Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste e 1º Exame

Campus da Alameda **12 de Janeiro de 2009, 9 horas**

LEAmb, LEMat, LEANaval, MEB, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para o 2º teste responda unicamente II 1., II 2., III e IV

I. 1. Prove por indução matemática a seguinte proposição

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \frac{n^2+n}{2} \in \mathbb{N}$$

2. Seja (a_n) uma qualquer sucessão de números reais, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e S o conjunto dos seus sublimites. Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
   (i) Se $S = \{0, 1\}$, (a_n) não é convergente.
   (ii) Se $A = \{0, 1\}$, (a_n) não é convergente.
   (iii) Se A é limitado então S é não vazio.
   (iv) Se (a_n) é crescente e A é limitado então S tem um e um só elemento.

3. Considere a função
$$g(x) = \frac{(x+1)\log x}{|x-1|}$$
   a) Estude o sinal de g e, caso existam, determine os seus zeros.
   b) Estude g quanto a continuidade e diga, justificando, se é prolongável por continuidade ao ponto 1.

II. 1. Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \log(1 + e^{x^2}), \qquad g(x) = \operatorname{sen}(\cos x).$$

Calcule f' e g'; justifique que as funções f e g têm um extremo local no ponto zero.

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$\frac{e^x}{3+2e^x}, \qquad \frac{e^x}{3+2e^{2x}}, \qquad x\sqrt{3x^2+5}.$$

3. (Apenas para o exame)Determine a única função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}, \qquad f(1) = \pi, \qquad f(-1) = 0.$$

III. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$f(x) = 2x\log x.$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e determine os zeros de f.

b) Estude f quanto a monotonia e existência de extremos locais.

c) Determine o sentido das concavidades do gráfico de f.

d) Determine a área da região plana delimitada pelos gráficos da função f e da função $\log x$.

IV. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e seja ψ a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = f(x^2 - x) + \int_0^{x^2-x} f(t)\, dt.$$

a) Calcule ψ' e ψ''.

b) Supondo que $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$, justifique que f e ψ têm em zero um extremo local da mesma natureza.