CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
1º TESTE (Versão A)

18 /Abril /2009 — Duração: 1h30m

I

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x-1}{x} \geq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x+2|}{x^2-1} \leq 0 \right\}, \qquad C = \{ x \in \mathbb{R} : \log x = 1 \}$$

1. Mostre que $A \cap B =]-1, 0[$.

2. Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\inf(A \cap B)$, $\sup A$, $\min B$, $\min((A \cap B) \cup C)$, $\max((A \cap B) \cup C)$ e $\sup(A \cap B \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{\sqrt{n} - n^3}{n + 4n^3 + 2}, \qquad \lim \left(1 - \frac{2}{n!}\right)^{n!}, \qquad \lim \frac{\pi + n \sin n}{n^2 + 1}, \qquad \lim \sqrt[n]{n + 2^n}$$

2. Mostre por indução que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} 9k4^{k-1} = 1 + 4^n (3n - 1)$$

III

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+2}-1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ \frac{x-1}{1+e^{-x}} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estude o sinal de f e determine os seus zeros.

b) Justificando, diga se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 1.

c) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

d) A função f é majorada? E minorada? Justifique a resposta.

IV

Seja φ uma função contínua no ponto 0. Se

$$g(x) = \varphi(1 - \sin x)$$

em que pontos pode garantir que a função g é contínua? Justifique.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{o}}$ TESTE (Versão B)

18 /Abril /2009 Duração: 1h30m

I

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2+x-4}{x}\le 1\right\},\qquad B=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{|x-3|}{x^2-4}\le 0\right\},\qquad C=\{x\in\mathbb{R}:\log x=2\}$$

1. Mostre que $A\cap B=\,]0,2[$.
2. Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup(A\cap B)$, $\inf A$, $\max B$, $\min((A\cap B)\cup C)$, $\max((A\cap B)\cup C)$ e $\sup(A\cap B\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim\frac{n\sqrt{n}+n^4}{1-2n^4-3n},\qquad \lim\left(1+\frac{\pi}{n^2}\right)^{n^2},\qquad \lim\frac{1-n\cos n}{n^3+1},\qquad \lim\sqrt[n]{n+3^n}$$

2. Mostre por indução que se tem, para todo o $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}4k3^{k-1}=1+3^n\,(2n-1)$$

III

Considere a função $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases}\frac{e^{x+2}-1}{x+1} & \text{se } x<-1\\[2ex] \frac{x+1}{1+e^{-x}} & \text{se } x\ge -1\end{cases}$$

a) Estude o sinal de g e determine os seus zeros.
b) Justificando, diga se g é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto -1.
c) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.
d) A função g é majorada? E minorada? Justifique a resposta.

IV

Seja ψ uma função contínua no ponto 0. Se

$$f(x)=\psi(1-\cos x)$$

em que pontos pode garantir que a função f é contínua? Justifique.