Exemplos

1. Calcular e^{At} para

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{onde } \lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$$

A matriz A escreve-se $A = \lambda I + N$ onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As potências de N são

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N^3 = 0$$

e $N^k = 0$ para $k \geqslant 3$.

Em conta das matrizes λI e N comutarem tem-se

$$e^{At} = e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda t I} e^{Nt} = e^{\lambda t}\left(I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + 0 + 0 + \cdots\right)$$
$$= e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & at & \frac{act^2}{2} + bt \\ 0 & 1 & ct \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calcule e^{At} onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Os valores próprios de A são 2 e 3 (a matriz é triangular);
$(1, 0)$ é claramente um vector próprio de 2;
Um vector próprio de 3 é uma solução de

$$(A - 3I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = a$$
$$\Rightarrow \quad v = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{onde } a \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}.$$

Então a matriz A é diagonalizável com

$$A = S \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1}$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto da propriedade 3 da exponencial matricial tem-se

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

ou seja

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

3. Calcule e^{At} onde
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Note-se que A é diagonal por blocos
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad \text{onde} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Resta calcular $e^{A_2 t}$. Para tal escreve-se $A_2 = 2I + N$ para $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e tem-se
$$e^{A_2 t} = e^{(2I+N)t} = e^{2t} e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclui-se que
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Fórmula de variação dos parâmetros

Consideremos o sistema (não-homogéneo)

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\,\vec{y} + \vec{b}(t),$$

onde A é uma matriz quadrada e $\vec{b}(t)$ uma função contínua com valores em $\mathbb{R}^n$.

Multiplicando pela função matricial e^{-At} obtém-se

$$e^{-At}\,\frac{dy}{dt} - e^{-At}A\,y = e^{-At}\,b(t)$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\,y(t)\right) = e^{-At}\,b(t)$$

A solução obtém-se por primitivação do lado direito da igualdade.

= 1ª aula

Proposição (Fórmula de variação dos parâmetros)

Seja A uma matriz $n \times n$ e $\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. A solução do PVI

$$\left\{ \begin{array}{r} \dfrac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{b}(t) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{array} \right.$$

$\dfrac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$

$\vec{y}(s) = \vec{b}(t)$

onde $t_0 \in I$ e $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\vec{b}(s)ds.$$

De facto, $\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\, y(t)\right) = e^{-At}\, b(t)$ e integrando de t_0 a t tem-se

$$e^{-At}\, y(t) - e^{-At_0}\, y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-As}\, b(s)ds$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) - e^{At}e^{-At_0}\, y(t_0) = e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}\, b(s)ds$$

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds. \quad \square$$

Exemplo

Resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 3 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Na forma matricial o sistema escreve-se

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Em conta que $A = 2I + N$, onde $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se

$$e^{At} = e^{2t}(I + Nt) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Por substituição directa na fórmula de variação das constantes tem-se

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{A(t-t_0)} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-s)} & (t-s)e^{2(t-s)} \\ 0 & e^{2(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$\int \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int a \\ \int b \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{2(t-s)} \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3e^{2t} \int_0^t e^{-2s} ds \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3e^{2t} \int_0^t e^{-2s} ds \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\left(1 - e^{2t}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

aula 6 – problemas

1. Calcule e^{At} para as seguintes matrizes A.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

2. Calcule e^{At} e resolva o problema de valores iniciais

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \text{ com } \vec{x}(\pi) = (1,1).$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluções

1. (a) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}$;

(b) $$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & t\,e^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & t\,e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-t)e^t & -t\,e^t & (\frac{t^2}{2}-t)e^t \\ te^t & (1+t)e^t & -\frac{t^2}{2}\,e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix};$$

2. $$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{3t}(\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)) & -2e^{3t}\operatorname{sen}(2t) \\ e^{3t}\operatorname{sen}(2t) & e^{3t}(\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix};$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{3(t-\pi)}(\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)) \\ e^{3(t-\pi)}\cos(2t) \end{bmatrix}$$