Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste

Enunciado A

Campus do Tagus Park **14 de Janeiro de 2012, 9 horas**

Eng. Electrónica, Eng. e Gestão Industrial,
Eng. Informática e de Computadores – Tagus Park,
Eng. de Redes de Comunicações

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,0+2,0) 1. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites:

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{\log(1-x)}, \qquad b) \quad \lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{x}}.$$

(3,0+2,0) 2. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

$$a) \quad \frac{x-1}{x^2+9}, \qquad b) \quad x^2 \log^2 x.$$

(3,0) 3. Calcule a área da região

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2 \text{ e } \frac{1}{x} \le y \le e^{x-1}\right\}.$$

(3,0) 4. Dada uma função f definida e com derivada contínua em $\mathbb{R}$, seja

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} f(t)\, dt.$$

Calcule φ' e φ'' em termos de f e de f'.

(2,0) 5. Calcule ou justifique que a série diverge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{2^{2n}}.$$

(3,0) 6. Seja $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em $]0,+\infty[$ e tal que

$$\begin{cases} 0 < g'(x) \le x^2, \text{ se } x > 0, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Mostre que $0 < g(x) \le x^3$ se $x > 0$.