CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

1 Introdução

Equações diferenciais são equações (algébricas) onde figuram funções e derivadas de várias ordens de funções.

As incógnitas destas equações são funções, por isso as *soluções* das equações diferenciais vão ser sempre funções.

Escreveremos em geral as funções como $y = y(t)$ e não como $f(x)$. A *variável independente* é t, por analogia com o tempo da Física (de onde surgem inúmeros exemplos de aplicação das equações diferenciais.)

Exemplos:

$$\frac{dy}{dt} = 3y^2 \text{sen}\,(t+y)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = e^{-y} + t + \frac{d^2y}{dt^2}$$

A *ordem* de uma equação diferencial é definida como a maior ordem de derivada que figure na equação (1 e 3 nos exemplos anteriores.)

Sabemos resolver analiticamente poucas classes de equações. Por exemplo, nunca vamos chegar a saber resolver nenhuma das duas equações anteriores. Mesmo equações simples, que se escrevam com coeficientes aparentemente inocentes, podem ser impossíveis de resolver analiticamente.

Muitas vezes, não é necessário saber resolver analiticamente as equações e obter uma expressão explícita para $y(t)$, mas interessa sim deduzir, a partir das equações, se vai haver uma ou várias soluções para o problema e, havendo-as, qual será o seu comportamento - se serão funções limitadas, se estarão definidas em todo o $\mathbb{R}$, ou apenas num seu subconjunto, se serão contínuas, etc.

Vamos procurar certos tipos de equações que consigamos resolver, e definir para cada tipo um método de resolução.

Veremos primeiro apenas equações de primeira ordem (ou seja, só figuram t, y e $\frac{dy}{dt}$

na equação.)

Exemplo:

$\dfrac{dy}{dt} = t$ tem como soluções (directamente) $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + c$ (com $c \in \mathbb{R}$),

que são as primitivas de t.

Mais geralmente, qualquer equação da forma $\dfrac{dy}{dt} = f(t)$ tem como (únicas) soluções todas as primitivas de $f(t)$.

Exemplo:

$\dfrac{dy}{dt} = y$ tem como solução $y(t) = e^t$ (por inspecção directa.)

Outras soluções possíveis são $y(t) = k\,e^t$, com $k \in \mathbb{R}$. Estas são de facto todas as soluções da equação, como veremos abaixo.

A equação anterior faz parte da primeira classe de equações que iremos aprender a resolver.

2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem é *linear* se for da forma

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\, y = b(t)$$

Ou seja, há uma dependência linear em relação a y e $\frac{dy}{dt}$.

Note-se que nenhuma das equações dadas como exemplo no início da secção era linear.

Se $b(t) = 0$, a equação é *homogénea.* Caso contrário, diz-se *não homogénea.*

2.1 Caso Homogéneo

<u>Exemplo</u>:

$\frac{dy}{dt} - y = 0$ tem $a(t) = -1$ e $b(t) = 0$.

É uma equação de primeira ordem, linear e homogénea.

Para resolver:

$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{y} = 1$ (se $y \neq 0$)

Obtemos:

$\frac{d}{dt} \log|y| = 1$

$\Rightarrow \log|y| = t + c,\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |y| = e^{t+c},\ c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y = \pm k e^t,\ k \in \mathbb{R}^+$

Podemos ver directamente (substituindo na equação inicial) que $y = 0$ também é solução.

Por isso, a *solução geral* da equação é $y(t) = ke^t$, com $k \in \mathbb{R}$.

Em geral, quando temos

$\frac{dy}{dt} + a(t)\, y = 0$, obtemos

$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -a(t)$ $(y \neq 0)$

$$\frac{d}{dt}\log|y| = -a(t)$$

$$\log|y| = -\int a(t)\mathrm{dt} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Por isso,

$y(t) = ke^{-\int a(t)\mathrm{dt}}$, para $k \in \mathbb{R}$, é a solução geral da equação.

<u>Exemplo</u>:

$$\frac{dy}{dt} + ty = 0$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -t \quad (y \neq 0)$$

$$\frac{d}{dt}\log|y| = -t$$

$$\log|y| = -\frac{t^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(t) = k\,e^{-t^2/2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Ou, pela fórmula, $y(t) = k\,e^{-\int t\mathrm{dt}} = k\,e^{-t^2/2}, \quad k \in \mathbb{R}$.

Em geral, estaremos interessados em *problemas de valor inicial*, que são da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + a(t)\,y = 0 \quad \text{(equação)} \\ \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{(condição inicial)} \end{cases}$$

Por exemplo, com a equação anterior:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ty = 0 \\ \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

A condição inicial fixa a constante da solução geral e dá-nos então uma *solução particular*.

Como $y(t) = ke^{-t^2/2}$,

$y(0) = 2 \;\Rightarrow\; 2 = ke^{-0} \;\Rightarrow\; k = 2$,

e $y(t) = 2e^{-t^2/2}$ é a *única* solução do problema de valor inicial.

2.2 Caso Não-Homogéneo

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y = b(t)$$

O lado esquerdo da equação sugere a derivada de um produto. Em geral não o será, mas podemos tentar transformar a equação de modo a que isso já aconteça.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}\,y = 3t \quad (\text{para } t \neq 0)$$

O lado esquerdo não é a derivada de um produto mas, multiplicando toda a equação por t, já passa a ser.

$$t\,\frac{dy}{dt} + y = 3t^2$$

$$\frac{d}{dt}\,[ty] = 3t^2$$

$$ty = t^3 + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \;\; y(t) = t^2 + ct^{-1}, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Esta é a solução geral da equação (válida, tal como a equação, para $t \neq 0$.)

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = \frac{3}{t^2}, \;\; t \neq 0.$$

O lado esquerdo também não é a derivada de um produto, e neste caso não é tão directo como no exemplo anterior determinar a expressão que, após multiplicação, transforma o lado esquerdo na forma desejada.

Introduzimos uma função auxiliar $\mu(t)$, a que se chama *factor integrante*, que tornará o lado esquerdo da equação a derivada de um produto.

Ficamos com:

$$\mu(t)\,\frac{dy}{dt}+\mu(t)\,\frac{1}{t^2}y=\mu(t)\,\frac{3}{t^2},\ \ t\neq 0.$$

O lado esquerdo é da forma desejada quando $\mu(t)$ satisfaz:

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{1}{t^2}\,\mu(t).$$

Esta equação $\dfrac{d\mu}{dt}-\dfrac{1}{t^2}\,\mu(t)=0$ é linear e homogénea (com $a(t)=-1/t^2$.)

De acordo com o que fizemos antes, obtemos:

$$\mu(t)=ke^{\int a(t)\mathrm{dt}}=ke^{\int 1/t^2\mathrm{dt}}=ke^{-1/t}\ \ (k\in\mathbb{R})$$

Procuramos apenas *um* factor integrante, e não todas as soluções possíveis, por isso podemos escolher $k=1$. A equação original fica então:

$$e^{-1/t}\,\frac{dy}{dt}+e^{-1/t}\,\frac{1}{t^2}y=e^{-1/t}\,\frac{3}{t^2}.$$

Como o lado esquerdo se tornou a derivada de um produto, obtemos:

$$\frac{d}{dt}[e^{-1/t}y]=e^{-1/t}\,\frac{3}{t^2}.$$

$$\Rightarrow e^{-1/t}y=3e^{-1/t}+c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

Ou seja, a solução geral é

$y(t)=3+c\,e^{1/t},\ \ c\in\mathbb{R}$, que é válida para $t\neq 0$.

Notamos que $y(t)=3$ é uma solução constante, que é portanto válida para $t\in\mathbb{R}$.

<u>Caso Geral</u>:

Se tivermos

$$\frac{dy}{dt}+a(t)\,y=b(t),$$

obtemos

$$\mu(t)\,\frac{dy}{dt}+\mu(t)\,a(t)\,y=\mu(t)\,b(t).$$

Esta equação fica $\dfrac{d}{dt}\Big[\mu y\Big] = \mu b$

se $\dfrac{d\mu}{dt} = \mu a$ (ou seja, se $\mu = e^{-\int -a(t)\mathrm{dt}} = e^{\int a(t)\mathrm{dt}}$.)

Assim, a equação original fica

$$e^{\int a(t)\mathrm{dt}} y = \int \Big[e^{\int a(t)\mathrm{dt}} b(t)\Big]\mathrm{dt} + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \;\; y = e^{-\int a(t)\mathrm{dt}} \int \Big[e^{\int a(t)\mathrm{dt}}\, b(t)\Big]\, \mathrm{dt} + c\, e^{-\int a(t)\mathrm{dt}}, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

<u>Exemplo</u>:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = \frac{2}{t}, \;\; t \neq 0.$$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)\frac{2}{t}y = \mu(t)\frac{2}{t}.$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)\frac{2}{t} \;\; \Rightarrow \;\; \mu(t) = e^{\int 2/t\mathrm{dt}} = e^{2\log|t|} = t^2$$

A equação original fica

$$\frac{d}{dt}\Big[t^2 y\Big] = 2t$$

$$\Rightarrow \;\; t^2 y = t^2 + c \;\; \Rightarrow \;\; y(t) = 1 + c\,t^{-2}, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Esta solução geral é válida para $t \neq 0$.

Nota: neste caso, dar uma condição inicial não basta para fixar unicamente a solução. Para fazer isso, é preciso apresentar dois valores iniciais, um para cada ramo onde y é contínua (por exemplo, $y(1) = 1$ e $y(-1) = 2$.)

3 Equações Separáveis

Suponhamos que temos a equação $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2}{y^2}$, $(y \neq 0)$.

Esta equação não é linear por causa do termo y^2, por isso não podemos usar os métodos anteriores.

Escrevemos a equação como

$y^2 \dfrac{dy}{dt} = t^2$

$\Rightarrow \displaystyle\int y^2 \frac{dy}{dt}\,\mathrm{dt} = \int t^2\,\mathrm{dt}$

$\dfrac{y^3}{3} = \dfrac{t^3}{3} + c$

$y = \sqrt[3]{t^3 + k},\ \ k \in \mathbb{R}$

Nota: não é legítimo fazer a passagem $y^2 \dfrac{dy}{dt} = t^2 \ \Rightarrow\ y^2\,\mathrm{dy} = t^2\,\mathrm{dt}$, porque não atribuímos ainda significado ao lado direito da última implicação.

Equações como a deste exemplo são *equações separáveis.* São da forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}$$

(com $f(y) \neq 0$)

Para resolver, escrevemo-las como

$f(y)\,\dfrac{dy}{dt} = g(t)$

e integramos dos dois lados (em ordem a t.)

<u>Exemplo</u>:

$e^y \dfrac{dy}{dt} - t - t^3 = 0$

Podemos escrever esta equação como

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t + t^3}{e^y}$

Esta é uma equação separável, com $g(t) = t + t^3$ e $f(y) = e^y$

Para resolver:

$$e^y \frac{dy}{dt} = t + t^3$$

$$e^y = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c$$

$$\Rightarrow \; y = \log\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

O intervalo (em t) de validade da solução vai depender da constante escolhida.

Se tivermos, por exemplo, $y(0) = 1$ como condição inicial, obtemos $1 = \log c$, ou seja $c = e$, e o intervalo de validade é dado por $\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + e > 0$ (como esta condição é sempre verdadeira, este intervalo é $\mathbb{R}$.)

Se for $c = -1$, $\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - 1 > 0$, já obtemos um intervalo menor.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2$$

A equação pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{1+y^2}}$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} y = t + c$$

$$\Rightarrow y(t) = \operatorname{tg}(t + c), \quad (c \in \mathbb{R})$$

Exemplo:

$$(1 + e^y)\frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\Rightarrow \; y + e^y = \operatorname{sen} t + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Neste caso, não conseguimos resolver algebricamente a última equação em ordem a y para obter $y = y(t)$.

A expressão anterior dá y como solução da equação *na forma implícita*. Todas as anteriores eram dadas *na forma explícita*.

Nem sempre se consegue obter uma solução na forma explícita. Porém, a forma implícita contém em geral bastantes informações qualitativas (acerca do comportamento das soluções.)

Nota:

As equações lineares homogéneas de primeira ordem são separáveis, porque, dada

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\, y = 0,$$

obtemos a equação equivalente

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-a(t)}{\frac{1}{y}},$$

que é separável. Ficamos com:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -a(t)$$

$$\log|y| = -\int a(t)\,\mathrm{dt} + c$$

$$\Rightarrow \; y(t) = k\, e^{-\int a(t)\,\mathrm{dt}}, \;\; k \in \mathbb{R}$$

(que é a solução obtida anteriormente com o método directo.)

Note-se que as equações de primeira ordem lineares não homogéneas *não* são separáveis.

4 Equações Exactas e Redutíveis a Exactas

4.1 Equações Exactas

Até agora conseguimos resolver equações que, após alguma transformação, ficavam da forma

$$\frac{d}{dt}\Big[\phi(t,y)\Big] = 0. \quad (*)$$

(para as resolver, basta depois integrar os dois membros em ordem a t.)

Para os casos que vimos, ϕ podia ser, por exemplo, um logaritmo ou um produto. Interessa saber, mais geralmente, que equações podem ser postas na forma anterior.

Suponhamos que a equação é

$$M(t,y) + N(t,y)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

Da equação $(*)$ acima, vem:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} = 0$$

Por isso, a equação anterior pode ser posta na forma $(*)$ se e só se existe $\phi(t,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = M \\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = N \end{cases}$$

Isto nem sempre acontece.

Teorema
Sejam M e N contínuas e com derivadas parciais contínuas num rectângulo aberto em $\mathbb{R}^2$.

Então existe $\phi(t,y)$ (definida no mesmo rectângulo) tal que $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = M$ e $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = N$ se e só se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$.

Equações que podem ser postas na forma $\dfrac{d}{dt}\Big[\phi(t,y)\Big] = 0$ são *equações exactas*.

<u>Exemplo</u>:

$$(3y + e^t) + (3t + \cos y)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

Temos $M = 3y + e^t$ e $N = 3t + \cos y$, donde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial t},$$

logo a equação é exacta.

Procuramos então $\phi(t, y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = M = 3y + e^t \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = N = 3t + \cos y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(t, y) = 3ty + e^t + f_1(y) \\ \phi(t, y) = 3ty + \operatorname{sen} y + f_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(t, y) = 3ty + e^t + \operatorname{sen} y + c$$

A solução da equação inicial é portanto

$$3ty + e^t + \operatorname{sen} y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(esta solução é dada na forma implícita.)

<u>Exemplo</u>:

$$(3t^2y^2 + 2) + 2t^3y\,\frac{dy}{dt} = 0$$

A equação é exacta, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t^2y = \frac{\partial N}{\partial t},$$

e podemos então procurar ϕ como no exemplo anterior:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = M = 3t^2y^2 + 2 \\ \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = N = 2t^3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(t, y) = t^3y^2 + 2t + f_1(y) \\ \phi(t, y) = t^3y^2 + f_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(t, y) = t^3y^2 + 2t + c$$

A solução da equação inicial é portanto

$t^3y^2 + 2t = c, \;\; c \in \mathbb{R}.$

4.2 Equações Redutíveis a Exactas

Se uma equação não for exacta, podemos tentar fazê-la exacta multiplicando por um factor integrante.

Partamos então da equação

$$M(t,y) + N(t,y)\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

Suponhamos que $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$.

Procuramos $\mu(t,y)$ que torne exacta a equação.

Fica:

$$\mu(t,y)\,M(t,y) + \mu(t,y)\,N(t,y)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

Esta última equação vai ser exacta se

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\mu M\Big] = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\mu N\Big]$$

$$\Rightarrow \;\; \mu_y M + \mu M_y = \mu_t N + \mu N_t$$

A equação obtida é difícil de manusear em geral. Especializemos a nossa procura: queiramos μ dependente só de uma das duas variáveis.

Exemplo:

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = y + 2e^t \;\; \text{e} \;\; \frac{\partial N}{\partial t} = e^t,$$

portanto a equação não é exacta.

Para a tornar exacta:

$$\mu \cdot \Big(\frac{y^2}{2} + 2ye^t\Big) + \mu \cdot (y + e^t)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

e devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\mu\cdot\Big(\frac{y^2}{2}+2ye^t\Big)\Big]=\frac{\partial}{\partial t}\Big[\mu\cdot(y+e^t)\Big]$$

Suponhamos que queremos μ dependente só de t, $\mu=\mu(t)$. A condição fica então:

$$\mu(y+2e^t)=\mu'(y+e^t)+\mu e^t$$

$$\Rightarrow\ \mu'=\frac{y+e^t}{y+e^t}\,\mu\ \Rightarrow\ \mu'=\mu$$

Tomamos $\mu(t)=e^t$, e a equação fica

$$\frac{y^2}{2}e^t+2ye^{2t}+(ye^t+e^{2t})\,\frac{dy}{dt}=0.$$

Esta equação já é exacta, e por isso podemos procurar ϕ tal que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=\dfrac{y^2}{2}e^t+2ye^{2t}\\[2ex]\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=ye^t+e^{2t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\phi=\dfrac{y^2}{2}e^t+ye^{2t}+f_1(y)\\[2ex]\phi=\dfrac{y^2}{2}e^t+ye^{2t}+f_2(t)\end{cases}$$

A solução é então $\dfrac{y^2}{2}e^t+ye^{2t}=c,\ \ c\in\mathbb{R}$

Também poderíamos ter tentado procurar $\mu=\mu(y)$. Não há garantia que qualquer dos dois métodos funcione para um caso geral.

Suponhamos que queremos $\mu=\mu(t)$.

Então a condição $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big[\mu M\Big]=\dfrac{\partial}{\partial t}\Big[\mu N\Big]$

fica $\mu M_y=\mu' N+\mu N_t$

$$\Rightarrow\ \mu'=\frac{M_y-N_t}{N}\,\mu$$

Só existe factor integrante $\mu = \mu(t)$ se $\dfrac{M_y - N_t}{N}$ não depender de y

e, nesse caso, $\mu(t) = e^{\int \frac{M_y - N_t}{N} \mathrm{dt}}$

Se quisermos $\mu = \mu(y)$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[\mu M\Big] = \frac{\partial}{\partial t}\Big[\mu N\Big]$$

$$\Rightarrow \;\; \mu' M + \mu M_y = \mu N_t$$

$$\Rightarrow \;\; \mu' = \frac{N_t - M_y}{M}\,\mu.$$

Só existe factor integrante $\mu = \mu(y)$

se $\dfrac{N_t - M_y}{M}$ não depender de t,

e, nesse caso, $\mu(y) = e^{\int \frac{N_t - M_y}{M}}$ dy.

Nota: na maior parte dos casos, não vai existir factor integrante dependente só de uma das variáveis.

5 Análise Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

5.1 Método Iterativo de Picard

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Dependendo da forma de $f(t, y)$, nem sempre conseguimos resolver explicitamente a equação e obter uma solução $y = y(t)$. Vamos arranjar condições que garantam existência e unicidade de soluções em certos intervalos.

O que procuramos é aproximar sucessivamente uma solução da equação por funções que não são soluções (mas tais que o erro da aproximação seja cada vez menor.)

Usamos o *método iterativo de Picard.* Construímos uma sucessão de funções y_n, e vamos ver em que casos podemos garantir que o seu limite é uma solução da equação.

De $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$ obtemos, sempre que f for integrável,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dy}{ds}\,\mathrm{ds} = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{ds}$$

Donde:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\mathrm{ds}.$$

Qualquer solução da equação diferencial original deve satisfazer também esta *equação integral.*

A nova equação permite-nos definir iterativamente a sucessão $\{y_n\}$.

Tomamos para $y_0(t)$ a função de valor constante y_0 e, para $n > 0$, definimos

$$\boxed{y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,\mathrm{ds}}$$

Se existir $y = \lim_{n \to +\infty} y_n$, então y é solução da equação integral, logo solução da equação diferencial original.

Exemplo:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sabemos, pelos métodos anteriores, que a única solução para este problema de valor inicial é $y(t) = e^t$. Vamos ver o que é que se obtém através do método iterativo.

Neste caso, $f(t, y) = y$.

A primeira iterada é $y_0(t) = 1$.

Para a segunda, fazemos

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\,\mathrm{ds} = 1 + \int_0^t f(s, 1)\,\mathrm{ds} = 1 + \int_0^t 1\,\mathrm{ds} = 1 + t$$

Para a terceira iterada:

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s))\,\mathrm{ds} = 1 + \int_0^t y_1(s)\,\mathrm{ds} = 1 + \int_0^t (1 + s)\,\mathrm{ds} = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

Isto sugere que, em geral, $y_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

Podemos provar esta igualdade por indução: a igualdade é válida para $n = 0$ e, se for válida para certo $n - 1$, temos

$$y_n(t) = 1 + \int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!}\,\mathrm{ds} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!},$$

portanto a igualdade é válida para todos os $n \geq 0$.

Neste caso a sucessão converge para

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

Esta função é solução do problema inicial.

5.2 Teorema de Existência e Unicidade de Picard

Podemos construir as iteradas de Picard e usar este método para qualquer equação da forma anterior, mas nem sempre temos a garantia de que a sucessão convirja para uma solução. O teorema seguinte permite garantir essa convergência sob certas condições.

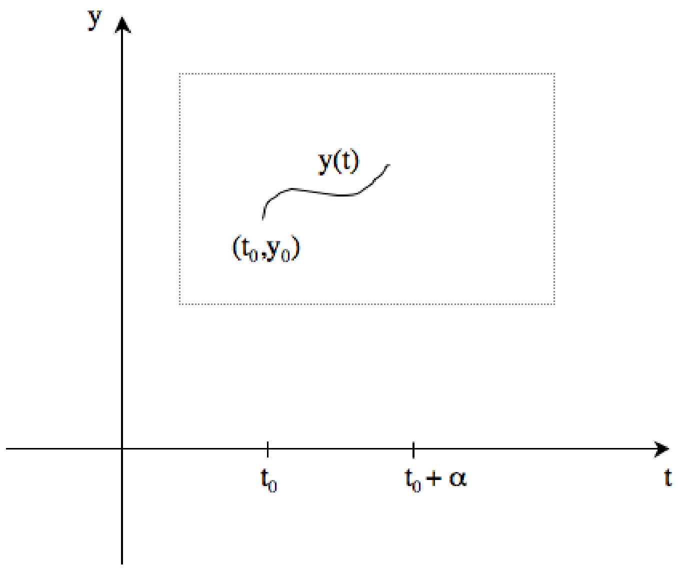
Teorema de Existência e Unicidade de Picard

Seja dado o problema

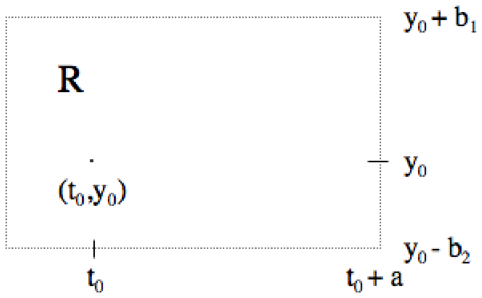
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas num rectângulo aberto que contenha (t_0, y_0), então o problema anterior tem solução única num intervalo $[t_0, t_0 + \alpha[$ (para certo $\alpha > 0$.)

A solução é o limite da sucessão de iteradas de Picard.



Da demonstração do teorema anterior, pode deduzir-se que valor de α anterior é determinado a partir do rectângulo inicial:



Se $b = \min{(b_1, b_2)}$ e $M = \max\limits_{(t,y)\in R} |f(t,y)|$,

então $\alpha = \min{(a, b/M)}$.

<u>Exemplo:</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = t^2 + e^{-y^2} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t,y) = t^2 + e^{-y^2}$ é sempre contínua.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-y^2}$ também é sempre contínua.

$\Rightarrow$ Há solução única para $t \in [0, \alpha[$ para certo α (que depende do rectângulo inicial escolhido.)

Se tomarmos $R = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\times] -1, 1[$, temos:

$b = 1$

$$M = \max_{(t,y)\in R} |t^2 + e^{-y^2}| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\alpha = \min{(a, b/M)} = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

Como f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas neste R, o teorema garante existência e unicidade de solução para $0 \leq t < 1/2$.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \log t \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Neste caso, $f(t, y)$ não é contínua para $t = 0$, por isso não podemos definir uma solução para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Porém, f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas para $t > 0$.

Usando o teorema anterior, garantimos existência e unicidade para $t > 0$, porque podemos extender sucessivamente a solução obtida até um ponto $t_0 + \alpha$.

Pode ver-se a partir do Teorema de Picard que, para cada condição inicial, se garante existência e unicidade de solução num *intervalo máximo de definição.* Este intervalo pode ter como limite superior $+\infty$ ou um valor finito t_1. Quando acontece o segundo caso e se tem ao mesmo tempo $\lim_{t \to t_1^-} y(t) = +\infty$ ou $\lim_{t \to t_1^-} y(t) = -\infty$, diz-se que a solução *explode em tempo finito.*

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A equação dada é separável, e tem como solução geral $y(t) = -\dfrac{1}{t + c}$, para $c \in \mathbb{R}$.

Usando a condição inicial, obtemos $c = -1$ e, como solução única para o problema, a função $y(t) = \dfrac{1}{1 - t}$. Esta função tem como domínio o conjunto $] - \infty, 1[\cup]1, +\infty[$, e por isso o intervalo máximo de definição da solução do problema é $] - \infty, 1[$. Como $\lim_{t \to 1^-} y(t) = +\infty$, esta solução explode em tempo finito.

As soluções produzidas pelo Teorema de Picard são tambem caracterizadas por *dependência contínua em relação às condições iniciais.* Isto quer dizer que a aplicação $(t_0, y_0) \mapsto f(t)$, que a cada condição inicial atribui a função determinada pelo teorema como solução local única, é uma aplicação contínua. (Note-se que isto implica em particular definir com precisão o que se entende por proximidade entre duas funções). Aqui, consideramos também que (t_0, y_0) pertencem a um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.

O Teorema de Picard tem também uma versão vectorial mais geral, que será vista no capítulo dedicado aos sistemas de equações diferenciais ordinárias.

5.3 Traçado gráfico de soluções

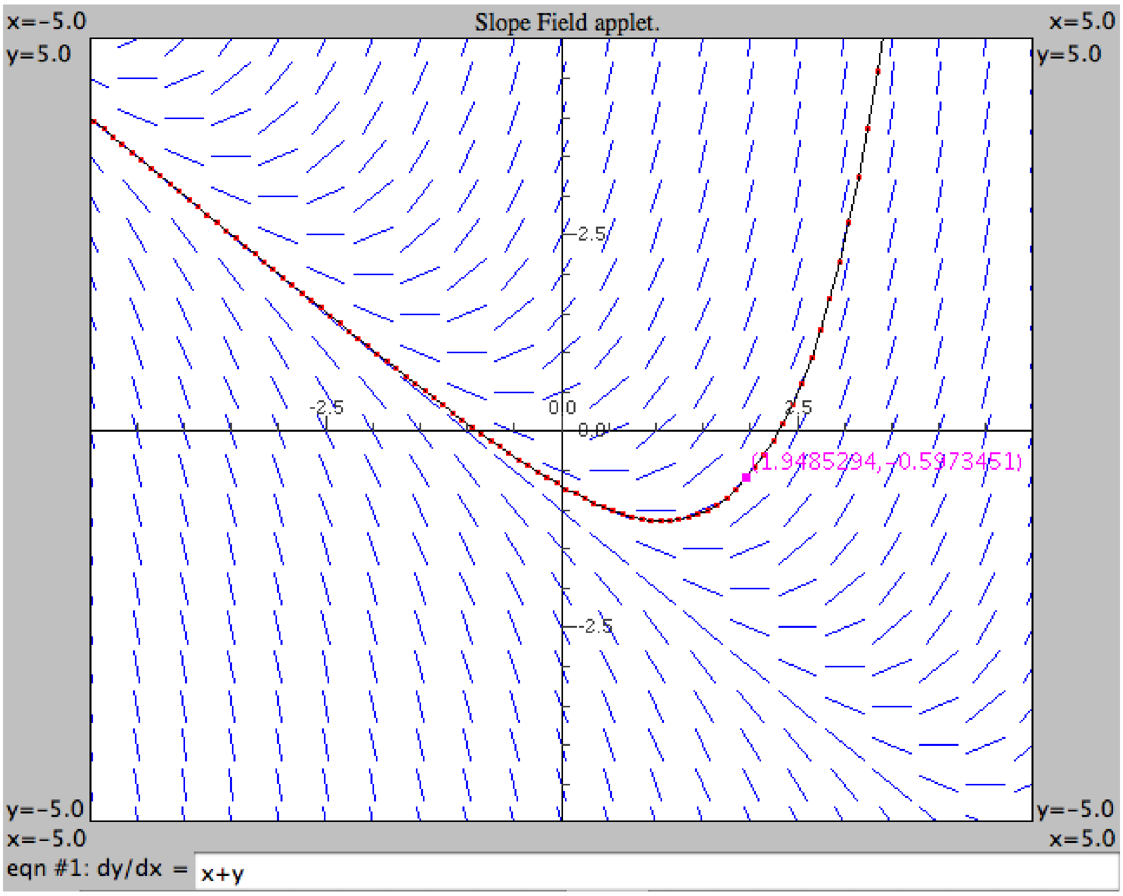
Quando não conseguimos resolver analiticamente a equação $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$, outra das estratégias que podemos seguir de modo a obter informações acerca do comportamento das possíveis soluções é traçar (directamente a partir da equação) um campo de direcções que reflicta o crescimento de y para vários pontos.

Notamos que $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$ significa geometricamente que, em cada ponto (t, y) viável, a (possível) solução $y(t)$ passa com declive $f(t, y)$. Fazemos um campo de direcções onde, para valores de (t, y) que formem uma grelha tão apertada quanto possível, marcamos os vários declives dados por $f(t, y)$. Da observação deste campo de direcções podemos traçar soluções que passem pelos sucessivos pontos com os respectivos declives.

Este processo está exemplificado abaixo em dois casos. Usou-se o *applet* que é disponibilizado na página da cadeira (na secção *Material de Apoio*), que permite traçar o campo de direcções a partir da expressão de f dada como *input* e que, para além disso, mostra a curva de solução que passa por cada ponto deste campo que se seleccione.

Exemplo:

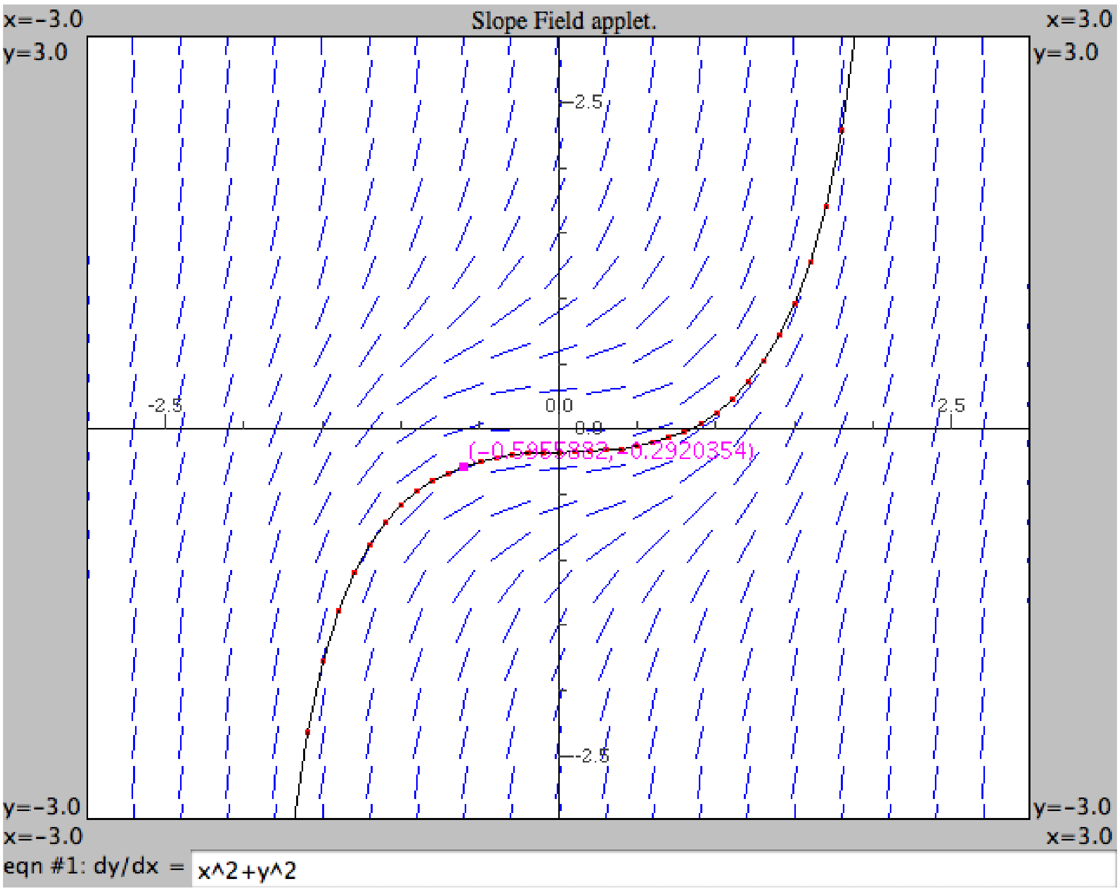
$$\frac{dy}{dt} = t + y$$



Note-se que esta equação pode ser resolvida analiticamente (é linear não homogénea). A solução é dada por $y(t) = -(t+1) + c\,e^t$, $(c \in \mathbb{R})$, cujo comportamento está de acordo com o que se pode observar no campo de direcções.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + t^2$$



De acordo com o Teorema de Picard anterior, se f ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ não forem sempre contínuas, não podemos garantir existência e unicidade de solução. Isso reflecte-se no campo de direcções: pode não haver maneira de fazer passar uma solução por certos pontos do plano, ou pode haver pontos de onde saia mais de uma solução.