Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

Soluções da 4^a Ficha de Exercícios

1. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} &= (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Suponhamos que (u_n) é convergente. Seja $l = \lim u_n$. Vejamos que $\lim u_n = 0$.

Tem-se

$$u_{2n+1} = -u_{2n+1} + \frac{u_{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{e} \qquad u_{2n} = u_{2n} + \frac{u_{2n}}{2n}.$$

Como (u_{2n+1}) é uma subsucessão de (u_n) e $l = \lim u_n$, então (u_{2n+1}) converge e

$$\lim u_{2n+1} = \lim u_n = l.$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{2n+1} = \lim \left(-u_{2n+1} + u_{2n+1} \frac{1}{2n+1} \right) \Leftrightarrow l = -l + l.0 \Leftrightarrow 2l = 0 \Leftrightarrow l = 0.$$

Logo, $\lim u_n = 0$.

2. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n + 3}{4}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $u_n < \frac{3}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = 1 < \frac{3}{2}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n < \frac{3}{2}$.

Tese: $u_{n+1} < \frac{3}{2}$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{4} \underset{\text{por HI}}{<} \frac{2\frac{3}{2} + 3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Deste modo, tem-se: $u_{n+1} < \frac{3}{2}$.

Logo, tem-se: $u_n < \frac{3}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Tem-se $u_2 - u_1 = \dfrac{5}{4} - 1 = \dfrac{1}{4} \geq 0$. Vejamos que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{4} - u_n = \frac{3 - 2u_n}{4} \underset{(a)}{>} \frac{3 - 2\frac{3}{2}}{4} = 0.$$

Logo, tem-se $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é crescente.

Em alternativa, sem recorrer à alínea (a), podemos mostrar por indução que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ora já se viu que $u_2 - u_1 \geq 0$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Demonstração (da tese):

$u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1} + 3}{4} - \dfrac{2u_n + 3}{4} = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} - u_n\right) \underset{\text{por HI}}{\geq} \dfrac{1}{2}0 = 0.$

Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é crescente.

(c) A sucessão (u_n) é majorada e por ser crescente também é minorada. Logo, como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n + 3}{4} \Leftrightarrow l = \frac{2l + 3}{4} \Leftrightarrow 4l = 2l + 3 \Leftrightarrow l = \frac{3}{2}.$$

Logo, $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$.

(d) Tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\frac{2u_{n+1} + 3}{4} - \frac{2u_n + 3}{4}\right| = \frac{1}{2}\left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_{n+1} - u_n\right|.$$

Logo, existe $c = \dfrac{1}{2} \in \,]0, 1[$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq c\left|u_{n+1} - u_n\right|.$$

Deste modo, a sucessão (u_n) é contractiva.

3. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}\alpha u_n + 1, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

(a) Seja $\alpha = 1$.

(a1) Vejamos que $u_n < 3$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = 1 < 3$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n < 3$.

Tese: $u_{n+1} < 3$.

Demonstração (da tese):

$u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \underset{\text{por HI}}{<} \dfrac{2}{3}3 + 1 = 3.$

Deste modo, tem-se: $u_{n+1} < 3$.

Logo, tem-se: $u_n < 3$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a2) Vejamos que (u_n) é monótona.

Tem-se $u_2 - u_1 = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3} \geq 0$. Vejamos que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 1 \underset{\text{(a1)}}{>} -\frac{1}{3}3 + 1 = 0.$$

Logo, tem-se $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é crescente.

Em alternativa, sem recorrer à alínea (a1), podemos mostrar por indução que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ora já se viu que $u_2 - u_1 \geq 0$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Demonstração (da tese):

$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\dfrac{2}{3}u_{n+1} + 1\right) - \left(\dfrac{2}{3}u_n + 1\right) = \dfrac{2}{3}\left(u_{n+1} - u_n\right) \underset{\text{por HI}}{\geq} \dfrac{2}{3}0 = 0.$

Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é crescente.

(a3) A sucessão (u_n) é majorada e por ser crescente também é minorada. Logo, como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l.$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(\frac{2}{3}u_n + 1\right) \Leftrightarrow l = \frac{2}{3}l + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}l = 1 \Leftrightarrow l = 3.$$

Logo, $\lim u_n = 3$.

(b) Seja $\alpha = -1$, neste caso, a sucessão (u_n) não é monótona pois:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(-\frac{2}{3}u_{n+1} + 1\right) - \left(-\frac{2}{3}u_n + 1\right) = \frac{2}{3}\left(u_n - u_{n+1}\right)$$

e assim, as expressões $u_{n+2} - u_{n+1}$ e $u_n - u_{n+1}$ têm o mesmo sinal, quando deveriam ter sinal contrário para que a sucessão (u_n) pudesse ser monótona.

Vejamos que (u_n) é contractiva.

Tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\left(-\frac{2}{3}u_{n+1} + 1\right) - \left(-\frac{2}{3}u_n + 1\right)\right| = \frac{2}{3}\left|u_{n+1} - u_n\right| \leq \frac{2}{3}\left|u_{n+1} - u_n\right|.$$

Logo, existe $c = \dfrac{2}{3} \in \left]0, 1\right[$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq c\left|u_{n+1} - u_n\right|.$$

Deste modo, a sucessão (u_n) é contractiva. Logo, (u_n) é convergente.

4. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{2} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2 + 2}{3}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).} \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $1 < u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $1 < u_1 = \dfrac{3}{2} < 2$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1 < u_n < 2$.

Tese: $1 < u_{n+1} < 2$.

Demonstração (da tese):

$$1 = \frac{1^2 + 2}{3} \underset{\text{por HI}}{<} u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3} \underset{\text{por HI}}{<} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2}{3} = \frac{17}{12} < 2.$$

Deste modo, tem-se: $1 < u_{n+1} < 2$.

Logo, tem-se: $1 < u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vejamos que (u_n) é decrescente.

Tem-se $u_2 - u_1 = \dfrac{17}{12} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{12} \leq 0$. Vejamos que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2}{3} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3} = \frac{1}{3}\left(u_n - 1\right)\left(u_n - 2\right) \underset{\text{(a)}}{<} \frac{1}{3}.0 = 0.$$

Logo, tem-se $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

Em alternativa, podemos mostrar por indução que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ora já se viu que $u_2 - u_1 \leq 0$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2 + 2}{3} - \frac{u_n^2 + 2}{3} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) \underset{\text{por HI}}{\leq} \frac{1}{3}0 = 0,$$

note-se que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

(c) Como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l.$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 2}{3} \Leftrightarrow l = \frac{l^2 + 2}{3} \Leftrightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Leftrightarrow (l = 1 \quad \text{ou} \quad l = 2).$$

Como $1 < u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sucessão (u_n) é decrescente, então $\lim u_n = 1$.

5. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{4}\left(1 - u_n^2\right), \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $0 \leq u_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $0 \leq u_1 = 0 \leq 1$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $0 \leq u_n \leq 1$.

Tese: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Demonstração (da tese):

$0 = \frac{1}{4}0 \underset{\text{por HI}}{\leq} u_{n+1} = \frac{1}{4}(1 - u_n^2) \leq \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4} \leq 1.$

Deste modo, tem-se: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Logo, tem-se: $0 \leq u_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vejamos que (u_n) é contractiva.

Tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\frac{1}{4}\left(1 - u_{n+1}^2\right) - \frac{1}{4}\left(1 - u_n^2\right)\right| = \frac{1}{4}|u_{n+1} - u_n|\,|u_{n+1} + u_n| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\left|u_{n+1}-u_n\right|\left(\left|u_{n+1}\right|+\left|u_n\right|\right) \underset{\text{(a)}}{\leq} \frac{1}{4}\left|u_{n+1}-u_n\right|(1+1)=\frac{1}{2}\left|u_{n+1}-u_n\right|.$$

Logo, existe $c=\dfrac{1}{2} \in]0,1[$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$\left|u_{n+2}-u_{n+1}\right| \leq c\left|u_{n+1}-u_n\right|.$$

Deste modo, a sucessão (u_n) é contractiva.

(c) Como a sucessão (u_n) é contractiva, então (u_n) é convergente.

Seja $l=\lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1}=\lim u_n=l.$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1}=\lim\left[\frac{1}{4}\left(1-u_n^2\right)\right] \Leftrightarrow l=\frac{1}{4}\left(1-l^2\right) \Leftrightarrow l^2+4l-1=0 \Leftrightarrow \left(l=-2+\sqrt{5} \text{ ou } l=-2-\sqrt{5}\right).$$

Como $0 \leq u_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $-2-\sqrt{5}<0$, então $\lim u_n=-2+\sqrt{5}$.

6. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3+2u_n}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $0 \leq u_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n=1$ tem-se $0 \leq u_1=1 \leq 1$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $0 \leq u_n \leq 1$.

Tese: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Demonstração (da tese):

$$0 \leq \frac{1}{5}=\frac{1}{3+2} \underset{\text{por HI}}{\leq} u_{n+1}=\frac{1}{3+2u_n} \underset{\text{por HI}}{\leq} \frac{1}{3} \leq 1.$$

Deste modo, tem-se: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Logo, tem-se: $0 \leq u_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é limitada.

(b) A sucessão (u_n) não é monótona pois:

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\frac{1}{3+2u_{n+1}}-\frac{1}{3+2u_n}=\frac{2}{\left(3+2u_{n+1}\right)\left(3+2u_n\right)}\left(u_n-u_{n+1}\right)$$

e assim, as expressões $u_{n+2}-u_{n+1}$ e u_n-u_{n+1} têm o mesmo sinal ($u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$), quando deveriam ter sinal contrário para que a sucessão (u_n) pudesse ser monótona.

(c) Vejamos que (u_n) é contractiva.

Tem-se

$$\left|u_{n+2}-u_{n+1}\right|=\left|\frac{1}{3+2u_{n+1}}-\frac{1}{3+2u_n}\right| \underset{u_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}}{=}$$

$$= \frac{2}{(3+2u_{n+1})(3+2u_n)}|u_{n+1}-u_n| \underset{u_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}}{\leq} \frac{2}{9}|u_{n+1}-u_n|.$$

Logo, existe $c = \dfrac{2}{9} \in]0,1[$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$|u_{n+2}-u_{n+1}| \leq c\,|u_{n+1}-u_n|.$$

Deste modo, a sucessão (u_n) é contractiva.

(d) Como a sucessão (u_n) é contractiva, então (u_n) é de Cauchy. Logo, (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l.$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{3+2u_n} \Leftrightarrow l = \frac{1}{3+2l} \Leftrightarrow 2l^2+3l-1=0 \Leftrightarrow \left(l = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \quad \text{ou} \quad l = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \right).$$

Como $0 \leq u_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$, então $\lim u_n = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

7. Considere as expressões:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).} \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = 1 > 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n > 0$.

Tese: $u_{n+1} > 0$.

Demonstração (da tese):

$u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \underset{\text{por HI}}{>} 0.$

Deste modo, tem-se: $u_{n+1} > 0$.

Logo, tem-se: $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vejamos que $u_n \geq 2$, para todo o $n \geq 2$. Tem-se

$$u_{n+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{u_n^2 - 4u_n + 4}{2u_n} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(u_n-2)^2}{2u_n} \geq 0.$$

Logo, como a condição $\dfrac{(u_n-2)^2}{2u_n} \geq 0$ é verdadeira, a condição $u_{n+1} \geq 2$ também é verdadeira, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, tem-se $u_n \geq 2$, para todo o $n \geq 2$.

(c) Vejamos que (u_n) é monótona. Tem-se

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} - u_n = -\frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} = \frac{4-u_n^2}{2u_n} \underset{u_n \geq 2}{\leq} 0.$$

Logo, (u_n) é decrescente, para todo o $n \geq 2$.

(d) A sucessão (u_n) é minorada e por ser decrescente também é majorada. Logo, como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(\frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \right) \Leftrightarrow l = \frac{l}{2} + \frac{2}{l} \Leftrightarrow 2l^2 = l^2 + 4 \Leftrightarrow (l = 2 \quad \text{ou} \quad l = -2)\,.$$

Como $u_n \geq 2$, para todo o $n \geq 2$, e $-2 < 0$, então $\lim u_n = 2$.

8. Considere as expressões:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n}{1+2u_n}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = 1 > 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n > 0$.

Tese: $u_{n+1} > 0$.

Demonstração (da tese):

$u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+2u_n} \underset{\text{por HI}}{>} 0.$

Deste modo, tem-se: $u_{n+1} > 0$.

Logo, tem-se: $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vejamos que $u_n \geq \dfrac{1}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = 1 \geq \dfrac{1}{2}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Tese: $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+2u_n} = \frac{2u_n + 1 - 1}{1+2u_n} = 1 - \frac{1}{1+2u_n} \underset{\text{por HI}}{\geq} 1 - \frac{1}{1+2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Deste modo, tem-se: $u_{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$.

Logo, tem-se: $u_n \geq \dfrac{1}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) Tem-se $u_2 - u_1 = \dfrac{2}{3} - 1 = -\dfrac{1}{3} \leq 0$. Vejamos que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{2u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \frac{1}{1+2u_n} u_n \left(1 - 2u_n\right) \underset{\text{(a) e (b)}}{\leq} 0.$$

Logo, tem-se $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

Em alternativa, podemos mostrar por indução que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Ora já se viu que $u_2 - u_1 \leq 0$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{1+2u_{n+1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{1+2u_n}\right) = \frac{2\left(u_{n+1} - u_n\right)}{\left(1+2u_n\right)\left(1+2u_{n+1}\right)} \underset{\text{por HI e por (a)}}{=\leq} 0,$$

note-se que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

(d) A sucessão (u_n) é minorada e por ser decrescente também é majorada. Logo, como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n}{1+2u_n} \Leftrightarrow l = \frac{2l}{1+2l} \Leftrightarrow 2l^2 + l = 2l \Leftrightarrow l\left(2l - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(l = 0 \quad \text{ou} \quad l = \frac{1}{2}\right).$$

Como $u_n \geq \dfrac{1}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

9. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} - \frac{1}{4n}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{).}$$

(a) Vejamos que $u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = 1 \leq 2$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n \leq 2$.

Tese: $u_{n+1} \leq 2$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n} - \frac{1}{4n} \underset{\text{por HI}}{\leq} \sqrt{2.2} - \frac{1}{4n} = 2 - \frac{1}{4n} \leq 2.$$

Deste modo, tem-se: $u_{n+1} \leq 2$.

Logo, tem-se: $u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vejamos que (u_n) é crescente, isto é, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se $u_2 - u_1 = \sqrt{2} - \frac{1}{4} - 1 = \sqrt{2} - \frac{5}{4} \geq 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\sqrt{2u_{n+1}} - \frac{1}{4n+4}\right) - \left(\sqrt{2u_n} - \frac{1}{4n}\right) = \left(\sqrt{2u_{n+1}} - \sqrt{2u_n}\right) + \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+4}\right) =$$

$$= \frac{2\left(u_{n+1} - u_n\right)}{\sqrt{2u_{n+1}} + \sqrt{2u_n}} + \frac{1}{n\left(4n+4\right)} = \underset{\text{por HI}}{\geq} 0,$$

note-se que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$.

Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é crescente.

(c) A sucessão (u_n) é majorada e por ser crescente também é minorada. Logo, como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(\sqrt{2u_n} - \frac{1}{4n}\right) \Leftrightarrow l = \sqrt{2l} \Leftrightarrow l^2 = 2l \Leftrightarrow l\,(l-2) = 0 \Leftrightarrow (l = 0 \;\text{ ou }\; l = 2)\,.$$

Como a sucessão (u_n) é crescente, $u_n \geq u_1 = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e então $\lim u_n = 2$.

10. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}, \quad (\text{para todo o } n \in \mathbb{N}).$$

(a) Vejamos que (u_n) é decrescente, isto é, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_2 - u_1 = \sqrt{3} - 2 \leq 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{1 + u_{n+1}} - \sqrt{1 + u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \underset{\text{por HI}}{\leq} \frac{0}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} = 0,$$

Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

(b) A sucessão (u_n) é minorada pois $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e por ser decrescente também é majorada. Logo, como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{1+u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{1+l} \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad l = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right).$$

Como $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, então $\lim u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

11. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$u_1 = \sqrt{5}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{5+u_n}, \quad (\text{para todo o } n \in \mathbb{N}).$$

(a) Vejamos que $u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = \sqrt{5} \geq 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n \geq 0$.

Tese: $u_{n+1} \geq 0$.

Demonstração (da tese): $u_{n+1} = \sqrt{5+u_n} \geq 0$.

Logo, tem-se: $u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vejamos que (u_n) é contractiva.

Tem-se $|u_{n+2} - u_{n+1}| =$

$$= \left| \sqrt{5+u_{n+1}} - \sqrt{5+u_n} \right| = \frac{|u_{n+1} - u_n|}{\sqrt{5+u_{n+1}} + \sqrt{5+u_n}} \underset{u_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}}{\leq} \frac{|u_{n+1} - u_n|}{\sqrt{5+0} + \sqrt{5+0}} = \frac{\sqrt{5}}{10} |u_{n+1} - u_n|.$$

Logo, existe $c = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \in \,]0,1[$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq c \, |u_{n+1} - u_n|.$$

Deste modo, a sucessão (u_n) é contractiva.

(c) Como a sucessão (u_n) é contractiva, então (u_n) é de Cauchy. Logo, (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l.$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{5+u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{5+l} \Leftrightarrow l^2 - l - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(l = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \text{ou} \quad l = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \right).$$

Como $u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} < 0$, então $\lim u_n = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

12. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3-u_n} + \frac{1}{n}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $0 \leq u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $0 \leq u_1 = 2 \leq 2$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $0 \leq u_n \leq 2$.

Tese: $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Demonstração (da tese):

$$0 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \underset{\text{por HI}}{\leq} u_{n+1} = \frac{1}{3-u_n} + \frac{1}{n} \underset{\text{por HI}}{\leq} \frac{1}{3-2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3-2} + 1 = 2.$$

Deste modo, tem-se: $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Logo, tem-se: $0 \leq u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é limitada.

(b) Vejamos que (u_n) é decrescente, isto é, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_2 - u_1 = 2 - 2 = 0 \leq 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Tese: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{3-u_{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{3-u_n} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{3-u_{n+1}} - \frac{1}{3-u_n}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{(3-u_{n+1})(3-u_n)} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \underset{\text{por HI e por (a)}}{\leq} 0 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \leq 0,$$

Deste modo, tem-se: $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$.

Logo, tem-se: $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim, a sucessão (u_n) é decrescente.

(c) Como a sucessão (u_n) é monótona (por (b)) e limitada (por (a)), então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{3-u_n} + \frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow l = \frac{1}{3-l} \Leftrightarrow l^2 - 3l + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(l = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Como $0 \leq u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 2$, então $\lim u_n = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

13. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{u_n}, \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}\text{)}. \end{aligned}$$

Vejamos primeiro que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = 1 > 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n > 0$.

Tese: $u_{n+1} > 0$.

Demonstração (da tese):

$u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \underset{\text{por HI}}{>} 0.$

Logo, tem-se: $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) A sucessão (u_n) não é monótona pois:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{u_{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_n u_{n+1}}\,(u_n - u_{n+1})$$

e assim, as expressões $u_{n+2} - u_{n+1}$ e $u_n - u_{n+1}$ têm o mesmo sinal (note-se que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$), quando deveriam ter sinal contrário para que a sucessão (u_n) pudesse ser monótona.

(b) Vejamos que

$$\sqrt{2} < u_n < 2,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$.

Para $n = 3$ tem-se $\sqrt{2} < u_3 = \dfrac{3}{2} < 2$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 3$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$.

HI (hipótese de indução): $\sqrt{2} < u_n < 2$.

Tese: $\sqrt{2} < u_{n+1} < 2$.

Demonstração (da tese):

$\sqrt{2} < \dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} \underset{\text{por HI}}{<} u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \underset{\text{por HI}}{<} 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 2.$

Logo, tem-se: $\sqrt{2} < u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$.

Por outro lado, tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\left(1 + \frac{1}{u_{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right| \underset{u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}}{=} \frac{1}{u_n u_{n+1}}\,|u_n - u_{n+1}| \underset{\sqrt{2} < u_n,\ \forall n \geq 3}{<} \frac{1}{2}\,|u_{n+1} - u_n|,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$.

Logo, tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\,|u_{n+1} - u_n|,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$.

Para $n = 1$ tem-se

$$|u_3 - u_2| = \left|\frac{3}{2} - 2\right| = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}|2-1| = \frac{1}{2}|u_2 - u_1|.$$

Para $n = 2$ tem-se

$$|u_4 - u_3| = \left|\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left|\frac{3}{2} - 2\right| = \frac{1}{2}|u_3 - u_2|.$$

Logo, tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pela alínea **(b)**, existe $c = \dfrac{1}{2} \in]0,1[$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|.$$

Logo, a sucessão (u_n) é contractiva. Como a sucessão (u_n) é contractiva, então (u_n) é de Cauchy. Logo, (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n), então (u_{n+1}) converge e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l.$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \Leftrightarrow l = 1 + \frac{1}{l} \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ ou } \ l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Como $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, então $\lim u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

14. Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} &u_1 = u_2 = \frac{1}{2} \\ &u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = 0, \quad (\text{para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

(a) Vejamos que $u_{n+1} > \dfrac{1}{2}u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_2 = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}u_1$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_{n+1} > \dfrac{1}{2}u_n$.

Tese: $u_{n+2} > \dfrac{1}{2}u_{n+1}$.

Demonstração (da tese):

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \underset{\text{por HI}}{>} \frac{1}{2}u_{n+1}.$$

Logo, tem-se: $u_{n+1} > \dfrac{1}{2}u_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Vejamos que (u_n) é decrescente, isto é, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n,$$

para que se tenha $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$, basta verificar que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ tem-se $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $u_n > 0$.

Tese: $u_{n+1} > 0$.

Demonstração (da tese):

$u_{n+1} \underset{\text{por (a)}}{>} \dfrac{1}{2}u_n \underset{\text{por HI}}{>} 0.$

Logo, tem-se: $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Deste modo, como $u_2 - u_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ e

$$u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n < 0,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, então tem-se

$$u_{n+1} - u_n \leq 0,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e assim a sucessão (u_n) é decrescente.

(c) A sucessão (u_n) é minorada pois $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e por ser decrescente também é majorada. Logo, como (u_n) é monótona e limitada, então (u_n) é convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Como (u_{n+1}) e (u_{n+2}) são subsucessões de (u_n), então (u_{n+1}) e (u_{n+2}) convergem e

$$\lim u_{n+1} = \lim u_{n+2} = \lim u_n = l$$

Logo, tem-se

$$\lim u_{n+2} = \lim\left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) \Leftrightarrow l = l - \frac{1}{4}l \Leftrightarrow l = 0.$$

Logo $\lim u_n = 0$.

19

(1) A série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+2)!}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n - x_{n+k})$, com $k = 2$ e $x_n = \dfrac{1}{n!}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$ converge absolutamente, uma vez que $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=x_0+x_1-2\lim x_n=1+1-2\lim\frac{1}{n!}=2.$$

(2) A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n+2}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+k}-x_n)$, com $k=2$ e $x_n=\cos\frac{\pi}{n}$. Atendendo a que $\lim x_n=1\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n+2}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ converge absolutamente, pois $\cos\frac{\pi}{n+2}-\cos\frac{\pi}{n}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n+2}-\cos\frac{\pi}{n}\right)=2\lim x_n-(x_1+x_2)=2-(-1)=3.$$

(3) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n=\frac{1}{2n-1}$. Atendendo a que $\lim x_n=0\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=x_1-\lim x_n=1-\lim\frac{1}{2n-1}=1.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}.$$

(4) Tem-se $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n-2)}=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$.

A série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(x_n-x_{n+2})$, com $k=2$ e $x_n=\frac{1}{n-2}$. Atendendo a que $\lim x_n=0\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$ converge absolutamente, uma vez que $\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)=x_3+x_4-2\lim x_n=1+\frac{1}{2}-2\lim\frac{1}{n-2}=\frac{3}{2}.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n-2)}=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n-2)}=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

(5) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)\,(2n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n=\frac{1}{2n+1}$. Atendendo a que $\lim x_n=0\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=x_1-\lim x_n=\frac{1}{3}-\lim\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{3}.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)\,(2n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)\,(2n+3)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(6) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Atendendo a que $\lim x_n=0\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=x_1-\lim x_n=1-\lim\frac{1}{\sqrt{n}}=1.$$

(7) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+2})$, com $k=2$ e $x_n = \frac{1}{n}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ converge absolutamente, uma vez que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = x_1 + x_2 - 2\lim x_n = 1 + \frac{1}{2} - 2\lim \frac{1}{n} = \frac{3}{2}.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

(8) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n+1) - \log n)$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n+1) - \log n)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)$, com $k=1$ e $x_n = \log n$. Atendendo a que $\lim x_n = +\infty \notin \mathbb{R}$, então (x_n) diverge.

Como (x_n) diverge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} (\log(n+1) - \log n)$ diverge.

(9) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n = \frac{1}{n^2}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = x_1 - \lim x_n = 1 - \lim \frac{1}{n^2} = 1.$$

(10) Tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right].$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n = \frac{1}{n+2}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = x_1 - \lim x_n = \frac{1}{3} - \lim \frac{1}{n+2} = \frac{1}{3}.$$

Por outro lado, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right).$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right) = x_1 - \lim x_n = \frac{1}{6} - \lim \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{6}.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right) = \frac{1}{2}\frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Deste modo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

(11) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n+1} \right]$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n+1} \right]$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$, com $k = 1$ e $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n+1} \right]$ converge e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n+1} \right] = x_1 - \lim x_n = 1 - \lim \left[(-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] = 1.$$

A série de Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n+1} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$$

converge simplesmente pois a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - (-1)^n \frac{1}{n+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)}$$

diverge por comparação com a série divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

(12) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$, com $k = 1$ e $x_n = \frac{n}{2^n}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, pela escala de sucessões, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \right)$ converge absolutamente, uma vez que $\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \right) = x_1 - \lim x_n = \frac{1}{2} - \lim \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right)$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) = 2\frac{1}{2} = 1.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Como $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ converge absolutamente, por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 1 = 2.$$

(13) Tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - x_{n+1})$, com $k = 1$ e $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = x_1 - \lim x_n = 1 - \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.$$

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$= (-2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = (-2)\, 1 = -2.$$

(14) Tem-se $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-n+1}}{2^{-n+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e}{2} \left(-\frac{2}{e}\right)^n$.

A série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e}{2} \left(-\frac{2}{e}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $-\frac{2}{e}$. Como $\left|-\frac{2}{e}\right| = \frac{2}{e} < 1$, a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e}{2} \left(-\frac{2}{e}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e}{2} \left(-\frac{2}{e}\right)^n = \frac{\frac{e}{2}\left(-\frac{2}{e}\right)^2}{1 - \left(-\frac{2}{e}\right)} = \frac{\frac{2}{e}}{1 + \frac{2}{e}} = \frac{2}{e+2}.$$

(15) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{5}{4}$. Como $\left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ diverge.

(16) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^{-n-1}}{5^{n-1} 3^{-(2n+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{9}{10}\right)^n$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{9}{10}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $-\frac{9}{10}$. Como $\left|-\frac{9}{10}\right| = \frac{9}{10} < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{9}{10}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{9}{10}\right)^n = \frac{\left(-\frac{15}{2}\right)\left(-\frac{9}{10}\right)}{1 - \left(-\frac{9}{10}\right)} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{19}{10}} = \frac{135}{38}.$$

(17) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Como $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Como $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ converge absolutamente, por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

(18) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5+(-1)^n}{3^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + (-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{3}$. Como $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{2}.$$

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{3}$. Como $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5+(-1)^n}{3^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + (-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$ converge absolutamente, por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5+(-1)^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + (-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{15}{2} - \frac{3}{4} = \frac{27}{4}.$$

(19) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n=\frac{1}{n}$. Atendendo a que $\lim x_n=0\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge absolutamente, uma vez que $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=x_1-\lim x_n=1-\lim\frac{1}{n}=1.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}.$$

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Como $\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ converge absolutamente, por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

(20) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n-1}{n!}\right]=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)\right]$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n=\frac{1}{(n-1)!}$. Atendendo a que $\lim x_n=0\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)=x_1-\lim x_n=1-\lim\frac{1}{(n-1)!}=1.$$

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Como $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2.$$

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n-1}{n!}\right] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)\right]$ converge absolutamente, por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n-1}{n!}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = 2 + 1 = 3.$$

(21) Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{ne^{1/n}-n} - \frac{1}{(n+1)\,e^{1/(n+1)}-n-1}\right] = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}}{e^{1/n}-1} - \frac{\frac{1}{n+1}}{e^{1/(n+1)}-1}\right]$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}}{e^{1/n}-1} - \frac{\frac{1}{n+1}}{e^{1/(n+1)}-1}\right]$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_n - x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n = \frac{\frac{1}{n}}{e^{1/n}-1}$. Atendendo a que $\lim x_n = 1 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}}{e^{1/n}-1} - \frac{\frac{1}{n+1}}{e^{1/(n+1)}-1}\right]$ converge e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{n}}{e^{1/n}-1} - \frac{\frac{1}{n+1}}{e^{1/(n+1)}-1}\right] = x_1 - \lim x_n =$$

$$= \frac{1}{e-1} - \lim\frac{\frac{1}{n}}{e^{1/n}-1} = \frac{1}{e-1} - 1 = \frac{2-e}{e-1}.$$

(22) Tem-se $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{2e\,(-\pi)^{-n+2}}{(-e)^{-n+1}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-2\pi^2)\left(-\frac{e}{\pi}\right)^n$.

A série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-2\pi^2)\left(-\frac{e}{\pi}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $-\frac{e}{\pi}$. Como $\left|-\frac{e}{\pi}\right|=\frac{e}{\pi}<1$, a série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-2\pi^2)\left(-\frac{e}{\pi}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-2\pi^2)\left(-\frac{e}{\pi}\right)^n=\frac{(-2\pi^2)\left(-\frac{e}{\pi}\right)^2}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)}=\frac{-2\pi e^2}{\pi+e}.$$

(23) Tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n+2}+(n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{n+3}\right)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n n\operatorname{sen}\frac{1}{n+2}-(-1)^{n+1}(n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{n+3}\right].$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n n\operatorname{sen}\frac{1}{n+2}-(-1)^{n+1}(n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{n+3}\right]$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n=(-1)^n n\operatorname{sen}\frac{1}{n+2}$. Atendendo a que

$$\lim x_{2n}=\lim\left(2n\operatorname{sen}\frac{1}{2n+2}\right)=\lim\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{2n+2}}\frac{2}{2+\frac{2}{n}}\right)=1$$

e

$$\lim x_{2n+1}=\lim\left[-\left((2n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{2n+3}\right)\right]=\lim\left(-\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{2n+3}}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)=-1$$

tem-se $\lim x_{2n}\neq\lim x_{2n+1}$, e então (x_n) diverge.

Como (x_n) diverge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n n\operatorname{sen}\frac{1}{n+2}-(-1)^{n+1}(n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{n+3}\right]$ diverge.

(24) Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n=\frac{1}{n+1}$. Atendendo a que $\lim x_n=0\in\mathbb{R}$, então (x_n) converge.

Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ converge absolutamente, pois $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\geq 0$ para todo o $n\in\mathbb{N}$, e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=x_1-\lim x_n=\frac{1}{2}-\lim\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}.$$

20

(1) Como $\dfrac{2^{2n}}{3^n+1} = \dfrac{4^n}{3^n+1} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}} \to (+\infty)\,\dfrac{1}{1+0} = +\infty \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{2n}}{3^n+1}$ diverge.

(2) Como $\dfrac{2n-1}{3n+2} = \dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} \to \dfrac{2}{3} \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2}$ diverge.

(3) Como $\lim \left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\lim \dfrac{n+1}{n}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right)^2 = 1^2 = 1 \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$ diverge.

(4) Seja $x_n = \dfrac{(-1)^n e^{n+1}}{1+2^n}$. Como

$$\lim x_{2n} = \lim \frac{e^{2n+1}}{1+2^{2n}} = \lim \left[\left(\frac{e^2}{4}\right)^n \frac{e}{\frac{1}{4^n}+1}\right] = (+\infty)\,\frac{e}{0+1} = +\infty \neq 0,$$

então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^{n+1}}{1+2^n}$ diverge.

(5) Seja $x_n = (-1)^n \dfrac{3^n}{n^3 2^n}$. Como

$$\lim x_{2n} = \lim \frac{3^{2n}}{(2n)^3\, 2^{2n}} = \lim \left(\frac{1}{8}\frac{9^n}{n^3 4^n}\right) = \lim \left(\frac{1}{8}\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^n}{n^3}\right) = \frac{1}{8}(+\infty) = +\infty \neq 0,$$

então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{3^n}{n^3 2^n}$ diverge.

(6) Seja $x_n = \cos(n^2\pi)$. Como

$$\lim x_{2n} = \lim \cos\left(4n^2\pi\right) = \lim 1 = 1 \neq 0,$$

então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos(n^2\pi)$ diverge.

(7) Como $\lim \cos(e^{-n}) = \cos(e^{-\infty}) = \cos 0 = 1 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(e^{-n})$ diverge.

(8) Como $\lim \dfrac{n!}{n^2+2^n} = \lim \left(\dfrac{n!}{2^n} \dfrac{1}{\dfrac{n^2}{2^n}+1} \right) = (+\infty)\dfrac{1}{0+1} = +\infty \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^2+2^n}$ diverge.

(9) Como $\cos^2 \dfrac{1}{n^n} \to \cos^2 \left(\dfrac{1}{+\infty} \right) = \cos^2 0 = 1 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos^2 \dfrac{1}{n^n}$ diverge.

(10) Como $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n \to e^2 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ diverge.

(11) Seja $x_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[5]{n}}{1+\log n}$. Como

$$\lim x_{2n} = \lim \frac{\sqrt[5]{2n}}{1+\log(2n)} = \lim \left(\frac{(2n)^{1/5}}{\log(2n)} \frac{1}{\dfrac{1}{\log(2n)}+1} \right) = (+\infty)\frac{1}{0+1} = +\infty \neq 0,$$

então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt[5]{n}}{1+\log n}$ diverge.

(12) Como $e^{1/n!} \to e^{1/(+\infty)} = e^0 = 1 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{1/n!}$ diverge.

(13) Seja $x_n = \dfrac{1}{n!\,(-n)^{-n}}$. Como $x_{2n} = \dfrac{(2n)^{2n}}{(2n)!} \to +\infty \neq 0$, então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!\,(-n)^{-n}}$ diverge.

(14) Como $\lim \dfrac{2+n!}{n!} = \lim \left(1+\dfrac{2}{n!}\right) = 1 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2+n!}{n!}$ diverge.

(15) Como $\lim \sqrt[n]{e} = \lim \dfrac{e}{e} = \lim 1 = 1 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{e}$ diverge.

(16) Seja $x_n = [1+(-1)^n]$. Como $x_{2n} = 2 \to 2 \neq 0$, então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [1+(-1)^n]$ diverge.

(17) Seja $x_n = \cos\left(\dfrac{(-2)^n}{n!}\right)$. Como $\lim x_{2n} = \lim\left[\cos\left(\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}\right)\right] = \cos 0 = 1 \neq 0$, então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\dfrac{(-2)^n}{n!}\right)$ diverge.

(18) Seja $x_n = \dfrac{1}{2+\cos(n\pi)}$. Como $\lim x_{2n} = \lim \dfrac{1}{2+\cos(2n\pi)} = \lim \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$, então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2+\cos(n\pi)}$ diverge.

(19) Seja $x_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$. Como

$$\lim x_{2n+1} = \lim\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{(-1)^{2n+1}} = \lim\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{-1} = \lim(2n+1) = +\infty \neq 0,$$

então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$ diverge.

(20) Como $\dfrac{n2^n}{n+2^n} = \dfrac{n}{\dfrac{n}{2^n}+1} \to \dfrac{+\infty}{0+1} = +\infty \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n2^n}{n+2^n}$ diverge.

(21) Como $\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+0} = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$ diverge.

(22) Como $\dfrac{1}{n\log(1+1/n)} = \dfrac{1/n}{\log(1+1/n)} \to 1 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\log(1+1/n)}$ diverge.

(23) Seja $x_n = (-1)^n \dfrac{n+\log n}{2n+\log^2 n}$. Como

$$\lim x_{2n} = \lim \frac{2n+\log(2n)}{4n+\log^2(2n)} = \lim \frac{1+\dfrac{\log(2n)}{2n}}{2+\dfrac{\log^2(2n)}{2n}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n+\log n}{2n+\log^2 n}$ diverge.

(24) Como $2^{-1/n} \to 2^0 = 1 \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-1/n}$ diverge.

(25) Seja $x_n = (-1)^{n+2}\dfrac{n^2}{n^2+2}$. Como $x_{2n} = \dfrac{4n^2}{4n^2+2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2n^2}} \to \dfrac{1}{1+0} = 1 \neq 0$, então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+2}\dfrac{n^2}{n^2+2}$ diverge.

(26) Seja $x_n = [1+(-1)^n]^n$. Como $x_{2n} = [1+(-1)^{2n}]^{2n} = 2^{2n} \to +\infty \neq 0$, então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [1+(-1)^n]^n$ diverge.

(27) Como $n^n e^{-n} = \dfrac{n^n}{e^n} \to +\infty \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^n e^{-n}$ diverge.

(28) Seja $x_n = (-1)^n\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$. Como $x_{2n} = \dfrac{(2n+1)^{2n}}{2n^{2n}} = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n} \to e \neq 0$, então $x_n \nrightarrow 0$, e assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ diverge.

(29) Como $\dfrac{2^n}{1+\operatorname{arctg} n} \to \dfrac{+\infty}{1+\dfrac{\pi}{2}} = +\infty \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{1+\operatorname{arctg} n}$ diverge.

(30) Como $\operatorname{arcsen}\left(1-\dfrac{1}{n!}\right) \to \operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2} \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arcsen}\left(1-\dfrac{1}{n!}\right)$ diverge.

(31) Como $n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n} = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} \to 1 \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$ diverge.

(32) Como

$$\frac{(n+1)^{n+2}+2^n+n!}{\log n+(n^2+1)\,n^n} = \frac{n^2n^n}{n^2n^n}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n+\dfrac{1}{n^2}\dfrac{2^n}{n^n}+\dfrac{1}{n^2}\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{1}{n^2}\dfrac{\log n}{n^n}+1+\dfrac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n+\dfrac{1}{n^2}\dfrac{2^n}{n^n}+\dfrac{1}{n^2}\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{1}{n^2}\dfrac{\log n}{n^n}+1+\dfrac{1}{n^2}} \to \frac{(1+0)^2\,e+0.0+0.0}{0.0+1+0} = e \neq 0,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n+1)^{n+2}+2^n+n!}{\log n+(n^2+1)\,n^n}$ diverge.