Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 6 – Integrais e aplicações

Parte I – Exercícios Propostos

I.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_1^2 (x^2-2x+3)\,dx$

b) $\int_0^8 (\sqrt{2t}+\sqrt[3]{t})\,dt$

c) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$

d) $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+5}\,dx$

I.2 Calcule a área da figura limitada pela parábola $y = 4x-x^2$ e o eixo das abcissas.

I.3 Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y=x$, $y = 2x$, $x = 1$ e $x = 2$.

b) $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

c) $y^2 = -4(x-1)$ e $y^2 = -2(x-2)$.

d) $y = x,\ y = 2x$ e $y = 6-x$.

Parte II – Exercícios Resolvidos

II.1 Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y = \ln(x)$ e $y = \dfrac{x-1}{e-1}$

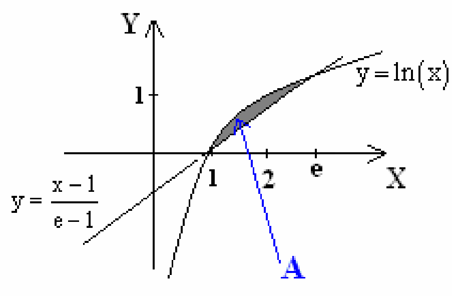
Resolução:

Representação gráfica:

- $y = \ln(x)$ Representa a função logarítmica
- $y = \dfrac{x-1}{e-1}$ Representa uma recta

Para: $x = e \Rightarrow y = \dfrac{e-1}{e-1} = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1-1}{e-1} = \dfrac{0}{e-1} = 0$



Cálculo da área (A):

A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A = \int_1^e \left(\ln x - \frac{x-1}{e-1}\right)dx \underset{(*)}{=} \left[x\ln x - x - \frac{1}{e-1}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^e = e\ln e - e - \frac{1}{e-1}\left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \left(1\ln 1 - 1 - \frac{1}{e-1}\left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right)$$

$$= e\cdot 1 - e - \frac{1}{e-1}\left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \left(1\cdot 0 - 1 - \frac{1}{e-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{-e^2 + 2e + 2e - 2 - 1}{2(e-1)} = \frac{-e^2 + 4e - 3}{2(e-1)}$$

$$= -\frac{e^2 - 4e + 3}{2(e-1)} = -\frac{(e-1)(e-3)}{2(e-1)} = -\frac{e-3}{2} = \frac{3-e}{2}$$

Cálculos auxiliares $(*)$ *:*

Para calcular a primitiva $P\ln(x)$ vamos recorrer ao método de primitivação por partes. Como temos apenas um factor que não sabemos primitivar $\ln(x)$, introduzimos o factor 1. Devemos começar a primitivar pelo factor 1, isto é, $u' = 1$.

Assim,

$$P\ln(x) = P(1\cdot\ln(x)) \underset{\uparrow}{=} x\ln(x) - Px\frac{1}{x} = x\ln(x) - P1 = x\ln(x) - x$$

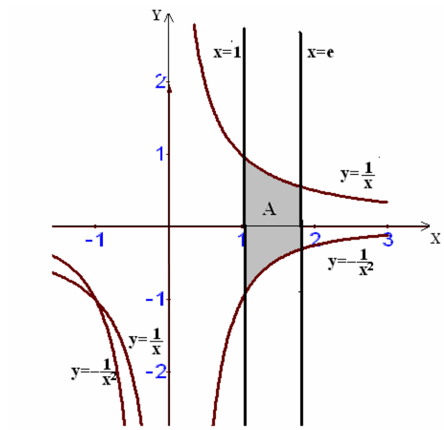
Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v) = uv - P(uv')$

em que $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = P1 = x \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases}$

b) $y=\dfrac{1}{x}$, $y=-\dfrac{1}{x^2}$, $x=1$ e $x=e$.

Resolução:

Representação gráfica:



Cálculo da área (A):

A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=\left[\ln x\right]_1^e+\int_1^e x^{-2}dx$$

$$=\ln e-\ln 1+\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^e=1-0+\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^e=1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=1-\frac{1}{e}-\left(-\frac{1}{1}\right)=1-\frac{1}{e}+1=2-\frac{1}{e}$$

c) $y=|x|$ e $y=2-x^2$

Resolução:

Representação gráfica:

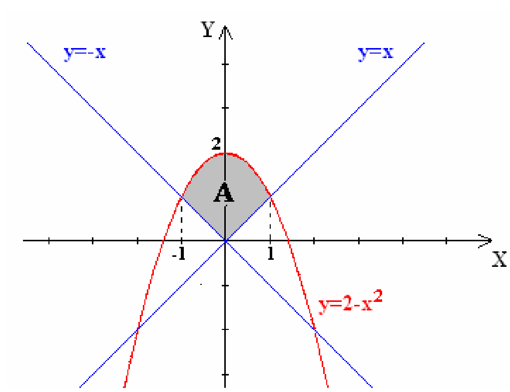
- $y=|x|\Leftrightarrow|x|=y\wedge y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(|x|=y\wedge y\geq 0\right)\vee\underbrace{\left(|x|=y\wedge y<0\right)}_{\text{Condição impossível}}\Leftrightarrow|x|=y\wedge y\geq 0$

  $\Leftrightarrow\left(x=y\vee x=-y\right)\wedge y\geq 0$

- $y=2-x^2$ Representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para baixo

  Para: $x=0\Rightarrow y=2-0^2\Leftrightarrow y=2$

  $y=0\Rightarrow 0=2-x^2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$



Determinação dos pontos de intersecção entre

- a parábola $y = 2 - x^2$ e a recta $y = x$:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x^2 \\ \_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \underset{\substack{\text{Pela formula} \\ \text{resolvente}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \vee x = -2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

A parábola $y = 2 - x^2$ e a recta $y = x$ intersectam-se nos pontos $(1,1)$ e $(-2,-2)$.

- a parábola $y = 2 - x^2$ e a recta $y = -x$:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 2 - x^2 \\ \_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \underset{\substack{\text{Pela formula} \\ \text{resolvente}}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -1 \vee x = 2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

A parábola $y = 2 - x^2$ e a recta $y = -x$ intersectam-se nos pontos $(-1,1)$ e $(2,-2)$.

Cálculo da área (A):
A área da superfície, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A = \int_{-1}^{0} \left(2 - x^2 - (-x)\right) dx + \int_{0}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por simetria em} \\ \text{relação ao eixo dos y}}}{=} 2\int_{0}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx = 2\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

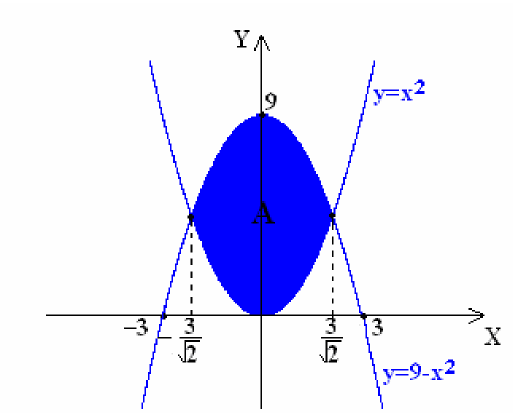
$$= 2\left(2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - \left(2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right)\right) = \frac{7}{3}$$

d) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$.

Resolução:
Representação gráfica:

- $y = 9 - x^2$, representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para baixo
  Para: $x = 0 \Rightarrow y = 9 - 0^2 \Leftrightarrow y = 9$
  $y = 0 \Rightarrow 0 = 9 - x^2 \Leftrightarrow -x^2 = -9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$

- $y = x^2$, representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para cima
  Para: $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 \Leftrightarrow y = 0$
  $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$



Determinação dos pontos de intersecção entre as parábolas

De modo a que se possa determinar os limites de integração, vamos determinar os pontos de intersecção das duas parábolas.

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 = 9 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 9 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{2} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

As parábolas $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$ intersectam-se nos pontos $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right)$.

Cálculo da área (A)

A área da superfície entre as duas parábolas, representada a sombreado na figura acima, é:

$$A = \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(9 - x^2 - x^2\right)dx = \int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \left(9 - 2x^2\right)dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por simetria em} \\ \text{relação ao eixo dos yy}}}{2\int_{0}^{\frac{3}{\sqrt{2}}}} \left(9 - 2x^2\right)dx = 2\left[9x - 2\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = 2\left[9x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$= 2\left(9\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(9\cdot 0 - \frac{2}{3}0^3\right)\right) = \frac{54}{\sqrt{2}} - \frac{36}{2\sqrt{2}} = \frac{108-36}{2\sqrt{2}} = \frac{72}{2\sqrt{2}} = \frac{36}{\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{36\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$$

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III.1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}dx$ **b)** $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}dx$ **c)** $\int_{\frac{1}{2}}^{e} x\ln x\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{x^5}{3+x^{12}}dx$ **e)** $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

III.2 Calcule a área da figura limitada pelas linhas: $y+x^2=0$; $x+y+2=0$

III.3 Calcule a área compreendida entre as curvas $y=x$ e $y=x^2$ e as rectas $x=0$ e $x=2$.

III.4 Determine a área da porção de plano limitada pelas curvas de equação:

a) $y = \ln(x)$; $y=\ln(x+2)$; $y=\ln(4\text{-}x)$; $x = 3$

b) $y=2e^x$; $x=0; x=1; y=0$