IST - 1^o Semestre de 2016/17

EXERCÍCIOS DE ÁLGEBRA LINEAR [1]

FICHA 4 - Determinantes. Vectores e valores próprios

1 Determinantes

Pode-se definir $\det \mathbf{A}$, o **determinante** de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, como o valor da função de $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ em $\mathbb{K}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) Se $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade, então $\det \mathbf{I}_n = 1$.

ii) Se a matriz $\mathbf{A}'$se obtém da matriz $\mathbf{A}$ multiplicando uma das suas linhas por α, então $\det \mathbf{A}' = \alpha \det \mathbf{A}$

iii) $\det \mathbf{A}$ não se altera se uma linha for substituída pela sua soma com outra linha.

Partindo destas propriedades axiomáticas é possível mostrar que a função $\mathbf{A} \to \det \mathbf{A}$ também tem que satisfazer as seguintes:

iii') $\det \mathbf{A}$ não se altera se uma linha for substituída pela sua soma com o múltiplo de outra linha.

iv) Se a matriz $\mathbf{A}'$ se obtém da matriz $\mathbf{A}$ permutando duas das suas linhas, então $\det \mathbf{A}' = -\det \mathbf{A}$

Com base nas propriedades acima descritas é possível calcular qualquer determinante através do método de eliminação de Gauss. Por exemplo:

[1] Coligidos por: João Ferreira Alves, Ricardo Coutinho e José M. Ferreira.

$$
\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{por iii}') \\
&= -\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{por iv)} \\
&= -2 \times 3 \times 5 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{por ii)} \\
&= -30 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{por iii}') \\
&= -30 \qquad \text{por i)}
\end{aligned}
$$

1.1 Propriedades dos determinantes

Representando a matriz $\mathbf{A}$ através das suas linhas:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \mathbf{a}_2' \\ \dots \\ \mathbf{a}_n' \end{bmatrix},
$$

podemos descrever a linearidade do determinante em função das suas linhas nas seguintes duas primeiras propriedades.

1. $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \dots \\ \mathbf{a}_i' + \mathbf{a} \\ \dots \\ \mathbf{a}_n' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \dots \\ \mathbf{a}_i' \\ \dots \\ \mathbf{a}_n' \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \dots \\ \mathbf{a} \\ \dots \\ \mathbf{a}_n' \end{bmatrix}.$

2. $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \dots \\ \alpha \mathbf{a}_i' \\ \dots \\ \mathbf{a}_n' \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \dots \\ \mathbf{a}_i' \\ \dots \\ \mathbf{a}_n' \end{bmatrix} \qquad (\forall \alpha).$

3. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

4. O determinante muda de sinal por permutação entre pares de linhas (ou de colunas).

5. $\det \mathbf{A}$ não se altera se uma linha (ou coluna) for substituída pela sua soma com o múltiplo de outra linha (respectivamente coluna).

6. Se
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
é uma matriz **triangular superior** (ou **triangular inferior)** então
$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$
7. Se $\mathbf{A}$ tiver duas linhas (ou duas colunas) iguais então $\det \mathbf{A} = 0$.
8. $\det \mathbf{A} = 0$, se $\mathbf{A}$ tiver uma linha (ou coluna) nula.
9. As linhas (ou colunas) de $\mathbf{A}$ são linearmente dependentes se e só se $\det \mathbf{A} = 0$.
10. $\mathbf{A}$ é invertível se e só se $\det \mathbf{A} \neq 0$. Nestas circunstâncias
$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$
11. $\det(\mathbf{AB}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$.

1.2 Outros métodos para o cálculo de determinantes

Existem outros métodos directos para calcular determinantes de uma matriz $n \times n$
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Regra de Laplace**[2]: Para qualquer $i = 1, 2, ..., n$,
$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \qquad = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \\ &= a_{i1} \det \mathbf{A}_{i1} - a_{i2} \det \mathbf{A}_{i2} + a_{i3} \det \mathbf{A}_{i3} - ... + (-1)^{i+n} a_{in} \det \mathbf{A}_{in} \\ &= a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + a_{i3}c_{i3} + ... + a_{in}c_{in}\end{aligned}$$
Para qualquer $j = 1, 2, ..., n$,
$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \qquad = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \\ &= a_{1j} \det \mathbf{A}_{1j} - a_{2j} \det \mathbf{A}_{2j} + a_{3j} \det \mathbf{A}_{3j} - ... + (-1)^{n+j} a_{nj} \det \mathbf{A}_{nj} \\ &= a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + a_{3j}c_{3j} + ... + a_{nj}c_{nj}\end{aligned}$$
onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a matriz que se obtem de $\mathbf{A}$ **por supressão da linha** i **e da coluna** j. O valor $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$ é chamado de **cofactor** (i, j) da matriz $\mathbf{A}$.

[2]Pierre Simon Laplace, n. Beaumont-en-Ange (Normandia) França, a 23 de Março de 1749, m. Paris, a 5 de Março de 1827.

- **Expansão permutacional:** Designemos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as permutações $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ de $\{1, 2, ..., n\}$. Obtemos,

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \epsilon_\sigma a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} ... a_{n\sigma_n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \epsilon_\sigma a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} ... a_{\sigma_n n},$$

  onde ϵ_σ é o sinal da permutação σ (i. e. $\epsilon_\sigma = (-1)^{i_\sigma}$, onde i_σ designa o número total de inversões de σ; dada uma permutação σ dizemos que ocorre uma inversão sempre que $i < j$ e $\sigma_i > \sigma_j$).

1.3 Determinantes de matrizes 2×2 e 3×3

Para o caso de uma matriz 2×2,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Uma utilização importante deste determinante prende-se com o cálculo de áreas de paralelogramos P do plano gerados por dois vectores $\mathbf{v}_1 = (a, b)$ e $\mathbf{v}_2 = (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\text{área de } P = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| = |ad - bc| \, .$$

Relativamente a uma matriz 3×3,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

podemos estabelecer que

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

dando origem à chamada regra de Sarrus[3]

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} \\ & \searrow & & \searrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{array}} \begin{array}{c} \\ \searrow \\ \\ \searrow \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & & & & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{array}} \begin{array}{c} - \\ \swarrow \\ \\ \swarrow \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{ccccc} a_{11} & - & a_{12} & - & a_{13} \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \swarrow & & & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{array}}$$

Estes determinantes permitem a obtenção do cálculo de volumes de paralelepípedos, P, gerados por três vectores $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\mathbf{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \text{volume de } P &= \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \right| \\ &= |x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1| \, . \end{aligned}$$

[3] Pierre Frédéric Sarrus, n. Saint Affrique (Midi-Pyrenées) França, a 10 de Março de 1798, m. Estrasburgo, França, a 20 de Novembro de 1861.

1.4 Matriz dos cofactores

Considerando os cofactores

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

chama-se **matriz dos cofactores** de A à matriz

$$\begin{aligned} \operatorname{cof}\mathbf{A} &= [c_{ij}]_{i,j=1,\dots n} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz $\operatorname{cof}\mathbf{A}$ satisfaz a seguinte relação com a matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $n \geqslant 2$:

$$\mathbf{A}(\operatorname{cof}\mathbf{A})^T = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I}_n.$$

Desta igualdade resulta que se $\mathbf{A}$ é invertível então

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\operatorname{cof}\mathbf{A})^T.$$

1.5 Regra de Cramer[4]

Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ um sistema de n equações a n incógnitas tal que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Então o sistema possui uma única solução cujas componentes são dadas por

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}},\ x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \dots,\ x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}},$$

onde com $j = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{A}_j$ é a matriz que se obtém de $\mathbf{A}$ substituindo a coluna j de $\mathbf{A}$ pelo vector coluna $\mathbf{d}$.

1.6 Exercícios

Exercício 1 *Use eliminação de Gauss para calcular os determinantes das seguintes matrizes:*

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[4] Gabriel Cramer, n. a 31 Julho de 1704 em Geneva, m. a 4 de Janeiro de 1752 em Bagnols-sur-Cèze (França).

Exercício 2 *Use eliminação de Gauss para calcular os determinantes das seguintes matrizes. Aproveite o resultado para indicar as que são invertíveis.*

$$\text{a)}\begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{b)}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{c)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{e)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{f)}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3 *Sabendo que*

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 5,$$

calcule:

$$\text{a)}\ \det\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}. \qquad \text{b)}\ \det\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix}.$$

$$\text{c)}\ \det\begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}. \quad \text{d)}\ \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}.$$

Exercício 4 *Sabendo que os valores reais γ e δ são tais que:*

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma+\delta & 2 \end{bmatrix} = 1,$$

determine

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma+\delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix}.$$

Exercício 5 *Mostre que*

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{bmatrix} = \lambda^6.$$

Exercício 6 *Calcule o determinante da matriz* $n \times n$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & ... & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 7 *Mostre que*

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Exercício 8 *Utilize sucessivamente a regra de Laplace para calcular os determinantes das matrizes indicadas a seguir.*

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 9 *Uma matriz cujas entradas são* 0 *ou* 1 *tem determinante igual a* 0, 1 *ou* -1. *Verdadeiro ou falso?*

Exercício 10 *Através da regra de Sarrus calcule os determinantes das seguintes matrizes:*

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 11 *Calcule as áreas dos paralelogramos cujos vértices são:*

a) $(0,0)$, $(-1,3)$, $(4,-5)$ *e* $(3,-2)$.

b) $(-1,0)$, $(0,5)$, $(1,-4)$ *e* $(2,1)$.

c) $(0,-2)$, $(6,-1)$, $(-3,1)$ *e* $(3,2)$.

Exercício 12 *Calcule os volumes dos paralelepípedos gerados pelos vectores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *onde:*

a) $\mathbf{u} = (1,0,-2)$, $\mathbf{v} = (1,2,4)$ *e* $\mathbf{w} = (7,1,0)$.

b) $\mathbf{u} = (1,4,0)$, $\mathbf{v} = (-2,-5,2)$ *e* $\mathbf{w} = (-1,2-1)$.

Exercício 13 *Calcule os determinantes das matrizes*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&5\\3&0&1\end{bmatrix} \quad e\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&2&2\\0&2&2\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

E ainda: a) $\det(3\mathbf{A})$. b) $\det(\mathbf{A}^3\mathbf{B}^2)$. c) $\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T)$. d) $\det(\mathbf{A}^4\mathbf{B}^{-2})$.

Exercício 14 i) *Para as matrizes indicadas a seguir verifique a validade da fórmula:*

$$\mathbf{A}\ (\mathrm{Cof}\,\mathbf{A})^T=(\det\mathbf{A})\,\mathbf{I},$$

onde $\mathrm{Cof}\,\mathbf{A}$ *designa a matriz dos cofactores.*

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix}0&1&2\\2&4&1\\1&2&0\end{bmatrix}.\quad \text{b)}\ \begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}.\quad \text{c)}\ \begin{bmatrix}1&0&0\\1&3&0\\1&1&1\end{bmatrix}\quad \text{d)}\ \begin{bmatrix}1&4&5\\2&5&4\\3&6&3\end{bmatrix}.$$

ii) *Caso seja possível, determine a matriz inversa de cada uma destas matrizes.*

Exercício 15 *Considere as matrizes*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7&7&0&7\\3&0&8&0\\7&7&1&8\\7&7&1&7\end{bmatrix},\quad e\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&8\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&5\end{bmatrix}.$$

a) *Calcule* $\det\mathbf{A}$.

b) *Calcule* $\det\mathbf{B}$

c) *Calcule* $\det\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{B}^3\right)$

d) *Calcule a entrada* $(1,2)$ *de* $\mathbf{A}^{-1}$.

Exercício 16 *Use a regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares:*

$$\text{a)}\ \begin{cases}y+2z=1\\2x+4y+z=0\\x+2y=1\end{cases}.\quad \text{b)}\ \begin{cases}x+y=1\\2x+z=1\\x+2y+2z=-1\end{cases}.$$

Exercício 17 *Sejam* f_1, f_2 *e* f_3 *funções do espaço vectorial* $C^2(\mathbb{R})$, *das funções reais de de variável real que são duas vezes diferenciáveis. Mostre que se existe* $t_0\in\mathbb{R}$ *de modo que o determinante*[5]

$$\det\begin{bmatrix}f_1(t_0)&f_2(t_0)&f_3(t_0)\\f_1'(t_0)&f_2'(t_0)&f_3'(t_0)\\f_1''(t_0)&f_2''(t_0)&f_3''(t_0)\end{bmatrix}\neq 0,$$

então f_1, f_2 *e* f_3 *são linearmente independentes.*

Exercício 18 *Aplicando o exercício anterior, mostre que* $\{1,e^{-t},t\,e^{-t}\}$ *é constituído por funções linearmente independentes.*

[5] Este determinante é conhecido pelo nome de wronskiano das funções f_1, f_2 e f_3. Esta condição de independência linear é devida a Josef-Maria Hoëné Wronski (n. Wolsztyn, Polónia, 23 de Agosto de 1778; m. Neilly-sur-Seine, França, em 8 de Agosto de 1853).

2 Vectores e valores próprios de transformações lineares

Dada uma transformação linear $T : E \to E$ do espaço vectorial E nele próprio, se com $\mathbf{v} \in E \setminus \{0\}$ e λ escalar se tem
$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v},$$
diremos que v é um **vector próprio** de T e λ um seu **valor próprio**.

Designando por $I : E \to E$ a transformação linear identidade, ou seja a transformação tal que $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, qualquer que seja $\mathbf{x} \in E$, temos que
$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow (T - \lambda I)(\mathbf{v}) = 0.$$
Assim, se λ é um valor próprio de T, então v será um vector próprio de T associado a λ se e só se
$$\mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(T - \lambda I) \setminus \{0\}.$$
Como tal, podemos afirmar que λ é um valor próprio de T se e só se $\mathrm{Nuc}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, sendo qualquer elemento não nulo de $\mathrm{Nuc}(T - \lambda I)$ um vector próprio de T associado a λ.

O subespaço de E, $\mathrm{Nuc}(T - \lambda I)$, é chamado de **subespaço próprio** associado a λ, que representaremos por $E(\lambda)$:
$$E(\lambda) = \mathrm{Nuc}(T - \lambda I).$$

2.1 Vectores e valores próprios de matrizes

Analogamente, podem definir-se os conceitos de valor próprio e vector próprio de uma matriz $\mathbf{A}$ $(n \times n)$. Nesse sentido, um vector $\mathbf{v} \neq 0$ e um escalar λ são, respectivamente, um vector próprio de $\mathbf{A}$ e um valor próprio de $\mathbf{A}$, se
$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

O conjunto dos valores próprios de $\mathbf{A}$ é designado por **espectro** da matriz $\mathbf{A}$ e representado por $\sigma(\mathbf{A})$. Ao contrário do que sucede para uma transformação linear qualquer, para uma matriz podemos obter uma caracterização dos seus valores próprios. Na verdade, atendendo a que
$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$
se $\mathbf{v}$ é um vector próprio associado ao valor próprio λ, podemos afirmar que $\mathbf{v}$ é uma solução não nula do sistema homogéneo $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e portanto concluir que
$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$
Facilmente se verifica que $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ é um polinómio em λ de grau n, chamado de **polinómio característico** de $\mathbf{A}$. Logo o conjunto dos valores próprios de uma matriz $\mathbf{A}$ é analiticamente identificado pelas raízes de um polinómio:
$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda : \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0\}.$$

O conjunto dos vectores próprios associados a um mesmo valor próprio de $\mathbf{A}$, é constituído por todos os vectores não nulos que são solução do sistema homogéneo $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou seja $\mathrm{Nul}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \setminus \{\mathbf{0}\}$. O subespaço $\mathrm{Nul}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é também designado por espaço próprio associado ao valor próprio λ e igualmente representado por $E\,(\lambda)$.

2.2 Vectores e valores próprios de transformações lineares em espaços de dimensão finita

Seja agora $T : E \to E$ uma transformação linear em que o espaço E é de dimensão finita. Considerando a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ que representa T, relativamente a uma dada base $\mathcal{B}$ de E, de

$$[T\,(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,,$$

podemos concluir que a relação

$$T\,(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$$

é equivalente a

$$[T]_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}\,.$$

Deste modo, os valores próprios de T são valores próprios da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$. O espaço próprio associado a um valor próprio λ, pode também ser caracterizado através da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$:

$$E\,(\lambda) = \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) = \{\mathbf{v} \in E : [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Nul}\,([T]_{\mathcal{B}} - \lambda\mathbf{I})\}\,.$$

No caso de ser $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ como há uma identificação entre vectores e coordenadas na base canónica temos que

$$E\,(\lambda) = \mathrm{Nuc}\,(T - \lambda I) = \mathrm{Nul}\,([T]_{\mathcal{E}} - \lambda\mathbf{I})\,,$$

onde $[T]_{\mathcal{E}}$ é a representação matricial de T na base canónica de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

2.3 Diagonalização de matrizes

Uma matriz $\mathbf{D}$ $(n \times n)$ diz-se uma matriz **diagonal** se forem nulos todos os elementos de $\mathbf{D}$ que estão fora da diagonal principal:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & d_n \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, a matriz identidade é uma matriz diagonal.

Uma matriz $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ é dita **diagonalizável** se for **semelhante** a uma matriz diagonal $\mathbf{D}$. Ou seja, se existir uma matriz invertível, $\mathbf{S}$, dita matriz de semelhança, tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}.$$

- **Teorema da diagonalização.** Uma matriz $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ é diagonalizável se e só se admitir n vectores próprios, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$, linearmente independentes.
A matriz de semelhança, $\mathbf{S}$, terá como colunas as coordenadas dos vectores próprios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$:
$$\mathbf{S} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 ... \mathbf{v}_n] .$$
A matriz diagonal
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$
será formada de maneira que λ_j é um valor próprio associado a $\mathbf{v}_j$, para $j = 1, ..., n$.

- **Corolário.** Se $\mathbf{A}$ tiver n valores próprios distintos, então $\mathbf{A}$ é diagonalizável.

Com E um espaço de dimensão finita $(\dim E = n)$ seja $T : E \to E$ uma transformação linear representada por uma matriz $[T]$ diagonalizável. Nestas condições, aos n vectores próprios de $[T]$ linearmente independentes, associamos n vectores próprios de T também linearmente independentes que desse modo constituirão uma base $\mathcal{B}$ do espaço E e dizemos que a transformação T é diagonalizável. A matriz diagonal $\mathbf{D} = [T]_{\mathcal{B}}$ semelhante a $[T]$ será a representação de T relativamente à base $\mathcal{B}$.

2.4 Exercícios

Exercício 19 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2)$$

e considere os vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 3)$ *e* $\mathbf{v}_4 = (4, 4)$. *Identifique os que são vectores próprios de* T. *Nos casos afirmativos, indique os respectivos valores próprios de* T.

Exercício 20 *Considere a transformação linear definida por*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2 + 3x_3, 3x_2 + x_3) .$$

Dentre os vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 3)$ *e* $\mathbf{v}_5 = (0, 3, 3)$, *quais são vectores próprios de* T? *E que valores próprios de* T *que lhes estão associados?*

Exercício 21 T *é a transformação linear definida por:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3) .$$

Verifique se alguns dos vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, 0, 2)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, 1, 3)$ *e* $\mathbf{v}_5 = (-1, 1, 0)$ *são vectores próprios de* T. *A que valores próprios de* T *estão associados?*

Exercício 22 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) \, .$$

Mostre que os vectores $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$ *e* $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ *determinam uma base de* $\mathbb{R}^2$ *constituída por vectores próprios de* T*. Nesta base, determine a representação matricial de* T*.*

Exercício 23 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é a transformação linear dada por:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_2, x_2) \, .$$

Justifique que os vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$ *e* $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ *determinam uma base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída por vectores próprios de* T*. Qual a representação matricial de* T *nesta base?*

Exercício 24 T *é a transformação linear definida por* $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_2) \, .$

a) *Indique o polinómio característico de* T*.*

b) *Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de* T *que lhes estão associados.*

c) *Determine uma base de* $\mathbb{R}^2$ *constituída por vectores próprios de* T*. Qual a representação matricial de* T *nesta base?*

Exercício 25 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *é representada pela matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} .$$

a) *Especifique* $\sigma(\mathbf{A})$ *.*

b) *Calcule os subespaços próprios de* T*.*

c) *Determine uma matriz de mudança de base* $\mathbf{S}$ *e uma matriz diagonal* $\mathbf{D}$ *tais que*

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}.$$

Exercício 26 *Na base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *a transformação linear* T *é representada pela matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

a) *Determine* $\sigma(\mathbf{A})$ *.*

b) *Calcule os subespaços próprios de* T*.*

c) *Mostre que não existe uma base de* $\mathbb{R}^2$ *constituída por vectores próprios de* T*.*

Exercício 27 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear definida por*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3) \, .$$

a) *Indique o polinómio característico de* T*.*

b) *Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de* T.

c) *Determine uma base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída por vectores próprios de* T. *Qual é a representação matricial de* T *nesta base?*

d) *Designando por* $\mathbf{A}$ *a matriz que representa* T *na base canónica de* $\mathbb{R}^3$, *determine uma matriz* $\mathbf{S}$ *e uma matriz diagonal* $\mathbf{D}$ *tais que* $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Exercício 28 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é a transformação linear dada por*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, 2x_2 + x_3, 2x_3).$$

a) *Qual o polinómio característico de* T?

b) *Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de* T.

c) *Mostre que não existe uma base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída por vectores próprios de* T.

Exercício 29 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *é representada pela matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) *Determine* $\sigma(\mathbf{A})$.

b) *Calcule os subespaços próprios de* T.

c) *Determine uma matriz* $\mathbf{S}$ *e uma matriz diagonal* $\mathbf{D}$ *tais que* $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Exercício 30 $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ *é uma transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{P}_1$, $(1, t)$, *é representada pela matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Determine* $\sigma(\mathbf{A})$.

b) *Calcule os subespaços próprios de* T.

c) *Indique uma base de* $\mathbb{P}_2$ *tal que a representação matricial de* T *nessa base seja diagonal.*

Exercício 31 *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ *dada por*

$$T(p(t)) = p'(t) + p(t).$$

a) *Relativamente à base canónica de* $\mathbb{P}_2$, $(1, t, t^2)$, *que matriz representa* T?

b) *Qual o polinómio característico de* T?

c) *Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de* T.

d) *Pode* T *ser representada por uma matriz diagonal? Justifique.*

Exercício 32 *Considere a transformação que a cada polinómio* $p(t)$ *de grau inferior a* 3 *faz corresponder o polinómio*

$$T(p(t)) = (1+2t)\ p(t) + (1-2t)\ p(-t).$$

a) *Mostre que* T *é uma transformação linear de* $\mathbb{P}_2$ *em* $\mathbb{P}_2$.

b) *Relativamente à base* $(1, t, t^2)$ *de* $\mathbb{P}_2$, *que matriz representa* T?

c) *Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de* T.

d) *A transformação* T *diagonalizável? Justifique.*

Exercício 33 *Duas matrizes quadradas* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *dizem-se semelhantes se existe uma matriz* $\mathbf{S}$ *invertível tal que* $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$. *Mostre que:*

a) *Qualquer matriz quadrada é semelhante a ela própria (*$\mathbf{A}$ *é semelhante a* $\mathbf{A}$*).*

b) *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são semelhantes, então também* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{A}$ *são semelhantes.*

c) *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são semelhantes e se* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *são semelhantes, então* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{C}$ *são semelhantes.*

d) *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são semelhantes e* $\mathbf{A}$ *é diagonalizável, então* $\mathbf{B}$ *é diagonalizável.*

e) *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são semelhantes, então têm o mesmo polinómio característico.*

3 Valores próprios complexos

Mesmo que $\mathbf{A}$ seja uma matriz real $(n \times n)$, $\mathbf{A}$ pode admitir valores próprios complexos. Nestas condições, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de $\mathbf{A}$ então um vector próprio $\mathbf{v}$ que lhe esteja associado será necessariamente um vector de $\mathbb{C}^n$: $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$, com $v_1, ..., v_n \in \mathbb{C}$. Numa circunstância destas é possível então concluir que $\overline{\lambda}$, o complexo conjugado de λ, é igualmente um valor próprio de A e que o chamado vector conjugado de $\mathbf{v}$,

$$\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_1, ..., \overline{v}_n),$$

é vector próprio de $\mathbf{A}$ associado a $\overline{\lambda}$.

3.1 Exercícios

Exercício 34 *Resolva as seguintes equações na variável complexa* z.

$$\text{a) } z^4 - 1 = 0. \quad \text{b) } z^3 + 8 = 0. \quad \text{c) } z^4 + 1 = 0. \quad \text{d) } z(z-3)^2 + 16z = 0.$$

Exercício 35 *Seja* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *a transformação linear definida por* $T(z_1, z_2) = (-z_2, z_1)$.

a) *Calcule o polinómio característico de* T.

b) *Quais os valores próprios e os subespaços próprios de* T?

c) *Determine uma base de* $\mathbb{C}^2$ *constituída por vectores próprios de* T. *Qual é a representação matricial de* T *nesta base?*

Exercício 36 *$T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ é a transformação linear que na base canónica de $\mathbb{C}^2$ é representada pela matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Indique o polinómio característico de* $\mathbf{A}$.

b) *Calcule os valores próprios e os subespaços próprios de* T.

c) *Determine uma matriz de mudança de base* $\mathbf{S}$ *e uma matriz diagonal* $\mathbf{D}$ *tais que* $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Exercício 37 *Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear definida por*

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_2 - z_3, z_2, z_1 - z_2 + z_3).$$

a) *Calcule o polinómio característico de* T.

b) *Determine os valores próprios e os subespaços próprios de* T.

c) *Determine uma base de $\mathbb{C}^3$ constituída por vectores próprios de T. Qual é a representação matricial de T nesta base?*

d) *Designando por $\mathbf{A}$ a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{C}^3$, determine uma matriz de mudança de base $\mathbf{S}$ e uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ tais que* $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Exercício 38 *Considere as matrizes:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 24 & -10 \end{bmatrix}.$$

Mostre que todas são diagonalizáveis e calcule $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{B}^n$ e $\mathbf{C}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 39 *Considere as matrizes:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mostre que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (não sendo diagonalizáveis enquanto matrizes reais) são diagonalizáveis enquanto matrizes complexas. Calcule $\mathbf{A}^n$ e $\mathbf{B}^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 40 *A matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tem valores próprios complexos $\lambda = a \pm ib$. Mostre que transformação linear que A representa consiste na composição de uma rotação seguida de uma mudança de escala. Ou seja, que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Exercício 41 *Com base no exercício anterior calcule $\mathbf{A}^n$, onde*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Particularize para o cálculo de $\mathbf{A}^{10}$ e $\mathbf{A}^{12}$.

4 Aplicação à resolução de algumas equações diferenciais

Exercício 42 *Seja $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ a transformação linear definida por*

$$T(p(t)) = p'(t) - 2p(t).$$

a) *Qual a matriz que representa T na base canónica $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$?*

b) *Mostre que T é bijectiva e calcule a matriz que representa T^{-1} na mesma base. Justifique que, para qualquer polinómio $q(t) \in \mathbb{P}_2$,*

$$T^{-1}(q(t)) = -\frac{1}{2}q(t) - \frac{1}{4}q'(t) - \frac{1}{8}q''(t).$$

c) *Resolva em $\mathbb{P}_2$ a equação diferencial $p'(t) - 2p(t) = 1 + t + t^2$.*

Exercício 43 *Seja $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ a transformação linear definida por*

$$T(p(t)) = t^2 p''(t) - 2p(t).$$

a) *Que matriz representa T na base canónica $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$?*

b) *Determine uma base do $\operatorname{Nuc} T$ e conclua que T não é injectiva nem sobrejectiva.*

c) *Resolva em $\mathbb{P}_2$ a equação diferencial $t^2 p''(t) - 2p(t) = 1$.*

Exercício 44 *No espaço vectorial $C^2(\mathbb{R})$ das funções reais de variável real duas vezes diferenciáveis, considere a transformação linear $T : C^2(\mathbb{R}) \to C^2(\mathbb{R})$ definida por*

$$T(f) = f'' - 2f' + f.$$

a) *Indique uma base de $\operatorname{Nuc} T$ (ver Exercício 49 da Ficha 2).*

b) *Sabendo que $f(t) \equiv 1$ é uma solução da equação linear $T(f) = 1$, calcule a única solução da mesma equação que verifica $f(0) = f'(0) = 0$.*

Exercício 45 *Considere o sistema de equações diferenciais lineares*

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Decida quais dos seguintes pares de funções são soluções deste sistema: $(-e^t, e^t)$, (e^{3t}, e^{3t}), (e^t, e^{3t}).

Exercício 46 *Considere uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e designe por $\mathcal{S}_\mathbf{A}$ o conjunto das soluções do sistema*

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

a) *Mostre que $\mathcal{S}_\mathbf{A}$ com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar tem estrutura de espaço linear.*

b) *Mostre que se* $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, *então os pares de funções* $(e^{\lambda_1 t}, 0)$ *e* $(0, e^{\lambda_2 t})$ *constituem uma base para* $\mathcal{S}_{\mathbf{D}}$, *e portanto*

$$\mathcal{S}_{\mathbf{D}} = \left\{ \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t} \right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sugestão: mostre que se $(x_1(t), x_2(t)) \in S_{\mathbf{D}}$, *então* $x_1(t)e^{-\lambda_1 t}$ *e* $x_2(t)e^{-\lambda_2 t}$ *são funções constantes.*

c) *Mostre que se* $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, *então os pares de funções* $(e^{\lambda t}, 0)$ *e* $(te^{\lambda t}, e^{\lambda t})$ *constituem uma base para* $\mathcal{S}_J$, *e portanto*

$$\mathcal{S}_{\mathbf{J}} = \left\{ \left(c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t} \right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sugestão: mostre que se $(x_1(t), x_2(t)) \in \mathcal{S}_{\mathbf{J}}$ *então* $x_2(t)e^{-\lambda t}$ *é uma função constante e* $x_1(t)e^{-\lambda t}$ *é um polinómio com grau* $\leqslant 1$.

d) *Mostre que se* $\mathbf{S}$ *é uma matriz de mudança de base e* $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, *então tem-se:*

$$\mathcal{S}_{\mathbf{A}} = \left\{ \mathbf{S} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} : (y_1(t), y_2(t)) \in \mathcal{S}_{\mathbf{B}} \right\}.$$

Exercício 47 *Considere a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) *Mostre que* $\mathbf{A}$ *é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal* $\mathbf{D}$ *e uma matriz de mudança de base* $\mathbf{S}$ *tais que* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

b) *Resolva o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

Exercício 48 *Considere a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) *Mostre que* $\mathbf{A}$ *é diagonalizável, identificando uma matriz diagonal* $\mathbf{D}$ *e uma matriz de mudança de base* $\mathbf{S}$ *tais que* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$.

b) *Calcule a única solução do problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 5x_2(t) \end{cases}, \ x_1(0) = 1, \ x_2(0) = -1.$$

5 Soluções

1) a) -1. b) 0. c) 30. d) 1. e) 30. f) 0.

2) a) 3. b) 6. c) 0. d) 18. e) 15. f) -45

3) a) 5. b) 10. c) 5. d) 10.

4) $-\delta\gamma$.

6) λ^n, onde n é o número de linhas (e de colunas da matriz).

8)a) -9; b) -5; c) -7; d) 6; e) 15; f) -45.

9) Falso; $\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$.

10) a) -9. b) -5. c) -7.

11) a) 7. b) 14. c) 21.

12) a) 22. b) 15.

13) $\det \mathbf{A} = -2$, $\det \mathbf{B} = 4$. a) -54. b) -128. c) -2. d) 1.

14) a) $\mathrm{Cof}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 1$ e $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

b) $\mathrm{Cof}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\det \mathbf{A} = -5$ e $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 & 1/5 \\ -4/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

c) $\mathrm{Cof}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 3$ e $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $\mathrm{Cof}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 18 & -12 & 6 \\ -9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$, $\det \mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{A}$ não é invertível.

15) a) $\det A = 21$, b) $\det B = -3$, c) $\det\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{B}^3\right) = -7$, d) $[\mathbf{A}^{-1}]_{12} = \frac{1}{3}$.

16) a) $(-9, 5, -2)$. b) $(1, 0, -1)$.

19) $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_3$ não são vectores próprios de T; $\mathbf{v}_2$ é vector próprio de T associado ao valor próprio -1, $\mathbf{v}_4$ é vector próprio de T associado ao valor próprio 3.

20) $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_5$ são vectores próprios de T; -2, 0 e 4 são os respectivos valores próprios.

21) $\mathbf{v}_2$ é vector próprio de T associado ao valor próprio 5, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_5$ são vectores próprios associados ao valor próprio -1.

22) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

23) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

24) a) $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

b) 1 e 3 são os valores próprios de T. Os subespaços próprios de T são:

$E(1) = \mathcal{L}\{(1,0)\}$ e $E(3) = \mathcal{L}\{(1,1)\}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

25) a) $\sigma(\mathbf{A}) = \{-1, 5\}$ b) $E(-1) = \mathcal{L}\{(-1,1)\}$ e $E(5) = \mathcal{L}\{(1,1)\}$. c) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

26 a) $\sigma(\mathbf{A}) = \{2\}$. b) $E(2) = \mathcal{L}\{(1,0)\}$. c) $\dim E(2) = 1 \neq \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

27) a) $P(\lambda) = \lambda(3-\lambda)(\lambda - 1)$.

b) 0, 1 e 3 são os valores próprios de T. Os subespaços próprios são:
$E(0) = \mathcal{L}\{(1,0,0)\}$, $E(1) = \mathcal{L}\{(0,-1,1)\}$ e $E(3) = \mathcal{L}\{(2,3,3)\}$.

c) $\{(1,0,0), (0,-1,1), (2,3,3)\}$.

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

28) a) $P(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-2)^2$.

b) 2 e 3 são os valores próprios de T. Os subespaços próprios são:
$E(2) = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}$ e $E(3) = \mathcal{L}\{(1,0,0)\}$.

c) Não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de T porque $\dim E(2) + \dim E(3) = 2 \neq \dim\ \mathbb{R}^3$.

29) a) $\sigma(\mathbf{A}) = \{6, 9\}$.

b) $E(6) = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$ e $E(9) = \mathcal{L}\{(2,3,0), (1,0,3)\}$.

c) $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

30) a) $\sigma(\mathbf{A}) = \{1, 2\}$.

b) $E(1) = \mathcal{L}(\{t - 3/2\})$, $E(2) = \mathcal{L}(\{t-1\})$.

c) T é representada por $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ na base $\{t - 3/2, t-1\}$.

31) a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. b) $(1-\lambda)^3$.

c) 1 é valor próprio de T. $E(1) = \mathcal{L}\{1\}$.

d) Não: $\dim E(1) = 1 \neq 3 = \dim \mathbb{P}_2$.

32) b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&4&2\end{bmatrix}$. c) $\sigma(T)=\{0,2\}$. $E(0)=\mathcal{L}\{t-2t^2\}$ e $E(2)=\mathcal{L}\{1,t\}$. d) Sim: $\dim E(0)+\dim E(2)=\dim \mathbb{P}_2$.

34) a) $z=\pm1$ e $z=\pm i$. b) $z=1\pm i\sqrt{3}$ e $z=-2$.

c) $z=\left(\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}\right)/2$ e $z=\left(-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}\right)/2$. d) $z=0$ e $z=3\pm 4i$.

35) a) $P(z)=z^2+1$. b) $\pm i$ são os valores próprios de T; $E(i)=\mathcal{L}\{(i,1)\}$ e $E(-i)=\mathcal{L}\{(-i,1)\}$.

c) $\{(i,1),(-i,1)\}$ é base de $\mathbb{C}^2$; $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$.

36) a) $P(z)=z^2+4$. b) $\pm 2i$ são os valores próprios de T; $E(2i)=\mathcal{L}\{(-i,1)\}$ e $E(-2i)=\mathcal{L}\{(i,1)\}$.

c) $\{(i,1),(-i,1)\}$ é base de $\mathbb{C}^2$; $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-2i&0\\0&2i\end{bmatrix}$, $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}i&-i\\1&1\end{bmatrix}$.

37) a) $P(z)=(1-z)\left[(1-z)^2+1\right]$. b) 1 e $1\pm i$ são os valores próprios de T; $E(1)=\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$, $E(1+i)=\mathcal{L}\{(i,0,1)\}$ e $E(1-i)=\mathcal{L}\{(-i,0,1)\}$.

c) $\{(1,1,1),(i,0,1),(-i,0,1)\}$ é base de $\mathbb{C}^2$; $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1+i&0\\0&0&1-i\end{bmatrix}$.

d) $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1&i&-i\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ e $\mathbf{D}$.

38 $\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^n=\begin{bmatrix}2-3^n&3^n-1\\2-2(3^n)&2(3^n)-1\end{bmatrix}$ e

$\mathbf{C}^n=\begin{bmatrix}3(2^n)-2(-2)^n&(-2)^n-(2^n)\\6(2^n)-6(-2)^n&3(-2)^n-2(2^n)\end{bmatrix}$.

39) $\mathbf{A}^n=\sqrt{2^n}\begin{bmatrix}\cos(n\pi/4)&\sin(n\pi/4)\\-\sin(n\pi/4)&\cos(n\pi/4)\end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}^n=\sqrt{8^n}\begin{bmatrix}\cos(\pi n/4)&\frac{1}{2}\sin(\pi n/4)\\-2\sin(\pi n/4)&\cos(\pi n/4)\end{bmatrix}$.

41) $\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}2^{n/2}\cos(n\pi/4)&-2^{n/2}\sin(n\pi/4)\\2^{n/2}\sin(n\pi/4)&2^{n/2}\cos(n\pi/4)\end{bmatrix}$. $\mathbf{A}^{10}=\begin{bmatrix}0&-32\\32&0\end{bmatrix}$; $\mathbf{A}^{12}=\begin{bmatrix}-64&0\\0&64\end{bmatrix}$.

42) a) $\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-2&2\\0&0&-2\end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix}-1/2&-1/4&-1/4\\0&-1/2&-1/2\\0&0&-1/2\end{bmatrix}$. c) $-1-t-t^2/2$.

43) a) $\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. b) $\{t^2\}$ é base de $\operatorname{Nuc}T$. c) $p(t)=-1/2+a\,t^2$, com $a\in\mathbb{R}$.

44) a) $\{e^t, te^t\}$. b) $f(t) = te^t - e^t + 1$.

45) Sim, sim, não.

47) a) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\mathcal{S}_{\mathbf{A}} = \{(-c_1 e^t + c_2 e^{3t}, c_1 e^t + c_2 e^{3t}) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

48) a) $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; b) $(3e^{3t} - 2e^{4t}, 3e^{3t} - 4e^{4t})$