Cálculo Diferencial e Integral I

Complementos ao texto de apoio às aulas.

Amélia Bastos, António Bravo

Julho 2014

Introdução

O texto apresentado tem por objectivo ser um complemento ao texto de apoio ao curso de Cálculo Diferencial e Integral I do Mestrado em Engenharia Mecânica. Consiste em três seções que complementam a matéria apresentada nas aulas teóricas da referida disciplina. Cada secção termina com um conjunto de exercícios alguns dos quais resolvidos.

Amélia Bastos

António Bravo

1.1 Séries de Taylor

Comecemos por recordar o que é uma série de potências. Sendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uma sucessão e x uma variável real chama-se *série de potências* de $x \in \mathbb{R}$, com os coeficientes reais $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Diz-se que a série converge em $x_0 \in \mathbb{R}$ se e só se for convergente a série dos termos numéricos $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$; caso contrário, será divergente. Chama-se *domínio de convergência* ao conjunto dos valores reais de x para os quais a série é convergente.

Recorde-se também que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, em que exista $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ é absolutamente convergente no intervalo $]-r, r[$, em que

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Nos pontos exteriores ao mesmo intervalo a série é divergente.

Tal como um polinómio define uma função de variável real em $\mathbb{R}$, uma série de potências define uma função no subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a série é convergente, precisamente a função que em cada ponto desse conjunto tem por valor a soma da série no ponto considerado.
Analisemos essa função no que respeita à diferenciabilidade.

Teorema 1.1.1. *Seja* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $r > 0$ *e seja* f *a função definida pela igualdade*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

no dominio de convergência da série. Nestas condições, f *é diferenciável no intervalo* $]-r, r[$ *e tem-se para* $x \in]-r, r[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} .$$

Demonstração.

Observe-se, em primeiro lugar, que as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, têm o mesmo raio de convergência, uma vez que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Seja

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} .$$

Pretende-se provar que para qualquer $c \in]-r, r[$ se tem $f'(c) = \varphi(c)$, i.e

$$\lim_{x\to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \varphi(c) \right] = 0$$

$$f(x) - f(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(x^n - c^n\right) = (x - c) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots + c^n\right) .$$

assim

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \varphi(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n c^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$$

em que

$$\alpha_n(x) = a_n \left(x^{n-1} + c x^{n-2} + \ldots + c^n + n c^{n-1}\right)$$

Escolha-se b tal que $|c| < b < r$. Para $|x| \leq b$ tem-se

$$|\alpha_n(x)| \leq |a_n| \left(b^{n-1} + b b^{n-2} + \ldots + b^n - n b^{n-1}\right) = 2n|a_n| b^{n-1}$$

Como b pertence ao intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, b^{n-1}$ é convergente. Portanto fixado arbitráriamente $\delta > 0$ existirá decerto $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} 2n|a_n| b^{n-1} < \delta/2$$

Tem-se assim imediatamente para $|x| \leq b$

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} \alpha_n(x) \right| < \delta/2 .$$

Por outro lado, como a soma $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n(x)$ é um polinómio em x, e portanto uma função contínua, que se anula no ponto c visto que neste ponto se anulam todas as funções $\alpha_j(x)$ existirá também sempre uma vizinhança $V_\epsilon(c)$ que podemos supor contida no intervalo $]-b, b[$, tal que

$$x \in V_\epsilon(c) \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{p} \alpha_n(x) \right| < \delta/2$$

Nestas condições, para todo $x \in V_\epsilon(c)$ ter-se-á

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \varphi(c) \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{p} \alpha_n(x) \right| + \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} \alpha_n(x) \right| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

o que permite reconhecer tal como se pretendia que

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \varphi(c) \right] = 0$$

■

Observação 1.1.2. *Neste teorema sucintamente equivale a afirma-se que nos pontos interiores ao seu domínio de convergência, uma série de potências pode derivar-se termo a termo. Por exemplo sendo*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1$$

tem-se por derivação

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots, \quad |x| < 1$$

Este teorema permite obter novas demonstrações de algumas regras de derivação. Por exemplo em $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$$

pois a série tem raio de convergência infinito.

As funções $f : D \to \mathbb{R}$, com $0 \in \mathrm{int} D$, que podem ser representadas nalguma vizinhança de 0 por séries de potências de x com raio de convergência $r \neq 0$ são designadas por funções analiticas em 0.
Mais geralmente tem-se:

Definição 1.1.3. *A função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se analitica em $a \in intD$ se e só se existir $\epsilon > 0$ e uma sucessão real a_n, $n \in \mathbb{N}$, tais que para qualquer $x \in V_\epsilon(a)$ se tem*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

Em particular no caso da série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ter raio de convergência infinito, i.e. ser convergente para $x \in \mathbb{R}$, a função por ela definida diz-se uma *função inteira.*
Note-se que muitas funções que intervêm nas aplicações da Matemática às outras Ciências são analiticas em todos os pontos do seu dominio, com excepção de alguns "'pontos criticos"'.

Exemplo 1.1.4. *Qualquer função polinomial*

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \,, \qquad c_i \in \mathbb{R} \,,\ i = 0, 1, 2 \,,$$

é analítica em $a \in \mathbb{R}$.

Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$ tem-se

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2, \quad \text{com } b_2 = c_2 \,,\ b_1 = c_1 + 2ac_2 \,,\ b_0 = c_0 + ac_1 + a^2 c_2$$

p é portanto representável por uma série de potências de $x - a$ numa vizinhança de a que poderá ser fixada arbitrariamente.

Exemplo 1.1.5. *A função $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$ é analítica em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Com efeito tem-se*

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{a + (x-a)} = \frac{1}{a} \, \frac{1}{1 - \left(-\dfrac{x-a}{a} \right)} \,,$$

Como

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n, \quad |r| < 1 \,,$$

vem

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-a)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (x-a)^n$$

desde que $a \neq 0$ e $\left| \frac{x-a}{a} \right| < 1$, i.e. $x \in V_\epsilon(a)$, $\epsilon \leq |a|$.

Refira-se agora um resultado importante de demonstração imediata

Corolário 1.1.6. *Qualquer função definida por uma série de potências de* $x - a$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, *com raio de convergência* $r > 0$, *é indefinidamente diferenciável em* $]a - r, a + r[$ *e as suas derivadas podem calcular-se derivando a série termo a termo; Em particular qualquer função analítica em* a *é indefinidamente diferenciável em alguma vizinhança de* a *e todas as suas derivadas são funções analíticas em* a.

Pode-se colocar a seguinte questão: *Poderá uma função analítica em* a *ser representada em alguma vizinhança desse ponto por duas séries distintas de potências de* $x - a$ *?*. A resposta é negativa. Veja-se porquê.
Se se tiver para qualquer x de certa vizinhança de a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

ter-se-á também na mesma vizinhança

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-a) + \ldots$$

Atribuindo nas igualdades anteriores a x o valor a tem-se

$$a_0 = f(a)\,, \quad a_1 = f'(a)\,, \quad \ldots \quad n!a_n = f^{(n)}(a)$$

i.e. os coeficientes a_n , $n \in \mathbb{N}$ exprimem-se nos valores de f e das suas derivadas no ponto a. Como estas derivadas são univocamente determinadas o mesmo se passará com os coeficientes a_n.

Proposição 1.1.7. *Se numa vizinhança de* a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

então $a_n = b_n$ *para qualquer* $n \geq 0$.

Assim sendo f analítica em a, tem a representação única em série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ em que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Qualquer que seja a função f indefinidamente diferenciável em a pode formar-se a série Note-se contudo que para os coeficientes da série que figura no segundo membro tenham sentido não é necessário supor que a função seja analítica no ponto a; Com efeito sempre que uma função seja indefinidamente diferenciável em a poderá formar-se a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que se designa por *série de Taylor* da função f em $a \in \mathrm{int}D$ (*série de Mac-Laurin* de f quando $a = 0$).

Naturalmente que se coloca a seguinte questão:
Será que qualquer função indefinidamente diferenciável num ponto a é analítica nesse ponto?
Veremos através de um exemplo simples que a resposta a esta questão é negativa, uma vez que para $a \in \mathrm{int}D$ a existência dos valores $f^{(n)}(a)\,,\;\; n \in \mathbb{N}_0$, embora permite escrever a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, não garante que em alguma vizinhança de a seja verificada a igualdade

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(no caso da igualdade não se verificar a função f não será analítica no ponto a, visto que nenhuma série distinta da sua série de Taylor pode representar a função numa vizinhança de a).

Exemplo 1.1.8. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 \quad se \quad x = 0. \end{cases}$$

Uma vez que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}\, p(\frac{1}{x}) = 0$$

onde p é o polinómio de grau $n+2$ *determinado pelas sucessivas derivadas de* f *a série de Taylor de* f *terá todos os coeficientes* a_n *iguais a zero e portanto a sua soma será nula paraqualquer* $x \in \mathbb{R}$. *Assim para* $x \neq 0$

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

o que mostra que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ não é uma função analítica em 0.

Mostrada a existência de funções indefinidamente diferenciáveis que não são analíticas (em algum ponto) põe-se naturalmente a seguinte questão:
Que condições suplementares devem ser impostas a uma função f indefinidamente diferenciável numa vizinhança do ponto a, para que fique garantida a analiticidade de f nesse ponto?

Teorema 1.1.9. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in intD$ e f uma função indefinidamente diferenciável em todos os pontos de uma vizinhança de a, $V_\epsilon(a)$ (i.e. $f \in C^{\infty}(V_\epsilon(a))$) e seja $x \in V_\epsilon(a)$. Designando por $R_n(x)$ o termo complementar da fórmula de Taylor de f, relativa ao ponto a e ao natural n, é necessário e suficiente para que se verifique*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que se tenha

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

(f é analítica em a se e só se quando $x \to \infty$, $R_n(x)$ converge para 0 em alguma vizinhança de a).

Demonstração. Sendo $f : D \to \mathbb{R}$ uma função da classe C^{∞} em $V_\epsilon(a)$ para cada $x \in D$ e cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

em que $P_n(x)$ é o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto a e $R_n(x)$ o termo complementar correspondente.
Se observarmos porém que o polinómio $P_n(x)$ é precisamente a soma dos primeiros $n+1$ termos da série de Taylor de f, tornar-se-á evidente que, para que esta série convirga em determinado ponto $x_0 \in D$ e tenha por soma o valor $f(x_0)$ i.e.

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x_0)$$

é necessário e suficiente que se tenha

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x_0) - P_n(x))$$

■

Na prática contudo nem sempre é fácil verificar se $R_n(x)$ converge ou não para 0 quando $n \to \infty$. Neste sentido é útil o seguinte resultado

Teorema 1.1.10. *Seja $f \in C^{\infty}(V_\epsilon(a))$ e suponha-se que existe $p \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in V_\epsilon(a)$ e todo $n > p$*

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq k$$

Então a série de Taylor de f relativa ao ponto a tem por soma $f(x)$ para $x \in V_\epsilon(a)$,.

Demonstração. Sendo $x \in V_\epsilon(a)$ tem-se, o termo complementar da fórmula de Taylor, como resto de Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,, \qquad c \in]a, x[$$

Nas condições da hipótese ter-se-á então, para $c \in V_\epsilon(a)$

$$\left| R_(x) \right| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq k \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} < k \frac{\epsilon^{n+1}}{(n+1)!}$$

Qualquer que seja $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\epsilon^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Assim

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

e pelo teorema anterior

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

■

Mais geralmente pode mostrar-se que se $f \in C^{\infty}(V_\epsilon(a))$ e se existirem números reais M e k tais que para cada $x \in V_\epsilon(a)$ e todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M k^n$$

então para $x \in V_\epsilon(a)$ a série de Taylor de f relativa ao ponto a tem por soma $f(x)$.

Exemplo 1.1.11. *Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tem-se $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e $\left| f^{(n)}(x) \right| = \left| \operatorname{sen}(x + n\frac{\pi}{2}) \right| \leq 1$. Em particular:*

$$f^{(2n)}(0) = \operatorname{sen}(0 + 2n\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$f^{(4n-1)}(0) = \operatorname{sen}(0 + (4n-1)\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$f^{(4n+1)}(0) = \operatorname{sen}(0 + (4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1\,.$$

Assim o teorema anterior permite concluir que a função f coincide com a soma da sua série de Taylor para $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Exemplo 1.1.12. *Seja $f(x) = e^x \cos x$. Tem-se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,*

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cos(x + n\pi/4)\,.$$

Em particular

$$|R_{n-1}(x)| = \frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{\xi_n} \left|\cos(\xi_n + n\pi/4)\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{\xi_n}\,, \qquad \xi_n \in]0, x[$$

Para $x > 0$

$$\frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{\xi_n} < \frac{|x|^n}{n!}(\sqrt{2})^n e^{x} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

vindo do teorema anterior que a função f coincide com a soma da sua série de Taylor para

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, *Análise Matemática I e II,* Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.