FÓRMULAS (CDI - II)

Comprimento de arco $\longrightarrow$ $$\int_L ds = \int_a^b \|r'(t)\|\, dt$$

Integral em ordem ao comprimento de arco $\longrightarrow$ $$\int_L F\, ds = \int_a^b F\big(r(t)\big)\,\|r'(t)\|\, dt$$

Integral de Linha $\longrightarrow$ $$\int_L G \cdot dr = \int_a^b G\big(r(t)\big) \cdot r'(t)\, dt$$

TEOREMAS

Regra de Barrow $\longrightarrow$ $$\int_L \nabla \varphi \cdot dr = \varphi\big(r(b)\big) - \varphi\big(r(a)\big)$$

Teorema de Green $\longrightarrow$ $$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint P\, dx + Q\, dy$$

Teorema da Divergência $\longrightarrow$ $$\iiint_U \operatorname{div} F\, dx = \iint_{\partial U} F \cdot \bar{m}\, dV_2$$

Teorema de Stokes $\longrightarrow$ $$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \bar{m}\, dS = \oint_L F \cdot dr$$

MUDANÇAS DE VARIÁVEL

$$\int_V F\, dx = \int_{\varphi(V)} F\big(\varphi^{-1}(t)\big) \cdot \left|\det J_{\varphi^{-1}}(t)\right|\, dt$$

OPERADORES DIFERENCIAIS

Gradiente (∇) $\longrightarrow$ $\nabla G = \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right)$ $\quad G: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Divergência (div) $\longrightarrow$ $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$

Rotacional (rot) $\longrightarrow$ $\operatorname{rot} F = \underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)}$

$F: W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$F = (F_1, F_2, F_3)$

$x \longrightarrow y \longrightarrow z$ $\qquad$ $F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3$

ÁREAS DE SUPERFÍCIE ($\mathbb{R}^3$)

$$\text{Área}(S) = \iint_U \left\| \frac{\partial r}{\partial t_1} \times \frac{\partial r}{\partial t_2} \right\| dt_1\, dt_2$$

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

$F: U \subset \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $F \in C^1(U)$, U aberto, $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^k$

$F(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ com $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in U$

Se $\boxed{\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \neq 0}$ então existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ com $\bar{x}_0 \in V$ e uma função

$H: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $H \in C^1(V)$

tal que $\boxed{F(\bar{x}, H(\bar{x})) = 0}$ para $\bar{x} \in V$

Exemplo:

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 + y^2 + \log(x^2y^2+1)$

$\rightarrow$ $F(x,y) = 1$ é satisfeita para $(x,y) = (0,1) \longrightarrow (x_0, y_0)$

Define y como função de x numa vizinhança de $x = 0$?

$F \in C^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \dfrac{2x^2y}{x^2y^2+1}$

Como $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ o teorema da Função Implícita garante que tal é possível

$\rightarrow$ Calcular $H'(0)$ (H é a função definida implicitamente)

$F(x, H(x)) = 1$ donde sai que $H(0) = 1$, $H \in C^1$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, H(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, H(x)) \cdot H'(x) = 0 \Leftrightarrow$$ $\leftarrow$ derivando ambos os lados da igualdade

$$\Leftrightarrow H'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, H(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, H(x))} \Rightarrow H'(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{2xy^2}{x^2y^2+1}$$

Exemplo: (Teste 2014-2015)

Justifique que a equação $x + y^2 + z^2 + e^{xyz} = 2$ define implicitamente z como uma função $H(x,y)$ numa vizinhança de $(x,y,z) = (0,0,1)$ e calcule $\frac{\partial H}{\partial x}(0,0)$.

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = x + y^2 + z^2 + e^{xyz} - 2$, $\underline{F(0,0,1) = 0}$

$\underline{F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)} \longrightarrow J_F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 + yz e^{xyz} & 2y + xz e^{xyz} & 2z + xy e^{xyz} \end{bmatrix}$

$J_F(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0 \Longrightarrow$$

Pelo teorema da Função Implícita, a equação define z como uma função de x e y $(H(x,y))$ para (x,y,z) numa vizinhança de $(0,0,1)$

Como $F(x, y, H(x,y)) = 0$

diferenciação da igualdade

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

Em particular para $(x,y,z) = (0,0,1)$

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,1)}_{1} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)}_{2} \cdot \underbrace{\frac{\partial H}{\partial x}(0,0)}_{?} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{2}$$

Teorema da Função Inversa

$F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, A aberto, $F \in C^1(A)$, $\bar{x}_0 \in A$

Se $\boxed{\det J_F(\bar{x}_0) \neq 0}$

Então, existem abertos $(U \ni \bar{x}_0)$ e $(V \ni F(\bar{x}_0))$ tais que a restrição de F a U é uma <u>bijeção</u> sobre V e a inversa dessa restrição é uma <u>função de classe C^1</u>

$$G = \left(F|_U\right)^{-1} \qquad G \in C^1(V)$$

<u>Exemplo:</u>

$F : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = \left(e^x + \log(x+y),\ x+y+y^2\right) \rightarrow F \in C^1$ no seu domínio

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} e^x + \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \\ 1 & 1+2y \end{bmatrix}$$

tomando $(\bar{x}_0) = (0,1)$

$$J_F(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\det\left(J_F(0,1)\right) = 5 > 0}$$

existem abertos U, V com $(0,1) \in U$ e com $F(0,1) = (0,2) \in V$ tais que F é uma bijeção de U sobre V com inversa $G \in C^1(V)$

$$J_G(0,2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: (Teste 2015 - 2016)

$\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\Psi(x,y) = \left(x - 2y + e^{x^2-y^2}, x+y\right)$

→ Mostre que existe um aberto U contendo $(0,0)$ onde Ψ é injetiva.

$\underline{\Psi \in C^1(\mathbb{R}^2)} \longrightarrow J_\Psi(x,y) = \begin{bmatrix} 1+2xe^{x^2-y^2} & -2-2ye^{x^2-y^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$J_\Psi(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \det J_\Psi(0,0) = 3 \underline{\neq 0}$

Logo, o teorema da função inversa garante que existe um aberto contendo $(0,0)$ onde Ψ é injetiva com uma <u>inversa local</u> de classe C^1 definida num aberto contendo $\Psi(0,0) = (1,0)$

→ Designando a inversa da restrição de Ψ a U por ϕ, calcule a matriz jacobiana $J_\varphi(1,0)$

$J_\varphi(1,0) = J_\Psi(0,0)^{-1} =$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Álgebra</u>:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ <u>ou</u> $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

VARIEDADES

$S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma variedade diferenciável de dimensão K e de classe C^j (com $1 \leq j < \infty$, $j \in \mathbb{Z}$ e $K \in \mathbb{N}$, $1 \leq K \leq n-1$) se para cada $\bar{x}_0 \in S$ existir uma vizinhança U de $\bar{x}_0$ e uma aplicação $r : W \subset \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com:
W aberto, $r \in C^1(W)$ injetiva, D_r injetiva, e com inversa de r contínua, tal que

$$\boxed{r(W) = U \cap S}$$

→ Representação Implícita

$S \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão K $(1 \leq K \leq n-1)$ sse para cada $\bar{x}_0 \in S$ existir uma vizinhança de $\bar{x}_0$ (U) e uma aplicação $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-K}$, $\varphi \in C^1(U)$ tal que $S \cap U = \{\bar{x} \in U : \varphi(\bar{x}) = \bar{0}\}$ e $D\varphi$ é sobrejetiva.

Exemplo:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$J_\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

D_φ ser sobrejetiva → contradomínio da aplicação linear ter dimensão 1, ou seja, as colunas da matriz têm que ser linearmente independentes ou neste caso, a característica tem de ser 1.

Exemplo: (Teste 2015-2016)

Decida se o conjunto $V = \begin{cases} z = (x+y)^2 + (x-y)^2 \\ z = 1 - 4x^2 - y^2 \end{cases}$

é ou não uma variedade diferenciável e, na afirmativa, determine a sua dimensão e o espaço tangente em $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{3}\right)$

$F: \mathbb{R}^{3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2} \Longrightarrow$ Variedade diferenciável de dimensão 1 ?

$F(x,y,z) = \left(z - (x+y)^2 - (x-y)^2,\ z - 1 + 4x^2 + 4y^2\right)$

$\downarrow$

F é o conjunto de nível 0 de V $\qquad F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$

$J_F(x,y,z) = \begin{bmatrix} -4x & -4y & 1 \\ 8x & 2y & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow D_F$ sobrejetiva ?

$\downarrow$

colunas linearmente independentes

$\Updownarrow$

determinante da matriz ser ~~igual~~ diferente de zero

$\det \left| \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} \right| = 24xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

$\det \left| \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)} \right| = -12x \overset{=0}{\Leftrightarrow} x = 0$

$\det \left| \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)} \right| = -6y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$\boxed{car \neq 2} \Longrightarrow x = y = 0$

Se $x = y = 0$, na definição da variedade V ficaria:

$\begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Longrightarrow$ impossível

Logo, não existem pontos com $x = y = 0$ em V $\Longrightarrow car = 2 \Longrightarrow D_F$ é sobrejetiva

V é uma variedade diferenciável de dimensão 1.

$J_F\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{6}} & 0 & 1 \\ \frac{8}{\sqrt{6}} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad N_V\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{3}\right) = \operatorname{span}\left\{\left(-\frac{4}{\sqrt{6}}, 0, 1\right), \left(\frac{8}{\sqrt{6}}, 0, 1\right)\right\}$

$\left[T_V\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{3}\right)\right]^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\} = \left(-\frac{4}{\sqrt{6}}\alpha + \frac{8}{\sqrt{6}}\beta,\ 0,\ \alpha + \beta\right)$

$\begin{cases} -\frac{4}{\sqrt{6}}\alpha + \frac{8}{\sqrt{6}}\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow T_V\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{3}\right) = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$

CAMINHO

Seja $r: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com I um intervalo

aplicação contínua

LINHA

É o contradomínio de um caminho

Definição:

Dado um caminho $r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

r diz-se seccionalmente de classe C^1

se existir uma partição de $[a, b]$,

$P = \{ t_0 = a, t_1, \ldots, t_k = b \}$ com $t_j \leq t_{j+1} \quad \forall j$

tal que $r \in C^1([t_j, t_{j+1}])$

TEOREMA:

Caminhos seccionalmente C^1 são retificáveis.

Seja $r: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, um caminho de classe $C^1([a,b])$.

Então, r é retificável e o seu comprimento é:

$$\int_a^b \| r'(t) \| \, dt \longrightarrow \boxed{\text{COMPRIMENTO}}$$

$$\| r'(t) \| \longrightarrow \underbrace{S(\lambda) = \int_a^\lambda \| r'(\lambda) \| \, d\lambda}_{\text{função comprimento de arco}}$$

Exemplo:

Justifique que uma linha L definida por um caminho $r(t) = (t, \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ é retificável com um comprimento inferior a $2\sqrt{5}\pi$.

$$r \in C^1([0, 2\pi]) \implies r \text{ é retificável}$$

$$l = \int_L ds = \int_0^{2\pi} \|r'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \|(1, -\operatorname{sen} t, 2\cos t)\| \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{=1} + 3\cos^2 t} \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 3\cos^2 t} \, dt \leqslant \int_0^{2\pi} \sqrt{5} \, dt = 2\sqrt{5}\pi$$

INTEGRAL EM ORDEM AO COMPRIMENTO DE ARCO

$r : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, r seccionalmente C^1

$L = r([a, b])$

$F : L \longrightarrow \mathbb{R}$ (função escalar $\rightarrow$ contradomínio de dimensão 1)

Então,

$$\boxed{\int_L F \, ds = \int_a^b F(r(t)) \, \|r'(t)\| \, dt}$$

$ds \longrightarrow$ integral em ordem ao comprimento de arco

Exemplo:

Considere um fio modelado por uma linha L definida por um caminho $r(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, com massa específica $D(x,y,z) = 2 + xy$ em unidades convenientes. Calcule a massa do fio.

$$m = \int_L D(x,y,z)\, ds = \int_0^{2\pi} D(R(t)) \|R'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 + t\cos t) \|(1, -\operatorname{sen} t, \cos t)\|\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 + t\cos t)\sqrt{1 + \underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{=1}}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (2 + t\cos t)\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left(4\pi + \left[t \operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\, dt\right)$$

Comprimento

$$\downarrow$$

$$\int_L ds$$

Integral em ordem ao Comprimento

$$\downarrow$$

$$\int_L F\, ds$$

INTEGRAL DE LINHA

$F: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, A aberto

$r: [a,b] \longrightarrow A$, r seccionalmente de classe $C^1([a,b])$

$L = r([a,b])$

Então, define-se $\displaystyle\int_L F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$

Exemplo:

$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right) \qquad F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$r: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$L = r([0,2\pi])$

$$\int_L F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}, \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \right) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t \, dt = 0$$

TEOREMA: (Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha)

$A \subset \mathbb{R}^n$, aberto conexo

$F: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, um campo conservativo

Então, existe $\varphi: A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = F$

Corolário:

Um campo vetorial contínuo num aberto de $\mathbb{R}^n$ é conservativo sse for um gradiente de um campo escalar C^1 nesse aberto.

Exemplo:

$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$

Como

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right) \\ \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \\ \\ \displaystyle\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \end{array}$$

Este campo possui um potencial escalar

$$\downarrow$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

$$\Downarrow$$

O campo é conservativo

$\boxed{\text{Campo escalar}}$

$\downarrow$

contradomínio de dimensão 1

$\boxed{\text{Campo vetorial}}$

$\downarrow$

contradomínio de dimensão $\geqslant 2$

Exemplo:

Calcule o integral de linha $\int_L G \cdot dr$ em que L é descrita por um caminho C^1 unindo $(0,0,0)$ ao ponto $(1,1,1)$ e

$$G(x,y,z) = (z, 2y+z, y+x)$$

$$\int_a^b G(R(t)) \cdot R'(t)\, dt \longrightarrow F(1,1,1) - F(0,0,0)$$

$r(b) = (1,1,1)$
$r(a) = (0,0,0)$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \nabla F = G \;?$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z \Longrightarrow F(x,y,z) = xz + C_1(y,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + z \Longrightarrow F(x,y,z) = xz + y^2 + zy + C_2(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = y + x \Longrightarrow F(x,y,z) = xz + y^2 + zy + zy + zx$$

$$F(x,y,z) = 2xz + 2zy + y^2$$

$$\int_L \nabla F \cdot dr = F(r(b)) - F(r(a)) =$$

$$= F(1,1,1) - F(0,0,0) = 5 - 0 = 5$$

TEOREMA:

$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\alpha([a,b]) = \beta([c,d]) = L$

α, β seccionalmente de classe C^1 tais que

$H : [a,b] \longrightarrow [c,d] \qquad H([a,b]) = [c,d]$

$H \in C^1([a,b]) \qquad \alpha = \beta \circ H$

$\rightarrow$ Se $\boxed{H'(t) > 0}$ $\forall t \in [a,b] \qquad H(a) = c \,,\, H(b) = d$

Então, para $F \in C^0(L)$ $\boxed{\displaystyle\int_L F \cdot d\alpha = \int_L F \cdot d\beta}$

$\rightarrow$ Se $\boxed{H'(t) < 0}$ $\forall t \in [a,b] \qquad H(a) = d \,,\, H(b) = c$

Então, para $F \in C^0(L)$ $\boxed{\displaystyle\int_L F \cdot d\alpha = -\int_L F \cdot d\beta}$

Exemplo:

Mostre que dados caminhos $\alpha(\lambda) = (\cos\lambda, \operatorname{sen}\lambda)$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ e $\beta(t) = (-\cos t^2, -\operatorname{sen} t^2)$, $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ e um campo contínuo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ temos:

$$\oint_{S^1} F \cdot d\alpha = \oint_{S^1} F \cdot d\beta$$

$$\alpha(\lambda) = (\cos\lambda, \operatorname{sen}\lambda) \quad \lambda \in [0, 2\pi]$$

$$\beta(t) = (-\cos t^2, -\operatorname{sen} t^2) \quad t \in [0, \sqrt{2\pi}]$$

$$\int_{S^1} F \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} F(\alpha(\lambda)) \cdot \alpha'(\lambda)\, d\lambda = \qquad \alpha = \beta(H(\lambda))$$

$$= \int_0^{2\pi} F(\beta(H(\lambda))) \cdot \underbrace{\beta'(H(\lambda))\, H'(\lambda)}\, d\lambda =$$

$$t = H(\lambda)$$

$$= \int_0^{\sqrt{2\pi}} F(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\, dt = \int_{S^1} F \cdot d\beta$$

REGRA DE BARROW

$\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(U)$, U aberto

$r : [a,b] \longrightarrow U$, r sec. C^1 , $L = r([a,b])$

Então,

$$\int_L \nabla\varphi \cdot dr = \varphi(r(b)) - \varphi(r(a))$$

Demonstração:

$$\int_L \nabla\varphi \cdot dr = \int_a^b \underbrace{\nabla\varphi(r(t)) \cdot r'(t)}\, dt = \varphi(r(b)) - \varphi(r(a))$$

$$\nabla\varphi(r(t)) \cdot r'(t) = \frac{d}{dt}\left(\varphi(r(t))\right)$$

Potenciais Escalares

$F: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, U aberto

Haverá $\phi: U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\phi = F$?

$\longrightarrow$ Condição necessária: (para $F \in C^1$)

F é fechado

$\longrightarrow$ Método de cálculo de ϕ:

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \int F_1(x_1, \dots, x_m)\, dx_1 + C_1(x_2, \dots, x_m)$$

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \int F_2(x_1, \dots, x_m)\, dx_2 + C_2(x_1, x_3, \dots, x_m)$$

Exemplo:

$$G(x,y,z) = (z, 2y+z, y+x)$$

$$\nabla\varphi = G \; ? \Longrightarrow \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(z, 2y+z, y+x\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = z \Longrightarrow \boxed{\varphi(x,y,z) = xz + C_1(y,z)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 + \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y + z = \frac{\partial C_1}{\partial y} \Longrightarrow C_1(x,y) = y^2 + yz + C_2(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi(x,y,z) = xz + y^2 + yz + C_2(z)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = x + 0 + y + C_2'(z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = y + x = x + y + C_2'(z) \Longrightarrow C_2(z) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi(x,y,z) = xz + y^2 + yz}$$

Potenciais Vetoriais

$F: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto

Haverá $G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\boxed{\text{rot}\, G = F}$?

→ Condição necessária: (para $F \in C^1$)

$\boxed{\text{div}\, F = 0}$

→ Teoremas:

(1) $G: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto
$F \in C^1(U)$
Então, $\boxed{\text{div}\, F = 0}$

(2) $F: I \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, I aberto
$F \in C^1(I)$, $\text{div}\, F = 0$
Então, existe $G: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$
tal que $\boxed{\text{rot}\, G = F}$

Exemplo:

$\text{rot}\, G = (x - z, z - x, x - y)$ $\quad \text{rot}\, G = \left(\underbrace{\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}}_{= x - z}, \underbrace{\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}}_{= z - x}, \underbrace{\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}}_{= x - y} \right)$

$\boxed{G_2 \equiv 0}$

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} = y - z \Rightarrow \boxed{G_3(x, y, z) = y^2/2 - yz + C_1(x, z)}$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial x} = \frac{\partial C_1}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z - x = \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial C_1}{\partial x} \Rightarrow \boxed{G_1(x, y, z) = z^2/2 - zx + C_2(x, y)}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 0 + 0 + \frac{\partial C_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = y - x = \frac{\partial C_2}{\partial y} \Longrightarrow C_2(x, y) = y^2/2 - xy$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{G_1(x, y, z) = z^2/2 - xz + y^2/2 - xy}$$

$$G = \left(z^2/2 - xz + y^2/2 - xy, \ 0, \ y^2/2 - zy \right)$$

Teorema de Green

$F, G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, $F, G \in C^1([a,b])$, $F \leq G$

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] , F(x) \leq y \leq G(x)\}$

$\alpha, \beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $c < d$, $\alpha, \beta \in C^1([c,d])$, $\alpha \leq \beta$

$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] , \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$

$A \subset \mathbb{R}^2$, com regiões limitadas simultaneamente do tipo U e do tipo V

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx\,dy = \oint P\,dx + Q\,dy$$

MUDANÇA DE VARIÁVEIS

→ Fórmula Geral:

$$\int_V F \, dx = \int_{\varphi(V)} F\left(\varphi^{-1}(t)\right) \left| \det J_{\varphi^{-1}}(t) \right| dt$$

Exemplo: (Coordenadas esféricas)

Calcule $\displaystyle\iiint_B x \, dx\, dy\, dz$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2},\ x \geq y \geq 0\}$$

$$\varphi^{-1}(\rho, \theta, \phi) = \begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 1 \end{array}$$

$$J_{\varphi^{-1}}(\rho, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\phi & -\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \rho \cos\theta \cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi & \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi & \rho \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix}$$

$$\left| \det J_{\varphi^{-1}}(\rho, \theta, \phi) \right| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

$$\iiint_{\partial B} \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = \rho\cos\phi$

$$\boxed{z \geq \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\rho\cos\phi \geq \sqrt{\rho^2\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\cos\phi \geq \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi\,(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{=1})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\cos\phi \geq \sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\cos\phi \geq \rho\operatorname{sen}\phi \Leftrightarrow \cos\phi \geq \operatorname{sen}\phi \Longrightarrow 0 \leq \phi \leq \pi/4$$

$$\boxed{x \geq y \geq 0}$$

$$\downarrow$$

$$\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi \geq \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta \geq \operatorname{sen}\theta \Longrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi/4$$

$$\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^1 \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi \cdot \rho^2\operatorname{sen}\phi \, d\rho\right)d\theta\right)d\phi =$$

$$= \left(\int_0^{\pi/4}\cos\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}^2\phi \, d\phi\right)\left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right)$$

Exemplo: (Coordenadas Polares)

Calcule o volume de V

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)^2 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}}_{\varphi^{-1}} \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (\rho - 1)^2 \leq z \leq 1 - \rho$$

$$\rho \geq 0 \ , \ \theta \in [0, 2\pi]$$

$$J_{\varphi^{-1}}(\rho,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left| \det J_{\varphi^{-1}}(\rho,\theta,z) \right| = \rho$$

$$\boxed{(\rho-1)^2 \leq 1 - \rho}$$

$$\rho^2 - 2\rho + 1 \leq 1 - \rho \Leftrightarrow \rho^2 - \rho \leq 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\rho \leq 0} \ \vee \ \rho - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\rho \leq 1}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{(\rho-1)^2}^{1-\rho} \rho \, dz \right) d\rho \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho \left((1-\rho) - (\rho-1)^2 \right) d\rho = (\dots)$$

Exemplo:

Calcule, usando coordenadas polares,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{A_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/3}}\, dx\, dy$$

$$A_\varepsilon = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1,\ 0 \leq y \leq x \right\} \text{ com } \varepsilon > 0$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow \varepsilon \leq \rho \leq 1$$

$$\left| \det J_{\varphi^{-1}}(\rho,\theta) \right| = \rho$$

$$\boxed{y \leq x} \longrightarrow \rho \operatorname{sen}\theta \leq \rho\cos\theta \Leftrightarrow \cancel{\rho} \operatorname{sen}\theta \leq \cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{0 \leq y \leq x} \longrightarrow \theta \geq 0 \qquad\qquad \theta \leq \pi/4$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_\varepsilon^1 \frac{1}{(\rho^2)^{1/3}} \cdot \rho \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= \pi/4 \int_\varepsilon^1 \rho^{1-2/3}\, d\rho = \pi/4 \left[\rho^{4/3} / {4/3} \right]_{\rho=\varepsilon}^{\rho=1} =$$

$$= \pi/4 \left(\frac{1^{4/3}}{4/3} - \frac{\varepsilon^{4/3}}{4/3} \right) = \pi/4 \times 3/4 \left(1 - \varepsilon^{4/3} \right) = 3\pi/16 \left(1 - \varepsilon^{4/3} \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} 3\pi/16 \left(1 - \varepsilon^{4/3} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

INTEGRAÇÃO EM SUPERFÍCIES

$r : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad r \in C^1(U)$

$$\text{Área}(S) = \iint_U \left\| \frac{\partial r}{\partial t_1} \times \frac{\partial r}{\partial t_2} \right\| dt_1 \, dt_2 \longrightarrow \text{Área de Superfície } (\mathbb{R}^2)$$

Exemplo:

- Área de $\partial B_1(0,0,0)$

$r : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$r(\theta, \phi) = (\cos\theta \, \text{sen}\,\phi, \ \text{sen}\,\theta \, \text{sen}\,\phi, \ \cos\phi)$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-\text{sen}\,\theta \, \text{sen}\,\phi, \ \cos\theta \, \text{sen}\,\phi, \ 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = (\cos\theta \cos\phi, \ \text{sen}\,\theta \cos\phi, \ -\text{sen}\,\phi)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \phi} = (-\cos\theta \, \text{sen}^2\phi, \ -\text{sen}\,\theta \, \text{sen}^2\phi, \ -\text{sen}\,\phi \cos\phi)$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial \theta} \times \frac{\partial r}{\partial \phi} \right\| = \sqrt{\cos^2\theta \, \text{sen}^4\phi + \text{sen}^2\theta \, \text{sen}^4\phi + \text{sen}^2\phi \cos^2\phi} =$$

$$= \sqrt{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)\, \text{sen}^2\phi + \text{sen}^2\phi \cos^2\phi} = \sqrt{\text{sen}^4\phi + \text{sen}^2\phi \cos^2\phi} =$$

$$= \sqrt{\text{sen}^2\phi\,(\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi)} = \text{sen}\,\phi \sqrt{\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi} = \text{sen}\,\phi$$

$$\underline{\text{Área da esfera}} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \text{sen}\,\phi \, d\phi \right)}_{=2} d\theta = 4\pi$$

Exemplo:

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$

$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \,,\, z = 2xy\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \,,\, z = x^2 + y^2\}$

Mostre que as áreas de S_1 e S_2 são iguais

$$\mathrm{Vol}_2(S_1) = \iint_{S_1} dS = \iint_D \left\| \frac{\partial g_1}{\partial x} \times \frac{\partial g_1}{\partial y} \right\| dx\,dy$$

$$g_1(x,y) = (x, y, 2xy)$$

$$\mathrm{Vol}_2(S_2) = \iint_{S_2} dS = \iint_D \left\| \frac{\partial g_2}{\partial x} \times \right.$$