Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º semestre 12/13

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEE, LEGI, LEIC-T, LERC

12 de outubro de 2012

Teste 102 (RESOLVIDO)

Nome:
Número:
Curso:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **45 minutos** e consiste de sete problemas. Os cinco primeiros são perguntas de escolha múltipla, pelo que deve assinalar a sua opção no primeiro quadro abaixo. As resposta erradas descontam 1/10 da cotação indicada. Os restantes problemas têm as cotações indicadas na segunda tabela abaixo.

Perg 1	2 Val	b
Perg 2	2 Val	a
Perg 3	3 Val	a
Perg 4	3 Val	c
Perg 5	3 Val	b

O quadro abaixo destina-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Prob 6	4 Val	
Prob 7	3 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1
Identifique a única matriz em em forma reduzida de linhas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 2
Classifique o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 11 \\ & 4x_2 & +9x_3 & = & -12 \\ x_1 & +7x_2 & +11x_3 & = & -11 \end{array}$$

Indique a única afirmação verdadeira.

(a) Impossível

(b) Possível e determinado

(c) Possível e indeterminado

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 3
Dada a seguinte matriz aumentada dum sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

verifique se o sistema é possível e encontre a solução geral. Caso contrário, escolha a afirmação de que não existe solução.

(a) $x_1 = 7 - 6x_3$
$x_2 = -2 + 2x_3$
x_3 é *livre*

(b) Não existe solução

(c) $x_1 = 7 - 6x_3$
x_2 é *livre*
$x_3 = 1 + \frac{1}{2}x_2$

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 4
Sejam os vetores $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Verifique se o vetor $\mathbf{b}$ se pode escrever como combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$, i.e verifique se existem pesos x_1, x_2 e x_3 tais que $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

(a) Não existe solução

(b) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$

(c) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

(d) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 5

Sejam $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & -6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Considere a equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e descreva o conjunto de todos os vetores $\mathbf{b}$, i.e. as condições sobre as coordenadas $b_1,\ b_2,\ b_3$, para os quais a equação tem solução.

(a) A equação tem solução para todos os $b_1,\ b_2,\ b_3$ que pertençam ao plano $7b_1 + 5b_2 + b_3 = 0$.

(b) A equação tem solução para todos as possíveis coordenada $b_1,\ b_2,\ b_3$.

(c) A equação tem solução para todos os $b_1,\ b_2,\ b_3$ que pertençam ao plano $-3b_1 + b_3 = 0$.

(d) A equação tem solução para todos os $b_1,\ b_2,\ b_3$ pertençam ao plano $2b_1 + b_2 = 0$.

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 6
Descreva o conjunto solução do seguinte "sistema" homogéneo

$$-2x_1 - 14x_2 + 8x_3 = 0,$$

que consiste apenas duma equação linear. Dê a sua resposta na forma vectorial paramétrica, escolhendo x_2 e x_3 para variáveis livres.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

$$[-2 \quad -14 \quad 8 \,;\, 0] \sim [1 \quad 7 \quad -4 \,;\, 0]$$

1.0

x_2, x_3 livres 1.0

Forma paramétrica:

$x_1 = -7x_2 + 4x_3$
x_2 é livre
x_3 é livre

1.0

Forma vetorial paramétrica:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7x_2 + 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.0

$x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

Problema 7
Seja $\mathbf{p}$ uma solução para a equação matricial não-homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, i.e. $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$. Seja ainda $\mathbf{v}_h$ uma qualquer solução para a equação homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Finalmente, considere $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ e mostre que se trata também duma solução para a equação matricial não-homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Sugestão: use as propiedades do produto matriz-vetor.

Hipóteses: $A\underline{p} = \underline{b}$ e $A\underline{v}_h = \underline{0}$

$$\Downarrow$$

$$A\underline{u} \underset{\text{def. "}\underline{u}\text{"}}{=} A(\underline{p} + \underline{v}_h) \underset{\text{propriedade do produto}}{=} A\underline{p} + A\underline{v}_h$$

$$\underset{\text{Hipóteses}}{=} \underline{b} + \underline{0} \underset{\text{soma vetorial}}{=} \underline{b} \quad \blacksquare$$