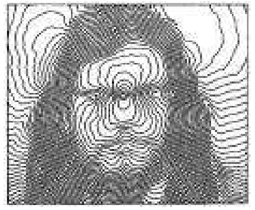


Transformações Gráficas Tridimensionais (3D)

Antonio L. Bajuelos
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Transformações Gráficas 3D

Introdução

- A manipulação, visualização e a construção de imagens gráficas tridimensionais requer a utilização de transformações de coordenadas e de transformações geométricas em 3D.
- Estas transformações, em gral, são formadas pela composição das transformações primárias de translação, de variação de escala e de rotação.
- Como no caso de 2D, cada uma destas transformações pode ser representada por uma matriz, a matriz da transformação.
- As transformações e conceitos aqui introduzidos são generalizações directas daqueles introduzidos para as transformações 2D.

Transformações Gráficas 3D

- **Introdução (cont...)**
  - Em relação a um sistema coordenado 3D, um objecto Obj é considerado como um conjunto de pontos:

    $$Obj = \{P(x, y, z)\}$$

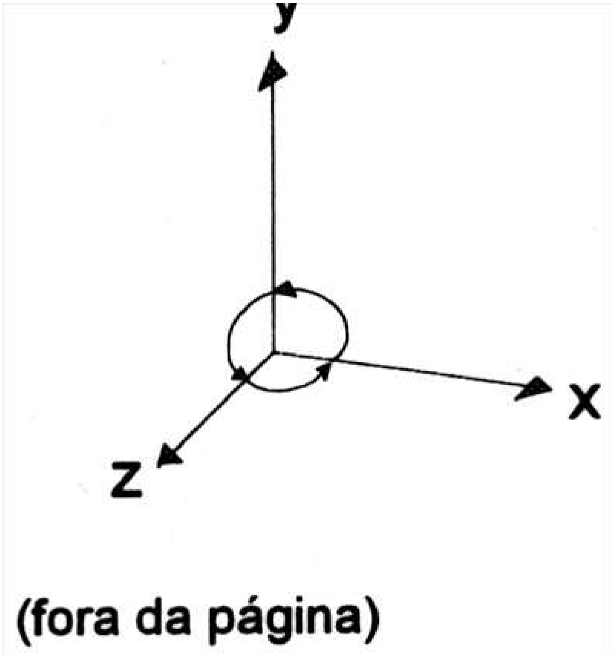
  - Se o objecto é movido para uma nova posição, podemos considerá-lo como um novo Obj', no qual todos os pontos P'(x', y', z') podem ser obtidos a partir dos pontos coordenados P(x, y, z) através da aplicação de uma transformação geométrica.

    $$T: P(x, y, z) \rightarrow P'(x', y', z')$$

  - Da mesma forma que para o caso das transformações 2D, as transformação em 3D exploram a representação em coordenadas homogéneas isto é, o ponto P(x,y,z) é representado na forma P(x,y,z,W), cuja homogeneização resulta em P(x/W,y/W,z/W,1)

Introdução (cont...)

- O sistema de coordenadas para 3D utilizado será o da Regra da Mão Direita, com o eixo Z perpendicular ao papel e saindo em direcção ao observador, como poder ser visto na figura a seguir.



Translação

- A **TRANSLAÇÃO** em **3D** pode ser vista como simplesmente uma extensão a partir da translação 2D, ou seja. Uma translação de um ponto P no espaço (x, y, z) realiza-se pela adição em X, Y e Z do respectivo valor da translação.
- Na forma vectorial a **TRANSLAÇÃO** fica como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Assim, a equação anterior pode ser representada também como:

$$\mathbf{P' = T(d_x, d_y, d_z) \cdot P}$$

Variação de Escala

- O processo de variação de escala altera as dimensões de um objecto. Na transformação de variação de escala o ponto P(x, y, z) sofre a variação de escala de $S = (S_x, S_y, S_z)$
- O factor de escala **S** determina se a escala é uma **ampliação**, **S > 1**, ou uma **redução, S < 1**.
- Na forma vectorial a **VARIAÇÃO de ESCALA** fica como:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Assim, a equação anterior pode ser representada também como:

$$\mathbf{P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P}$$

Variação de Escala

- **Caso geral:** Variação de escala com relação a um ponto fixo (x_f,y_f,z_f)
  - O transformação de variação de escala neste caso pode ser representada a partir da seguinte composição de transformações:
    - **Translação do ponto (x_f,y_f,z_f) para a origem**
    - **Variação de Escala com relação à origem de coordenadas**
    - **Translação da origem de volta para o ponto (x_f,y_f,z_f)**

    Assim:

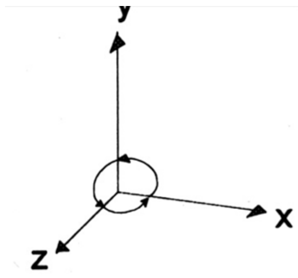
$$T(x_f,y_f,z_f)\cdot S(s_x,s_y,s_z)\cdot T(-x_f,-y_f,-z_f)=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

- A rotação em 3D é consideravelmente mais complexa que a rotação em 2D.
- Em 2D, a rotação é determinada por um ângulo de rotação θ e um centro de rotação P.
- Em 3D é preciso definir um ângulo de rotação θ e um eixo de rotação.
- **Definição:** A rotação em 3D é chamada canónica quando algum dos eixos de coordenadas (Ox, Oy ou Oz) é escolhido como o eixo de rotação.
- **No caso da rotação canónica, a construção da transformação de rotação pode ser processada tal como no caso da rotação em 2D em torno da origem**

Transformações Gráficas 3D

■ Rotação (cont...)



□ Rotação em torno do eixo Oz

- Da secção das transformadas gráficas em 2D sabemos que:

  $x' = x*cos(\theta) - y*sin(\theta)$

  $y' = x*sin(\theta) + y*cos(\theta)$

  $z' = z$

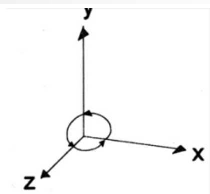
- O parâmetro θ indica o ângulo de rotação.
- Na forma vectorial a rotação canónica em torno do eixo **Oz** ficaria da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$ ou como $$P' = R_z(\theta) \cdot P$$

Transformações Gráficas 3D

Rotação (cont...)

- As equações da Rotação em torno aos eixos Ox e Oy podem ser obtidas mediante permutações cíclicas das coordenadas dos parâmetros x, y e z. Isto é podemos utilizar as seguintes permutações: **x → y → z → x**



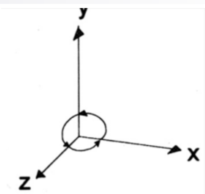
- Substituindo estas permutações na equação da rotação em torno do eixo **Oz** obtemos a seguinte Equação para a rotação em torno do eixo Ox.

Em torno de Oz		**Em torno do eixo Ox**
$x' = x*cos(\theta) - y*sin(\theta)$		$y' = y*cos(\theta) - z*sin(\theta)$
$y' = x*sin(\theta) + y*cos(\theta)$	⇒	$z' = y*sin(\theta) + z*cos(\theta)$
$z' = z$		$x' = x$

- Na forma vectorial, a rotação em torno do eixo Ox ficaria da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Gráficas 3D



Rotação (cont...)

- De forma análoga, i.e. mediante permutações cíclicas das coordenadas dos parâmetros x, y e z podemos obter a equação da rotação em torno ao eixo Oy.
- Para isto é podemos utilizar as seguintes permutações: z → y → x → z
- Substituindo estas permutações na equação da rotação em torno do eixo Oz obtemos a seguinte Equação para a rotação em torno do eixo Oy

Em torno de Oz	**Em torno do eixo Oy**
$x' = x*\cos(\theta) - y*\sin(\theta)$	$z' = z*\cos(\theta) - x*\sin(\theta)$
$y' = x*\sin(\theta) + y*\cos(\theta)$	$x' = z*\sin(\theta) + x*\cos(\theta)$
$z' = z$	$y' = y$

- Na forma vectorial a rotação em torno do eixo Oy ficaria da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Rotação (cont...)**
  - **Rotação não canónica (Exemplo Nº 1):**
    - Quando pretendemos fazer uma rotação de um objecto em torno a um eixo que é paralelo a um dos eixos de coordenadas (Ox, Oy ou Oz) podemos escrever essa transformação como uma composição de transformações :
      - **Traslação** do objecto de tal forma que o seu eixo de rotação coincida com o eixo de coordenadas paralelo a ele.
      - **Rotação** do objecto em torno ao eixo de coordenadas
      - **Translação** do objecto de volta a sua posição original
    - Em notação de transformação temos:

$$P' = T^{-1} \cdot R_w \cdot (\theta) \cdot T \cdot P, \; onde \; w = x, y \; ou \; z$$

Transformações Gráficas 3D

Rotação (cont...)

Rotação não canónica (Exemplo Nº 2):

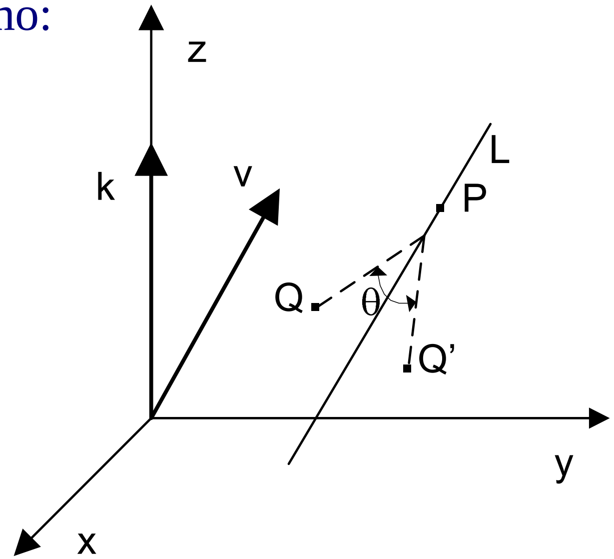
- Quando pretendemos fazer uma rotação de um objecto em torno a um eixo que não é paralelo a um dos eixos de coordenadas (Ox, Oy ou Oz)
- **Exemplo:**
  - Seja L um eixo de rotação especificado pelo vector dirigido V e pela localização do ponto P. Determinar a transformação correspondente à rotação de θ em torno de L.

    A transformação de rotação pode ficar como:

    1. Translação de P para a origem
    2. Alinhamento de V com o vector k
    3. Rotação de θ em torno de k
    4. Inversão dos passos 2 e 1

    Assim

$$R_{\theta,L} = T_{-P}^{-1} \cdot A_V^{-1} \cdot R_{\theta,K} \cdot A_V \cdot T_{-P}$$



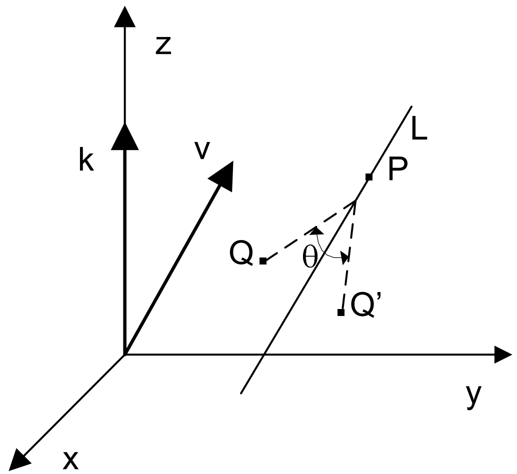
Transformações Gráficas 3D

Rotação (cont...)

Rotação não canónica (Exemplo Nº 2):

- **Exemplo Nº 2 (cont…):**
  - A matriz da transformação de **Alinhamento** de V com o vector k pode ser obtida a partir de uma sequencia de rotações canónicas (será analisada num exercício das aulas práticas). O aspecto geral desta matriz é:

$$A_V = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|V|} & \frac{-ab}{\lambda|V|} & \frac{-ac}{\lambda|V|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|V|} & \frac{b}{|V|} & \frac{c}{|V|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

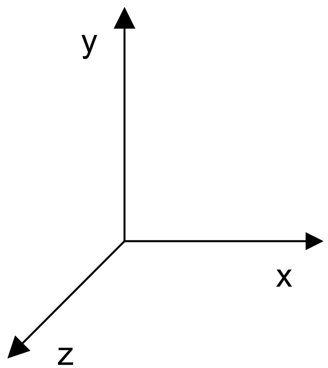


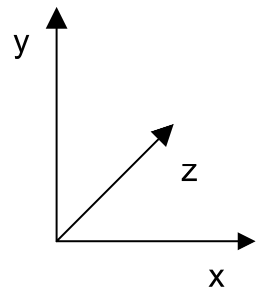
$$V = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} + c\mathrm{K}; |V| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}; \lambda = \sqrt{b^2+c^2}$$

Transformações Gráficas 3D

■ Reflexão

- A reflexão em 3D pode ser realizada de duas formas:
  - **Relativamente a um eixo de reflexão dado**
  - **Relativamente a um plano de reflexão dado**
- Em geral as matrizes das transformações de reflexão em 3D são similares as matrizes de reflexão em 2D.
- É fácil observar que as reflexões relativas a um eixo dado são equivalentes a uma rotação de **180º** em torno desse eixo
- **Exemplo: Reflexão relativamente ao plano xOy**
  - Neste caso é fácil observar que a reflexão de P(x,y,z) com relação ao plano xOy é P'(x, y, –z). Neste caso a matriz de transformação será:





$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Distorção *(Shearing)*

- A transformação de *shearing* pode ser aplicada também em 3D
- Por exemplo: uma distorção na direcção z (z-*shearing*) é produzida com a seguinte matriz de transformação:

$$SH_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

onde a e b podem tomar valores reais. O efeito dessa transformação altera as coordenadas x e y.

Tilting

- ***Tilting:*** transformação gráfica que pode ser definida como uma rotação em torno do eixo *Ox*, seguida por uma rotação em torno do eixo *Oy*: $T = R_{\theta_y, J} \cdot R_{\theta_x, I}$
- **(a) Determine a matriz de *tilting***
  - Podemos determinar a transformação de *tilting* T concatenando duas matrizes de rotação:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_y & 0 & sen\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -sen\theta_x & 0 \\ 0 & sen\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_y & sen\theta_y sen\theta_x & sen\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -sen\theta_x & 0 \\ -sen\theta_y & \cos\theta_y sen\theta_x & \cos\theta_y \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformações Gráficas 3D

- ***Tilting* (cont...)**
  - **(b) A ordem das rotações é, ou não importante?**
    - Se multiplicarmos $R_{\theta_y,I} \cdot R_{\theta_x,J}$ obtemos:

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & sen\theta_y & 0 \\ sen\theta_x \cdot sen\theta_y & \cos\theta_x & -sen\theta_x \cdot \cos\theta_y & 0 \\ -\cos\theta_x sen\theta_y & sen\theta_x & \cos\theta_x \cdot \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Esta não é a matriz da alínea (a); portanto, a ordem das matrizes é importante**

Transformação entre Sistemas de Coordenadas (2D)

- As aplicações gráficas frequentemente requerem a transformação de descrições de objectos de um sistema de coordenadas para outro. Agora vamos considerar especificamente transformações entre dois Sistemas de Coordenadas Cartesianos.
- Para transformar pontos de um objecto dados em um sistema de coordenadas **xOy** para um sistema **x'Oy'** com origens em (0,0) e (x_0,y_0), com um ângulo de orientação θ entre os eixos x e x', precisamos determinar a transformação que sobrepõe os eixos **xOy** aos eixos **x'Oy'**. Isso pode ser feito em 2 passos:
  - Transladar o sistema **x'y'** de modo que sua origem coincida com a origem do sistema **xOy**: $\mathbf{T(-x_0, -y_0)}$
  - Rotação do eixo x' de forma que ele coincida com o eixo x: $R(\theta)$
- Obtemos $\mathbf{M_{xy,\,x'y'} = R(\theta) \bullet T(-x_0, -y_0)}$