

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
2^o TESTE (Versão B)

15/Janeiro/2011

Duração: 1h30m

1. Calcule os limites seguintes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x \log x} \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow e} (\log x)^{\frac{1}{x-e}}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\frac{\sin(\log x)}{x} \quad ,$$

$$\frac{2 \arctan x}{1 + x^2} \quad ,$$

$$\frac{3e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

3. Calcule a área da região plana delimitada pelos gráficos das funções $\log x$ e $1 - x^2$ e pelas rectas de equação $x = \frac{1}{e}$ e $x = e$.

4. Determine a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{\pi^n}$$

e, na hipótese de convergência, calcule a sua soma.

5. Seja f uma função definida e diferenciável em $]0, +\infty[$ e considere a função ψ dada por

$$\psi(x) = \int_{\log x}^{3x} f(t) dt$$

- a) Indique, justificando, qual é o domínio de ψ .

- b) Determine as funções ψ' e ψ'' .

6. Determine a única função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(\pi) = 0$ e

$$\frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
2^o TESTE (Versão A)

15/Janeiro/2011

Duração: 1h30m

1. Calcule os limites seguintes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} (\log x)^{\frac{1}{e-x}}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\frac{\cos(\arctan x)}{1+x^2} \quad ,$$

$$\frac{2 \log x}{x} \quad ,$$

$$\frac{4e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

3. Calcule a área da região plana delimitada pelas rectas de equação $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ e $y = 1 - x$ e pelo gráfico da função $\log x$.

4. Determine a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{e^{n+1}}$$

e, na hipótese de convergência, calcule a sua soma.

5. Seja g uma função definida e diferenciável em $]0, +\infty[$ e considere a função ϕ dada por

$$\phi(x) = \int_{2x}^{\log x} g(t) dt$$

- a) Indique, justificando, qual é o domínio de ϕ .
b) Determine as funções ϕ' e ϕ'' .

6. Determine a única função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e

$$\frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$