Matriz com valores próprios complexos

Suponhamos que uma matriz A, com componentes reais, tem valores próprios complexos. Então o sistema

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} \qquad \text{tem soluções complexas} \qquad \vec{y}(t) = \vec{a}(t) + i\,\vec{b}(t)$$

Vejamos que $\vec{a}(t)$ e $\vec{b}(t)$ são soluções reais do mesmo sistema:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t) + i\,\vec{b}(t)\right) = A\left(\vec{a}(t) + i\,\vec{b}(t)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{a}}{dt} + i\,\frac{d\vec{b}}{dt} = A\vec{a}(t) + iA\vec{b}(t)$$

donde

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{a}}{dt} = A\vec{a} \\[2ex] \dfrac{d\vec{b}}{dt} = A\vec{b} \end{cases}$$

Exemplo

Determine a solução geral do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

A matriz A dos coeficientes escreve-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de A são as raízes do polinómio característico

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-\lambda) = \pm i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \pm i$$

Os vectores próprios de $2+i$ são as soluções de

$$(A-(2+i)I)v=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -i\alpha-\beta=0$$

$$\Rightarrow \quad v=\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \qquad \text{onde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}$$

Uma solução complexa (não real) do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = e^{2t}(\cos t + i \operatorname{sen} t) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$= e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t - i \cos t \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix}}_{\vec{a}(t)} + i \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t}\operatorname{sen} t \\ -e^{2t}\cos t \end{bmatrix}}_{\vec{b}(t)}$$

Dado que A é 2×2 o espaço das soluções do sistema tem dimensão 2 (sobre $\mathbb{R}$).

Conclui-se que a solução geral real do sistema é

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= c_1\, a(t) + c_2\, b(t) \\
&= c_1\, e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_1\, e^{2t} \cos t + c_2\, e^{2t} \operatorname{sen} t \\ c_1\, e^{2t} \operatorname{sen} t - c_2\, e^{2t} \cos t \end{bmatrix} \qquad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Definição

Seja A uma matriz com um valor próprio λ, define-se:

1. A multiplicidade algébrica (MA) de λ é a multiplicidade como raiz do polinómio característico de A.
2. A multiplicidade geométrica (MG) de λ é o número de vectores próprios linearmente independentes associados a λ.

Ambas as multiplicidades são números inteiros positivos e tem-se

$$1 \leqslant \text{MG de } \lambda \leqslant \text{MA de } \lambda$$

Matrizes não-diagonalizáveis - vectores próprios generalizados

Seja A uma matriz com um valor próprio λ tal que $j = \text{MA de } \lambda$ e $k = \text{MG de } \lambda$ com $j > k$.
Então A não é diagonalizável e existem $j - k$ vectores próprios generalizados w_i linearmente independentes definidos por

$$(A - \lambda I)w_1 = v, \qquad (A - \lambda I)w_{i+1} = w_i,$$

onde $v \neq 0$ é um vector próprio de A associado a λ.

Neste caso, obtemos soluções para o sistema linear homogéneo

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

da seguinte forma:

Considera-se um vector próprio $v \neq 0$ de A associado a λ e tem-se a solução

$$\vec{y}_0(t) = e^{\lambda t}\, v;$$

Em seguida, considera-se o vector próprio generalizado w_1 e tem-se

$$\vec{y}_1(t) = e^{\lambda t}\, \left(w_1 + t\, v\right);$$

Depois, toma-se o vector próprio generalizado w_2 e

$$\vec{y}_2(t) = e^{\lambda t}\, \left(w_2 + t\, w_1 + \frac{t^2}{2}\, v\right);$$

E possivelmente, até

$$\vec{y}_\ell(t) = e^{\lambda t}\, \left(w_\ell + t\, w_{\ell-1} + \frac{t^2}{2}\, w_{\ell-2} \cdots + \frac{t^\ell}{\ell\,!}\, v\right);$$

(Ver mais detalhe na pág web CDI 3 - matéria teórica no. 3 pp 7-10)

Para resolver sistemas de EDO's lineares, com coeficientes constantes, é útil a seguinte

Definição (exponencial matricial)

Seja A uma matriz quadrada. Define-se a exponencial matricial de A por

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots$$

onde I é matriz identidade, $A^0 = I$ (por convenção) e a soma de uma série de matrizes é a matriz da somas das séries componentes.

Observação:

1. A série anterior converge para qualquer matriz quadrada A.
2. Se A é uma matriz 1×1 (i. e. um número) a fórmula da exponencial matricial é a fórmula de MacLaurin para a função exponencial habitual.

Proposição

1. $e^0 = I$
2. A exponencial de uma matriz diagonal por blocos calcula-se "bloco a bloco", i. e.

$$e^{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{bmatrix}.$$

Em particular, a exponencial de uma matriz diagonal é

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

3. $e^{SJS^{-1}} = Se^{J}S^{-1}$
4. $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$ se as matrizes A e B comutam, i. e. se $AB = BA$.
5. A matriz e^{A} é invertível com inversa e^{-A}.
6. $e^{A^t} = \left(e^{A}\right)^t$, i. e. a exponencial da transposta é a transposta da exponencial.

A exponencial matricial e^{At} permite resolver o sistema

$$\frac{dy}{dt} = Ay \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = e^{At}c \quad \text{onde } c \in \mathbb{R}^n \text{ é um vector constante}$$

assim como o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0$$

de forma análoga ao caso escalar que estudámos anteriormente.

Exemplos

1. Calcular e^{At} para

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{onde } \lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\lambda I + \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A escreve-se $A = \lambda I + N$ onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As potências de N são

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \overbrace{ac}^{b0+ac+0b} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N^3 = 0$$

$0b+0c+c0$

e $N^k = 0$ para $k \geqslant 3$. $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Em conta das matrizes λI e N comutarem tem-se

$$
\begin{aligned}
e^{At} = e^{(\lambda I+N)t} = e^{\lambda t I} e^{Nt} &= e^{\lambda t}\left(I + Nt + \frac{N^2t^2}{2!} + 0 + 0 + \cdots\right) \\
&= e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & at & \frac{act^2}{2} + bt \\ 0 & 1 & ct \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Calcule e^{At} onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Os valores próprios de A são 2 e 3 (a matriz é triangular);
$(1, 0)$ é claramente um vector próprio de 2;
Um vector próprio de 3 é uma solução de

$$
\begin{aligned}
(A - 3I)v = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = a \\
&\Rightarrow \quad v = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{onde } a \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}.
\end{aligned}
$$

Então a matriz A é diagonalizável com

$$A = S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1}$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto da propriedade 3 da exponencial matricial tem-se

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

ou seja

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

3. Calcule e^{At} onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note-se que A é diagonal por blocos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad \text{onde} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Resta calcular $e^{A_2 t}$. Para tal escreve-se $A_2 = 2I + N$ para $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e tem-se

$$e^{A_2 t} = e^{(2I+N)t} = e^{2t} e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclui-se que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

aula 5 – problema

1. Determine a solução geral do sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \\ \frac{dy_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Solução

1. $$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} c_2\, e^{-2t} \\ c_1\, e^{-2t} + c_2\, te^{-2t} \\ c_3\, e^t \cos(2t) + c_4\, e^t \operatorname{sen}(2t) \\ -c_3\, e^t \operatorname{sen}(2t) + c_4\, e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.