Ficha 9
Resolução dos exercícios propostos

Cálculo de Limites

I.1 Calcule, se existirem, os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 0\cdot 0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{2xmx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2m}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2m}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2m}{(1+m^2)} = \frac{2m}{(1+m^2)}.$$

Para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite.

Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y = mx$ são diferentes.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$.

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2} = \frac{0^5}{0^8+(0-0^2)^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da parábola $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^8+(x^2-x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^8+0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^8} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{0^3} = \infty.$$

Assim, o limite direccional na vizinhança do ponto (0,0), ao longo da parábola $y = x^2$ não existe.

Logo, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0+0}{\sqrt{0^2+0^2}} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to0} f(x,mx) = \lim_{x\to0} \frac{x+mx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \lim_{x\to0} \frac{x+mx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to0} \frac{x+mx}{|x|\sqrt{1+m^2}}.$$

Calculemos os limites laterais no ponto x=0.

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x(1+m)}{x\sqrt{1+m^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{(1+m)}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{(1+m)}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Já não precisamos de calcular o limite lateral quando $x \to 0^-$, uma vez que o limite lateral $x \to 0^+$ é dependente de m.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Definição de limite

I.2 Calcule, se existir, o limite seguinte: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{0^3+0^3}{0^2+0^2} = \frac{0}{0} \text{(Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Quer isto dizer, que vamos determinar limites, ao longo de várias direcções, que passem pelo ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo os eixos coordenados:

- eixo dos xx:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+0^3}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

O limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = 0$ é zero.

- eixo dos yy:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} = \frac{0^3+y^3}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

O limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $x = 0$ é zero.

Como os limites na vizinhança do ponto (0,0), ao longo dos eixos coordenados, existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, isto é,

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0 : (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \wedge \left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon \Rightarrow \left|f(x,y)-0\right| < \delta.$$

Fixemos $\delta > 0$ qualquer.

Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se

$$\left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2} = \left\|(x-0,y-0)\right\|_{\mathbb{R}^2} = \left\|(x,y)\right\|_{\mathbb{R}^2} \underset{\substack{\text{Usando a norma}\\ \text{Euclideana}}}{=} \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

então $\left|f(x,y)-0\right| < \delta$.

Temos,

$$\left|f(x,y)-0\right| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0\right| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{\left|x^3+y^3\right|}{\left|x^2+y^2\right|} \underset{\substack{\uparrow\\ x^2+y^2>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}}{=} \frac{\left|x^3+y^3\right|}{x^2+y^2} \underset{\substack{\text{Desigualdade}\\ \text{Triangular}}}{\leq} \frac{\left|x^3\right|+\left|y^3\right|}{x^2+y^2} \underset{(*)}{\leq} \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \underset{\substack{\text{Por}\\ \text{hipótese}}}{<} 2\varepsilon < \delta \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\delta}{2}$$

Logo, basta tomar $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ para que

$$\forall\delta>0\ \exists 0<\varepsilon<\frac{\delta}{2} : (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \wedge \left\|(x,y)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon \Rightarrow \left|f(x,y)-0\right| < \delta.$$

Observação $(*)$ ***:***

Atendendo a que $\bullet |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$

$\bullet |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$

$\bullet\, x^2 \leq x^2+y^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$

$\bullet\, y^2 \leq x^2+y^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4)$

vem

$$\bullet \left|x^3\right| = \left|x^2 \cdot x\right| = x^2 |x| \underset{\text{Por 3 e 1}}{\leq} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \left|y^3\right| = \left|y^2 \cdot y\right| = y^2 |y| \underset{\text{Por 4 e 2}}{\leq} \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Continuidade

I. 3 – Considere a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude $f(x,y)$ quanto à continuidade.

<u>Resolução:</u>

Estudemos a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}^2$. Pela forma como f está definida, por ramos, iremos estudar a continuidade em duas partes:

<u>Num ponto $(x,y) \neq (0,0)$</u>

A função é contínua, porque é a soma, o produto e o quociente de funções contínuas em pontos onde o denominador não se anula.

<u>No ponto $(x,y) = (0,0)$</u>

A função f é contínua no ponto $(0,0)$ sse

$$\text{existe } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ e } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Comecemos por verificar se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Temos, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2} = \dfrac{2\cdot 0\cdot 0^2+3\cdot 0^3}{0^2+0^2} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminação).

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2x(mx)^2+3x^3}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2xm^2x^2+3x^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m^2x^3+3x^3}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(2m^2+3\right)}{x^2\left(1+m^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(2m^2+3\right)}{1+m^2} = \frac{2m^2+3}{1+m^2} \lim_{x\to 0} x = \frac{2m^2+3}{1+m^2} \cdot 0 = 0$$

Como os limites na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y = mx$ existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, isto é,

$$\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0 : (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \wedge \|(x,y)-(0,0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y)-0| < \delta.$$

Fixemos $\delta > 0$ qualquer.
Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x-0,y-0)\| = \|(x,y)\| \underset{\substack{\text{Usando a norma}\\ \text{Euclideana}}}{=} \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$$

então $|f(x,y)-0| < \delta$.
Temos,

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2}-0\right| = \left|\frac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|2xy^2+3x^3|}{|x^2+y^2|} \underset{\substack{\text{Desigualdade}\\ \text{triangular}}}{\le} \frac{|2xy^2|+|3x^3|}{|x^2+y^2|} = \frac{2|xy^2|+3|x^3|}{x^2+y^2}$$

$$\underset{(*)}{\le} \frac{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}+3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \frac{5(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 5\sqrt{x^2+y^2} \underset{\substack{\text{Por}\\ \text{hipótese}}}{<} 5\varepsilon < \delta \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\delta}{5}$$

Logo, basta tomar $\varepsilon < \dfrac{\delta}{5}$ para que

$$\forall\delta > 0\ \exists 0 < \varepsilon < \frac{\delta}{5} : (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \wedge \|(x,y)-(0,0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y)-0| < \delta.$$

Observação $(*)$ ***:***

Atendendo a que

- $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}, \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (1)$
- $|y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}, \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (2)$
- $x^2 \le x^2+y^2, \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (3)$
- $y^2 \le x^2+y^2, \forall x,y\in\mathbb{R}\quad (4)$

vem

- $|x^3| = |x^2\cdot x| = x^2|x| \underset{\text{Por 3 e 1}}{\le} (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}, \forall x,y\in\mathbb{R}$
- $|xy^2| = |x\cdot y^2| = y^2|x| \underset{\text{Por 4 e 1}}{\le} (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}, \forall x,y\in\mathbb{R}$

Por outro lado, como $f(0,0) = 0$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.
Assim, a função f é contínua no ponto (0,0).

Conclusão final:
A função f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

I.4 Verifique se a função $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{4x^2y^2+(y-x)^2}$ é prolongável por continuidade à origem.

Resolução:

A função f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$ sse o limite existe e é finito nesse ponto.

Temos que, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{4x^2y^2+(y-x)^2}=\dfrac{0^2\cdot 0^2}{4\cdot 0^2\cdot 0^2+(0-0)^2}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminação).

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{4x^2y^2+(y-x)^2}=\dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$

- segundo a direcção da recta $y=mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(mx)^2}{4x^2(mx)^2+(mx-x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2m^2x^2}{4x^2m^2x^2+(x(m-1))^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2m^2x^2}{4x^2m^2x^2+x^2(m-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2m^2x^2}{x^2\left(4m^2x^2+(m-1)^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^2}{4m^2x^2+(m-1)^2}.$$

$$=\frac{m^2\cdot 0^2}{4m^2\cdot 0^2+(m-1)^2}=\frac{0}{(m-1)^2}=0 \quad \text{com } m\neq 1$$

- segundo a direcção da recta $y=x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{4x^2x^2+(x-x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{4x^4+0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Logo, como o limite direccional segundo a recta $y=x$ é diferente dos limites direccionais segundo as rectas y=mx, com $m\neq 1$, então não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{4x^2y^2+(y-x)^2}$. Deste modo, podemos concluir que a função f não é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.