Análise e Síntese de Algoritmos

Fluxos Máximos [CLRS, Cap. 26]

2011/2012

Contexto

- Revisão [CLRS, Cap.1-13]
  - Fundamentos; notação; exemplos
- Algoritmos em Grafos [CLRS, Cap.21-26]
  - Algoritmos elementares
  - Árvores abrangentes
  - Caminhos mais curtos
  - Fluxos máximos
- Programação Linear [CLRS, Cap.29]
  - Algoritmos e modelação de problemas com restrições lineares
- Técnicas de Síntese de Algoritmos [CLRS, Cap.15-16]
  - Programação dinâmica
  - Algoritmos greedy
- Tópicos Adicionais [CLRS, Cap.32-35]
  - Emparelhamento de Cadeias de Caracteres
  - Complexidade Computacional
  - Algoritmos de Aproximação

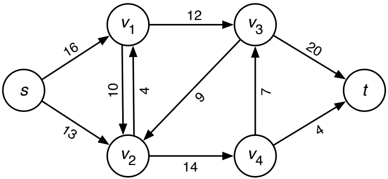
Resumo

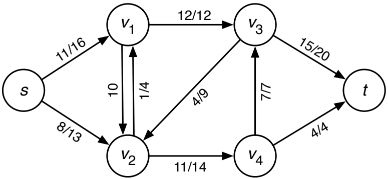
Problema

Problema: fornecer água a Lisboa

Pretende-se determinar qual o volume de água máximo (por segundo), que é possível fazer chegar a Lisboa a partir da Barragem de Castelo de Bode

- Existe uma rede de condutas de água que permitem o envio da água de Castelo de Bode para Lisboa
- Cada conduta apresenta uma capacidade limite, de metros cúbicos por segundo
- Objectivo: Encontrar um algoritmo eficiente para resolver este problema





Motivação

Fluxos Máximos em Grafos

Dado um grafo dirigido $G = (V, E)$:

- Com um vértice fonte s e um vértice destino t
- Em que cada arco (u, v) é caracterizado por uma capacidade não negativa $c(u, v)$
- A capacidade de cada arco (u, v) indica o valor limite de "fluxo" que é possível enviar de u para v através do arco (u, v)
- Pretende-se calcular o valor máximo de "fluxo" que é possível enviar do vértice fonte s para o vértice destino t, respeitando as restrições de capacidade dos arcos

Motivação

Aplicações

Envio de materiais em rede de transportes

- Água, petróleo ou gás
- Contentores
- Electricidade
- Bytes
- ...

Motivação

Fluxos Máximos em Grafos

Para redes de fluxo com múltiplas fontes e/ou destinos

- Definir super-fonte que liga a todas as fontes
- Definir super-destino ao qual ligam todos os destinos
- Capacidades infinitas entre super-fonte e fontes, e entre destinos e super-destino

Definições

Fluxos Máximos em Grafos

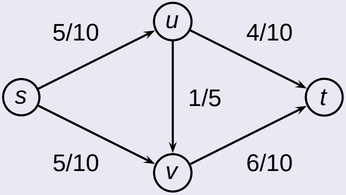
- Uma rede de fluxo $G = (V, E)$ é um grafo dirigido em que cada arco (u, v) tem capacidade $c(u, v) \geq 0$
  - Se $(u, v) \notin E$, então $c(u, v) = 0$
- Dois vértices especiais: fonte s e destino t
- Todos os vértices de G pertencem a um caminho de s para t
- Grafo é ligado, $|E| \geq |V| - 1$

- Um fluxo $G = (V, E)$ é uma função $f : V \times V \rightarrow R$ tal que:
  - Restrição de Capacidade: $f(u, v) \leq c(u, v)$, $\forall u, v \in V$
  - Simetria: $f(u, v) = -f(v, u)$, $\forall u, v \in V$
  - Conservação de Fluxo $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, $\forall u \in V - \{s, t\}$

Definições

Fluxos Máximos em Grafos

- Valor de um fluxo: $|f| = \sum_{v \in V} f(u,v)$
- Problema do Fluxo Máximo: Dada rede de fluxo G com fonte s e destino t, calcular o fluxo de valor máximo de s para t



Valor do Fluxo: 10

Fluxo Máximo: 20

Fluxo Máximo

Propriedades

- Dados conjuntos de vértices X e Y: $\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y)$
- Considere rede de fluxo $G = (V,E)$, uma função de fluxo f em G e $X,Y,Z \subseteq V$:
  - $f(X,X) = 0$
  - $f(X,Y) = -f(Y,X)$
  - Se $X \cap Y = \emptyset$:
    - $f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$
    - $f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$

Método Ford-Fulkerson

Método Ford-Fulkerson

- Redes residuais
- Caminhos de aumento
- Cortes em redes de fluxo
- Teorema do Fluxo-Máximo Corte-Mínimo
- Algoritmo Genérico de Ford-Fulkerson

Método Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson-Method(G, s, t)

1 Inicializar fluxo f a 0
2 **while** existe caminho de aumento p
3   **do** aumentar fluxo f utilizando p
4 **return** f

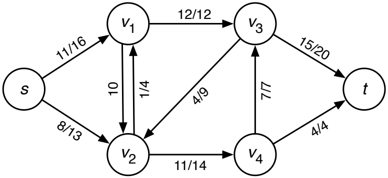
Rede Residual

Rede Residual

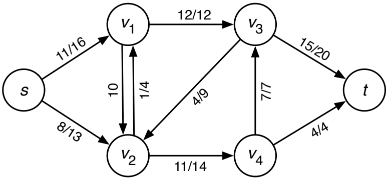
Dado $G = (V, E)$, um fluxo f, e vértices $u, v \in V$

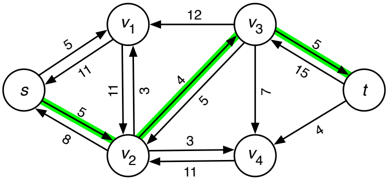
- $c_f(u,v)$ denota a capacidade residual de (u,v): fluxo líquido adicional que é possível enviar de u para v (fluxo que sobra)
- $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$
- $G_f = (V, E_f)$ denota a rede residual de G: onde $E_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$
- Cada arco (residual) de G_f permite apenas fluxo líquido positivo

Rede Residual: Exemplo

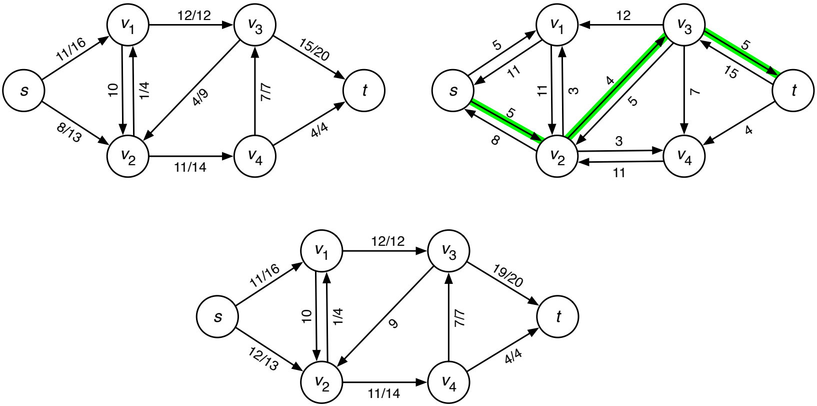


Rede Residual: Exemplo

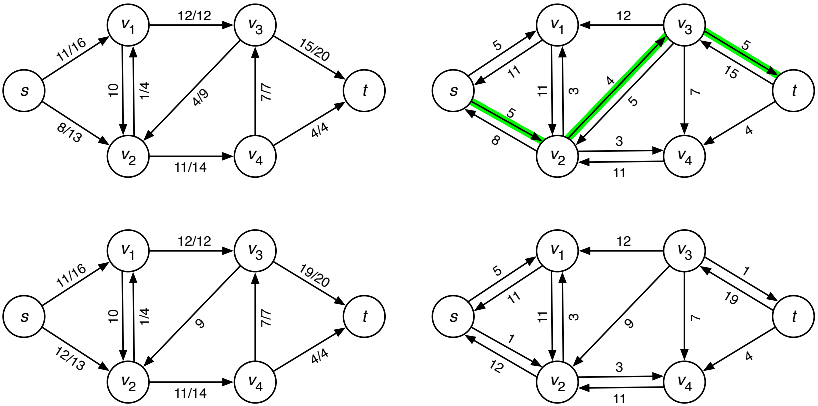




Rede Residual: Exemplo



Rede Residual: Exemplo



Rede Residual

Fluxo de Soma

Seja $G = (V, E)$ uma rede de fluxo, f um fluxo, G_f a rede residual de G e f' um fluxo em G_f

- Fluxo de soma $f + f'$ definido para cada par $u, v \in V$: $(f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$
- Fluxo de soma é um fluxo com valor $|f + f'| = |f| + |f'|$
- Propriedades de um fluxo são verificadas: restrição de capacidade, simetria e conservação de fluxo
- Observação: f' é definido em G_f e é um fluxo
- Cálculo do valor de fluxo

$$
\begin{aligned}
|f + f'| &= \sum_{v \in V} (f + f')(s, v) \\
&= \sum_{v \in V} (f(s, v) + f'(s, v)) \\
&= \sum_{v \in V} f(s, v) + \sum_{v \in V} f'(s, v) \\
&= |f| + |f'|
\end{aligned}
$$

Caminhos de Aumento

Caminho de Aumento

Dado rede residual $G = (V, E)$ e um fluxo f:

- caminho de aumento p:
  - caminho simples de s para t na rede residual G_f
- capacidade residual de p:
  - $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ em } p\}$
- $c_f(p)$ permite definir fluxo f_p em G_f, $|f_p| = c_f(p) > 0$
- $f' = f + f_p$ é um fluxo em G, com valor $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$

Cortes em Rede de Fluxo

Corte em Rede de Fluxo

Um corte (S,T) de $G=(V,E)$ é uma partição de V em S e $T=V-S$, tal que $s \in S$ e $t \in T$

- fluxo líquido do corte (S,T): $f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v)$
- capacidade do corte (S,T): $c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v)$

Cortes em Rede de Fluxo

Corte em Rede de Fluxo

Um corte (S,T) de $G=(V,E)$ é uma partição de V em S e $T=V-S$, tal que $s \in S$ e $t \in T$

- fluxo líquido do corte (S,T): $f(S,T)=\sum_{u \in S}\sum_{v \in T} f(u,v)$
- capacidade do corte (S,T): $c(S,T)=\sum_{u \in S}\sum_{v \in T} c(u,v)$

Fluxo através de um Corte

Se $G=(V,E)$ com fluxo f, então o fluxo líquido através de um corte (S,T) é $f(S,T)=|f|$

- $V=T \cup S$, pelo que $f(S,V)=f(S,T \cup S)=f(S,T)+f(S,S)$
- Logo, $f(S,T)=f(S,V)$, dado que $f(S,S)=0$
- $f(S,V)=f(s,V)+f(S-s,V)=f(s,V)=|f|$
- Obs: para $u \in S-s, f(u,V)=0$ (conservação de fluxo)

Cortes em Rede de Fluxo

Corte em Rede de Fluxo

Qualquer valor de fluxo é limitado superiormente pela capacidade de qualquer corte de G

- Seja (S, T) qualquer corte de G, e f um fluxo:

$$|f| = f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) \leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) = c(S,T)$$

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Seja $G = (V, E)$, com fonte s e destino t, e um fluxo f. Então as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para um corte (S, T) de G

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Seja $G = (V, E)$, com fonte s e destino t, e um fluxo f. Então as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para um corte (S, T) de G

$1 \rightarrow 2$

- Admitir que f é fluxo máximo em G mas que G_f tem caminho de aumento
- Então é possível definir um novo fluxo $f + f_p$ com valor $|f| + |f_p| > |f|$; uma contradição

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Seja $G = (V,E)$, com fonte s e destino t, e um fluxo f. Então as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S,T)$ para um corte (S,T) de G

$2 \rightarrow 3$

- $S = \{v \in V :$ existe caminho de s para v em$G_f\}$; $T = V - S$; $s \in S$ e $t \in T$
- Com $u \in S$ e $v \in T$, temos $f(u,v) = c(u,v)$, pelo que $|f| = f(S,T) = c(S,T)$

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

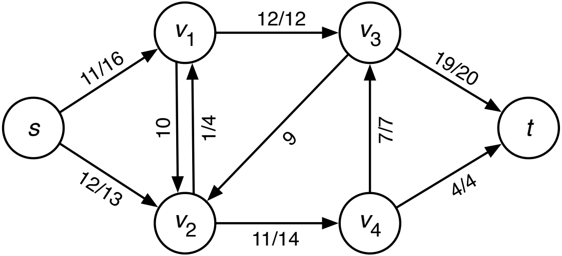
Seja $G = (V, E)$, com fonte s e destino t, e um fluxo f. Então as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para um corte (S, T) de G

$3 \rightarrow 1$

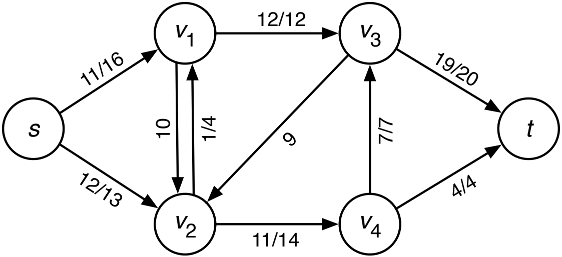
- Dado que $|f| \leq c(S, T)$, para qualquer corte (S, T) de G
- Como $|f| = c(S, T)$ (definido acima), então f é fluxo máximo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo: Exemplo



Corte mínimo?

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo: Exemplo



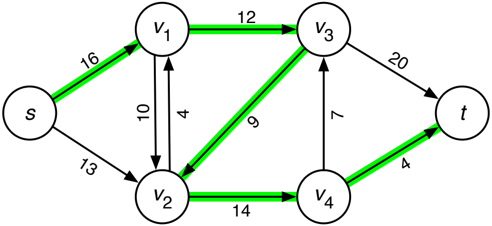
Corte mínimo? $(\{s, v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, t\})$

Algoritmo Ford-Fulkerson

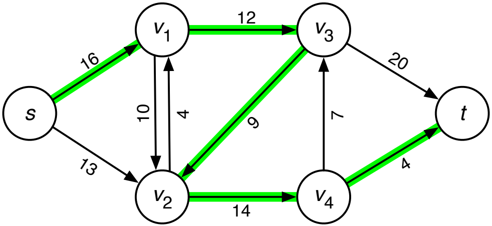
Ford-Fulkerson(G, s, t)

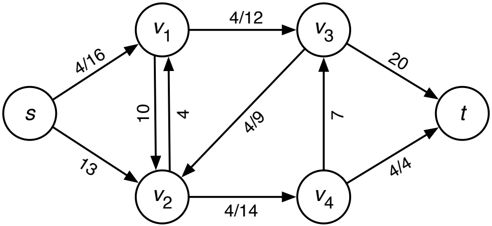
for each edge $(u, v) \in E[G]$
    do $f[u, v] \leftarrow 0$
        $f[v, u] \leftarrow 0$
while there exists a path p from s to t in G_f
    do $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$
        for each edge $(u, v) \in p$
            do $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$
                $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$

Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo

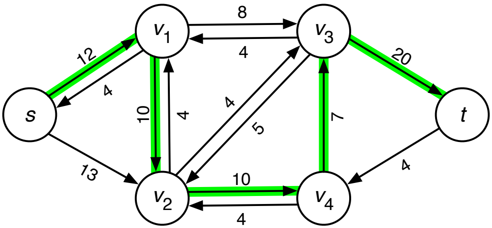


Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo

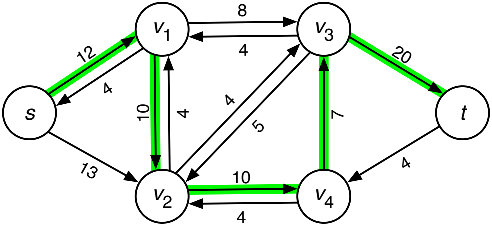


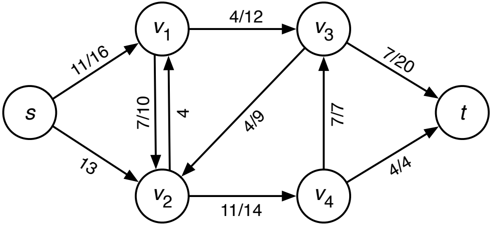


Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo

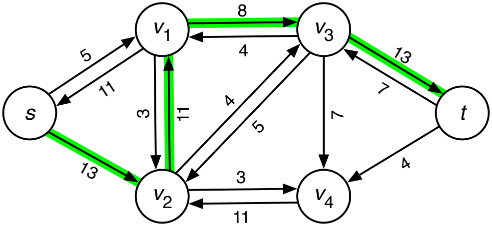


Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo

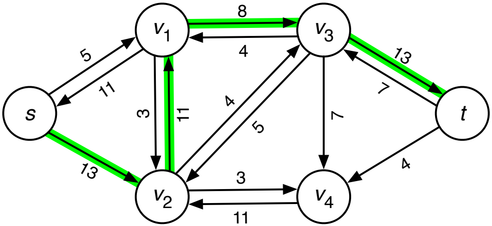


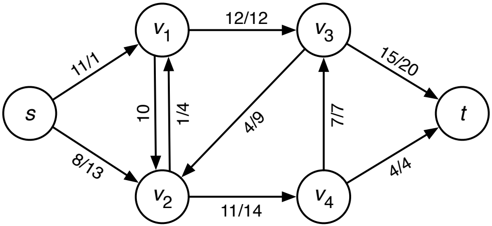


Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo

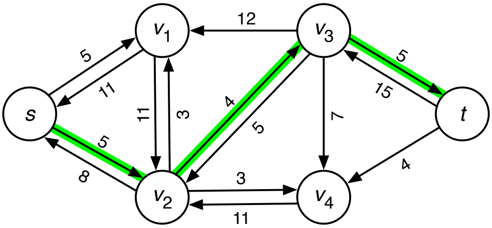


Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo

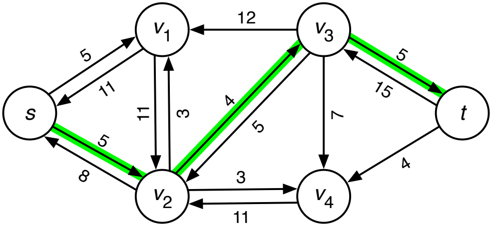


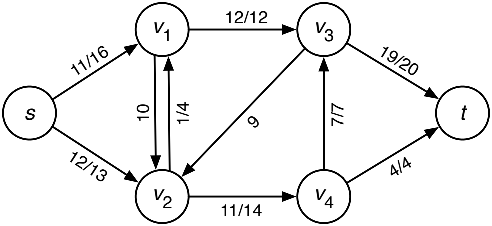


Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo

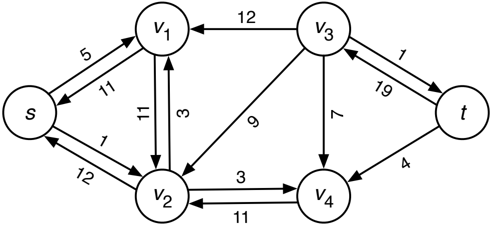


Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo





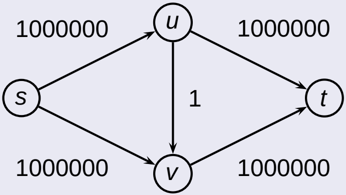
Algoritmo Ford-Fulkerson: Exemplo



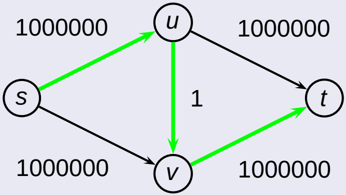
Algoritmo Ford-Fulkerson

Análise Algoritmo Básico

- Número de aumentos de fluxo pode ser elevado
- Ex: Fluxo máximo = 2000000
- No pior caso: número de caminhos de aumento é 2000000



Rede de Fluxo



Caminho de aumento p com $c_f(p) = 1$

Algoritmo Ford-Fulkerson

Análise Algoritmo Básico

- Número de caminhos de aumento limitado por valor máximo do fluxo $|f^*|$
- Complexidade: $O(E\ |f^*|)$
- Por exemplo: DFS para encontrar caminho de aumento

Algoritmo Edmonds-Karp

Algoritmo Edmonds-Karp

- Implementação do método de Ford-Fulkerson
- Escolher caminho de aumento mais curto no número de arcos
- Utilizar BFS em G_f para identificar caminho mais curto
- Complexidade: $O(V E^2)$

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

Definições

- $\delta_f(s, v)$: distância mais curta de s para v na rede residual G_f
- $\delta_{f'}(s, v)$: distância mais curta de s para v na rede residual $G_{f'}$
- Sequência de eventos considerada:

$$f \rightarrow G_f \rightarrow BFS \rightarrow p \rightarrow f' \rightarrow G_{f'} \rightarrow BFS \rightarrow p'$$

Resultados:

- $\delta_f(s, v)$ cresce monotonamente com cada aumento de fluxo
- Número de aumentos de fluxo é $O(V\ E)$
- Tempo de execução é $O(V\ E^2)$
- $O(E)$ devido a BFS e aumento de fluxo a cada passo

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

$\delta_f(s, v)$ cresce de forma monótona com cada aumento de fluxo

- Prova por contradição: considere-se o primeiro $v \in V$ tal que, após aumento de fluxo (de f para f'), a distância do caminho mais curto diminui, $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

$\delta_f(s,v)$ cresce de forma monótona com cada aumento de fluxo

- Prova por contradição: considere-se o primeiro $v \in V$ tal que, após aumento de fluxo (de f para f'), a distância do caminho mais curto diminui, $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$
- Seja $p =< s, \ldots, u, v >$ o caminho mais curto de s para v em $G_{f'}$
  - $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$
  - $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ (porque v é o primeiro que falha)

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

$\delta_f(s,v)$ cresce de forma monótona com cada aumento de fluxo

- Prova por contradição: considere-se o primeiro $v \in V$ tal que, após aumento de fluxo (de f para f'), a distância do caminho mais curto diminui, $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$
- Seja $p =< s,\ldots,u,v >$ o caminho mais curto de s para v em $G_{f'}$
  - $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$
  - $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ (porque v é o primeiro que falha)
- $(u,v) \in E_f$: $\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1 \leq \delta_{f'}(s,u) + 1 = \delta_{f'}(s,v)$

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

$\delta_f(s,v)$ cresce de forma monótona com cada aumento de fluxo

- Prova por contradição: considere-se o primeiro $v \in V$ tal que, após aumento de fluxo (de f para f'), a distância do caminho mais curto diminui, $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$
- Seja $p =< s,\ldots,u,v >$ o caminho mais curto de s para v em $G_{f'}$
  - $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$
  - $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$ (porque v é o primeiro que falha)
- $(u,v) \in E_f$: $\delta_f(s,v) \leq \delta_f(s,u) + 1 \leq \delta_{f'}(s,u) + 1 = \delta_{f'}(s,v)$
- $(u,v) \notin E_f$ e $(u,v) \in E_{f'}$: aumento de fluxo de v para u
  - Aumento sempre pelo caminho mais curto, então o caminho mais curto entre s e u em G_f tem como último arco (v,u):
  - Então, $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \leq \delta_{f'}(s,u) - 1 = \delta_{f'}(s,v) - 2$ Contradição !

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

Número de aumentos de fluxo é $O(V\ E)$

- arco (u, v) na rede residual G_f é crítico se capacidade residual de p é igual à capacidade residual do arco
    - arco crítico desaparece após aumento de fluxo
- Quantas vezes pode arco (u, v) ser arco crítico?

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

Número de aumentos de fluxo é $O(V\ E)$

- arco (u,v) na rede residual G_f é crítico se capacidade residual de p é igual à capacidade residual do arco
  - arco crítico desaparece após aumento de fluxo
- Quantas vezes pode arco (u,v) ser arco crítico?
  - Como caminhos de aumento são caminhos mais curtos, $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) + 1$
  - (u,v) só volta à rede residual após arco (v,u) aparecer em caminho de aumento (com fluxo f')

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

Número de aumentos de fluxo é $O(V\ E)$

- arco (u,v) na rede residual G_f é crítico se capacidade residual de p é igual à capacidade residual do arco
  - arco crítico desaparece após aumento de fluxo
- Quantas vezes pode arco (u,v) ser arco crítico?
  - Como caminhos de aumento são caminhos mais curtos, $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) + 1$
  - (u,v) só volta à rede residual após arco (v,u) aparecer em caminho de aumento (com fluxo f')

Como,	$\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) + 1$
Dado que,	$\delta_f(s,v) \leq \delta_{f'}(s,v)$ (resultado anterior)
Obtém-se,	$\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) + 1 \geq \delta_f(s,v) + 1 = \delta_f(s,u) + 2$

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

Número de aumentos de fluxo é $O(V\ E)$

- Distância de s a u aumenta pelo menos de duas unidades entre cada par de vezes que (u,v) é crítico
  - No limite, distância de s a u é não superior a $|V| - 2$
  - Pelo que arco (u,v) pode ser crítico $O(V)$ vezes
  - Existem $O(E)$ pares de vértices
  - Na execução do algoritmo de Edmonds-Karp o número total de vezes que arcos podem ser críticos é $O(V\ E)$
  - Como cada caminho de aumento tem um arco crítico, então existem $O(V\ E)$ caminhos de aumento

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise Edmonds-Karp

Número de aumentos de fluxo é $O(V\ E)$

- Distância de s a u aumenta pelo menos de duas unidades entre cada par de vezes que (u,v) é crítico
  - No limite, distância de s a u é não superior a $|V|-2$
  - Pelo que arco (u,v) pode ser crítico $O(V)$ vezes
  - Existem $O(E)$ pares de vértices
  - Na execução do algoritmo de Edmonds-Karp o número total de vezes que arcos podem ser críticos é $O(V\ E)$
  - Como cada caminho de aumento tem um arco crítico, então existem $O(V\ E)$ caminhos de aumento
- Complexidade de Edmonds-Karp é $O(V\ E^2)$
  - Complexidade de BFS é $O(V+E)=O(E)$
  - Aumento de fluxo em O(E)

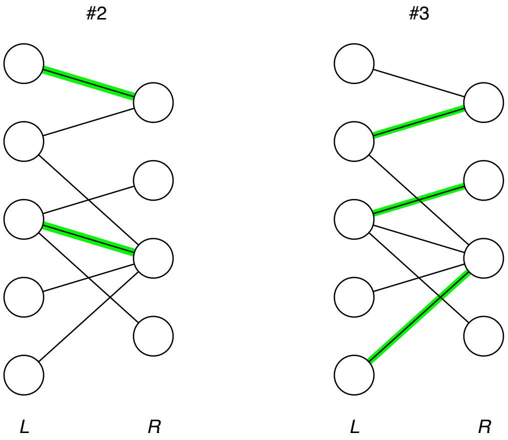
Emparelhamento Bipartido Máximo

Emparelhamento Bipartido Máximo

Considere um grafo $G = (V, E)$ não dirigido

- Emparelhamento:
  - $M \subseteq E$, tal que para qualquer vértice $v \in V$ não mais do que um arco em M é incidente em v
- Emparelhamento Máximo:
  - Emparelhamento cardinalidade máxima (na dimensão de M)
- Grafo Bipartido:
  - Grafo pode ser dividido em $V = L \cup R$, em que L e R são disjuntos e em que todos os arcos de E estão entre L e R
- Emparelhamento Bipartido Máximo:
  - Emparelhamento máximo em que G é bipartido

Emparelhamento Bipartido Máximo: Exemplo



Emparelhamento Bipartido Máximo

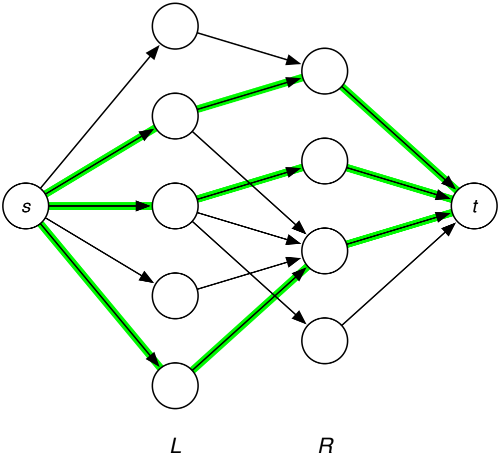
Utilização Redes de Fluxo

Construir grafo $G' = (V', E')$:

$$\begin{aligned} V' = &\quad V \cup \{s, t\} \\ E' = &\quad \{(s, u) : u \in L\} \cup \\ &\quad \{(u, v) : u \in L, v \in R, \text{ e } (u, v) \in E\} \cup \\ &\quad \{(v, t) : v \in R\} \end{aligned}$$

- Atribuir capacidade unitária a cada arco de E'
- Emparelhamento bipartido máximo em G equivale a encontrar fluxo máximo em G'

Emparelhamento Bipartido Máximo: Exemplo



Emparelhamento Bipartido Máximo

Análise da Correcção

1. Dados G e G', se M é um emparelhamento em G, existe um fluxo f de valor inteiro em G', com $|f| = |M|$

- Seja M um emparelhamento, e $(u,v) \in M$
- Definir f utilizando arcos de M, $f(s,u) = f(u,v) = f(v,t) = 1$
- Para restantes arcos $(u,v) \in E', f(u,v) = 0$
- Os caminhos $s \to u \to v \to t$ para todo o $(u,v) \in M$ são disjuntos em termos dos vértices, com excepção de s e t
- Como existem $|M|$ caminhos, cada um com uma contribuição de uma unidade de fluxo para o fluxo total f, $|f| = |M|$

Emparelhamento Bipartido Máximo

Análise da Correcção

2. Dados G e G', se $|f|$ é um fluxo de valor inteiro em G', existe um emparelhamento M em G, com $|f| = |M|$

- Definir $M = \{(u,v) : u \in L, v \in R \text{ e } f(u,v) > 0\}$
  - Para cada $u \in L$, existe no máximo um $v \in R$ tal que $f(u,v) = 1$
  - Apenas um arco incidente com capacidade 1
  - Capacidades são inteiras
  - De forma simétrica para $v \in R$
- Logo M é um emparelhamento
- $|M| = f(L,R) = f(s,L) = f(s,V') = |f|$

Emparelhamento Bipartido Máximo

Análise da Correcção

- Se todas as capacidades têm valor inteiro, então para fluxo máximo f, $|f|$ é inteiro
  - Indução no número de iterações do algoritmo genérico de Ford-Fulkerson
- Emparelhamento bipartido máximo $|M|$ em G corresponde a $|f|$, em que f é o fluxo máximo de G'
  - Se $|M|$ é emparelhamento máximo em G, e $|f|$ não é máximo em G', então existe f' que é máximo
  - f' é inteiro, $|f'| > |f|$
  - e f' corresponde a emparelhamento $|M'|$, com $|M'| > |M|$; Contradição!

Emparelhamento Bipartido Máximo

Análise da Complexidade

- A aplicação do algoritmo genérico de Ford-Fulkerson tem complexidade $O(E\ |f^*|)$
- Emparelhamento bipartido máximo é não superior a $\min(|L|, |R|) = O(V)$ e tem valor inteiro (i.e., no caso do emparelhamento máximo, $|f^*| = O(V)$)
- Complexidade de identificação do emparelhamento bipartido máximo é $O(V\ E)$