ficha nº 6 : R. Cauchy

$$\boxed{0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0}$$

indeterminações

$$\rightarrow \boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}}$$

- f, g diferenciáveis e $]a,b[$, $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ (ou $= \pm\infty$)
- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

então $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Relações simbólicas:

(i) $fg = \frac{f}{1/g} \left(= \frac{g}{1/f}\right)$

(ii) $f - g = f\left(1 - \frac{g}{f}\right) \left(= g\left(\frac{f}{g} - 1\right)\right)$

(iii) $f > 0 \quad f^g = e^{g\cdot\ln(f)}$

(iv) $\frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f}$

1a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x} \underset{R.C.}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(10^x-5^x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ln 10 - \ln 5 = \ln 2$ $\quad 10^x = e^{\ln(10)\cdot x}$

$f(x) = 10^x - 5^x,\ g(x) = x \Rightarrow f'(x) = \ln 10 \cdot 10^x + \ln 5 \cdot 5^x$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{0}{0}$ ind. $\Rightarrow f(x) = e^{-1/x},\ g(x) = x$ $\quad e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0$ $\quad \boxed{(e^u)' = u' e^u}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x} \underset{R.C.}{\overset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(e^{-1/x})'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x}}{1} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{0}{0}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x},\ g'(x) = 1$

STOP !!

$\overset{\shortparallel}{\lim\limits_{x\to 0^+}}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \underset{R.C.}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{(e^{1/x})'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}\, e^{1/x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{1/x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

1b) Não é aplicável a regra de Cauchy, pois não é satisfeita uma das condições

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}, \text{ pq. } -x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x^2 \text{ e } \pm x^2 \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}}{\cos x}}_{=H(x)}$$

este limite não existe

$x_n, y_n \to 0$ e $\lim H(x_n) \neq \lim H(y_n)$; $x_n = \frac{1}{0+2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$

$x_n, y_n > 0$

$$H(x_n) = \frac{2x_n \cdot 0 - \cos(0)}{\cos(x_n)} \underset{x_n \to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{\cos(0)} = -1$$

$\cos\frac{1}{x_n} = \cos(0+2n\pi)$

$= \cos(0) = 1$

$$H(y_n) = \frac{2y_n \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 0}{\cos(y_n)} \underset{y_n \to 0}{\longrightarrow} \frac{0}{\cos 0} = 0$$

<u>obs:</u> $b = f(a)$

Heine

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall x_n \in D_f \quad x_n \to a \implies f(x_n) \to b$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \quad , \text{ pq. } \quad -x \leq x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x$$

$$-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

limites elementares

Obs: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ eq. da reta tangente ao graf. de f em $x=a$ (f é diferenciável em a)

cond. nec. e suficiente

$f(x) = \operatorname{sen} x$
$a = 0$ | $y = x$

1d) $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} \overset{\infty^0}{=} e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} \cdot \ln(x)} \underset{*}{=} e^0 = 1$

CA: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} \cdot \ln x \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \; *$

2b) $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \overset{0^0}{=} e^{\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)} \underset{*}{=} e^0 = 1$

CA. $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \underset{RC.}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln(\operatorname{sen} x))'}{\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)'} =$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} (-\operatorname{sen} x) = 0 \; *$

3. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) + 1 \qquad x \in [-1/2, 1/2]$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2}$$

$n = 2$, e $x_0 = 0$ $\quad \left((\operatorname{arctg}(u))' = u' \cdot \frac{1}{1+u^2} \right)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2(1+x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + 1 = 1$$

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2$$

$$P_2(x) = 1 + x^2$$

T. Taylor

$f: I \to \mathbb{R}$, $x, x_0 \in I$

- $f', \ldots, f^{(n)}$ contínuas e I
- $f^{(n+1)}$ existe e $]a,b[$

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$.

$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

e c está entre x_0 e x.

2a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x} \overset{\infty^0}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln(\ln x)} \underset{*}{=} e^{0} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} \underset{R.C.}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1/x}{\ln x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0 \; *$$

2c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2 \cdot e^{\ln^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{\ln^2 x + 2x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{e^{(\ln x+1)^2 - 1}} \underset{R.C.}{\overset{\infty/\infty}{=}}$

$$= e \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(e^{(\ln x+1)^2}\right)'} = e \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{2}{\cancel{x}}(\ln x+1)\, e^{(\ln x+1)^2}} = 0$$

2d) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{\coth x} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to 0} \coth x \cdot \ln(\operatorname{ch} x)} = e^1$ ⊛

$$\lim_{x\to 0} \coth x \cdot \ln(\operatorname{ch} x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{th} x} \underset{R.C}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\operatorname{ch} x))'}{(\operatorname{th} x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh}(0) \cdot \operatorname{ch}(0) = 1$$ ⊛

$$\frac{1}{\coth x} = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$$R_n(x) = f'''(c)\,\frac{(x-0)^3}{3!}$$

Lagrange

c està entre 0 e x

Como $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$

$x \in [-1/2, 1/2]$, $-1/2 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$|x| \leq 1/2$

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_n(x)| =$$

$$f'''(x) = (f''(x))' = 2\left(\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}\right)' =$$

$$= 2\,\frac{(-12x^3)\cdot(1+x^4)^{\cancel{2}} - (1-3x^4)\cdot 2\cdot 4x^3\,\cancel{(1+x^4)}}{(1+x^4)^{\cancel{4}}}$$

$$= 2\,\frac{(-12x^3 - 12x^7 - (8x^3 - 24x^7))}{(1+x^4)^3}$$

$$= \frac{8x^3(5x^4-3)}{(1+x^4)^3}$$

$$= \left|\frac{8c^3(5c^4-3)}{(1+c^4)^3}\right| \frac{|x^3|}{6} < 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$|5c^4-3| \leq 5c^4+3 < 8$$

$|x| \leq 1/2$, c entre 0 e x $\Rightarrow |c| < 1/2 < 1$

$$\frac{1}{1+c^4} < 1$$

4. Mostremos que se g é três vezes diferenciável e se $g'''(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$ então g não pode ter mais do que dois pontos de extremo local. Por absurdo se $g'''(x)>0$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ e g tivesse mais que dois pontos de extremo local, consideremos o caso que $a,b,c\in\mathbb{R}$ são pontos de extremo local e $a<b<c$, g é diferenciável em $\mathbb{R}$, $g'(a)=g'(b)=g'(c)=0$ aplicando o teorema de Rolle a g' em $[a,b]$ e $[b,c]$ existem $d_1\in]a,b[$ e $d_2\in]b,c[$ tais que $g''(d_1)=g''(d_2)=0$ e satisfeitas as condições do teorema de Rolle a g'' em $[d_1,d_2]$ existe $e\in]d_1,d_2[$ tal que $g'''(e)=0$, o que é impossível.

cont. de 4: Mostremos agora que se g tem exactamente 2 extremos locais em α, β, com $\alpha < \beta$, $g(\alpha)$ é máximo e $g(\beta)$ é mínimo locais.

$g'''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g''$ é estritamente crescente (injetiva)

Com $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$, do teorema de Rolle aplicado a g' em $[\alpha, \beta]$, existe $c \in]\alpha, \beta[$, $g''(c) = 0$

logo $g''(\alpha) < 0$ e $g'(\alpha) = 0$, $g(\alpha)$ é máximo local

$g''(\beta) > 0$ e $g'(\beta) = 0$, $g(\beta)$ é mínimo local cont. de 4: Satisfeitas as condições do teorema de Taylor

$$g(x) = P_2(x) + R_2(x) = g(\beta) + g'(\beta)(x-\beta) + g''(\beta)\frac{(x-\beta)^2}{2} + R_2(x)$$

$g'(\beta) = 0$, $g''(\beta) > 0$; $R_2(x) = g'''(c)\dfrac{(x-\beta)^3}{3!}$, c entre β e x

$$g(x) - g(\beta) = \frac{g''(\beta)}{2}(x-\beta)^2 + \frac{g'''(c)}{6}(x-\beta)^3 > 0 \quad \text{para } x > \beta$$

pois $g''(\beta) > 0$, $(x-\beta)^2 > 0$, $g'''(c) > 0$, $(x-\beta)^3 > 0$ pois $x > \beta$

$g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|\,e^{1-x^2}$, $f(-x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

f é par (simetria relativa à ordenada)

a) f contínua em $\mathbb{R}$, pois resulta do produto e composição de funções contínuas.

Para $x\neq 0$ f é diferenciável, pois resulta do produto e composição de funções diferenciáveis.

$$f'_e(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \cancel{= \lim_{x\to0^-}\frac{-xe^{1-x^2}-0}{x} = -e \neq f'_d(0)=e}$$

$x>0$

$$f'(x)=(xe^{1-x^2})'=e^{1-x^2}+x\cdot(-2x)e^{1-x^2} \cancel{=(1-2x^2)e^{1-x^2}}, \quad f'(\sqrt{2}/2)=0, \text{ máximo local}$$

$$f''(x)=-4x\,e^{1-x^2}+(1-2x^2)(-2x)e^{1-x^2}=(-6x+4x^3)e^{1-x^2}=2x(2x^2-3)e^{1-x^2}$$

$f''(\sqrt{2}/2)<0$, $f'(\sqrt{2}/2)=0$, $f(\sqrt{2}/2)=\frac{\sqrt{2}\cdot e}{2}$ é máximo local

$0<x<\sqrt{2}/2$ $f'(x)>0$ e $x>\sqrt{2}/2$, $f'(x)<0$, em $\mathbb{R}^+$ é máximo.

em $]0,\sqrt{2}/2[$, f estritamente crescente e em $]\sqrt{2}/2,+\infty[$ f é estritamente decrescente

$\sqrt{3/2}$ é ponto de inflexão, $f''(\sqrt{3/2})=0$

$$\lim_{x\to+\infty} x e^{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} \overset{\infty/\infty}{\underset{R.C}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x^2-1})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\,e^{x^2-1}} = 0$$

$y=0$ é uma assintota horizontal à direita

Sendo f uma função par, a simetria do gráfico de f relativa à ordenada ajuda-nos a concluir $\bar{q}$ $y=0$ é tb. uma assintota à esquerda, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ é também máximo em $\mathbb{R}^-$

$f(-\sqrt{3/2})$ é também ponto de inflexão

f é estritamente crescente em $]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}[$ e estr. decrescente em $]-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[$

$f(x) > 0$ e como é contínua em $\mathbb{R}$, $f(0)=0$ é mínimo absoluto

e $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{e/2}$ é máximo absoluto