Matemática Discreta
Guião Aula Teorico-prática 1

- **Breve apresentação da unidade curricular**

- **Início da matéria**

SOMATÓRIOS E CÁLCULO DE FORMAS FECHADAS DE SOMATÓRIOS

(Caps 4 e 5 do livro)

SOMATÓRIOS E CÁLCULO DE FORMAS FECHADAS DE SOMATÓRIOS (Caps 4 e 5 do livro)

Em CDI I:

Prove por indução que para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$ se verifica a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

SOMATÓRIOS E CÁLCULO DE FORMAS FECHADAS DE SOMATÓRIOS (Caps 4 e 5 do livro)

Em CDI I:

Prove por indução que para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$ se verifica a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Em EMD:

Encontre uma forma fechada para

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + k}$$

APLICAÇÕES

Entre outras: análise da eficiência de algoritmos imperativos

Algorithm	Time Complexity			Space Complexity
	Best	Average	Worst	Worst
Quicksort	Ω(n log(n))	Θ(n log(n))	O(n^2)	O(log(n))
Mergesort	Ω(n log(n))	Θ(n log(n))	O(n log(n))	O(n)
Timsort	Ω(n)	Θ(n log(n))	O(n log(n))	O(n)
Heapsort	Ω(n log(n))	Θ(n log(n))	O(n log(n))	O(1)
Bubble Sort	Ω(n)	Θ(n^2)	O(n^2)	O(1)
Insertion Sort	Ω(n)	Θ(n^2)	O(n^2)	O(1)
Selection Sort	Ω(n^2)	Θ(n^2)	O(n^2)	O(1)
Tree Sort	Ω(n log(n))	Θ(n log(n))	O(n^2)	O(n)
Shell Sort	Ω(n log(n))	Θ(n(log(n))^2)	O(n(log(n))^2)	O(1)
Bucket Sort	Ω(n+k)	Θ(n+k)	O(n^2)	O(n)
Radix Sort	Ω(nk)	Θ(nk)	O(nk)	O(n+k)
Counting Sort	Ω(n+k)	Θ(n+k)	O(n+k)	O(k)
Cubesort	Ω(n)	Θ(n log(n))	O(n log(n))	O(n)

NOTAÇÃO

CALCULAR FORMAS FECHADAS DE SOMATÓRIOS

Existem vários métodos: o método a usar depende do tipo de somatório

$$\sum_{k=p}^{n} u_k \qquad (p, n \in \mathbb{N}), n \geq p$$

Exemplos

$\boxed{u_k}$	**perturbação da soma** (cap 4)	**cálculo finito explícito** (cap 5)	**cálculo finito implícito** (cap 5)
$a_n k^n + \ldots + a_1 k + a_0$ (polinómio)	$\surd$		$\surd$ (potência fatorial com expoente natural)
$\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x)$, $q(x)$ polinómios)			$\surd$ (potência fatorial com expoente negativo)
a^k ou $k^p a^k$ ($a \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$)	$\surd$	$\surd$	$\surd$ (integração finita por partes)

CÁLCULO (INFINITESIMAL)

$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

Derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ou

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Teorema fundamental do cálculo

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

CÁLCULO FINITO

$\boxed{u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}}$ (sucessões)

$(u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R})$

Derivada finita:

$$u'_n = u_{n+1} - u_n$$

Teorema fundamental do cálculo finito

$$\sum_{k=p}^{n} (u_k)' = u_{n+1} - u_p$$

CÁLCULO FINITO

DEFINIÇÃO: u_k $(k \in \mathbb{N})$ sucessão

OUTRA NOTAÇÃO:

EXEMPLOS/EXERCÍCIOS:

- Lista 1 1.1b) $u_k = 3k$

- Lista 1 1.1c) $u_k = k^2$

Também existem regras de derivação (soma, produto, quociente,..)

- Lista 1 2.1b) Soma: $(u_k + v_k)' = u_k' + v_k'$

- Lista 1 2.1c) Produto: $(u_k \times v_k)' = u_k' \times v_{k+1} \; + \; u_k \times v_k'$ (TPC)

<u>TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO FINITO:</u> u_k $(k \in \mathbb{N})$ sucessão

Justificação:

Cálculo de formas fechadas de somatórios

PRIMEIRO MÉTODO:

- útil para somatórios $\sum_{k=p}^{n} u_k$ com

$$u_k = a^k \qquad \text{ou} \qquad u_k = k^p a^k \qquad (a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N})$$

- baseia-se diretamente na derivada finita de u_k e no TFCF

EXEMPLO: Calcular forma fechada para $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 5^k}$ (Lista 1 2.2 b))

1. Derivada finita do termo geral

2. Aplicar somatório a ambos os lados da igualdade anterior, e depois aplicar TFCF ao lado esquerdo

3. Manipular igualdade anterior para obter forma fechada pretendida

EXEMPLO: Calcular forma fechada para $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k2^k}$. (Lista 1 2.2 h))

1. Derivada finita do termo geral

2. Aplicar somatório a ambos os lados da igualdade anterior, e depois aplicar TFCF ao lado esquerdo

3. Manipular igualdade anterior para obter forma fechada pretendida