CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{o}}$ TESTE (Versão A)

12 /Novembro /2011 Duração: 1h30m

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^4 - x^3 \geq 2x^2\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}\right\}$$

a) Mostre que $A =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$ e identifique os conjuntos B e $A \cap B$.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\max(A \cap \mathbb{R}^-)$, $\min(A \cap \mathbb{R}^+)$, $\inf(A \cap \mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}))$, $\min(A \cap B)$, $\sup(A \cap B)$ e $\inf((A \cap \mathbb{R}^-) \backslash \mathbb{Q})$.
c) Se possível, dê exemplos de:
i) uma sucessão crescente de termos em $A \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ que converge para 5.
ii) uma sucessão de termos em $A \cap B$ que é divergente.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

a) Mostre, por indução, que se tem

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n > 0$$

b) Mostre que a sucessão $(a_n)(n \geq 2)$ é monótona decrescente.
c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule $\lim a_n$.

3. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{n! + 1}{n^n + n}, \qquad \lim \frac{2n(n+1)^2 + 3}{3n(n^2 + n + 1) + 6}, \qquad \lim \frac{3^n + 7n}{5 + 2^n + n}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n! + 2}}$$

4. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$) os limites:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}, \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3x^2 - 5}{x(x-1)}$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Mostre que:
a) Se (u_n) é uma sucessão crescente e

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$$

então (u_n) e $(f(u_n))$ são sucessões convergentes (em $\mathbb{R}$).
b) Se (v_n) é uma sucessão crescente, então $(f(v_n))$ é sucessão convergente (em $\mathbb{R}$).
c) Se (w_n) é uma sucessão qualquer de números reais, então $(f(w_n))$ tem subsucessões convergentes.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$1^{\underline{o}}$ TESTE (Versão B)

12 /Novembro /2011 Duração: 1h30m

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x^3 \leq x^4 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| x + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{3}{2} \right\}$$

a) Mostre que $A =]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$ e identifique os conjuntos B e $A \cap B$.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\max(A \cap \mathbb{R}^-)$, $\min(A \cap \mathbb{R}^+)$, $\inf(A \cap \mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\min(A \cap B)$, $\sup(A \cap B)$ e $\inf((A \cap \mathbb{R}^-) \setminus \mathbb{Q})$.
c) Se possível, dê exemplos de:
i) uma sucessão decrescente de termos em $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ que converge para -5.
ii) uma sucessão de termos em $A \cap B$ que é divergente.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - a_n} \quad \text{se } n > 1 \end{cases}$$

a) Mostre, por indução, que se tem

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n < 0$$

b) Mostre que a sucessão $(a_n)(n \geq 2)$ é monótona crescente.
c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule $\lim a_n$.

3. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{2 - n!}{n^n + 2n}, \qquad \lim \frac{2n(n+3)^2 + 5}{4n^2(n+3) + 1}, \qquad \lim \frac{4^n - 5n}{1 + n^3 + 3^n}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{n! - 2}{(n+1)!}}$$

4. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$) os limites:

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}, \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x(x+1)}{3x^2 + 3\sqrt{x} + 2}$$

5. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \frac{1}{2 + x^2}$$

Mostre que:
a) Se (u_n) é uma sucessão decrescente e

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$$

então (u_n) e $(g(u_n))$ são sucessões convergentes (em $\mathbb{R}$).
b) Se (v_n) é uma sucessão decrescente, então $(g(v_n))$ é sucessão convergente (em $\mathbb{R}$).
c) Se (w_n) é uma sucessão qualquer de números reais, então $(g(w_n))$ tem subsucessões convergentes.