CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1

2.º TESTE

#A

LEE ∞ LEGI ∞ LEIC-T ∞ LERC   02|06|2012   09:00–10:30

ESTA PROVA TEM A DURAÇÃO DE 1H30M.*

QUESTÃO 1. — Indique, se existirem, os limites seguintes (não apresente cálculos).

(A) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)(\ln x)$ (B) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x}$

QUESTÃO 2. — Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x|x-1|$. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = 1$.

QUESTÃO 3. — O quadro seguinte contém informação relativa ao sinal da derivada de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	n.e.	−	0	+	

3.1 Estude f do ponto de vista da monotonia.

3.2 Indique se existem extremos locais de f e em caso afirmativo diga de que tipo são.

QUESTÃO 4. — Considere uma função f de classe $C^5(\mathbb{R})$ (i.e., f tem derivada de ordem 5 contínua), satisfazendo:

$$\begin{array}{lllll} f'(0) = 0 & f''(0) = 0 & f^{(3)}(0) = 1 & f^{(4)}(0) = 1 & f^{(5)}(0) = 0 \\ f'(1) = 0 & f''(1) = 0 & f^{(3)}(1) = 0 & f^{(4)}(1) = -1 & f^{(5)}(1) = 0 \end{array}$$

Indique se algum dos pontos $x = 0$ ou $x = 1$ é um extremo local de f e, em caso afirmativo diga qual o tipo.

QUESTÃO 5. — Considere a função real de variável real $f(x) = \sin(x/2)$.

5.1 Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $a = 0$.

5.2 Usando a fórmula do resto de Lagrange, mostre que o erro cometido, aproximando f pelo polinómio de Taylor calculado na alínea anterior, não excede uma centésima quando $x \in [0, \pi/2]$.

QUESTÃO 6. — Calcule uma primitiva da função

$$f(x) = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}. \qquad (\textit{Sugestão}: \text{ use a substituição } 1 - x = t^2.)$$

QUESTÃO 7. — Determine uma função $f(x)$, diferenciável, não nula, satisfazendo:

$$\frac{(f(x))^2}{2} = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2 - cost}\,dt.$$

QUESTÃO 8. — Determine a área da região plana delimitada pelas curvas $y = x^{1/3}$, $y = x^3$.

QUESTÃO 9. — Considere a série de potências

$$\sum \frac{(x-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

Indique para que valores de x esta série converge absolutamente, converge simplesmente ou diverge.

* COTAÇÕES:

1. (A)	[1.0]
1. (B)	[1.0]
2.	[1.0]
3.1	[0.5]
3.2	[0.5]
4.	[1.0]
5.1	[0.5]
5.2	[0.5]
6.	[1.0]
7.	[1.0]
8.	[1.0]
9.	[1.0]