Funções reais de variável real — Limites e continuidade

7.2 Funções reais

Uma noção central na denominada *análise real* é a noção de real de variável real, ou seja, das funções $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Trata-se de funções cujo domínio é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que tomam valores em $\mathbb{R}$. De facto não estaremos interessados na totalidade de tais funções. A noção de função é demasiado geral para poder ser útil no contexto do cálculo. Assim sendo teremos a oportunidade de introduzir certas restrições a esta classe, de modo a tornar possível um estudo efectivo e sistemático dos objectos que satisfazem essas restrições. Entre as restrições que iremos considerar, as mais notáveis são as propriedades de *continuidade* e de *diferenciabilidade*.

Recordamos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um conjunto de pares ordenados (a, b) em que $a \in A$ e $b \in \mathbb{R}$ satisfazendo:

1. $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(a, b) \in f$ e,

2. $(\forall a \in A)(\forall b, c \in \mathbb{R})[((a, b) \in f \wedge (a, c) \in f) \Rightarrow b = c]$.

Em geral, escrevemos $f(a) = b$ em vez de escrever $(a, b) \in f$, uma vez que a primeira notação está mais enraízada na prática matemática. Se $f(a) = b$ dizemos que b é a imagem de a através de f. Deste modo, 1 e 2 acima estabelecem que «todo o objecto tem uma imagem» e «cada objecto possui uma única imagem», respectivamente. Relativamente a f como acima dizemos que A é o domínio de f, que se representa por $\mathrm{dom}(f)$. O *contradomínio* de f é o conjunto de todas as imagens, ou seja, é o conjunto que se denota por $f(A)$ e é definido por:

$$f(A) := \{b \in \mathbb{R} \mid (\exists a \in A) f(a) = b\}.$$

Se $B \subseteq \mathbb{R}$ então, o conjunto constituído pelos elementos de A que tem imagens em B designa-se de *pré-imagem de B por f*, denota-se por $f^{-1}(B)$, i.e.,

$$f^{-1}(B) := \{a \in A \mid f(a) \in B\}.$$

Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *crescente* se satisfaz:

$$(\forall x, y \in A)[x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)];$$

é injectiva se satisfaz:

$$(\forall x, y \in A)[x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)];$$

A noção de *sobrejectividade* requer que consideremos o caso mais geral em que consideramos uma função entre dois subconjuntos de reais, i.e., $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$. ($B$ diz-se o *conjunto* *de chegada*.) Assim, dada uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ ela diz-se sobrejectiva de A para B se

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) f(x) = y.$$

Iremos então concentrar-nos nas propriedades de *continuidade* e *diferenciabilidade* que introduziremos ao longo das secções seguintes. Nessa discussão certas *propriedades topológicas* dos conjuntos de números reais desempenham um papel relevante pelo que iremos iniciar este estudo definindo essas mesmas propriedades.

7.3 Noções topológicas

Um conceito central é o de *conjunto aberto*.

Definição 7.1 (conjunto aberto).— *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se* aberto *se satisfaz a seguinte condição: dado $\alpha \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(\alpha) \subseteq A$.*

Definição 7.2 (conjunto fechado).— *Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é* fechado *se o seu complementar, i.e., se o conjunto $\mathbb{R} \setminus A$ é aberto.*

Numa aula anterior, introduzimos o conceito de conjunto fechado, dizendo que se trata de um conjunto que contém todos os seus pontos de acumulação. De facto, essa definição e aquela que agora apresentámos são equivalentes. Aproveitamos para recordar que um real α é um *ponto de acumulação* de um conjunto A se para qualquer $\epsilon > 0$ se tem que $\dot{V}_\epsilon(\alpha) \cap A \neq \emptyset$, onde $\dot{V}_\epsilon(\alpha) =]\alpha - \epsilon, \alpha[\cup]\alpha, \alpha + \epsilon[$.

Pode mostrar-se que a união de uma família arbitrária de abertos é ainda um aberto e que a intersecção de uma família finita de abertos é aberto. Já quanto aos fechados, é possível mostrar que a intersecção de uma família arbitrária de fechados é um fechado e que a união de uma família finita de fechados é ainda um fechado. De forma equivalente e usando o teorema da recursão, pode demonstrar-se o seguinte:

Lema 7.1.— *Um real α é ponto de acumulação de $A \subseteq \mathbb{R}$ se e só se existe uma sucessão (x_n) com termos em $A \setminus \{\alpha\}$ tal que $(x_n) \to \alpha$.*

A par das noções de aberto e fechado, a noção de *conjunto compacto* é igualmente importante. Para definir este conceito necessitamos primeiro de introduzir a noção de cobertura aberta de um conjunto.

Definição 7.3.— *Por* cobertura aberta *de um conjunto A entendemos uma família de vizinhanças $\mathscr{U} = \{V_{\epsilon_i}(\alpha_i) \mid i \in I\}$ tal que $A \subseteq \cup \mathscr{U} = \cup_{i \in I} V_{\epsilon_i}(\alpha_i)$.*

Definição 7.4.— *Um conjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ diz-se* compacto *se dada uma qualquer cobertura aberta de K, digamos $\mathscr{U}$, existe $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{U}$, tal que $\mathscr{W}$ é finito e $\mathscr{W}$ é uma cobertura de K. (Um tal $\mathscr{W}$ diz-se uma* subcobertura finita.*)*

Esta definição de conjunto compacto não é muito útil em termos práticos. Felizmente o seguinte teorema fornece uma caracterização desta noção, muito mais fácil de usar em termos práticos.

Teorema 7.1 (Heine-Borel).— *Um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto se e só se é fechado e limitado.*

Exemplos.—Os conjuntos $\emptyset, \mathbb{R}$ são simultaneamente abertos e fechados; $\emptyset$ é compacto mas $\mathbb{R}$ não. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ não são nem abertos, nem fechados, nem compactos. Um intervalo aberto é também um conjunto aberto e um intervalo fechado é um conjunto fechado. O conjunto $\mathbb{N}$ é fechado mas não é compacto. Um intervalo fechado e limitado é compacto.

7.4 Limites de funções reais de variável real

Consideremos uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação de A, digamos α. Admitimos aqui a possibilidade de α poder ser $+\infty$ ou $-\infty$ estendendo a noção de ponto de acumulação de modo a incluir estas duas possibilidades. Essa inclusão ode ser feita considerando que $+\infty$ é ponto de acumulação de A se A não é limitado superiormente e que $-\infty$ é ponto de acumulação de A se A não é limitado inferiormente.

Tem-se então,

Definição 7.5 (Cauchy).— *Se α é ponto de acumulação de A e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função então, dizemos que $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para α se*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)[d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(x), \beta) < \epsilon].$$

É conveniente considerar uma segunda definição de limite—a definição segundo Heine.

Definição 7.6 (Heine).— *Se α é ponto de acumulação de A e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função então, dizemos que $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para α se, dada uma qualquer sucessão (x_n) com termos em $A \setminus \{\alpha\}$ tal que $(x_n) \to \alpha$, se tem que $(f(x_n)) \to \beta$.*

Lema 7.2.— *As definições de Heine e de Cauchy são equivalentes.*

Se o limite quando x tende para α de $f(x)$ é β escrevemos $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.

A definição de Heine é particularmente interessante pois permite transpor imediatamente certos resultados sobre limites de sucessões para limites de funções.

Teorema 7.2.— *Consideremos duas funções $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponhamos que α é ponto de acumulação de A. Supondo que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \rho \in \mathbb{R}$. Nestas condições,*

1. $\lim_{x\to\alpha}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta + \rho$;
2. $\lim_{x\to\alpha}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta \cdot \rho$;
3. $\lim_{x\to\alpha}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to\alpha} f(x)/ \lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta/\rho$ *(se* $\rho \neq 0$*)*;
4. *Se $f(x)$ é constante em A, ou seja se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para qualquer $x \in A$ então,* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = k$.

Tal como no caso das sucessões o resultado anterior pode generalizar-se permitindo, em certos casos, que β e ρ sejam infinitos. As «regras» são as seguintes: $k + (\pm\infty) = \pm\infty$ (se $k \in \mathbb{R}$); $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$; $k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ (se $k \in \mathbb{R}^+$); $k \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ (se $k \in \mathbb{R}^-$); $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$; $(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$; finalmente, no caso dos quocientes: $(\pm\infty)/k = \pm\infty$ se $k \in \mathbb{R}^+$ e $(\pm\infty)/k = \mp\infty$ se $k \in \mathbb{R}^-$; se $k \in \mathbb{R}$ então $k/(\pm\infty) = 0$. Finalmente o caso em que o denominador num quociente de funções tende para zero merece-nos especial atenção. Uma vez que «$\alpha/0$» pode ser visto como «$\alpha \cdot (1/0)$» basta-nos considerar o caso «1/0». Neste caso, o limite só vai existir (tal como no caso das sucessões) se o denominador, tendendo para zero tem sinal fixo numa vizinhança de α, i.e, se existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer $x \in A \cap V_\epsilon(\alpha)$ o sinal de $g(x)$ é constante. (Estamos a usar a notação do teorema anterior.) Assim, se $g(x)$ tende para zero por valores positivos quando x tende para α (escrevemos $\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0+$) então, $1/g(x)$ tende, nas mesmas circunstâncias para $+\infty$. Abreviamos estas considerações escrevendo $1/0^+ = +\infty$. Analogamente, $1/0^- = -\infty$.

7.4.1 Limites laterais

Em muitas circunstâncias úteis, uma função é definida de forma diferente à esquerda e à direita de um ponto. Nestas circunstâncias é interessante dispor da noção de limite lateral que iremos introduzir de seguida. Antes disso, introduzimos a seguinte notação: denotamos por $V_\epsilon^+(\alpha)$ o conjunto $]\alpha, \alpha + \epsilon[$ e por $V_\epsilon^-(\alpha)$ o intervalo $]\alpha - \epsilon, \alpha[$.

Definição 7.7 (limites laterais [Cauchy]).— *Consideremos uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação de A, que denotamos por α (admitimos apenas $\alpha \in \mathbb{R}$). Suponhamos que para qualquer $\epsilon > 0$ se tem que $V_\epsilon^+(\alpha) \cap A \neq \emptyset$. Dizemos que $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ é o limite à direita de $f(x)$ quando x tende para α e escrevemos $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \beta$ se,*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)[d(x,\alpha) < \delta \wedge x > \alpha \Rightarrow d(f(x),\beta) < \epsilon].$$

Da mesma forma, se para qualquer $\epsilon > 0$ se tem que $V_\epsilon^-(\alpha) \cap A \neq \emptyset$. Dizemos que $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para α e escrevemos $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \beta$ se,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)[d(x,\alpha) < \delta \wedge x < \alpha \Rightarrow d(f(x),\beta) < \epsilon].$$

Tem-se que o limite de uma função existe sse existem os limites laterais nesse ponto existem e forem iguais.

Teorema 7.3.— *Suponhamos que α é um ponto de acumulação de A e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função. Tem-se que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ sse existem os limites $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ e $\lim_{x\to\alpha^-} f(x)$ e são iguais.*

Existem versões equivalentes das noções de limite lateral ao estilo da definição de limite segundo Heine.

Definição 7.8 (limites laterais [Heine]).— *Consideremos uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação de A, que denotamos por α (admitimos apenas $\alpha \in \mathbb{R}$). Suponhamos que para qualquer $\epsilon > 0$ se tem que $V_\epsilon^+(\alpha) \cap A \neq \emptyset$.*

Dizemos que $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ é o limite à direita de $f(x)$ quando x tende para α e escrevemos $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \beta$ se, dada uma qualquer sucessão (x_n) com termos em $]\alpha, +\infty[\cap A$ tal que $(x_n) \to \alpha$ se tem $(f(x_n)) \to \beta$.

Da mesma forma, se para qualquer $\epsilon > 0$ se tem que $V_\epsilon^-(\alpha) \cap A \neq \emptyset$. Dizemos que $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para α e escrevemos $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \beta$ se, dada uma qualquer sucessão (x_n) com termos em $]-\infty, \alpha[\cap A$ tal que $(x_n) \to \alpha$ se tem $(f(x_n)) \to \beta$.

Mais uma vez as definições à Heine e à Cauchy, são equivalentes.