguintes subconjuntos do espaço linear de todas as funções reais de variável real são linearmente dependentes. Indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

(i) $S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}$ **(ii)** $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$

(iii) $S = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$ **(iv)** $S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}$

Determine uma base para cada subespaço $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

25. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Mostre que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

26. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$. Determine bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses conjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^2$ encontrada, exprima o vector $(0,-1)$ como combinação linear dos vectores dessa base ordenada. Isto é, determine as coordenadas do vector $(0,-1)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$.

(i) $\{(1,3),(1,-1)\}$ **(ii)** $\{(0,0),(1,2)\}$ **(iii)** $\{(2,4)\}$

(iv) $\{(-5,0),(0,2)\}$ **(v)** $\{(1,2),(2,-3),(3,2)\}$ **(vi)** $\{(1,0),(0,1)\}$

27. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^3$. Determine bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses conjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^3$ encontrada, exprima o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores dessa base ordenada. Isto é, determine as coordenadas do vector $(-1,1,-2)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^3$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$.

(i) $\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}$ **(ii)** $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$

(iii) $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ **(iv)** $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

(v) $\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$ **(vi)** $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

28. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^4$. Determine bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses conjuntos. Em cada alínea indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores do conjunto apresentado.

(i) $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$

(ii) $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$

(iii) $S = \{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$

(iv) $\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$

(v) $\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,5,5)\}$

(vi) $S = \{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(5,-2,2,2)\}$. Nesta alínea, verifique que $(8,-3,3,5) \in L(S)$ e determine uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8,-3,3,5)$.

29. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathcal{P}_2$ (espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2). Determine bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses conjuntos. Determine as coordenadas do vector $1-t$ em cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$ encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1,3,2)$.

(i) $\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\}$ **(ii)** $\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t, 1-4t\}$

(iii) $\{1+t^2, t-t^2, 1-t+2t^2, 1+t\}$ **(iv)** $\{-1+2t+t^2, 2-t\}$

(v) $\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\}$ **(vi)** $\{1, t, t^2\}$

30. Mostre que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base para o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

31. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determine uma base para W que inclua vectores de S.

32. Determine uma base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Qual é a dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$?

33. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e calcule a respectiva dimensão:

(i) O conjunto de todas as matrizes (reais) diagonais do tipo 3×3.

(ii) O conjunto de todas as matrizes (reais) simétricas do tipo 3×3.

34. Determine as dimensões e indique bases para: o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine tambem a característica e a nulidade de cada uma delas.

35. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Diga quais as dimensões possíveis para $U \cap V$.

36. Determine bases e calcule as dimensões de $U + V$ e $U \cap V$, dizendo em que casos $U + V$ é a soma directa $U \oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) $U = L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right), V = L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(ii) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \text{ e } x+y=0\}, \ V = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right), V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(iv) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y=z\}, V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(v) $U = L\left(\{1+t, 1-t^2\}\right), \quad V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\}$ em $\mathcal{P}_2$.

(vi) $U = L\left(\{1+t, 1-t^3\}\right), \quad V = L\left(\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\}\right)$ em $\mathcal{P}_3$.

(vii) $U = L\left(\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3),(0,0,-6,-8),(-1,1,-5,-5)\}\right),$
$V = L\left(\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3),(0,2,4,8)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

(viii) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3z=0 \text{ e } y+2z+3w=0\},$

$V = L(\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\})$ em $\mathbb{R}^4$.

Neste alínea **(viii)** mostre que $U = V$.

(ix) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}.$$

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}.$$

Comece por escrever U e V como soluções de sistemas de equações lineares homogéneas.

(x) Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados respectivamente por F e por G, com

$$\begin{aligned} F &= \{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(0,0,-1,2)\}, \\ G &= \{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Calcule a nulidade e a característica de A.

(ii) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o núcleo de A.

(iii) Usando a alínea anterior, determine a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

(iv) Resolva o sistema de equações $Au = b$, com $b = (1,0,2,-1,0)$. Note que b é igual à 1^a coluna de A e use esse facto de modo a encontrar uma solução particular de $Au = b$.

38. Utilize a informação da seguinte tabela para, em cada caso, determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas de A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A e do núcleo de A^T. Diga tambem se o correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível, determinando para esses casos, o número de parâmetros que entram na solução geral de $AX = B$.

A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car $[A \mid B]$	3	3	1	2	3	0	2

39. Construa uma matriz cujo núcleo seja gerado pelo vector $(2,0,1)$.

40. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector $(1,1,1)$ e cujo núcleo contém $(1,0,0)$?

41. Quais são as matrizes do tipo 3×3 cujo núcleo tem dimensão 3?

42. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A)$. Prove que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Dê um exemplo para $n = 4$.

43. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que car $A = n$ e $A^2 = A$. Prove que $A = I$.

44. Sejam $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ e $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

(i) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1.

(ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

(iii) Determine as coordenadas de v em relação à base B_2, usando as alíneas anteriores.

(iv) Determine, directamente, as coordenadas de v em relação à base B_2.

(v) Determine a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1.

(vi) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1, usando a alínea anterior, e compare com o resultado obtido em **(i).**

45. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2.

46. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

47. Sejam $B_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $B_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base B_2 são dadas por $(1,2,3)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base B_1.

(ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2.

48. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

49. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2.

50. Sejam $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2.

51. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B. Determine B.

52. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1, -1)$ e $(2, 2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1, 1)$ e $(2, -2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

Resolução da 4^a Ficha de exercícios

1. (i) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad (-1)(1,1) = (-1,-1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Por exemplo:

$$(1,0), (0,1) \in U, \quad \text{mas} \quad (1,0) + (0,1) = (1,1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad 2(1,1) = (2,2) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

2. Atendendo às respectivas dimensões, os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, são todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\{(0,0)\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Seja $V_k = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$ (fixo). Sejam $(x_1, kx_1), (x_2, kx_2) \in V_k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$(x_1, kx_1) + (x_2, kx_2) = (x_1 + x_2, k\,(x_1 + x_2)) \in V_k$$

e, com $(x, kx) \in V_k$,

$$\alpha(x, kx) = (\alpha x, k\,(\alpha x)) \in V_k.$$

Logo, para todo o $k \in \mathbb{R}$, V_k é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Em alternativa, uma vez que

$$V_k = L\left(\{(1, k)\}\right),$$

para todo o $k \in \mathbb{R}$, conclui-se que V_k é subespaço de $\mathbb{R}^2$ (para todo o $k \in \mathbb{R}$).

(iii) Seja $U = \{(0, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Sejam $(0, a_1), (0, a_2) \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$(0, a_1) + (0, a_2) = (0, a_1 + a_2) \in U$$

e, com $(0, a) \in U$,

$$\alpha(0, a) = (0, \alpha a) \in U.$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Em alternativa, uma vez que

$$U = L\left(\{(0, 1)\}\right),$$

conclui-se que U é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(iv) $\mathbb{R}^2$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

3. U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$ se e só se $k = 0$.

4. (i) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\}$. Ora $(0, 0, 0) \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$. Tem-se

$$U = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que

$$(x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1),$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(iii) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$. Ora $(0, 0, 0) \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Seja $U = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Uma vez que $(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$, para qualquer $z \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L(\{(0, 0, 1)\}).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(v) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \ \text{ e } \ z = 3x\}$. Tem-se $U = \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$.
Uma vez que $(x, 2x, 3x) = x(1, 2, 3)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L(\{(1, 2, 3)\}).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(vi) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$. Ora $(0, 0, 0) \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(vii) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \ \text{ e } \ x - y - z = 0\}$. Tem-se

$$U = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que

$$(0, y, -y) = y(0, 1, -1),$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L(\{(0, 1, -1)\}).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(viii) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \ \text{ ou } \ y = z\}$. Tem-se:

$$U = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\Big\} \cup \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\Big\}$$

Por exemplo:
$$(1,1,2),(1,2,2) \in U, \quad \text{mas} \quad (1,1,2)+(1,2,2)=(2,3,4) \notin U.$$
Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(ix) Seja $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \;\text{ e }\; 2y + z = 0\}$. Tem-se
$$U = \{(x,x,-2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$
Uma vez que
$$(x,x,-2x) = x(1,1,-2),$$
para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$U = L(\{(1,1,-2)\}).$$
Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Alternativamente, note que $U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(x) Seja $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$. Por exemplo:
$$(1,0,1),(0,1,0) \in U, \quad \text{mas} \quad (1,0,1)+(0,1,0)=(1,1,1) \notin U.$$
Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de todos os polinómios reais de grau igual a n:
$$U = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathcal{P}_n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; a_n \neq 0\},$$
com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$.

5. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais.

(i) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$. Tem-se
$$U = \left\{a_1 t + a_2 t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{t, t^2\right\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(ii) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \; e \; a_1 = 0\}$. Tem-se
$$U = \left\{a_0 + 2a_0 t^2 : a_0 \in \mathbb{R}\right\}.$$
Uma vez que
$$a_0 + 2a_0 t^2 = a_0(1 + 2t^2),$$
para qualquer $a_0 \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$U = L\left(\left\{1 + 2t^2\right\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(iii) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(iv) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(v) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$. Tem-se

$$U = \left\{a_0 + a_1 t + (a_1 - 2a_0)\, t^2 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Uma vez que

$$a_0 + a_1 t + (a_1 - 2a_0)\, t^2 = a_0(1 - 2t^2) + a_1(t + t^2),$$

para quaisquer $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{1 - 2t^2, t + t^2\right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

6. Seja $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo 2×3 com entradas reais.

(i) Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = a + c \right\}$. Tem-se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para quaisquer $a, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(ii) Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b < 0 \right\}$. Por exemplo: a matriz nula

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(iii) Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \text{ e } f = 2e + d \right\}$. Tem-se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e + d \end{bmatrix} : b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e + d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

para quaisquer $b, c, d, e \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

7. (i) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0)\})$ e $\mathcal{L}(A) = L(\{(1,-1)\})$.
Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x - y = 0,$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\right\} = \\ &= \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\}). \end{aligned}$$

(ii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0)\})$ e $\mathcal{L}(A) = L(\{(1,2,3)\})$.
Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0,$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\right\} = \\ &= \{(-2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1,0) + z(-3,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L(\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}). \end{aligned}$$

(iii) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = \{(0,0)\}$ e $\mathcal{L}(A) = \{(0,0,0)\}$.
O núcleo de A é dado por: $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$.

(iv) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L(\{(2,0,0), (1,1,0)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L(\{(2,1,1), (0,0,1)\}).$$

Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y+z=0 \;\text{ e }\; z=0\right\} = \\ &= \{(x,-2x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2,0) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,-2,0)\}\right).\end{aligned}$$

(v) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2,2),(0,3,1)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,0),(2,3)\}\right),$$

pois

$$(2,1) = \frac{4}{3}(1,0) + \frac{1}{3}(2,3).$$

Seja $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ 2x+3y=0 \\ \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \;\text{ e }\; 2x+3y=0 \;\text{ e }\; 2x+y=0\right\} = \{(0,0)\}.$$

(vi) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2,2)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,2)\}\right).$$

Seja $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ \\ 2x+4y=0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y=0\right\} = \\ &= \{(-2y,y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1) : y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-2,1)\}\right).\end{aligned}$$

(vii) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = \{(0,0,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = \{(0,0)\}.$$

O núcleo de A é dado por:
$$\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2.$$

(viii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2,2),(0,3,1),(1,0,0)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,0,1),(2,3,0),(2,1,0)\}\right).$$

Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ \\ y - 2z = 0 \\ \\ 4z = 0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:
$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\} = \{(0,0,0)\}.$$

Observação: Como $\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$ e sendo A quadrada 3×3, tem-se $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$.

8. Seja
$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se
$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

9. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Tem-se

(i) $(3,3,0) = 0(1,2,1) + 0(1,0,2) + 3(1,1,0)$

(ii) $(2,1,5) = 1(1,2,1) + 2(1,0,2) + (-1)(1,1,0)$

(iii) $(-1,2,0) = 2(1,2,1) + (-1)(1,0,2) + (-2)(1,1,0)$

(iv) $(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,2,1) + \frac{1}{3}(1,0,2) + \frac{1}{3}(1,1,0)$.

10. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$ e $v_3 = (0,1,2,1)$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \quad (*)$$

Logo, $(2,0,2,2), (1,1,-2,2) \in L(\{v_1, v_2, v_3\})$, com

$$\begin{aligned} (2,0,2,2) &= (1,0,0,1) + (1,-1,0,0) + (0,1,2,1) \\ (1,1,-2,2) &= 3(1,0,0,1) + (-2)(1,-1,0,0) + (-1)(0,1,2,1). \end{aligned}$$

Atendendo a (*), $(-1,4,2,2), (0,1,1,0) \notin L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

11. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & k \end{array}\right] \underset{\frac{2}{3}L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -11/3 & k+2/3 \end{array}\right] \underset{-\frac{11}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+8 \end{array}\right].$$

Logo, -8 é o único valor de k para o qual o vector $u = (1,-2,k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3,0,-2) \quad \text{e} \quad w = (2,-1,-5).$$

12. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2+t+2t^2$, $p_2(t) = -2t+t^2$, $p_3(t) = 2-5t+5t^2$ e $p_4(t) = -2-3t-t^2$. O vector

$$q(t) = 2+t+t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$? Tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \quad (**)$$

Atendendo a (**), $q(t) = 2+t+t^2 \notin L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$. Logo,

$$\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\} \text{ não pode gerar } \mathcal{P}_2.$$

13. **(i)** Seja $U = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $U = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$. Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1).$$

Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

(iii) Seja $U = \{(1,1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,1)\}$. Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Determinemos os valores dos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ para os quais se tem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ora a última igualdade é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 & -1 & y \\ 1 & -1 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & -2 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & 2 & z-x \end{array}\right].$$

Logo

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + s \\[2ex] \lambda_2 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + s \\[2ex] \lambda_3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + s \\[2ex] \lambda_4 = s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + s\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + s\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + s\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com $s \in \mathbb{R}$. Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

14.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seja $U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right)$.
Existe $D \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $D \notin U$ uma vez que

$$U \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \underbrace{\dim \mathcal{U}}_{\leq 3} \quad < \quad \underbrace{\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}_{=4}.$$

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Tem-se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$ se e só se existirem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 = c \\ \lambda_2 - \lambda_3 = d \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_3+L_4 \to L_4 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_3+L_4 \to L_4 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d + \frac{1}{2}(b+a) - c \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & d + \frac{1}{2}(b+a) - c. \end{array}\right]$$

Logo, para que o sistema linear anterior seja possível é necessário que se tenha

$$d + \frac{1}{2}(b+a) - c = 0.$$

Deste modo podemos escrever

$$U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d + \frac{1}{2}(b+a) - c = 0\right\}$$

e assim, sendo $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d + \frac{1}{2}(b+a) - c \neq 0\right\}$, tem-se

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V.$$

Ou seja, qualquer vector de V que não seja o vector nulo, esse vector não pertence a U. Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

15. Sejam

$$u = (2, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad w = (0, 3, -4).$$

O vector (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ pertencerá a $L(\{u, v, w\})$ se existirem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a, b, c) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, -1, 2) + \gamma(0, 3, -4),$$

isto é, se o seguinte sistema (nas variáveis α, β e γ) fôr possível e determinado:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = a \\ \alpha - \beta + 3\gamma = b \\ 2\beta - 4\gamma = c. \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3/2 & 3 & b - a/2 \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \underset{\frac{4}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{4}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3/2 & 3 & b - \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & c + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a \end{array}\right].$$

Assim, o vector (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ pertencerá a $L(\{u, v, w\})$ se:

$$c + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a = 0.$$

Observação: Deste modo, tem-se $L(\{u, v, w\}) \neq \mathbb{R}^3$. De facto, uma vez que

$$v = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w$$

tem-se $L(\{u, v, w\}) = L(\{u, w\})$ e como tal $\{u, v, w\}$ não pode gerar $\mathbb{R}^3$.

16. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A'$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-4L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B'.$$

Atendendo ao método de eliminação de Gauss:

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A') \ \text{ e } \ \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(B').$$

Além disso, uma vez que

$$(1,-1,-1)=(1,1,5)-2(0,1,3),$$

tem-se

$$\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(A')=\mathcal{L}(B')=\mathcal{L}(B).$$

Finalmente, como se tem sempre

$$\mathcal{C}(A^T)=\mathcal{L}(A) \;\text{ e }\; \mathcal{L}(B)=\mathcal{C}(B^T),$$

conclui-se que $\mathcal{C}(A^T)=\mathcal{C}(B^T)$.

17. (i) Seja $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x=0 \;\text{ e }\; y=-z\}$. Tem-se

$$U=\{(0,-z,z,w): z,w\in\mathbb{R}\}.$$

Atendendo a que

$$(0,-z,z,w)=z(0,-1,1,0)+w(0,0,0,1),$$

tem-se

$$U=L\left(\{(0,-1,1,0),(0,0,0,1)\}\right).$$

(ii) Seja $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+w=0\}$. Tem-se

$$U=\{(-y-z-w,y,z,w): y,z,w\in\mathbb{R}\}.$$

Atendendo a que

$$(-y-z-w,y,z,w)=y(-1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+w(-1,0,0,1),$$

tem-se

$$U=L\left(\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\right).$$

(iii) Seja $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y-z=0 \;\text{ e }\; x+y+2w=0 \;\text{ e }\; y-z+w=0\}$. Observe-se que

$$U=\mathcal{N}(A), \;\text{ com }\; A=\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\1&1&0&2\\0&1&-1&1\end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\1&1&0&2\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&1&2\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&1&2\\0&0&0&3\end{bmatrix}=A'.$$

Logo, $U=\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A')$. Assim,

$$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y-z=0 \;\text{ e }\; -y+z+2w=0 \;\text{ e }\; 3w=0\right\}=$$

$$=\{(-z,z,z,0): z\in\mathbb{R}\}=\{z(-1,1,1,0): z\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(-1,1,1,0)\}\right).$$

18. (i) Seja $U = L\left(\{1-t^2, 1+t\}\right)$ um subespaço de $\mathcal{P}_2$. Seja $p(t) \in U$, com $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha\left(1 - t^2\right) + \beta(1+t).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ -1 & 0 & a_2 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & a_0+a_2 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0+a_2-a_1 \end{array}\right].$$

Logo, para que o sistema linear anterior seja possível é preciso que $a_0 + a_2 - a_1 = 0$. Assim,

$$U = \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 + a_2 - a_1 = 0\right\}.$$

(ii) Seja $U = L\left(\{(1,0,1), (0,1,0), (-2,1,-2)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in U$. Então, existirão $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0) + \gamma(-2,1,-2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\right\}.$$

Observação extra: $U = L\left(\{(1,0,1), (0,1,0), (-2,1,-2)\}\right) = L\left(\{(1,0,1), (0,1,0)\}\right)$, uma vez que

$$(-2,1,-2) = (-2)(1,0,1) + (0,1,0).$$

(iii) Seja $V = L\left(\{(0,1,0), (-2,1,-2)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in V$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(-2,1,-2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & x \\ 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & x \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\right\}.$$

Observação extra: $V = L\left(\{(0,1,0), (-2,1,-2)\}\right) = L\left(\{(1,0,1), (0,1,0)\}\right)$, uma vez que

$$(-2,1,-2) = (-2)(1,0,1) + (0,1,0) \quad \text{e} \quad (1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2,1,-2) + \frac{1}{2}(0,1,0).$$

(iv) Seja $W = L(\{(1,1,2),(2,1,1)\})$. Seja $(x,y,z) \in V$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,2) + \beta(2,1,1).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 1 & 1 & | & y \\ 2 & 1 & | & z \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -1 & | & y-x \\ 0 & -3 & | & z-2x \end{bmatrix} \underset{-3L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -1 & | & y-x \\ 0 & 0 & | & z-3y+x \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\right\}.$$

Observação extra: $W = L(\{(3,1,0),(-1,0,1)\}) = L(\{(1,1,2),(2,1,1)\})$, uma vez que

$$(3,1,0) = 2(2,1,1) + (-1)(1,1,2), \quad (-1,0,1) = (1,1,2) + (-1)(2,1,1)$$

e

$$(1,1,2) = (3,1,0) + 2(-1,0,1), \;\; (2,1,1) = (3,1,0) + (-1,0,1).$$

(v) Seja $U = L(\{(1,0,-1,1)\})$. Seja $(x,y,z,w) \in U$. Então, existirá $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x,y,z,w) = \alpha(1,0,-1,1).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & | & x \\ 0 & | & y \\ -1 & | & z \\ 1 & | & w \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3 \longrightarrow L_3 \\ -L_1+L_4 \longrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & | & x \\ 0 & | & y \\ 0 & | & x+z \\ 0 & | & w-x \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = 0 \;\text{ e }\; x+z=0 \;\text{ e }\; w-x=0\right\}.$$

(vi) Seja $U = L(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,1,-2)\})$. Como

$$(3,-6,11,-1) = (1,-2,5,-3) + (2,-4,6,2) \quad \text{e} \quad (0,0,1,-2) = \frac{1}{2}(1,-2,5,-3) - \frac{1}{4}(2,-4,6,2)$$

então

$$U = L(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2)\}).$$

Seja $(x,y,z,w) \in U$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = \alpha(1,-2,5,-3) + \beta(2,-4,6,2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ -2 & -4 & | & y \\ 5 & 6 & | & z \\ -3 & 2 & | & w \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2 \longrightarrow L_2 \\ -5L_1+L_3 \longrightarrow L_3 \\ 3L_1+L_4 \longrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 0 & | & 2x+y \\ 0 & -4 & | & -5x+z \\ 0 & 8 & | & 3x+w \end{bmatrix} \underset{2L_3+L_4 \longrightarrow L_4}{\longrightarrow}.$$

$$\xrightarrow[2L_3+L_4\longrightarrow L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & 0 & | & 2x+y \\ 0 & -4 & | & -5x+z \\ 0 & 0 & | & -7x+2z+w \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -4 & | & -5x+z \\ 0 & 0 & | & 2x+y \\ 0 & 0 & | & -7x+2z+w \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y=0 \ \text{ e } \ -7x+2z+w=0\right\}.$$

19. Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(\alpha_1, \beta_1, 3), (\alpha_2, \beta_2, 9)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss. Se $\alpha_1 \neq 0$, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{3}{\alpha_1}L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \\ 0 & -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2+\beta_2 \\ \\ 0 & -\dfrac{3}{\alpha_1}\alpha_2+9 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(\alpha_1, \beta_1, 3), (\alpha_2, \beta_2, 9)\}$ é linearmente independente se $\alpha_1 \neq 0$ e $\left(\beta_2 \neq \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2 \ \text{ ou } \ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq 3\right)$. Se $\alpha_1 = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{\beta_1}{3}L_1+L_2\to L_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -3\beta_1+\beta_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(\alpha_1, \beta_1, 3), (\alpha_2, \beta_2, 9)\}$ é linearmente independente se $\alpha_1 = 0$ e $(\beta_2 \neq 3\beta_1$ ou $\alpha_2 \neq 0)$. Assim, o conjunto $\{(\alpha_1, \beta_1, 3), (\alpha_2, \beta_2, 9)\}$ é linearmente independente se e só se

$$\left(\alpha_1 \neq 0 \ \text{ e } \ \left(\beta_2 \neq \frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2 \ \text{ ou } \ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq 3\right)\right) \ \text{ ou } \ (\alpha_1 = 0 \ \text{ e } \ (\beta_2 \neq 3\beta_1 \ \text{ ou } \ \alpha_2 \neq 0)).$$

20. **(i)** Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(4,2,1), (2,6,-5), (1,-2,3)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -4L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 16 & -8 \\ 0 & 22 & -11 \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{8}L_2\to L_2 \\ \frac{1}{11}L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(4,2,1), (2,6,-5), (1,-2,3)\}$ é linearmente dependente, mas o conjunto $\{(4,2,1),(2,6,-5)\}$ é linearmente independente. Procuremos então $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,-2,3) = \alpha(4,2,1) + \beta(2,6,-5).$$

Atendendo ao que já se fez e considerando a 3^a coluna como o termo independente do sistema, tem-se

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 1 \\ \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \\ \\ \alpha - 5\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 5\beta = 3 \\ \\ 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pelo que

$$(1,-2,3) = \frac{1}{2}(4,2,1) - \frac{1}{2}(2,6,-5).$$

(ii) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,2,-1),(3,2,5)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1,2,-1),(3,2,5)\}$ é linearmente independente.

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -3L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$ é linearmente independente.

Observação extra: encontrámos três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$, sem ser preciso verificar se gera $\mathbb{R}^3$.

(iv) O conjunto $\{(1,0,-1),(0,0,0),(0,1,1)\}$ contém o vector nulo, logo é linearmente dependente. Facilmente se vê que $\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$ é linearmente independente. Facilmente também se vê que

$$(0,0,0) = 0(1,0,-1) + 0(0,1,1).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ com mais do que três vectores é linearmente dependente. O conjunto

$$\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$$

é formado por quatro vectores de $\mathbb{R}^3$, logo é linearmente dependente para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$.

Resolução alternativa para verificar a dependência linear: Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 2 & 2 & y \\ 0 & 3 & 3 & z \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-x \\ 0 & 3 & 3 & z \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & z-\frac{3}{2}(y-x) \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$$

é linearmente dependente para quaisquer $x,y,z \in \mathbb{R}$, mas o conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)\}$ é linearmente independente.

Observação extra: encontrámos três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$, sem ser preciso verificar se gera $\mathbb{R}^3$.

Procuremos então $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,3) + \gamma(1,2,3).$$

Atendendo ao que já se fez e considerando a 4^a coluna como o termo independente do sistema, tem-se

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = x \\ \\ \alpha+2\beta+\gamma = y \\ \\ 3\beta+3\gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = x \\ \\ 2\beta+\gamma = y-x \\ \\ \frac{3}{2}\gamma = z-\frac{3}{2}(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x-\frac{2}{3}z+y \\ \\ \beta = (y-x)-\frac{1}{3}z \\ \\ \gamma = \frac{2}{3}z-y+x. \end{cases}$$

Pelo que

$$(x,y,z) = \left(x-\frac{2}{3}z+y\right)(1,1,0) + \left((y-x)-\frac{1}{3}z\right)(0,2,3) + \left(\frac{2}{3}z-y+x\right)(1,2,3).$$

21. Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\}$ como colunas de uma A matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{-a^2L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-a^2L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & -2a^2 & 1-a^2\end{bmatrix}\underset{2aL_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1-a^2\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$S_a=\left\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\right\}$$

é linearmente independente se e só se $a\notin\{-1,0,1\}$. Logo, uma vez que $\dim\mathbb{R}^3=3$ e S_a tem 3 vectores, S_a será uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se $a\notin\{-1,0,1\}$.

22. Sejam $U=L\left(\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}\right)$ e $V_k=L\left(\{(2,k,1,0),(0,0,0,1)\}\right)$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim\left(U\cap V_k\right)=1$. Coloquemos os vectores geradores de U e de V como colunas da matriz:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & k & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & k & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{-L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & k-2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k-3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Note que $U+V_k=L\left(U\cup V_k\right)$. Como

$$\dim\left(U\cap V_k\right)=\dim U+\dim V_k-\dim\left(U+V_k\right)=2+2-\dim\left(U+V_k\right)=4-\dim\left(U+V_k\right)$$

e

$$\dim\left(U+V_k\right)=\begin{cases}3 & \text{se } k=3\\ 4 & \text{se } k\neq 3\end{cases}$$

então $\dim\left(U\cap V_k\right)=1$ se e só se $k=3$.

23. **(i)** Seja $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,0,2),(0,1,2),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ 2 & 2 & z\end{bmatrix}\underset{-2L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 2 & z-2x\end{bmatrix}\underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & z-2x-2y\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Qualquer conjunto $\{(1,0,2),(0,1,2),(x,y,z)\}$ em que $z-2x-2y\neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(2,-1,1),(-4,2,1),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ -1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ 0 & 0 & y+\frac{x}{2} \\ 0 & 3 & z-\frac{x}{2} \end{bmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ 0 & 3 & z-\frac{x}{2} \\ 0 & 0 & y+\frac{x}{2} \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, qualquer conjunto

$$\{(2,-1,1),(-4,2,1),(x,y,z)\}$$

em que $y+\frac{x}{2}\neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Seja $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(-1,2,1),(1,0,-1),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y+2x \\ 0 & 0 & z+x \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, qualquer conjunto

$$\{(-1,2,1),(1,0,-1),(x,y,z)\}$$

em que $z+x\neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

24. **(i)** Seja

$$S=\left\{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\cos 2t=\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t.$$

Mas, o conjunto

$$S'=\left\{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tais que

$$\lambda\cos^2 t+\mu\operatorname{sen}^2 t=0,$$

para todo o $t\in\mathbb{R}$, então se fizermos $t=\frac{\pi}{2}$ obtemos $\mu=0$ e a seguir se fizermos $t=0$ obtemos $\lambda=0$. Logo, $\lambda=\mu=0$. Pelo que, o conjunto $S'=\left\{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\right\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S)=2.$$

(ii) Seja

$$S=\left\{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$2 = 2\cos^2 t + 2\,\mathrm{sen}^2\, t.$$

Mas, o conjunto

$$S' = \left\{\cos^2 t, \mathrm{sen}^2\, t\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda \cos^2 t + \mu\,\mathrm{sen}^2\, t = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, então se fizermos $t = \frac{\pi}{2}$ obtemos $\mu = 0$ e a seguir se fizermos $t = 0$ obtemos $\lambda = 0$. Logo, $\lambda = \mu = 0$. Pelo que, o conjunto $S' = \{\cos^2 t, \mathrm{sen}^2\, t\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S) = 2.$$

(iii) Seja

$$S = \left\{e^t, e^{-t}, \cosh t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Mas, o conjunto

$$S' = \left\{e^t, e^{-t}\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda e^t + \mu e^{-t} = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, então se fizermos $t = 0$ obtemos $\lambda + \mu = 0$ e a seguir se fizermos $t = 1$ obtemos $\lambda e^1 + \mu e^{-1} = 0$. Logo, $\lambda = \mu = 0$. Pelo que, o conjunto $S' = \{e^t, e^{-t}\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S) = 2.$$

(iv) Seja

$$S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\dim \mathcal{P}_2 = 3 \ \text{ e } \ S \text{ tem 4 vectores.}$$

Mas, o conjunto

$$S' = \left\{1, t, t^2\right\}$$

é linearmente independente pois trata-se da base canónica de $\mathcal{P}_2$. Logo,

$$L(S) = \mathcal{P}_2 \ \text{ e } \ \dim L(S) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

25. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \mathrm{sen}\, t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Vejamos que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = \mathbf{0}.$$

Note que

$$\begin{aligned}\alpha f+\beta g+\gamma h &= \mathbf{0}\Leftrightarrow \alpha f\left(t\right)+\beta g\left(t\right)+\gamma h\left(t\right)=0, \quad \text{para todo o } t\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \operatorname{sen} t+\beta\cos t+\gamma t=0, \quad \text{para todo o } t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Para $t=0$, $t=\pi$, $t=\dfrac{\pi}{2}$ tem-se respectivamente as seguintes equações

$$\begin{cases}\alpha \operatorname{sen} 0+\beta\cos 0+\gamma 0=0\\ \\ \alpha \operatorname{sen}\pi+\beta\cos\pi+\gamma\pi=0\\ \\ \alpha \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}+\beta\cos\dfrac{\pi}{2}+\gamma\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \\ -\beta+\gamma\pi=0\\ \\ \alpha+\gamma\dfrac{\pi}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha=0.\end{cases}$$

Logo $\alpha=\beta=\gamma=0$, e assim o conjunto $\{f,g,h\}$ é linearmente independente.

Observação. Como $\{f,g\}\subset\{f,g,h\}$, as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ são linearmente independentes.

26. (i) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,3),(1,-1)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix}\underset{-3L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1\\0&-4\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto formado pelos vectores das colunas 1 e 2 da matriz A:

$$\{(1,3),(1,-1)\}$$

é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B}=\{(1,3),(1,-1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$). Isto é, $\mathcal{B}$ é base de $L(\mathcal{B})=\mathbb{R}^2$ e $\dim L(\mathcal{B})=\dim\mathbb{R}^2=2$.

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base

$$\mathcal{B}=\{(1,3),(1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$(0,-1)=\alpha(1,3)+\beta(1,-1).$$

Formando a matriz aumentada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\3&-1&-1\end{array}\right]\underset{-3L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&-4&-1\end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \\ -4\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{4}\\ \\ \beta=\frac{1}{4}\end{cases}$$

e assim,

$$(0,-1)=-\frac{1}{4}(1,3)+\frac{1}{4}(1,-1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$ nessa base, é dado por:

$$0(1,3)+(-1)(1,-1)=(-1,1).$$

(ii) O conjunto $S=\{(0,0),(1,2)\}$ contém o vector nulo, logo o conjunto é linearmente dependente, pelo que não pode ser base de $\mathbb{R}^2$. No entanto, $S'=\{(1,2)\}$ é linearmente independente e S' é base de $L(S')=L(S)$. Logo, $\dim L(S)=1$.

(iii) O conjunto $S=\{(2,4)\}$ não pode ser base de $\mathbb{R}^2$ uma vez que tem só um vector e qualquer base de $\mathbb{R}^2$ tem sempre dois vectores (pois $\dim \mathbb{R}^2=2$). No entanto, $S=\{(2,4)\}$ é linearmente independente e S é base de $L(S)$. Logo, $\dim L(S)=1$.

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\mathcal{B}=\{(-5,0),(0,2)\}$ é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B}=\{(-5,0),(0,2)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$).

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base

$$\mathcal{B}=\{(-5,0),(0,2)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$(0,-1)=\alpha(-5,0)+\beta(0,2).$$

Facilmente se vê que $\beta=-\frac{1}{2}$ e $\alpha=0$. Isto é,

$$(0,-1)=0(-5,0)+\left(-\frac{1}{2}\right)(0,2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$ nessa base, é dado por:

$$0(-5,0)+(-1)(0,2)=(0,-2).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ com mais do que 2 vectores é linearmente dependente. O conjunto $S=\{(1,2),(2,-3),(3,2)\}$ é formado por três vectores de $\mathbb{R}^2$, logo é linearmente dependente e como tal não pode ser uma base de $\mathbb{R}^2$. No entanto, podemos colocar os vectores do conjunto $S=\{(1,2),(2,-3),(3,2)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}\underset{-2L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -7 & -4\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto formado pelos vectores das colunas 1 e 2 da matriz A:

$$\mathcal{B}=\{(1,2),(2,-3)\}$$

é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B}=\{(1,2),(2,-3)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$).

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(1,2),(2,-3)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,-1) = \alpha \{(1,2) + \beta(2,-3)\}.$$

Formando a matriz aumentada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \underset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \\ -7\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{7} \\ \\ \beta = \frac{1}{7} \end{cases}$$

e assim,

$$(0,-1) = -\frac{2}{7}(1,2) + \frac{1}{7}(2,-3).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$ nessa base, é dado por:

$$0(1,2) + (-1)(2,-3) = (-2,3).$$

(vi) $B_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$. As coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base B_c^2 são precisamente 0 e -1. Ainda em relação à base B_c^2, o vector cujas coordenadas nessa base são $(0,-1)$ é precisamente o vector $(0,-1)$.

27. **(i)** O conjunto $\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}$ contém o vector nulo, logo o conjunto é linearmente dependente, pelo que não pode ser base. Mas,

$$L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}) = L(\{(1,2,3),(0,1,2)\})$$

e facilmente se vê que o conjunto $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ é linearmente independente. Logo,

$$\dim L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}) = 2$$

e o conjunto $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ é uma base de $L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\})$.

(ii) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$ é linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$ é uma base de $L(\{(1,2,0),(0,1,-1)\})$ e

$$\dim L(\{(1,2,0),(0,1,-1)\}) = 2.$$

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2 \to L_2 \\ -\frac{2}{3}L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 5/3 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{5}{8}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & -5/8 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ é linearmente independente. Temos assim, três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores desta base. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2) = \alpha(3,2,2) + \beta(-1,2,1) + \gamma(0,1,0).$$

Temos então

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{2}{3}L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 8/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & 0 & -4/3 \end{array}\right] \underset{-\frac{5}{8}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 8/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & -5/8 & -19/8 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = -1 \\ \\ \frac{8}{3}\beta + \gamma = \frac{5}{3} \\ \\ -\frac{5}{8}\gamma = -\frac{19}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{5} \\ \\ \beta = -\frac{4}{5} \\ \\ \gamma = \frac{19}{5}. \end{cases}$$

Pelo que

$$(-1,1,-2) = \left(-\frac{3}{5}\right)(3,2,2) + \left(-\frac{4}{5}\right)(-1,2,1) + \frac{19}{5}(0,1,0).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(3,2,2) + (-1,2,1) + (-2)(0,1,0) = (-4,-2,-1).$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é linearmente independente. Temos então três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores desta base. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1).$$

Temos então:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -3. \end{cases}$$

Pelo que

$$(-1,1,-2) = (-1)(1,1,1) + 2(0,1,1) + (-3)(0,0,1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(1,1,1) + (0,1,1) + (-2)(0,0,1) = (-1,0,-2).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ com mais do que três vectores é linearmente dependente. O conjunto

$$\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$$

é formado por quatro vectores de $\mathbb{R}^3$, logo é linearmente dependente. Vamos procurar o número máximo de vectores linearmente independentes que, em conjunto, geram

$$L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right).$$

Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$ como linhas de uma A matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&3&4\\4&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\-4L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&6\\0&-3&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\underset{\substack{3L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{3L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&6\\0&0&21\\0&0&-7\end{bmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{21}L_3\to L_3\\\frac{1}{7}L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&6\\0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&6\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=A'.$$

As linhas não nulas da matriz em escada A' são linearmente independentes. Logo, o conjunto

$$\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$$

é formado por três vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independentes. Atendendo a que a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, o conjunto

$$\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$$

é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que $\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(A')$ temos então:

$$L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right)=L\left(\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}\right)=\mathbb{R}^3.$$

Logo,

$$\dim L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right)=3.$$

Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores da base

$$\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2)=\alpha(1,1,-1)+\beta(0,1,6)+\gamma(0,0,1).$$

Temos então:

$$\begin{cases}\alpha=-1\\\alpha+\beta=1\\-\alpha+6\beta+\gamma=-2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=2\\\gamma=-15.\end{cases}$$

Pelo que

$$(-1,1,-2)=(-1)(1,1,-1)+2(0,1,6)+(-15)(0,0,1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(1,1,-1)+(0,1,6)+(-2)(0,0,1)=(-1,0,5).$$

(vi) $B_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. As coordenadas do vector $(-1,1,-2)$ em relação à base B_c^3 são precisamente $-1, 1$ e -2. Ainda em relação à base B_c^3, o vector cujas coordenadas nessa base são $(-1,1,-2)$ é precisamente o vector $(-1,1,-2)$.

28. **(i)** Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_4 \to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ é linearmente independente. Temos assim, quatro vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ é 4, então o conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^4$ e

$$\dim L\left(\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}\right) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

(ii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$ como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ \frac{5}{2}L_2+L_4 \to L_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ \frac{5}{2}L_2+L_4 \to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{3}{2}L_3+L_4 \to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$ é linearmente independente e é assim uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$L\left(\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}\right)$$

tendo-se

$$\dim L\left(\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}\right) = 3.$$

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto apresentado:

$$\{(1,-1,0,2),(1,0,0,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ldots]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}\underset{-L_1+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&-1&1\end{bmatrix}\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&-1&1&1\\0&0&1&-1&1\end{bmatrix}\underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1,2,3$ e 5 da matriz A:

$$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$$

são uma base de $\mathbb{R}^4$, por serem quatro vectores linearmente independentes de um espaço linear de dimensão 4. E

$$\dim L\left(\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}\right)=\dim\mathbb{R}^4=4.$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$ é linearmente independente. Temos então quatro vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ é 4, então o conjunto

$$\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$$

é desde logo uma base de $\mathbb{R}^4$ e

$$\dim L\left(\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}\right)=\dim\mathbb{R}^4=4.$$

(v) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,5,5)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\-2&-4&-6&0\\5&6&11&5\\-3&2&-1&5\end{bmatrix}\underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\-3&2&-1&5\\5&6&11&5\\-2&-4&-6&0\end{bmatrix}\underset{\substack{3L_1+L_2\to L_2\\-5L_1+L_3\to L_3\\2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{3L_1+L_2\to L_2\\-5L_1+L_3\to L_3\\2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&8&8&5\\0&-4&-4&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&8&8&5\\0&0&0&15\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1, 2$ e 4 da matriz A formam um conjunto linearmente independente:

$$\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}.$$

Assim, o conjunto $\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}$ é uma base de

$$L(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}),$$

tendo-se

$$\dim L(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}) = 3.$$

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto inicial:

$$\{(1,-2,5,-3),(0,1,0,0),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \underset{\dots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

(vi) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(5,-2,2,2)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-4L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1, 2$ e 3 da matriz A formam um conjunto linearmente independente:

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}.$$

Assim, o conjunto $\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}$ é uma base de

$$L(\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}),$$

tendo-se

$$\dim L(S) = \dim L(\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}) = 3.$$

Uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}:$$

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(0,0,0,1)\}.$$

Vejamos que $(8,-3,3,5) \in L(S)$ e determinemos uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8,-3,3,5)$. Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(8,-3,3,5) = \alpha(2,1,-1,2) + \beta(-1,-1,1,2) + \gamma(4,-2,2,-2).$$

Temos então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 14 \\ 0 & 4 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & -30 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad (*)$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Pelo que

$$(8,-3,3,5) = 2(2,1,-1,2) + 2(-1,-1,1,2) + \frac{3}{2}(4,-2,2,-2).$$

Atendendo a (*), o conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(8,-3,3,5)\}$$

é uma base de $L(S)$ que inclui o vector $(8,-3,3,5)$.

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto inicial:

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(0,0,1,0),(8,-3,3,5)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1/2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

29. **(i)** Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ 2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ 2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ 2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\},$$

formado por três vectores de $\mathcal{P}_2$, é linearmente independente. Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}\right) = \mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}\right) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $1 - t$ como combinação linear dos vectores da base

$$\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1 - t = \alpha(2 + t - t^2) + \beta(2t + 2t^2) + \gamma(-t^2).$$

Temos então:

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \\ \alpha + 2\beta = -1 \\ \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{3}{4} \\ \\ \gamma = -2. \end{cases}$$

Pelo que

$$1 - t = \frac{1}{2}(2 + t - t^2) - \frac{3}{4}(2t + 2t^2) - 2(-t^2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(2 + t - t^2) + 3(2t + 2t^2) + 2(-t^2) = -2 + 5t + 5t^2.$$

(ii) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t, 1 - 4t\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ e 3 da matriz A:

$$\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t\}$$

é uma base de

$$L\left(\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t, 1-4t\}\right).$$

Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t, 1-4t\}\right) = L\left(\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t\}\right) = \mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t, 1-4t\}\right) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $1-t$ como combinação linear dos vectores da base $\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t\}$. Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1-t = \alpha(2t-t^2) + \beta(1-2t^2) + \gamma(2+t).$$

Temos então:

$$\begin{cases} \beta+2\gamma=1 \\ \\ 2\alpha+\gamma=-1 \\ \\ -\alpha-2\beta=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\frac{1}{3} \\ \\ \gamma=-1+4\beta \\ \\ \alpha=-2\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\frac{1}{3} \\ \\ \gamma=\frac{1}{3} \\ \\ \alpha=-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Pelo que

$$1-t = -\frac{2}{3}(2t-t^2) + \frac{1}{3}(1-2t^2) + \frac{1}{3}(2+t).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{2t-t^2, 1-2t^2, 2+t\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(2t-t^2) + 3(1-2t^2) + 2(2+t) = 7-5t^2.$$

(iii) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\{1+t^2, t-t^2, 1-t+2t^2, 1+t\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ da matriz A:

$$\left\{1 + t^2, t - t^2\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\right\}\right),$$

tendo-se

$$L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\right\}\right) = L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2\right\}\right)$$

e

$$\dim L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\right\}\right) = \dim L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2\right\}\right) = 2.$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{-1 + 2t + t^2, 2 - t\}$ é linearmente independente. Logo, ele próprio é uma base de

$$L\left(\left\{-1 + 2t + t^2, 2 - t\right\}\right),$$

e tem-se

$$\dim L\left(\left\{-1 + 2t + t^2, 2 - t\right\}\right) = 2.$$

(v) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{6}L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{6}L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{4L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ e 4 da matriz A:

$$\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, -2 + 2t - t^2\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\right\}\right).$$

Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, -2 + 2t - t^2\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\right\}\right) =$$

$$= L\left(\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\right\}\right) = \mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, 5+4t-t^2, -2+2t-t^2\right\}\right) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $1-t$ como combinação linear dos vectores da base

$$\left\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\right\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1-t = \alpha(1+2t-t^2) + \beta(3+t^2) + \gamma(-2+2t-t^2).$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando então o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema anterior, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{3}L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{3}L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \\ \gamma = -1. \end{cases}$$

Pelo que

$$1-t = \frac{1}{2}(1+2t-t^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(3+t^2) + (-1)(-2+2t-t^2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1,3,2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(1+2t-t^2) + 3(3+t^2) + 2(-2+2t-t^2) = 4+2t+2t^2.$$

(vi) O conjunto $\{1, t, t^2\}$ é a base canónica de $\mathcal{P}_2$. As coordenadas do vector $-1+3t+2t^2$ em relação a essa base são precisamente $-1, 3$ e 2. Ainda em relação à base $\{1, t, t^2\}$, o vector cujas coordenadas nessa base são $(-1,3,2)$ é precisamente o vector $-1+3t+2t^2$.

30. Como o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem dimensão 4, então para verificar que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ basta ver que são linearmente independentes. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Queremos provar que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Temos então:

$$\begin{bmatrix} \alpha+\gamma & \alpha+\delta \\ \beta+\delta & \beta+\gamma+\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 0 \\ \alpha+\delta = 0 \\ \beta+\delta = 0 \\ \beta+\gamma+\delta = 0, \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando então o método de eliminação de Gauss à matriz dos coeficientes do sistema homogéneo anterior, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a única solução do sistema é: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0)$. Assim, o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

31. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determinemos uma base para W que inclua vectores de S.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 11 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-3L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ -2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{5}{11}L_2+L_3\to L_3 \\ -\frac{3}{11}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac{5}{11}L_2+L_3\to L_3 \\ -\frac{3}{11}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que sendo as 2 primeiras colunas da matriz em escada anterior independentes, o conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de W, atendendo também a que

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

32. A dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ é 6. Assim, para encontrar uma base de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, basta encontrar 6 matrizes do tipo 3×2 que sejam linearmente independentes. O seguinte conjunto de 6 matrizes do tipo 3×2:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente. Logo, é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. (Chama-se a esta base, a base canónica de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.)

33. **(i)** Uma matriz diagonal do tipo 3×3 tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

E tem-se

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é, o subespaço formado por todas as matrizes diagonais do tipo 3×3, é gerado pelo conjunto

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Além disso, este conjunto é linearmente independente. Temos então que o conjunto D é uma base do subespaço formado por todas as matrizes diagonais do tipo 3×3. Logo, o subespaço tem dimensão 3.

(ii) Uma matriz simétrica do tipo 3×3 tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

E tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é, o subespaço formado por todas as matrizes simétricas do tipo 3×3, é gerado pelo conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Além disso, este conjunto é linearmente independente. Temos então que o conjunto S é uma base do subespaço formado por todas as matrizes simétricas do tipo 3×3. Logo, o subespaço tem dimensão 6.

34. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \underset{2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(3, -6)\}\right)$$

e o conjunto $\{(3, -6)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(3, 1)\}\right),$$

e o conjunto $\{(3, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 1.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente à equação

$$3u_1 + u_2 = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_1, -3u_1) : u_1 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1, -3)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(1, -3)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{3}L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(3, 1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(3, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(3, 0, -6, 0)\}\right),$$

e o conjunto $\{(3, 0, -6, 0)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 1.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente à equação

$$3u_1 - 6u_3 = 0,$$

ou seja a

$$u_1 = 2u_3.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(2u_3, u_2, u_3, u_4) : u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$(2u_3, u_2, u_3, u_4) = u_3(2, 0, 1, 0) + u_2(0, 1, 0, 0) + u_4(0, 0, 0, 1),$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(2,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(2,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 3.$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz A que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\right),$$

e o conjunto $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_1,0,0,0) : u_1 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0,0)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(1,0,0,0)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

(iv)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{3}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,-1,0),(1,2,1),(-2,1,-1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,-1,0),(1,2,1),(-2,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,1,-2),(-1,2,1),(0,1,-1)\}\right) = L\left(\left\{(1,1,-2),(0,3,-1),(0,0,-\frac{2}{3})\right\}\right),$$

e quer o conjunto $\{(1,1,-2),(-1,2,1),(0,1,-1)\}$, quer o conjunto

$$\left\{(1,1,-2),(0,3,-1),(0,0,-\frac{2}{3})\right\},$$

são bases para $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Como se tem sempre:

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \operatorname{car} A + \operatorname{nul} A,$$

então

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

e

$$\operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

Alternativamente poderíamos verificar que se tem mesmo

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}.$$

Pelo método de eliminação de Gauss, temos

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \\ 3u_2 - u_3 = 0 \\ -\frac{2}{3}u_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$$

e como tal

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

(v)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz A que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right) = \mathbb{R}^3,$$

e o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\} \quad \text{e} \quad \text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

(vi)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(-1,0,-1),(3,2,3)\}\right)$$

e o conjunto $\{(-1,0,-1),(3,2,3)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A') = L\left(\{(-1,3,0,2),(0,2,2,0)\}\right),$$

e o conjunto $\{(-1,3,0,2),(0,2,2,0)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 2.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -u_1 + 3u_2 + 2u_4 = 0 \\ 2u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases} u_1 = 3u_2 + 2u_4 \\ u_3 = -u_2. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(3u_2 + 2u_4, u_2, -u_2, u_4) : u_2, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$(3u_2 + 2u_4, u_2, -u_2, u_4) = (3u_2, u_2, -u_2, 0) + (2u_4, 0, 0, u_4) = u_2(3,1,-1,0) + u_4(2,0,0,1),$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(3,1,-1,0),(2,0,0,1)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(3,1,-1,0),(2,0,0,1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

(vii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2,3,1),(2,3,4,1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,2,3,1),(2,3,4,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,2,3,-1),(0,-1,-4,2)\}\right),$$

e o conjunto $\{(1,2,3,-1),(0,-1,-4,2)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\mathrm{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 2.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 3u_3 - u_4 = 0 \\ -u_2 - 4u_3 + 2u_4 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases} u_1 = -2u_2 - 3u_3 + u_4 \\ u_2 = -4u_3 + 2u_4 \end{cases}$$

e ainda a

$$\begin{cases} u_1 = 5u_3 - 3u_4 \\ u_2 = -4u_3 + 2u_4. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(5u_3 - 3u_4, -4u_3 + 2u_4, u_3, u_4) : u_3, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$\begin{aligned} (5u_3 - 3u_4, -4u_3 + 2u_4, u_3, u_4) &= (5u_3, -4u_3, u_3, 0) + (-3u_4, 2u_4, 0, u_4) \\ &= u_3(5,-4,1,0) + u_4(-3,2,0,1), \end{aligned}$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(5,-4,1,0),(-3,2,0,1)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(5,-4,1,0),(-3,2,0,1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\mathrm{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

35. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Tem-se

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 9 - \dim(U+V).$$

Como $U+V$ é subespaço de W, tem-se

$$5=\dim V\leq \dim(U+V)\leq \dim W=7$$

e assim $\dim(U+V)\in\{5,6,7\}$. Logo,

$$\dim(U\cap V)\in\{2,3,4\}\,.$$

36. Determine bases e calcule as dimensões de $U+V$ e $U\cap V$, dizendo em que casos $U+V$ é a soma directa $U\oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U=L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right)\quad \text{e}\quad V=L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right).$$

Logo, $U+V=L(U\cup V)=L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1),(1,1,2),(-1,1,1)\}\right)$. Facilmente se verifica que

$$\{(1,-1,1),(0,1,1),(-1,1,1)\}$$

é uma base de $U+V$, ou melhor de $\mathbb{R}^3$. Logo, $\dim(U+V)=3$ e

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=2+2-3=1.$$

Seja $(x,y,z)\in U$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\-1&1&y\\1&1&z\end{array}\right]\underset{\substack{L_1+L_2\to L_2\\-L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&x+y\\0&1&z-x\end{array}\right]\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&x+y\\0&0&z-2x-y\end{array}\right].$$

Logo

$$U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z-2x-y=0\right\}.$$

Seja $(x,y,z)\in V$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\1&1&y\\2&1&z\end{array}\right]\underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2\\-2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&2&y-x\\0&3&z-2x\end{array}\right]\underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&2&y-x\\0&0&z-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}x\end{array}\right].$$

Logo

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 2z-3y-x=0\right\}.$$

Deste modo

$$U\cap V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z-2x-y=0\ \text{ e }\ 2z-3y-x=0\right\}=L\left(\{(1,3,5)\}\right)$$

e como tal, $\{(1,3,5)\}$ é uma base de $U\cap V$, tendo-se $\dim(U\cap V)=1$

Neste caso, como $U\cap V\neq\{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(ii) Sejam $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y-z=0\ \text{ e }\ x+y=0\}$, $V=L\left(\{(1,1,1)\}\right)$.

Tem-se $(1,1,1)\notin U$ pois $1+1-1\neq 0$. Logo

$$U\cap V=\{\mathbf{0}\}\quad \text{e}\quad \dim(U\cap V)=0.$$

Por outro lado, como

$$U = \left\{(-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(-1, 1, 0)\}\right),$$

tem-se

$$U + V = L\left(\{(-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}\right)$$

e sendo $\{(-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ uma base de $U + V$, $\dim(U + V) = 2$.

Além disso, como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$,

$$U + V = U \oplus V = L\left(\{(-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}\right).$$

(iii) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\}\right) \quad \text{e} \quad V = \{(x, y, z) : x + y + 3z = 0\}.$$

Seja $v \in U$, então

$$v = \alpha(1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 2) = (\alpha - \beta, \beta, \alpha + 2\beta),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para que v esteja também em V é preciso que:

$$\alpha - \beta + \beta + 3(\alpha + 2\beta) = 0.$$

isto é,

$$4\alpha + 6\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}\beta.$$

Assim,

$$v = \alpha(1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 2) = \left(-\frac{5}{2}\beta, \beta, \frac{1}{2}\beta\right) = \beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Logo,

$$U \cap V = \left\{\beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) : \beta \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}\right)$$

e como tal, $\left\{\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 1$

Tem-se

$$V = L\left(\{(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}\right).$$

Logo,

$$U + V = L(U \cup V) = L\left(\{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}\right).$$

Facilmente se verifica que $\{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (-1, 1, 0)\}$ é uma base de $U + V$, ou melhor de $\mathbb{R}^3$. Logo, $\dim(U + V) = 3$.

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U + V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(iv) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\right\}.$$

Tem-se $U = L\left(\{(1, 1, 1)\}\right)$ e $V = L\left(\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}\right)$.

Como $\{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $U + V = L(U \cup V)$ então

$$\dim(U + V) = 3 \quad \text{e} \quad U + V = U \oplus V = \mathbb{R}^3.$$

Como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ então $\dim(U \cap V) = 0$.

(v) Em $\mathcal{P}_2$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^2\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\right\}.$$

Seja $p(t) \in U$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha(1+t) + \beta\left(1-t^2\right).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & a_2 - a_1 + a_0 \end{array}\right].$$

Logo, tem-se

$$U = V$$

pelo que

$$U + V = U = V \quad \text{e} \quad U \cap V = U = V.$$

Assim, $\{1+t, 1-t^2\}$ é uma base de U, de V, de $U+V$ e de $U \cap V$, tendo-se

$$\dim(U+V) = \dim(U \cap V) = 2.$$

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(vi) Em $\mathcal{P}_3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^3\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = L\left(\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right).$$

Logo

$$U + V = L(U \cup V) = L\left(\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right).$$

Vejamos quais dos vectores do conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}$$

são linearmente independentes. Coloquemos então os coeficientes desses vectores como colunas de uma matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A'. \; (*)$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3\right\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V) = 4$ e deste modo $U+V = \mathcal{P}_3$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3\right\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U = 2$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V = 3$.

Logo,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim (U+V) = 2+3-4 = 1.$$

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

Determinemos $U \cap V$. Seja $p\,(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in U$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3+a_0-a_1 \end{array}\right].$$

Logo

$$U = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 0 \text{ e } a_3 + a_0 - a_1 = 0\right\}.$$

Seja $q\,(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in V$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{L_2+L_4 \to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1-a_0+a_3 \end{array}\right] \underset{L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2-2a_0+a_3 \end{array}\right].$$

Logo

$$V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_1 + a_2 - 2a_0 + a_3 = 0\right\}.$$

Deste modo

$$U \cap V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 0 \text{ e } a_0 - a_1 + a_3 = 0 \text{ e } -2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\} =$$

$$= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$U \cap V = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 - a_1 + a_3 = 0 \;\text{ e }\; -a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \;\text{ e }\; a_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 = 2a_3 \;\text{ e }\; a_1 = 3a_3 \;\text{ e }\; a_2 = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ 2a_3 + 3a_3 t + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a_3 \left(2 + 3t + t^3\right) \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{2 + 3t + t^3\right\}\right).$$

e como tal, $\{2 + 3t + t^3\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim (U \cap V) = 1$.

(vii) Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(2,-2,1,-2), (-1,1,1,3), (0,0,-6,-8), (-1,1,-5,-5)\}\right)$$

e

$$V = L\left(\{(0,0,0,-1), (0,1,2,3), (0,2,4,8)\}\right).$$

Atendendo a que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & -5 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -8 & -5 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3 \to L_3 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & -6 & -9/2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3/2 & -6 & -9/2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{4}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(2,-2,1,-2), (-1,1,1,3), (0,1,2,3), (0,2,4,8)\}$$

é uma base de $U + V$, tendo-se $\dim (U + V) = 4$ e deste modo $U + V = \mathbb{R}^4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(2,-2,1,-2), (-1,1,1,3)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U = 2$, e como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \\ 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ 4L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{3L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[3L_1+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-8L_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V = 2$.

Logo,

$$\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2+2-4 = 0.$$

Neste caso, como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ então

$$U + V = U \oplus V = \mathbb{R}^4.$$

(viii) Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços:

$$U = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y+3z=0 \ \text{ e } \ y+2z+3w=0\right\}$$

e

$$V = L\left(\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}\right).$$

Seja $(x,y,z,w)\in V$. Então existem $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = \alpha(2,5,-4,1)+\beta(0,9,-6,1)+\gamma(-4,-1,2,-1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & x \\ 5 & 9 & -1 & y \\ -4 & -6 & 2 & z \\ 1 & 1 & -1 & w \end{array}\right] \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & w \\ 5 & 9 & -1 & y \\ -4 & -6 & 2 & z \\ 2 & 0 & -4 & x \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-5L_1+L_2\to L_2 \\ 4L_1+L_3\to L_3 \\ -2L_1+L_4\to L_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{-5L_1+L_2\to L_2 \\ 4L_1+L_3\to L_3 \\ -2L_1+L_4\to L_4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & w \\ 0 & 4 & 4 & y-5w \\ 0 & -2 & -2 & z+4w \\ 0 & -2 & -2 & x-2w \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4\to L_4}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & w \\ 0 & 4 & 4 & y-5w \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}w+\frac{1}{2}y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-\frac{9}{2}w+\frac{1}{2}y \end{array}\right] \quad (*)$$

Logo, tem-se

$$V = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : \frac{3}{2}w+\frac{1}{2}y+z=0 \ \text{ e } \ x-\frac{9}{2}w+\frac{1}{2}y=0\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y+2z+3w=0 \ \text{ e } \ x+2y+3z=0\right\} = U$$

pelo que

$$U+V = U = V \quad \text{e} \quad U\cap V = U = V.$$

Atendendo ainda a (*), o conjunto $\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}$ é linearmente dependente, sendo linearmente independente o seguinte seu subconjunto

$$\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1)\}.$$

Assim, $\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1)\}$ é uma base de U, de V, de $U+V$ e de $U\cap V$, tendo-se

$$\dim(U+V)=\dim(U\cap V)=2.$$

Neste caso, como $U\cap V\neq\{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(ix) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}.$$

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}.$$

Atendendo a que

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\-1&-2&-1&-2&-1&-1\\-1&-2&-2&-3&-3&-2\\-2&0&-2&0&2&2\\0&-3&1&-2&-4&-5\end{bmatrix}\underset{\substack{L_1+L_2\to L_2\\L_1+L_3\to L_3\\2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&-1&-1&-2&-2&-1\\0&2&0&2&4&4\\0&-3&1&-2&-4&-5\end{bmatrix}\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3\\2L_2+L_4\to L_4\\-3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3\\2L_2+L_4\to L_4\\-3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&-1&-2&-1\\0&0&0&0&4&4\\0&0&1&1&-4&-5\end{bmatrix}\underset{L_3+L_5\to L_5}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&-1&-2&-1\\0&0&0&0&4&4\\0&0&0&0&-6&-6\end{bmatrix}\underset{\frac{3}{2}L_4+L_5\to L_5}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{3}{2}L_4+L_5\to L_5}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&-1&-2&-1\\0&0&0&0&4&4\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A'\quad(*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1),(1,-1,-3,2,-4)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V)=4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U=3$, e como

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\-1&-2&-1\\0&4&4\\0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{L_1+L_2\to L_2\\L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&0\\0&4&4\\0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{L_2+L_3\to L_3\\-4L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V = 3$.

Logo,

$$\dim(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3+3-4 = 2.$$

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

Determinemos uma base para $U \cap V$.

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & -2 & -1 & x_2 \\ -1 & -2 & -2 & x_3 \\ -2 & 0 & -2 & x_4 \\ 0 & -3 & 1 & x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & -1 & x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 0 & 2x_1+x_4 \\ 0 & -3 & 1 & x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -1 & -x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_1+2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 1 & -3x_1-3x_2+x_5 \end{array}\right] \underset{L_3+L_5\to L_5}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -1 & -x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_1+2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_1-4x_2+x_3+x_5 \end{array}\right]$$

tem-se

$$U = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : 4x_1+2x_2+x_4 = 0 \ \text{ e } \ -3x_1-4x_2+x_3+x_5=0\right\}.$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -2 & -1 & -1 & x_2 \\ -3 & -3 & -2 & x_3 \\ 0 & 2 & 2 & x_4 \\ -2 & -4 & -5 & x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ 3L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 2 & x_4 \\ 0 & -2 & -3 & 2x_1+x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_2+L_4\to L_4 \\ L_3+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_2+L_4\to L_4 \\ L_3+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -4x_1-2x_2+x_4 \\ 0 & -2 & -2 & 5x_1+x_3+x_5 \end{array}\right] \underset{2L_2+L_5\to L_5}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -4x_1-2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 9x_1+2x_2+x_3+x_5 \end{array}\right]$$

tem-se

$$V = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : -4x_1-2x_2+x_4 = 0 \ \text{ e } \ 9x_1+2x_2+x_3+x_5=0\right\}.$$

Logo

$$U\cap V = \left\{\begin{array}{c} (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : 4x_1+2x_2+x_4=0 \ \text{ e } \ -3x_1-4x_2+x_3+x_5=0 \\ \text{e } \ -4x_1-2x_2+x_4=0 \ \text{ e } \ 9x_1+2x_2+x_3+x_5=0 \end{array}\right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3\to L_3 \\ 3L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underset{\frac{3}{4}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underset{-4L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[-4L_2+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{4L_2\to L_2 \\ \frac{3}{2}L_3+L_4\to L_{44}}]{} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -10x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_2 = \frac{2}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{ \left(-\frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_5, \frac{2}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_5, x_3, 0, x_5 \right) \in \mathbb{R}^5 : x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= L\left(\left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0, 0 \right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 1 \right) \right\} \right). \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\left\{ \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0, 0 \right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0, 1 \right) \right\}$$

gera $U \cap V$ e é linearmente independente, então é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 2$.

(x) Atendendo a que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1+L_3\to L_3 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2L_3+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,0,-1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,-2), (1,1,1,1)\}$$

é uma base de $U + V$, tendo-se $\dim(U + V) = 4$ e assim $U + V = \mathbb{R}^4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(1,0,-1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,-2)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U = 3$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ -2L_1+L_4\to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2L_2+L_3\to L_3 \\ 7L_2+L_4\to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3L_3+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V = 3$.

Logo,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3+3-4 = 2.$$

Uma base para $U \cap V$.

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & -2 & x_4-x_2 \end{array}\right] \underset{2L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1-3x_2+2x_3+x_4 \end{array}\right]$$

tem-se

$$U = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1-3x_2+2x_3+x_4 = 0\right\}$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3 \\ -L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_3-x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_4-x_1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2+L_3 \to L_3 \\ 2L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{L_2+L_3 \to L_3 \\ 2L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2x_2-3x_1+x_4 \end{array}\right] \underset{-L_3+L_4 \to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-x_1-x_3+x_4 \end{array}\right]$$

tem-se

$$V = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1+x_2-x_3+x_4 = 0\right\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1-3x_2+2x_3+x_4 = 0 \ \text{ e } \ -x_1+x_2-x_3+x_4 = 0\right\} = \\ &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 3x_4 \ \text{ e } \ x_1 = -x_3+4x_4\right\} = \\ &= \{(-x_3+4x_4, 3x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4) \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-1,0,1,0), (4,3,0,1)\}\right) \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\{(-1,0,1,0), (4,3,0,1)\}$$

gera $U \cap V$ e é linearmente independente, então é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 2$.

37.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\2&-2&-1&2&1\\-1&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_3\to L_3\\L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&-1&-2&-1\\0&0&2&4&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A'.$$

(i)

$$\text{car}A=\dim\mathcal{C}(A)=\dim\mathcal{L}(A)=3.$$

Como A tem 5 colunas e

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A=\text{car}A+\text{nul}A,$$

então

$$\text{nul}A=2,\qquad \text{isto é,}\quad \dim\mathcal{N}(A)=2.$$

(ii) As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A)=L\left(\{(1,0,2,-1,0),(0,2,-1,2,0),(1,0,1,1,0)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,2,-1,0),(0,2,-1,2,0),(1,0,1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Por definição:

$$\mathcal{N}(A)=\left\{u\in\mathbb{R}^5 : Au=\mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au=\mathbf{0}\Leftrightarrow A'u=\mathbf{0}.$$

A equação matricial

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases}u_1-u_2+2u_4+u_5=0\\2u_3+4u_4=0\\-u_5=0\end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases}u_1=u_2-2u_4\\u_3=-2u_4\\u_5=0.\end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A)=\left\{(u_2-2u_4,u_2,-2u_4,u_4,0) : u_2,u_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

Como

$$\begin{aligned}(u_2 - 2u_4, u_2, -2u_4, u_4, 0) &= (u_2, u_2, 0, 0, 0) + (-2u_4, 0, -2u_4, u_4, 0) \\ &= u_2(1, 1, 0, 0, 0) + u_4(-2, 0, -2, 1, 0),\end{aligned}$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -2, 1, 0)\}\right).$$

Facilmente se verifica que o conjunto $S = \{(1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -2, 1, 0)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

(iii) A solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$ é dada por

$$\lambda(1, 1, 0, 0, 0) + \mu(-2, 0, -2, 1, 0),$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(iv) Uma solução particular de $Au = b$, com $b = (1, 0, 2, -1, 0)$, é por exemplo $u = (1, 0, 0, 0, 0)$. Logo, a solução geral de $Au = b$ é dada por:

$$(1, 0, 0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0, 0, 0) + \mu(-2, 0, -2, 1, 0).$$

Observação. Note que se tem sempre:

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \text{car}A + \text{nul}A.$$

38. **(i)** Se $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ é tal que car $A = 3$ e car$[A \mid B] = 3$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 3.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

Como car$A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 3$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 0.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e determinado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, não existe nenhum parâmetro.

(ii) Se $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ é tal que car $A = 2$ e car$[A \mid B] = 3$ então

$$\text{car}\, A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

Como car$A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\text{nul}\, A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 1.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é impossível.

(iii) Se $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é tal que $\operatorname{car} A = 1$ e $\operatorname{car}[A \mid B] = 1$ então

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 1.$$

Logo,

$$\operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

Como $\operatorname{car} A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 1$ então

$$\operatorname{nul} A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 2.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e indeterminado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, existem dois parâmetros.

(iv) Se $A \in M_{5\times 9}(\mathbb{R})$ é tal que $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{car}[A \mid B] = 2$ então

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 7.$$

Como $\operatorname{car} A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\operatorname{nul} A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 3.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e indeterminado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, existem 7 parâmetros.

(v) Se $A \in M_{9\times 5}(\mathbb{R})$ é tal que $\operatorname{car} A = 2$ e $\operatorname{car}[A \mid B] = 3$ então

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 3.$$

Como $\operatorname{car} A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\operatorname{nul} A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 7.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é impossível.

(vi) Se $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ é tal que $\operatorname{car} A = 0$ e $\operatorname{car}[A \mid B] = 0$ então

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 0.$$

Logo,

$$\operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 4.$$

Como $\operatorname{car} A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 0$ então

$$\operatorname{nul} A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 4.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e indeterminado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, existem 4 parâmetros.

(vii) Se $A \in M_{6\times 2}(\mathbb{R})$ é tal que car $A = 2$ e car$[A \mid B] = 2$ então

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = 2.$$

Logo,

$$\operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

Como car$A^T = \dim \mathcal{L}(A^T) = \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$ então

$$\operatorname{nul} A^T = \dim \mathcal{N}(A^T) = 4.$$

O correspondente sistema de equações lineares não homogéneo $AX = B$ é possível e determinado. Neste caso, na solução geral de $AX = B$, não existe nenhum parâmetro.

39. Queremos encontrar A tal que

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(2,0,1)\}\right).$$

Por definição

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Por outro lado, temos

$$L\left(\{(2,0,1)\}\right) = \{\lambda(2,0,1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{(u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_2 = 0 \ \text{ e } \ u_1 = 2u_3\right\}.$$

Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

verifica

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(2,0,1)\}\right),$$

pois

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -u_1 + 2u_3 = 0 \\ \\ u_2 = 0. \end{cases}$$

40. Não é possível encontrar A tal que

$$(1,1,1) \in \mathcal{L}(A) \quad \text{ e } \quad (1,0,0) \in \mathcal{N}(A),$$

pois se $(1,0,0) \in \mathcal{N}(A)$ então a primeira entrada de todas as linhas de A é 0. Pelo que, nesse caso, não se pode ter $(1,1,1) \in \mathcal{L}(A)$.

41. Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que nul $A = 3$. Uma vez que

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \operatorname{car} A + \operatorname{nul} A,$$

então $\operatorname{car} A = 0$. Isto é, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

42. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A).$$

Logo, o n^o de linhas de A é igual ao n^o de colunas de A. Isto é, $m = n$. Além disso, como

$$n = \operatorname{car} A + \operatorname{nul} A,$$

tem-se

$$n = 2 \dim \mathcal{N}(A).$$

Pelo que, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

43. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{car} A = n$. Logo, A é invertível. Isto é, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Além disso, se A fôr tal que $A^2 = A$, então

$$A = AI = A(AA^{-1}) = (AA)A^{-1} = A^2A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Logo, $A = I$.

44. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

(i) Tem-se $v = (1,2) + 3(0,1)$. Logo, 1 e 3 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_1$.

(ii) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $(1,2) = -(1,1) + (2,3)$ e $(0,1) = -2(1,1) + (2,3)$.

(iii) As coordenadas de $v = (1,5)$ em relação à base $\mathcal{B}_2$, são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

uma vez que 1 e 3 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_1$.

(iv) Tem-se

$$v = (1,5) = -7(1,1) + 4(2,3).$$

(v) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $(1,1) = (1,2) - (0,1)$ e $(2,3) = 2(1,2) - (0,1)$.

Observação:

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = (S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2})^{-1} \quad \text{e} \quad S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = (S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1})^{-1}.$$

(vi) As coordenadas de $v = (1,5)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$, são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que -7 e 4 são as coordenadas de v em relação à base $\mathcal{B}_2$.

45. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$. Determinemos $\mathcal{B}_2$.
Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então $w_1 = 2v_1 + v_2 = 2(1,2) + (0,1) = (2,5)$ e $w_2 = v_1 + v_2 = (1,2) + (0,1) = (1,3)$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \{(2,5), (1,3)\}.$$

46. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determinemos $\mathcal{B}_1$.
Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

então $v_1 = 2\,(-1+t) - (1+t) = -3 + t$ e $v_2 = 3\,(-1+t) + 2\,(1+t) = -1 + 5t$. Logo,

$$\mathcal{B}_1 = \{-3 + t, -1 + 5t\}.$$

47. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Sejam $1, 2$ e 3 as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base $\mathcal{B}_2$. Determinemos as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$.

Tem-se

$$p(t) = 1 + 2(1+t) + 3\left(1+t+t^2\right) = 6 + 5t + 3t^2 = \alpha 1 + \beta(1-t) + \gamma t^2.$$

É fácil ver que $\alpha = 11,\ \ \beta = -5\ $ e $\ \gamma = 3$.

Resolução alternativa: Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $1 = 1 + 0(1-t) + 0t^2,\ \ 1+t = 2 - (1-t) + 0t^2\ $ e $\ 1+t+t^2 = 2 - (1-t) + t^2$. Logo, as coordenadas de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$ são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde $1, 2$ e 3 são as coordenadas de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_2$.

(ii) Determinemos a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

Como

$$1 = 1 \times 1 + 0(1+t) + 0(1+t+t^2)$$

$$1 - t = 2 \times 1 - (1+t) + 0(1+t+t^2)$$

$$t^2 = 0 \times 1 - (1+t) + (1+t+t^2)$$

então

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, bastaria ver que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \left(S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, como

$$2 - t + t^2 = 1 + (1-t) + t^2$$

as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2 são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja

$$2 - t + t^2 = 3 - 2(1+t) + \left(1+t+t^2\right).$$

48. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}_1$. Determinemos $\mathcal{B}_1$.
Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

então $w_1 = 2v_1 - v_2$ e $w_2 = 3v_1 + 2v_2$. Isto é, tem-se o sistema

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 = t \\ \\ 3v_1 + 2v_2 = 1 - t, \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | & t \\ 3 & 2 & | & 1-t \end{bmatrix}.$$

Pelo método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | & t \\ 3 & 2 & | & 1-t \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{2}L_1 + L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & | & t \\ 0 & \frac{7}{2} & | & 1 - \frac{5}{2}t \end{bmatrix}.$$

Logo, $v_2 = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t$ e $v_1 = \frac{1}{2}(v_2 + t) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}t$. Logo,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \frac{1}{7} + \frac{1}{7}t, \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t \right\}.$$

49. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determinemos $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$. Uma vez que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

então $v_1 = w_1 + 2w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 + w_2 - w_3$ e $v_3 = 2w_1 + w_2 + w_3$. Isto é, tem-se o sistema

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 - w_3 = (1,0,1) \\ w_1 + w_2 - w_3 = (1,1,0) \\ 2w_1 + w_2 + w_3 = (0,0,1), \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Pelo método de eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & (1,0,1) \\ 1 & 1 & -1 & (1,1,0) \\ 2 & 1 & 1 & (0,0,1) \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & (1,0,1) \\ 0 & -1 & 0 & (0,1,-1) \\ 0 & -3 & 3 & (-2,0,-1) \end{array}\right] \underset{-3L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-3L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & (1,0,1) \\ 0 & -1 & 0 & (0,1,-1) \\ 0 & 0 & 3 & (-2,-3,2) \end{array}\right].$$

Tem-se então o sistema

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 - w_3 = (1,0,1) \\ \\ -w_2 = (0,1,-1) \\ \\ 3w_3 = (-2,-3,2). \end{cases}$$

Logo, $w_3 = \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right)$, $w_2 = (0,-1,1)$ e $w_1 = (1,0,1) - 2(0,-1,1) + \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right), (0,-1,1), \left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

50. Sejam

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determinemos a matriz $S_{B_1\to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

Queremos encontrar $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Logo, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Isto é, tem-se os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 1 = -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 1 = 2a_2 + 2a_3 \\ 0 = -2a_3 + 2a_4 \\ 1 = 4a_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ 0 = 2b_2 + 2b_3 \\ 0 = -2b_3 + 2b_4 \\ 1 = 4b_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ 0 = 2c_2 + 2c_3 \\ 1 = -2c_3 + 2c_4 \\ 1 = 4c_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ 1 = 2d_2 + 2d_3 \\ -1 = -2d_3 + 2d_4 \\ -1 = 4d_4 \end{cases}$$

que são equivalentes a

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{4} \\ a_3 = \frac{1}{4} \\ a_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \\ b_2 = -\frac{1}{4} \\ b_3 = \frac{1}{4} \\ b_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ \\ c_2 = \frac{1}{4} \\ \\ c_3 = -\frac{1}{4} \\ \\ c_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} d_1 = \frac{1}{4} \\ \\ d_2 = \frac{1}{4} \\ \\ d_3 = \frac{1}{4} \\ \\ d_4 = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Logo, a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Assim, as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2 são dadas por

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ \frac{3}{2} \\ \\ 1 \\ \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

51. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1, -1)$ e $(2, 2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1 + t$ e $1 - t$ em relação à base B. Determine B.

Tem-se

$$\begin{cases} 1 + t = v_1 - v_2 \\ 1 - t = 2v_1 + 2v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t \\ -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t \end{bmatrix}.$$

Logo $B = \left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t, -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t\right\}$.

52. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1, -1)$ e $(2, 2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1, 1)$ e $(2, -2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

Seja

$$S_{B_1\to B_2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{cases} 2 = a - b \\ 2 = c - d \\ 2 = a + b \\ -2 = c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e assim} \quad S_{B_1\to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

5^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas (Transformações lineares)

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $T_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(x) = ax + b$. Determine os valores de a e de b para os quais $T_{a,b}$ é linear.

2. Diga quais das seguintes transformações são lineares. Determine para cada transformação linear a correspondente matriz que a representa em relação às respectivas bases canónicas (ordenadas). Determine também, se possível, para cada uma dessas transformações lineares, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$). Diga ainda quais são injectivas, sobrejectivas e bijectivas.

   (i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$.

   (ii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (1 - y, 2x)$.

   (iii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, 2x, -x)$.

   (iv) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (0, 0)$.

   (v) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $T(x, y) = -3x$.

   (vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (0, -1, 2)$.

   (vii) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$.

   (viii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x^2 - y, 2y)$.

   (ix) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$.

   (x) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x, y, z) = (-z, y - 2z, 2y, y + z)$.

   (xi) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0, 0)$.

   (xii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, x - z)$.

   (xiii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, y, z)$.

   (xiv) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Aplicação que ao ponto de coordenadas (x, y) faz corresponder o ponto obtido por uma rotação de amplitude θ em torno da origem e no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio.

   (xv) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com $T(p(t)) = 2p(1 - t) - tp'(t)$,

   onde $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ e p' é a derivada de 1^a ordem de p.

   (xvi) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com

   $$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2.$$

   (xvii) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

   $$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Determine, se possível, bases para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ e para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$, bem como as respectivas dimensões (de $\mathcal{N}(T)$ e de $\mathcal{I}(T)$).

4. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,0)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1,-2), \quad T(v_2) = (-3,1).$$

(i) Calcule $T(2,1)$.

(ii) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(iv) Determine as matrizes de mudança de base $S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}}$ e $S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c^2}$. Determine as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$.

(v) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$.

(vi) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

5. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são dadas respectivamente por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine as expressões gerais de $(T_1 \circ T_2)(x,y)$ e $(T_2 \circ T_1)(x,y,z)$ para quaisquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2y, y-x, -x).$$

Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3 \quad \text{com} \quad v_1 = (1,0,-1), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (-1,1,1).$$

7. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear

$$S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ \text{ definida por } \ S(A) = A^T.$$

Determine a matriz $M(S;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa S em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$.

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3, \quad \text{com} \quad v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \qquad T(v_2 + v_3) = v_1, \qquad T(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3.$$

(i) Calcule $T(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.

(ii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Determine duas bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1 = (1,1), \quad u_2 = (2,-1), \quad v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,2), \quad v_3 = (0,1,-1),$$

é representada pela matriz

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{B}_1' = \left\{u_1', u_2'\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2' = \left\{v_1', v_2', v_3'\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1' = (1,0), \quad u_2' = (1,1), \quad v_1' = (1,0,0), \quad v_2' = (1,1,0), \quad v_3' = (1,1,1).$$

(i) Determine as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$.

(ii) Determine as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$.

(iii) Determine as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$.

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(vi) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_1';\mathcal{B}_2')$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1'$ e $\mathcal{B}_2'$.

10. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+y-z).$$

(i) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases canónicas (ordenadas) $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,1)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b)$. Verifique se existe algum vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual essa equação seja possível e determinada.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que a representa em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x, y, z) = (3, 3, 0)$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja impossível.

(vi) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que a representa em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0),$$

é dada por

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga, justificando, se T é sobrejectiva e se T é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$.

(iii) Mostre que a equação linear $T(x, y, z) = (2, 4, 0)$ não tem soluções.

(iv) Determine $T(1, 1, 1)$ e resolva a equação linear $T(x, y, z) = (-1, -1, -\frac{1}{3})$.

(v) Considere a equação linear $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Verifique se existe algum vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual essa equação seja possível e indeterminada.

(vi) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - 4z, z).$$

(i) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Mostre que T é injectiva e determine a expressão geral de T^{-1}, isto é, determine $T^{-1}(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

(iii) Justifique que T é um isomorfismo.

(iv) Determine a solução geral da equação linear $T(x,y,z)=(1,1,2)$.

14. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2}=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação

$$T:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\ \text{ definida por }\ T(X)=AX-XA,\quad\text{com}\quad A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que T é linear.

(ii) Determine a expressão geral de T.

(iii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(v) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

15. Considere as transformações lineares $T_1,T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x,y)=(x+y,x-y)\quad\text{e}\quad T_2(x,y)=(2x+y,x-2y).$$

(i) Determine as matrizes $M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ e $M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representam respectivamente T_1 e T_2 em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Determine a matriz $A=M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2\circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Determine, usando a alínea anterior, a expressão geral de $T_2\circ T_1$, isto é, $(T_2\circ T_1)(x,y)$ para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(iv) Determine, directamente a partir das expressões de T_1 e de T_2, a expressão geral de $T_2\circ T_1$.

(v) Mostre que T_1 e T_2 são invertíveis.

(vi) Determine as expressões gerais de $T_1^{-1}(x,y),T_2^{-1}(x,y)$ e $\left(T_1^{-1}\circ T_2^{-1}\right)(x,y)$ para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M((T_2\circ T_1)^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa $(T_2\circ T_1)^{-1}$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ e verifique que é igual a A^{-1}, onde A é a matriz determinada em **(ii)**.

(viii) Verifique que $(T_2\circ T_1)^{-1}=T_1^{-1}\circ T_2^{-1}$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica ordenada ($\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$) de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$M\left(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que T é injectiva e resolva a equação linear $T(x,y) = (1,2)$.

17. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T_1(x,y) = x$. Seja

$$M\left(T_2;\mathcal{B}_c^1;\mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa a aplicação linear $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ em relação às bases canónicas ordenadas $\mathcal{B}_c^1 = \{1\}$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determine uma base para o núcleo: $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

18. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é sobrejectiva.

19. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x,y,z) = (2x+y, y+2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(2,1),(1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz:

$$M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

(ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.

(iii) Diga, justificando, se se tem $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$ e determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)$.

(iv) Determine a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

(v) Determine a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x,y) = \left(\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$.

20. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x,y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine $T_2(0,1,0)$ e $T_2(0,0,1)$.

(ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

(iii) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$.

21. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3$ definida por

$$T(1,1,-1) = 2 + 2t^2, \quad T(1,-1,1) = -t - t^3 \quad \text{e} \quad T(-1,1,1) = 2 + t + 2t^2 + t^3.$$

(i) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T)$. Diga se T é injectiva.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

(iv) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = 1 + t + t^2 + t^3$.

22. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_\lambda(x,y,z) = z - y + \lambda\,(y - x)\,t + xt^2.$$

(i) Determine, se possível, uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é injectiva.

(ii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T_\lambda)$. Diga se T_λ é sobrejectiva.

(iii) Considere $\lambda = 0$ e resolva a equação linear $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$.

23. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(p\left(t\right)\right) = p'\left(t\right) - 2p\left(t\right),$$

onde $p'\left(t\right)$ é a derivada de primeira ordem de $p\left(t\right)$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$, determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

(iii) Justifique que T é um isomorfismo e verifique que a expressão geral do isomorfismo T^{-1} é dada por

$$T^{-1}\left(p\left(t\right)\right) = -\frac{1}{2}p\left(t\right) - \frac{1}{4}p'\left(t\right) - \frac{1}{8}p''\left(t\right)$$

para todo o $p\left(t\right) \in \mathcal{P}_2$, onde $p''\left(t\right)$ é a derivada de segunda ordem de $p\left(t\right)$.

(iv) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $p'\left(t\right) - 2p\left(t\right) = \left(2 - 3t\right)^2$.

24. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(p\left(t\right)\right) = t^2 p''\left(t\right) - 2p\left(t\right),$$

onde $p''\left(t\right)$ é a derivada de segunda ordem de $p\left(t\right)$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$, determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

(iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

(iv) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, as equações diferenciais lineares:

a) $t^2p''(t) - 2p(t) = 2 - t$; **b)** $2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t$.

25. Seja U o subespaço das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, isto é,

$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\right\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(A) = AB + BA$$

com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Determine uma base para U e calcule a matriz que representa T em relação a essa base.

(iii) Determine, se possível, uma base para $\mathcal{N}(T)$ e uma base para $\mathcal{I}(T)$ e diga, justificando, se T é injectiva e/ou sobrejectiva.

(iv) Resolva, em U, a equação linear $T(A) = B$.

26. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que a representa em relação às bases ordenadas

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Justifique que T é um isomorfismo e determine a expressão geral do isomorfismo T^{-1}, isto é, determine

$$T^{-1}\left(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3\right).$$

(iii) Resolva a equação linear $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$.

27. Seja U o espaço linear das funções reais de variável real duas vezes diferenciável. Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(f) = f'' - 2f' + f.$$

Considere o subespaço $S = \{f \in U : f'' - 2f' + f = \mathbf{0}\}$ de U.

(i) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S. Sugestão: Mostre que se $f \in S$, então $f(t)\,e^{-t}$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1.

(ii) Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

(iii) Determine a única solução f da equação diferencial linear $T(f) = 1$ que verifica $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

Resolução da 5ª Ficha de exercícios

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. A aplicação $T_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(x) = ax + b$ é linear se e só se $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

2. (i) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = (1, 3)$ e $T(0, 1) = (2, -1)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2y, 3x - y) = (0, 0)\right\} = \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y \ \text{ e } \ 3x = y\right\} = \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Logo T é injectiva e $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x + 2y, 3x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 3) + y(2, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 3), (2, -1)\}).$$

Como o conjunto $\{(1, 3), (2, -1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1, 3), (2, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva. Sendo T sobrejectiva e tendo-se dim (espaço de partida) = dim (espaço de chegada) então T também é injectiva, como se constatou no facto de se ter $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Observação: T é injectiva se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0}$ é o vector nulo do espaço de partida.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x, y) = M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\right) = \{(0, 0)\}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1, 3), (2, -1)\}).$$

O conjunto $\{(1, 3), (2, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(ii) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (1-y, 2x)$. T não é linear pois $T(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$.

(iii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x, 2x, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,2,-1)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,2x,-x) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y(0,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então

$$\{(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x,2x,-x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,2,-1) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,2,-1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1,2,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,2,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(1,2,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(iv) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z)=(0,0)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=T(0,1,0)=T(0,0,1)=(0,0)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=(0,0)\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^3.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c^3$. Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=3$. Uma vez que

$$\dim\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}}=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=0$. De facto

$$\mathcal{I}(T)=\{(0,0)\}.$$

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)\neq\mathbb{R}^2$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ nos espaços de partida e de chegada respectivamente, tem-se

$$T(x,y,z)=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^3=L\left(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T)=\mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\right)=\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=\{(0,0)\}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c^3$.

(v) Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ com $T(x,y)=-3x$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c)=\begin{bmatrix}-3&0\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0)=-3$ e $T(0,1)=0$. Note que $\mathcal{B}_c=\{1\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T)&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:T(x,y)=0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-3x=0\right\}=\\&=\left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2:y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{y(0,1)\in\mathbb{R}^2:y\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(0,1)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{-3x : x \in \mathbb{R}\} = L(\{1\}).$$

Como o conjunto $\{1\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, a base canónica de $\mathbb{R}$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}$, isto é, T é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y) = M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0,1)\})$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{-3\}) = L(\{1\}).$$

O conjunto $\{(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (0,-1,2)$. T não é linear pois $T(0,0,0) = (0,-1,2) \neq (0,0,0)$.

(vii) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (2,0,-1)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0,0,0)\} = \{x \in \mathbb{R} : (2x, 0, -x) = (0,0,0)\} = \{0\}.$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 1$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(2x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(2,0,-1) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(2,0,-1)\}).$$

Como o conjunto $\{(2,0,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(2,0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ então T é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\,[x]\,.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{0\}\right) = \{0\}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(2,0,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(2,0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(viii) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z) = (x^2-y,2y)$. T não é linear, pois por exemplo:

$$T\left((1,0,0)+(1,0,0)\right) = T(2,0,0) = (4,0) \neq (2,0) = T(1,0,0)+T(1,0,0).$$

(ix) Seja $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z,w) = (x-y,3w)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0,0) = (1,0)$, $T(0,1,0,0) = (-1,0)$, $T(0,0,1,0) = (0,0)$ e $T(0,0,0,1) = (0,3)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : T(x,y,z,w) = (0,0)\right\} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (x-y,3w) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x=y \text{ e } w=0\right\} = \left\{(y,y,z,0) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{y(1,1,0,0)+z(0,0,1,0) \in \mathbb{R}^4 : y,z \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então

$$\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^4}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \{(x-y,3w) : x,y,w \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0)+y(-1,0)+w(0,3) : x,y,w \in \mathbb{R}\} = \\ &= L\left(\{(1,0),(-1,0),(0,3)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0),(0,3)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0),(0,3)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^4$ no espaço de partida e $\mathcal{B}_c^2$ no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z,w) = M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^4;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right)$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\left[\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right]\right]\right) = L\left(\{(1,0),(0,3)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(1,0),(0,3)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(x) Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x,y,z) = (-z, y-2z, 2y, y+z)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,2,1)$ e $T(0,0,1) = (-1,-2,0,1)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (-z, y-2z, 2y, y+z) = (0,0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,0,0)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{N}(T)$ então $\{(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(-z, y-2z, 2y, y+z) : y,z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então

$$\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^4$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,0,0)\}\right) \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^4)\right) = \mathcal{C}\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right]\right) = L\left(\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e o conjunto $\{(0,1,2,1),(-1,-2,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xi) Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0,0)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (0,0)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = (0,0)\} = \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c = \{1\}$. Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 0$. De facto

$$\mathcal{I}(T) = \{(0,0)\}.$$

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^2$ então T não é sobrejectiva. Como $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$ então T não é injectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c$ e $\mathcal{B}_c^2$ nos espaços de partida e de chegada respectivamente, tem-se

$$T(x) = M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathbb{R} = L(\{1\})$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c;\mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0)\}.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$ poderá ser a base canónica $\mathcal{B}_c = \{1\}$.

(xii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x+2y, 3z, x-z)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,0,1)$, $T(0,1,0) = (2,0,0)$ e $T(0,0,1) = (0,3,-1)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2y, 3z, x-z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \{(x+2y, 3z, x-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1,0,1) + y(2,0,0) + z(0,3,-1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= L(\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então

$$\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&3\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z)=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T)&=\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&3\\1&0&-1\end{bmatrix}\right)=\\&=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\1&0&-1\\0&0&3\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-2&-1\\0&0&3\end{bmatrix}\right)=\{(0,0,0)\}\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T)=\mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)=\mathcal{C}\left(\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&3\\1&0&-1\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,0,1),(2,0,0),(0,3,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xiii) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z)=(x,y,z)$. T é linear e tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0)=(1,0,0)$, $T(0,1,0)=(0,1,0)$ e $T(0,0,1)=(0,0,1)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:T(x,y,z)=(0,0,0)\right\}=\{(0,0,0)\}.$$

Logo, $\dim\mathcal{N}(T)=0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim\underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}}=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T),$$

então $\dim\mathcal{I}(T)=3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T)=\{(x,y,z):x,y,z\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^3,$$

isto é, T é sobrejectiva. Como o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

(xiv) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. T é linear e

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$ e $T(0,1) = (-\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta)$.

Atendendo ao ex^o 4 (viii) da ficha 2, tem-se, para todo o $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0)\right\} = \{(0,0)\}$$

e $\dim \mathcal{N}(T) = 0$, isto é, T é injectiva.

Sendo T injectiva e tendo-se dim (espaço de partida) = dim (espaço de chegada) então T também é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Como o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xv) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t)) = 2p(1-t) - tp'(t).$$

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(p_1(t) + p_2(t)) &= T((p_1+p_2)(t)) = 2(p_1+p_2)(1-t) - t(p_1+p_2)'(t) = \\ &= 2p_1(1-t) + 2p_2(1-t) - tp_1'(t) - tp_2'(t) = \\ &= 2p_1(1-t) - tp_1'(t) + 2p_2(1-t) - tp_2'(t) = \\ &= T(p_1(t)) + T(p_2(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = 2(\lambda p)(1-t) - t(\lambda p)'(t) = \\ &= \lambda 2p(1-t) - t\lambda p'(t) = \lambda(2p(1-t) - tp'(t)) = \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = 2 \times 1 - t \times 0 = 2$, $T(t) = 2(1-t) - t \times 1 = 2 - 3t$ e

$$T(t^2) = 2(1-t)^2 - t2t = 2 - 4t + 2t^2 - 2t^2 = 2 - 4t.$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,-4,3)\}),$$

então
$$\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L(\{(1,-4,3)\})\right\} = L\left(\left\{1 - 4t + 3t^2\right\}\right).$$
Como $\{1 - 4t + 3t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2\left(a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2\right) - t(a_1 + 2a_2 t) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2a_0 + 2a_1 - 2a_1 t + 2a_2 - 4a_2 t + 2a_2 t^2 - a_1 t - 2a_2 t^2 = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + (-3a_1 - 4a_2)t = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = -\frac{4}{3}a_2 \ \text{ e } \ a_0 = \frac{1}{3}a_2\right\} = \\
&= \left\{\frac{1}{3}a_2 - \frac{4}{3}a_2 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}t + t^2\right\}\right) = L\left(\left\{1 - 4t + 3t^2\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $\{1 - 4t + 3t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L(\{2, 2-3t, 2-4t\}) = L(\{2, 2-3t\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{2, 2-3t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2, 2-3t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned}
T(p(t)) &= 2\left(a_0 + a_1(1-t) + a_2(1-t)^2\right) - t(a_1 + 2a_2 t) = \\
&= 2a_0 + 2a_1 - 2a_1 t + 2a_2 - 4a_2 t + 2a_2 t^2 - a_1 t - 2a_2 t^2 = \\
&= a_0 2 + a_1(2-3t) + a_2(2-4t).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L(\{2, 2-3t, 2-4t\}) = L(\{2, 2-3t\})$. Uma vez que o conjunto $\{2, 2-3t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2, 2-3t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xvi) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ com

$$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))t^2.$$

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T((p_1 + p_2)(t)) =$$

$$\begin{aligned}
&= (p_1+p_2)(0) - (p_1+p_2)(-1) + ((p_1+p_2)(-1) + (p_1+p_2)(1))t + \\
&\quad + ((p_1+p_2)(-1) - (p_1+p_2)(1) - 2(p_1+p_2)(0))t^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_1(0) - p_1(-1) + (p_1(-1) + p_1(1))\,t + (p_1(-1) - p_1(1) - 2p_1(0))\,t^2 + \\
&\quad + p_2(0) - p_2(-1) + (p_2(-1) + p_2(1))\,t + (p_2(-1) - p_2(1) - 2p_2(0))\,t^2
\end{aligned}
$$

$$
= T(p_1(t)) + T(p_2(t)),
$$

$$
\begin{aligned}
T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \lambda \left(p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\,t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\,t^2\right) = \\
&= \lambda T(p(t)).
\end{aligned}
$$

Sendo $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$
M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix},
$$

uma vez que $T(1) = 1 - 1 + (1+1)\,t + (1 - 1 - 2)\,t^2 = 2t - 2t^2$,

$$
T(t) = 0 - (-1) + ((-1) + 1)\,t + ((-1) - 1 - 2 \times 0)\,t^2 = 1 - 2t^2
$$

e

$$
T(t^2) = 0 - 1 + (1+1)\,t + (1 - 1 - 2 \times 0)\,t^2 = -1 + 2t.
$$

Uma base para $\mathcal{N}(T)$:
Como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= L(\{(-1,1,1)\}),
\end{aligned}
$$

então

$$
\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L(\{(-1,1,1)\})\right\} = L\left(\left\{-1 + t + t^2\right\}\right).
$$

Como $\{-1 + t + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\,t + \\ + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\,t^2 = \mathbf{0} \end{array}\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : p(0) - p(-1) = 0 \text{ e } p(-1) + p(1) = 0 \text{ e} \\ p(-1) - p(1) - 2p(0) = 0 \end{array}\right\} = \\
&= \left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 - (a_0 - a_1 + a_2) = 0 \text{ e} \\ (a_0 - a_1 + a_2) + (a_0 + a_1 + a_2) = 0 \text{ e} \\ (a_0 - a_1 + a_2) - (a_0 + a_1 + a_2) - 2a_0 = 0 \end{array}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = a_2 \text{ e } a_0 = -a_2\right\} = \\
&= \left\{-a_2 + a_2 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a_2\left(-1 + t + t^2\right) \in \mathcal{P}_2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= L\left(\left\{-1 + t + t^2\right\}\right).
\end{aligned}
$$

Como $\{-1 + t + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}\right) = L\left(\left\{1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}\right).$$

Uma vez que o conjunto $\{1 - 2t^2, -1 + 2t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{1 - 2t^2, -1 + 2t\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T(p(t)) = p(0) - p(-1) + (p(-1) + p(1))\, t + (p(-1) - p(1) - 2p(0))\, t^2 =$$

$$= a_0 - \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2\right) + \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_0 + a_1 + a_2\right) t +$$

$$+ \left(a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 - (a_0 + a_1 + a_2) - 2a_0\right) t^2 =$$

$$= a_1 - a_2 + (2a_0 + 2a_2)\, t + (-2a_0 - 2a_1)\, t^2 = a_0\left(2t - 2t^2\right) + a_1\left(1 - 2t^2\right) + a_2(-1 + 2t).$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L(\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2, -1 + 2t\}) = L(\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\})$. Como o conjunto

$$\left\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\right\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{2t - 2t^2, 1 - 2t^2\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

(xvii) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T((p_1 + p_2)(t)) = \begin{bmatrix} (p_1 + p_2)(1) & (p_1 + p_2)(0) \\ (p_1 + p_2)(0) & (p_1 + p_2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1(1) + p_2(1) & p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) & p_1(-1) + p_2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(0) \\ p_1(0) & p_1(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(1) & p_2(0) \\ p_2(0) & p_2(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= T(p_1(t)) + T(p_2(t)),$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \begin{bmatrix} (\lambda p)(1) & (\lambda p)(0) \\ (\lambda p)(0) & (\lambda p)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda p(1) & \lambda p(0) \\ \lambda p(0) & \lambda p(-1) \end{bmatrix} = \\ &= \lambda \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$ e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\qquad T(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\qquad T(t^2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&-1&-1\\0&-2&0\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=\{(0,0,0)\},$$

então

$$\mathcal{N}(T)=\left\{a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2:(a_0,a_1,a_2)=(0,0,0)\right\}=\{\mathbf{0}\}.$$

Logo, T é injectiva uma vez que $\dim\mathcal{N}(T)=0$.

Resolução alternativa para calcular $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T)&=\left\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2:T(p(t))=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}=\\&=\left\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2:\begin{bmatrix}p(1)&p(0)\\p(0)&p(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}=\\&=\left\{a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2:\begin{bmatrix}a_0+a_1+a_2&a_0\\a_0&a_0-a_1+a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}=\\&=\left\{a_0+a_1t+a_2t^2\in\mathcal{P}_2:a_0=0\quad\text{e}\quad a_1=a_2=0\right\}=\{0\}.\end{aligned}$$

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1,t,t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T)=L\left(\left\{T(1),T(t),T\left(t^2\right)\right\}\right)=L\left(\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\right).$$

Uma vez que o conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim\mathcal{I}(T)=3$.

Como $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pelo que T não é sobrejectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & a_0 \\ a_0 & a_0 - a_1 + a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_0 \\ a_0 & a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= a_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$. Como o conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$T(x,y,z) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x + 2y + z, x + y, 2x - y).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2y + z, x + y, 2x - y) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva. Uma vez que

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Vejamos como encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x + 2y + z, x + y, 2x - y) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}).$$

Como o conjunto $\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então

$$\{(1,1,2), (2,1,-1), (1,0,0)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

Como T é injectiva e sobrejectiva, então T é bijectiva.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$. Sendo

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz que representa a transformação linear T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \mathcal{N}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}\left(M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)\right) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1,2),(2,1,-1),(1,0,0)\}\right).$$

O conjunto $\{(1,1,2),(2,1,-1),(1,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

4. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,0)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1,-2), \quad T(v_2) = (-3,1).$$

(i) Tem-se $T(2,1) = T\left((1,1)+(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1,1) + T(1,0) = (1,-2) + (-3,1) = (-2,-1)$.

(ii) Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se

$$(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(y(1,1) + (x-y)(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} yT(1,1) + (x-y)T(1,0) = \\ &= y(1,-2) + (x-y)(-3,1) = (-3x+4y, x-3y). \end{aligned}$$

(iii) Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

uma vez que, pela alínea **(ii)**, $T(1,0) = (-3,1)$ e $T(0,1) = (4,-3)$.

Observação: Poderíamos ter calculado $T(1,0)$ e $T(0,1)$ sem recorrer à alinea **(ii)**, uma vez que

$$(1,0) = 0(1,1) + (1,0) \text{ e } (0,1) = (1,1) - (1,0).$$

Logo, sendo T linear, tem-se (usando só o enunciado)

$$T(1,0) = (-3,1) \text{ e } T(0,1) = T(1,1) - T(1,0) = (1,-2) - (-3,1) = (4,-3).$$

(iv) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1,0) = 0(1,1) + (1,0) \text{ e } (0,1) = (1,1) - (1,0).$$

Tem-se

$$S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1,1) = (1,0) + (0,1) \text{ e } (1,0) = (1,0) + 0(0,1).$$

As coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 1: Na verdade poderíamos ter determinado as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ usando a definição de coordenadas de um vector numa base:

$$(2,1) = (1,1) + (1,0).$$

Logo, as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são precisamente 1 e 1.

Observação 2: Tem-se

$$S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c^2} = \left(S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}}\right)^{-1} \text{ e } S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}} = \left(S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c^2}\right)^{-1}.$$

(v) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação a uma base ordenada $\mathcal{B}$ no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,1) = (1,-2) = -2(1,1) + 3(1,0) \text{ e } T(1,0) = (-3,1) = (1,1) - 4(1,0).$$

Determinemos agora as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ sem usar as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{aligned} T(2,1) &= T\left((1,1) + (1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1,1) + T(1,0) = \\ &= (1,-2) + (-3,1) = (-2,-1) = -(1,1) - (1,0). \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são -1 e -1.

Resolução alternativa: Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ e as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ usando as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \underset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) \end{array}$$

Logo,

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Além disso tem-se

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\text{coordenadas de } (2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}_c^2\end{array} & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\longrightarrow}} & \begin{array}{c}\text{coordenadas de } T(2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}_c^2\end{array} \\ & & \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ & & \\ \begin{array}{c}\text{coordenadas de } (2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}\end{array} & \underset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & \begin{array}{c}\text{coordenadas de } T(2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}.\end{array} \end{array}$$

Logo, sendo 2 e 1 as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}_c^2$ então as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(vi) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,0) = (-3,1) = (1,1) - 4(1,0)$$

e

$$\begin{aligned} T(0,1) &= T\left((1,1)-(1,0)\right) = T(1,1) - T(1,0) = \\ &= (1,-2) - (-3,1) = (4,-3) = -3(1,1) + 7(1,0). \end{aligned}$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \underset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) \end{array}$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}) = M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

(vii) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,1) = (1,-2) = (1,0) - 2(0,1)$$

e

$$T(1,0) = (-3,1) = -3(1,0) + (0,1).$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) \\ S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} \\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \underset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) \end{array}$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2) = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são dadas respectivamente por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$T_1(x,y,z) = M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x+z, x+y).$$

Tem-se $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com

$$T_2(x,y) = M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (y, y, x+y).$$

Logo, tem-se $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear com

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(x,y) &= M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+3y, 2y) \end{aligned}$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear com

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x+y, x+y, 3x+y+z).$$

Resolução alternativa: Tendo-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T_1(x,y,z) = (2x+z, x+y)$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T_2(x,y) = (y,y,x+y)$, então $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear com

$$(T_1 \circ T_2)(x,y) = T_1(T_2(x,y)) = T_1(y,y,x+y) = (x+3y, 2y)$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear com

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = T_2(T_1(x,y,z)) = T_2(2x+z, x+y) = (x+y, x+y, 3x+y+z).$$

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2y, y-x, -x).$$

Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1,0,-1), \quad v_2 = (1,2,0), \quad v_3 = (-1,1,1).$$

Tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$\begin{aligned} T(1,0,-1) &= (0,-1,-1) = 2(1,0,-1) - (1,2,0) + (-1,1,1), \\ T(1,2,0) &= (4,1,-1) = -4(1,0,-1) + 3(1,2,0) - 5(-1,1,1) \text{ e} \\ T(-1,1,1) &= (2,2,1) = -5(1,0,-1) + 3(1,2,0) - 4(-1,1,1). \end{aligned}$$

7. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear

$$S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } S(A) = A^T.$$

Tem-se

$$M(S;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ com } v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \qquad T(v_2+v_3) = v_1 \qquad \text{e} \qquad T(v_1+v_2+v_3) = v_2 + v_3.$$

Logo,

$$T(0,0,1) = T(v_3) = (3,1,-2),$$

$$T(0,1,0) = T(v_2) = T(v_2+v_3) - T(v_3) = -2v_1 - v_2 + 2v_3 = (-2,-1,2)$$

e

$$T(1,0,0) = T(v_1) = T(v_1+v_2+v_3) - T(v_2+v_3) = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1,1,1).$$

Assim:

(i)

$$T(2v_1 - v_2 + 3v_3) = 2T(v_1) - T(v_2) + 3T(v_3) =$$
$$= 2(-1,1,1) - (-2,-1,2) + 3(3,1,-2) = (9,6,-6);$$

(ii)

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Seja $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_c^3$ a base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determinemos uma base ordenada $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T(1,0,0) = w_1$, $T(0,1,0) = w_2$ e $T(0,0,1) = w_3$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \{(-1,1,1), (-2,-1,2), (3,1,-2)\}.$$

9. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1 = (1,1), \quad u_2 = (2,-1), \quad v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,1,2), \quad v_3 = (0,1,-1),$$

é representada pela matriz

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda as bases ordenadas $\mathcal{B}_1' = \left\{u_1', u_2'\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2' = \left\{v_1', v_2', v_3'\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$u_1' = (1,0), \quad u_2' = (1,1), \quad v_1' = (1,0,0), \quad v_2' = (1,1,0), \quad v_3' = (1,1,1).$$

(i) Tem-se

$$(-1,2) = (1,1) - (2,-1).$$

Logo, as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1$ são 1 e -1. Deste modo, as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(ii) Tem-se

$$(-1,2) = -3(1,0) + 2(1,1).$$

Logo, as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$ são -3 e 2.

Resolução alternativa: Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $u_1 = 0u_1' + u_2'$ e $u_2 = 3u_1' - u_2'$. Tendo em conta (por **(i)**) que as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1$ são 1 e -1, então as coordenadas do vector $(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_1'$ são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Uma vez que (por **(i)**) as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são -1, -2 e 3, então

$$T(-1,2) = -(1,0,1) - 2(1,1,2) + 3(0,1,-1) = (-3,1,-8).$$

Por outro lado, tem-se

$$(-3,1,-8) = -4(1,0,0) + 9(1,1,0) - 8(1,1,1).$$

Logo, as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$ são -4, 9 e -8.

Resolução alternativa: Determinemos a matriz de mudança de base $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'}$. Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $v_1 = v_1' - v_2' + v_3'$, $v_2 = 0v_1' - v_2' + 2v_3'$ e $v_3 = -v_1' + 2v_2' - v_3'$. Tendo em conta que (por **(i)**) as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2$ são -1, -2 e 3, então as coordenadas do vector $T(-1,2)$ na base $\mathcal{B}_2'$ são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

(iv) Determinemos uma base para $\mathcal{N}(T)$. Seja $u \in \mathbb{R}^2$ e sejam (α_1, α_2) as coordenadas de u em relação à base

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1), (2,-1)\}.$$

Tem-se

$$u \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))$$

e como

$$\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0)\},$$

$$\mathcal{N}(T) = \{0(1,1) + 0(2,-1)\} = \{(0,0)\}.$$

Assim, $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ e T é injectiva.

(v) Determinemos uma base para $\mathcal{I}(T)$. Como $\{(1,1), (2,-1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(1,1), T(2,-1)\}) =$$

$$= L(\{1(1,0,1) + (-1)(1,1,2) + 3(0,1,-1), 2(1,0,1) + 1(1,1,2) + 0(0,1,-1)\}) =$$
$$= L(\{(0,2,-4), (3,1,4)\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{(0,2,-4), (3,1,4)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\{(0,2,-4), (3,1,4)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$, pelo que T não é sobrejectiva.

(vi) Determinemos a expressão geral de T, isto é, $T(x,y)$, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considerando as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$ respectivamente:

$$\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0), (0,1)\}, \qquad \mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_c^3} M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_c^2}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Logo, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$T(x,y) = M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \\ -4y \end{bmatrix} = (x-y, x+y, -4y).$$

Resolução alternativa à alínea (v) para encontrar uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \left\{T(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x-y, x+y, -4y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \left\{(x,x,0) + (-y,y,-4y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \left\{x(1,1,0) + y(-1,1,-4) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= L(\{(1,1,0), (-1,1,-4)\}) \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,1,0), (-1,1,-4)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\{(1,1,0), (-1,1,-4)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Note que:

$$L(\{(1,1,0), (-1,1,-4)\}) = L(\{(0,2,-4), (3,1,4)\}).$$

(vii) Tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \\ S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1') & \underset{M(T;\mathcal{B}_1';\mathcal{B}_2')}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2') \end{array}$$

Logo,

$$M(T;\mathcal{B}_1';\mathcal{B}_2') = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)\left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1'}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2'} M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) S_{\mathcal{B}_1' \to \mathcal{B}_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

10. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y,z) = (x+y, x+y-z).$$

(i) Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,1)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$.

(ii) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, x+y-z) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,-x,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(1,-1,0)\}). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{(1,-1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0)\}$.

(iii) Tem-se

$$\mathcal{I}(T) = \{(x+y, x+y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,1),(0,-1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1,1),(0,-1)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então $\{(1,1),(0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^2$, isto é, T é sobrejectiva.

(iv) O vector $(1,0,0)$ é uma solução particular da equação linear

$$T(x,y,z) = (1,1).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,1)$ é dada por:

$$\{(1,0,0)\} + \mathcal{N}(T) = \left\{(1+t,-t,0) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(v) Não existe nenhum vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação linear $T(x,y,z) = (a,b)$ seja impossível, uma vez que T é sobrejectiva.

(vi) Não existe nenhum vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ para o qual a equação linear $T(x,y,z) = (a,b)$ seja possível e determinada, uma vez que T não é injectiva.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ que a representa em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x+2y+2z, 2x+y+4z, 2z).$$

(ii) Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(0,0,0)\}.$$

Logo, T é injectiva e $\dim \mathcal{N}(T) = 0$.

(iii) Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(T) &= \{(x+2y+2z, 2x+y+4z, 2z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1,2,0)+y(2,1,0)+z(2,4,2) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= L\left(\{(1,2,0),(2,1,0),(2,4,2)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(1,2,0),(2,1,0),(2,4,2)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então

$$\{(1,2,0),(2,1,0),(2,4,2)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 3$. Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejectiva.

(iv) Como $T(1,1,0) = T(1,0,0) + T(0,1,0) = (2,1,0) + (1,2,0) = (3,3,0)$, então o vector $(1,1,0)$ é uma solução particular da equação linear

$$T(x,y,z) = (3,3,0).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (3,3,0)$ é dada por:

$$\{(1,1,0)\} + \mathcal{N}(T) = \{(1,1,0)\}.$$

(v) Não existe nenhum vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação linear $T(x,y,z) = (a,b,c)$ seja impossível, uma vez que T é sobrejectiva.

(vi) Não existe nenhum vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para o qual a equação linear $T(x,y,z) = (a,b,c)$ seja possível e indeterminada, uma vez que T é injectiva.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que a representa em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (1,0,0),$$

é dada por

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Seja $A = M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$. Seja $u \in \mathbb{R}^3$ e sejam $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ as coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}$. Tem-se

$$u \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathcal{N}(A)$$

e como

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \{(-2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-2,1,0)\}\right),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \{(-2y)(1,1,1) + y(1,1,0) + 0(1,0,0) : y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(-y,-y,-2y) : y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,2)\}\right).\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1,2)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente. Assim, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

Como

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T),$$

então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$ e assim $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^3$ (pois $\dim \mathbb{R}^3 = 3$), isto é, T não é sobrejectiva.

Expressão geral de T:

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= (8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z).$$

Cálculo alternativo de $\mathcal{N}(T)$: Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z) = (0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x \quad \text{e} \quad x = y\right\} \\ &= \left\{(x,x,2x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= L\left(\{(1,1,2)\}\right). \end{aligned}$$

(ii) Quanto ao contradomínio:

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,1,1), T(1,1,0), T(1,0,0)\}\right) =$$

$$= L(\{1(1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0), 2(1,1,1)+$$

$$+4(1,1,0) + 0(1,0,0), 2(1,1,1) + 4(1,1,0) + 2(1,0,0)\}) =$$

$$= L\left(\{(3,3,1),(6,6,2),(8,6,2)\}\right) = L\left(\{(6,6,2),(8,6,2)\}\right) = L\left(\{(8,6,2),(-2,0,0)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(8,6,2),(-2,0,0)\}$ é linearmente independente e como gera $\mathcal{I}(T)$ então

$$\{(8,6,2),(-2,0,0)\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$ e tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Cálculo alternativo de $\mathcal{I}(T)$: Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T) &= \{(8x - 2y - 3z, 6x - 3z, 2x - z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \\ &= L\left(\{(8,6,2),(-2,0,0),(-3,-3,-1)\}\right) = \\ &= L\left(\{(8,6,2),(-2,0,0)\}\right) = \mathcal{C}\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right). \end{aligned}$$

(iii) É fácil ver que $(2,4,0) \notin \mathcal{I}(T)$. Logo, a equação linear $T(x,y,z) = (2,4,0)$ não tem soluções.

(iv) Tem-se $T(1,1,1) = 1(1,1,1) + 2(1,1,0) + 0(1,0,0) = (3,3,1)$ e assim

$$T\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-1, -1, -\frac{1}{3}\right)$$

Logo, a solução geral de

$$T\left(x,y,z\right)=\left(-1,-1,-\frac{1}{3}\right)$$

é dada por:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: T\left(x,y,z\right)=\left(-1,-1,-\frac{1}{3}\right)\right\}=\left\{\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}+\mathcal{N}\left(T\right)=$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right))+s\left(1,1,2\right):s\in\mathbb{R}\right\}.$$

(v) Por exemplo o vector $(1,0,0)$ ou qualquer vector $(a,b,c)\in\mathcal{I}(T)$, uma vez que sendo T não injectiva, sempre que a equação linear fôr possível, ela será indeterminada.

(vi) Tem-se

$$T(v_1)=(1,1,1)+2(1,1,0)+0(1,0,0)=(3,3,1),$$

$$T(v_2)=2(1,1,1)+4(1,1,0)+0(1,0,0)=(6,6,2)$$

e

$$T(v_3)=2(1,1,1)+4(1,1,0)+2(1,0,0)=(8,6,2).$$

Logo,

$$T(1,0,0)=T(v_3)=(8,6,2),$$

$$T(0,1,0)=T(v_2)-T(v_3)=(-2,0,0)$$

e

$$T(0,0,1)=T(v_1)-T(v_2)=(-3,-3,-1).$$

Assim,

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}8&-2&-3\\6&0&-3\\2&0&-1\end{bmatrix}$$

e deste modo, para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$T(x,y,z)=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&-2&-3\\6&0&-3\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=$$

$$=(8x-2y-3z,6x-3z,2x-z).$$

13. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z)=(x+y+z,x+2y-4z,z).$$

(i) Tendo em conta que $T(1,0,0)=(1,1,0)$, $T(0,1,0)=(1,2,0)$ e $T(0,0,1)=(1,-4,1)$, tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(ii) A matriz $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ é invertível pois

$$M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-4\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-5\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Logo, T é injectiva e como tal invertível, tendo-se

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1}=M(T^{-1};\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3).$$

Determinemos $(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3))^{-1}$.

$$\begin{aligned}\left[M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\mid I\right] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&-4&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-5&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\\ &\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&-1&1&5\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-6\\0&1&0&-1&1&5\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&-6\\-1&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}$$

e como tal, para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)\right)^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&-6\\-1&1&5\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=$$

$$=(2x-y-6z,-x+y+5z,z).$$

Observação: $T^{-1}\circ T=T\circ T^{-1}=I$. Isto é, para qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(x,y,z)=\left(T\circ T^{-1}\right)(x,y,z)=(x,y,z),$$

como se pode ver:

$$\begin{aligned}\left(T^{-1}\circ T\right)(x,y,z) &= T^{-1}\left(T(x,y,z)\right)=T^{-1}(x+y+z,x+2y-4z,z)=\\ &= (2x+2y+2z-x-2y+4z-6z,-x-y-z+x+2y-4z+5z,z)=\\ &= (x,y,z);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(T\circ T^{-1}\right)(x,y,z) &= T\left(T^{-1}(x,y,z)\right)=T(2x-y-6z,-x+y+5z,z)=\\ &= (2x-y-6z-x+y+5z+z,2x-y-6z-2x+2y+10z-4z,z)=\\ &= (x,y,z).\end{aligned}$$

Demonstração alternativa da injectividade de T: Tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z)=(0,0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+y+z, x+2y-4z, z)=(0,0,0)\right\} = \\ &= \{(0,0,0)\}\,.\end{aligned}$$

Logo, T é injectiva.

(iii) Sendo T injectiva, como os espaços de partida e de chegada têm a mesma dimensão, então T é sobrejectiva. Logo, T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo.

(iv) Tem-se

$$T(x,y,z)=(1,1,2)\Leftrightarrow (x,y,z)=T^{-1}(1,1,2)=(-11,10,2).$$

Logo, a solução geral da equação linear $T(x,y,z)=(1,1,2)$ é: $\{(-11,10,2)\}$.

14. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2}=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere a transformação

$$T:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ definida por } T(X)=AX-XA, \quad \text{com} \quad A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}.$$

(i) Sejam $X, X_1, X_2\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\lambda\in\mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned}T(X_1+X_2) &= A(X_1+X_2)-(X_1+X_2)A = AX_1+AX_2-X_1A-X_2A = \\ &= AX_1-X_1A+AX_2-X_2A=T(X_1)+T(X_2)\end{aligned}$$

e

$$T(\lambda X)=A(\lambda X)-(\lambda X)A=\lambda\,(AX-XA)=\lambda T(X).$$

(ii) Seja $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b+c&d-a\\d-a&-b-c\end{bmatrix}.$$

Logo, a expressão geral de T é dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}b+c&d-a\\d-a&-b-c\end{bmatrix}.$$

(iii) Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}_c^{2\times 2})=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&1\\-1&0&0&1\\0&-1&-1&0\end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iv) Tem-se

$$\mathcal{N}(T) = \left\{X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Logo, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. Como $\mathcal{N}(T) \neq \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ então T não é injectiva.

(v) Atendendo a que $\dim \mathcal{N}(T) = 2$ e $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, então $\dim \mathcal{I}(T) = 2$. T não é sobrejectiva uma vez que $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determinemos uma base para $\mathcal{I}(T)$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= \left\{T(X) : X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\right\} = \\
&= \left\{\begin{bmatrix} b+c & d-a \\ -a+d & -b-c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\} = \\
&= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right) = \\
&= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T)$.

15. Considere as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{e} \quad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y).$$

(i) Tem-se

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

uma vez que $T_1(1,0)=(1,1)$, $T_1(0,1)=(1,-1)$, $T_2(1,0)=(2,1)$ e $T_2(0,1)=(1,-2)$.

(ii) A matriz $M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2\circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$, é dada por

$$\begin{aligned}M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) &= M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\\ &= \begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\-1&3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(iii) Tem-se, para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}(T_2\circ T_1)(x,y) &= M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\\ &= \begin{bmatrix}3&1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(3x+y,-x+3y).\end{aligned}$$

(iv) Tem-se, para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}T_1(x,y) &= M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\\ &= \begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(x+y,x-y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}T_2(x,y) &= M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\\ &= \begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(2x+y,x-2y).\end{aligned}$$

Logo,

$$(T_2\circ T_1)(x,y)=T_2\left(T_1(x,y)\right)=T_2(x+y,x-y)=$$
$$=(2x+2y+x-y,x+y-2x+2y)=(3x+y,-x+3y).$$

(v) Tem-se

$$\mathcal{N}(T_1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:T(x,y)=(0,0)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x+y,x-y)=(0,0)\right\}=\{(0,0)\}$$

e

$$\mathcal{N}(T_2)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:T(x,y)=(0,0)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(2x+y,x-2y)=(0,0)\right\}=\{(0,0)\}.$$

Logo, T_1 e T_2 são injectivas e como tal são invertíveis.

(vi) Tem-se então

$$\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}=M(T_1^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\ \text{ e }\ \left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}=M(T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$$

Determinemos $(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2))^{-1}$ e $(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2))^{-1}$.

$$\begin{aligned}\left[M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\mid I\right] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right] \to \\ &\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2\end{array}\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\mid I\right] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 1\end{array}\right] \to \\ &\to \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5\end{array}\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5\end{bmatrix}$$

e como tal, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$T_1^{-1}(x,y) = \left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right),$$

$$T_2^{-1}(x,y) = \left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = \left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y\right),$$

e finalmente

$$\begin{aligned}\left(T_1^{-1}\circ T_2^{-1}\right)(x,y) &= T_1^{-1}\left(T_2^{-1}(x,y)\right) = \\ &= T_1^{-1}\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y\right) = \\ &= \left(\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y\right).\end{aligned}$$

(vii) Tem-se

$$M((T_2\circ T_1)^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_1^{-1}\circ T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = M(T_1^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)M(T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) =$$

$$= \left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10\end{bmatrix}.$$

De facto,

$$M((T_2\circ T_1)^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3\end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}.$$

(viii) Tendo em conta **(vii)** tem-se

$$(T_2\circ T_1)^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix} = \left(\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y\right).$$

Logo, como seria de esperar,

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(x,y) = \left(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}\right)(x,y).$$

16. Seja $A = M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)$. Como $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois $\det A = 1 \neq 0$, T é injectiva. Logo, se a equação linear $T(x,y) = (1,2)$ tiver solução, ela é única. Como $\mathcal{C}(A) = \mathcal{I}(T)$ e uma vez que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(A)$ pois: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então $(1,0)$ é a solução única da equação linear $T(x,y) = (1,2)$.

Resolução alternativa da equação linear $T(x,y) = (1,2)$:

Como A é invertível, T é invertível e

$$T(x,y) = (1,2) \Leftrightarrow (x,y) = T^{-1}(1,2) = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

17. Tem-se $M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois $T_1(1,0) = 0$ e $T_1(0,1) = 1$. Logo

$$M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right) = M\left(T_2; \mathcal{B}_c^1; \mathcal{B}_c^2\right) M\left(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^1\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e assim $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1) = \mathcal{N}(M\left(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2\right)) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,0)\}\right)$. Pelo que $\{(1,0)\}$ é base de $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$, uma vez que $(1,0)$ é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(T_2 \circ T_1)$.

18. Como $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, tem-se $T(1,0,1) = 1(1,1) - (0,1) = (1,0)$,

$T(0,1,1) = 0(1,1) + 0(0,1) = (0,0)$ e $T(1,0,1) = 1(1,1) - (0,1) = (1,0)$. Por outro lado, como $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,0,1), T(0,1,1), T(0,0,1)\}\right) = L\left(\{(1,0)\}\right).$$

Pelo que $\{(1,0)\}$ é base de $\mathcal{I}(T)$, pois $(1,0)$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$.

Tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = \operatorname{car}(M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)) = \operatorname{car}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$. Como $\mathcal{I}(T) \neq \mathbb{R}^2$, pois $\dim \mathcal{I}(T) = 1 \neq 2 = \dim \mathbb{R}^2$, então T não é sobrejectiva.

19. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x,y,z) = (2x+y, y+2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(2,1), (1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T_1) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_1(x,y,z) = (0,0)\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x+y, y+2z) = (0,0)\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = -\frac{y}{2}\right\} = \left\{\left(-\frac{y}{2}, y, -\frac{y}{2}\right) : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(1,-2,1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,-2,1)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1)$ e é linearmente independente, logo é uma base de $\mathcal{N}(T_1)$. Tem-se

$$\dim \mathcal{N}(T_1) = 1 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathbb{R}^3,$$

e assim $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2$. Logo, como $\mathcal{I}(T_1)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, então $\mathcal{I}(T_1) = \mathbb{R}^2$ e assim, T_1 é sobrejectiva.

(ii) Como $\mathcal{B} = \{(2,1),(1,2)\}$ gera o "espaço de partida" $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T_2) = L(\{T_2(2,1), T_2(1,2)\}) = L(\{(2,1,1),(1,1,2)\}).$$

Como o conjunto $\{(2,1,1),(1,1,2)\}$ gera $\mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T_2)$.

Tem-se

$$\dim \mathcal{I}(T_2) = 2 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{N}(T_2) + \dim \mathcal{I}(T_2) = \dim \mathbb{R}^2,$$

e assim $\dim \mathcal{N}(T_2) = 0$. Logo, T_2 é injectiva.

(iii) Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{5}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

logo o conjunto $\{(1,-2,1),(2,1,1),(1,1,2)\}$ gera $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$.

Logo, como $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim(\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\dim(\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)) = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_2) - \dim(\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2)) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

(iv) Como $(1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)$ e $(0,1) = -\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)$, tem-se

$$\begin{aligned} T_2(1,0) &= T_2\left(\frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{2}{3}T_2(2,1) - \frac{1}{3}T_2(1,2) = \\ &= \frac{2}{3}(2,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,2) = \left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) = \left(1,\frac{1}{3},0\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(0,1) &= T_2\left(-\frac{1}{3}(2,1) + \frac{2}{3}(1,2)\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} -\frac{1}{3}T_2(2,1) + \frac{2}{3}T_2(1,2) = \\ &= -\frac{1}{3}(2,1,1) + \frac{2}{3}(1,1,2) = \left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right) = \left(0,\frac{1}{3},1\right) \end{aligned}$$

Logo, a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(v) A matriz $M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T_1(1,0,0) = (2,0), \quad T_1(0,1,0) = (1,1) \quad \text{e} \quad T_1(0,0,1) = (0,2).$$

Logo, a matriz que representa $T_1 \circ T_2$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_1 \circ T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$(T_1 \circ T_2)(x,y) = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, como a matriz $\begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}$ é invertível, a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x,y) = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$, é dada

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/16 & -1/16 \\ -1/16 & 7/16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

20. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x,y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i) $T_2(0,1,0) = T_2(1,1,0) - T_2(1,0,0) = (-1,1) - (1,-1) = (-2,2)$.
$T_2(0,0,1) = T_2(1,1,1) - T_2(1,1,0) = (1,-1) - (-1,1) = (2,-2)$.

(ii) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(T_1) &= \left\{T_1(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(2x+y, 0, x+2y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \{x(2,0,1) + y(1,0,2) : x, y \in \mathbb{R}\} = L(\{(2,0,1), (1,0,2)\}). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(2,0,1), (1,0,2)\}$ gera $\mathcal{I}(T_1)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}(T_1)$.
Como $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T_1) \neq \mathbb{R}^3$ e assim, T_1 não é sobrejectiva.

(iii)

$$\mathcal{N}\left(M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \{(y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,0), (-1,0,1)\}).$$

Como os vectores $(1,1,0)$ e $(-1,0,1)$ são as coordenadas na base $\mathcal{B}$ de vectores que geram o núcleo de T_2, tem-se

$$1(1,1,1) + 1(1,1,0) + 0(1,0,0) = (2,2,1)$$

e

$$-1(1,1,1)+0(1,1,0)+1(1,0,0)=(0,-1,-1)$$

Como o conjunto $\{(2,2,1),(0,-1,-1)\}$ gera $\mathcal{N}(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}(T_2)$. Como $\mathcal{N}(T_2)\neq\{\mathbf{0}\}$ então T_2 não é injectiva.

(iv) Pela definição de $M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ tem-se $T_2(1,0,0)=(1,-1)$. Atendendo à alínea **a)**, tem-se $T_2(0,1,0)=(-2,2)$ e $T_2(0,0,1)=(2,-2)$. Logo, a matriz $M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-1&2&-2\end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como $T_1(1,0)=(2,0,1)$ e $T_1(0,1)=(1,0,2)$. Logo, a matriz $M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}2&1\\0&0\\1&2\end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa $T_2\circ T_1$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=M(T_2;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$(T_2\circ T_1)(x,y)=\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

e assim,

$$(T_2\circ T_1)(x,y)=(-1,1)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

A solução geral de $(T_2\circ T_1)(x,y)=(-1,1)$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de }\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)+\left(\text{Solução geral de }\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right).$$

Como o vector $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ é uma solução particular de $\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ e

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}4&5\\0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\left\{\left(-\frac{5}{4},1\right)\right\}\right)$$

então, a solução geral de $(T_2\circ T_1)(x,y)=(-1,1)$ é dada por:

$$\left(-\frac{1}{4},0\right)+\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}4&5\\-4&-5\end{bmatrix}\right)=\left\{\left(-\frac{1}{4},0\right)+s\left(-\frac{5}{4},1\right):s\in\mathbb{R}\right\}.$$

21. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_3$ definida por

$$T(1,1,-1)=2+2t^2,\quad T(1,-1,1)=-t-t^3\quad\text{e}\quad T(-1,1,1)=2+t+2t^2+t^3.$$

(i) Determinemos a expressão geral de T, isto é, determinemos $T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Seja $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Como $\{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, existem escalares $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z)=\alpha(1,1,-1)+\beta(1,-1,1)+\gamma(-1,1,1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 2 & 0 & z+x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & 2 & y+z \end{array}\right],$$

tem-se

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=x \\ -2\beta+2\gamma=y-x \\ 2\gamma=y+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2}(x+y) \\ \beta=\frac{1}{2}(x+z) \\ \gamma=\frac{1}{2}(y+z). \end{cases}$$

Logo

$$(x,y,z)=\frac{1}{2}(x+y)(1,1,-1)+\frac{1}{2}(x+z)(1,-1,1)+\frac{1}{2}(y+z)(-1,1,1),$$

e assim, como T é linear,

$$T(x,y,z)=\frac{1}{2}(x+y)\,T(1,1,-1)+\frac{1}{2}(x+z)\,T(1,-1,1)+\frac{1}{2}(y+z)\,T(-1,1,1)=$$

$$=\frac{1}{2}(x+y)\left(2+2t^2\right)+\frac{1}{2}(x+z)\left(-t-t^3\right)+\frac{1}{2}(y+z)\left(2+t+2t^2+t^3\right)=$$

$$=x+2y+z+\frac{1}{2}(y-x)\,t+(x+2y+z)\,t^2+\frac{1}{2}(y-x)\,t^3.$$

(ii) Tem-se

$$\mathcal{N}(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : T(x,y,z)=\mathbf{0}\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+z+\frac{1}{2}(y-x)\,t+(x+2y+z)\,t^2+\frac{1}{2}(y-x)\,t^3=0+0t+0t^2+0t^3\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+z=0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(y-x)=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y \quad \text{e} \quad z=-3y\right\}=\left\{y(1,1,-3)\in\mathbb{R}^3 : y\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(1,1,-3)\}\right)$$

Logo, o conjunto $\{(1,1,-3)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ e $\dim\mathcal{N}(T)=1$. T não é injectiva, uma vez que $\mathcal{N}(T)\neq\{(0,0,0)\}$.

(iii) Determine, se possível, uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T)$. Determine a dimensão de $\mathcal{I}(T)$. Diga se T é sobrejectiva.

Como $\{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T)=L\left(\{T(1,1,-1),T(1,-1,1),T(-1,1,1)\}\right)=L\left(\left\{2+2t^2,-t-t^3,2+t+2t^2+t^3\right\}\right).$$

Como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então o conjunto $\{2+2t^2, -t-t^3\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}(T)$.

Logo, tem-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Por outro lado, como $\mathcal{I}(T)$ é subespaço de $\mathcal{P}_3$ e $\dim \mathcal{P}_3 = 4$ então $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_3$, isto é, T não é sobrejectiva.

(iv) Atendendo a ter-se

$$T(1,1,-1) = 2+2t^2, \quad T(1,-1,1) = -t-t^3 \quad \text{e} \quad T(-1,1,1) = 2+t+2t^2+t^3.$$

$$1+t+t^2+t^3 = \underbrace{2+t+2t^2+t^3}_{=T(-1,1,1)} - \frac{1}{2}\underbrace{(2+2t^2)}_{=T(1,1,-1)} = T(-1,1,1) - \frac{1}{2}T(1,1,-1) \underset{T \text{ é linear}}{=}$$

$$= T\left((-1,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,-1)\right) = T\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é uma solução particular da equação linear $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$.

Como, a solução geral de $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3\right) + \left(\text{Solução geral de } T(x,y,z) = \mathbf{0}\right)$$

e como a solução geral de $T(x,y,z) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} = L\left(\{(1,1,-3)\}\right)$$

então, a solução geral de $T(x,y,z) = 1+t+t^2+t^3$ é dada por:

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + L\left(\{(1,1,-3)\}\right) = \left\{\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + s(1,1,-3) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

22. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere a transformação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T_\lambda(x,y,z) = z - y + \lambda(y-x)t + xt^2.$$

(i) Tem-se

$$\mathcal{N}(T_\lambda) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_\lambda(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - y + \lambda(y-x)t + xt^2 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y \quad \text{e} \quad (y = x \ \text{ ou } \ \lambda = 0) \quad \text{e} \quad x = 0\right\} =$$

$$= \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y \quad \text{e} \quad (y = 0 \ \text{ ou } \ \lambda = 0)\right\} =$$

$$= \begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ \{y(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} & \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \{(0,0,0)\} & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ L\left(\{(0,1,1)\}\right) & \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Logo, se $\lambda = 0$ então $\{(0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T_0)$ e assim T_0 não é injectiva.

$$\dim \mathcal{N}(T_\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Logo, como $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{(0,0,0)\}$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então T_λ é injectiva, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(ii) Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$T_\lambda(x,y,z) = z - y + \lambda(y-x)t + xt^2 = z + x\left(-\lambda t + t^2\right) + y(-1+\lambda t)$$

Logo,

$$\mathcal{I}(T_\lambda) = \left\{T_\lambda(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{z + x\left(-\lambda t + t^2\right) + y(-1+\lambda t) : x,y,z \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= L\left(\left\{1, -\lambda t + t^2, -1+\lambda t\right\}\right) = \begin{cases} L\left(\{1, -\lambda t + t^2, -1+\lambda t\}\right) & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ L\left(\{1, t^2\}\right) \quad \text{se} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

Se $\lambda \neq 0$ então o conjunto $\{1, -\lambda t + t^2, -1+\lambda t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T_\lambda)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}(T_\lambda)$.

Se $\lambda = 0$ então o conjunto $\{1, t^2\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T_0)$, sendo assim uma base de $\mathcal{I}(T_0)$.

Logo

$$\dim \mathcal{I}(T_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad \lambda \neq 0 \\ \\ 2 & \text{se} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Como $\mathcal{I}(T_\lambda)$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2$ e neste caso $(\lambda \neq 0)$ $\dim \mathcal{I}(T_\lambda) = \dim \mathcal{P}_2$, então $\mathcal{I}(T_\lambda) = \mathcal{P}_2$, isto é, T_λ é sobrejectiva se $\lambda \neq 0$.

Se $\lambda = 0$, como $\mathcal{I}(T_0) \neq \mathcal{P}_3$, T_0 não é sobrejectiva.

Note que: para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_\lambda) + \dim \mathcal{I}(T_\lambda),$$

(iii) Considere $\lambda = 0$ e resolva a equação linear $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$.Atendendo a ter-se

$$T_0(1,0,1) = 1 + t^2$$

então $(1,0,1)$ é uma solução particular da equação linear $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$.

Como, a solução geral de $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } T_0(x,y,z) = 1 + t^2\right) + \left(\text{Solução geral de } T_0(x,y,z) = \mathbf{0}\right)$$

e como a solução geral de $T_0(x,y,z) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T_0) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T_0(x,y,z) = \mathbf{0}\right\} = L\left(\{(0,1,1)\}\right)$$

então, a solução geral de $T_0(x,y,z) = 1 + t^2$ é dada por:

$$(1,0,1) + L\left(\{(0,1,1)\}\right) = \{(1,0,1) + s(0,1,1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

23. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(p\left(t\right)\right) = p'\left(t\right) - 2p\left(t\right),$$

onde $p'\left(t\right)$ é a derivada de primeira ordem de $p\left(t\right)$.

(i) Seja $p\left(t\right) \in \mathcal{P}_2$. $p\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)' - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) =$$

$$= a_1 + 2a_2 t - 2a_0 - 2a_1 t - 2a_2 t^2 = -2a_0 + a_1 + \left(2a_2 - 2a_1\right) t - 2a_2 t^2.$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é dada por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = -2a_0 + a_1 + \left(2a_2 - 2a_1\right) t - 2a_2 t^2.$$

(ii) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$. Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

Como

$$T\left(1\right) = 0 - 2 = -2, \qquad T\left(t\right) = 1 - 2t, \qquad T\left(t^2\right) = 2t - 2t^2$$

tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(iii) Como a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é invertível, pois $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ é invertível então T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo. Sendo T um isomorfismo, T^{-1} também é um isomorfismo.

Seja $p\left(t\right) \in \mathcal{P}_2$. $p\left(t\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Tem-se

$$-\frac{1}{2}p\left(t\right) - \frac{1}{4}p'\left(t\right) - \frac{1}{8}p''\left(t\right) = -\frac{1}{2}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) - \frac{1}{4}\left(a_1 + 2a_2 t\right) - \frac{1}{8}2a_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \left(-\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right) t - \frac{a_2}{2}t^2 \qquad (*)$$

e

$$\left(M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})\right)^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 \\ -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\ -\frac{1}{2}a_2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$T^{-1}\left(p\left(t\right)\right) = -\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + \left(-\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2\right) t - \frac{a_2}{2}t^2 \qquad (**)$$

Atendendo a (*) e a (**) conclui-se que a expressão geral do isomorfismo T^{-1} é dada por

$$T^{-1}\left(p\left(t\right)\right) = -\frac{1}{2}p\left(t\right) - \frac{1}{4}p'\left(t\right) - \frac{1}{8}p''\left(t\right)$$

para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

(iv) Tem-se

$$p'(t) - 2p(t) = (2-3t)^2 \Leftrightarrow T(p(t)) = (2-3t)^2 \underset{T \text{ é um isomorfismo}}{\Leftrightarrow} p(t) = T^{-1}\left((2-3t)^2\right) \underset{\text{(ii)}}{=}$$

$$\underset{\text{(ii)}}{=} -\frac{1}{2}\left((2-3t)^2\right) - \frac{1}{4}\left(2(2-3t)(-3)\right) - \frac{1}{8}\left(2(-3)(-3)\right) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{9}{2}t^2.$$

Logo, $p(t) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{9}{2}t^2$ é a única solução da equação diferencial linear

$$p'(t) - 2p(t) = (2-3t)^2.$$

24. Considere o espaço linear $\mathcal{P}_2$ dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t)) = t^2 p''(t) - 2p(t),$$

onde $p''(t)$ é a derivada de segunda ordem de $p(t)$.

(i) Seja $p(t) \in \mathcal{P}_2$. $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = t^2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)'' - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) =$$

$$= t^2 2a_2 - 2a_0 - 2a_1 t - 2a_2 t^2 = -2a_0 - 2a_1 t.$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ é dada por:

$$T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = -2a_0 - 2a_1 t.$$

(ii) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$. Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base $\mathcal{B}$.

Como

$$T(1) = 0 - 2 = -2, \qquad T(t) = -2t, \qquad T\left(t^2\right) = 2t^2 - 2t^2 = 0$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) Uma base para $\mathcal{N}(T)$:

Como

$$\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0,0,1)\}),$$

então

$$\mathcal{N}(T) = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : (a_0, a_1, a_2) \in L(\{(0,0,1)\})\right\} = L\left(\left\{t^2\right\}\right).$$

Como $\{t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim \mathcal{N}(T) \neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : T\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : t^2 2a_2 - 2\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : -2a_0 - 2a_1 t = \mathbf{0}\right\} = \\
&= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0 \text{ e } a_1 = 0\right\} = L\left(\left\{t^2\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $\{t^2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L(\{-2, -2t, 0\}) = L(\{-2, -2t\}).$$

Uma vez que o conjunto $\{-2, -2t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então $\{-2, -2t\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq \mathcal{P}_2$, pelo que T não é sobrejectiva.

(iv) (a) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$.

Como

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $-1 + \dfrac{1}{2}t$ é uma solução particular da equação diferencial linear

$$t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t.$$

Como a solução geral de $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t\right) + \left(\text{Solução geral de } t^2 p''(t) - 2p(t) = \mathbf{0}\right)$$

e como a solução geral de $t^2 p''(t) - 2p(t) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{t^2\right\}\right),$$

então a solução geral de $t^2 p''(t) - 2p(t) = 2 - t$ é dada por:

$$-1 + \frac{1}{2}t + L\left(\left\{t^2\right\}\right) = \left\{-1 + \frac{1}{2}t + at^2 : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação diferencial linear $2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t$.

Seja $T_1(p(t)) = 2tp'(t) - 2p(0)$, em que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Logo

$$T_1(p(t)) = 2tp'(t) - 2p(0) = 2t(a_1 + 2a_2 t) - 2a_0 = -2a_0 + 2a_1 t + 4a_2 t^2$$

Como

$$M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T_1(1) = -2$, $T_1(t) = 2t$, $T_1(t^2) = 4t^2$, onde $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ é a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$
Logo

$$2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t \Leftrightarrow T_1(p(t)) \ = 2 - t \Leftrightarrow M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underset{M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}) \text{ é invertível}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B}))^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é, a solução geral de

$$2tp'(t) - 2p(0) = 2 - t$$

é:

$$\left\{-1 - \frac{1}{2}t\right\}.$$

Verificação:

$$T_1\left(-1 - \frac{1}{2}t\right) = 2t\left(-1 - \frac{1}{2}t\right)' - 2\left(-1 - \frac{1}{2}0\right) = 2t\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 2 - t.$$

Nota importante: Como

$$\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{N}(M(T_1;\mathcal{B};\mathcal{B})) = 0$$

então T_1 é injectiva e tendo-se

$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathcal{I}(T_1),$$

então $\mathcal{I}(T_1) = \mathbb{R}^3$, isto é, T_1 é sobrejectiva e uma base para $\mathcal{I}(T_1)$ é por exemplo

$$\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2\right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{P}_2$.

Cálculo alternativo de uma base de $\mathcal{I}(T_1)$:
Seja $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Como

$$T_1(p(t)) = T_1\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right) = 2tp'(t) - 2p(0) = -2a_0 + 2a_1 t + 4a_2 t^2$$

então
$$\mathcal{I}(T_1) = \{T_1\left(p\left(t\right)\right) : p\left(t\right) \in \mathcal{P}_2\} = L\left(\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}\right).$$
Como $\{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se
$$\mathcal{I}\left(T_1\right) = L\left(\left\{T\left(1\right), T\left(t\right), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L\left(\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}\right)$$
e sendo o conjunto $\{-2, 2t, 4t^2\}$ linearmente independente então
$$\left\{-2, 2t, 4t^2\right\}$$
é uma base de $\mathcal{I}\left(T_1\right)$, tendo-se
$$\dim \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T_1) + \dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathcal{N}(T_1) + 3 \Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(T_1) = 0,$$
isto é, T_1 é injectiva.

25. Seja U o subespaço das matrizes simétricas de $\mathcal{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$, isto é,
$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right) : A = A^T\right\}.$$
Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por
$$T\left(A\right) = AB + BA$$
com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(i) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in U$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tem-se
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}$$
Logo, a expressão geral de $T : U \to U$ é dada por:
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}.$$

(ii) Determinemos uma base para U e a matriz que representa T em relação a essa base. Seja $A \in U$. Tem-se
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Como o conjunto
$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

gera U e é linearmente independente, então $\mathcal{B}$ é uma base de U. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}= \\
&= 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}= \\
&= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}= \\
&= 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

então a matriz que representa T em relação à base $\mathcal{B}$ é dada por:

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Uma base para $\mathcal{N}(T)$:
Como

$$\mathcal{N}\left(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,0,-1)\}\right),$$

então

$$\mathcal{N}(T)=\left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:(a,b,c)\in L\left(\{(1,0,-1)\}\right)\right\}=L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Como $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim\mathcal{N}(T)=1$. Logo, T não é injectiva, uma vez que $\dim\mathcal{N}(T)\neq 0$.

Resolução alternativa para encontrar uma base para $\mathcal{N}(T)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(T) &= \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:T(A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}= \\
& \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:\begin{bmatrix} 2b & a+c \\ a+c & 2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}= \\
&= \left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\in U:2b=0 \quad \text{e} \quad a+c=0\right\}= \\
&= \left\{A=\begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}:c\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)=L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Como $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$, $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

Uma base para $\mathcal{I}(T)$:

Como $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ gera U, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(T) &= L\left(\left\{T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\}\right) = \\
&= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right) = \\
&= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, então

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

é uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como $\dim U = 3$, tem-se $\mathcal{I}(T) \neq U$, pelo que T não é sobrejectiva.

(iv) Resolva, em U, a equação linear $T(A) = B$.

Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

então $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma solução particular da equação linear $T(A) = B$.

Como a solução geral de $T(A) = B$ é dada por:

$$(\text{Solução particular de } T(A) = B) + (\text{Solução geral de } T(A) = \mathbf{0})$$

e como a solução geral de $T(A) = \mathbf{0}$ é dada por

$$\mathcal{N}(T) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

então a solução geral de $T(A) = B$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}.$$

26. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ cuja matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que a representa em relação às bases ordenadas

$$\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3, t^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

(i) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. De (*), tem-se

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= 1+t \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2 = 1+2t+t^2 \\
T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2+t^2+t^3 = 1+2t+2t^2+t^3 \\
T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 1+t+t+t^2+t^2+t^3+t^3 = 1+2t+2t^2+2t^3
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= -\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

então

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{aligned}
= \; & a\left(\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) - \frac{2}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\
& +b\left(\frac{1}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) - \frac{2}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\
& +c\left(\frac{1}{3}(1+t) - \frac{2}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right) + \\
& +d\left(-\frac{2}{3}(1+t) + \frac{1}{3}\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+t^3\right) + \frac{1}{3}\left(1+2t+2t^2+2t^3\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t^2\right) + b\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t^2 - t^3\right) + c\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}t^2 + t^3\right) + d\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t + \frac{5}{3}t^2 + t^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d\right)t + \left(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c + \frac{5}{3}d\right)t^2 + (-b + c + d)\,t^3$$

Logo, a expressão geral de $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ é dada por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d\right)t + \left(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c + \frac{5}{3}d\right)t^2 + (-b + c + d)\,t^3.$$

(ii) Como a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3$ é invertível, pois $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ é invertível então T é linear e bijectiva, isto é, T é um isomorfismo. Sendo T um isomorfismo, T^{-1} também é um isomorfismo.

Determinemos a expressão geral do isomorfismo T^{-1}, isto é, determinemos

$$T^{-1}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right).$$

Primeiro determinemos $M(T; \mathcal{B}^c_{2\times 2}; \mathcal{B}^c_3)$, onde

$$\mathcal{B}^c_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{B}^c_3 = \left\{1, t, t^2, t^3\right\}$$

são respectivamente as bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{P}_3$.

A matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}^c_{2\times 2}$ é dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}^c_{2\times 2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz de mudança da base $\mathcal{B}_2$ para a base $\mathcal{B}^c_3$ é dada por:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}^c_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa T em relação às bases $\mathcal{B}^c_{2\times 2}$ e $\mathcal{B}^c_3$ é dada por:

$$M(T; \mathcal{B}^c_{2\times 2}; \mathcal{B}^c_3) = S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}^c_3} M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}^c_{2\times 2}}\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que a expressão geral de T obtida na alínea (i) pode ser obtida através da matriz $M(T; \mathcal{B}_{2\times 2}^c; \mathcal{B}_3^c)$ anterior:

as coordenadas de $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right)$ na base $\mathcal{B}_3^c$ são dadas por

$$M(T; \mathcal{B}_{2\times 2}^c; \mathcal{B}_3^c) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d \\ \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}d \\ c - b + d \end{bmatrix}.$$

Logo

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d\right)t + \left(-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c + \frac{5}{3}d\right)t^2 + (-b + c + d)\,t^3$$

Seja $p(t) \in \mathcal{P}_3$, isto é, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, com $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.
Atendendo a que as coordenadas de $T^{-1}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$ em relação à base $\mathcal{B}_{2\times 2}^c$ são dadas por:

$$\left(M(T; \mathcal{B}_{2\times 2}^c; \mathcal{B}_3^c)\right)^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 - a_0 - 2a_2 + a_3 \\ 2a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ 3a_0 - 2a_1 + a_2 \\ a_1 - a_0 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$T^{-1}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right) = (2a_1 - a_0 - 2a_2 + a_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ (2a_0 - a_1 + a_2 - a_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (3a_0 - 2a_1 + a_2)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (a_1 - a_0)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2a_1 - a_0 - 2a_2 + a_3 & 2a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ 3a_0 - 2a_1 + a_2 & a_1 - a_0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a expressão geral do isomorfismo $T^{-1} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é dada por:

$$T^{-1}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 - a_0 - 2a_2 + a_3 & 2a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ 3a_0 - 2a_1 + a_2 & a_1 - a_0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se de facto:

$$T^{-1} \circ T = I_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} \qquad \text{e} \qquad T \circ T^{-1} = I_{\mathcal{P}_3}.$$

(iii) Atendendo à alínea anterior, a solução geral da equação linear

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$$

é dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = T^{-1}\left(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3\right) = \begin{bmatrix} 4-1-6+4 & 2-2+3-4 \\ 3-4+3 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Seja U o espaço linear das funções reais de variável real duas vezes diferenciável. Considere a transformação linear $T : U \to U$ definida por

$$T(f) = f'' - 2f' + f.$$

Considere o subespaço $S = \{f \in U : f'' - 2f' + f = \mathbf{0}\}$ de U.

(i) Mostre que o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S. Sugestão: Mostre que se $f \in S$, então $f(t)\, e^{-t}$ é um polinómio de grau menor ou igual a 1.

Seja $f \in S$. Como

$$\begin{aligned} \left(f(t)\, e^{-t}\right)'' &= \left(f'(t)\, e^{-t} - f(t)\, e^{-t}\right)' = f''(t)\, e^{-t} - f'(t)\, e^{-t} - f'(t)\, e^{-t} + f(t)\, e^{-t} = \\ &= \left(f''(t) - 2f'(t) + f(t)\right) e^{-t} \underset{f \in S}{=} \mathbf{0} \end{aligned}$$

então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$\left(f(t)\, e^{-t}\right)' = c.$$

Assim, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$f(t)\, e^{-t} = ct + d \in \mathcal{P}_1 = L(\{1, t\}).$$

Logo

$$f(t) \in L\left(\left\{e^t, te^t\right\}\right).$$

Tem-se assim:

$$S = L\left(\left\{e^t, te^t\right\}\right),$$

onde o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é linearmente independente uma vez que o conjunto $\{1, t\}$ é linearmente independente.

Logo o conjunto $\{e^t, te^t\}$ é uma base de S.

(ii) Mostre que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Sejam $f, g \in S$ tais que

$$f(0) = g(0) = a \quad \text{e} \quad f'(0) = g'(0) = b.$$

Como $S = L(\{e^t, te^t\})$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(t) = \alpha_1 e^t + \beta_1 te^t \quad \text{e} \quad g(t) = \alpha_2 e^t + \beta_2 te^t.$$

Como $f(0) = g(0) = a$ tem-se

$$a = f(0) = \alpha_1 \quad \text{e} \quad a = g(0) = \alpha_2.$$

Logo

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Por outro lado, como $f'(0) = g'(0) = b$,

$$b = f'(0) = \left(\alpha_1 e^t + \beta_1 te^t\right)'_{t=0} = \left(\alpha_1 e^t + \beta_1 e^t + \beta_1 te^t\right)_{t=0} = \alpha_1 + \beta_1$$

e

$$b = g'(0) = \left(\alpha_2 e^t + \beta_2 te^t\right)'_{t=0} = \left(\alpha_2 e^t + \beta_2 e^t + \beta_2 te^t\right)_{t=0} = \alpha_2 + \beta_2$$

Assim,

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$$

e uma vez que $\alpha_1 = \alpha_2$, então

$$\beta_1 = \beta_2.$$

Deste modo, para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha_1 e^t + \beta_1 te^t = \alpha_2 e^t + \beta_2 te^t = g(t),$$

isto é,

$$f = g.$$

Pelo que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = a$ e $f'(0) = b$.

(iii) Determine a única solução f da equação diferencial linear $T(f) = 1$ que verifica $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

A função identicamente igual a $1 : f = 1$ ($f(t) = 1$,para todo o $t \in \mathbb{R}$) é uma solução particular de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}.$$

Atendendo à alínea anterior, existe uma única função $f \in S$ tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Como

$$f(t) = \alpha e^t + \beta te^t$$

e

$$0 = f(0) = \alpha \quad \text{e} \quad 0 = f'(0) = \beta$$

então

$$f(t) = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, é a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = \mathbf{0} \quad \text{e}\ f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}$$

Como a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}.$$

é dada por:

$$\begin{aligned}&(\text{Solução particular de } \{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}) + \\ &+ (\text{Solução geral de } \{f \in U : T(f) = \mathbf{0} \quad \text{e} \; f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}),\end{aligned}$$

então a solução geral de

$$\{f \in U : T(f) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0\}$$

é dada por:

$$f(t) = 1,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$.

6^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas (Valores próprios e vectores próprios. Diagonalização)

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Verifique se 0 é valor próprio de A e caso seja determine um vector próprio associado.

2. Sem calcular o polinómio característico, indique um valor próprio e dois vectores próprios associados linearmente independentes para a matriz
$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Determine os valores próprios de uma matriz A 2×2 cujo traço seja igual a 5 e cujo determinante seja igual a 6.

4. Determine uma matriz A real simétrica ($A^T = A$) 2×2 cujos valores próprios sejam -2 e 2 e tal que $(2, 1)$ seja um vector próprio associado ao valor próprio 2.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que admite os vectores próprios
$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (-1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 1, 0),$$
associados respectivamente aos valores próprios $1, 2$ e 3.
Determine a expressão geral de T.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x, y, z) = (0, y + 3z, 3y + z).$$
(i) Diga quais dos seguintes vectores:
$$v_1 = (2, 1, 1), \quad v_2 = (0, -1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 0), \quad v_4 = (-1, 1, 3), \quad v_5 = (0, 3, 3)$$
são vectores próprios.
(ii) Determine os valores próprios de T.
(iii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.
(iv) Determine os subespaços próprios de T.

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por
$$T(1, 2) = (5, 5) = T\,(2, 1)\,.$$
(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ são vectores próprios de T.
(ii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.
(iii) Indique uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ relativamente à qual a matriz que representa T seja uma matriz diagonal.
(iv) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ são vectores próprios de T.

(ii) Diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

(iii) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(iv) Diagonalize T. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que

$$D = PAP^{-1}.$$

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base ordenada $\{(1,2),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine os valores próprios de T e diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

(ii) Determine bases para os subespaços próprios de T.

(iii) Diagonalize a matriz A. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que

$$D = PAP^{-1}.$$

10. Seja V um espaço linear de dimensão finita. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$. Uma tranformação linear nas condições anteriores chama-se **projecção**.

(i) Mostre que os valores próprios de T são 0 e 1.

(ii) Justifique que T é diagonalizável.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x,y,-x-y).$$

(i) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(ii) A transformação linear T representa geometricamente uma projecção sobre um plano, paralelamente a um vector. Determine esse plano e esse vector.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que representa geometricamente a projecção sobre o plano $x+y+z=0$, paralelamente ao vector $(0,0,1)$.

(i) Explique o significado do plano e do vector referidos no enunciado.

(ii) Determine a expressão geral de T.

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(ii) Mostre que não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de T. T é diagonalizável?

14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z).$$

(i) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(ii) Mostre que não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual T possa ser representada por uma matriz diagonal.

15. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + z, y + 2z).$$

(i) Determine o polinómio característico de T.

(ii) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(iii) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T. Determine a matriz que representa T nesta base ordenada.

(iv) Seja A a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$, isto é, $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Diagonalize a matriz A. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^{-1}$.

(v) Determine A^n e $T^n(x, y, z)$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base ordenada

$$\{(0, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine o polinómio característico de T.

(ii) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(iii) Diagonalize a matriz A. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^{-1}$.

(iv) Determine A^n e $T^n(x, y, z)$.

17. Sabendo que os vectores $(1, 1, 1), (1, 0, -1)$ e $(1, -1, 0)$ são vectores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

determine a, b, c, d, e, f.

18. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A + A^T$.

(i) Escolha uma base ordenada para $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a matriz que representa T em relação a essa base ordenada.

(ii) Determine os valores próprios e os vectores próprios de T.

(iii) Diga se T pode ou não ser representada por uma matriz diagonal em relação a uma base ordenada apropriada de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Em caso afirmativo, indique uma tal base ordenada e a correspondente matriz diagonal que representa T.

19. Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que A_1, A_2 e A_3 são diagonalizáveis. Isto é, determine matrizes de mudança de bases P_1^{-1}, P_2^{-1} e P_3^{-1} e matrizes diagonais D_1, D_2 e D_3 tais que

$$D_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}, \quad D_2 = P_2 A_2 P_2^{-1} \quad \text{e} \quad D_3 = P_3 A_3 P_3^{-1}.$$

20. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine os valores de a, b, c de modo a que exista uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída só por vectores próprios de T.

Resolução da 6^a Ficha de exercícios

1. Seja
$$A=\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Como
$$\det(A-0I)=\det\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}=$$
$$=\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}=\det\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{*}=0$$
então 0 é valor próprio de A e atendendo a (*) $(1,-2,1)\in\mathcal{N}(A)=L\{(1,-2,1)\}$, logo tem-se
$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=0\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
isto é, $(1,-2,1)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0.

2. Tem-se
$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=0\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\qquad\text{e}\qquad\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Logo, 0 é um valor próprio de $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ e $(0,-1,1)$ e $(1,-1,0)$ são dois vectores próprios (associados ao valor próprio 0) linearmente independentes.

3. Determinemos os valores próprios de uma matriz A 2×2 cujo traço seja igual a 5 e cujo determinante seja igual a 6.

Seja $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se
$$\operatorname{tr}A=5\Leftrightarrow a+d=5\qquad\text{e}\qquad\det A=6\Leftrightarrow ad-bc=6.$$
Sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios de A. Como
$$\operatorname{tr}A=\lambda_1+\lambda_2\qquad\text{e}\qquad\det A=\lambda_1\lambda_2$$
então
$$\lambda_1+\lambda_2=5\qquad\text{e}\qquad\lambda_1\lambda_2=6$$

Logo

$$[\lambda_1 = 5 - \lambda_2 \qquad \text{e} \qquad (5-\lambda_2)\,\lambda_2 = 6] \;\Leftrightarrow\; (\lambda = 3 \;\; \text{ou} \;\; \lambda = 2),$$

isto é, os valores próprios de A são 3 e 2.

4. Determinemos uma matriz A real simétrica ($A^T = A$) 2×2 cujos valores próprios sejam -2 e 2 e tal que $(2,1)$ seja um vector próprio associado ao valor próprio 2.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A = A^T$. Logo $b = c$. Além disso, sendo -2 e 2 dois valores próprios de A tem-se

$$0 = \det(A + 2I) = \det \begin{bmatrix} a+2 & b \\ b & d+2 \end{bmatrix} = -b^2 + 2a + 2d + ad + 4$$

e

$$0 = \det(A - 2I) = \det \begin{bmatrix} a-2 & b \\ b & d-2 \end{bmatrix} = -b^2 - 2a - 2d + ad + 4$$

sendo $(2,1)$ um vector próprio associado ao valor próprio 2 tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (2a + b = 4 \;\; \text{e} \;\; 2b + d = 2).$$

Logo

$$\begin{cases} -b^2 + 2a + 2d + ad + 4 = 0 \\ -b^2 - 2a - 2d + ad + 4 = 0 \\ 2a + b = 4 \\ 2b + d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{5} \\ \\ b = \frac{8}{5} \\ \\ d = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

e assim

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \\ \\ \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que admite os vectores próprios

$$v_1 = (1,2,1), \qquad v_2 = (-1,0,1), \qquad v_3 = (0,1,0),$$

associados respectivamente aos valores próprios $1, 2$ e 3.

Determinemos a expressão geral de T.

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,2,1) + \beta(-1,0,1) + \gamma(0,1,0).$$

Logo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 2 & 0 & z-x \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & -1 & z-y+x \end{array}\right]$$

e assim $\gamma = -x + y - z$, $\beta = \frac{1}{2}(-x+z)$, $\alpha = \frac{1}{2}(x+z)$. Pelo que

$$T(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+z)\,T(1,2,1) + \frac{1}{2}(-x+z)\,T(-1,0,1) + (-x+y-z)\,T(0,1,0) =$$

$$= \frac{1}{2}(x+z)\,(1,2,1) + \frac{1}{2}(-x+z)\,2(-1,0,1) + (-x+y-z)\,3(0,1,0) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, 3y - 2x - 2z, \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x\right)$$

ou seja, a expressão geral de T é dada por:

$$T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, 3y - 2x - 2z, \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x\right).$$

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (0, y + 3z, 3y + z).$$

(i) $T(v_1) = (0,4,4)$. Como não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_1) = \lambda v_1$, então v_1 não é vector próprio de T.

$T(v_2) = (0,2,-2) = (-2)(0,-1,1) = (-2)v_2$. Logo, v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio -2.

$T(v_3) = (0,0,0) = 0(1,0,0) = 0v_3$. Logo, v_3 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0.

$T(v_4) = (0,10,6)$. Como não existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v_4) = \lambda v_4$, então v_4 não é vector próprio de T.

$T(v_5) = (0,12,12) = 4(0,3,3) = 4v_5$. Logo, v_5 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 4.

(ii) Determinemos os valores próprios de T. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,3)$ e $T(0,0,1) = (0,3,1)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[(1-\lambda)^2 - 9\right] = \\ &= -\lambda\left((1-\lambda) - 3\right)\left((1-\lambda) + 3\right) = -\lambda\left(-2-\lambda\right)\left(4-\lambda\right). \end{aligned}$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 4.$$

(iii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como T tem 3 valores próprios distintos, os vectores próprios correspondentes a cada um deles irão ser linearmente independentes e como tal irá existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(iv) O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}(A-\lambda_1 I) = \mathcal{N}(A) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x,y,z) : y = z = 0\} = \\
&= \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,0)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s,0,0), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}(A-\lambda_2 I) = \mathcal{N}(A+2I) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x,y,z) : x = 0 \text{ e } y+z = 0\} = \\
&= \{(x,y,z) : x = 0 \text{ e } y+z = 0\} = \\
&= \{(0,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,-1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = -2$ são

$$u = (0,-s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_3} &= \mathcal{N}(T-\lambda_3 I) \underset{\text{base canónica}}{=} \mathcal{N}(A-\lambda_3 I) = \mathcal{N}(A-4I) \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x,y,z) : x = 0 \text{ e } -y+z = 0\} = \\
&= \{(x,y,z) : x = 0 \text{ e } y = z\} = \\
&= \{(0,z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,1,1)\}$ é uma base de E_{λ_3}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 4$ são

$$u = (0,s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(1,2) = (5,5) = T(2,1).$$

(i) Como

$$(1,-1) = -(1,2) + (2,1)$$

Tem-se

$$T(v_1) = T(1,-1) = T[-(1,2)+(2,1)] \underset{T \text{ é linear}}{=} -T(1,2) + T(2,1) =$$
$$= -(5,5) + (5,5) = (0,0) = 0(1,-1) = 0v_1.$$

Como

$$(1,1) = \frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(2,1)$$

Tem-se

$$T(v_2) = T(1,1) = T\left[\frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(2,1)\right] \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{1}{3}T(1,2) + \frac{1}{3}T(2,1) =$$
$$= \frac{1}{3}[(5,5)+(5,5)] = \frac{10}{3}(1,1) = \frac{10}{3}v_2.$$

Logo, v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio $\frac{10}{3}$.

(ii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como os vectores $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (1,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$ pois são dois vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e além disso, v_1 e v_2 são vectores próprios de T, então existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(iii) Seja $\mathcal{B}_{vp} = \{v_1, v_2\} = \{(1,-1),(1,1)\}$. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(v_1) = 0v_1 = 0v_1 + 0v_2$ e $T(v_2) = \frac{10}{3}v_2 = 0v_1 + \frac{10}{3}v_2$ e deste modo as coordenadas $(0,0)$ e $(0, \frac{10}{3})$ constituem respectivamente a 1^a e 2^a colunas de $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$.

Logo, $\mathcal{B}_{vp}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual T pode ser representada por uma matriz diagonal, por ser uma base formada só com vectores próprios de T.

(iv) Seja $A = M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$, com $\mathcal{B}_{vp} = \{(1,-1),(1,1)\}$. O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\frac{10}{3} - \lambda\right).$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{10}{3}.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}\left(T-\lambda_1 I\right)=\{\alpha(1,-1)+\beta(1,1):(\alpha,\beta)\in\mathcal{N}\left(A-\lambda_1 I\right)\}= \\ &= \{\alpha(1,-1)+\beta(1,-1):(\alpha,\beta)\in L\left(\{(1,0)\}\right)\}= \\ &= \{\alpha(1,-1):\alpha\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(1,-1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,-1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u=(s,-s)\,, \text{ com } s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}\left(T-\lambda_2 I\right)=\{\alpha(1,-1)+\beta(1,1):(\alpha,\beta)\in\mathcal{N}\left(A-\lambda_2 I\right)\}= \\ &= \{\alpha(1,-1)+\beta(1,1):(\alpha,\beta)\in L\left(\{(0,1)\}\right)\}= \\ &= \{\beta(1,1):\beta\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(1,-1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = \frac{10}{3}$ são

$$u=(s,s)\,, \text{ com } s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

8. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Sejam $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,1)$, $v_3=(0,0,1)$. Atendendo à matriz, tem-se

$$T(v_1)=T(1,0,0)=0(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1)=$$

$$=(0,0,0)=0(1,0,0)=0v_1;$$

$$T(v_2)=T(1,1,1)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+1(0,0,1)=$$

$$(1,1,1)=1(1,1,1)=1v_2;$$

$$T(v_3)=T(0,0,1)=0(1,0,0)+0(0,1,0)+0(0,0,1)=$$

$$(0,0,0)=0(0,0,1)=0v_3.$$

Logo, v_1 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0; v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 1; v_3 é um vector próprio de T associado ao valor próprio 0.

(ii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como os vectores $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,1)$ e $v_3=(0,0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$ pois são três vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$ e $\dim\mathbb{R}^3=3$ e além disso, v_1, v_2 e v_3 são vectores próprios de T, então existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(iii) Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (1,1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (1 - \lambda).$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\right\} = \\ &= \{(x,0,z) : x,z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0),(0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s,0,t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x,y,z) : -x + y = 0 \text{ e } y - z = 0\} = \\ &= \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (s,s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

(iv) É possível ter então uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,0,0),(1,1,1),(0,0,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Note ainda que

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} A \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1}$$

com

$$\left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$ é diagonal tendo-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \underset{T}{\overset{A}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \underset{M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

Em resumo, existe $P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3}$ tal que

$$D = PAP^{-1}$$

com $D = M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$.

9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base ordenada $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Tem-se

$$\det(A - 0I) = \det A = -5 \neq 0.$$

Logo, como 0 não é valor próprio de T então T é invertível.

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = [(2-\lambda)-3]\,[(2-\lambda)+3] =$$

$$= (-1-\lambda)(5-\lambda)$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 5.$$

Como T tem 2 valores próprios distintos, os vectores próprios correspondentes a cada um deles irão ser linearmente independentes e como tal irá existir uma base de $\mathbb{R}^2$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(ii) O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(A - (-1)I)\} = \\
&= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in L(\{(-1,1)\})\} = \\
&= \{\alpha(-1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = -1$ são

$$u = (-s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}(A - 5I)\} = \\
&= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha, \beta) \in L(\{(1,1)\})\} = \\
&= \{\alpha(1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 5$ são

$$u = (s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1,1), (1,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$T(-1,1) = \lambda_1(-1,1) = \lambda_1(-1,1) + 0(1,1)$$

e

$$T(1,1) = \lambda_2(1,1) = 0(-1,1) + \lambda_2(1,1).$$

Deste modo, $(\lambda_1, 0)$ e $(0, \lambda_2)$ constituem respectivamente a 1^a e 2^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

Além disso, sendo $\mathcal{B}_1 = \{(1,2), (2,1)\}$, tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_{vp}} A \left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1}$$

com

$$\left(S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_1)$$

uma vez que

$$(-1,1) = (1,2) - (2,1) \quad \text{e} \quad (1,1) = \frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(2,1).$$

Logo, a matriz A é diagonalizável e tem-se

$$D = PAP^{-1}$$

com

$$P^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Observação:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \\ P^{-1} \uparrow I & & I \downarrow P \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[D]{T} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

10. Seja V um espaço linear de dimensão finita. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$. Uma tranformação linear nas condições anteriores chama-se **projecção**.

(i) Mostre que os valores próprios de T são 0 e 1.

Dem. Seja λ um valor próprio de T. Logo existe $v \neq \mathbf{0}$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Por outro lado, como

$$\lambda v = T(v) = T^2(v) = (T \circ T)(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) \underset{T \text{ é linear}}{=} \lambda T(v) = \lambda \lambda v = \lambda^2 v$$

tem-se

$$\lambda v = \lambda^2 v \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda) v = \mathbf{0} \underset{v \neq \mathbf{0}}{\Leftrightarrow} (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1).$$

Logo, os valores próprios de T são 0 e 1.

(ii) Tem-se

$$T^2 = T \Leftrightarrow (T - I) T = \mathbf{0}$$

logo, para todo o $u \in V$

$$(T - I)(T(u)) = \mathbf{0}(u) = \mathbf{0} \Leftrightarrow T(u) \in \mathcal{N}(T - I)$$

pelo que

$$\mathcal{I}(T) \subset \mathcal{N}(T - I).$$

Seja agora $u \in \mathcal{N}(T - I)$. Logo $(T - I)(u) = \mathbf{0}$, isto é, $T(u) = u$, ou seja $u \in \mathcal{I}(T)$. Deste modo

$$\mathcal{N}(T - I) \subset \mathcal{I}(T)$$

e assim

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{N}(T - I).$$

Por outro lado, sendo $n = \dim V$, atendendo a que

$$n = \dim \underbrace{V}_{\text{espaço de partida}} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T) =$$

$$= \dim \mathcal{N}(T - 0I) + \dim \mathcal{N}(T - 1I) = m_g(0) + m_g(1)$$

isto é,

$$n = m_g(0) + m_g(1)$$

então T é diagonalizável, uma vez que existirá assim uma base de V formada só com vectores próprios de T.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, y, -x - y).$$

(i) Determinemos os valores próprios e os subespaços próprios de T.
Seja $\mathcal{B}_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, -1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda (1 - \lambda)^2.$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) = \mathcal{N}(A-0I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,0,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (0,0,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) = \mathcal{N}(A-I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=-y-z\right\} = \\ &= \{(-y-z,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (-s-t,s,t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(ii) Tem-se $T^2 = T$, razão pela qual a transformação linear T é uma projecção. Como

$$\{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de T, cujos valores próprios associados são respectivamente 1 e 0, tendo-se

$$\begin{aligned} T(-1,1,0) &= 1(-1,1,0) = (-1,1,0) \\ T(-1,0,1) &= 1(-1,0,1) = (-1,0,1) \\ T(0,0,1) &= 0(0,0,1) = (0,0,0). \end{aligned}$$

Assim, T projecta os elementos de $\mathbb{R}^3$ sobre um plano, paralelamente a um vector, sendo o plano dado por:

$$L(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\})$$

isto é, por:

$$x+y+z=0$$

e o vector dado por:

$$(0,0,1).$$

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que representa geometricamente a projecção sobre o plano $x + y + z = 0$, paralelamente ao vector $(0, 0, 1)$.

(i) O plano

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} = L\left(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\right)$$

é tal que

$$T(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \quad \text{e} \quad T(-1, 0, 1) = (-1, 0, 1)$$

e o vector $(0, 0, 1)$ é tal que

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Ou seja, os vectores que definem o plano são vectores (de $\mathcal{I}(T)$) (linearmente independentes) próprios de T associados ao valor próprio 1 e o vector $(0, 0, 1)$ é um vector (de $\mathcal{N}(T)$) próprio de T associado ao valor próprio 0.

(ii) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Como

$$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$, as coordenadas de (x, y, z) em relação à base ordenada anterior irão ser α, β, γ tais que

$$(x, y, z) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(0, 0, 1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & x+y+z \end{array}\right]$$

e assim $\gamma = x + y + z$, $\beta = -x - y$, $\alpha = y$. Pelo que

$$T(x, y, z) = yT(-1, 1, 0) + (-x - y)\,T(-1, 0, 1) + (x + y + z)\,T(0, 0, 1) =$$

$$= y(-1, 1, 0) + (-x - y)(-1, 0, 1) + (x + y + z)(0, 0, 0) =$$

$$= (x, y, -x - y),$$

isto é, a expressão geral de T é dada por:

$$T(x, y, z) = (x, y, -x - y).$$

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, o valor próprio de T é

$$\lambda = 2.$$

O subespaço próprio E_λ é dado por

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(A - 2I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0)\}$ é uma base de E_λ.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = 2$ são

$$u = (s, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash \{0\}.$$

(ii) Não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de T uma vez que $\dim E_\lambda = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Logo, T não é diagonalizável.

14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z).$$

Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1, 2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

(i) O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12.$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (s, 0, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y, z) : x = z = 0\} = \\ &= \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,1,0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,1,0)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (0, s, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

(ii) Não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz A não é diagonalizável, isto é, não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual T possa ser representada por uma matriz diagonal.

15. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + z, y + 2z).$$

Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (1,2,1)$ e $T(0,0,1) = (1,1,2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

(i) O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 + \lambda = -\lambda\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = \\ &= -\lambda\left[((2-\lambda) - 1)((2-\lambda) + 1)\right] = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda. \end{aligned}$$

(ii) Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 3.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) = \mathcal{N}(A-\lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x,y,z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s,0,0), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) = \mathcal{N}(A-\lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x,y,z) : -x+y+z = 0 \text{ e } y+z=0\} = \\ &= \{(x,y,z) : x = 0 \text{ e } y+z=0\} = \\ &= \{(0,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,-1,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (0,-s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_3} &= \mathcal{N}(T-\lambda_3 I) = \mathcal{N}(A-\lambda_3 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x,y,z) : -3x+y+z = 0 \text{ e } -y+z=0\} = \\ &= \left\{(x,y,z) : x = \frac{2}{3}z \text{ e } y = z\right\} = \\ &= \left\{\left(\frac{2}{3}z, z, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(2,3,3)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(2,3,3)\}$ é uma base de E_{λ_3}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$ são

$$u = (2s,3s,3s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,0,0),(0,-1,1),(2,3,3)\},$$

uma vez que
$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dim E_{\lambda_3} = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$
Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por
$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$
uma vez que
$$T(1,0,0) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,-1,1) + 0\,(2,3,3)\,,$$
$$T(0,-1,1) = (0,-1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,-1,1) + 0\,(2,3,3)$$
e
$$T\,(2,3,3) = (6,9,9) = 0(1,0,0) + 0(0,-1,1) + 3\,(2,3,3)\,.$$
Deste modo, $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0)$ e $(0, 0, \lambda_3)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

(iv) Seja A a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$, isto é, $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se, por **(iii)**,
$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Logo, atendendo ao diagrama
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \underset{T}{\overset{A}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \underset{M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$
tem-se
$$D = PAP^{-1},$$
com
$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$
com
$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3).$$
Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

(v) Atendendo a que
$$D = PAP^{-1},$$
tem-se
$$A = P^{-1}DP.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^n &= P^{-1}D^nP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}3^n & \frac{1}{3}3^n \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n \\ 0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$T^n(x,y,z) = A^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}3^n y + \frac{1}{3}3^n z \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n\right) y + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n\right) z \\ \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n\right) y + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}3^n\right) z \end{bmatrix},$$

para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

16. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base $\mathcal{B} = \{(0,1,0), (1,0,-1), (1,0,1)\}$ (ordenada) de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$B = M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c) = S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} (S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c})^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Note que deste modo, para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tem-se

$$T(x,y,z) = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (9x, 3x+7y-z, 3x-2y+8z).$$

(i) O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 7-\lambda & -1 \\ 3 & -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\left[(7-\lambda)(8-\lambda)-2\right] = \\ &= (9-\lambda)\left(\lambda^2 - 15\lambda + 54\right) = (9-\lambda)(\lambda-9)(\lambda-6) = \\ &= -(\lambda-9)^2(\lambda-6). \end{aligned}$$

(ii) Os valores próprios de T são os valores próprios de B, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(B-\lambda I)=0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 9 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 6.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) = \mathcal{N}(B-\lambda_1 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x-2y-z=0\right\} = \\
&= \{(x,y,3x-2y) : x,y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,3),(0,1,-2)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,3),(0,1,-2)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 9$ são

$$u = (s,t,3s-2t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) = \mathcal{N}(B-\lambda_2 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x,y,z) : 3x=0 \text{ e } y-z=0\} = \\
&= \{(0,z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 6$ são

$$u = (0,s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,0,3),(0,1,-2),(0,1,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,0,3) = (9,0,27) = 9(1,0,3) + 0(0,1,-2) + 0(0,1,1),$$

$$T(0,1,-2) = (0,9,-18) = 0(1,0,3) + 9(0,1,-2) + 0(0,1,1)$$

e

$$T(0,1,1) = (0,6,6) = 0(1,0,3) + 0(0,1,-2) + 6(0,1,1).$$

Deste modo, $(\lambda_1,0,0)$, $(0,\lambda_2,0)$ e $(0,0,\lambda_3)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$.

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \xrightarrow[T]{B} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\
\left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \\
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp})
\end{array}$$

tem-se

$$D = PBP^{-1},$$

com

$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz B é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

(iv) Atendendo a que

$$D = PBP^{-1},$$

tem-se

$$B = P^{-1}DP.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
B^n &= P^{-1}D^nP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 9^n & 6^n \\ 9^n 3 & 9^n(-2) & 6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 9^n - 6^n & \frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & -\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \\ 9^n - 6^n & -\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$A^n = \left(S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c}\right)^{-1} B^n S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 9^n - 6^n & \frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & -\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \\ 9^n - 6^n & -\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}6^n + \frac{1}{3}9^n & \frac{4}{3}9^n - \frac{4}{3}6^n & \frac{2}{3}9^n - \frac{2}{3}6^n \\ \frac{1}{3}9^n - \frac{1}{3}6^n & \frac{2}{3}6^n + \frac{1}{3}9^n & \frac{1}{3}6^n - \frac{1}{3}9^n \\ \frac{1}{3}6^n - \frac{1}{3}9^n & \frac{2}{3}9^n - \frac{2}{3}6^n & \frac{4}{3}9^n - \frac{1}{3}6^n \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$T^n(x,y,z) = B^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9^n x \\ (9^n - 6^n)\,x + \left(\frac{1}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n\right) y + \left(-\frac{1}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n\right) z \\ (9^n - 6^n)\,x + \left(-\frac{2}{3}9^n + \frac{2}{3}6^n\right) y + \left(\frac{2}{3}9^n + \frac{1}{3}6^n\right) z \end{bmatrix},$$

para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

17. Sabendo que os vectores $(1,1,1), (1,0,-1)$ e $(1,-1,0)$ são vectores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

existem λ_1, λ_2 e $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,1,1) \in \mathcal{N}(A - \lambda_1 I), \quad (1,0,-1) \in \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) \quad \text{e} \quad (1,-1,0) \in \mathcal{N}(A - \lambda_3 I),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 1 \\ a & b-\lambda_1 & c \\ d & e & f-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 1 \\ a & b-\lambda_2 & c \\ d & e & f-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 1 & 1 \\ a & b-\lambda_3 & c \\ d & e & f-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se respectivamente

$$\begin{cases} 3 - \lambda_1 = 0 \\ \\ a + b + c - \lambda_1 = 0 \\ \\ d + e + f - \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \\ a + b + c = 3 \\ \\ d + e + f = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda_2 = 0 \\ \\ a - c = 0 \\ \\ d - f + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \\ a = c \\ \\ d = f \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\lambda_3 = 0 \\ \\ a - b + \lambda_3 = 0 \\ \\ d - e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \\ a = b \\ \\ d = e. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \\ \lambda_2 = 0 \\ \\ \lambda_3 = 0 \\ \\ a = b = c = d = e = f = 1. \end{cases}$$

18. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(A) = A + A^T.$$

(i) Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

A matriz $M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$. O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = \\
&= (2-\lambda)^2 \left[((1-\lambda)-1)((1-\lambda)+1)\right] = \\
&= -\lambda (2-\lambda)^3 .
\end{aligned}$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (T-\lambda_1 I)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - \lambda_1 I\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_1 c & \lambda_1 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : 2a = 0 \;\text{ e }\; b+c = 0 \;\text{ e }\; 2d = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}, \;\text{ com }\; s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (T-\lambda_2 I)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - \lambda_2 I\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 a & \lambda_2 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 0 & -b+c \\ -c+b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$U = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}, \text{ com } r, s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 4 = \dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, $(\lambda_2, 0, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0, 0)$, $(0, 0, \lambda_1, 0)$ e $(0, 0, 0, \lambda_2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a, 3^a e 4^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_c^{2\times 2}) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_c^{2\times 2}) \\
\left(S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}} \\
(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{vp})
\end{array}$$

tem-se

$$D = PAP^{-1},$$

com

$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_c^{2\times 2}} \quad \text{e} \quad A = M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

19. (i) Seja

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (3-\lambda)(4-\lambda).$$

Os valores próprios de A_1 são

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ -2 & 5-\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0\right\} = \\
&= \{(y,y) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de A_1 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (s, s), \;\; \text{com} \;\; s \in \mathbb{R}\backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}\left(A_2 - \lambda_2 I\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ -2 & 5-\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2x + y = 0\right\} = \\
&= \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,2)\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,2)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de A_1 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$ são

$$u = (s, 2s), \;\; \text{com} \;\; s \in \mathbb{R}\backslash \{0\}.$$

É possível ter uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de A_1:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,1), (1,2)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2.$$

Logo, a matriz A_1 é diagonalizável e tem-se

$$D_1 = P_1 A_1 P_1^{-1},$$

com

$$P_1^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\det(A_2 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] = \\
&= (2-\lambda)\left[(3-\lambda) - 1\right]\left[(3-\lambda) + 1\right] = (2-\lambda)^2 (4-\lambda).
\end{aligned}$$

Os valores próprios de A_2 são

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}\left(A_2 - \lambda_1 I\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0\right\} = \\
&= \{(x,-z,z) : x,z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0),(0,-1,1)\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0),(0,-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 2$ são

$$u = (s,-t,t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}\left(A_2 - \lambda_2 I\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2x+y+z=0 \text{ e } -y+z=0\right\} = \\
&= \{(z,z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 4$ são

$$u = (s,s,s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A_2:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1,0,0),(0,-1,1),(1,1,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Logo, a matriz A_2 é diagonalizável e tem-se

$$D_2 = P_2 A_2 P_2^{-1},$$

com

$$P_2^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$D_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(iii) Seja

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \det(A_3 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = \\ &= (-\lambda)\left[(1-\lambda) - 1\right]\left[(1-\lambda) + 1\right] = \lambda^2 (2-\lambda). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A_3 são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(A_3 - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\right\} = \\ &= \{(-y,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,0),(0,0,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de A_2 associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (-s,s,t), \text{ com } s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(A_2 - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y = 0 \text{ e } -2z = 0\right\} = \\ &= \{(y,y,0) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1,0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1,0)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de A_3 associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (s,s,0), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A_3:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(-1,1,0),(0,0,1),(1,1,0)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 3.$$

Logo, a matriz A_3 é diagonalizável e tem-se

$$D_3 = P_3 A_3 P_3^{-1},$$

com

$$P_3^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

20. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Determinemos os valores próprios de T. Tem-se

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^4 = \lambda^4.$$

O valor próprio de T é $\lambda = 0$.

O subespaço próprio E_λ é dado por

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & b & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & c & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax = 0 \ \text{ e } \ by = 0 \ \text{ e } \ cz = 0\right\}. \end{aligned}$$

Assim, para que exista uma base de $\mathbb{R}^4$ constituída só por vectores próprios de T é necessário que se tenha

$$a = b = c = 0.$$

Caso contrário, teríamos

$$\dim E_\lambda < 4.$$

7^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas (Produtos internos e ortogonalização)

1. Diga quais das seguintes aplicações $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^2$ um produto interno.

   (i) $\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2$

   (ii) $\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + 3\alpha_2 \beta_2$

   (iii) $\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = -2\alpha_1 \beta_1 + 3\alpha_2 \beta_2$

2. Diga quais das seguintes aplicações $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^3$ um produto interno.

   (i) $\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$

   (ii) $\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$

   (iii) $\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = 2\alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3$

3. Determine um produto interno em $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle (1,0), (0,1) \rangle = 2$.

4. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}} \right)$. Verifique que o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por:

   $$\langle u, v \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2,$$

   onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Verifique porém que o mesmo conjunto $\{u, v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em $\mathbb{R}^2$.

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^4$ ortogonal aos vectores $(1,0,0,0)$ e $(1,0,0,1)$.

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por:

   $$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

   (i) Calcule $\|u\|$, para qualquer vector $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.

   (ii) Considere os vectores $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (-1,1,0)$ e $u_3 = (0,0,1)$. Calcule os ângulos formados pelos vectores: u_1 e u_2; u_1 e u_3; u_2 e u_3.

   (iii) Justifique que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Calcule as coordenadas de um vector $u \in \mathbb{R}^3$ em relação a esta base.

7. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Determine uma base ortonormada para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores:

   $$(1,0,-1,0), (-1,2,0,1) \text{ e } (2,0,2,1).$$

8. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   $$U = L\left(\{(0,1,1), (0,0,1)\}\right) \qquad \text{e} \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\}.$$

   (i) Determine uma base ortogonal para U e uma base ortonormada para V.

   (ii) Determine duas bases ortonormadas para $\mathbb{R}^3$: uma que inclua dois vectores de U e outra que inclua dois vectores de V.

   (iii) Determine o elemento de U mais próximo de $(1,1,1)$ e a distância entre $(1,1,1)$ e $V^{\perp}$.

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

   (i) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

   (ii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ e a distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$.

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

    (i) Determine uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^{\perp}$ (o complemento ortogonal do núcleo de A).

    (ii) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

    (iii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ e a distância entre $(1,2,3)$ e $(\mathcal{L}(A))^{\perp}$.

11. Considere em $\mathbb{R}^4$ o seguinte subespaço: $U = L(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\})$. Determine uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U, isto é, tal que $U = \mathcal{N}(A)$.

12. Defina o produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\{(1,0),(1,-1)\}$ é ortonormada.

13. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \rangle = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + 4\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

    (i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

    (ii) Seja $V = L(\{(3,4,0)\}) \subset \mathbb{R}^3$. Diga qual é o ponto de V mais próximo de $(0,1,0)$.

    (iii) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de V, em relação ao produto interno $\langle , \rangle$.

    (iv) Seja $P_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projecção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre V. Indique, em relação ao produto interno $\langle , \rangle$, uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ para a qual a representação matricial de P_V seja dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1 = (0,1,0)$ e $v_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$. Escreva $u = (1,2,3)$ na forma $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^{\perp}$.

15. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Em cada alínea seguinte, determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de U, isto é, para $U^{\perp}$.

    (i) $U = L(\{(1,0,0,0),(1,1,0,1)\})$

    (ii) $U = L(\{(1,0,1,1)\})$

    (iii) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$

    (iv) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + 2z - w = 0\}$

16. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(1,1,1),(1,0,0)\}\right).$$

(i) Determine uma base ortogonal para U.

(ii) Determine $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que

$$(3,2,1) = u + v.$$

(iii) Determine a distância entre o ponto $(1,0,1)$ e o plano $\{(1,1,0)\} + U$.

(iv) Determine a distância entre o ponto (x,y,z) e o plano U.

17. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z + w = 0\right\}.$$

(i) Determine uma base ortonormada para U.

(ii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.

(iii) Determine as projecções ortogonais de $(0,0,1,0)$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e de $P_{U^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(v) Determine a distância entre o ponto $(0,0,1,0)$ e o subespaço U.

(vi) Determine a distância entre o ponto (x,y,z,w) e o subespaço U.

18. Considere $P_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ com o produto interno definido por:

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2:

$$U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}.$$

(i) Determine uma base ortonormada para U.

(ii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.

(iii) Determine as projecções ortogonais do polinómio $1 + t$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : P_2 \to P_2$ e de $P_{U^\perp} : P_2 \to P_2$ em relação à base canónica $\{1, t, t^2\}$ de P_2.

(v) Determine a distância entre $1 + t$ e U.

(vi) Determine a distância entre o polinómio $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e o subespaço U.

19. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

(i) Verifique que $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Determine uma base ortonormada para U.

(iii) Determine uma base ortonormada para $U^{\perp}$.

(iv) Determine as representações matriciais de $P_U : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $P_{U^{\perp}} : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em relação à base canónica

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(v) Determine as projecções ortogonais da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre U e $U^{\perp}$ respectivamente.

(vi) Qual é a matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

(vii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U.

(viii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U.

Resolução da 7ª Ficha de exercícios

1. (i) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2,$$

com $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Por exemplo

$$\langle (1,1), (1,0) + (1,0) \rangle = \langle (1,1), (2,0) \rangle = 4 \neq 2 = \langle (1,1), (1,0) \rangle + \langle (1,1), (1,0) \rangle .$$

Logo, esta aplicação $\langle , \rangle$ não é um produto interno, uma vez que a condição de linearidade não é verificada.

(ii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + 3\alpha_2 \beta_2,$$

com $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

e como $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios ($\sqrt{2} + 2$ e $2 - \sqrt{2}$) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Resolução alternativa: Para todos os $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1', \alpha_2'), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle &= \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + 3\alpha_2 \beta_2 = \\ &= \beta_1 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1 + 3\beta_2 \alpha_2 = \\ &= \beta_1 \alpha_1 - \beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 + 3\beta_2 \alpha_2 = \\ &= \langle (\beta_1, \beta_2), (\alpha_1, \alpha_2) \rangle . \end{aligned}$$

$$\left\langle (\alpha_1, \alpha_2) + (\alpha_1', \alpha_2'), (\beta_1, \beta_2) \right\rangle = \left\langle (\alpha_1 + \alpha_1', \alpha_2 + \alpha_2'), (\beta_1, \beta_2) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_1 + \alpha_1')\beta_1 - (\alpha_2 + \alpha_2')\beta_1 - (\alpha_1 + \alpha_1')\beta_2 + 3(\alpha_2 + \alpha_2')\beta_2 = \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1' \beta_1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_2' \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_1' \beta_2 + 3\alpha_2 \beta_2 + 3\alpha_2' \beta_2 = \\ &= \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + 3\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1' \beta_1 - \alpha_2' \beta_1 - \alpha_1' \beta_2 + 3\alpha_2' \beta_2 = \\ &= \langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle + \left\langle (\alpha_1', \alpha_2'), (\beta_1, \beta_2) \right\rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle &= \langle \lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = \\ &= \lambda \alpha_1 \beta_1 - \lambda \alpha_2 \beta_1 - \lambda \alpha_1 \beta_2 + 3\lambda \alpha_2 \beta_2 = \\ &= \lambda (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + 3\alpha_2 \beta_2) = \\ &= \lambda \langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle . \end{aligned}$$

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle = \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_2^2 = (\alpha_1-\alpha_2)^2 + (\sqrt{2}\alpha_2)^2 \geq 0$$

e

$$\begin{aligned}
\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle &= 0 \Leftrightarrow (\alpha_1-\alpha_2=0 \ \text{ e } \ \sqrt{2}\alpha_2 = 0) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 \ \text{ e } \ \alpha_2 = 0) \\
&\Leftrightarrow (\alpha_1 = 0 \ \text{ e } \ \alpha_2 = 0).
\end{aligned}$$

Logo:

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle > 0,$$

para todo o $(\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$.

Assim, a aplicação $\langle,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + 3\alpha_2\beta_2$$

é um produto interno.

(iii) Consideremos a aplicação $\langle,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle = -2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2,$$

com $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não são todos positivos (-2 e 3), logo, a aplicação $\langle,\rangle$ não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, uma vez que a condição de positividade não é satisfeita.

Resolução alternativa: Vejamos que a condição de positividade não é satisfeita.

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle = 0 \Leftrightarrow -2\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,|\alpha_2|\,.$$

Logo, por exemplo tem-se:

$$\left\langle \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right), \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right) \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right) \neq (0,0).$$

Assim, a condição:

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_2)\rangle > 0, \forall(\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$$

não é satisfeita. Logo, a aplicação $\langle,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle = -2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$$

não é um produto interno.

2. **(i)** Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

com $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

e como $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios (1) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Para todos os $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \\ &= \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 = \\ &= \langle (\beta_1, \beta_2, \beta_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rangle . \end{aligned}$$

$$\left\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle (\alpha_1 + \alpha_1', \alpha_2 + \alpha_2', \alpha_3 + \alpha_3'), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \right\rangle = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_1')\beta_1 + (\alpha_2 + \alpha_2')\beta_2 + (\alpha_3 + \alpha_3')\beta_3 = \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1'\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2'\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_3'\beta_3 = \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_1'\beta_1 + \alpha_2'\beta_2 + \alpha_3'\beta_3 = \\ &= \langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle + \left\langle (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \right\rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle &= \langle \lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \\ &= \lambda\alpha_1\beta_1 + \lambda\alpha_2\beta_2 + \lambda\alpha_3\beta_3 = \\ &= \lambda(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = \\ &= \lambda \langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle . \end{aligned}$$

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rangle = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \geq 0$$

e

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rangle = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1 = 0 \;\text{ e }\; \alpha_2 = 0 \;\text{ e }\; \alpha_3 = 0).$$

Logo:

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rangle > 0, \, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0).$$

Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

é um produto interno, o chamado produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\rangle = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Tem-se

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

e como $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ não define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Por exemplo

$$\langle(1,1,1),(1,0,0)\rangle = -1 \neq 1 = \langle(1,0,0),(1,1,1)\rangle .$$

Logo, esta aplicação $\langle , \rangle$ não é um produto interno, uma vez que a condição de simetria não é verificada.

(iii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\rangle = 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

com $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

e como $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 1\right) =$$

$$= (2-\lambda)\left(\lambda - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 2\ )$ são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Para todos os $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^3$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle &= 2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=\\ &= 2\beta_1\alpha_1+\beta_3\alpha_1+\beta_1\alpha_3+2\beta_2\alpha_2+\beta_3\alpha_3=\\ &= \langle(\beta_1,\beta_2,\beta_3),(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\rangle\,.\end{aligned}$$

$$\left\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\right\rangle=\left\langle(\alpha_1+\alpha_1',\alpha_2+\alpha_2',\alpha_3+\alpha_3'),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\right\rangle=$$

$$\begin{aligned}&= 2(\alpha_1+\alpha_1')\beta_1+(\alpha_1+\alpha_1')\beta_3+(\alpha_3+\alpha_3')\beta_1+2(\alpha_2+\alpha_2')\beta_2+(\alpha_3+\alpha_3')\beta_3=\\ &= 2\alpha_1\beta_1+2\alpha_1'\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_1'\beta_3+\alpha_3\beta_1+\alpha_3'\beta_1+2\alpha_2\beta_2+2\alpha_2'\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_3'\beta_3=\\ &= 2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\alpha_1'\beta_1+\alpha_1'\beta_3+\alpha_3'\beta_1+2\alpha_2'\beta_2+\alpha_3'\beta_3=\\ &= \langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle+\left\langle(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\right\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle &= \langle\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle=\\ &= 2\lambda\alpha_1\beta_1+\lambda\alpha_1\beta_3+\lambda\alpha_3\beta_1+2\lambda\alpha_2\beta_2+\lambda\alpha_3\beta_3=\\ &= \lambda(2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)=\\ &= \lambda\,\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\rangle &= 2\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_3+2\alpha_2^2+\alpha_3^2=\\ &= \alpha_1^2+(\alpha_1+\alpha_3)^2+\left(\sqrt{2}\alpha_2\right)^2\geq 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\rangle &= 0\Leftrightarrow(\alpha_1=0\ \text{ e }\ \alpha_1+\alpha_3=0\ \text{ e }\ \sqrt{2}\alpha_2=0)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\ (\alpha_1=0\ \text{ e }\ \alpha_2=0\ \text{ e }\ \alpha_3=0).\end{aligned}$$

Logo:

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\rangle>0,\ \forall(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq(0,0,0).$$

Assim, a aplicação $\langle,\rangle:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definida por

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\rangle=2\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1+2\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$$

é um produto interno.

3. Sejam $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^2$. Consideremos a aplicação $\langle,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por

$$\langle(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\rangle=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=3\alpha_1\beta_1+2\alpha_2\beta_1+2\alpha_1\beta_2+3\alpha_2\beta_2.$$

Atendendo a que a matriz $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ é simétrica e tem os seus valores próprios (1 e 5) todos positivos, então esta aplicação define em $\mathbb{R}^2$ um produto interno. Além disso, verifica-se $\langle(1,0),(0,1)\rangle=2$, uma vez que

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle(1,0),(1,0)\rangle & \langle(1,0),(0,1)\rangle\\ \langle(0,1),(1,0)\rangle & \langle(0,1),(0,1)\rangle\end{bmatrix}.$$

4. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Considere o produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle = 3\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2.$$

Tem-se

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right) \right\rangle = 3\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{30}} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{3}{\sqrt{30}} = 0$$

e

$$\langle u, u\rangle = 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \langle v, v\rangle = 3\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{\sqrt{30}}\right)^2 = 1.$$

Logo, o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno anterior.

No entanto, relativamente ao produto interno usual $\langle , \rangle'$ definido em $\mathbb{R}^2$:

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)\rangle' = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2,$$

tem-se

$$\langle u, v\rangle = -\frac{1}{\sqrt{150}}, \quad \langle u, u\rangle = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \langle v, v\rangle = \frac{13}{30}.$$

Logo, o conjunto $\{u, v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em $\mathbb{R}^2$.

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual.

Seja $U = L(\{(1,0,0,0), (1,0,0,1)\})$. Logo, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a U é dado por:

$$U^\perp = \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle(x,y,z,w), (1,0,0,0)\rangle = 0 \quad \text{e} \\ \langle(x,y,z,w), (1,0,0,1)\rangle = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ e } w = 0\right\} = \left\{(0,y,z,0) \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= L(\{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}).$$

Como o conjunto $\{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ é independente e gera $U^\perp$ então é uma base de $U^\perp$ e tem-se

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp =$$

$$= L(\{(1,0,0,0), (1,0,0,1)\}) \oplus L(\{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}).$$

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por:

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

isto é, por

$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

(i) Seja $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\|u\| = \sqrt{\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

(ii) Considere os vectores $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Tem-se

$$\arccos \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \|u_2\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos \frac{\langle u_2, u_3 \rangle}{\|u_2\| \|u_3\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\arccos \frac{\langle u_1, u_3 \rangle}{\|u_1\| \|u_3\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2}$$

(iii) Atendendo a que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$$

então o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Seja $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\begin{aligned} u &= \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3 = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3. \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas de um vector $u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base ortonormada $\{u_1, u_2, u_3\}$ são dadas por:

$$\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 \quad \text{e} \quad \alpha_3.$$

7. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja

$$U = L\left(\{(1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1), (2, 0, 2, 1)\}\right).$$

Determinemos a dimensão de U e uma base ortonormada para U. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$, com $v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (-1, 2, 0, 1)$ e $v_3 = (2, 0, 2, 1)$, é uma base de U e como tal $\dim U = 3$.

Sejam

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2 \quad \text{e} \quad u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1} v_3 - \operatorname{proj}_{u_2} v_3.$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$, com $u_1 = (1, 0, -1, 0)$,

$$u_2 = (-1, 2, 0, 1) - \frac{-1}{2}(1, 0, -1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

e

$$\begin{aligned} u_3 &= (2,0,2,1) - \frac{0}{2}(1,0,-1,0) - \frac{-1}{11/2}\left(-\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2},1\right) = \\ &= (2,0,2,1) + \frac{1}{11}(-1,4,-1,2) = \left(\frac{21}{11},\frac{4}{11},\frac{21}{11},\frac{13}{11}\right) \end{aligned}$$

é uma base ortogonal de U. Uma base ortonormada para U:

$$\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|},\frac{u_2}{\|u_2\|},\frac{u_3}{\|u_3\|}\right\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{22}}{22},\frac{2\sqrt{22}}{11},-\frac{\sqrt{22}}{22},\frac{\sqrt{22}}{11}\right),\left(\frac{21}{\sqrt{1067}},\frac{4}{\sqrt{1067}},\frac{21}{\sqrt{1067}},\frac{13}{\sqrt{1067}}\right)\right\}.$$

8. (i) O conjunto $\{(0,1,1),(0,0,1)\}$ gera U e é linearmente independente logo é uma base de U. Atendendo ao método de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma base ortogonal para U é: $\{u_1,u_2\}$ em que $u_1=(0,1,1)$ e

$$u_2 = (0,0,1) - \underset{(0,1,1)}{\operatorname{Proj}}(0,0,1) = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(0,1,1)\rangle}{\|(0,1,1)\|^2}(0,1,1) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Assim uma base ortogonal para U é: $\left\{(0,1,1),\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Tem-se

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y-z=0\right\} = \{(x,y,y) : x,y\in\mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0),(0,1,1)\}\right).$$

Atendendo a que $\langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle = 0$, uma base ortonormada para V é:

$$\left\{\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|},\frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|}\right\} = \left\{(1,0,0),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

(ii) Como

$$U^\perp = \left(L\left(\left\{(0,1,1),\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)\right)^\perp = L\left(\{(1,0,0)\}\right),$$

uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de U é:

$$\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Como

$$V^\perp = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y-z=0\right\}^\perp = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(0,1,-1)\rangle = 0\right\}^\perp =$$

$$= \left(\left(L\left(\{(0,1,-1)\}\right)\right)^{\perp} \right)^{\perp} = L\left(\{(0,1,-1)\}\right),$$

e atendendo à alínea anterior, uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de V é:

$$\left\{ (1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

(iii) O elemento de U mais próximo de $(1,1,1)$ é:

$$P_U(1,1,1) = (1,1,1) - P_{U^\perp}(1,1,1) =$$

$$= (1,1,1) - \langle (1,1,1), (1,0,0) \rangle (1,0,0) = (0,1,1).$$

A distância entre $(1,1,1)$ e $V^\perp$ é:

$$d\left((1,1,1), V^\perp\right) = \|P_V(1,1,1)\| \underset{(1,1,1)\in V}{=} \|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$$

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente. O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(2,0,1)$ e $(0,1,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(1,0,2)$:

$$(1,0,2) - P_{(2,0,1)}(1,0,2) - P_{(0,1,0)}(1,0,2) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{\langle (1,0,2),(2,0,1)\rangle}{\|(2,0,1)\|^2}(2,0,1) - \frac{\langle (1,0,2),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{4}{5}(2,0,1) = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{ \frac{(2,0,1)}{\|(2,0,1)\|}, \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|}, \frac{\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)}{\left\|\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)\right\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

(ii) O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1) &= (1,1,1) - P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,1) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(0,1,0)\})}{=} \\ &= (1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) = \\ &= (1,1,1) - (0,1,0) = (1,0,1). \end{aligned}$$

A distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$ é:

$$d\left((1,1,1),\mathcal{N}(A)\right) = \left\| P_{(\mathcal{N}(A))^\perp}(1,1,1)\right\| = \left\|P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1)\right\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{2}.$$

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) Tem-se $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{L}(A)$. O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ pois gera $\mathcal{N}(A)$ e é linearmente independente. Como $\langle (1,0,1),(0,2,0)\rangle = 0$, os vectores $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais. Logo, o conjunto

$$\left\{\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|}, \frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|}\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0)\right\}$$

é uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^\perp$.

(ii) O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente.
O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(0,0,1)$:

$$(0,0,1) - P_{(1,0,1)}(0,0,1) - P_{(0,2,0)}(0,0,1) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(0,2,0)\rangle}{\|(0,2,0)\|^2}(0,2,0) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|}, \frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|}, \frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\|}\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $(0,1,0)$.

(iii) O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ é:

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3) &= (1,2,3) - P_{\mathcal{N}(A)}(1,2,3) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\})}{=} \\
&= (1,2,3) - \frac{\langle (1,2,3),(-1,0,1)\rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1) = \\
&= (1,2,3)-(-1,0,1) = (2,2,2).
\end{aligned}$$

A distância entre $(1,2,3)$ e $\mathcal{L}(A)^{\perp}$ é:

$$d\left((1,2,3),(\mathcal{L}(A))^{\perp}\right) = \left\|P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3)\right\| = \|(2,2,2)\| = 2\sqrt{3}.$$

11. Seja $U = L(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\})$. Seja $(x,y,z,w)\in U$. Então existem $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = \alpha(1,1,1,0)+\beta(0,1,1,1).$$

Deste modo, o seguinte sistema (nas variáveis α e β) tem que ser possível e determinado:

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha+\beta = y \\ \alpha+\beta = z \\ \beta = w \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & x-y+w \end{array}\right].$$

Logo, para que o sistema anterior seja possível e determinado, é preciso que se tenha $z-y=0$ e $x-y+w=0$.

Assim, $U = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x-y+w=0 \ \text{ e } \ z-y=0\}$, isto é,

$$U = \mathcal{N}(A), \ \text{ com } \ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Seja $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Vamos definir um produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\mathcal{B}$ é ortonormada.

Seja $\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança de base de B_c^2 para $\mathcal{B}$ é dada por

$$S_{B_c^2\to\mathcal{B}} = \left(S_{\mathcal{B}\to B_c^2}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $u,v\in\mathbb{R}^2$. Tem-se

$$u = (\alpha_1,\alpha_2) \quad \text{e} \quad v = (\beta_1,\beta_2),$$

onde α_1, α_2 e β_1, β_2 são as coordenadas na base $\mathcal{B}_c^2$ de u e v respectivamente. Seja $S = S_{B_c^2 \to \mathcal{B}}$. Logo, tem-se a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por

$$\langle u, v \rangle = (Su)^T G\,(Sv)\,, \quad \text{com } G = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle (\alpha_1, \alpha_2)\,, (\beta_1, \beta_2) \rangle &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2. \end{aligned}$$

Como

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2)\,, (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

e a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, sendo os seus valores próprios ($\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$) positivos, então a expressão

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2)\,, (\beta_1, \beta_2) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Além disso, é fácil verificar que para este produto interno a base $\mathcal{B} = \{(1,0), (1,-1)\}$ é ortonormada:

$$\langle (1,0)\,, (1,-1) \rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (1,0)\,, (1,0) \rangle = \langle (1,-1)\,, (1,-1) \rangle = 1.$$

13. Considere a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + 4\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

(i) Tem-se

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios ($\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $V = L\left(\{(3,4,0)\}\right) \subset \mathbb{R}^3$. Uma base ortonormada para V:

$$\left\{ \frac{(3,4,0)}{\|(3,4,0)\|} \right\} = \left\{ \frac{(3,4,0)}{7} \right\} = \left\{ \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) \right\}$$

O ponto de V mais próximo de $(0,1,0)$ é

$$P_V(0,1,0) = \left\langle (0,1,0), \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) \right\rangle \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) = \frac{13}{7} \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) = \left(\frac{39}{49}, \frac{52}{49}, 0 \right).$$

Nota. Em alternativa, como $\dim V = 1$,

$$P_V(0,1,0) = \operatorname{proj}_{(3,4,0)}(0,1,0) = \frac{\langle (0,1,0),(3,4,0)\rangle}{\|(3,4,0)\|^2}(3,4,0) = \frac{13}{49}(3,4,0) = \left(\frac{39}{49},\frac{52}{49},0\right).$$

(iii) Tem-se

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(3,4,0)\rangle = 0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x-4x-3y+16y=0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -x+13y=0\right\} = \\ &= \left\{(13y,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y,z\in\mathbb{R}\right\} = \\ &= L\left(\{(13,1,0),(0,0,1)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$, com $v_1 = (13,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$, é independente e gera $V^\perp$ então é uma base de $V^\perp$. Sejam

$$u_1 = v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2.$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$, com $u_1 = (13,1,0)$ e $u_2 = (0,0,1) - 0(13,1,0) = (0,0,1)$, é uma base ortogonal de $V^\perp$.

(iv) Seja

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right),\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right),(0,0,1)\right\}.$$

Como

$$\left\{\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right),(0,0,1)\right\}$$

é uma base ortonormada para $V^\perp$, então $\mathcal{B}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} P_V\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) &= \left\langle \left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right),\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)\right\rangle \left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) = \\ &= \left\|\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)\right\|^2 \left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) = \left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) = \\ &= 1\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) + 0\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right) + 0(0,0,1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_V\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right) &= \left\langle \left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right),\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right)\right\rangle \left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) = \\ &= 0\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) = (0,0,0) = \\ &= 0\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7},0\right) + 0\left(\frac{13}{\sqrt{147}},\frac{1}{\sqrt{147}},0\right) + 0(0,0,1) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
P_V(0,0,1) &= \left\langle (0,0,1), \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right) \right\rangle \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right) = \\
&= 0\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right) = (0,0,0) = \\
&= 0\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right) + 0\left(\frac{13}{\sqrt{147}}, \frac{1}{\sqrt{147}}, 0\right) + 0(0,0,1),
\end{aligned}
$$

a matriz que representa P_V em relação à base $\mathcal{B}$ é dada por:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

14. Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Seja $U = L\left(\left\{(0,1,0), \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)\right\}\right)$. Tem-se

$$
U^\perp = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(3,0,4)\}\right).
$$

Logo,

$$
P_{U^\perp}(1,2,3) = \frac{\langle (1,2,3), (3,0,4) \rangle}{\|(3,0,4)\|^2}(3,0,4) = \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)
$$

e assim

$$
P_U(1,2,3) = (1,2,3) - P_{U^\perp}(1,2,3) = (1,2,3) - \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right).
$$

Deste modo,

$$
(1,2,3) = \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right),
$$

com $\left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right) \in U$ e $\left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right) \in U^\perp$.

15. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual.
(i) Seja $U = L\left(\{(1,0,0,0), (1,1,0,1)\}\right)$. Logo,

$$
U^\perp = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w), (1,0,0,0) \rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (x,y,z,w), (1,1,0,1) \rangle = 0\right\}.
$$

Tem-se então:

$$
\begin{cases} x = 0 \\ \\ x + y + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = -w. \end{cases}
$$

Logo,

$$
U^\perp = \left\{(0,-w,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z, w \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(0,-1,0,1), (0,0,1,0)\}\right).
$$

Como

$$
\langle (0,-1,0,1), (0,0,1,0) \rangle = 0
$$

então o conjunto $\{(0,-1,0,1),(0,0,1,0)\}$ é uma base ortogonal de $U^{\perp}$.

(ii) Seja $U = L(\{(1,0,1,1)\})$. Logo,

$$U^{\perp} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,0,1,1)\rangle = 0\right\}.$$

Tem-se então:

$$x + z + w = 0 \Leftrightarrow x = -z - w.$$

Logo,

$$U^{\perp} = \left\{(-z-w,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y,z,w \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}),$$

pois

$$(-z-w,y,z,w) = y(0,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + w(-1,0,0,1).$$

Como o conjunto $\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ é independente (basta colocar esses três vectores como linhas ou como colunas de uma matriz e aplicar de seguida o método de eliminação de Gauss obtendo-se uma matriz em escada de linhas) e gera $U^{\perp}$ então é uma base de $U^{\perp}$.

Como $(0,1,0,0)$ e $(-1,0,1,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(-1,0,0,1)$:

$$(-1,0,0,1) - P_{(0,1,0,0)}(-1,0,0,1) - P_{(-1,0,1,0)}(-1,0,0,1) =$$

$$= (-1,0,0,1) - \frac{\langle(-1,0,0,1),(0,1,0,0)\rangle}{\|(0,1,0,0)\|^2}(0,1,0,0) - \frac{\langle(-1,0,0,1),(-1,0,1,0)\rangle}{\|(-1,0,1,0)\|^2}(-1,0,1,0) =$$

$$= (-1,0,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1,0) = \left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de $U^{\perp}$.

(iii) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$. Logo, atendendo a que o produto interno é o usual (de $\mathbb{R}^4$), Tem-se:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,2,1,2)\rangle = 0\right\} = (L(\{(1,2,1,2)\}))^{\perp}.$$

Assim,

$$U^{\perp} = (L(\{(1,2,1,2)\}))^{\perp\perp} = L(\{(1,2,1,2)\}).$$

Logo, o conjunto $\{(1,2,1,2)\}$ é uma base ortogonal de $U^{\perp}$.

(iv) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + 2z - w = 0\}$. Logo, atendendo a que o produto interno é o usual (de $\mathbb{R}^4$), Tem-se:

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,0,-1,0)\rangle = 0 \ \text{ e } \ \langle (x,y,z,w),(2,-1,2,-1)\rangle = 0\right\} \\ &= (L(\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}))^{\perp}. \end{aligned}$$

Assim,

$$U^{\perp} = \left(L\left(\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}\right).$$

Como

$$\langle (1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\rangle = 0$$

então o conjunto $\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}$ é uma base ortogonal de $U^{\perp}$.

16. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(1,1,1),(1,0,0)\}\right).$$

(i) Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,1,1) \quad \text{e} \quad v_2 = (1,0,0) - \operatorname{proj}_{(1,1,1)}(1,0,0).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_2 &= (1,0,0) - \operatorname{proj}_{(1,1,1)}(1,0,0) \\ &= (1,0,0) - \frac{\langle (1,0,0),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) \\ &= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) \\ &= \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,1,1),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de U.

(ii) Como o conjunto $\left\{(1,1,1),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}$ é uma base ortogonal de U, então

$$\|(1,1,1)\| = \sqrt{3} \;\text{ e }\; \left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|},\frac{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|}\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U.

Por outro lado, tem-se:

$$U^{\perp} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (x,y,z),(1,0,0)\rangle = 0\right\} =$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Logo,

$$\begin{cases} y+z=0 \\ \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ \\ x=0. \end{cases}$$

Assim,

$$U^{\perp}=\left\{(0,-z,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(0,-1,1)\}\right).$$

Como

$$\|(0,-1,1)\|=\sqrt{2},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}=\left\{\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

Deste modo, uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^3=U\oplus U^{\perp},$$

então

$$(3,2,1)=P_U(3,2,1)+P_{U^{\perp}}(3,2,1)=$$

$$=\left\langle(3,2,1),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+$$

$$+\left\langle(3,2,1),\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)+$$

$$+\left\langle(3,2,1),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\underbrace{\left(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}_{\in U}+\underbrace{\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\in U^{\perp}}.$$

Isto é,

$$(3,2,1)=\underbrace{\left(3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}_{\in U}+\underbrace{\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\in U^{\perp}}.$$

(iii) A distância entre o ponto $(1,0,1)$ e o plano $\{(1,1,0)\}+U$ é dada por:

$$d((1,0,1),\{(1,1,0)\}+U)=\|P_{U^{\perp}}((1,0,1)-(1,1,0))\|=\|P_{U^{\perp}}(0,-1,1)\|\underset{(0,-1,1)\in_{U^{\perp}}}{=}\|(0,-1,1)\|=\sqrt{2}.$$

(iv) A distância entre o ponto (x,y,z) e o subespaço U é dada por:

$$\begin{aligned} d((x,y,z),U) &= \|P_{U^{\perp}}((x,y,z)-(0,0,0))\|=\|P_{U^{\perp}}(x,y,z)\| \\ &= \left\|\left\langle(x,y,z),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\| \\ &= |-y+z|\,\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

17. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z + w = 0\right\}.$$

(i) Tem-se então

$$U = \left\{(y-z, y, z, z-y) \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(1,1,0,-1), (-1,0,1,1)\}).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,1,0,-1) \quad \text{e} \quad v_2 = (-1,0,1,1) - \text{proj}_{(1,1,0,-1)}(-1,0,1,1).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_2 &= (-1,0,1,1) - \text{proj}_{(1,1,0,-1)}(-1,0,1,1) \\ &= (-1,0,1,1) - \frac{\langle(-1,0,1,1),(1,1,0,-1)\rangle}{\|(1,1,0,-1)\|^2}(1,1,0,-1) \\ &= (-1,0,1,1) + \frac{2}{3}(1,1,0,-1) \\ &= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,1,0,-1), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de U. Como

$$\|(1,1,0,-1)\| = \sqrt{3} \;\text{ e }\; \left\|\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{15}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(ii) Como

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z + w = 0\right\}$$

e atendendo ao produto interno usual de $\mathbb{R}^4$, Tem-se:

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle(x,y,z,w),(1,-1,1,0)\rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle(x,y,z,w),(0,1,-1,1)\rangle = 0\right\} \\ &= \left(L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right)\right)^\perp. \end{aligned}$$

Logo,

$$U^\perp = \left(L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,-1,1,0) \quad \text{e} \quad v_2 = (0,1,-1,1) - \text{proj}_{(1,-1,1,0)}(0,1,-1,1).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned}
v_2 &= (0,1,-1,1) - \text{proj}_{(1,-1,1,0)}\,(0,1,-1,1) \\
&= (0,1,-1,1) - \frac{\langle (0,1,-1,1)\,,(1,-1,1,0)\rangle}{\|(1,-1,1,0)\|^2}\,(1,-1,1,0) \\
&= (0,1,-1,1) + \frac{2}{3}\,(1,-1,1,0) \\
&= \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right).
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,-1,1,0)\,,\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de $U^{\perp}$. Como

$$\|(1,-1,1,0)\| = \sqrt{3} \;\text{ e }\; \left\|\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\| = \frac{\sqrt{15}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

(iii) A projecção ortogonal P_U de $\mathbb{R}^4$ sobre U é definida por:

$$\begin{aligned}
P_U \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\
(x,y,z,w) \quad &\to \quad \left\langle (x,y,z,w),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+ \\
&\quad + \left\langle (x,y,z,w),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right),
\end{aligned}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U. Logo, a projecção ortogonal de $(0,0,1,0)$ sobre U é dada por:

$$\begin{aligned}
P_U(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+ \\
&\quad + \left\langle (0,0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

A projecção ortogonal $P_{U^\perp}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $U^\perp$ é definida por:

$$\begin{aligned} P_{U^\perp} \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,w) \quad &\to \quad \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\ &\quad + \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right), \end{aligned}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^\perp$. Logo, a projecção ortogonal de $(0,0,1,0)$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$\begin{aligned} P_{U^\perp}(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\ &\quad + \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

Nota muito importante: Uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp,$$

então para todo o $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x,y,z,w) = P_U(x,y,z,w) + P_{U^\perp}(x,y,z,w).$$

Logo, uma vez calculado $P_U(0,0,1,0)$ pela definição, como se fêz atrás, obtendo-se $P_U(0,0,1,0) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$, então não precisamos de efectuar o cálculo de $P_{U^\perp}(0,0,1,0)$ pela definição. Basta efectuar:

$$\begin{aligned} P_{U^\perp}(0,0,1,0) &= (0,0,1,0) - P_U(0,0,1,0) \\ &= (0,0,1,0) - \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

(iv) Seja $\mathcal{B}_c^4 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$. Tem-se:

$$\begin{aligned} P_U(1,0,0,0) &= \left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\ &\quad \left\langle (1,0,0,0), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{3}{15}, -\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_U(0,1,0,0) &= \left\langle (0,1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&\quad \left\langle (0,1,0,0), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{6}{15}, \frac{2}{15}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_U(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&\quad \left\langle (0,0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_U(0,0,0,1) &= \left\langle (0,0,0,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&\quad \left\langle (0,0,0,1), \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle \left(-\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{3\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{1}{15}\right) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, a representação matricial de $P_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$, é dada por:

$$
M(P_U; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & -1/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.
$$

Tem-se:

$$
\begin{aligned}
P_{U^\perp}(1,0,0,0) &= \left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\
&\quad \left\langle (1,0,0,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(\frac{4}{15}, \frac{2}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{U^\perp}(0,1,0,0) &= \left\langle (0,1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\
&\quad \left\langle (0,1,0,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + \left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} P_{U^\perp}(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\ &\quad \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{U^\perp}(0,0,0,1) &= \left\langle (0,0,0,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \\ &\quad \left\langle (0,0,0,1), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\ &= \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

Logo, a representação matricial de $P_{U^\perp} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$, é dada por:

$$M(P_{U^\perp}; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 2/5 & -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

(v) Escolhendo um ponto de U, por exemplo $(0,0,0,0)$, a distância entre $(0,0,1,0)$ e U é dada por:

$$d((0,0,1,0), U) = \|P_{U^\perp}((0,0,1,0) - (0,0,0,0))\| = \|P_{U^\perp}(0,0,1,0)\| =$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle (0,0,1,0), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \right\| \end{aligned}$$

$$= \left\| \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{5}\right) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) \right\| = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

(vi) A distância entre (x,y,z,w) e U é dada por:

$$d((x,y,z,w), U) = \|P_{U^\perp}((x,y,z,w) - (0,0,0,0))\| = \|P_{U^\perp}(x,y,z,w)\| =$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \right\| = \end{aligned}$$

$$= \left\| \left(x\frac{\sqrt{3}}{3} - y\frac{\sqrt{3}}{3} + z\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right) + \right.$$

$$\left. + \left(x\frac{2\sqrt{15}}{15} + y\frac{\sqrt{15}}{15} - z\frac{\sqrt{15}}{15} + w\frac{\sqrt{15}}{5} \right) \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5} \right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(\frac{2}{5}w + \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z, \frac{1}{5}w - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{2}{5}z, \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}w - \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}z, \frac{3}{5}w + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{(2w + 3x - y + z)^2 + (w - x + 2y - 2z)^2 + (x - w - 2y + 2z)^2 + (3w + 2x + y - z)^2}.$$

18. Considere P_2 com o produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2:

$$U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}.$$

(i) Tem-se:

$$U = \left\{a_1 t + a_2 t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L(\{t, t^2\}).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$p_1(t) = t \quad \text{e} \quad p_2(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, t \rangle}{\|t\|^2} t.$$

Logo,

$$p_2(t) = t^2 - \frac{(-1)^2(-1) + 0^2 0 + 1^2 1}{(-1).(-1) + 0.0 + 1.1} t = t^2.$$

Logo, o conjunto $\{t, t^2\}$ é uma base ortogonal de U. Assim, o conjunto

$$\left\{ \frac{t}{\|t\|}, \frac{t^2}{\|t^2\|} \right\} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(ii) Tem-se:

$$U^\perp = \left\{p(t) \in P_2 : \langle p(t), t \rangle = 0 \ \text{ e } \ \left\langle p(t), t^2 \right\rangle = 0\right\}.$$

Logo,

$$\begin{cases} (a_0 - a_1 + a_2)(-1)^2 + a_0 0 + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ \\ (a_0 - a_1 + a_2)(-1) + a_0 0 + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -a_2 \\ \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$U^\perp = \left\{-a_2 + a_2 t^2 : a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L(\{-1 + t^2\}).$$

Como $\|-1+t^2\| = 1$ então $\{-1+t^2\}$ é uma base ortonormada de $U^\perp$.

Observação. Note que $P_2 = U \oplus U^\perp$, tendo-se, neste caso, $\dim U = 2$ e $\dim U^\perp = 1$.

(iii) A projecção ortogonal P_U de P_2 sobre U é definida por:

$$\begin{array}{rcl} P_U & : & P_2 \to P_2 \\ p(t) & \to & \left\langle p(t), \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle p(t), \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \end{array}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\}$$

é uma base ortonormada de U. Logo, a projecção ortogonal de $1+t$ sobre U é dada por:

$$P_U(1+t) = \left\langle 1+t, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle 1+t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t + t^2$$

A projecção ortogonal $P_{U^\perp}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $U^\perp$ é definida por:

$$\begin{array}{rcl} P_{U^\perp} & : & P_2 \to P_2 \\ p(t) & \to & \left\langle p(t), -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2), \end{array}$$

uma vez que o conjunto

$$\{-1+t^2\}$$

é uma base ortonormada de $U^\perp$. Logo, a projecção ortogonal de $1+t$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$P_{U^\perp}(1+t) = \left\langle 1+t, -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2) = 1 - t^2$$

Nota muito importante: Uma vez que se tem

$$P_2 = U \oplus U^\perp,$$

então para todo o $p(t) \in P_2$,

$$p(t) = P_U(p(t)) + P_{U^\perp}(p(t)).$$

Logo, uma vez calculado $P_{U^\perp}(1+t)$ pela definição, como se fêz atrás, obtendo-se $P_{U^\perp}(1+t) = 1-t^2$, então não precisamos de efectuar o cálculo de $P_U(1+t)$ pela definição. Basta efectuar:

$$P_U(1+t) = 1 + t - P_{U^\perp}(1+t) = t + t^2.$$

(iv) Seja $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de P_2. Atendendo à alínea **(iii),** tem-se

$$P_U(1) = \left\langle 1, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle 1, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t^2$$

$$P_U(t) = \left\langle t, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t$$

$$P_U(t^2) = \left\langle t^2, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle t^2, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t^2$$

$$P_{U^\perp}(1) = \left\langle 1, -1+t^2 \right\rangle \left(-1+t^2\right) = 1 - t^2$$

$$P_{U^\perp}(t) = \left\langle t, -1+t^2 \right\rangle \left(-1+t^2\right) = 0$$

$$P_{U^\perp}(t^2) = \left\langle t^2, -1+t^2 \right\rangle \left(-1+t^2\right) = 0$$

e assim

$$M(P_U; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(P_{U^\perp}; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$I = P_U + P_{U^\perp}.$$

(v) Escolhendo um ponto de U, por exemplo t, a distância entre $1+t$ e U é dada por:

$$d(1+t, U) = \|P_{U^\perp}(1+t-t)\| = \|P_{U^\perp}(1)\| = \left\| \left\langle 1, -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2) \right\| = 1.$$

(vi) Escolhendo um ponto de U, por exemplo o polinómio nulo 0, a distância entre $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e U, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$d(a_0 + a_1 t + a_2 t^2, U) = \left\| P_{U^\perp}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \right\| =$$

$$= \left\| \left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2) \right\| = |a_0| \left\| 1 - t^2 \right\| = |a_0|.$$

19. Considere no espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

(i) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A, A', B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$\langle \alpha A + \beta A', B \rangle = \operatorname{tr}((\alpha A + \beta A') B^T) = \operatorname{tr}(\alpha AB^T + \beta A' B^T) \underset{\text{tr é linear}}{=}$$

$$= \alpha \mathrm{tr}(AB^T) + \beta \mathrm{tr}(A'B^T) = \alpha \langle A, B\rangle + \beta \langle A', B\rangle$$

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(\left(A^T\right)^T B^T) = \mathrm{tr}(\left(BA^T\right)^T) = \mathrm{tr}(BA^T) = \langle B, A\rangle$$

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(AA^T) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$$

para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Tem-se:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$$

pois

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de U, uma vez que gera U, e é linearmente independente pois se tivermos:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ e como tal, o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente. Vamos aplicar agora a este conjunto o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Sejam

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathrm{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathrm{proj}_{A_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \mathrm{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1 \right\rangle A_1}{\|A_1\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_1^T \right) A_1}{\|A_1\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) A_1}{\|A_1\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{0A_1}{\|A_1\|^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathrm{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \mathrm{proj}_{A_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 \right\rangle A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 \right\rangle A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_1^T \right) A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_2^T \right) A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{0A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{0A_2}{\|A_2\|^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base ortogonal de U. Como:

$$\begin{aligned}
\|A_1\| &= \sqrt{\langle A_1, A_1 \rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(A_1 A_1^T\right)} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)} = 1, \\
\|A_2\| &= \sqrt{\langle A_2, A_2 \rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(A_2 A_2^T\right)} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{2}, \\
\|A_3\| &= \sqrt{\langle A_3, A_3 \rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(A_3 A_3^T\right)} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = 1,
\end{aligned}$$

então o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(iii) Tem-se

$$U^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \;\text{ e }\right.$$
$$\left. \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \;\text{ e }\; \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Logo,

$$\begin{cases} a = 0 \\ \\ b + c = 0 \\ \\ d = 0. \end{cases}$$

Ou seja,

$$U^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Como

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\| &= \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \\ &= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \right)} \\ &= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)} \\ &= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

então o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada de $U^\perp$.

(iv) Seja $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Atendendo à alínea **(iii),** tem-se

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim

$$M(P_U;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(P_{U^\perp};\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$I = P_U + P_{U^\perp}.$$

(v) A projecção ortogonal da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \operatorname{proj}_{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como se tem:

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp,$$

então para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = P_U\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_U\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(vi) A matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$P_U\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

(vii) A distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U é dada por:

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U\right) &= \left\|P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\| = \\
&= \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle} = \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right)} = \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

(viii) A distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U é dada por:

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, U\right) &= \left\|P_{U^\perp}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right\| = \\
&= \left\|\operatorname{proj}_{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\| = \\
&= \left\|\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right\| = \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle\right| = \\
&= \left|\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}\right)\right| = \\
&= \left|\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}b & -\frac{1}{2}\sqrt{2}a \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}d & -\frac{1}{2}\sqrt{2}c \end{bmatrix}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|b-c\right|.
\end{aligned}$$

1^a Ficha de exercícios facultativos

1. **(i)** Considere $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ (do tipo 2×2, com $\alpha \in \mathbb{R}$). Obtenha, por indução, uma fórmula para A_α^n.

   (ii) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obtenha, por indução, uma fórmula para A^n.

2. Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$ então $A^2 = A$ e $B^2 = B$.

3. Diga de que tipos deverão ser as matrizes A e B de modo a poderem ser efectuados os seguintes produtos e desenvolva esses mesmos produtos.

   (i) $(A+B)(A-B)$ **(ii)** $(AB)^2$ **(iii)** $(A+B)^2$

4. Verifique que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ não satisfazem a relação: $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$. O que pode concluir? E no caso de A ser invertível, o que concluiria acerca da veracidade da relação anterior?

5. Sejam A uma matriz do tipo $n \times n$ e B uma matriz do tipo $n \times m$ quaisquer. Prove que se A é simétrica (isto é $A = A^T$) então B^TAB tambem é simétrica.

6. Uma matriz A do tipo $n \times n$ diz-se anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que:

   (i) Os elementos da diagonal principal de uma qualquer matriz anti-simétrica são todos nulos.

   (ii) Para qualquer matriz A do tipo $n \times n$, a matriz $A - A^T$ é anti-simétrica.

   (iii) Escrevendo $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, toda a matriz quadrada pode ser decomposta de modo único pela soma de uma matriz simétrica com uma anti-simétrica.

7. Seja A uma matriz quadrada (do tipo $n \times n$). Mostre que:

   (a) A inversa de A quando existe é única.

   (b) Se A fôr invertível então A^{-1} tambem é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

   (c) Se A fôr invertível então A^T tambem é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   (d) Se A fôr invertível e simétrica então A^{-1} tambem é simétrica.

   (e) Seja B uma matriz quadrada (do tipo $n \times n$). Verifique que:

   (i) Se A e B forem invertíveis então AB tambem é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   (ii) Se A, B e $A + B$ forem invertíveis então $A^{-1} + B^{-1}$ é invertível e

   $$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

   Sugestão: comece por verificar que

   $$I + B^{-1}A = B^{-1}(A+B) \quad \text{e} \quad I + A^{-1}B = A^{-1}(A+B).$$

   (f) O que se pode dizer acerca da inversa do produto $A_1A_2...A_n$, onde $A_1, A_2, ..., A_n$ são matrizes invertíveis (todas com igual dimensão)? E a inversa de A^m, $m \in \mathbb{N}$, sendo A invertível?

8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = I$. Mostre que A e B são invertíveis.

9. Mostre que $A = [a_{ij}]$ do tipo 2×2 é invertível se e só se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Nesse caso escrevendo $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, verifique que

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{22} & -\,a_{12} \\ -\,a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

10. Que condições devem ser verificadas para que a seguinte matriz diagonal do tipo $n \times n$

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

seja invertível? Qual é a sua inversa?

11. Verifique que todas as matrizes X do tipo 2×2 que satisfazem a equação $X^2 = I$ são:

$$\pm I, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \pm\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -\,a \end{bmatrix}.$$

Observe assim que a equação matricial $X^2 = I$ tem um número infinito de soluções em contraste com a equação escalar $x^2 = 1$ que tem apenas duas soluções (1 e -1).

12. Mostre que:

$$\{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : XA = AX, \text{ para todo o } A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\} = \left\{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Resolução da 1^a Ficha de exercícios facultativos

1. **(i)** $(A_\alpha)^n = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\operatorname{sen}(n\alpha) \\ \operatorname{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}$, para todo o $n \in \mathbf{N}$, (com $\alpha \in \mathbb{R}$).

   (ii) $A^n = \begin{cases} (-1)^{k+1} A, & \text{se } n = 2k-1, \ \ k = 1,2,3... \\ \\ (-1)^k I, & \text{se } n = 2k, \ \ k = 1,2,3.... \end{cases}$

2. $A^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = ABB = AB = A$. $\qquad B^2 = (BA)(BA) = B(AB)A = BAA = BA = B$.

3. **(i)** A e B do tipo $n \times n$, $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$.

   (ii) A do tipo $m \times n$ e B do tipo $n \times m$, $(AB)^2 = ABAB$.

   (iii) A e B do tipo $n \times n$, $(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$.

4. Conclui-se que a relação não é verdadeira. No caso de A ser invertível teríamos

$$AB = 0 \Longrightarrow B = 0.$$

5. $B^T AB$ é simétrica: $(B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T AB$, pois $A = A^T$ (A é simétrica) e $(B^T)^T = B$.

6. **(i)** Seja $A = [a_{ij}]$ do tipo $n \times n$ tal que $A^T = -A$. Assim, em relação às respectivas diagonais principais tem-se:

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

   e logo $a_{ii} = 0$, para todo o $i \in \mathbf{N}$.

   (ii) Seja $A = [a_{ij}]$ do tipo $n \times n$. A matriz $A - A^T$ é anti-simétrica pois:

$$(A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T).$$

   (iii) Escrevendo $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, a matriz A pode ser decomposta pela soma de uma matriz simétrica com uma anti-simétrica. Esta decomposição é única: Sejam A_1 simétrica e A_2 anti-simétrica tais que $A = A_1 + A_2$. Logo,

$$A^T = (A_1 + A_2)^T = A_1 - A_2.$$

   Pelo que $A + A^T = 2A_1$ e $A - A^T = 2A_2$. Assim,

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T) \ \text{ e } \ A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

7. **(a)** Seja A do tipo $n \times n$. Suponhamos que existiam A_1 e A_2 do tipo $n \times n$ tais que

$$AA_1 = A_1 A = I \qquad \text{e} \qquad AA_2 = A_2 A = I$$

   Logo $A_2 A A_1 = A_2$. Mas $A_2 A = I$, pelo que se obtem $IA_1 = A_2$. Isto é,

$$A_1 = A_2.$$

Logo a inversa de uma matriz quando existe é única.

(b) Se A fôr invertível tem-se $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Logo A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) Se A fôr invertível tem-se $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Logo $(A^{-1}A)^T = (AA^{-1})^T = I^T$. Pelo que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I.$$

Isto é, A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(d) Se A fôr invertível e simétrica tem-se $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ e $A = A^T$. Logo $(A^{-1}A)^T = (AA^{-1})^T = I^T$, e assim

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I.$$

Pelo que, como A é simétrica, tem-se $A(A^{-1})^T = I$. Logo, como A é invertível, tem-se $(A^{-1})^T = A^{-1}$. Isto é, A^{-1} é simétrica.

(e) **(i)** Se A e B forem invertíveis existem A^{-1} e B^{-1} com

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad B^{-1}B = BB^{-1} = I,$$

e tem-se:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Logo AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(ii) Se A e B forem invertíveis existem A^{-1} e B^{-1} e podemos escrever

$$B^{-1}(A+B) = I + B^{-1}A \quad \text{e} \quad A^{-1}(A+B) = A^{-1}B + I,$$

e são respectivamente equivalentes a

$$B^{-1}(A+B) = (A^{-1} + B^{-1})A \quad \text{e} \quad A^{-1}(A+B) = (A^{-1} + B^{-1})B,$$

Como por hipótese $A + B$ é invertível tem-se

$$I = (A^{-1} + B^{-1})A(A+B)^{-1}B \quad \text{e} \quad I = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}B(A+B)^{-1}A.$$

Analogamente e partindo de:

$$(A+B)B^{-1} = I + AB^{-1} \quad \text{e} \quad (A+B)A^{-1} = AB^{-1} + I,$$

obtem-se

$$I = B(A+B)^{-1}A(A^{-1} + B^{-1}) \quad \text{e} \quad I = A(A+B)^{-1}B(A^{-1} + B^{-1}).$$

Deste modo $A^{-1} + B^{-1}$ é invertível e

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

(f) Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são matrizes invertíveis então, por indução finita, prova-se que $A_1A_2...A_n$ também é invertível e

$$(A_1A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \ldots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Tem-se A^m invertível e $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

8. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = I$. Se B fôr singular então existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ com $X \neq \mathbf{0}$ tal que

$$BX = \mathbf{0}.$$

Logo

$$X = IX = (AB)\,X = A\,(BX) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Assim, B é não singular, isto é, B é invertível.

Tendo-se $AB = I$ e B invertível, tem-se, uma vez que B^{-1} também é invertível,

$$A = AI = A\left(BB^{-1}\right) = (AB)\,B^{-1} = IB^{-1} = B^{-1},$$

isto é, A é invertível e tem-se $A^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$.

9. Seja $A = [a_{ij}]$ do tipo 2×2. Suponhamos que $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Logo, escrevendo $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, tem-se:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{a_{21}L_1 \to L_1 \\ a_{11}L_2 \to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & a_{21} & 0 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & 0 & a_{11} \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{21} & a_{11} \end{array}\right] \underset{-\frac{a_{12}a_{21}}{\Delta}L_2+L_1 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11}a_{21} & 0 & \frac{a_{11}a_{21}a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{11}a_{21}a_{12}}{\Delta} \\ 0 & \Delta & -a_{21} & a_{11} \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{a_{11}a_{21}}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{\Delta}L_2 \to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{array}\right].$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{22} & -\,a_{12} \\ -\,a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Se $a_{11} = 0$ e $a_{21} = 0$, então A não é invertível.

Se $a_{11} = 0$ e $a_{21} \neq 0$, então $a_{12} \neq 0$, caso contrário A não seria invertível. Neste caso, com $a_{11} = 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ e $\Delta \neq 0$ tem-se:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \\ 0 & a_{12} & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{a_{21}}L_1 \to L_1 \\ \frac{1}{a_{12}}L_2 \to L_2}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a_{22}}{a_{21}} & 0 & \frac{1}{a_{21}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a_{12}} & 0 \end{array}\right] \underset{-\frac{a_{22}}{a_{21}}L_2+L_1 \to L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a_{22}}{-a_{12}a_{21}} & \frac{1}{a_{21}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a_{12}} & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a_{22}}{-a_{12}a_{21}} & \frac{-a_{12}}{-a_{12}a_{21}} \\ 0 & 1 & \frac{-a_{21}}{-a_{12}a_{21}} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ 0 & 1 & -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{array}\right].$$

Se $a_{11} \neq 0$ e $a_{21} = 0$ seria análogo. Logo, A é invertível se e só se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{22} & -\,a_{12} \\ -\,a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

onde $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Nota: O ex^o foi feito apenas com o recurso ao método de Gauss-Jordan. Poderia ter sido efectuada outra resolução atendendo à fórmula de inversão de matrizes:

$$A^{-1} = \frac{(\text{cof } A)^T}{|A|}.$$

Observe que $\Delta = |A|$.

10. A matriz

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

é invertível se só se $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, \ldots, k_n \neq 0$, e a sua inversa é dada por:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k_n} \end{bmatrix}.$$

11. Seja $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz do tipo 2×2 tal que $X^2 = I$.

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$X^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1. \end{cases}$$

Se $b = 0$, então $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$ e ($c = 0$ ou $a = -d$). Logo,

$$X = I \quad \text{ou} \quad X = -I \quad \text{ou} \quad X = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $c = 0$ então $a = \pm 1$ e $d = \pm 1$ e ($b = 0$ ou $a = -d$). Logo,

$$X = I \quad \text{ou} \quad X = -I \quad \text{ou} \quad X = \pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$ então $a = -d$ e $c = \frac{1-a^2}{b}$. Logo,

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Logo, todas as matrizes X que satisfazem $X^2 = I$ são:

$$\pm I, \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -\,a \end{bmatrix}.$$

Observe assim que a equação matricial $X^2 = I$ tem um número infinito de soluções em contraste com a equação escalar $x^2 = 1$ que tem apenas duas soluções (1 e -1).

12. Seja $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. Suponhamos que

$$XA = AX,$$

para todo o $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Temos então que:

$$XA = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} \\ x_{21}a_{11} + x_{22}a_{21} = a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} \\ x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} = a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ x_{21}a_{12} + x_{22}a_{22} = a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12}a_{21} = a_{12}x_{21} \\ x_{21}(a_{11} - a_{22}) = a_{21}(x_{22} - x_{11}) \\ (x_{11} - x_{22})a_{12} = (a_{22} - a_{11})x_{12}. \end{cases}$$

Se $a_{11} = 1$ e $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, então $x_{21} = x_{12} = 0$.

Se $a_{12} = 1$ e $a_{11} = a_{21} = a_{22} = 0$, então $x_{21} = 0$ e $x_{11} = x_{22}$.

Se $a_{21} = 1$ e $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, então $x_{12} = 0$ e $x_{11} = x_{22}$.

Se $a_{22} = 1$ e $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 0$, então $x_{21} = x_{12} = 0$.

Logo, a matriz X tal que $XA = AX$, para todo o $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, é dada por:

$$X = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ o seu vector nulo. Mostre que:

   (i) Se $u + v = u + w$, então $v = w$. **(ii)** $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (iii) $0u = \mathbf{0}$ para todo o vector $u \in \mathbf{V}$. **(iv)** $-(-u) = u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$.

   (v) Mostre que o vector nulo $\mathbf{0} \in V$ é único.

   (vi) Mostre que o simétrico $-u$ de um qualquer vector u de V é único.

   (vii) $(-1)u = -u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$. **(viii)** Se $\lambda u = \mathbf{0}$, então $\lambda = 0$ ou $u = \mathbf{0}$.

   (ix) Se $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$, então $\alpha = \beta$.

2. Verifique que o conjunto de todos os polinómios reais de grau igual a n:

$$\{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in P_n : a_n \neq 0\},$$

   munido das operações usuais, não é um espaço linear.

3. **(i)** Mostre que P_2 é um subespaço de P_3. **(ii)** Mostre que P_n é um subespaço de P_{n+1}.

   (iii) Seja P o espaço linear de todos os polinómios reais (de qualquer grau). Mostre que P_n é um subespaço de P.

4. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são sub-espaços?

   (i) O conjunto de todas as matrizes simétricas do tipo $n \times n$.

   (ii) O conjunto de todas as matrizes invertíveis do tipo $n \times n$.

   (iii) O conjunto de todas as matrizes diagonais do tipo $n \times n$.

   (iv) O conjunto de todas as matrizes singulares do tipo $n \times n$.

   (v) O conjunto de todas as matrizes triangulares superiores do tipo $n \times n$.

5. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Quais dos seguintes subconjuntos de V, com as operações usuais, são subespaços?

   (i) O conjunto de todas as funções limitadas.

   (ii) O conjunto de todas as funções pares, isto é, tais que $f(x) = f(-x)$.

   (iii) O conjunto de todas as funções racionais, isto é, as que são quocientes de funções polinomiais.

   (iv) O conjunto de todas as funções crescentes.

   (v) O conjunto de todas as funções f tais que $f(0) = f(1)$.

   (vi) O conjunto de todas as funções f tais que $f(0) = 1 + f(1)$.

6. Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear V. Prove que $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ é também uma base de V.

7. Seja A uma matriz (real) invertível do tipo $n \times n$. Prove que, se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é também uma base de $\mathbb{R}^n$.

8. Sejam V um espaço linear e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Prove que o conjunto S é uma base de V se e só se todo o vector de V se escrever de maneira única como combinação linear dos elementos de S.

9. Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores $w_1 = av_1 + bv_2$ e $w_2 = cv_1 + dv_2$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prove que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se $ad \neq bc$.

10. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que

$$\dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B) - \dim (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)).$$

Sugestão: Considere (no caso em que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) \neq \{\mathbf{0}\}$) uma base $\{x_1, \ldots, x_s\}$ para $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e suponha (no caso em que $AB \neq \mathbf{0}$) que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$. Mostre que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$.

11. Considere os seguintes r vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x^1} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \mathbf{x^2} = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, \mathbf{x^r} = (x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}).$$

Mostre que se $|x_{jj}| > \sum\limits_{i=1 (i \neq j)}^{r} |x_{ij}|$ para todo o $j = 1, \ldots, r$ então o conjunto

$$\left\{\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r}\right\}$$

é linearmente independente.

Sugestão: Considere

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1 \mathbf{x^1} + \alpha_2 \mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r \mathbf{x^r},$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ e mostre que se existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que

$$|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|,$$

para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$.

Resolução da 2^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ o seu vector nulo.

(i) Suponhamos que $u + v = u + w$. Queremos ver que $v = w$. Ora,

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{0} + v = ((-u) + u) + v = (-u) + (u + v) \underset{u+v=u+w}{=} \\ &= (-u) + (u + w) = ((-u) + u) + w = \mathbf{0} + w = w. \end{aligned}$$

Logo, $v = w$.

(ii) Queremos ver que $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Ora,

$$\lambda\mathbf{0} + \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0} \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}.$$

(iii) Queremos ver que $0u = \mathbf{0}$ para todo o vector $u \in \mathbf{V}$. Ora,

$$0u + \mathbf{0} = 0u = (0 + 0)\, u = 0u + 0u \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} \mathbf{0} = 0u.$$

(iv) Queremos ver que $-(-u) = u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$. Ora,

$$u + (-u) = \mathbf{0} \Longrightarrow -(-u) = u.$$

(v) Queremos ver que o vector nulo $\mathbf{0} \in V$ é único. Ora, seja $w \in V$ tal que $u + w = u$, para todo o $u \in \mathbf{V}$. Então,

$$u + w = u = u + \mathbf{0} \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} w = \mathbf{0}.$$

(vi) Queremos ver que o simétrico $-u$ de um qualquer vector u de V é único. Ora, seja $w \in V$ tal que $u + w = \mathbf{0}$. Então,

$$u + w = \mathbf{0} = u + (-u) \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} w = -u.$$

(vii) Queremos ver que $(-1)u = -u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$. Ora,

$$u + (-1)\, u = 1u + (-1)\, u = (1 + (-1))\, u = 0u = \mathbf{0}.$$

Logo, como o simétrico é único, $(-1)u = -u$.

(viii) Queremos ver que: se $\lambda u = \mathbf{0}$, então $\lambda = 0$ ou $u = \mathbf{0}$. Suponhamos que $\lambda u = \mathbf{0}$. Se $\lambda \neq 0$, então

$$u = 1u = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} \underset{\text{por (iv)}}{=} \mathbf{0}.$$

Como $\lambda \neq 0 \Longrightarrow u = \mathbf{0}$, então $u \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda = 0$. Logo,

$$\lambda u = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda = 0 \vee u = \mathbf{0}$$

(ix) Queremos ver que: se $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$, então $\alpha = \beta$. Suponhamos que $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$. Ora, como $u \neq \mathbf{0}$ e $(\alpha - \beta)\, u = \mathbf{0}$, então $\alpha - \beta = 0$, atendendo a (viii). Isto é, $\alpha = \beta$.

2. O conjunto de todos os polinómios reais de grau igual a n:

$$U = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in P_n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ a_n \neq 0\},$$

com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$.

3. **(i)** $\varnothing \neq P_2 \subset P_3$ e:
$$P_2 = L\left(\left\{1, t, t^2\right\}\right).$$
Logo, P_2 é subespaço de P_3.
(ii) $\varnothing \neq P_n \subset P_{n+1}$ e:
$$P_n = L\left(\{1, t, ..., t^n\}\right).$$
Logo, P_n é subespaço de P_{n+1}.
(iii) $\varnothing \neq P_n \subset P$ e:
$$P_n = L\left(\{1, t, ..., t^n\}\right).$$
Logo, P_n é subespaço de P.

4. **(i)** Seja
$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A = A^T\right\}.$$
Sejam $A_1, A_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se
$$A_1 + A_2 = A_1^T + A_2^T = (A_1 + A_2)^T \in U$$
e, com $A \in U$,
$$\alpha A = \alpha A^T = (\alpha A)^T \in U.$$
Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(ii) Seja
$$U = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é invertível}\}.$$
Por exemplo: a matriz nula não pertence a U. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(iii) Seja
$$U = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j, \text{ com } i, j = 1, ..., n\}.$$
Sejam
$$(b_{ij}), (c_{ij}) \in U \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
Tem-se
$$(b_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij} + c_{ij}) \in U,$$
pois $b_{ij} + c_{ij} = 0$ se $i \neq j$, com $i, j = 1, ..., n$. E, com $(a_{ij}) \in U$,
$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in U,$$
pois $\alpha a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, com $i, j = 1, ..., n$. Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(iv) Seja
$$U = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é singular}\}.$$
Por exemplo, para $n = 2$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U, \quad \text{mas} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(v) Seja

$$U = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \text{ se } i > j, \text{ com } i,j = 1,...,n\}.$$

Sejam

$$(b_{ij}), (c_{ij}) \in U \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tem-se

$$(b_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij} + c_{ij}) \in U,$$

pois $b_{ij} + c_{ij} = 0$ se $i > j$, com $i,j = 1,...,n$. E, com $(a_{ij}) \in U$,

$$\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in U,$$

pois $\alpha a_{ij} = 0$ se $i > j$, com $i,j = 1,...,n$. Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

5. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real.

(i) Seja

$$U = \{f : Dom\ f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } \exists k > 0 : |f(x)| \leq k,\ \forall x \in Dom\ f\}$$

o conjunto de todas as funções limitadas. Sejam $f_1, f_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f_1 + f_2 \in U,$$

pois

$$|(f_1 + f_2)(x)| = |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \underset{f_1,f_2 \in U}{\leq} k_1 + k_2,$$

para todo o $x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2$. E, com $f \in U$,

$$\alpha f \in U,$$

pois

$$|(\alpha f)(x)| = |\alpha|\,|f(x)| \underset{f \in U}{\leq} |\alpha|\,k,$$

para todo o $x \in Dom\ f$. Logo, U é subespaço de V.

(ii) Seja

$$U = \{f : Dom\ f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f(x) = f(-x),\ \forall x \in Dom\ f\}$$

o conjunto de todas as funções pares. Sejam $f_1, f_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f_1 + f_2 \in U,$$

pois

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \underset{f_1,f_2 \in U}{=} f_1(-x) + f_2(-x) = (f_1 + f_2)(-x),$$

para todo o $x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2$. E, com $f \in U$,

$$\alpha f \in U,$$

pois

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \underset{f \in U}{=} \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x),$$

para todo o $x \in Dom\ f$. Logo, U é subespaço de V.

(iii) O conjunto de todas as funções racionais, isto é, as que são quocientes de funções polinomiais, é um subespaço de V

(iv) Seja
$$U = \{f : Domf \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f \text{ é crescente}\}.$$
Se f fôr crescente então $-f$ é decrescente, isto é, $f \in U \Longrightarrow -f \notin U$. Logo, U não é subespaço de V.

(v) Seja
$$U = \{f : Dom\ f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f(0) = f(1),\ \forall x \in Dom\ f\}$$
Sejam $f_1, f_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se
$$f_1 + f_2 \in U,$$
pois
$$(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) \underset{f_1, f_2 \in U}{=} f_1(1) + f_2(1) = (f_1 + f_2)(1),$$
para todo o $x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ f_2$. E, com $f \in U$,
$$\alpha f \in U,$$
pois
$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) \underset{f \in U}{=} \alpha f(1) = (\alpha f)(1),$$
para todo o $x \in Dom\ f$. Logo, U é subespaço de V.

(vi) Seja
$$U = \{f : Domf \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f(0) = 1 + f(1)\}.$$
Sejam $f_1, f_2 \in U$. Tem-se
$$(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) \underset{f_1, f_2 \in U}{=} 2 + f_1(1) + f_2(1) = 2 + (f_1 + f_2)(1),$$
isto é, $f_1 + f_2 \notin U$. Logo, U não é subespaço de V.

6. **Dem.** Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear V. Observe-se que
$$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\} \subset L(\{v_1, v_2, v_3\}),$$
pelo que
$$L(\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}) \subseteq L(\{v_1, v_2, v_3\}).$$
Mas, como
$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_2 + v_3) + \frac{1}{2}(v_1 + v_3) \\ \\ v_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_1 + v_3) + \frac{1}{2}(v_2 + v_3) \\ \\ v_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3) - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_2 + v_3) \end{cases}$$
tem-se
$$L(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq L(\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}).$$
Logo,
$$L(\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}) = L(\{v_1, v_2, v_3\}) = V.$$

Vejamos agora que o conjunto $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$ é linearmente independente:

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_2+v_3)+\lambda_3(v_1+v_3)=\mathbf{0}$. Isto é,

$$(\lambda_1+\lambda_3)v_1+(\lambda_1+\lambda_2)v_2+(\lambda_2+\lambda_3)v_3=\mathbf{0}.$$

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

o que é equivalente ao sistema homogéneo:

$$A\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

com $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $\det A = 2 \neq 0$, então A é invertível e tem-se $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Logo, $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$ é uma base de V pois trata-se de um conjunto de vectores linearmente independente que gera V.

7. Seja A uma matriz (real) invertível do tipo $n \times n$. Suponhamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Queremos provar que $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é também uma base de $\mathbb{R}^n$.

   Dem. Vejamos primeiro que o conjunto $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é linearmente independente. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1(Av_1)+\lambda_2(Av_2)+\cdots+\lambda_n(Av_n)=\mathbf{0}.$$

   Queremos ver que $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Observe-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1(Av_1)+\lambda_2(Av_2)+\cdots+\lambda_n(Av_n) &= A(\lambda_1 v_1)+A(\lambda_2 v_2)+\cdots+A(\lambda_n v_n) \\ &= A(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n). \end{aligned}$$

   Logo,

$$\lambda_1(Av_1)+\lambda_2(Av_2)+\cdots+\lambda_n(Av_n)=\mathbf{0} \Longleftrightarrow A(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n)=\mathbf{0}.$$

   Como A é invertível, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1}A(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n) &= A^{-1}\mathbf{0} \Leftrightarrow \\ I(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\cdots+\lambda_n v_n &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

   Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$$

   Logo, $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por n vectores linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n, então

$$\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$$

   é uma base de $\mathbb{R}^n$.

8. Sejam V um espaço linear e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Dem. ($\Rightarrow$) Suponhamos que S é uma base de V. Queremos provar que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S. Assim, seja v um vector qualquer de V. Como S é uma base de V, então em particular gera V. Pelo que, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Suponhamos que também existiam $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Logo,

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = \mathbf{0}.$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente (por ser base), então temos

$$\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

Logo, conclui-se que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que todo o vector de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de S. Queremos provar que $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Como todo o vector de V se escreve como combinação linear dos elementos de S, então S gera V. Falta ver que S é linearmente independente. Assim, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Como

$$\mathbf{0} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n,$$

e uma vez que por hipótese todo o vector de V se escreve de maneira **única** como combinação linear dos elementos de S, conclui-se que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Logo, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V. Fica assim provada a equivalência referida na questão.

9. Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores

$$w_1 = av_1 + bv_2 \qquad \text{e} \qquad w_2 = cv_1 + dv_2,$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Queremos provar que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se $ad \neq bc$.

Dem. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $ad \neq bc$. Vejamos que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U. Vamos começar por verificar que o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}.$$

Queremos ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Observe-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1(av_1 + bv_2) + \lambda_2(cv_1 + dv_2) \\ &= (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base de U, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\lambda_1 a + \lambda_2 c = \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$A\lambda = \mathbf{0},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como $ad \neq bc$ e $\det A = ad - bc$, então $\det A \neq 0$, isto é, A é invertível e como tal:

$$A^{-1}A\lambda = A^{-1}\mathbf{0} \Leftrightarrow I\lambda = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = \mathbf{0}.$$

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e deste modo o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. Como $\dim U = 2$ e como w_1, w_2 são dois vectores de U, linearmente independentes, então conclui-se que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U (não sendo necessário verificar se o conjunto $\{w_1, w_2\}$ gera U).

($\Rightarrow$) Reciprocamente, se $\{w_1, w_2\}$ é uma base de U, em particular é linearmente independente, e como tal tem-se

$$(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}) \Rightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = 0).$$

Isto é, a equação

$$A\lambda = \mathbf{0},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, tem como solução única $\lambda = \mathbf{0}$. O que é equivalente a ter-se $\det A \neq 0$, isto é, $ad \neq bc$.

Demonstração alternativa. Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base do espaço linear U então $\dim U = 2$. Logo, se o conjunto $\{w_1, w_2\}$ fôr linearmente independente então será uma base do espaço linear U. Assim, bastará provar que o conjunto $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente se e só se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível. Seja $\mathbf{0}$ o vector nulo do espaço linear U. Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0}.$$

Queremos ver que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ se e só se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível. Observe-se que

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 &= \lambda_1(av_1 + bv_2) + \lambda_2(cv_1 + dv_2) \\ &= (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 a + \lambda_2 c)v_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 d)v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é uma base do espaço linear U, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\lambda_1 a + \lambda_2 c = \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \in \mathbb{R}.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $A\lambda = \mathbf{0}'$, onde $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{0}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Como a equação $A\lambda = \mathbf{0}'$ apenas admite a solução trivial $\lambda = \mathbf{0}'$ se e só se a matriz A fôr invertível e como a matriz A é invertível se e só se a matriz $A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ fôr invertível, tem-se então o resultado pretendido.

10. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que

$$\dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B) - \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)).$$

Sugestão: Considere (no caso em que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) \neq \{\mathbf{0}\}$) uma base $\{x_1, \ldots, x_s\}$ para $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e suponha (no caso em que $AB \neq \mathbf{0}$) que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$. Mostre que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$.

Dem. Se $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \{\mathbf{0}\}$, então $\dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) = 0$ e $\dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B)$.

Suponhamos então que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $\{x_1, \ldots, x_s\}$ uma base para $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e suponhamos que $AB \neq \mathbf{0}$ (no caso em que $AB = \mathbf{0}$ tem-se $\dim \mathcal{C}(AB) = 0$ e

$$\dim \mathcal{C}(B) = \dim(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) \quad \text{uma vez que} \quad \mathcal{C}(B) \subset \mathcal{N}(A)).$$

Seja $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$. Nesse caso $\dim \mathcal{C}(AB) = s + t$. Vejamos que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$.

Seja $b \in \mathcal{C}(AB)$. Tem-se $ABz = b$ para algum z. Mas, como $Bz \in \mathcal{C}(B)$, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t$ tais que

$$Bz = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j y_j.$$

Logo,

$$b = ABz = A\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A x_i + \sum_{j=1}^{t} \beta_j A y_j \underset{\{x_1,\ldots,x_s\} \subset \mathcal{N}(A)}{=} \sum_{j=1}^{t} \beta_j A y_j,$$

isto é, $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ gera $\mathcal{C}(AB)$.

Vejamos que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é linearmente independente. Suponhamos que existiam escalares $\xi_1, \ldots, \xi_t$ tais que

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{t} \xi_j A y_j.$$

Tem-se

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{t} \xi_j A y_j = A\left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j\right)$$

e então $\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$. E assim, existem escalares $\eta_1, \ldots, \eta_s$ tais que

$$\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j = \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i.$$

$$\text{Como} \qquad \sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j = \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{t} \xi_j y_j - \sum_{i=1}^{s} \eta_i x_i = \mathbf{0} \right)$$

e atendendo a que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$, tem-se

$$\xi_1 = \ldots = \xi_t = \eta_1 = \ldots = \eta_s = 0$$

e assim o conjunto $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é linearmente independente.

Logo, o conjunto $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$ e assim

$$\dim \mathcal{C}(B) = s + t = \dim (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)) + \dim \mathcal{C}(AB) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B) - \dim (\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)).$$

11. Considere os seguintes r vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x^1} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \mathbf{x^2} = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, \mathbf{x^r} = (x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}).$$

Mostre que se $|x_{jj}| > \sum\limits_{i=1 (i \neq j)}^{r} |x_{ij}|$ para todo o $j = 1, \ldots, r$ então o conjunto

$$\left\{ \mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r} \right\}$$

é linearmente independente.

Sugestão: Considere

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1 \mathbf{x^1} + \alpha_2 \mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r \mathbf{x^r},$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ e mostre que se existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que

$$|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|,$$

para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$.

Dem. Seja

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1 \mathbf{x^1} + \alpha_2 \mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r \mathbf{x^r},$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. Suponhamos que existe $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que

$$|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|,$$

para todo o $i = 1, \ldots, r$. Queremos mostrar que $v_j \neq 0$.

Suponhamos então (com vista a uma contradição) que $v_j = 0$. Nesse caso, teríamos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_{ij}}_{= v_j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j x_{jj} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \alpha_i x_{ij}.$$

Como

$$|\alpha_j| \, |x_{jj}| = |\alpha_j x_{jj}| = \left| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} \alpha_i x_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} |\alpha_i x_{ij}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} |\alpha_i| \, |x_{ij}| \underset{\substack{|\alpha_i| \leq |\alpha_j| \\ i=1,\ldots,r}}{\leq} |\alpha_j| \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} |x_{ij}| \right)$$

e $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) então teríamos

$$|x_{jj}| \;\leq \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} |x_{ij}| \right)$$

o que contradiz a hipótese de se ter

$$|x_{jj}| > \sum_{i=1 (i \neq j)}^{r} |x_{ij}|$$

para todo o $j = 1, \ldots, r$. Logo mostrámos que a existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que $|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|$, para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$, o que equivale a dizer que o conjunto

$$\left\{ \mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r} \right\}$$

é linearmente independente.

3^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^{-1} e determine o valor próprio de T^{-1} que lhe está associado.

2. Seja V um espaço linear. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^2 associado ao valor próprio λ^2 de T^2.

3. Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Mostre que se λ é um valor próprio de A então λ^k é um valor próprio de A^k, onde k é um inteiro positivo.

4. Uma matriz A do tipo $n \times n$ diz-se nilpotente se $A^l = 0$ para algum inteiro positivo l. Mostre que se A é nilpotente então o único valor próprio de A é 0.

5. Seja A uma matriz $n \times n$. Verifique que A e A^T têm os mesmos valores próprios.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ cuja soma das suas colunas é constante e igual a r. Mostre que r é um valor próprio de A.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Seja P uma matriz diagonalizante para A. Determine uma matriz diagonalizante para A^T em termos de P.

8. Seja Q uma matriz $n \times n$ real ortogonal, isto é, tal que $Q^{-1} = Q^T$.

   Mostre que se n fôr ímpar então Q tem o valor próprio 1 ou tem o valor próprio -1.

9. Determine uma matriz A real 2×2 tal que $\det A < 0$. Mostre que A é diagonalizável.

10. Seja A uma matriz $n \times n$ e seja λ um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a n. Mostre que se A fôr diagonalizável então A é uma matriz diagonal.

11. Seja V um espaço linear e seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que todos os vectores não nulos de V são vectores próprios. Mostre que T tem um único valor próprio.

12. Sejam A e B duas matrizes do tipo $n \times n$. Mostre que AB e BA têm os mesmos valores próprios.

13. Sejam A e B duas matrizes tais que $AB = BA$. Mostre que A e B têm um vector próprio em comum.

    Sugestão: Sendo λ um valor próprio de A, considere C a matriz cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ e verifique que $(A - \lambda I)\, BC = \mathbf{0}$. Finalmente considere a matriz P cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$ e sendo v um vector próprio de P mostre que Cv é um vector próprio comum a A e B.

14. Seja A uma matriz $n \times n$ e sejam λ_1, λ_2 escalares, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tais que

    $$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = \mathbf{0}.$$

    Mostre que A é diagonalizável.

Resolução da 3^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^{-1} e determine o valor próprio de T^{-1} que lhe está associado.

Dem. Tem-se
$$T(u) = \lambda u,$$
com $u \neq 0$. Como T é invertível e T^{-1} é linear,
$$u = T^{-1}(\lambda u) = \lambda T^{-1}(u).$$
Por outro lado, tem-se $\lambda \neq 0$ uma vez que $u \neq 0$ e T é invertível. Logo,
$$T^{-1}(u) = \lambda^{-1} u.$$
Isto é, u é um vector próprio de T^{-1} associado ao valor próprio λ^{-1} de T^{-1}.

2. Seja V um espaço linear. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Seja u um vector próprio de T associado a um valor próprio λ de T. Verifique que u é também um vector próprio de T^2 associado ao valor próprio λ^2 de T^2.

Dem. Tem-se
$$T(u) = \lambda u,$$
com $u \neq 0$. Logo, como T é linear,
$$T^2(u) = (T \circ T)(u) = T(T(u)) = T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda \lambda u = \lambda^2 u,$$
isto é, u é um vector próprio de T^2 associado ao valor próprio λ^2 de T^2.

3. Seja A uma matriz do tipo $n \times n$. Mostre que se λ é um valor próprio de A então λ^k é um valor próprio de A^k, onde k é um inteiro positivo.

Dem. Sendo k um inteiro positivo, tem-se
$$A^k - \lambda^k I = (A - \lambda I)(A^{k-1} + A^{k-2}\lambda + \cdots + A\lambda^{k-2} + \lambda^{k-1} I).$$
Logo, se λ é um valor próprio de A então λ^k é um valor próprio de A^k, onde k é um inteiro positivo.

4. Uma matriz A do tipo $n \times n$ diz-se nilpotente se $A^l = 0$ para algum inteiro positivo l. Mostre que se A é nilpotente então o único valor próprio de A é 0.

Dem. Suponhamos que $A^l = 0$ para algum inteiro positivo l. Seja λ um valor próprio de A. Pelo ex^o anterior, λ^l é um valor próprio de A^l. Como $A^l = 0$, então:
$$0 = \det(A^l - \lambda^l I) = \det(-\lambda^l I) = (-1)^n \lambda^l.$$

Logo $\lambda = 0$ e como tal, 0 é o único valor próprio de A.

5. Seja A uma matriz $n \times n$. Verifique que A e A^T têm os mesmos valores próprios.

Dem. Tem-se

$$\det(A - \lambda I) = \det\left((A - \lambda I)^T\right) = \det(A^T - \lambda I).$$

Isto é, as matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios.

6. Seja A uma matriz $n \times n$ cuja soma das suas colunas é constante e igual a r. Mostre que r é um valor próprio de A.

Dem. Tem-se

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo r é um valor próprio de A, associado ao vector próprio $(1, 1, \ldots, 1)$.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Seja P uma matriz diagonalizante para A. Determine uma matriz diagonalizante para A^T em termos de P.

Dem. Tem-se

$$D = PAP^{-1}$$

e

$$D = D^T = \left(PAP^{-1}\right)^T = \left(P^{-1}\right)^T A^T P^T.$$

Logo, a matriz $\left(P^{-1}\right)^T$ é uma matriz diagonalizante para A^T.

8. Seja Q uma matriz $n \times n$ real ortogonal, isto é, tal que $Q^{-1} = Q^T$. Mostre que se n fôr ímpar então Q tem o valor próprio 1 ou tem o valor próprio -1.

Dem. Atendendo a que $QQ^T = I$ tem-se

$$(\det Q)^2 = \det Q \det Q = \det Q \det\left(Q^T\right) = \det\left(QQ^T\right) = \det I = 1 \Leftrightarrow (\det Q = 1 \text{ ou } \det Q = -1).$$

Logo:

Se $\det Q = 1$

$$\det(Q - I) = \det\left[Q\left(I - Q^T\right)\right] = \det Q \det\left(I - Q^T\right) =$$

$$= (-1)^n \det Q \det\left(Q^T - I\right) \underset{n \text{ é ímpar}}{=} -\det Q \det\left[(Q - I)^T\right] = -\det(Q - I) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\det(Q-I)=0 \Leftrightarrow \det(Q-I)=0$$

isto é, 1 é valor próprio de Q;

Se $\det Q=-1$

$$\det(Q+I)=\det\left[Q\left(I+Q^T\right)\right]=\det Q\det\left(I+Q^T\right)=$$

$$=\det Q\det\left(Q^T+I\right)=-\det\left[(Q+I)^T\right]=-\det(Q+I)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\det(Q+I)=0\Leftrightarrow \det(Q+I)=0\Leftrightarrow \det(Q-(-1)I)=0$$

isto é, -1 é valor próprio de Q.

9. Determine uma matriz A real 2×2 tal que $\det A<0$. Mostre que A é diagonalizável.

Dem. Seja $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios de A. Como

$$\lambda_1\lambda_2=\det A<0$$

então λ_1 e λ_2 são dois valores próprios distintos de A, pelo que os vectores próprios correspondentes são linearmente independentes, constituindo assim uma base de $\mathbb{R}^2$, razão pela qual A é diagonalizável.

10. Seja A uma matriz $n\times n$ e seja λ um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a n. Mostre que se A fôr diagonalizável então A é uma matriz diagonal.

Dem. Seja λ um valor próprio de A com multiplicidade algébrica igual a n. Como A é do tipo $n\times n$, então λ é o único valor próprio de A. Assim, A fôr diagonalizável se e só se

$$\dim\mathcal{N}(A-\lambda I)=m_g(\lambda)=m_a(\lambda)=n$$

o que é equivalente a ter-se

$$A-\lambda I=\mathbf{0}\text{ (matriz nula)}$$

isto é,

$$A=\lambda I=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ou seja, A é uma matriz diagonal.

11. Seja V um espaço linear e seja $T:V\to V$ uma transformação linear tal que todos os vectores não nulos de V são vectores próprios. Mostre que T tem um único valor próprio.

Dem. Suponhamos, com vista a uma contradição, que λ_1 e λ_2 eram dois valores próprios distintos de T. Sejam v_1 e v_2 vectores próprios de T associados respectivamente aos valores próprios λ_1 e λ_2. Logo, o conjunto $\{v_1,v_2\}$ é linearmente independente. Por outro lado

$$T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2$$

e como cada vector não nulo de V é um vector próprio de T, então $v_1 + v_2$ é um vector próprio de T e assim, existe um escalar λ_3 tal que

$$T(v_1 + v_2) = \lambda_3 (v_1 + v_2) = \lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2.$$

Deste modo, tem-se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_1 + \lambda_3 v_2$$

ou seja

$$(\lambda_1 - \lambda_3) v_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) v_2 = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, então ter-se-ia

$$\lambda_1 = \lambda_3 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \lambda_2$$

isto é,

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

contrariando o facto de se ter assumido que λ_1 e λ_2 eram dois valores próprios distintos de T.

Logo, T tem um único valor próprio.

12. Sejam A e B duas matrizes do tipo $n \times n$. Mostre que AB e BA têm os mesmos valores próprios.

Dem. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Atendendo a que

$$\det(AB - 0I) = \det(AB) = \det(BA) = \det(BA - 0I),$$

0 é valor próprio de AB se e só se 0 é valor próprio de BA.

Seja λ um valor próprio de AB, com $\lambda \neq 0$. Então existe $u \neq \mathbf{0}$ tal que $ABu = \lambda u$. Seja $w = Bu$. Como $u \neq \mathbf{0}$ e B é invertível então $w \neq \mathbf{0}$. Logo,

$$(BA) w = (BA) Bu = B(AB) u = B\lambda u = \lambda (Bu) = \lambda w.$$

Isto é, λ é valor próprio de BA com w como vector próprio associado.

Seja λ um valor próprio de BA, com $\lambda \neq 0$. Então existe $u \neq \mathbf{0}$ tal que $BAu = \lambda u$. Seja $w = Au$. Como $u \neq \mathbf{0}$ e A é invertível então $w \neq \mathbf{0}$. Logo,

$$(AB) w = (AB) Au = A(BA) u = A\lambda u = \lambda (Au) = \lambda w.$$

Isto é, λ é valor próprio de AB com w como vector próprio associado.

13. Sejam A e B duas matrizes tais que $AB = BA$. Mostre que A e B têm um vector próprio em comum.

Sugestão: Sendo λ um valor próprio de A, considere C a matriz cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ e verifique que $(A - \lambda I) BC = \mathbf{0}$. Finalmente considere a matriz P cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$ e sendo v um vector próprio de P mostre que Cv é um vector próprio comum a A e B.

Dem. Suponhamos que as matrizes quadradas A e B são do tipo $n \times n$. Seja λ um valor próprio de A. Tem-se $\mathcal{N}(A - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$. Seja $r = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Seja C a matriz $n \times r$ cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Tem–se

$$(A - \lambda I) BC = ABC - \lambda BC \underset{AB=BA}{=} BAC - \lambda BC = B(A - \lambda I) C = B\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Seja $P = (p_{ij})$ a matriz $r \times r$ cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$. Tem-se, para $k = 1, ..., r$

$$\underbrace{[BC]_{*k}}_{\text{coluna } k \text{ de } BC} = \sum_{i=1}^{r} p_{ik} \underbrace{[C]_{*i}}_{\text{coluna } i \text{ de } C} = \sum_{i=1}^{r} [C]_{*i}\, p_{ik}.$$

Logo, tem-se

$$BC = CP.$$

Seja v um vector próprio de P associado a um valor próprio μ. Tem-se $v \neq \mathbf{0}$ e $Cv \neq \mathbf{0}$ pois C tem característica máxima (= n^o de colunas). Além disso,

$$B(Cv) = (BC)v = (CP)v = C(Pv) = C(\mu v I) = \mu(Cv),$$

isto é, Cv é um vector próprio de B associado ao valor próprio μ.

Por outro lado, tem-se

$$A(Cv) = (AC)v = (\lambda IC)v = \lambda(Cv),$$

isto é, Cv é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Logo, Cv é um vector próprio comum a A e B.

14. Seja A uma matriz $n \times n$ e sejam λ_1, λ_2 escalares, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tais que

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = \mathbf{0}.$$

Atendendo a que

$$\det(A - \lambda_1 I)\det(A - \lambda_2 I) = 0 \Leftrightarrow (\det(A - \lambda_1 I) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(A - \lambda_2 I) = 0)$$

então λ_1 é valor próprio de A ou λ_2 é valor próprio de A. Suponhamos sem perda de generalidade (uma vez que $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$) que λ_1 é um valor próprio de A. Atendendo a que

$$\mathcal{C}(A - \lambda_2 I) \subset \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \neq \{\mathbf{0}\}$$

então

$$n - \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{car}(A - \lambda_2 I) = \dim \mathcal{C}(A - \lambda_2 I) \leq \dim \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \operatorname{nul}(A - \lambda_1 I)$$

isto é,

$$n \leq \operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) + \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I).$$

Logo, atendendo a que $\operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) + \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I) \leq n$, tem-se

$$\operatorname{nul}(A - \lambda_1 I) + \operatorname{nul}(A - \lambda_2 I) = n$$

ou seja, A é diagonalizável.

4^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço euclidiano real. Verifique que para todos os $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se tem:

   (i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ **(ii)** $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$

   (iii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ **(iv)** $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

   (v) $\langle u + w, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2$

   (vi) $\langle u, \mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}, u\rangle = 0$

   (vii) $\langle u, v\rangle = 0$ se e só se $\|u + v\| = \|u - v\|$.

   (viii) $\langle u, v\rangle = 0$ se e só se $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

   (ix) $\langle u, v\rangle = 0$ se e só se $\|u + cv\| \geq \|u\|$ para todo o real c.

   (x) $\langle u + v, u - v\rangle = 0$ se e só se $\|u\| = \|v\|$.

   (xi) Lei do paralelogramo $\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

2. Seja V um espaço euclidiano real.

   (i) Seja $u \in V$. Verifique que se $\langle u, v\rangle = 0$ para qualquer $v \in V$ então $u = \mathbf{0}$.

   (ii) Sejam $u, v \in V$. Verifique que $u = v$ se e só se $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ para qualquer $w \in V$.

3. Seja V um espaço euclidiano com $\dim V = n$. Seja $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Verifique que a matriz $A = (a_{ij})$ que representa T em relação à base $\mathcal{S}$ é dada por
$$A = (a_{ij}) = (\langle T(u_j), u_i\rangle).$$

4. Seja V um espaço euclidiano de dimensão n. Seja $\{u_1, ..., u_k\}$ um conjunto linearmente independente de k vectores de V. Considere a transformação linear $T : V \to V$ definida por
$$T(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i,$$
   com $v \in V$.

   Mostre que T é invertível se e só se $k = n$.

5. Seja V um espaço euclidiano real. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\|T(w)\| = \|w\|$ para qualquer $w \in V$. Mostre que
$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle,$$
   para quaisquer $u, v \in V$.

6. Mostre que os valores próprios associados a uma matriz unitária têm módulo 1.

Resolução da 4^a Ficha de exercícios facultativos

1. Seja V um espaço euclidiano real. As alíneas **(i)**, **(ii)**, **(iii)** e **(iv)** são consequência da definição de produto interno.

   Sejam $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (v) Atendendo à condição de linearidade do produto interno:

$$\begin{aligned} \langle u+w, v+w \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle = \\ &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle + \langle w, v \rangle + \|w\|^2 . \end{aligned}$$

   (vi) Atendendo à condição de linearidade do produto interno:

$$\langle u, \mathbf{0} \rangle = \langle u, 0v \rangle = 0 \langle u, v \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{0}, u \rangle = \langle 0v, u \rangle = 0 \langle v, u \rangle = 0.$$

   (vii) Se $\langle u, v \rangle = 0$ então

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 - 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \\ &= \langle u-v, u-v \rangle = \\ &= \|u-v\|^2 , \end{aligned}$$

   isto é, $\|u+v\| = \|u-v\|$.

   Se $\|u+v\| = \|u-v\|$ então $\|u+v\|^2 = \|u-v\|^2$ e esta última equação é equivalente à equação

$$\|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 - 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 ,$$

   isto é, $\langle u, v \rangle = 0$.

   (viii) Atendendo a que

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 ,$$

   então tem-se $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ se e só se $\langle u, v \rangle = 0$.

   (ix) Seja $c \in \mathbb{R}$. Se $\langle u, v \rangle = 0$ então

$$\begin{aligned} \|u+cv\|^2 &= \langle u+cv, u+cv \rangle = \|u\|^2 + 2c \langle u, v \rangle + c^2 \|v\|^2 = \\ &= \|u\|^2 + c^2 \|v\|^2 \geq \|u\|^2 , \end{aligned}$$

   para todo o real c, isto é, $\|u+cv\| \geq \|u\|$ para todo o real c.

   Se $\|u+cv\| \geq \|u\|$ para todo o real c, então

$$\|v\|^2 c^2 + 2 \langle u, v \rangle c \geq 0,$$

   para todo o real c, se e só se $\langle u, v \rangle = 0$ (fórmula resolvente).

(x) Se $\langle u+v, u-v\rangle = 0$ então

$$0 = \langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 .$$

Logo, $\|u\| = \|v\|$.

Se $\|u\| = \|v\|$ então

$$0 = \|u\|^2 - \|v\|^2 = \langle u+v, u-v\rangle .$$

Logo, $\langle u+v, u-v\rangle = 0$.

(xi)

$$\begin{aligned}
\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 &= \langle u-v, u-v\rangle + \langle u+v, u+v\rangle = \\
&= \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \\
&= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 .
\end{aligned}$$

2. Seja V um espaço euclidiano real.

(i) Seja $u \in V$. Se $\langle u, v\rangle = 0$ para qualquer $v \in V$ então, em particular para $v = u$, tem-se

$$\langle u, u\rangle = 0.$$

Logo, $u = \mathbf{0}$.

(ii) Sejam $u, v \in V$. Se $u = v$ então

$$\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle ,$$

para qualquer $w \in V$.

Se $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ para qualquer $w \in V$, então

$$\langle u-v, w\rangle = 0,$$

para qualquer $w \in V$. Logo, atendendo à alínea anterior, tem-se $u = v$.

3. Seja V um espaço euclidiano com $\dim V = n$. Seja $\mathcal{S} = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. A matriz $A = (a_{ij})$ que representa T em relação à base $\mathcal{S}$ é dada por

$$A = (a_{ij}) = (\langle T(u_j), u_i\rangle) ,$$

uma vez que, para $j = 1, ..., n$,

$$T(u_j) = \langle T(u_j), u_1\rangle\, u_1 + ... + \langle T(u_j), u_n\rangle\, u_n.$$

4. Seja V um espaço euclidiano de dimensão n. Seja $\{u_1, ..., u_k\}$ um conjunto linearmente independente de k vectores de V. Considere a transformação linear $T : V \to V$ definida por

$$T(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle\, u_i,$$

com $v \in V$.

Mostre que T é invertível se e só se $k = n$.

Dem. Atendendo a que T é invertível se e só se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, bastará ver que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ se e só se $k = n$.

Se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então teremos $k = n$, caso contrário, isto é, caso $k < n$ ter-se-ia

$$\left(L\left(\{u_1, ..., u_k\}\right)\right)^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Assim, para $v \in \left(L\left(\{u_1, ..., u_k\}\right)\right)^{\perp}$, com $v \neq \mathbf{0}$, teríamos $T(v) = \mathbf{0}$, ou seja $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$. O que não pode ser pois suposemos $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Logo, se $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ então tem-se $k = n$.

Suponhamos agora que se tem $k = n$. Nesse caso, o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de V. Queremos ver que se tem $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Seja $v \in V$ tal que $T(v) = \mathbf{0}$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i = \mathbf{0}.$$

Assim, atendendo a que o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ é linearmente independente, tem-se $\langle v, u_i \rangle = 0$, para todo o $i = 1, ..., n$. Finalmente, como o conjunto $\{u_1, ..., u_n\}$ gera V, tem-se $\langle v, u \rangle = 0$, para qualquer $u \in V$. Logo $v = \mathbf{0}$ e assim $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

5. Seja V um espaço euclidiano real. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\|T(w)\| = \|w\|$ para qualquer $w \in V$. Mostre que
$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle,$$
para quaisquer $u, v \in V$.

Dem. Sejam $u, v \in V$. Tem-se

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|T(u + v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) = \langle T(u), T(v) \rangle.$$

6. Seja U uma matriz unitária. Isto é:
$$U^H = U^{-1}.$$

Seja λ um valor próprio de U e v um vector próprio associado:

$$Uv = \lambda v.$$

Logo
$$v^H U^H = (Uv)^H = (\lambda v)^H = v^H \overline{\lambda}$$

e assim
$$\left(v^H U^H\right) Uv = \left(v^H \overline{\lambda}\right) Uv \Leftrightarrow v^H \left(U^H U\right) v = v^H \overline{\lambda} \left(Uv\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v^H I v = v^H \overline{\lambda} \lambda v \Leftrightarrow v^H v = v^H v \, |\lambda|^2 \Leftrightarrow \left(1 - |\lambda|^2\right) \|v\|^2 = 0 \underset{v \neq \mathbf{0}}{\Leftrightarrow} |\lambda| = 1.$$