CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEE, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{0}}$ TESTE (Versão A)

13 /Novembro /2010 — Duração: 1h30m

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-3x^2}{x} \leq 1 - 3x \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < e^x \leq 5\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 3\}$$

a) Identifique os conjuntos A, B e C, escrevendo-os sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos.

Resolução:

$$\frac{1-3x^2}{x} \leq 1 - 3x \Longleftrightarrow \frac{1-3x^2-x+3x^2}{x} = \frac{1-x}{x} \leq 0.$$

Dado que

		0		1	
$1-x$	$+$	//	$+$	0	$-$
x	$-$	//	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{x}$	$-$	//	$+$	0	$-$

concluímos que

$$A =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[\,.$$

Porque

$$1 < e^x \leq 5 \Longleftrightarrow 0 = \log 1 < x \leq \log 5,$$

vem $B =]0, \log 5]$.
Finalmente,

$$|x+2| \leq 3 \Longleftrightarrow -3 \leq x + 2 \leq 3 \Longleftrightarrow -5 \leq x \leq 1$$

e $C = [-5, 1]$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap C)$ e $\sup(A \cap C \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
Resolução:
$\sup A$ não existe (A não é conjunto majorado), $\inf B = 0$, $\min(A \cap B) = \min\,[1, \log 5] = 1$, $\max(A \cap C) = \max\,[-5, 0[\cup \{1\} = 1$ e $\sup(A \cap C \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \sup([-5, 0[\cup \{1\}) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \sup\,[-5, 0[\cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = 0$.

c) Decida, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:
(i) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em A é não majorada.
Resolução:

Falso. Por exemplo, a sucessão $a_n = 2 - \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$ é estritamente crescente de termos em A e é majorada.

(ii) Toda a sucessão estritamente decrescente de termos em C é convergente.

Resolução:

Verdadeiro: toda a sucessão estritamente decrescente de termos em C é monótona e limitada, logo é convergente.

(iii) Toda a sucessão de termos em B tem um sublimite.

Resolução:

Verdadeiro: Como B é conjunto limitado, toda a sucessão de termos em B é limitada, logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass tem (pelo menos) um sublimite.

(iv) Se (x_n) é sucessão de termos em C, então $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 0$.

Resolução:

Verdadeiro: Como C é conjunto limitado, a sucessão x_n é limitada e o produto de uma sucessão limitada por um infinitésimo é um infinitésimo.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{n+1} \qquad \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Mostre por indução que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq a_n \leq 2$$

e conclua que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq a_n \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

Resolução:

(i) O resultado é verdadeiro para $n = 1$:

$$1 \leq a_1 = 1 \leq 2$$

(ii) Supondo que o resultado é verdadeiro para n, isto é, que se tem $1 \leq a_n \leq 2$, vem

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{a_n}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{a_n}{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1}$$

Como

$$1 \leq 1 + \frac{1}{n+1} \text{ e } 1 + \frac{2}{n+1} \leq 1 + \frac{2}{1+1} = 2$$

conclui-se que

$$1 \leq a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{n+1} \leq 2$$

e o resultado é verdadeiro para $n + 1$.

Provámos assim, por indução, que

$$1 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por fim, se $n \geq 2$ e de acordo com o resultado obtido,

$$1 \leq a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{(n-1)+1} = 1 + \frac{a_{n-1}}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

Além disso, o resultado é trivialmente verificado por a_1 e, portanto,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq a_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$

b) Justifique que a sucessão (a_n) é convergente e indique o valor do seu limite.

Resolução:

De alínea a), sabemos que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq a_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$

Como a sucessão constante igual a 1 converge e tem limite igual a 1 e $\lim 1 + \frac{2}{n} = 1$, o teorema das sucessões enquadradas garante que a_n é sucessão convergente e $\lim a_n = 1$.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{2n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 - 3n^2}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{e^n + 3^n}{n+3}}$$

Resolução:

$$\lim \frac{2n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 - 3n^2} = \lim \frac{2 + \frac{\sqrt{n}}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - 3} = -\frac{2}{3}$$

Designando $\frac{e^n+3^n}{n+3} = a_n$, vem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{n+1}+3^{n+1}}{n+1+3}}{\frac{e^n+3^n}{n+3}} = \frac{n+3}{n+4} . \frac{e^{n+1} + 3^{n+1}}{e^n + 3^n} = \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n}} . \frac{e(\frac{e}{3})^n + 3}{(\frac{e}{3})^n + 1}$$

Porque $\left|\frac{e}{3}\right| < 1$, sabe-se que $\lim(\frac{e}{3})^n = 0$. Assim, $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ e, portanto,

$$\lim \sqrt[n]{\frac{e^n + 3^n}{n+3}} = 3.$$

2. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos(1/x)}{x^3 + \pi}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$$

Resolução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+\pi} = 0 \text{ e } \cos(1/x) \text{ é função limitada em } \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(1/x)}{x^3+\pi} = 0.$$

Sabendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ e dado que $x+1 \neq 0$ numa vizinhança do ponto 1 (por exemplo em $]0,2[$), tem-se

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sin(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \cdot \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

III

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ \\ \frac{x-2}{1+e^{-x}} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estude o sinal de f e determine os seus zeros.

Resolução:
Em $]-\infty, 2[$, tem-se

$$x^2+4 > 0 \text{ e } x-2 < 0$$

logo $f(x) < 0$.
Por outro lado, se $x \in]2, +\infty[$, $x-2 > 0$;como $1+e^{-x} > 1$,para todo o $x \in \mathbb{R}$, vem $f(x) > 0$. Finalmente, $f(2) = 0$.

b) Justificando, diga se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 2.

Resolução:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{1+e^{-x}} = 0 = f(2)$$

e

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+4}{x-2} = -\infty.$$

Então, no ponto 2, f é contínua à direita e não é contínua à esquerda, pelo que é descontínua em $x = 2$.

c) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+4}{x-2} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{1+e^{-x}} = +\infty$$

d) Determine o conjunto $f([2,+\infty[)$. Justifique a resposta.

Resolução:

Dado que f é contínua em $[2,+\infty[$ (quociente de duas funções contínuas), o teorema do valor intermédio assegura que o conjunto $f([2,+\infty[)$ é um intervalo. De a), $f([2,+\infty[) \subset [0,+\infty[$; de c), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Assim, $f([2,+\infty[) = [0,+\infty[$.

2. Seja g uma função definida em $\mathbb{R}$ que verifica

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad g(1+\cos\frac{1}{n}) = [(-1)^n + 1]\arctan n.$$

A função g é contínua no ponto $x = 2$? Justifique a sua resposta.

Resolução:

Uma vez que $\lim(1+\cos\frac{1}{n}) = 2$, se g é função contínua no ponto $x = 2$, deverá ter-se $\lim g(1+\cos\frac{1}{n}) = g(2)$.

Ora, com $a_n = g(1+\cos\frac{1}{n})$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{2n} = 2\arctan(2n) \quad \wedge \quad a_{2n+1} = 0$$

e, portanto,

$$\lim a_{2n} = 2\lim\arctan(2n) = 2\frac{\pi}{2} = \pi \quad \wedge \quad \lim a_{2n+1} = 0.$$

Então, $g(1+\cos\frac{1}{n})$ é uma sucessão divergente e, consequentemente, a função g não é contínua no ponto $x = 2$.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEE, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{o}}$ TESTE (Versão B)

13 /Novembro /2010 Duração: 1h30m

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-2x^2}{x} \leq 1 - 2x \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \log x < 2\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq 2\}$$

a) Identifique os conjuntos A, B e C, escrevendo-os sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\sup B$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap C)$ e $\sup(A \cap C \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
c) Decida, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:
(i) Toda a sucessão estritamente decrescente de termos em A é não minorada.
(ii) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em C é convergente.
(iii) Toda a sucessão de termos em B tem um sublimite.
(iv) Se (x_n) é sucessão de termos em C, então $\lim \frac{x_n}{1+n} = 0$.

2. Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 1 + \dfrac{b_n}{2n} \qquad \text{se } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Mostre por indução que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq b_n \leq 2$$

e conclua que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 \leq b_n \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

b) Justifique que a sucessão (b_n) é convergente e indique o valor do seu limite.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{3n^2 - \sqrt{n} + 1}{4 - 2n^2}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{4^n + \pi^n}{n+2}}$$

2. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x^2 + \pi}, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sin(x^2-4)}$$

III

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+2}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ \\ \frac{x^2-4}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estude o sinal de f e determine os seus zeros.
b) Justificando, diga se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 2.
c) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
d) Determine o conjunto $f(]-\infty, 2[)$. Justifique a resposta.

2. Seja φ uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(1 - \sin \frac{1}{n}) = (-1)^n \arctan\ n.$$

A função φ é contínua no ponto $x = 1$? Justifique a sua resposta.