Noções básicas de Lógica

Consideremos uma linguagem, com certos símbolos.

Chamamos **expressão** a uma sequências de símbolos.

uma expressão com significado

Uma expressão pode ser ↗ ↘

expressão sem significado

designar um objecto

Uma exp. com significado pode ↗ ↘

traduzir uma afirmação

Termo ou **designação** é uma expressão com significado que designa um objecto.

Exemplo:

1. Em português, “Ana” e “gato” são termos ou designações; “Setúbal é uma cidade” é uma afirmação.

2. Na linguagem dos reais, “0” e “$3 \times (2 - 5)$” são termos ou designações e “$3 \geq 5 + 2$” uma afirmação.

Nota: *As aspas permitem distinguir a designação do ente designado; quando não há risco de confusão, dispensamos o seu uso.*

Na Lógica consideramos apenas afirmações sobre as quais se possa decidir se são verdadeiras ou falsas - a que chamamos **proposições**.

O **valor lógico** de uma proposição é

verdade	**falso**
se a prop. for verdadeira	se a prop. for falsa
↓	↓
denota-se por **V** ou **1**	denota-se por **F** ou **0**

Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V ou F.

Duas **proposições** dizem-se **equivalentes** quando têm o mesmo valor lógico.

Cálculo Proposicional

Podemos obter novas proposições a partir doutras, por meio das **operações lógicas**:

negação, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**,

associadas aos símbolos $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

chamados **conectivos lógicos**.

No Cálculo Proposicional estudam-se estas operações e as suas propriedades.

A **tabela de verdade de uma operação lógica** (ou **de uma proposição**) dá-nos o valor de verdade da nova proposição, em função do valor de verdade das proposições de que foi obtida.

Sejam p e q proposições:

- a **negação de** p representa-se por $\sim p$ e lê-se "não p".

$\sim p$ é verdadeira se e só se p é falsa

A sua tabela de verdade é

p	$\sim p$
V	F
F	V

- a **conjunção de** p **e** q representa-se por $p \wedge q$ e lê-se "p e q".

$p \wedge q$ é verdadeira caso p e q sejam ambas verdadeiras e é falsa se pelo menos uma delas for falsa.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- a **disjunção** p **e** q representa-se por $p \vee q$ e lê-se "p ou q".

$p \vee q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições iniciais for verdadeira e falsa se ambas são falsas.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- a **implicação de** p **por** q representa-se por $p \Rightarrow q$ e lê-se "p implica q" ou "se p então q".
  - p é o **antecedente** e q é o **consequente**
  - p **é uma condição suficiente para** q
  - q **é uma condição necessária para** p.

O único caso em que a implicação é falsa é quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- a **equivalência entre** p **e** q representa-se por $p \Leftrightarrow q$ e lê-se "p equivale a q" ou "p se e só se q".

$p \Leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor lógico e é falsa caso contrário.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: Podemos definir outras operações lógicas.

O símbolo $\dot{\vee}$ lê-se "**ou exclusivo**" e representa a **disjunção exclusiva**:

a sua tabela de verdade é

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Usam-se parêntesis para indicar a ordem pela qual se realizam as operações lógicas, sobrepondo-se à seguinte **convencão de prioridade das operações**:

- primeiro a negação;
- depois a conjunção e disjunção;
- por último a implicação e a equivalência.

Uma proposição diz-se uma **tautologia** se o seu valor lógico for sempre V.

Propriedades das operações lógicas

Sejam p, q e r proposições.

Propriedades da negação

Ver sebenta

Propriedades da conjunção e da disjunção

A *conjunção e a disjunção:*

- *são comutativas*;
- *são associativas*;
- *têm elemento neutro*;
- *têm elemento absorvente*.

★ *A conjunção é distributiva relativamente à disjunção*
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

★ *A disjunção é distributiva relativamente à conjunção*
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Primeiras Leis de De Morgan

São tautologias:

- $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$;
- $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

Propriedades da implicação

São tautologias:

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$;
- $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$;
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
  (uma implicação e sua **contra-recíproca** têm o mesmo valor de verdade);
- $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Longrightarrow (p \Rightarrow r)$.

Propriedades da equivalência

Ver sebenta

Expressões com variáveis

Para estudar uma certa teoria temos que:

1º - definir uma **linguagem adequada** → (que inclui os símbolos fundamentais da teoria);

2º - considerar um **universo** → conjunto em que os símbolos fundamentais são interpretados;

3º - interpretar nesse **universo** os símbolos fundamentais da teoria.

Em geral necessitamos de:

variáveis → símbolos (ou agrupamento de símbolos) que podem ser substituído por elementos do universo.

obtendo-se assim

expressões com variáveis
- **expressões com significado**
- **expressões sem significado**

As **expressões** (com variáveis) **com significado**, dividem-se em:

- **expressões designatórias** → originam designações quando se substituem as variáveis por valores concretos.
- **expressões proposicionais** (**condições** ou **propriedades**) → originam proposições (verdadeiras ou falsas) quando se substituem as variáveis por valores concretos.

Temos:

- o **Universo** (o "mundo" em que estamos a trabalhar);

- o **domínio de uma expressão** → valores (desse universo) por que podemos substituir as variáveis que nela ocorrem;

- o **conjunto solução da expressão proposicional** → valores do seu domínio que a transformam numa proposição verdadeira.

Num Universo, uma expressão proposicional pode ser:

possível ou **impossível**

- **universal**
- **não universal**

- é **possível** se existem valores que substituídos nas variáveis a transformam numa proposição verdadeira e **impossível** caso contrário.
- é **universal** se, ao substituírmos as suas variáveis por quaisquer valores dos respectivos domínios, obtemos sempre proposições verdadeiras.

Cálculo proposicional com variáveis

As operações lógicas associadas a $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ permitem obter novas condições a partir de condições mais simples.

Num certo Universo, duas **condições** dizem-se:

- **incompatíveis**, se a sua conjunção é uma cond. impossível;
- **compatíveis**, caso contrário.

Vamos definir três novas operações $\nearrow$ **quantificação universal**
$\rightarrow$ **quantificação existencial**
$\searrow$ **quantificação de existência e unicidade**

Seja $p(x)$ uma expressão proposicional na variável x.

Quantificador universal $\rightarrow$ $\forall$

- $\forall x, p(x)$ é uma proposição, que se lê "qualquer que seja x, $p(x)$".

  Num certo universo,

$\forall x, p(x)$ é verdadeira sse a condição $p(x)$ é universal.

Quantificador existencial $\rightarrow$ $\exists$

- $\exists x, p(x)$ é uma proposição, que se lê "existe pelo menos um x tal que $p(x)$".

  Num certo universo,

$\exists x, p(x)$ é verdadeira sse a condição $p(x)$ é possível.

Quantificador de existência e unicidade $\rightarrow$ $\exists^1$

- $\exists^1 x, p(x)$ é uma proposição, que se lê "existe um e um só x tal que $p(x)$".

  Num certo universo,

$\exists^1 x, p(x)$ é verdadeira sse a condição $p(x)$ tem uma única solução.

Notação: $\forall x \in D, \quad p(x), \quad \exists x \in D, p(x), \quad \exists^1 x \in D, p(x)$ indicam que a variável x varia em D (subconjunto do universo).

Convenção: o quantificador abrange a mais pequena expressão proposicional que o segue.

Quantificação múltipla

- A troca de ordem de dois quantificadores consecutivos *do mesmo tipo* transforma uma condição (ou proposição) numa equivalente.
- Pelo contrário, a troca de ordem de quantificadores *que não são do mesmo tipo*, origina condições (ou proposições) que, em geral, não são equivalentes às iniciais.

Segundas leis de De Morgan

Sendo p uma condição tem-se:

- $\sim (\forall x, p) \Leftrightarrow \exists x, \sim p$;
- $\sim (\exists x, p) \Leftrightarrow \forall x, \sim p$.