Instituto Superior Técnico - TagusPark
Matemática Discreta 2020/2021
Exercícios para as aulas de problemas e teorico-práticas

Lista 9

Após a aula teorico-prática e a de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina. Vários dos exercícios (ou muito semelhantes) são apresentados como exemplos ou exercícios resolvidos no Capítulo 7 do livro (alguns estão explicitamente indicados abaixo).

1 Grafos: conceitos elementares

Use os resultados estudados sobre (multi)grafos para resolver os exercícios seguintes.

1. É possível construir um grafo com 6 vértices tal que dois vértices têm grau 3, dois vértices têm grau 4, um vértice tem grau 2 e um vértice tem grau 5?

2. Um grafo $\mathcal{G}$ tem 14 vértices e 27 arestas. Cada vértice de $\mathcal{G}$ ou tem grau 3, ou tem grau 4 ou tem grau 5. Há 6 vértices de grau 4. Quantos vértices de $\mathcal{G}$ têm grau 3? Quantos vértices têm grau 5?

3. Nove alunos de uma turma de primeiro ano da LEIC afirmaram que tinham frequentado a mesma escola secundária que exatamente um dos outros alunos da turma. Os restantes disseram que ninguém tinha frequentado a mesma escola secundária que eles. A turma tem 30 alunos. Conclua que alguém se enganou.

4. Um certa comissão parlamentar da Assembleia da República é composta por 15 deputados. Um terço deles disseram ter já estado em comissões anteriores com exatamente 3 dos outros deputados desta comissão, e os restantes disseram nunca ter coexistido com nenhum dos outros 14 em comissões anteriores. Conclua que alguém se enganou.

5. Um grafo diz-se completo se dados dois quaisquer vértices distintos existe sempre uma aresta que os une. Quantas arestas tem um grafo completo de n vértices? (Livro: página 431)

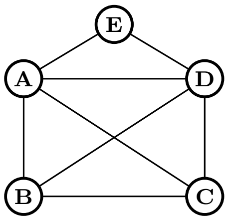
6. Três garrafas têm capacidades de 4, 3 e 1 litros, respetivamente. A maior das garrafas está cheia de água e as outras estão vazias. Pretende dividir-se a água em duas porções iguais usando as outras duas garrafas como auxiliares, de modo a obter 2 litros na garrafa maior e 2 litros na de tamanho médio. Para tal, em cada passo, deve-se despejar o conteúdo de uma garrafa para a(s) outra(s). Qual é o menor número possível de passos em que esta tarefa pode ser realizada? (Livro: página 433)

7. Repita o Exercício 6, agora para garrafas de 8, 5 e 3 litros, de modo a dividir o conteúdo inicial da garrafa de maior capacidade em duas porções de (a) 4 litros (b) 2 e 6 litros (c) 1 e 7 litros

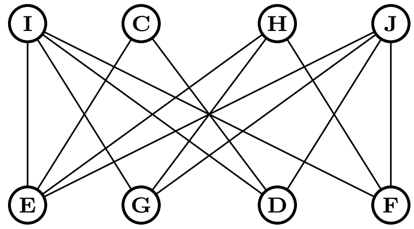
2 Grafos eulerianos, atravessáveis e aplicações

1. Um (multi)grafo diz-se *atravessável* se tem um atalho euleriano aberto. Demonstre a segunda parte do *teorema de Euler-Hierholzer*: G é um (multi)grafo atravessável se e só se é conexo e tem exatamente dois vértices de grau ímpar. Indique como pode usar o algoritmo de Fleury para obter um atalho euleriano aberto num (multi)grafo atravessável.

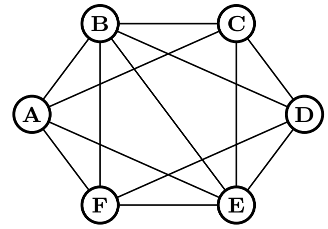
2. Use os conhecimentos adquiridos sobre grafos para responder às seguintes perguntas para cada um dos apresentados seguidamente.



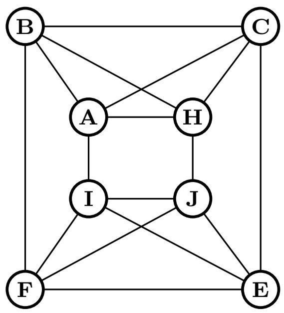
$\mathcal{G}_1$



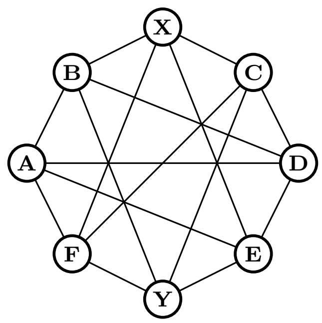
$\mathcal{G}_2$



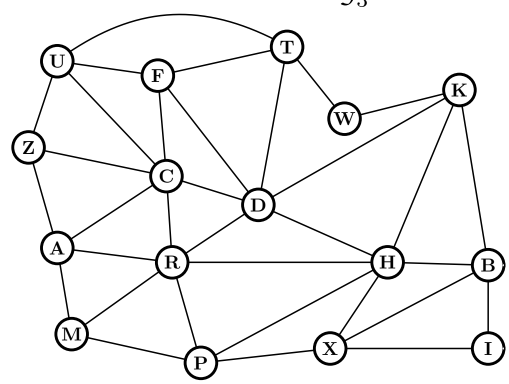
$\mathcal{G}_3$



$\mathcal{G}_4$



$\mathcal{G}_5$

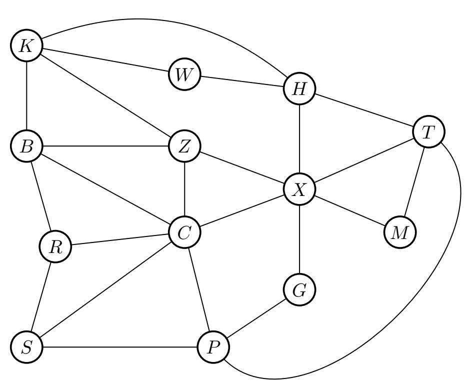


$\mathcal{G}_6$

(a) É possível desenhar o grafo sem tirar a caneta do papel, iniciando o desenho num dos vértices, desenhando cada aresta uma só vez e terminado no vértice inicial? Em caso afirmativo explique como fazê-lo, usando o algoritmo estudado.

(b) E se o vértice de partida puder ser diferente do vértice de chegada? Em caso afirmativo explique como fazê-lo, usando o algoritmo estudado.

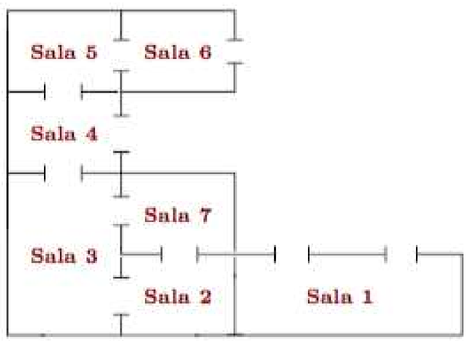
3. Um carteiro tem de distribuir correio pelas ruas de um bairro cuja planta é representada pelo grafo na figura. Sempre que possível, quer seguir um percurso que passa uma e uma só vez por cada rua na qual tem de fazer entregas, e não passa pelas ruas nas quais não tem nada para entregar. Use as propriedades sobre grafos estudadas para responder às seguintes perguntas.

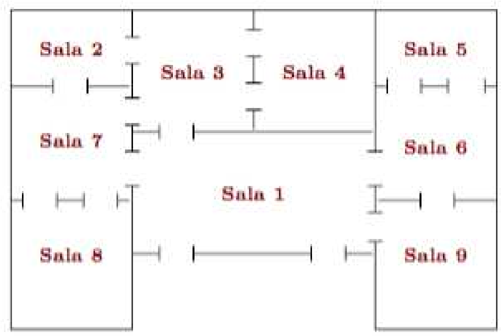


(a) Se num certo dia há correio para distribuir em todas as ruas do bairro, é possível fazer a distribuição como referido? E se não houvesse correio para distribuir na rua representada pela aresta incidente em S e R? Justifique <u>sem indicar</u> o percurso, se existir.

(b) Se nalgum dos casos acima for possível fazer a distribuição como indicado, mostre como o fazer, recorrendo ao algoritmo estudado para construir um caminho apropriado.

4. Cada uma das figuras seguintes representa a planta de um piso de um museu. Use conhecimentos adquiridos sobre grafos para resolver o seguinte problema para cada uma delas. Será possível, partindo de alguma das salas do museu, visitá-las todas passando por cada porta uma é uma só vez e terminando na mesma sala? E se se puder terminar numa sala diferente, ou fora das salas? Em caso afirmativo, explique como fazê-lo.





5. Numa certa cidade, as bermas dos passeios das ruas são limpas periodicamente com uma máquina apropriada. A máquina tem de percorrer cada rua pelo menos duas vezes para que ambas as bermas sejam limpas. Use os conhecimentos sobre grafos que adquiriu para concluir que qualquer que seja a planta do bairro a limpar num certo dia é sempre possível estabelecer um percurso para a máquina que, partindo de qualquer cruzamento do bairro, regressa a esse mesmo cruzamento após ter passado por cada uma das ruas do bairro exatamente duas vezes.