Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

6^a Ficha de exercícios para as aulas práticas: 6 - 10 Novembro de 2006

1. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

   (i) $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ **(ii)** $\lim_{x\to -\infty} \frac{|x-1|}{x-1}$ **(iii)** $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$ **(iv)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$

   (v) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ **(vi)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$ **(vii)** $\lim_{x\to 0} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ **(viii)** $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{sen} 2x \arccos x}$

   (ix) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\cos e^x}{x^2+1}$ **(x)** $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ **(xi)** $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ **(xii)** $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

   (xiii) $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ **(xiv)** $\lim_{x\to +\infty} 3x^6 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)^3$ **(xv)** $\lim_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Suponha que existe uma sucessão $(x_n) \subset [a, b]$ tal que $\lim f(x_n) = 0$. Mostre que f tem pelo menos um zero em $[a, b]$.

3. Justifique que, se f é uma função limitada em $\mathbb{R}$, para qualquer sucessão $(x_n) \subset \mathbb{R}$, a sucessão $f(x_n)$ tem pelo menos uma subsucessão convergente.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua no ponto 0 e seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$ uma sucessão convergente. Determine, justificando, $\lim f(x_{3n} - x_{2n})$.

5. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$ uma sucessão convergente tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

   $$a_{2n} > 2 \qquad \text{e} \qquad a_{2n+1} < 2.$$

   (i) Determine, justificando, $\lim a_n$.

   (ii) Existirá alguma função f, contínua em 0 e tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, verifique a igualdade $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n a_n$?

6. Seja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0, 1]$. Justifique que:

   (i) não existe qualquer sucessão $(x_n) \subset [0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$;

   (ii) se existe uma sucessão $(x_n) \subset [0, 1]$ tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$. Mostre que:

   (i) $c \in \mathbb{Z}$;

   (ii) existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, para todo o $x > \alpha$.

8. Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$ uma sucessão monótona. Mostre que $\operatorname{arctg} x_n$ é uma sucessão convergente.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right),$$
para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(i) Se existirem, em $\mathbb{R}$, os limites laterais $f\left(0^+\right)$ e $f\left(0^-\right)$ quanto valerá a sua soma? Justifique.

(ii) Se existir, em $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{f(x)}{x} > 0$, para todo o $x \neq 0$. Determine, justificando, $\lim_{x \to 0} f(x)$.

11. Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x) = \frac{x-2}{x+1},$$
para todo o $x \in]-1, 1[$.

(i) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ e $\lim_{x \to -1} f(x)$.

(ii) Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada ou minorada e se tem máximo ou mínimo em $]-1, 1[$.

(iii) Se $(x_n) \subset]-1, 1[$ fôr tal que $\lim x_n = 1$, qual será o valor de $\lim f(x_n)$? Justifique.

(iv) Dê um exemplo de uma sucessão $(y_n) \subset]-1, 1[$ tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

12. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \log\left(1 + e^x\right), \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x \operatorname{sen} x^2,$$
para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(i) Diga, justificando, se f e g são majoradas, minoradas, limitadas (em $\mathbb{R}$).

(ii) A função g tem máximo em $\mathbb{R}$? Qual é o seu supremo? Justifique.

(iii) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)\, g(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)\, g(x)$. Justifique.

13. **(i)** Para cada $x \in \mathbb{R}$, determine
$$\lim \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}.$$

(ii) Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \left(x^2 - 1\right) \lim \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 1 - x^2 & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$
para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(a) Estude f e g quanto à continuidade.

(b) Esboce os gráficos de f e g e indique, justificando, os seus extremos locais e absolutos (se existirem) e contradomínios.

14. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \lim \frac{1 + x^{2n}}{1 - x^{2n-1}}, \qquad\qquad g(x) = |f(x)|,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(i) Estude f e g quanto à continuidade e diga se são prolongáveis por continuidade ao ponto 1.

(ii) Esboce os gráficos de f e g e indique, justificando, os seus extremos locais e absolutos (se existirem) e contradomínios.

15. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} g(x), \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}, \qquad \text{com} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(i) Indique o contradomínio de f. A função f é majorada (em $\mathbb{R}$)? e minorada? Justifique.

(ii) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Justifique.

(iii) Estude f quanto à continuidade.

16. Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua no ponto 1 e definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1, \\ \operatorname{arcsen} x & \text{se } -1 < x < 1, \\ k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

(i) Determine k.

(ii) Estude f quanto à continuidade.

(iii) Indique o contradomínio de f. A função f é majorada (em $\mathbb{R}$)? minorada? tem supremo? máximo? ínfimo? mínimo? Justifique. Em caso de existência determine os seus valores.

(iv) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

17. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(i) Estude f quanto à continuidade e determine, justificando, os valores de k para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(ii) Sendo F o prolongamento de f por continuidade ao ponto 0, determine $F(\mathbb{R})$, isto é, o contradomínio de F. Justifique.

18. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0, \\ \\ x(2-x) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(i) Estude f quanto à continuidade e determine, justificando, os valores de k para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(ii) Sendo F o prolongamento de f por continuidade ao ponto 0, determine $F(\mathbb{R})$, isto é, o contradomínio de F. Justifique.

19. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0, \\ \\ (x+k)(x+2) & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(i) Estude f quanto à continuidade e determine, justificando, os valores de k para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(ii) Sendo F o prolongamento de f por continuidade ao ponto 0, determine $F(\mathbb{R})$, isto é, o contradomínio de F. Justifique.

20. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \dfrac{k}{x}\right) & \text{se } x > 1, \\ \\ 1 - x^2 & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(i) Estude f quanto à continuidade e determine, justificando, os valores de k para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(ii) Sendo F o prolongamento de f por continuidade ao ponto 0, determine $F(\mathbb{R})$, isto é, o contradomínio de F. Justifique.

21. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} & \text{se } x > 0, \\ \\ k(x+1)^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(i) Estude f quanto à continuidade e determine, justificando, os valores de k para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(ii) Sendo F o prolongamento de f por continuidade ao ponto 0, determine $F(\mathbb{R})$, isto é, o contradomínio de F. Justifique.

22. Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2(x+1)}\right) & \text{se } x > 0, \\ \\ (x+1)^2 - k & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(i) Estude f quanto à continuidade e determine, justificando, os valores de k para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(ii) Sendo F o prolongamento de f por continuidade ao ponto 0, determine $F(\mathbb{R})$, isto é, o contradomínio de F. Justifique.

23. Considere as funções $f, g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad g(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(i) Estude f e g quanto à continuidade e diga se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(ii) Mostre que as funções f e g são limitadas.

24. Considere a função $f : [0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1},$$

para todo o $x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$.

(i) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(ii) Dê exemplos de sucessões (x_n) e (y_n), com $(x_n), (y_n) \subset [0,1[\cup]1,+\infty[$, tais que (x_n) e $f(y_n)$ sejam convergentes e $f(x_n)$ e (y_n) sejam divergentes.

25. Considere as funções $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \log\log(1+x), \qquad g(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2},$$

para todo o $x \in]0, +\infty[$.

(i) Estude f e g quanto à continuidade e diga se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(ii) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(iii) Determine, justificando, o contradomínio de f.

26. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Estude f quanto à continuidade.

(ii) Verifique que f é monótona em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Sê-lo-á também na reunião desses dois intervalos? Justifique.

(iii) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(iv) Determine, justificando, o contradomínio de f.

27. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -e^{1/x} & \text{se } x < 0, \\ \log\dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(ii) Estude f quanto à continuidade e diga se é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(iii) Sendo F o prolongamento de f por continuidade ao ponto 0, justifique que F tem máximo e mínimo em qualquer intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} F(x)$.

28. Seja $a \in \mathbb{R}$. Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua em $[a, +\infty[$ e suponha que existe $b \in [a, +\infty[$ tal que, para todo o $x > b$, se tem $f(x) < f(a)$. Mostre que f tem máximo em $[a, +\infty[$.

29. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ tal que $f(x) \neq 0$, para todo o $x \in [a, b]$. Mostre que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$\alpha \leq f(x)\, f(y) \leq \beta,$$

para todos os $x, y \in [a, b]$.

30. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua em $[0, +\infty[$.

(i) Mostre que a função $g(x) = f(1 - x^2)$ tem máximo e mínimo.

(ii) Se em vez de $[0, +\infty[$ considerássemos f definida e contínua no intervalo $]0, +\infty[$, poderíamos continuar a garantir a existência de máximo e mínimo para g? Justifique.

31. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a, b]$.

(i) Mostre que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq (f(x) + g(x))^2 \leq \beta$, para todo o $x \in [a, b]$.

(ii) Mostre que, se existirem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) > g(x_1)$ e $f(x_2) < g(x_2)$, a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução em $[a, b]$.

(iii) Quais das proposições expressas nas alíneas **(i)** e **(ii)** continuariam a ser verdadeiras se, em vez do intervalo fechado $[a, b]$ considerássemos o intervalo aberto $]a, b[$? Justifique.

32. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}^+$ e $f(0) < 0$. Mostre que:

(i) a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas raízes reais;

(ii) existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(iii) dê um exemplo de uma função que verifique as condições anteriores do enunciado, exceptuando a continuidade em $\mathbb{R}$ que é substituída pela continuidade em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$, e para a qual as afirmações **(i)** e **(ii)** sejam falsas.

33. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ contínua em $]a, b[$ e tal que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty.$$

Mostre que existe uma e uma só função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e tal que $g(x) = \operatorname{arctg}(f(x))^2$, para todo o $x \in]a, b[$. Determine o contradomínio de g. Justifique.

34. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

35. Mostre que uma função definida e contínua num intervalo, é injectiva se e só se fôr estritamente monótona.

36. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Mostre que a equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução em $[a, b]$.

37. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(i) f é limitada;

(ii) supondo que $\lim_{x\to-\infty} f(x) \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}^-$, diga, justificando, qual é o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + (f(x))^2}.$$