AULA 10

Funções reais de variável real — Diferenciabilidade (Cont.)

10.1 Derivadas de ordem superior

Se a derivada de uma função f é diferenciável então a sua derivada designa-se de *segunda derivada* de f e denota-se por f''. Este processo pode ser continuado e, de um modo geral a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ de uma função f, que se denota por $f^{(n)}$ define-se por recursão de acordo com o seguinte: $f^{(0)} = f$; $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. Para as derivadas de ordem mais baixa é comum continuar a usar a notação $f, f', f'', f''', \dots$, etc. No entanto, para ordens superiores à quarta, a notação torna-se demasiado pesada.

Uma função diz-se de classe $C^n(X)$ onde $X \subseteq \mathbb{R}$, se tiver derivada de ordem n em X e esta é contínua, i.e., $f^{(n)}$ é contínua em X. Assim, por exemplo, f é de classe $C^0(X)$ se é contínua em X, é de classe $C^1(\mathbb{R})$ se tem derivada em X e f' é contínua em X, etc.

Embora em geral não façamos uso dela, existe uma notação alternativa para as derivadas de uma função que iremos descrever. Noutros contextos, por exemplo no contexto do cálculo diferencial ou no contexto do cálculo diferencial envolvendo funções com mais de uma variável, é uma notação muito útil. Assim é comum designar a derivada de uma função f como df/dx, ou $(d/dx)f$. A derivada de ordem n é, neste contexto denotada por $d^n f/dx^n$. Nesta notação, a relação de recorrência acima descrita torna-se,

$$\frac{df^{n+1}}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\frac{df^n}{dx^n}.$$

10.1.1 A derivada de segunda ordem

A segunda derivada permite obter informação sobre a concavidade do gráfico de uma função. Dizemos que num ponto $(x_0, f(x_0))$ a função tem a concavidade virada para baixo se numa vizinhança de x_0 a diferença $y - y_T$ entre $y = f(x)$ e $y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é negativa. (Observe-se que $y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é a equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.) Se aquela diferença é positiva, dizemos que o gráfico tem a concavidade virada para cima.

A análise da concavidade do gráfico de uma função f duas vezes diferenciável pode ser conduzida através da análise do sinal de f''.

Teorema 10.1.— *Suponhamos que f é duas vezes diferenciável em $]a, b[$. Se $f''(x) > 0$ em $]a, b[$ então a concavidade do gráfico de f está virada para cima em $]a, b[$. Se $f''(x) < 0$ em $]a, b[$ então a concavidade do gráfico de f está virada para baixo em $]a, b[$.*

Dem.— Consideremos o caso em que $f''(x) > 0$ em $]a, b[$. (O outro caso é semelhante.) Consideremos a diferença $y - y_T$, temos:

$$y - y_T = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0),$$

aplicando o teorema do valor médio. Aplicando de novo o teorema do valor médio a f' podemos considerar um ponto d tal que,

$$y - y_T = f''(d)(x-c)(x-x_0).$$

Como c está entre x e x_0 temos que o produto $(x-c)(x-x_0)$ é sempre positivo. Assim, o sinal daquela diferença é o sinal de $f''(d)$ que, neste caso é positivo. Conclui-se assim que a concavidade se encontra virada para cima, com se pretendia.■

Teorema 10.2.— *Se a função $y = f(x)$ é contínua e $f''(a) = 0$ ou $f''(a)$ não existe e $f''(x)$ muda de sinal ao passar por a então o ponto $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão.*

10.1.2 O teorema de Taylor

Teorema 10.3 (de Taylor).— *Consideremos uma função f, definida no intervalo $[a,b]$, n é um natural, $f \in C^n([a,b])$, e $f^{(n+1)}$ existe em $]a,b[$. Consideremos $\alpha \in [a,b]$. Definindo,*

$$P_{n,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k,$$

tem-se que,

$$f(x) = P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}.$$

Dem.— Fixemos um $\beta \in [a,b]$, arbitrário. Consideremos $M \in \mathbb{R}$ tal que (denotando $P_{n,\alpha}(x)$ por $P(x)$),

$$f(\beta) = P(\beta) + M(x-\alpha)^{n+1}.$$

Posto isto, considerando a função auxiliar,

$$g(x) = f(x) - P(x) - M(x-\alpha)^{n+1}.$$

é fácil concluir que se tem $g^{(n+1)}(x) = f^{n+1}(x) - (n+1)!\,M$, pelo que demonstrando que existe ξ entre α e β tal que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, para mostrar que,

$$M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Calculando as derivadas tem-se $g(\alpha) = g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(n)}(\alpha) = 0$. Por outro lado, usando teorema do valor médio, podemos encontrar sucessivamente pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ tais que $g'(x_1) = g'(x_2) = \cdots = g^{(n)}(x_n) = 0$. Finalmente, usando uma última vez o teorema do valor médio, existe um ξ tal que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, concluindo assim a demonstração. ■

No teorema anterior, se supusermos apenas que f é n vezes diferenciável em $[a,b]$ então é possível estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 10.4.— *Suponhamos que f é $C^n([a,b])$ e que $\alpha \in]a,b[$. Nestas condições tem-se que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + R_n(x),$$

onde $R_n(x)$ é uma função que satisfaz a seguinte condição,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{R_n(x)}{(x-\alpha)^n} = 0.$$

DEM.— Considerando,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k$$

tem-se que, o limite $\lim_{x\to\alpha} R_n(x)/(x-\alpha)^n$ conduz a uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de Cauchy (n vezes), tem-se:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{R_n(x)}{(x-\alpha)^n} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(\alpha)}{n!} = 0,$$

porque $f^{(n)}(x)$ é contínua. ■

TEOREMA 10.5.— *Consideremos uma função f que é $C^n([a,b])$. Consideremos $\alpha \in]a,b[$ tal que $f'(\alpha) = f''(\alpha) = \cdots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$ e $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$. Se n é ímpar então f não tem nenhum extremo no ponto α. Se n é par então f tem um máximo relativo em α se $f^{(n)}(\alpha) < 0$ e um mínimo relativo em α se $f^{(n)}(\alpha) > 0$.*

DEM.— Considerando o desenvolvimento de Taylor de f, de ordem n em α tem-se,

$$f(x) - f(\alpha) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + R_n(x).$$

Como $R_n(x)$ tende para zero quando $x \to \alpha$, podemos fixar uma vizinhança de α onde $|R_n(x)|$ é de tal forma pequeno que o sinal da diferença $f(x) - f(a)$ é dado por

$$\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

A conclusão é agora imediata tendo em conta como varia o sinal daquela expressão, considerando $x < \alpha$ e $x > \alpha$. ■