AULA 12

Integral de Riemann (Continuação)

12.0.1 Propriedades do integral

Teorema 12.1.— *Se f, g são integráveis à Riemann num intervalo I e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha f + \beta g$ é intergrável à Riemann no intervalo I e tem-se:*

$$\int_I \alpha f + \beta g dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx.$$

Dem.— ■

Lema 12.1.— *Supondo que f, g são integráveis à Riemann em I e que nesse intervalo $f(x) \leq g(x)$. Nestas condições,*

$$\int_I f dx \leq \int_I g dx.$$

Dem.— ■

Lema 12.2.— *Suponhamos que f é integrável à Riemann em $[a, b]$ e $a < c < b$. Nestas condições,*

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_{[a,c]} f dx + \int_{[c,d]} f dx$$

Dem.— ■

Lema 12.3.— *Suponhamos que f é integrável à Riemann no intervalo $I = [a, b]$ e que $|f(x)| \leq M$ para todo o $x \in I$. Nestas condições,*

$$\Big| \int_I f dx \Big| \leq M(b - a).$$

Dem.— ■

Lema 12.4.— *Suponhamos que f, g são integráveis à Riemann no intervalo I. Nestas condições,*

(1) *fg é integrável à Riemann.*

(2) *$|f|$ é integrável à Riemann e tem-se,*

$$\Big| \int_I f dx \Big| \leq \int_I |f| dx.$$

Dem.— ■

12.0.2 O teorema da mudança de variável

Teorema 12.2 (da mudança de variável).— *Suponhamos que f é integrável à Riemann em $[a,b]$ e que $\phi : [A,B] \to [a,b]$ é uma bijecção crescente e contínua tal que ϕ' é integrável à Riemann. Nestas condições, (considerando $x = \phi(y)$)*

$$\int_A^B f(\phi(y))\phi'(y)dy = \int_a^b f(x)dx.$$

Dem.— ■

12.0.3 Teorema fundamental do cálculo

Teorema 12.3.— *Consideremos um intervalo $I = [a,b]$ e uma função f integrável à Riemann em I. Consideremos a função $F : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_a^x f(u)du$. Nestas condições a função F é contínua em I e para cada $\alpha \in I$ tal que f é contínua em α tem-se que $F'(\alpha) = f(\alpha)$.*

Dem.— Como f é integrável à Riemann, tem-se que f é limitada em $[a,b]$. Assim, existe $M > 0$ tal que, para qualquer $x \in [a,b]$, se tem $|f(x)| \leq M$. Assim, dado $\epsilon > 0$ se se tiver que $|y - x| < \epsilon/M$ então, para $x < y$ tem-se

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(u)du \right| \leq M|y - x| \leq \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon.$$

Como ϵ é qualquer, concluímos que F é uniformemente contínua em $[a,b]$ logo, é contínua no mesmo intervalo.

Suponhamos agora que f é contínua em α. Demostraremos que $F'(\alpha^+) = f(\alpha)$ já que a demonstração de que $F'(\alpha^-) = f(\alpha)$ é idêntica. Consideremos então $x > \alpha$. Tem-se

$$\left| \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} - f(\alpha) \right| = \left| \frac{1}{x - \alpha} \int_\alpha^x [f(u) - f(\alpha)]du \right|.$$

Dado $\epsilon > 0$ podemos escolher $\delta > 0$ tal que $|u - \alpha| < \delta$ implica $|f(u) - f(\alpha)| < \epsilon$, nestas condições, tem-se igualmente que

$$\left| \frac{1}{x - \alpha} \int_\alpha^x [f(u) - f(\alpha)]du \right| \leq \frac{1}{|x - \alpha|}\epsilon|x - \alpha| \leq \epsilon.$$

Concluímos assim que

$$F'(\alpha^+) = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{F(x) - F(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha),$$

como se pretendia. ■

Corolário 12.3.1.— *Nas condições do teorema anterior, a função $G(x) = \int_x^b f(u)du$ é contínua em $[a,b]$ e se f é contínua em α então $G'(\alpha) = -f(\alpha)$.*

Lema 12.5.— *Suponhamos que f é contínua e que ϕ, ψ são diferenciáveis. Nestas condições a função $H(x)$ definida pela relação,*

$$H(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(u)du$$

é diferenciável e tem-se,

$$H'(x) = f(\phi(x))\phi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

Teorema 12.4 (fundamental do cálculo).— *Suponhamos que f é integrável à Riemann em $[a,b]$ e que F é uma função que satisfaz $F' = f$ em $[a,b]$ (F diz-se uma primitiva de f em $[a,b]$). Nestas condições,*

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a).$$

Dem.— Dado $\epsilon > 0$, consideremos uma partição $P = \langle x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\rangle$ para a qual se tenha $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$. Aplicando o teorema de lagrange à função F tem-se que existem pontos $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tais que, $F(x_{i+1}) - f(x_i) = f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$. Como se tem,

$$L(P,f) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i), \int_a^b f dx \leq U(P,f),$$

tem-se que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - \int_a^b f dx \right| = \left| (F(b) - f(a)) - \int_a^b f dx \right| < \epsilon.$$

Como ϵ é qualquer, tem-se que $\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$. ■