Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^{o} **semestre 17/18**

2^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark
20 de novembro de 2017 (18:00)

Teste 201

Nome:
Número:

O teste que vai realizar tem a duração de **60 minutos** e consiste na resolução de **6 problemas**. Os 3 primeiros são de escolha múltipla; cada resposta em branco vale 0 valores, **e cada resposta errada vale -1/3 da respectiva classificação.** O quarto problema é de resposta múltipla e não desconta. Os dois últimos problemas são de resposta aberta, devendo por isso **apresentar os cálculos** efetuados e/ou **justificar** cuidadosamente as suas respostas.

NOTA FINAL:

Problema 1 (0.6 valores)

Sabendo que a matriz inversa da matriz por blocos $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & C & I \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ X & I & 0 \\ Y & Z & I \end{bmatrix}$, assinale a única afirmação **verdadeira**.

☐ (a) $X=-A$, $Y=-B$, $Z=-C$; ☐ (b) $X=A^{-1}$, $Y=-BAC$, $Z=C^{-1}$;
☒ (c) $X=-A$, $Y=-B+CA$, $Z=-C$; ☐ (d) $X=A^{-1}$, $Y=-B+CA$, $Z=C^{-1}$

Problema 2 (1.2 valores)

Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C=3B^{-1}A^T.$$

(a) **(0.6 val.)** Calcule o determinante da matriz A. A única resposta **correta** é

☐ i) $\det(A)=6$ ☐ ii) $\det(A)=8$ ☐ iii) $\det(A)=10$ ☒ iv) $\det(A)=12$

(b) **(0.6 val.)** Calcule o determinante da matriz C. A única resposta **correta** é

☒ i) $\det(C)=9$ ☐ ii) $\det(C)=8$ ☐ iii) $\det(C)=7$ ☐ iv) $\det(C)=6$

Problema 3 (0.6 valor)
Para que valores de λ formam os vectores

$$\mathbf{u}_1 = (\ 1,\ \ 4,\ \ 3\ )\,,\ \mathbf{u}_2 = (\ 2,\ \ 8,\ \ 6\ )\,,\ \mathbf{u}_3 = (\ 1,\ \ 2\lambda,\ \ 3\ )\ \text{e}\ \mathbf{u}_4 = (\ 1,\ \ 4,\ \ 3\lambda\ )$$

um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$? A resposta **correta** é

☒ (a) $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq 2$ ☐ (b) $\lambda \neq 3 \wedge \lambda \neq 4$ ☐ (c) $\lambda \neq -1 \wedge \lambda \neq 2$ ☐ (d) $\lambda \neq 7 \wedge \lambda \neq 8$

Problema 4 (0.6 valor)
Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço dos polinómios reais de grau menor ou igual a n. Selecione **todos** os conjuntos de polinómios que são subespaços do espaço vetorial $\mathcal{P}_n$:

☒ (a) o conjunto de polinómios ímpares, i.e. $\mathbf{p}(t) = -\mathbf{p}(-t)$;
☐ (b) o conjunto $\mathcal{P}_4$ de polinómios reais de grau exatamente igual a 4;
☒ (c) o conjunto de polinómios que são zero para $t = 0$, i.e. $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$;
☐ (d) o conjunto de polinómios com coeficientes inteiros.

Problema 5 (1 valor)
Considere nas alíneas seguintes os vários problemas de computação gráfica $2D$ relativamente ao quadrado de vértices $(1,-2)$, $(2,-2)$, $(1,-3)$ e $(2,-3)$.

(a) **(0.4 val.)** Usando coordenadas homogéneas, construa a matriz que permite deslocar o vértice $\mathbf{p}=(1,-2)$ para a origem.

(b) **(0.6 val.)** Usando coordenadas homogéneas, construa a matriz que permite rodar o quadrado em torno do ponto $\mathbf{p}=(1,-2)$ num ângulo de $\pi/4$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (0.2) (0.2) 0.4

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.2 $\begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\operatorname{sen}\pi/4 & 0 \\ \operatorname{sen}\pi/4 & \cos\pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 0.2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\frac{3}{2}\sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

0.2

Problema 6 (1 valor)
Seja A uma matriz quadrada, $n\times n$, tal que $A^k=0$ para $k=3$.

(a) **(0.6 val.)** Calcule $(I-A)(I+A+A^2)$ e $(I+A)(I-A+A^2)$.

(b) **(0.4 val.)** Mostre que $(I-A)$ e $(I+A)$ são invertíveis.

(a) $(I-A)(I+A+A^2) = I+\underbrace{\cancel{A}+\cancel{A^2}-\cancel{A}-\cancel{A^2}}_{=0}-\underbrace{A^3}_{=0} = I$ 0.3

$(I+A)(I-A+A^2) = I-\underbrace{\cancel{A}+\cancel{A^2}+\cancel{A}-\cancel{A^2}}_{=0}+\underbrace{A^3}_{=0} = I$ 0.3

(b) Pelo TMI: $\exists\, C, n\times n : (I-A)C=I$ e $\exists\, D, n\times n :$ $(I+A)D=I$ 0.2 , logo $(I-A)$ e $(I+A)$ são invertíveis 0.2