INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1
Exame de recuperação

#B

LEE ∞ LEGI ∞ LEIC-T ∞ LERC 23|06|2012 09:00–10:30 **TESTE** 09:00–12:00 **EXAME**

PRIMEIRA PARTE (CORRESPONDENTE AO PRIMEIRO TESTE)

QUESTÃO 1.1.—Determine, caso existam, os limites das sucessões cujos termos gerais são,

$$\text{(a) } \frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}+2} \quad \text{(b) } \sqrt[n]{n^2+n} \quad \text{(c) } \frac{2^n+n^2}{3^n-1} \quad \text{(d) } \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3}$$

QUESTÃO 1.2.—Considere a sucessão definida por recursão através de,

$$x_0 = 3; \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$$

1.2 (a) Mostre que (x_n) é estritamente decrescente.

1.2 (b) Sabendo que $x_n > 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

QUESTÃO 1.3.—Prove, recorrendo ao princípio de indução matemática que para todo o natural $n \geq 1$ se tem,

$$\sum_{k=1}^{n} k(3k+5) = n(n+1)(n+3)$$

QUESTÃO 1.4.—Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, para $x \neq 0$ é definida por

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}.$$

1.4 (a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.4 (b) Sabendo que f é contínua em $x = 0$ determine $f(0)$.

1.4 (c) Mostre que f é uma função limitada.

QUESTÃO 1.5.—Considere duas funções contínuas $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Supondo que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(1) = 1$ e $g(1) = 0$, mostre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$. (*Sugestão*: considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$.)

QUESTÃO 1.6.—Indique se são verdadeiras ou falsas (não precisa de justificar):

1.6 (a) Se $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ é contínua então f tem necessariamente um máximo.

1.6 (b) Se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $f(e^{-n}) = e^n$ então f não pode ser contínua no intervalo $[0, 1]$.

1.6 (c) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f(1/n) = 1$ para todo o natural $n \geq 1$ então, necessariamente, $f(0) = 1$.

COTAÇÕES:

1.1 (a)	[0.5]
1.1 (b)	[0.5]
1.1 (c)	[0.5]
1.1 (d)	[0.5]
1.2 (a)	[1.0]
1.2 (b)	[1.0]
1.3	[1.0]
1.4 (a)	[1.0]
1.4 (b)	[1.0]
1.4 (c)	[0.5]
1.5	[1.0]
1.6 (a)	[0.5]
1.6 (b)	[0.5]
1.6 (c)	[0.5]

(SEGUNDA PARTE NO VERSO)

SEGUNDA PARTE (CORRESPONDENTE AO SEGUNDO TESTE)

QUESTÃO 2.1. — Calcule, se existirem, os limites seguintes.

$$\text{(A)} \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad \text{(B)} \lim_{x\to+\infty} (\cos 1/x)^x$$

QUESTÃO 2.2. — Considere a função real de variável real definida por $f(x) = e^{|x|}$. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.

QUESTÃO 2.3. — O quadro seguinte contém informação relativa ao sinal da derivada de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	n.e.	$+$	n.e	$-$

2.3 (a) Estude f do ponto de vista da monotonia.

2.3 (b) Indique se existem extremos locais de f e em caso afirmativo diga de que tipo são.

QUESTÃO 2.4. — Considere uma função f de classe $C^5(\mathbb{R})$ (i.e., f tem derivada de ordem 5 contínua). Suponha ainda que o polinómio de Taylor de ordem 4 de f no ponto $a = 0$ é $p_{4,0}(x) = 1 - x^4$.

2.4 (a) Verifique se f tem um extremo local no ponto $x = 0$ e, em caso afirmativo, indique de que tipo de extremo se trata (i.e., se é um máximo ou mínimo local).

2.4 (b) Supondo que $|f^{(5)}(x)| \leq 1$ para $x \in [0, 1]$, mostre que o erro cometido aproximando $f(x)$ por $p_{4,0}(x)$ no intervalo $[0, 1]$ não excede uma centésima.

QUESTÃO 2.5. — Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{x^2} \sin^2 t\, dt}{\sin(x-1)}.$$

QUESTÃO 2.6. — Determine a área da região do plano que é limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = e^{2x}$ e $x = 1$.

QUESTÃO 2.7. — Calcule uma primitiva da função,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+2x}}.$$

(*Sugestão*: considere a substituição $1 + 2x = t^2$.)

QUESTÃO 2.8. — Considere a série de potências

$$\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(x-2)^n.$$

Indique para que valores de x esta série converge absolutamente, converge simplesmente ou diverge.

COTAÇÕES:

2.1 (A)	[1.0]
2.1 (B)	[1.0]
2.2	[1.0]
2.3 (a)	[0.5]
2.3 (b)	[0.5]
2.4 (a)	[1.0]
2.4 (b)	[1.0]
2.5	[1.0]
2.6	[1.0]
2.7	[1.0]
2.8	[1.0]