Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 24 – Ondas electromagnéticas e óptica

Equação de onda e ondas electromagnéticas

- Condições fronteira do campo eléctromagnético
- Reflexão e transmissão das ondas em meios dieléctricos
  - Obtenção da Lei da reflexão e da Lei de Snell
  - Amplitudes das ondas reflectida e transmitida
- Equações de Fresnel
  - Obtenção do ângulo de Brewster e do ângulo crítico

Popovic & Popovic Cap. 22

Revisão: propriedades das ondas planas no vácuo

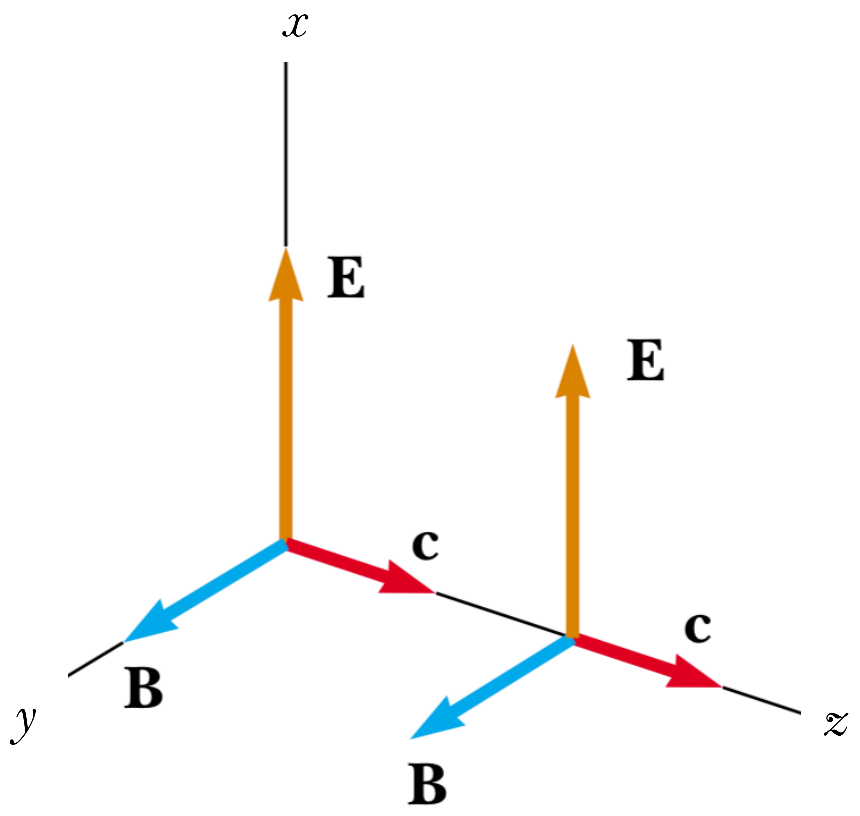
- $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{E} \perp \vec{e}_z$, $\vec{B} \perp \vec{e}_z$

- $\vec{P} \parallel \vec{e}_z$

- E_x e B_y são constantes em todo o espaço para um dado instante t

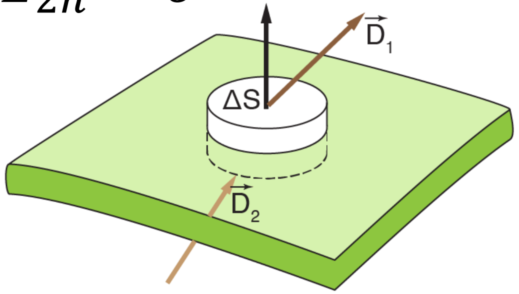
- Em qualquer ponto do espaço e instante de tempo: $E/B = c$

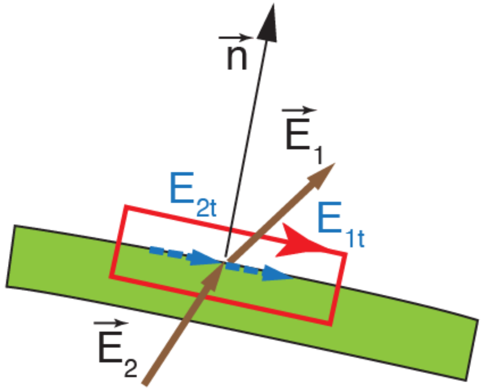
- Velocidade de propagação: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c$

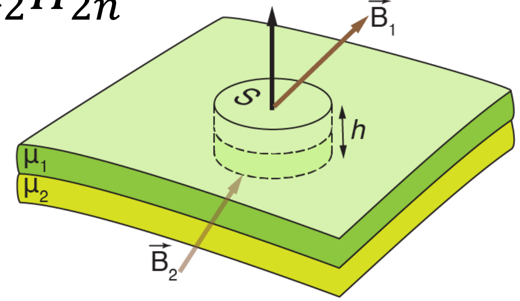


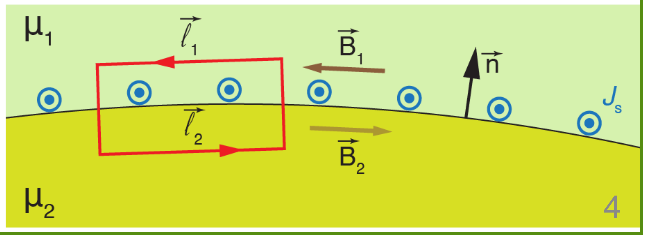
Revisão: condições fronteira do campo eléctrico e magnético

	Normal	**Tangencial**
Campo eléctrico	$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$ $\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma$	$E_{1t} = E_{2t}$
Campo magnético	$B_{1n} = B_{2n}$ $\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$	$H_{1t} - H_{2t} = J_s$









Condições fronteira para os campos com $\sigma = 0, J_s = 0$

	Normal	Tangencial
Campo eléctrico	$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t}$
Campo magnético	$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$
Definições auxiliares	Índ. refracção: $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$ Impedância: $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \mu \frac{c}{n}$ No vácuo: $n = 1$ $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3\times 10^8 \frac{m}{s}$ $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377\ \Omega$	

Reflexão e refracção das ondas e.m.

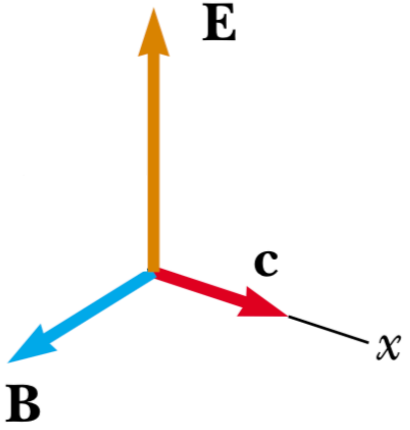
Considerem-se as três ondas da imagem, todas contidas no plano de incidência yOz. O plano de separação entre os meios 1 e 2 é xOy.

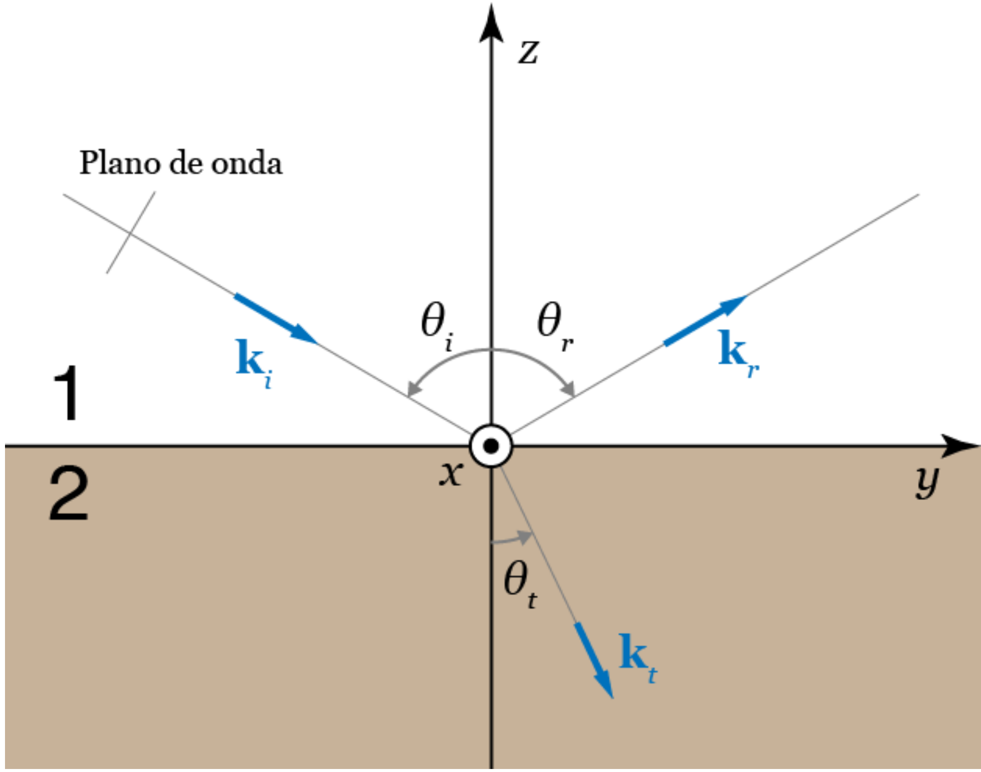
Onda incidente: $E_i(\vec{r},t) = E_{0i}\cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})$

Onda reflectida: $E_r(\vec{r},t) = E_{0r}\cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})$

Onda transmitida: $E_t(\vec{r},t) = E_{0t}\cos(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})$

O vector $\vec{H}(\vec{r},t)$ pode ser obtido através das direcções de cada um dos $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{k}$.





Reflexão e refracção das ondas e.m. e condições fronteira

1. Componentes tangenciais (com $\sigma = 0, J_s = 0$)

$$E_{1t}(\vec{r},t) = E_{2t}(\vec{r},t) \qquad H_{1t}(\vec{r},t) = H_{2t}(\vec{r},t)$$

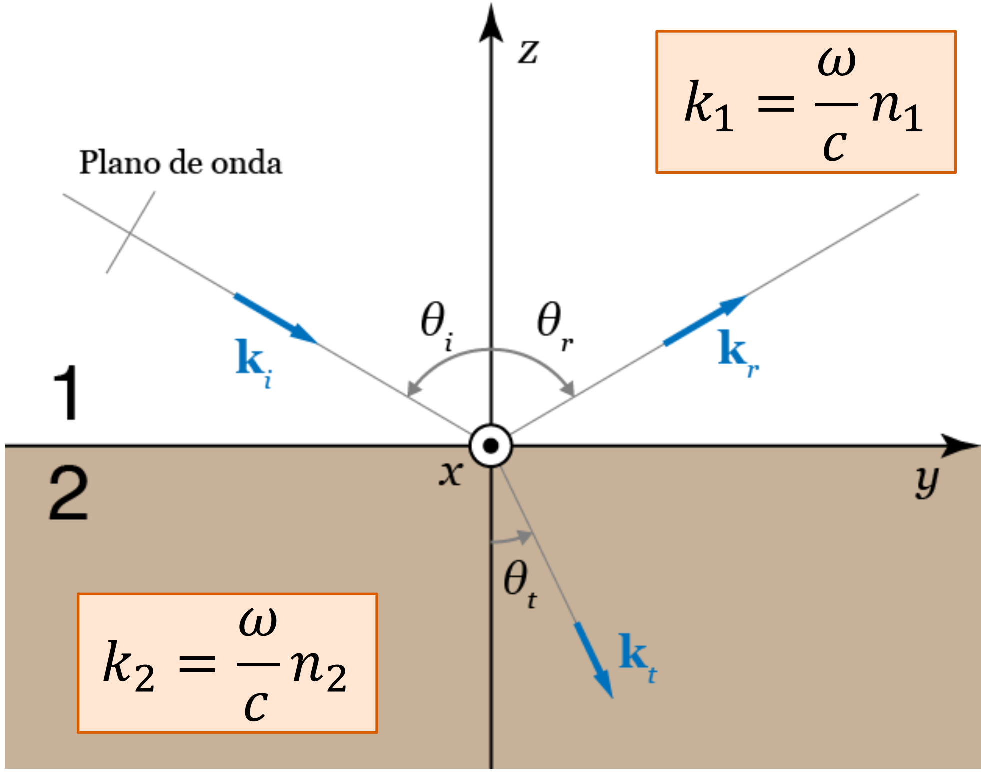
para (i,r,t) em $\vec{r} = (x,y,0)$ e para qualquer t.
A igualdade requer que as três **fases** sejam iguais:

$$\left(\vec{k}_i \cdot \vec{r}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}_r \cdot \vec{r}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}_t \cdot \vec{r}\right)_{z=0}$$

$$\left(\vec{k}_i \cdot \vec{r}\right)_{z=0} = k_1\left(\sin\theta_i\,\vec{e}_y - \cos\theta_i\,\vec{e}_z\right)\cdot(y,0) = k_1 \sin\theta_i\,\vec{e}_y$$

$$\left(\vec{k}_r \cdot \vec{r}\right)_{z=0} = k_1 \sin\theta_r\,\vec{e}_y$$

$$\left(\vec{k}_t \cdot \vec{r}\right)_{z=0} = k_2 \sin\theta_t\,\vec{e}_y$$



Reflexão e refracção das ondas e.m. e condições fronteira

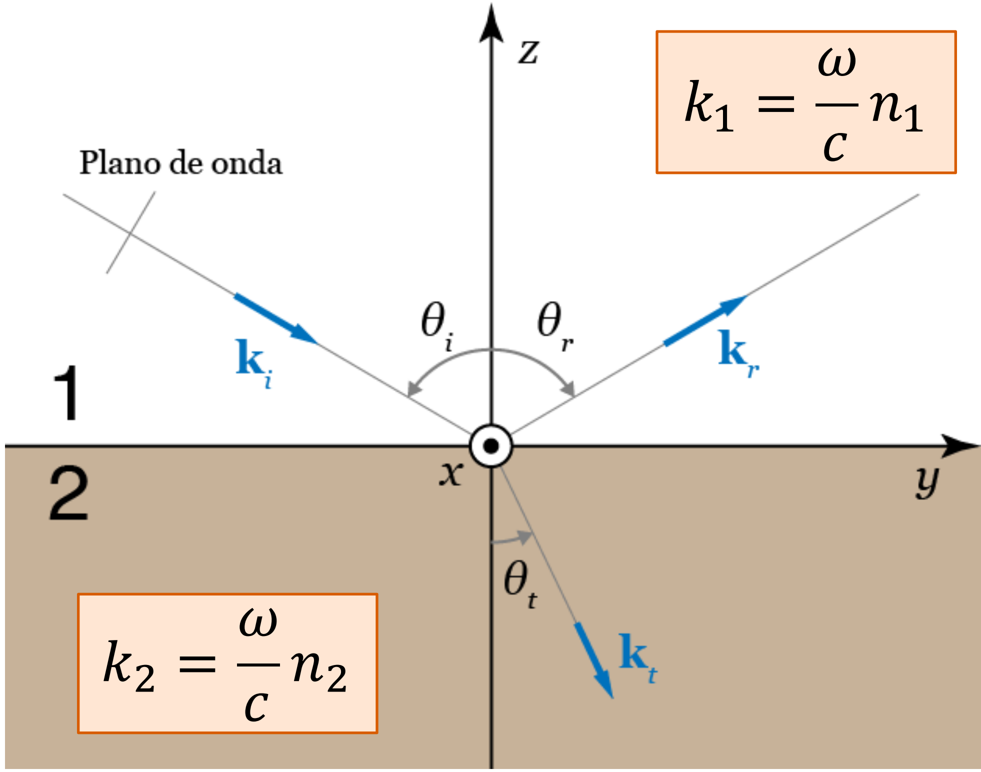
$$k_1 \sin\theta_i \, \vec{e}_y = k_1 \sin\theta_r \, \vec{e}_y = k_2 \sin\theta_t \, \vec{e}_y$$

Da primeira igualdade: **Lei da reflexão**

$$\boxed{\sin\theta_i = \sin\theta_r}$$

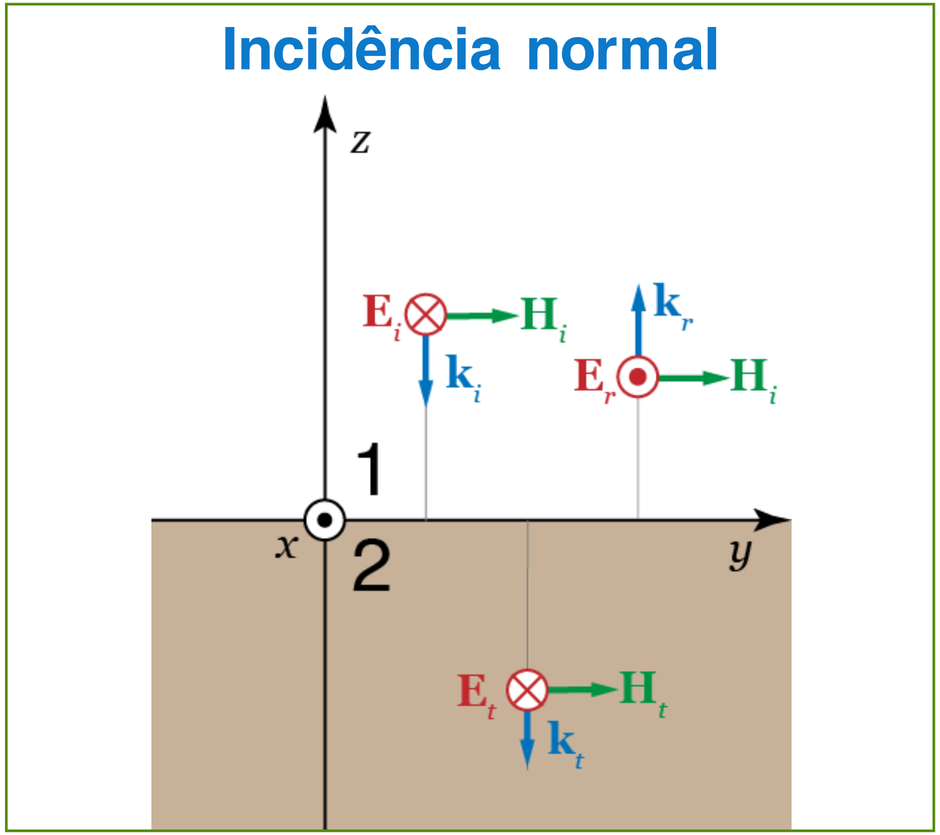
Da segunda igualdade: **Lei de Snell**

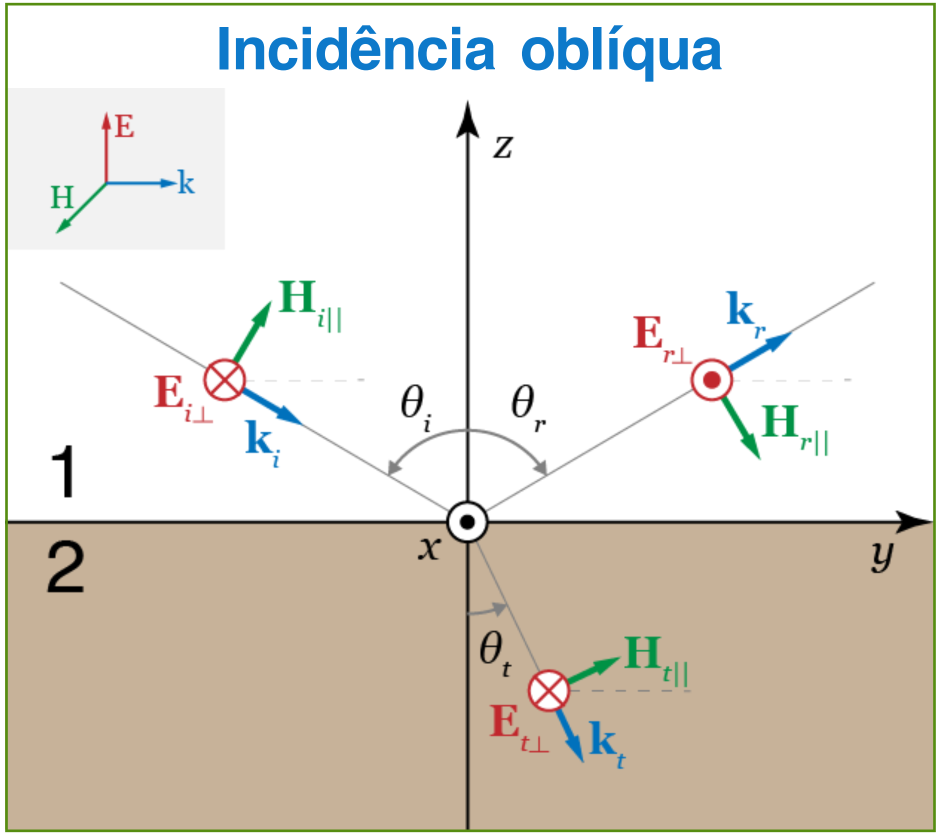
$$\boxed{n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t}$$



Amplitudes das ondas reflectida e transmitida

É preciso considerar duas situações distintas:





Amplitudes das ondas reflectida e transmitida: incidência normal

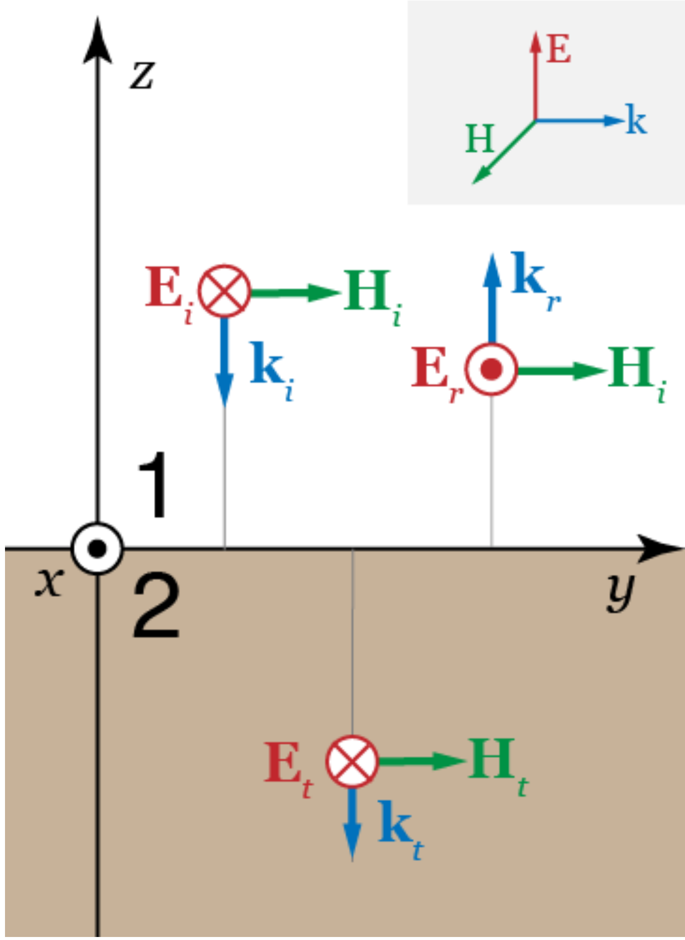
- $\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$
- Campos no meio 1: $\vec{E}_i + \vec{E}_r, \quad \vec{H}_i + \vec{H}_r$
- Campos no meio 2: $\vec{E}_t, \quad \vec{H}_t$
- $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{H}(\vec{r},t)$ são puramente **transversais**:

$$E_{1t}(\vec{r},t) = E_{2t}(\vec{r},t) \qquad H_{1t}(\vec{r},t) = H_{2t}(\vec{r},t)$$

Igualando as **amplitudes** e tendo em conta as direcções dos vectores em cada meio:

$$E_{0i} - E_{0r} = E_{0t}$$

$$H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \Leftrightarrow \frac{E_{0i}}{Z_1} + \frac{E_{0r}}{Z_1} = \frac{E_{0t}}{Z_2}$$



Amplitudes das ondas reflectida e transmitida: incidência normal

Resolvendo o sistema de duas equações:

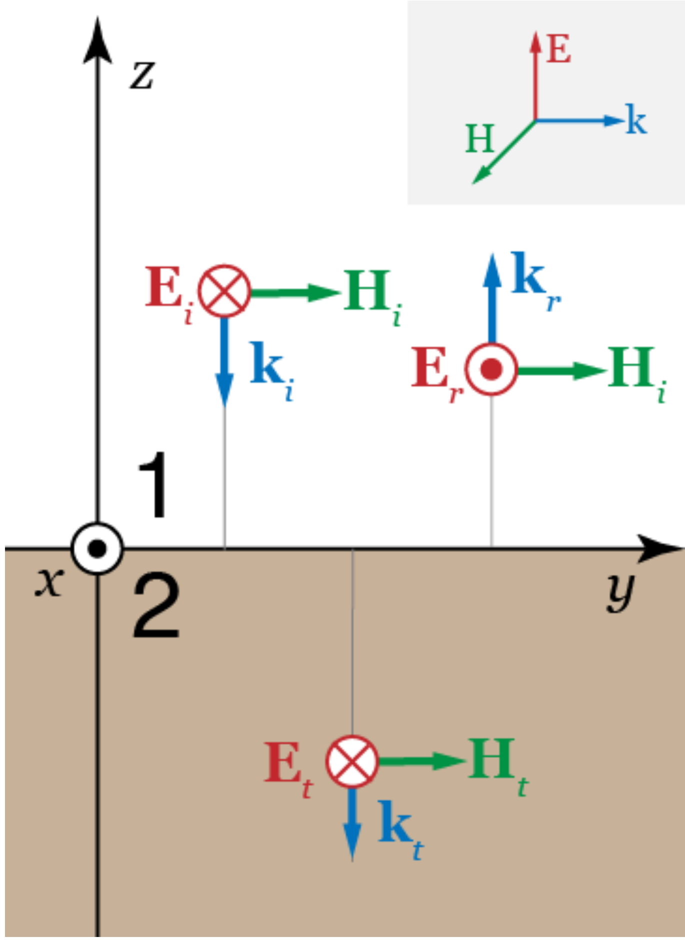
$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = 1 - \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$$

Usando $Z = \mu c/n$ e $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$

$$\boxed{\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}} \qquad \boxed{\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}}$$

Coeficiente de amplitude de reflexão

Coeficiente de amplitude de transmissão



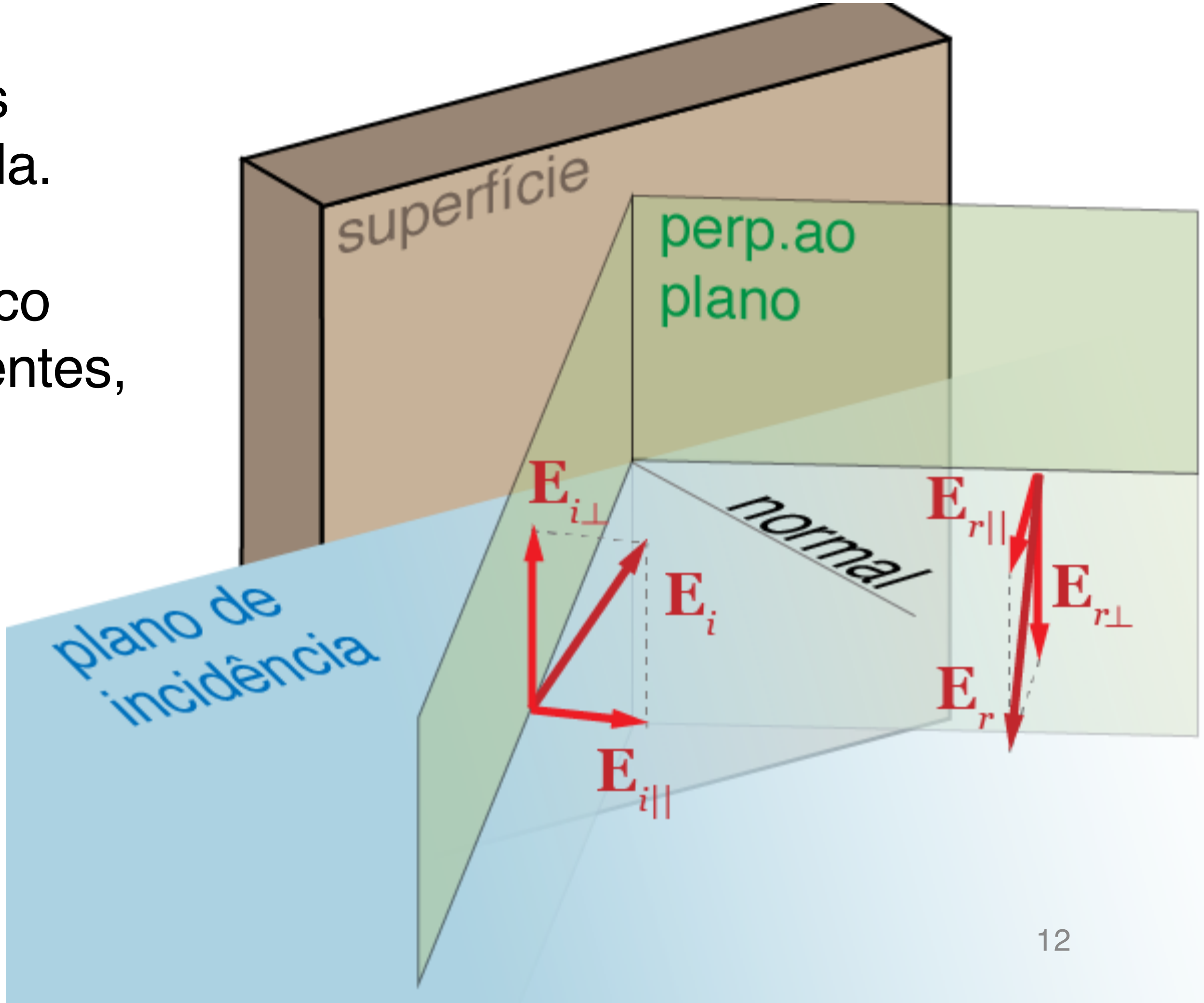
Amplitudes das ondas reflectida e transmitida: incidência oblíqua

Quando a onda incide obliquamente à superfície, a orientação dos vectores dos campos depende da **polarização** da onda.

Pode escrever-se o vector campo eléctrico como a soma vectorial de duas componentes, relativamente ao plano de incidência:

- **Paralela** ao plano: $E_{\parallel}$
- **Perpendicular** ao plano: $E_{\perp}$

Esta decomposição tem a vantagem de usar a mesma referência para i, r, t.



Componentes do campo eléctrico

Para qualquer orientação do campo eléctrico da onda incidente, consideramos

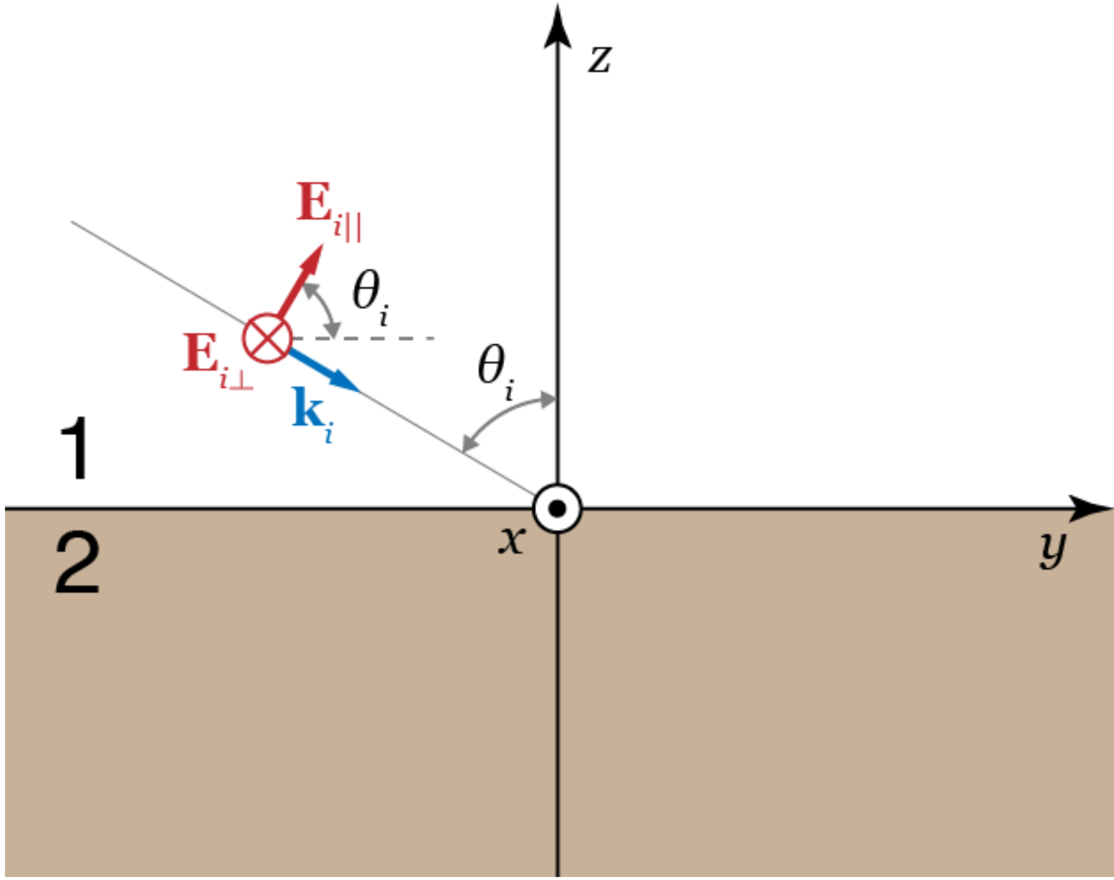
$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i||} + \vec{E}_{i\perp}$$

$\vec{E}_{i||}$ = comp. de $\vec{E}$ no plano de incidência

- $E_{it} = E_{i||} \cos\theta_i$ campo $\vec{E}$ tangencial
- $E_{in} = E_{i||} \sin\theta_i$ campo $\vec{E}$ normal

$\vec{E}_{i\perp}$ = comp. de $\vec{E}$ perp. ao plano de incidência

- $E_{it} = E_{i\perp}$ campo $\vec{E}$ tangencial



Campo eléctrico polarizado perpendicularmente (polarização-*s*)

Aplicando as condições de continuidade tangencial:

$$E_{0i\perp} - E_{0r\perp} = E_{0t\perp}$$

$$H_{0i||}\cos\theta_i + H_{0r||}\cos\theta_r = H_{0t||}\cos\theta_t$$

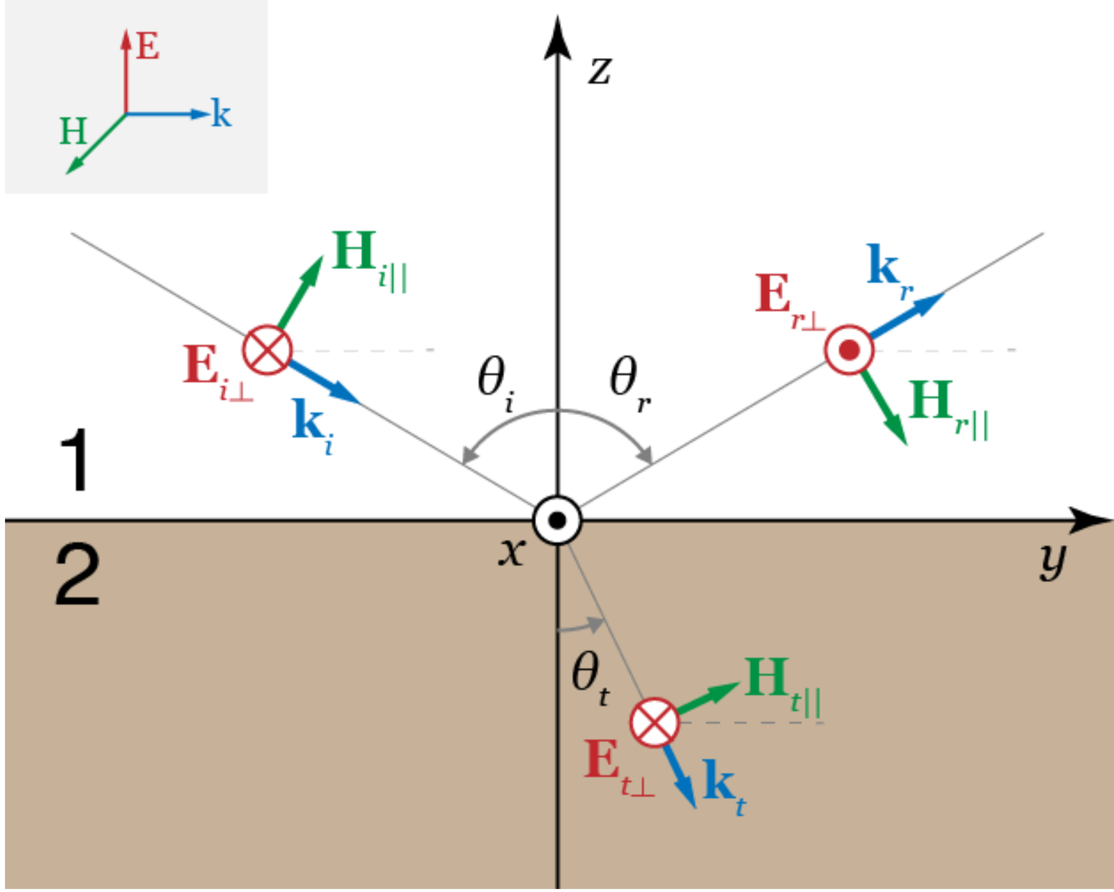
$$\Leftrightarrow \frac{E_{0i\perp}}{Z_1}\cos\theta_i + \frac{E_{0r\perp}}{Z_1}\cos\theta_r = \frac{E_{0t\perp}}{Z_2}\cos\theta_t$$

Resolvendo:

Coeficientes de amplitude de reflexão e transmissão

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = -\frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$



Campo eléctrico polarizado paralelamente (polarização-*p*)

Aplicando as condições de continuidade tangencial:

$$E_{0i\parallel}\cos\theta_i - E_{0r\parallel}\cos\theta_r = E_{0t\parallel}\cos\theta_t$$

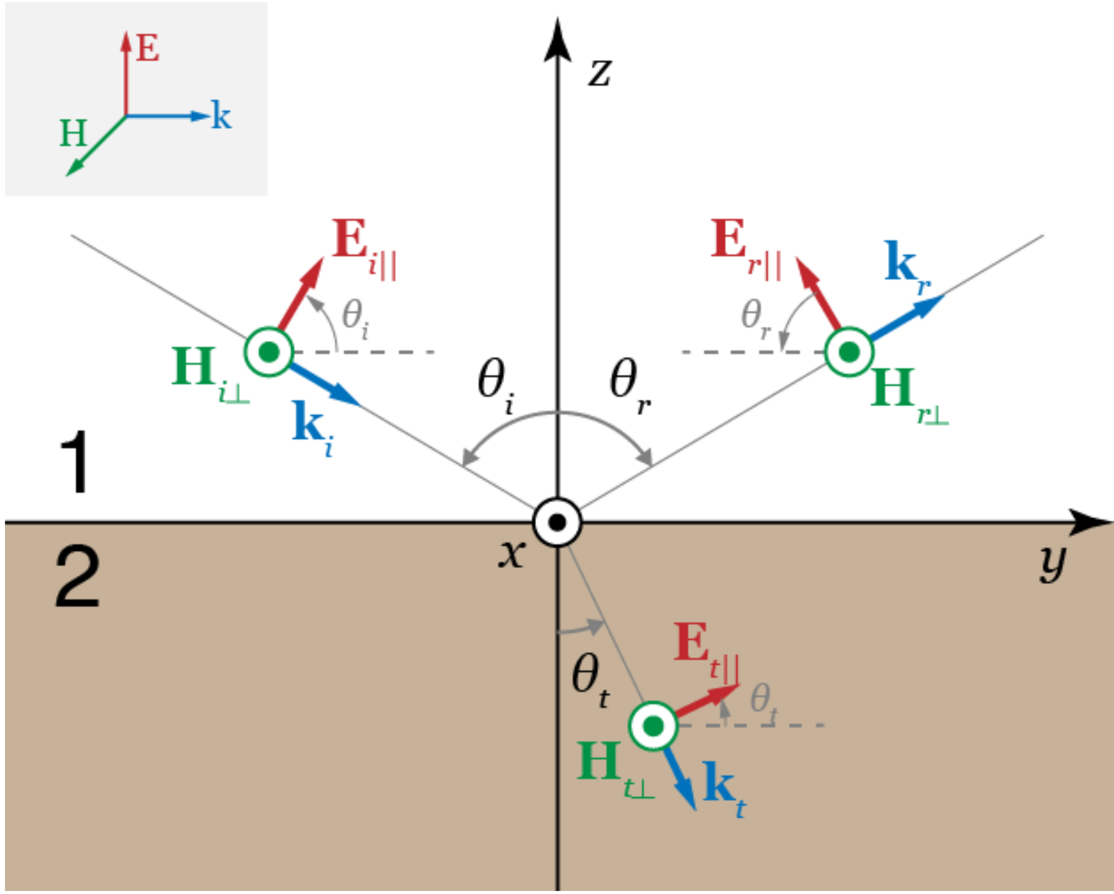
$$H_{0i\perp} + H_{0r\perp} = H_{0t\perp}$$
$$\Leftrightarrow \frac{E_{0i\parallel}}{Z_1} + \frac{E_{0r\parallel}}{Z_1} = \frac{E_{0t\parallel}}{Z_2}$$

Resolvendo:

Coeficientes de amplitude de reflexão e transmissão

$$\boxed{\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}}$$

$$\boxed{\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}}$$



Equações de Fresnel para os coeficientes de reflexão e transmissão

Polarização perpendicular

$$r_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = -\frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}$$

$$t_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}$$

Polarização paralela

$$r_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

$$t_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

Incidência normal $(\boldsymbol{\theta_i = \theta_r = \theta_r = 0})$

$$r_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$t_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

Reflectância e transmitância

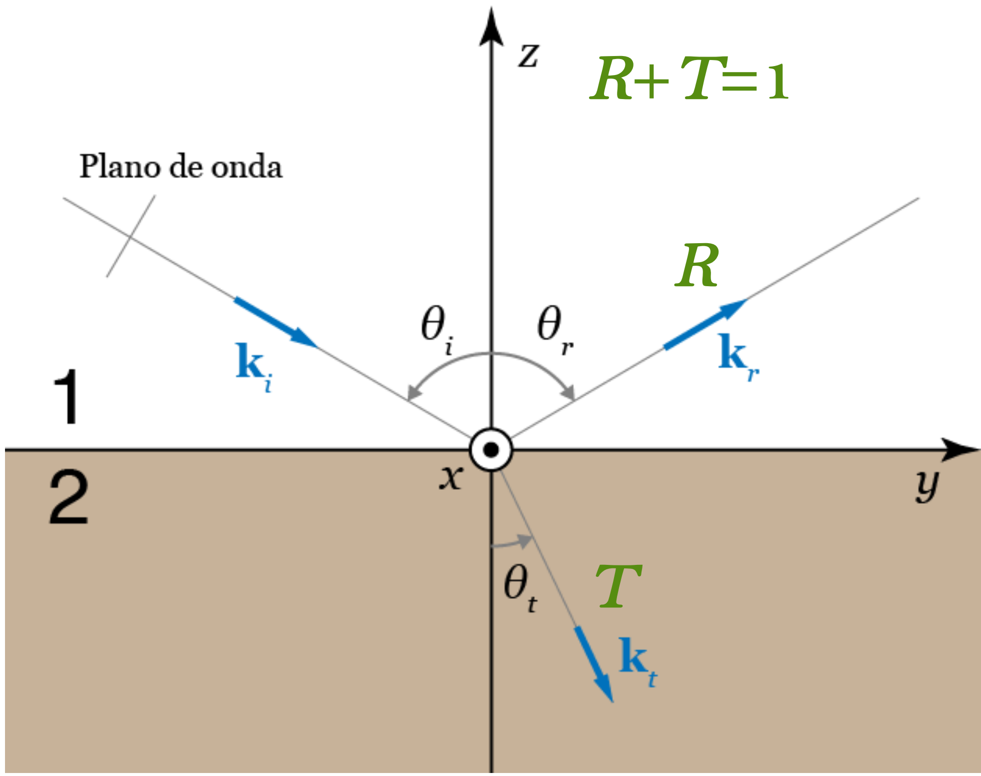
Em termos práticos, interessa medir a fracção de **intensidade** luminosa reflectida ou transmitida. Define-se:

Reflectância $R = |r|^2$

Transmitância* $T = 1 - R$

(*usando a conservação de energia, $T + R = 1$)

(NB a relação entre T e t é $T = \dfrac{n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i}\,|t|^2$ porque a onda muda de meio e de direcção)



Caso particular 1: polarização por reflexão

Considere-se o coef. reflexão para pol. paralela,

$$r_{\parallel} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

Para $n_1 < n_2$ (por exemplo, ar→vidro), tem-se $\theta_t < \theta_i$. Existe assim uma solução $R_{\parallel} = \left|r_{\parallel}\right|^2 = 0$ para

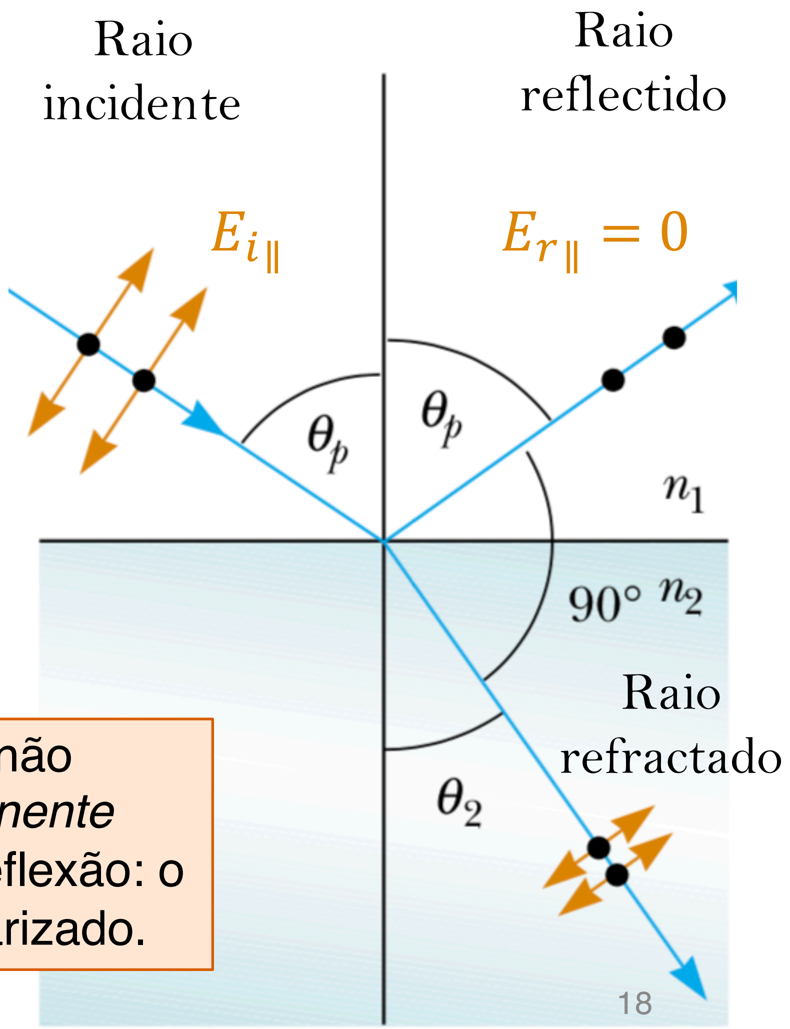
$$n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t = 0$$

Com a ajuda da Lei de Snell obtém-se

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \qquad \theta_i = \boxed{\tan^{-1}\frac{n_2}{n_1} \equiv \theta_B}$$

Ângulo de Brewster

Para $\theta_i = \theta_B$ não existe *componente paralela* na reflexão: o feixe fica polarizado.



Caso particular 2: reflexão interna total

Para $n_2 < n_1$ (p. ex. vidro→ar), tem-se $\theta_t > \theta_i$. Existe assim uma solução $\theta_t = 90°$ para a qual

$$r_\perp = -\frac{n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i} = -1 \qquad r_\parallel = \frac{n_2 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i} = 1$$

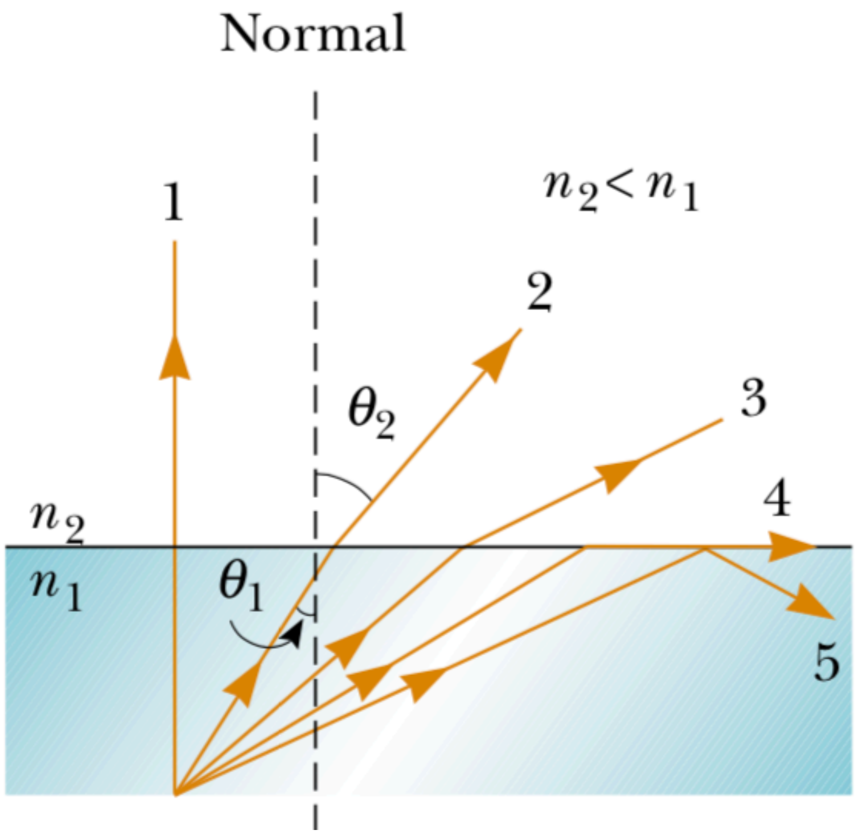
Assim, para qualquer polarização obtém-se

$$R = |r|^2 = 1 \qquad T = 1 - R = 0$$

A onda é totalmente reflectida de volta ao meio de maior índice de refracção. Para esse ângulo:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin 90° \Leftrightarrow \theta_i = \boxed{\sin^{-1}(n_2/n_1) \equiv \theta_c}$$

Ângulo crítico



Para $n_1 > n_2$ e para $\theta_i > \theta_c$ não existe luz transmitida: o feixe é totalmente reflectido.

19

Exemplo: reflectância para fronteira entre ar ($n = 1$) e vidro ($n \approx 1.5$)