Análise Matemática I

1º Teste (repetição)

Novembro de 2005

Licenciaturas em
Engenharia Civil, Engenharia e Arquitectura Naval, Engenharia do Território

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(8,5) I. 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \left| 1 - \frac{1}{x} \right| < 1 \right\}, \quad B = \{x : x^2 \leq 4\}.$$

a) Mostre que $A = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ e determine $A \cap B$ e $A \cup B$.

b) Determine, ou mostre que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap B$ e $(A \cup B) \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida justificadamente quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:

i) Qualquer sucessão crescente e de termos em A é divergente.

ii) Existe uma sucessão de termos em B divergente.

iii) Qualquer sucessão de termos em $A \cap B$ tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

iv) Qualquer série de termos em $A \cap \left]0, 1\right[$ é divergente.

2. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$2 + 4 + ... + 2n = n(n + 1).$$

(10,0) II. 1. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n! + 2}, \qquad \text{b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[3]{n}+2}, \qquad \text{c)} \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{2^n + 1}{n^{n+1} + 5}.$$

2. Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 2.$$

Calcule, justificando, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

3. Determine se as seguintes séries são convergentes e calcule, sempre que possível, a sua soma:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{n}{n+1} - (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \right), \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n}.$$

(1,5) III. Sejam (a_n) uma sucessão decrescente e (b_n) uma outra sucessão verificando

$$|b_n - 1| \leq \frac{a_n}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

Será convergente a série $\sum b_n$? Justifique.

Resolução

(8,5) I. 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \left|1 - \frac{1}{x}\right| < 1\right\}, \; B = \{x : x^2 \leq 4\}.$$

a) Mostre que $A = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ e determine $A \cap B$ e $A \cup B$.

$$\begin{aligned}
\left|1 - \frac{1}{x}\right| < 1 \quad & \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x} < 1 \,\wedge\, 1 - \frac{1}{x} > -1 \\
& \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x} < 0 \quad \wedge \quad 2 - \frac{1}{x} > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \wedge \quad \frac{2x-1}{x} > 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \wedge \quad ((2x-1 > 0 \wedge x > 0) \vee (2x-1 < 0 \wedge x < 0)) \\
& \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \wedge \quad x > \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Note-se que $B = \{x : \; x^2 \leq 4\} = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$. Assim, $A \cap B = \left]\frac{1}{2}, 2\right]$ e $A \cup B = [-2, +\infty[$.

b) Determine, ou mostre que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap B$ e $(A \cup B) \cap \mathbb{Q}$.

$\sup(A \cap B) = \max(A \cap B) = 2$ e $\inf(A \cap B) = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2} \notin A \cap B$, $A \cap B$ não tem mínimo. Quanto ao conjunto $(A \cup B) \cap \mathbb{Q}$, o ínfimo é -2, e como $-2 \in (A \cup B) \cap \mathbb{Q}$, porque $-2 \in \mathbb{Q}$, então tem mínimo igual a -2. Uma vez que o conjunto não é majorado não tem supremo nem máximo.

c) Decida justificadamente quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:

i) Qualquer sucessão crescente e de termos em A é divergente.

Falsa. Existem sucessões crescentes de termos em A que são convergentes, como por exemplo $2 - \frac{1}{n}$.

ii) Existe uma sucessão de termos em B divergente.

Verdadeira. Por exemplo a sucessão $x_n = (-1)^n$ é de termos em B e não é convergente (tem dois sublimites diferentes).

iii) Qualquer sucessão de termos em $A \cap B$ tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

Verdadeira. Como $A \cap B$ é um conjunto limitado, qualquer sucessão de termos neste conjunto será limitada. Logo, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, terá pelo menos uma subsucessão convergente em $\mathbf{R}$, o que significa que tem um sublimite em $\mathbf{R}$.

iv) Qualquer série de termos em $A \cap]0, 1[$ é divergente.

Verdadeira, porque se uma série $\sum x_n$ é de termos em A então $x_n > \frac{1}{2}$ para qualquer $n \in \mathbf{N}$. Logo (x_n) não converge para zero, o que implica que a série é divergente.

2. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$2 + 4 + ... + 2n = n(n+1).$$

Para $n = 0$, temos $0 = 0$ – proposição verdadeira. Supondo por hipótese de indução que $2 + 4 + ... + 2n = n(n + 1)$, temos, para $n + 1$,

$$2 + 4 + ... + 2n + 2(n + 1) = n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 2)(n + 1)$$

como se queria demostrar. Provou-se por indução que $2+4+...+2n = n(n+1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(10,0) II. 1. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n! + 2}, \qquad \text{b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[3]{n}+2}, \qquad \text{c)} \lim_{n\to+\infty} n\,\frac{2^n+1}{n^{n+1}+5}.$$

a) Temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n!+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n!}}{1+\frac{2}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{1+\frac{2}{n!}} = 0.$$

Logo, como $(-1)^n$ é uma sucessão limitada,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n}{n!+2} = 0.$$

b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[3]{n}+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}}{1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}}} = 1\,.$$

c)

$$\lim_{n\to+\infty} n\,\frac{2^n+1}{n^{n+1}+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{n^n+\frac{5}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n}{n^n}+\frac{1}{n^n}\right) = 0\,.$$

2. Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 2.$$

Calcule, justificando, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Sendo (a_n) uma sucessão de termos positivos tem-se que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ se o segundo limite existe. Da hipótese $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 2$, vem que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a_n} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} = 2,$$

porque $\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)$ é uma subsucessão da sucessão convergente $\left(\frac{a_n}{n}\right)$. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{(n+1)}.\frac{n}{a_n}.\frac{(n+1)}{n} = 2.\frac{1}{2}.1 = 1$$

3. Determine se as seguintes séries são convergentes e calcule, sempre que possível, a sua soma:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{n}{n+1} - (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}\right), \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n}.$$

a) A série é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n - b_{n+1}, \quad \text{com} \quad b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

e é portanto uma série de Mengoli. O termo de ordem n da sua sucessão das somas parciais é dado por

$$s_n = b_1 - b_{n+1} = -\frac{1}{2} - b_{n+1}$$

Ora, para n par,

$$b_{n+1} = -\frac{n+1}{n+2} \longrightarrow -1$$

e para n ímpar,

$$b_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \longrightarrow 1.$$

Logo, (b_{n+1}) tem subsucessões com limites distintos, e portanto não converge. Conclui-se que (s_n) não converge, e a série dada é divergente.
(Alternativamente, com $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} - (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n+2}$, tem-se para n par

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2}\right) \longrightarrow 2$$

e para n impar

$$a_n = \left(-\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}\right) \longrightarrow -2.$$

Logo, (a_n) tem dois sublimites distintos e é portanto divergente. Em particular, não converge para 0 e a série dada é então divergente.)

b) Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-3}\right)^n,$$

trata-se de uma série geométrica com primeiro termo $1/8$ e razão $r = 1/8$. Como $|r| < 1$, a série é convergente e a sua soma é dada por

$$s = \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}.$$

(1,5) III. Sejam (a_n) uma sucessão decrescente e (b_n) uma outra sucessão verificando

$$|b_n - 1| \leq \frac{a_n}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

Será convergente a série $\sum b_n$? Justifique.

Como (a_n) é decrescente, então

$$|b_n - 1| \leq \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{a_1}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

De $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1}{n^2} = 0$, vem que

$$\lim_{n\to+\infty} (b_n - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

Como (b_n) não converge para zero, a série $\sum b_n$ é divergente.