Caminho: r, $r: I \subset \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}^n}$ linha

se $I = [a, b]$, $a < b$

$r(a)$ é o início do caminho.

$r(b)$ é o fim do caminho.

se $r(a) = r(b)$, caminho fechado, logo, de linha fechada (contradomínio fechado).

Caminhos e linhas retificáveis: o seu comprimento é determinável, por ser finito e calculável.

comprimento do caminho — supremo finito do comp. das linhas

comprimento da linha — ínfimo finito do comp. dos caminhos

se estiverem definidos, os caminhos e as linhas são retificáveis.

Nota: 2 caminhos q definam a mesma linha são ambos retificáveis c/ o mesmo comp., ou ambos <u>não</u> retificáveis.

Comprimento de um Caminho de Classe $C^1([a,b])$

$$\int_a^b \| r'(t) \| \, dt$$

exemplo:

$$\boxed{r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \qquad [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2}$$

$$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$\| r'(t) \| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{1} = 1$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \, dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

exemplo: $r(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b]$

$$r'(t) = (1, Df(t))$$

$$\| r'(t) \| = \sqrt{1 + \| Df(t) \|^2}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \| Df(t) \|^2} \, dt$$

Integral em ordem ao comp. de arco

$$\int_L F\,ds = \int_a^b f(r(t))\,\|r'(t)\|\,dt$$

Nota: quando a função integranda é identicamente 1, o integral em ordem ao comp. de arco é o comp. da linha.
(calcular massa de um fio de densidade variável)

exercício:

$$F(t\cos t,\ t\,\text{sen}\,t,\ t) = t$$

$$r'(t) = (\cos t - t\,\text{sen}\,t,\ \text{sen}\,t + t\cos t,\ 1)$$

c.a. $(t\cos t)' = \cos t - t\,\text{sen}\,t \qquad (t\,\text{sen}\,t)' = \text{sen}\,t + t\cos t \qquad (t)' = 1$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\,\text{sen}\,t)^2 + (\text{sen}\,t + t\cos t)^2 + 1}$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2t\cos t\,\text{sen}\,t} + t^2\text{sen}^2 t + \text{sen}^2 t + \cancel{2t\,\text{sen}\,t\cos t} + t^2\cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t + t^2\text{sen}^2 t + t^2\cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\int_0^{2\pi} t\sqrt{3}\,dt = \frac{\sqrt{3}\,t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{3}\,\pi^2$$

A reter:

- comp. de um caminho

$$\int_a^b \|r'(t)\| \, dt$$

- integral em ordem ao comp. de arco

$$\int_L f \, ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| \, dt$$

Integrais de linha

(trabalho ao arrastar uma partícula de $r(a)$ para $r(b)$ ($\approx$))

$$\int_L F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt$$

F: campo vetorial contínuo

$F: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

↳ aberto

linha $L = r([a,b])$

Nota:

caminhos fechados: $\oint_{S^1} F \cdot d\alpha$.

outra notação: $\oint_{S^1} P\,dx + Q\,dy$ coordenadas do campo vetorial

para qnd o integ. de linha ñ depende do caminho percorrido!

exemplo:

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\oint_{S^1} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$$ Integral de linha

exemplo:

Calcular o $\oint_{S^1}$ de G:

$$G(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

de caminho α

$$\oint_{S^1} G \cdot d\alpha$$??? ñ percebi o exemplo! deve estar explicado na aula teórica

outras fórmulas:

$$\int_L F \cdot d\alpha = \int_L F \cdot d\beta \,, \quad \alpha(t) = \beta(u(t))$$

$$\int_L F \cdot d\alpha = -\int_F F \cdot d\beta, \quad \alpha(t) = \beta(u(t))$$

exercício:

$$\oint_{S^1} F \cdot d\alpha = \oint_{S^1} \cos\lambda \, d\lambda + \operatorname{sen}\lambda \, d\lambda =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\lambda + \operatorname{sen}\lambda \; d\lambda = \operatorname{sen}\lambda - \cos\lambda \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= (\operatorname{sen}2\pi - \cos 2\pi) - (\operatorname{sen}0 - \cos 0) =$$
$$= -1 - (-1) = 0$$

$$\oint_{S^1} F d\beta = \int_0^{\sqrt{2\pi}} -\operatorname{sen}t^2 - \cos t^2 \, dt =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2\pi}} -(\operatorname{sen}t^2 + \cos t^2)$$

??? ñ sei como fazer

Campo Conservativo

Um campo diz-se conservativo se $\forall x_0, x_1$ (qualquer que seja o seu início e fim) o integral de linha toma o mesmo valor.

$$\int_L \vec{F} \cdot dr$$

por outras palavras, um campo diz-se conservativo se for gradiente de algo.

Potencial escalar

$\varphi : A \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = F$.

o seu gradiente é um campo conservativo.

Nota: se houver um integral de linha ao longo de um caminho fechado cujo valor é $\neq 0$, então o campo ñ é conservativo e ñ existe um potencial escalar.

Campo Fechado

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

ex: gradientes

por ex: $G(x,y) = (G_x, G_y)$

$$\frac{\partial G_x}{\partial y} = \frac{\partial G_y}{\partial x}$$

Conjuntos em Estrela

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, y>0, \ldots$

conj. convexos (por ex. bolas e intervalos)

semiretas

estrelas no plano

Def: $(1-t)x_0 + tx \in$ Conj. em Estrela
$t \in [0,1]$

$$\varphi(x) = \int_{L(x_0,\, x)} F \cdot dr$$

$$\varphi(x) = \int_0^1 F((1-t)x_0 + tx) \cdot (x - x_0)\, dt$$

Regra de Barrow para

Integrais de linha

$r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$r(a)$ início

$r(b)$ fim

$$\int_L \underbrace{\nabla \phi}_{F} \cdot dr = \phi(r(b)) - \phi(r(a))$$

campo conservativo