Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

2º Ficha B1

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x+1} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ x \operatorname{arctg}(x^2) - x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) O conjunto $f([1,2])$ é limitado?

Resolução.

1. i) Para $x > 0$ a função f é contínua pois é representada por uma função racional.
Para $x < 0$ a função também é contínua em cada ponto, uma vez que resulta da soma e produto e composição de funções elementares.
Para $x = 0$. Uma vez que

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - x}{x+1} = 0\,, \quad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} x \operatorname{arctg}(x^2) - x = 0$$

e se verifica que $f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 0$, a função é também contínua no ponto 0.

ii) Para $x > 0$ a função f é diferenciável pois é representada por uma função racional.
Para $x < 0$ a função também é diferenciável em cada ponto, uma vez que resulta da soma e produto e composição de funções elementares.
Determinemos agora as derivadas laterais para o ponto $x = 0$.

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2 - x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x+1} = -1$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \operatorname{arctg}(x^2) - x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg}(x^2) - 1 = -1$$

Uma vez que existem as derivadas laterais $f'_d(0)$, $f'_e(0)$ e $f'_d(0) = f'_e(0)$ a função f é também diferenciável no ponto 0. Sendo a função derivada de f definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ \operatorname{arctg}(x^2) + \dfrac{2x^2}{1+x^4} - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

iii) Sendo a função f contínua em $\mathbb{R}$ também é contínua em $[1,2]$ e o intervalo $[1,2]$ é fechado e limitado. Toda a função contínua num intervalo fechado e limitado é uma função limitada (i.e o conjunto $f([1,2])$ é limitado).

▪

2º Ficha C1

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2+1) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ 1 + x \operatorname{arctg}(x) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

   i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. A função é diferenciável em $x = 0$?

   ii) Defina a função derivada de f.

   iii) Considere a sucessão $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ e determine, caso exista, o limite da sucessão $f(x_n)$.

Resolução.

1. i) Para $x < 0$ a função f é contínua em cada ponto, pois resulta da soma e produto e composição de funções elementares.
Para $x > 0$ a função também é contínua em cada ponto, uma vez que resulta da soma e produto de funções elementares.
Para $x = 0$. Uma vez que

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} 1 + x \operatorname{arctg}(x) = 1\,, \quad f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} x \ln(x^2+1) = 0$$

e se tem $f(0^+) \neq f(0^-)$, a função f não é contínua no ponto 0.
A função f não sendo contínua no ponto 0 também não é diferenciável no ponto 0.

ii) Para $x < 0$ a função f é diferenciável em cada ponto, pois resulta da soma e produto e composição de funções elementares.
Para $x > 0$ a função também é diferenciável em cada ponto, uma vez que resulta da soma e produto de funções elementares.
Sendo a função derivada de f definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1} & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \operatorname{arctg}(x) + \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

iii) A sucessão $x_n = 1 + \frac{1}{n} > 0$ é convergente para 1. A função f é contínua em 1, e da continuidade segundo Heine, em particular, como a sucessão $x_n \in D_f$, a sucessão $f(x_n)$ é convergente e $f(x_n) \longrightarrow f(1) = 1 + 1\operatorname{arctg}(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$.

■

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

2º Ficha A1

Nome: ______________________________

Número: ______________ Curso: ______________

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \cos\left(x^2 + \pi\right) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ x^2 - xe^x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. A função é diferenciável em $x = 0$?

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Analise em $[1, 2]$ a existência de máximo e mínimo da função f.

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

2º Ficha A2

Nome: ______________________________

Número: ______________ Curso: ______________

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - e^{x^2} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ x + x\,\text{sen}\,(x) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

   i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. A função é diferenciável em $x = 0$?

   ii) Defina a função derivada de f.

   iii) Analise em $[-2, -1]$ a existência de máximo e mínimo da função f.

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

2º Ficha B2

Nome: ______________________________

Número: ______________ Curso: ______________

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(x + \frac{\pi}{2}) & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ x + x\,\mathrm{arctg}(x^2) & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

   i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade.

   ii) Defina a função derivada de f.

   iii) O conjunto $f([-2,-1])$ é limitado?

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

2º Ficha C2

Nome: ____

Número: ____________________ Curso: ____________________

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2+1) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ 2 + x^2 \operatorname{arctg}(x) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

   i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. A função é diferenciável em $x = 0$?

   ii) Defina a função derivada de f.

   iii) Considere a sucessão $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ e determine, caso exista, o limite da sucessão $f(x_n)$.

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2^o semestre - 2012/2013

2^o Ficha D1

Nome: ______________________________

Número: ______________ Curso: ______________

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{x^2+1} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ 1 - x\,\mathrm{arctg}(x^2) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

   i) Estude a função f do ponto de vista da continuidade. A função é diferenciável em $x = 0$?

   ii) Defina a função derivada de f.

   iii) O conjunto $f([1,3])$ é fechado e limitado? Justifique.