Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark

15 de outubro de 2018 (18:30)

Teste 103

Nome:
Número:

O teste que vai realizar tem a duração de **60 minutos** e consiste na resolução de **5 problemas**. Os 3 primeiros são de escolha múltipla; cada resposta em branco vale 0 valores, **e cada resposta errada vale -1/3 da respectiva classificação.** Os dois últimos problemas **não são de escolha múltipla**, devendo por isso apresentar os cálculos efetuados e/ou justificar cuidadosamente as suas respostas.

NOTA FINAL:

Problema 1 (1.5 valores)
Considere a seguinte matriz aumentada correspondente a um SEL nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & \alpha & 2 & 8 \\ 4 & \alpha & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

onde α é um parâmetro real.

a) (0.75 valores) Identifique o valor de α que torna o SEL impossível.

☒ $\alpha = 4$; ☐ $\alpha = 3$; ☐ $\alpha = 2$; ☐ $\alpha = 1$.

b) (0.75 valores) Se o SEL é possível e indeterminado, selecione o conjunto solução correto.

☐ $\{(-2x_4,\, x_4,\, x_4,\, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}$;
☒ $\{(-2x_3,\, x_3+2,\, x_3,\, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$;
☐ $\{(-x_3,\, x_3,\, x_3+2,\, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$;
☐ $\{(-x_3,\, x_3+2,\, x_3,\, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Problema 2 (1 valor)

Indique todas as afirmações corretas sobre a independência linear dos vetores $\begin{bmatrix} 2 \\ b \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ b \\ b \end{bmatrix}$, de acordo com o valor assumido pela coordenada b.

- [x] se $b = 0$ o conjunto é linearmente dependente;
- [x] se $b = 1$ o conjunto é linearmente independente;
- [x] se $b = 2$ o conjunto é linearmente dependente;
- [ ] se $b = 3$ o conjunto é linearmente dependente.

Problema 3 (0.5 valores)

Considere a transformação linear em $\mathbb{R}^2$ com a seguinte matriz canónica de rotação

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \; a^2 + b^2 = 1.$$

Os valores a e b para os quais $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ é rodado para $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ são dados por:

[x] $a = 4/5$ e $b = -3/5$; [ ] $a = 3/5$ e $b = 4/5$;
[ ] $a = 1/2$ e $b = -1/2$; [ ] $a = 4/3$ e $b = -3/4$.

Problema 4 (1 valor)

Considere a transformação linear T em $\mathbb{R}^2$ que reflete pontos no eixo x_1 e depois reflete pontos relativamente ao eixo x_2.

a) (0.5 valores) Deduza a matriz canónica desta transformação linear.

b) (0.5 valores) Justifique que T também pode descrever uma rotação em torno da origem. Determine o ângulo dessa rotação.

Problema 5 (1 valor)

Mostre que se a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplica os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ linearmente independentes nos vetores $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ linearmente dependentes, então $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tem solução não trivial.