Integrais Sobre Variedades

Representações:

- paramétricas
- explícitas
- implícitas

$$\sqrt{\det\left(\frac{\partial r^T}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}$$

parametrização

$$\underbrace{\iint_S F\, d_S}_{\text{int. da sup.}} = \iint_U f(r(t))\underbrace{\left\|\frac{\partial r}{\partial t_1}\times\frac{\partial r}{\partial t_2}\right\|}_{\text{produto externo}} d_{t_1}\, d_{t_2}$$

$t(t_1, t_2)$

1- Quando a superfície é descrita explicitamente:

por ex: $(x, y, h(x,y))$

$$A \ni (x,y) \mapsto r(x,y) = (x, y, h(x,y))$$

$$\boxed{\int_A \sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}\, dx\, dy}$$

gradiente de h (derivadas parciais)

Área da sup.

2- Quando é descrita implicitamente:

por ex: $F(x,y,z)=0$

$S \ni (x,y) \mapsto z = h(x,y)$

O volume é dado por

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \boxed{\frac{\|\nabla F\|}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}}$$

Utilizando coordenadas esféricas

ex: Calcular área da esfera:

1 - $\underbrace{x^2+y^2+z^2=\underline{1}}_{}$ } descrição implícita

$\theta \in \,]0, 2\pi[$ $\quad (\theta, \phi) \mapsto r(\theta, \phi) =$

$\phi \in \,]0, \pi[$ $\quad = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \cos\phi)$

com $\underline{\rho = 1}$ $\qquad \rho \geq 0$ ↪ r

$(\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$

- Fazem-se as derivadas parciais
- Calcula-se o produto externo

• Escremos a área da esfera na forma de integral

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \phi} \right\| = \operatorname{sen}\phi$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \right) d\theta = 4\pi$$

2- agora c/ a esfera descrita explicitamente:

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \;, \text{ c/ } x^2 + y^2 \leq 1$$

$\downarrow$

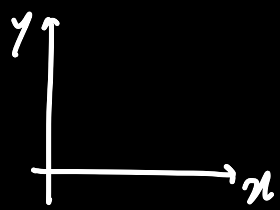
Calcula-se 2 vezes a área para $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

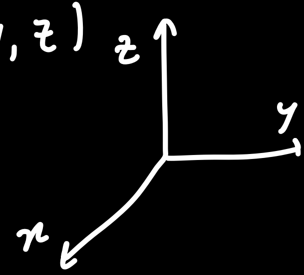
$$\frac{\|\nabla F\|}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \qquad \nabla F = \left(1,\, 1,\, \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)'\right)$$

Sistemas de Coordenadas

› cartesianas

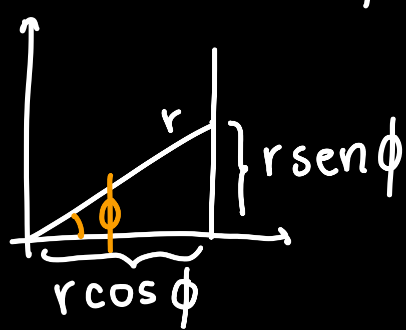
(x, y) (x, y, z)





› polares

$$r \geq 0, \quad \phi \in [-\pi, \pi]$$



$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\,\text{sen}\,\phi$$

jacobiano: r

› esféricas

$$x = r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$$

$$z = r\cos\varphi$$

$r \geq 0$

$\theta \in [0; 2\pi[$

$\varphi \in [0; \pi]$

jacobiano: $r^2\,\text{sen}\,\varphi$

> cilíndricas

$r \geq 0$

$\phi \in [-\pi, \pi]$ (?)

$x = r\cos\phi$

$y = r \,\text{sen}\,\phi$

$z = z$

jacobiano: r

Resumo

esféricas

$r \geq 0$

$\theta \in (0; 2\pi]$

$\varphi \in [0; \pi]$

$x = r\cos\theta \,\text{sen}\,\varphi$

$y = r \,\text{sen}\,\theta \,\text{sen}\,\varphi$

$z = r\cos\varphi$

jacob: $r^2 \,\text{sen}\,\varphi$

cilíndricas

$r \geq 0$

$\phi \in [-\pi, \pi]$

$x = r\cos\phi$

$y = r \,\text{sen}\,\phi$

$z = z$

jacob: r

polares

$r \geq 0$

$\phi \in [-\pi, \pi]$

$x = r\cos\phi$

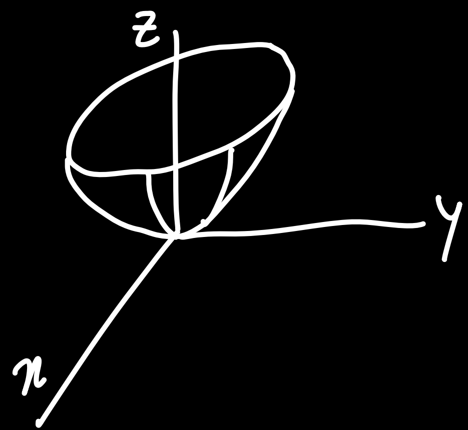
$y = r \,\text{sen}\,\phi$

jacob: r

Ex. do prof. na aula teórica 17/05

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_1(0,0),\ z = x^2 + y^2\}$$

$x^2 + y^2 = z \rightsquigarrow$ parabolóide



rep. explícita

$z = x^2 + y^2, \ (x, y) \in B_1(0,0)$

rep. paramétrica

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

rep. paramétrica c/ coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\text{sen}\,t \\ z = r^2 \end{cases}$$

$B_1(0,0) \rightsquigarrow$ bola aberta de raio 1

logo, $0 \leq r < 1$, $\theta \in [0; 2\pi]$

$$r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$
$$= (x, y, f(x, y))$$

ex:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Produto externo

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{\partial r_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial r_3}{\partial y} - \frac{\partial r_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial y},\right.$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial y} - \frac{\partial r_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial r_3}{\partial y},$$

$$\left.\frac{\partial r_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial y} - \frac{\partial r_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial y}\right)$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Resolução dos ex.

por ex. calcular a área da superfície (S)
$z = xy$

A) Representação paramétrica

$$\int \left(\int \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right\| dr \right) d\theta$$

1º: Arranjar uma parametrização
$\alpha(r, \theta)$ c/ coord. polares

2º: Calcular $\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right\|$ → produto externo

3º: Calcular a área:

$$\int \left(\int \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right\| dr \right) d\theta$$

B) Representação explícita

1º Calcular $\sqrt{\det J_S^T \cdot J_S}$ ou $\sqrt{1+\|\nabla h\|^2}$ ★

2º Mudar as variáveis para outro sistema de coordenadas.
(Se houverem 2 variáveis livres apenas, coord. polares!)

3º subst. as variáveis pelas novas coord. e multiplicar pelo Jacobiano r (nas coord. polares)

4º Calcular a área:

$$\int \left(\int \underbrace{\sqrt{1+\|\nabla h\|^2}}_{\text{nas coord. polares}} \cdot r \, dr \right) d\theta$$

Nota: nestes ex., estamos a calcular a área de uma superfície, logo, fazemos $\int \sqrt{1+\|\nabla h\|^2} \, ds$

Quando queremos um integral de superfície multiplicamos pela função !!!

Ou seja $\boxed{\text{Calcular o int. de sup.}}$

$$\iint_S x\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dS$$

$$\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ x\geq 0,\, y\geq 0}} x\sqrt{1+4x^2+4y^2}\ V_2(x,y)\, dx\, dy$$

$$\sqrt{1+\|\nabla h\|^2}$$

$$\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

Logo, fica igual a

$$\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ x\geq 0,\, y\geq 0}} x(1+4x^2+4y^2)$$

Calcular o fluxo do Campo (G)

$$\iint_S G \cdot n \, ds$$

$$\downarrow$$

$$\iint_S G \cdot \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} \cdot V_2(x,y)\, dx\, dy$$

$$\downarrow$$

$$\iint_S G \cdot \frac{\nabla G}{\cancel{\|\nabla G\|}} \cdot \frac{\cancel{\|\nabla G\|}}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|}\, dx\, dy$$

$$\downarrow$$

$$\iint_S G \cdot \nabla G \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|}\, dx\, dy$$