Ficha 4
Resolução dos exercícios de auto-avaliação

III.1 Aplicando o método de primitivação por substituição, determine as seguintes primitivas:

a) $P\left(\frac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\frac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}$ é da forma $R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x = t^m, \text{ onde } m = \text{m.m.c}(q, s, ...).$$

Efectuando a substituição: $x = \underbrace{t^2}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = 2t$
- $x = t^2 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow t = \underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \frac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}$
- $f(g(t)) = f(t^2) = \frac{2^{\sqrt{t^2}-1}}{\sqrt{t^2}} = \frac{2^{t-1}}{t}$

Assim,

$$P\left(\frac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x)=\left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P\left(\frac{2^{t-1}}{t}\cdot 2t\right)\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[P2^{t-1}\cdot 2\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[P2^{t}\cdot 2^{-1}\cdot 2\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[P2^{t}\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[\frac{2^t}{\ln 2}+C\right]_{t=\sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2}+C.$$

b) $P\left(\frac{\cos(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\frac{\cos(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}$ é da forma $R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x = t^m, \text{ onde } m = \text{m.m.c}(q, s, ...).$$

Efectuando a substituição: $x = \underbrace{t^2}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = 2t$
- $x = t^2 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow t = \underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}$
- $f(g(t)) = f(t^2) = \frac{\cos(\sqrt{t^2})}{4\sqrt{t^2}} = \frac{\cos(t)}{4t}$

Assim,

$$P\left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usando o método de primitivação}\\ \text{por substituição:} Pf(x)=\left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P\left(\frac{\cos(t)}{4t}\cdot 2t\right)\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[P\frac{\cos(t)}{2}\right]_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left[P\cos(t)\right]_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(t)\right]_{t=\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)+C.$$

c) $P\left(\sqrt{9-x^2}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\sqrt{9\text{-}x^2}$ é da forma $R(x,\sqrt{a^2-b^2x^2})$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x=\frac{a}{b}\operatorname{sen} t \text{ ou } x=\frac{a}{b}\cos t.$$

Substituição: $x=\underbrace{3\operatorname{sen} t}_{g(t)}$

Tem-se

- $g'(t)=3\cos t$
- $x=3\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)=t \Leftrightarrow t=\underbrace{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x)=\sqrt{9\text{-}x^2}$
- $f(g(t))=f(3\operatorname{sen} t)=\sqrt{9-(3\operatorname{sen} t)^2}=\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}=\sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2 t)}=\sqrt{9\cos^2 t}=3\cos t$

Assim,

$$P\left(\sqrt{9-x^2}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usando o método de primitivação}\\ \text{por substituição:} Pf(x)=P\left[f(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P(3\cos t\cdot 3\cos t)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)} = \left[P\left(9\cos^2 t\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)} = \left[9P\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$= \left[\frac{9}{2}\left(P1+P\cos(2t)\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)} = \left[\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}P2\cos(2t)\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$= \left[\frac{9}{2}\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right)+C\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)} = \left[\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\operatorname{sen}(2t)+C\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)} \underset{(*)}{=} \frac{9}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\right)+C$$

Cálculos auxiliares: $(*)$

Atendendo a que:

$$\operatorname{sen}(2t)=2\operatorname{sen} t\cos t \underset{\substack{\uparrow\\ \cos t=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}}{=} 2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \text{ e } x=3\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \operatorname{sen} t=\frac{x}{3}$$

vem

$$\operatorname{sen}(2t)=2\left(\frac{x}{3}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=2\left(\frac{x}{3}\right)\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}=2\left(\frac{x}{3}\right)\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}=\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}.$$

III. 2 Determine a primitiva H da função $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ tal que $H(0)=2$.

Resolução:

$$P\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=P\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}P2x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Regra de primitivação: } Pu'\cdot u^k=\frac{u^{k+1}}{k+1}+C,\ k\neq-1\\ \text{em que } \begin{cases}u=1+x^2,\quad k=-\frac{3}{2}\\ u'=2x\end{cases}}}{=}\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

A expressão geral das primitivas de f (x) é dada por

$$H(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Pretende-se determinar uma primitiva de $H(x)$ tal que $H(0)=2$.

Temos

$$H(0)=2\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{1+0^2}}+C=2\Leftrightarrow-1+C=2\Leftrightarrow C=3.$$

Assim,

$$H(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+3$$