Instituto Superior Técnico - TagusPark
Matemática Discreta 2020/2021
Exercícios para as aulas de problemas e teórico-práticas

Lista 1

Após a aula teorico-prática e a aula de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina.

1 Derivada finita de uma sucessão

1. Para cada uma das seguintes sucessões de termo geral u_k calcule a respetiva derivada finita ($a, b \in \mathbb{R}$):

   (a) $u_k = 5^k$ (b) $u_k = 3k$ (c) $u_k = k^2$ (d) $u_k = a^k$ (e) $u_k = ak + b$ (f) $u_k = k!$

2. Tal como no cálculo infinitesimal (que estuda em Cálculo Diferencial e Integral I e II), podem ser estabelecidas no cálculo finito regras de derivação, em particular, regras para a derivada finita da multiplicação por constante, da soma, do produto e do quociente de sucessões. Mostre que dadas sucessões com termos gerais u_n, v_n e w_n, em que $w_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tem que

   (a) $(c \times u_n)' = c \times (u_n)'$ com $c \in \mathbb{R}$

   (b) $(u_n + v_n)' = (u_n)' + (v_n)'$

   (c) $(u_n \times v_n)' = (u_n)' \times v_{n+1} + u_n \times (v_n)'$

   (d) $\left(\dfrac{u_n}{w_n}\right)' = \dfrac{(u_n)' \times w_n - u_n \times (w_n)'}{w_{n+1} \times w_n}$

   Compare estas expressões com as das regras correspondentes que já conhece no cálculo infinitesimal.

2 Formas fechadas de somatórios

1. Sendo $p, n, m \in \mathbb{Z}$ com $p \leq n$, verifique informalmente que são verdadeiras as igualdades seguintes, correspondentes a propriedades de manipulação de somatórios que são usadas com mais fequência (a designação usual de cada uma delas está indicada à direita):

   (a) $\sum_{k=p}^{n} (\alpha \times u_k) = \alpha \sum_{k=p}^{n} u_k$ se α constante ou k não ocorre em α (distributividade)

   (b) $\sum_{k=p}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=p}^{n} u_k + \sum_{k=p}^{n} v_k$ (associatividade)

   (c) $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k$ com $p \leq m < n$ (manipulação do domínio)

   (d) $\sum_{k=p}^{n} \alpha = (n - p + 1) \times \alpha$ se α constante ou k não ocorre em α (soma de parcelas constantes)

   (e) $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p+m}^{n+m} u_{(k-m)} = \sum_{k=p-m}^{n-m} u_{(k+m)}$ (mudança de variável[1])

[1] Esta propriedade é designada *mudança de variável* pelo facto de em certas formulações equivalentes a variável do somatório da expressão mais à esquerda (k) ser substituída por outra nas expressões à direita.

2. Recorrendo à derivada finita do termo geral do somatório e ao teorema fundamental do cálculo finito (TFCF), obtenha uma forma fechada para cada umdos somatórios indicados ($a \in \mathbb{R}$):

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{n} 5^k$ (c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-4)^k$ (d) $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k}$

(e) $\sum\limits_{k=2}^{n} 3^k$ (f) $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 6^k$ (g) $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k$ (h) $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n} k5^k$ (j) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(-4)^k$ (k) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$ (l) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

(m) $\sum\limits_{k=0}^{n-2} k3^k$ (n) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 2^k$ (o) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2^k}$ (p) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 2^k$

Pode usar a aplicação *WolframAlpha* (`https://www.wolframalpha.com`) para confirmar os resultados. Por exemplo, ao escrever e avaliar `Sum(2^k,0,n)` obtém uma resposta possível para a alínea (a). Ao escrever uma expressão deste tipo, o limite superior tem de ser uma constante ou uma variável (no caso indicado é a variável `n`). Quando tal não acontece (como na alínea (f)), escreve-se e avalia-se apenas expressão `Sum`, após o que aparece uma tabela na qual se deve inserir o termo geral do somatório, o seu limite inferior, e o seu limite superior, e a variável do somatório (se diferente de k).

3. Começando por calcular a derivada finita da sucessão $u_k = 2^k \times k!$, e recordando o teorema fundamental do cálculo finito (TFCF), obtenha uma forma fechada para

$$\sum_{k=1}^{n} ((2k+1) \times 2^k \times k!)$$

4. Calcule uma forma fechada para

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+5k+2}{k^2(k+1)^2}$$

Sugestão: comece por calcular a derivada finita da sucessão $u_k = \frac{k+2}{k^2}$.