Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

1º Ficha C1

1. Considere a sucessão majorada u_n, definida por

$$u_1 = \sqrt{2}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \qquad n \in \mathbb{N}$$

   a) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é estritamente crescente.

   b) A sucessão u_n é convergente? Justifique.

2. Determine, caso existam, os limites das sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{2\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+n}, \qquad v_n = \frac{3^{2n}}{9^n + 2^{3n}}$$

Resolução.

1. a) Mostre-se por indução matemática, que $u_{n+1} - u_n > 0, \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}$

   1.Para $n = 1$, $x_2 - x_1 = \sqrt{\sqrt{2}+2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+2}+\sqrt{2}} > 0$

   2.Para $n = m$ mostre-se que se $u_{m+1} - u_m > 0$ então $u_{m+2} - u_{m+1} > 0$.
   Da definição da sucessão, tem-se

$$u_{m+2} - u_{m+1} = \sqrt{u_{m+1}+2} - \sqrt{u_m + 2} = \frac{\overbrace{u_{m+1} - u_m}^{\text{(da hipótese de indução) } >0}}{\underbrace{\sqrt{u_{m+1}+2} + \sqrt{u_m+2}}_{>0}} > 0$$

   Pelo princípio de indução matemática $u_{n+1} - u_n > 0, \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}$, isto é, a sucessão u_n é estritamente crescente.

   b) Da alínea anterior, como u_n é estritamente crescente é limitada inferiormente, sendo o seu primeiro termo, u_1, um dos minorantes do conjunto dos seus termos. Sendo u_n também majorada conclui-se que a sucessão u_n é uma sucessão limitada. A sucessão u_n é assim convergente pois é uma sucessão monótona e limitada.

2.

$$u_n = \frac{2\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+n} = \frac{\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0}{0+1} = 0,$$

uma vez que as sucessões $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}$ convergem para zero e a adição, produto e quociente de sucessões convergentes é igualmente convergente.

$$v_n = \frac{3^{2n}}{9^n + 2^{3n}} = \frac{9^n}{9^n + 8^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1,$$

uma vez que a sucessão geometrica c^n converge para zero, sempre que $|c| < 1$,($c = \frac{8}{9}$), e a adição, produto e quociente de sucessões convergentes é igualmente convergente.

▪

1º Ficha B1

1. Mostre por indução matemática que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Determine, caso existam, os limites das sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{n}{2+n^2}, \qquad v_n = \frac{2^n}{3^{n+1} + 2^{-n}}$$

3. Determine em $\mathbb{R}$, caso existam, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto U definido por

$$U = \{x \in \mathbb{R} : \quad x = \frac{n}{2+n^2}, \quad n \in \mathbb{N}\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$$

.

Resolução.

1. Mostre-se por indução matemática, que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall}$

1.Para $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} \Leftrightarrow 2 = 2$ (p.v.)
2.Para $n = m$ mostre-se que se
$\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$ então $\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{m} k(k+1) + (m+1)(m+2), \text{(pela hip. de indução, tem-se)}$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{3} + (m+1)(m+2) = (m+1)(m+2)\left(\frac{m}{3} + 1\right) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$$

Pelo princípio de indução matemática a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.

$$u_n = \frac{n}{2+n^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{0+1} = 0,$$

uma vez que as sucessões $\frac{1}{n}, \frac{1}{n\,2}$ convergem para zero e a adição, produto e quociente de sucessões convergentes é igualmente convergente.

$$v_n = \frac{2^n}{3^{n+1}+2^{-n}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{1}{6}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{3+0} = 0,$$

uma vez que a sucessão geometrica c^n converge para zero, sempre que $|c| < 1$,($c = \frac{2}{3}$ e $c = \frac{1}{6}$), e a adição, produto e quociente de sucessões convergentes é igualmente convergente.

3. Da alínea anterior, como u_n é convergente então a sucessão é limitada, sendo o conjunto U, um conjunto limitado, não sendo vazio, do axioma do supremo existe o supremo e o infimo do conjunto U. Vejamos agora que a sucessão é decrescente.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2+(n+1)^2} - \frac{n}{2+n^2} = \frac{2-n-n^2}{(2+(n+1)^2)(2+n^2)} \leq 0$$

Sendo a sucessão u_n uma sucessão decrescente de termos positivos e convergente para zero, $0 < u_n \leq u_1 = \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim o conjunto dos majorantes de U é o conjunto $[\frac{1}{3}, +\infty[$, o conjunto dos minorantes de U é o conjunto $]-\infty, 0]$, o supremo de U é $\frac{1}{3}$ e sendo $u_1 = \frac{1}{3}$ um elemento de U, existe o máximo de U que é $\frac{1}{3}$, o infimo de U é 0 e não existe o minimo de U pois $u_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}$.

∎

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC-T, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

1º Ficha A1

Nome: ____

Número: ____________________ Curso: ____________________

1. Considere a sucessão de termos positivos, u_n, definida por

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{6} \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é estritamente decrescente.

b) A sucessão u_n é convergente? Justifique.

2. Determine, caso existam, os limites das sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{1 + n}, \qquad v_n = \frac{2^{2n}}{4^{n+1} + 1}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

1º Ficha A2

Nome: ______________________________

Número: ________________ Curso: ________________

1. Considere a sucessão de termos positivos, u_n, definida por

$$u_1 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{4} \qquad n \in \mathbb{N}$$

   a) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é estritamente decrescente.

   b) A sucessão u_n é convergente? Justifique.

2. Determine, caso existam, os limites das sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + 2}{2 + n^2}, \qquad v_n = \frac{3^{2n}}{9^{n+1} + 3}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

1º Ficha B2

Nome: ______________________________

Número: ______________ Curso: ______________

1. Mostre por indução matemática que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Determine, caso existam, os limites das sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{1+2\sqrt{n}}, \qquad v_n = \frac{2^n}{3^n+1}$$

3. Determine em $\mathbb{R}$, caso existam, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, infimo, máximo e mínimo do conjunto V definido por

$$V = \{x \in \mathbb{R} : \quad x = \frac{2^n}{3^n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$$

.

Cálculo Diferencial e Integral I

LEE, LEIC, LEGI e LERC - 2º semestre - 2012/2013

1º Ficha C2

Nome: ____

Número: ____________________ Curso: ____________________

1. Considere a sucessão majorada u_n, definida por

$$u_1 = \sqrt{3}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \qquad n \in \mathbb{N}$$

   a) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é estritamente crescente.

   b) A sucessão u_n é convergente? Justifique.

2. Determine, caso existam, os limites das sucessões de termo geral:

$$u_n = \frac{3\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n}, \qquad v_n = \frac{3 + 2^{2n}}{4^n + 2^n}$$