Capítulo 3

Espaços Lineares

A noção de espaço linear reveste-se de importância fundamental nos mais diversos ramos da matemática, permitindo unificar o tratamento matemático de estruturas distintas. Como veremos no final deste capítulo, a noção abstracta de espaço linear permite atribuir a mesma estrutura a conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^n$, a conjuntos de funções (tais como polinómios, funções exponenciais ou trigonométricas), bem como a conjuntos de matrizes.

Um espaço linear é um conjunto no qual estão definidas duas operações: (i) uma, sobre pares de elementos do conjunto (análoga à adição de vectores de $\mathbb{R}^n$); (ii) outra, de escalares por elementos do conjunto (tal como a multiplicação de um escalar real por um vector de $\mathbb{R}^n$). Se estas duas operações verificarem as propriedades enunciadas na página 29 para as operações de adição de vectores de $\mathbb{R}^n$ e de multiplicação destes vectores por escalares reais, então dizemos que o conjunto é um espaço linear (ou espaço vectorial).

Uma vez que nos espaços lineares $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ é possível utilizar uma abordagem geométrica para ilustrar muitos dos conceitos fundamentais relativos a espaços lineares, adoptamos como estratégia pedagógica o uso do espaço linear $\mathbb{R}^n$ como modelo. Assim, na Secção 3.2 são apresentados os quatro subespaços fundamentais de $\mathbb{R}^n$ (associados a uma matriz real), os quais são depois utilizados para introduzir várias noções como as de subespaço e dimensão de um espaço linear. Estes conceitos são depois definidos e estudados para espaços lineares gerais.

As noções fundamentais de independência linear, base e dimensão de um espaço linear são estudadas na Secção 3.3. Os resultados principais desta secção, ilustrados com exemplos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, apoiam-se em grande parte em resultados previamente obtidos para sistemas lineares. Mostra-se que, fixada uma base ordenada num espaço linear real de dimensão n, existe uma correspondência biunívoca entre os vectores desse espaço e vectores de $\mathbb{R}^n$. Esta correspondência associa a cada vector do espaço linear o vector das coordenadas na base ordenada fixada. Na Secção 3.4 relacionam-se os vectores das coordenadas em bases distintas através de uma matriz designada por matriz de mudança de base.

Na última secção deste capítulo apresentamos exemplos de espaços lineares distintos de $\mathbb{R}^n$. Para cada um desses exemplos exploramos as noções de base e dimensão bem como outros conceitos desenvolvidos ao longo do capítulo.

3.1 Definição de espaço linear

Embora neste texto só consideremos espaços lineares reais ou complexos, ou seja, espaços em que os escalares são números reais ou complexos, poderíamos considerar escalares pertencentes a um qualquer outro *corpo*[1]. Eis a definição de espaço linear sobre um corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

[1] Um corpo é um conjunto com duas operações binárias designadas por adição e multiplicação, gozando das propriedades: comutatividade, associatividade, distributividade da multiplicação em relação à adição, existência de elemento neutro para a adição e para a multiplicação, existência de simétricos e existência de inverso para qualquer elemento diferente de zero.

Definição 3.1. **Espaço linear**

Seja W um conjunto não vazio e $\mathbb{K}$ um corpo. Suponha-se que está definida uma operação sobre pares de elementos de W designada por *adição* e denotada por $+$, e outra operação, que denominamos por *multiplicação por escalares*, que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada $u \in W$ associa um e um só elemento de W que denotamos por $\alpha \cdot u$, ou simplesmente por αu.

Dizemos que W, munido destas duas operações, é um *espaço linear* ou *espaço vectorial*, sobre o corpo $\mathbb{K}$, se as operações de adição e multiplicação por escalares satisfazem os axiomas que a seguir se enunciam, onde $u, v, w \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

A1 **Fecho da adição:** $u + v \in W$.

A2 **Fecho da multiplicação por escalares:** $\alpha \cdot u \in W$.

A3 **Comutatividade da adição:** $u + v = v + u$.

A4 **Associatividade da adição:** $(u + v) + w = u + (v + w)$.

A5 **Existência de elemento neutro da adição:** existe um elemento em W, designado por 0 (zero), tal que $0 + u = u$.

A6 **Existência de simétrico:** para cada elemento $u \in W$ existe um elemento $u' \in W$ tal que $u + u' = 0$.

A7 **Associatividade da multiplicação por escalares:** $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha(\beta \cdot u)$.

A8 **Distributividade:** $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ e $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

A9 **Existência de identidade:** sendo 1 a identidade de $\mathbb{K}$, tem-se $1 \cdot u = u$.

Os elementos de um espaço linear são designados por *vectores*. Quando o corpo $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ diz-se que W é um *espaço linear real*, e no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diz-se um *espaço linear complexo*.

O fecho da adição significa que a adição é uma operação binária, isto é, uma operação que a cada par (u, v) de elementos de W associa um (e um só) elemento de W.

Se um conjunto W está munido de uma operação fechada, o conjunto diz-se fechado em relação à operação. Os termos "a operação é fechada em W" ou "W é fechado para a operação" têm o mesmo significado: o resultado da operação é sempre um elemento de W.

Nota 14. *Na definição de espaço linear deixámos de usar letra a cheio para denotar vectores. Continuaremos no entanto a usar essa notação quando em causa estão vectores de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$).*

Como consequência lógica dos axiomas da Definição 3.1 resultam várias propriedades das operações de um espaço linear, algumas das quais são enunciadas na proposição que se segue.

Proposição 3.1. Seja W um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{K}$. São válidas as afirmações:

a) O vector zero de W é único.
b) Para cada $u \in W$, o simétrico de u é único.
c) $\alpha \cdot 0 = 0, \quad$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
d) Designando por $-u$ o simétrico de u, tem-se

$$(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u) \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{K} \text{ e todo } u \in W.$$

e) $\alpha u \neq 0 \quad$ para todo $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$ e $u \neq 0 \in W$.

Demonstração. Realizamos apenas a prova dos dois primeiros itens deixando os restantes como exercício.

a) Suponha-se que $w \in W$ verifica

$$u + w \overset{\text{A3}}{=} w + u = u, \quad \text{para todo } u \in W.$$

Em particular (para $u = 0$), tem-se $0 + w = 0$ e portanto, por A5, $w = 0$.

b) Admitamos que u' e w são vectores simétricos de u, isto é

$$u + u' = 0 \quad \text{e} \quad u + w = 0.$$

Logo,

$$w + (u + u') = w + 0 \overset{\text{A3}}{=} 0 + w \overset{\text{A5}}{=} w$$

e

$$(w + u) + u' \overset{\text{A3}}{=} (u + w) + u' = 0 + u' \overset{\text{A5}}{=} u'.$$

A associatividade da adição garante que as duas expressões anteriores são iguais, e portanto $w = u'$.

□

O simétrico de um vector u passará a ser designado por $(-u)$.

Como vimos no Capítulo 1, em $\mathbb{R}^n$ as operações de adição e multiplicação por escalares reais definidas por

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \quad \text{e} \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, gozam das propriedades na definição de espaço linear. Em particular, o zero de $\mathbb{R}^n$, isto é o elemento de $\mathbb{R}^n$ que adicionado a qualquer vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é igual a $\mathbf{x}$, é o vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Por isso, $\mathbb{R}^n$ munido destas operações é um espaço linear real.

Um outro exemplo de espaço linear é o conjunto das matrizes com as operações de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por um escalar tal como foram definidas no primeiro capítulo. As propriedades destas operações (ver propriedades (a), (b), (f) e (g) listadas no Teorema 1.1, pág. 42) garantem que o conjunto das matrizes reais do tipo $p \times n$ forma um espaço linear real quando munido dessas operações. Neste espaço linear, a matriz nula (isto é, com todas as entradas iguais a zero) é o elemento neutro da adição e o simétrico de uma matriz A é a matriz $-A$.

À semelhança da definição de $\mathbb{R}^n$ como o conjunto dos n-uplos de números reais, define-se $\mathbb{C}^n$ como sendo o conjunto dos n-uplos de números complexos. Isto é,

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) : \ z_i \in \mathbb{C}\}.$$

De forma inteiramente análoga às definições de adição de vectores de $\mathbb{R}^n$ e multiplicação de um escalar por um vector de $\mathbb{R}^n$, definem-se estas operações em $\mathbb{C}^n$. Nomeadamente, para $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos

$$\mathbf{z}+\mathbf{w} = (z_1+w_1, z_2+w_2, \ldots, z_n+w_n) \quad \text{e} \quad \alpha\mathbf{z} = (\alpha z_1, \alpha z_2, \ldots, \alpha z_n), \tag{3.2}$$

Como a soma de dois complexos é um complexo e o produto de dois complexos ainda é um complexo, a adição e a multiplicação por escalares complexos são operações fechadas em $\mathbb{C}^n$. O elemento neutro da adição é o n-uplo $(0+0i, 0+0i, \ldots, 0+0i)$. Os restantes axiomas de espaço linear são consequências imediatas das propriedades da adição e multiplicação de números complexos. Assim, $\mathbb{C}^n$ munido das operações (3.2) é um exemplo de um espaço linear complexo.

Consideremos agora um exemplo de um conjunto que não é um espaço linear. Seja W o conjunto dos pares ordenados de números reais cuja segunda componente é igual a 1, isto é, $W = \{(a, 1) : \ a \in \mathbb{R}\}$. Considerem-se as operações usuais de adição e multiplicação por escalares definidas em $\mathbb{R}^2$. Uma vez que para quaisquer elementos $(a,1)$ e $(b,1)$ de W e $\alpha \in \mathbb{R}$ se tem

$$(a,1)+(b,1)=(a+b,2)\notin W \quad \text{e} \quad \alpha(a,1)=(\alpha a,\alpha)\notin W \text{ para } \alpha\neq 1,$$

as operações de adição e multiplicação por escalares não são fechadas em W. Portanto W não é um espaço linear.

3.2 Os quatro subespaços fundamentais

Abordamos nesta secção as noções de subespaço e de dimensão para certos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) associados a uma matriz. Estes conjuntos recebem a designação de *subespaços fundamentais* (de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$) associados a uma matriz (real ou complexa). Os quatro subespaços fundamentais em causa são os seguintes: o núcleo de uma matriz A e da sua transposta, e o espaço das colunas de A e da sua transposta. A designação de subespaços fundamentais, introduzida por G. Strang [11], sublinha o papel importante que estes subespaços desempenham em álgebra linear, como terá o leitor oportunidade de comprovar ao longo deste livro.

3.2.1 Núcleo de uma matriz

Definição 3.2. Núcleo de uma matriz

O *núcleo* da matriz A, que designamos por $N(A)$, é o conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Em particular, se A é real e do tipo $p\times n$, o núcleo de A é

$$N(A)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}\,.$$

A designação anglo-saxónica para núcleo de uma matriz é ”kernel”, usando-se a notação $\mathrm{Ker}(A)$ para $N(A)$.

O núcleo de uma matriz nunca é um conjunto vazio já que um sistema homogéneo tem pelo menos a solução nula $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Assim, $\mathbf{0}\in N(A)$ qualquer que seja a matriz A. Além disso, se A é uma matriz quadrada temos: (i) se A é invertível, então $N(A)=\{\mathbf{0}\}$ (cf. Teorema 1.4, pág. 57); (ii) se A não é invertível, o sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ é indeterminado, pelo que o núcleo de A tem um número infinito de elementos (cf. Proposição 2.2, pág. 95).

Exemplo 3.1. Determinemos um conjunto gerador para o núcleo de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.
O núcleo de A é a solução geral do sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 5x + 4y + z = 0. \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 - \frac{5}{2}L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

O sistema dado tem a mesma solução geral que o sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 0. \end{cases}$$

Logo, da última equação resulta $y = z$, e substituindo na primeira equação vem $x = -z$. Ou seja,

$$\begin{aligned} N(A) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z \text{ e } y = z\right\} = \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}\{(-1, 1, 1)\}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usámos a a definição de conjunto gerador (Definição 1.10, pág. 30). O núcleo da matriz A é o conjunto gerado pelo vector $(-1, 1, 1)$, isto é, o conjunto de todos os múltiplos do vector $(-1, 1, 1)$. Geometricamente, $N(A)$ é uma recta do espaço que passa pela origem e tem a direcção do vector $(-1, 1, 1)$. ♦

Exemplo 3.2. Determinemos o núcleo da matriz

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -\alpha & -2 & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

em termos do parâmetro real α.

Como a terceira linha de A_α é um múltiplo da primeira linha, $\det(A_\alpha) = 0$ para qualquer α. Logo, $N(A_\alpha) \neq \{(0, 0, 0)\}$ (ver Proposição 2.2, pág 95).

Apliquemos o método de eliminação de Gauss para decidir qual a característica de A_α.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -\alpha & -2 & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \underset{L_3 - \alpha L_1}{\overset{L_2 + \alpha L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 + 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, para $\alpha = 1$ (isto é, $2\alpha - 2 = 0$) tem-se $\operatorname{car}(A_1) = 1$, e para $\alpha \neq 1$ a característica é $\operatorname{car}(A_\alpha) = 2$.

Da Proposição 1.2 segue que o sistema $A_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem grau de indeterminação 2 uma vez que $\operatorname{car}(A_1) = 1$. Da matriz em escada por linhas obtida, conclui-se que $A_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é equivalente a um sistema com uma única equação, cuja solução é $x = -2y + z$. Logo,

$$\begin{aligned} N(A_1) &= \{(-2y + z, y, z) : \ y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1, 0) + z(1, 0, 1) : \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Span}\{(-2, 1, 0), (1, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Para $\alpha \neq 1$ o sistema $A_\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem grau de indeterminação 1, e as suas soluções são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + \quad 2y - z = 0 \\ \quad (-2 + 2\alpha)y \quad = 0. \end{cases}$$

A solução deste sistema é $y = 0$ e $x = z$. Logo, para $\alpha \neq 1$ o núcleo de A_α é

$$N(A_\alpha) = \{(z, 0, z) : \ z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 0, 1) : \ z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}\{(1, 0, 1)\}.$$

Geometricamente, $N(A_1)$ é um plano que contém a origem e os vectores $(-2, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$, enquanto que para $\alpha \neq 1$ o núcleo de A_α é uma recta que passa pela origem e tem a direcção de $(1, 0, 1)$. Relembre-se que em $\mathbb{R}^3$ dois vectores não colineares geram um plano, enquanto que um vector (não nulo) gera uma recta (ver Capítulo 1). ♦

No exemplo anterior vimos que, quando $\alpha \neq 1$ bastava um vector (não nulo) para gerar o núcleo da matriz A_α, enquanto que para $\alpha = 1$ são necessários dois vectores para gerar o núcleo de A_α. Em ambos os casos, o número de vectores necessários para gerar o núcleo de A_α é igual ao grau de indeterminação do sistema $A_\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como veremos em secções subsequentes o grau de indeterminação de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é sempre igual ao menor número de vectores necessários para gerar $N(A)$. Por isso, ao grau de indeterminação de um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ também chamamos *dimensão do núcleo* de A, a qual é designada por $\dim N(A)$. Quando $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ convencionamos que a dimensão de $N(A)$ é zero. O conceito de dimensão de um espaço linear (não necessariamente o núcleo de uma matriz) será estudado na Secção 3.3, onde mostramos que de facto a dimensão do espaço linear $N(A)$ é precisamente o grau de indeterminação do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ver Teorema 3.5, pág. 143).

Dos resultados obtidos para sistemas de equações lineares (possíveis), sabemos que a característica da matriz dos coeficientes de um sistema é igual ao número de variáveis dependentes, enquanto que o grau de indeterminação é igual ao número de variáveis livres (ver Proposição 1.2, pág. 18). Podemos assim concluir a seguinte relação fundamental entre a característica de A e a dimensão do núcleo de A:

$$\operatorname{car}(A) + \dim N(A) = \text{número de colunas de } A. \tag{3.3}$$

Enunciamos a seguir uma propriedade do núcleo que permitirá estabelecer que o núcleo de uma matriz real (resp. complexa) $p \times n$ é um espaço linear de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{C}^n$).

Proposição 3.2. Seja A uma matriz e $N(A)$ o seu núcleo. Tem-se:

a) $N(A)$ é fechado para a adição:

$$\text{para quaisquer } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in N(A) \Longrightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in N(A).$$

b) $N(A)$ é fechado para a multiplicação por escalares:

$$\text{para qualquer } \mathbf{v} \in N(A) \text{ e qualquer } \alpha \text{ escalar} \Longrightarrow \alpha\mathbf{v} \in N(A).$$

Demonstração. Da definição de núcleo de uma matriz, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in N(A) &\Longleftrightarrow \mathbf{v} \text{ é solução do sistema } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{w} \in N(A) &\Longleftrightarrow \mathbf{w} \text{ é solução do sistema } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A\mathbf{w} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Adicionando $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$, obtemos

$$\mathbf{0} = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} = A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \Longleftrightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in N(A).$$

Multiplicando por um escalar α a expressão $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vem

$$\mathbf{0} = \alpha A\mathbf{v} = A(\alpha\mathbf{v}) \Longleftrightarrow \alpha\mathbf{v} \in N(A).$$

□

A proposição anterior fornece um exemplo de um conjunto fechado para a adição e multiplicação por escalares.

A um subconjunto não vazio de um espaço linear que seja fechado para as operações definidas no espaço linear chama-se *subespaço* linear.

Definição 3.3. Subespaço linear
Um subconjunto não vazio V de um espaço linear W diz-se um *subespaço linear* (ou vectorial) de W, se V é fechado para as operações de adição e multiplicação por escalares definidas em W.

A definição de subespaço e a Proposição 3.2 permitem concluir:

Corolário 3.1. O núcleo de uma matriz real (resp. complexa) A do tipo $p \times n$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{C}^n$).

Nota 15.
1. *Se V é um subespaço linear de W, então contém o vector zero. De facto, sendo V fechado para a adição de vectores e para a multiplicação por escalares, tem-se que para qualquer $x \in V$, o vector $-x$ e o vector $x+(-x) = 0$ pertencem ambos a V (usámos o facto de que $(-x) = (-1)x$, conforme Proposição 3.1).*

2. *Como o nome indica, um subespaço V de um espaço linear de W é ele próprio um espaço linear com a restrição das operações de W. Note-se que as operações em V são as operações definidas em W e portanto gozam das propriedades necessárias para que V seja um espaço linear.*

Exemplo 3.3. São subespaços lineares de $\mathbb{R}^2$:

- $\{(0,0)\}$.
- Rectas que passam pela origem.
- $\mathbb{R}^2$.

São subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:

- $\{(0,0,0)\}$.
- Rectas que passam pela origem.
- Planos que contêm a origem.
- $\mathbb{R}^3$.

♦

Exemplo 3.4. Verifiquemos que o conjunto gerado por um subconjunto não vazio V de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Relembremos que $\mathrm{Span}(V)$ é o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de V.

(i) Como a soma de duas combinações lineares de elementos de V ainda é uma combinação linear de elementos de V, conclui-se que $\mathrm{Span}(V)$ é fechado para a adição.

(ii) Como a multiplicação de uma combinação linear de elementos de V por um escalar real (resp. complexo) ainda é uma combinação linear de elementos de V, conclui-se que $\mathrm{Span}(V)$ é fechado para a multiplicação por escalares.

Assim,

Se V é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{C}^n$), então $\mathrm{Span}(V)$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{C}^n$).

♦

Exemplo 3.5. O subconjunto $V = \{(1+x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ não é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$ uma vez que não contém $(0,0)$. Pode igualmente verificar-se V não é fechado, por exemplo, para a adição. ♦

Exercício 3.1. Dados dois subespaços U e V de um espaço linear W mostre que:

1. A intersecção $U \cap V$ é um subespaço de W.
2. O conjunto $U + V = \{x \in W : x = u + v,$ para alguns $u \in U$ e $v \in V\}$ é um subespaço de W.
3. A união $U \cup V$ não é em geral um subespaço de W. (Encontre um contra-exemplo em $\mathbb{R}^2$).

▲

3.2.2 Espaço das linhas e das colunas de uma matriz

Consideremos a matriz real A do tipo $p \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Esta matriz tem p linhas que são vectores de $\mathbb{R}^n$, nomeadamente

$$\mathbf{l}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ \mathbf{l}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \mathbf{l}_p = (a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}).$$

Além disso, a matriz A tem n colunas que pertencem a $\mathbb{R}^p$, nomeadamente

$$\mathbf{c}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{p1}), \ \mathbf{c}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{p2}), \ldots, \mathbf{c}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}).$$

Definição 3.4. Chama-se *espaço das linhas* de uma matriz A ao espaço linear gerado pelas linhas de A, e *espaço das colunas* de A ao espaço linear gerado pelas colunas de A. Designamos os espaços das linhas e das colunas de A, respectivamente, por $EL(A)$ e $EC(A)$.

Para a matriz real A em (3.4), temos

$$EL(A) = \operatorname{Span}(\{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_p\}) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } EC(A) = \operatorname{Span}(\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}) \subseteq \mathbb{R}^p.$$

No Exemplo 3.4 vimos que o conjunto gerado por um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^k$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^k$. Assim, os espaços $EC(A)$ e $EL(A)$ de uma matriz real A do tipo $p \times n$ são subespaços lineares, respectivamente, de $\mathbb{R}^p$ e de $\mathbb{R}^n$.

Baseando-nos em resultados dos capítulos 1 e 2 podemos enunciar de imediato uma proposição relativa aos subespaços fundamentais de uma matriz (quadrada) real invertível.

Proposição 3.3. Se A é uma matriz real invertível de ordem n, então

$$N(A) = N(A^T) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^n = EC(A) = EL(A).$$

Demonstração. A Proposição 1.10 (pág. 59) garante que um sistema homogéneo tem solução única $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se e só se a matriz dos coeficientes do sistema é invertível. Como o determinante de A e de A^T são iguais, as matrizes A e A^T são invertíveis e portanto $N(A) = N(A^T) = \{\mathbf{0}\}$.

Uma vez que uma matriz real é invertível se e só se os seus vectores coluna geram $\mathbb{R}^n$ (ver Proposição 1.12, pág. 62), e o espaço das colunas de uma matriz é precisamente o espaço gerado pelas suas colunas, temos $\mathbb{R}^n = EC(A)$. De igual modo, como A^T é invertível tem-se $\mathbb{R}^n = EC(A^T) = EL(A)$. □

Exemplo 3.6. Consideremos a matriz rectangular

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

É óbvio que os três vectores coluna $(2,-1),(4,-2)$ e $(6,3)$ são colineares, e portanto o espaço das colunas de A é uma recta em $\mathbb{R}^2$. Logo, apenas precisamos de um vector para gerar $EC(A)$:

$$EC(A) = \text{Span}\{(2,-1),(4,-2),(6,-3)\} = \text{Span}\{(2,-1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Da mesma forma, os vectores linha $(2,4,6)$ e $(-1,-2,-3)$ são colineares e portanto

$$EL(A) = \text{Span}\{(-1,-2,-3)\} = \text{Span}\{(-1,-2,-3),(2,4,6)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Tanto $EL(A)$ como $EC(A)$ são rectas, embora estejam em espaços diferentes. O espaço das linhas de A é uma recta no espaço $\mathbb{R}^3$, e o espaço das colunas de A é uma recta no plano $\mathbb{R}^2$. Na Figura 3.1 encontram-se representados os espaços das linhas e colunas de A.

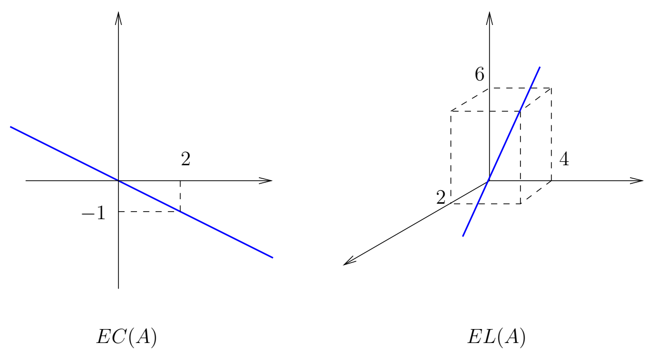

Figura 3.1: Espaço das linhas, $EL(A)$, e espaço das colunas, $EC(A)$, da matriz A do Exemplo 3.6.

♦

Sabemos, desde o primeiro capítulo, que qualquer subespaço não nulo de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) admite vários conjuntos geradores. O nosso objectivo agora é encontrar conjuntos geradores de um subespaço V de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{C}^n$) com o menor número possível de elementos. Uma vez que se trata de subespaços de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) podemos sempre construir uma matriz colocando os vectores de V nas linhas (ou nas colunas), reduzindo-se o problema a determinar conjuntos geradores dos espaços das linhas (ou das colunas) de uma matriz com o menor número possível de vectores.

Comecemos por relembrar (ver Exercício 1.1, pág. 34) que se substituirmos um (ou mais) vector de um conjunto gerador $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ do subespaço $V \subset \mathbb{R}^n$ por uma combinação linear (não nula) de vectores de S, o novo conjunto ainda gera V. Por exemplo, substituindo $\mathbf{u}_k$ por $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k$ com $\alpha_k \neq 0$, tem-se

$$V = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}\},$$

uma vez que

$$\beta_1\mathbf{u}_1+\cdots+\beta_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}+\beta_k\mathbf{w} = (\beta_1+\beta_k\alpha_1)\mathbf{u}_1+\cdots+(\beta_{k-1}+\beta_k\alpha_{k-1})\mathbf{u}_{k-1}+\beta_k\alpha_k\mathbf{u}_k.$$

Assim, como as operações elementares usadas pelo método de eliminação de Gauss consistem em troca de linhas e substituição de linhas por combinações lineares de linhas, o método de eliminação de Gauss não altera o espaço das linhas de uma matriz. Ou seja, se R é uma matriz obtida de A por aplicação do método de eliminação de Gauss, tem-se $EL(A) = EL(R)$. Em particular, se R é uma matriz em escada obtida de A por eliminação de Gauss, então um conjunto gerador do espaço das linhas de A é constituído pelas linhas não nulas de R.

De facto, o método de eliminação de Gauss "elimina" linhas que sejam combinações lineares de linhas que a precedem. Esta propriedade de podermos retirar de um conjunto gerador de um subespaço um vector que seja combinação linear dos outros vectores sem alterar o espaço gerado pelo conjunto dado, é completamente geral. Verifiquemos esta afirmação.

Seja $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\}$ um conjunto gerador do subespaço V de $\mathbb{R}^n$ tal que o vector $\mathbf{v}$ é uma combinação linear dos vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ (distintos de $\mathbf{v}$). Isto é, tal que $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{u}_k$, para certos escalares $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Mostremos que o conjunto $S' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ ainda gera V, ou seja, $V = \mathrm{Span}\, S = \mathrm{Span}\, S'$. Considere-se um qualquer vector $\mathbf{x}$ de V, isto é,

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{u}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}. \tag{3.5}$$

Como $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{u}_k$, de (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k + \alpha_{k+1}(\beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{u}_k)\\ &= (\alpha_1 + \alpha_{k+1}\beta_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha_k + \alpha_{k+1}\beta_k)\mathbf{u}_k \in \mathrm{Span}\, S'.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}$ é um qualquer vector de V, tem-se $\mathrm{Span}\, S = \mathrm{Span}\, S' = V$.

O método de eliminação de Gauss também não altera o núcleo de uma matriz uma vez que, se R é uma matriz em escada obtida de A por aplicação do método de eliminação de Gauss, os sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ são equivalentes (isto é, têm as mesmas soluções). Podemos assim enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.4. O método de eliminação de Gauss não altera o espaço das linhas nem o núcleo de uma matriz. Isto é, se R é uma matriz em escada obtida de A por eliminação de Gauss, então

$$N(A) = N(R) \qquad \text{e} \qquad EL(A) = EL(R) = \text{Span}\{\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_k\},$$

onde $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_k$ são as linhas não nulas (as linhas que contêm pivôs) de R.

Utilizemos a Proposição 3.4 para determinar um conjunto gerador para o espaço das linhas e das colunas da matriz A do Exemplo 3.6. Aplicando o método de eliminação de Gauss, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Logo

$$EL(A) = \text{Span}\{(2,4,6)\} = EL(R).$$

Para determinarmos um conjunto gerador do espaço das colunas de A usamos o método de eliminação de Gauss para a matriz transposta de A, uma vez que as colunas de A são as linhas de A^T. De facto, aplicando eliminação de Gauss a A^T, obtemos

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 3L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$EC(A) = EL(A^T) = \text{Span}\{(2,-1)\}.$$

Neste exemplo conclui-se que:

1) As linhas de R que contêm pivôs geram $EL(A)$, embora as colunas de R que contêm pivôs não gerem $EC(A)$. De facto, a coluna $(2,0)$ de R (que contém o pivô) gera o eixo dos xx enquanto que $EC(A) = \text{Span}\{(2,-1)\}$ é uma recta que passa pela origem e tem a direcção do vector $(2,-1)$. No entanto, podemos observar que a coluna de A correspondente à coluna de R que contém o pivô, isto é, o vector$(2,-1)$, gera $EC(A)$.

2) O menor número de vectores necessários para gerar $EL(A)$ é igual à característica da matriz A. Além disso, o menor número de vectores necessários para gerar $EC(A)$ é também igual à característica de A.

Certas conclusões deste exemplo são válidas para qualquer matriz como veremos na próxima secção.

Passamos a chamar *dimensão do espaço das linhas* de uma matriz A à característica da matriz. A dimensão do espaço das linhas de A é designada por $\dim EL(A)$.

A igualdade (3.3) pode assim ser reescrita na forma:

Se A é uma matriz $p \times n$, então

$$\dim EL(A) + \dim N(A) = n = \text{ número colunas de } A.$$

3.3 Independência linear, bases e dimensão

As noções a abordar nesta secção são cruciais na teoria dos espaços lineares. No sentido de facilitar a sua compreensão recorremos frequentemente aos espaços lineares $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ para obter uma interpretação geométrica.

No Capítulo 1 vimos que para gerar $\mathbb{R}^2$ são precisos no mínimo dois vectores, porém não servem dois quaisquer vectores já que, por exemplo, dois vectores colineares não geram $\mathbb{R}^2$ mas sim uma recta. Da mesma forma, para gerar $\mathbb{R}^3$ são necessários 3 vectores que não sejam coplanares. Em ambos os casos é necessário escolher vectores que designamos por vectores linearmente independentes. A questão que se coloca é a de saber qual é o menor número de vectores necessários para gerar um dado espaço linear. A este número chama-se dimensão do espaço linear.

Como veremos, fixada uma base num espaço linear real (resp. complexo) de dimensão finita n, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre vectores desse espaço e vectores de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{C}^n$). Esta correspondência biunívoca desempenha um papel fundamental no estudo dos espaços lineares de dimensão finita, como o leitor poderá reconhecer ao longo deste texto.

Subjacente às noções de independência linear, base e dimensão encontra-se a noção de combinação linear já introduzida no Capítulo 1 para vectores do espaço linear $\mathbb{R}^n$. Estendemos agora as definições de combinação linear e de conjunto gerador a um espaço linear qualquer.

Definição 3.5. Seja W um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subseteq W$.

i) Chama-se *combinação linear* dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ a um vector da forma

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p,$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ são escalares de $\mathbb{K}$. Aos escalares α_i chamamos *coeficientes da combinação* linear.

ii) O conjunto S é *linearmente independente* se a única solução da equação

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0 \tag{3.6}$$

é $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Quando S não é linearmente independente diz-se que é *linearmente dependente*.

iii) Ao conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S chamamos *espaço gerado* por, ou *expansão linear de*, S, que designamos por $\mathrm{Span}(S)$. Ou seja,

$$\mathrm{Span}\, S = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}\}.$$

Quando um conjunto de vectores é linearmente independente (resp. linearmente dependente) também nos referimos aos vectores do conjunto como vectores linearmente independentes (resp. linearmente dependentes).

Nota 16. 1. *Faz-se notar que se S é um subconjunto de um espaço linear W, então $\mathrm{Span}(S)$ é um subespaço linear de W. A demonstração desta afirmação é exactamente igual à prova apresentada no Exemplo 3.4 para o caso de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.*

2. *Saliente-se que no membro direito da equação (3.6), o vector 0 é o vector zero do espaço linear em causa.*

3. *Neste livro só consideramos espaços lineares de dimensão finita e por isso apenas apresentámos a definição de independência linear para um conjunto finito. Um conjunto infinito de vectores diz-se linearmente dependente se algum seu subconjunto finito é linearmente dependente, caso contrário diz-se linearmente independente. A maioria dos resultados que apresentamos para espaços lineares de dimensão finita são igualmente válidos para espaços lineares de dimensão infinita, com alterações menores.*

Da Proposição 3.1 sabemos que num espaço linear W sobre $\mathbb{K}$ se tem $\alpha \cdot 0 = 0$ para todo o escalar α, e que $\alpha \cdot v \neq 0$ para $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$ e $v \neq 0 \in W$. Por conseguinte, da definição de independência linear segue:

(i) Um conjunto que contenha o vector zero é linearmente dependente.

(ii) Um conjunto com um único vector não nulo é linearmente independente.

Consideremos alguns exemplos dos conceitos acabados de definir.

Exemplo 3.7. **(a)** Os vectores $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes, visto que $\mathbf{u}_2 = 5\mathbf{u}_1$, ou seja

$$5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \Longleftrightarrow 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o vector $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ escreve-se como uma combinação linear de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ com coeficientes não nulos (os coeficientes são 5 e -1).

Realcemos que dois vectores são linearmente dependentes se e só se um vector é múltiplo do outro (isto é, são colineares).

(b) Os vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são linearmente dependentes já que, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, ou seja

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A igualdade anterior diz-nos que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, com coeficientes $1, 1$ e -1. ⧫

Exemplo 3.8. Como vimos, o conjunto das matrizes reais 2×2 com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por escalares reais, é um espaço linear real. O vector zero deste espaço é a matriz nula 2×2. Verifiquemos se o subconjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ deste espaço linear é ou não linearmente independente, onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando a definição de vectores linearmente independentes, tem-se

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0 \iff \begin{bmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_1 \\ 5\alpha_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 2\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha_3 & 2\alpha_3 \\ 9\alpha_3 & -\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 & 2\alpha_1 + 2\alpha_3 \\ 5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 9\alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Este sistema homogéneo tem soluções não nulas, nomeadamente a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2, -1)$, pelo que o conjunto dado é linearmente dependente. De facto, $A_1 + 2A_2 - A_3$ é igual à matriz nula.

♦

Um subconjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente se a equação

$$\underbrace{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_p \mathbf{u}_p}_{\text{combinação linear de } \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p} = \mathbf{0},$$

só admite a solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. Como o produto de uma matriz A por um vector $\mathbf{x}$ é uma combinação linear das colunas de A (ver Definição 1.11, pág. 34) a equação anterior é equivalente a

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

onde A é a matriz cujas colunas são os vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$ e $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$. Assim, o subconjunto $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente se e só se a única solução do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Podemos então enunciar o seguinte resultado.

Proposição 3.5. Os vectores coluna de uma matriz A são linearmente independentes se e só se a única solução do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é a solução nula. Equivalentemente, se e só se $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Exemplo 3.9.

1. Se A é uma matriz quadrada do tipo $n \times n$, então os vectores coluna de A formam um conjunto linearmente independente se e só se a característica de A é igual a n, uma vez que isto é equivalente ao sistema homogéneo só ter a solução nula (ver proposições 1.10 e 1.12 nas páginas 59 e 62).

2. Se A é uma matriz com mais colunas do que linhas, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem mais incógnitas que equações. Neste caso os vectores coluna de A formam um conjunto linearmente dependente uma vez que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é indeterminado (a característica de A é no máximo igual ao número de equações do sistema, portanto existem incógnitas livres). Assim, qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com cardinalidade superior a n é linearmente dependente, visto que se colocarmos os vectores deste conjunto numa matriz, por colunas, a matriz terá mais colunas que linhas.

♦

Sublinhe-se que enquanto a independência linear de vectores de $\mathbb{R}^n$ se traduz no estudo de um sistema homogéneo de equações lineares, noutros espaços lineares a equação (3.6) não é necessariamente um sistema. Ou seja, enquanto que para estudarmos a independência linear de vectores de $\mathbb{R}^n$ podemos considerar a matriz A cujas colunas são estes vectores e estudar as soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o mesmo não acontece noutros espaços lineares onde teremos de recorrer à definição (ver Exemplo 3.8) ou a resultados que obteremos a seguir.

Proposição 3.6. Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ com $p > 1$ vectores distintos, é linearmente dependente se e só se pelo menos um dos vectores de S é combinação linear dos outros $(p-1)$ vectores de S.

Demonstração.($\Longrightarrow$): O conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ é linearmente dependente se e só se a equação $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ é satisfeita com pelo menos um dos α's não nulo. Suponhamos que $\alpha_i \neq 0$. São válidas as equivalências:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0 \\
&\qquad \Longleftrightarrow \alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \cdots - \alpha_p v_p \\
&\qquad \Longleftrightarrow v_i = \underbrace{-\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_p}{\alpha_i} v_p}_{\text{combinação linear de } v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_p}.
\end{aligned}$$

Isto é, v_i é uma combinação linear de vectores de S, distintos de v_i.

($\Longleftarrow$): Se um dos vectores de S, digamos v_i, é uma combinação linear dos outros vectores de S, então tem-se

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_p v_p \Longleftrightarrow$$
$$\alpha_1 v_1 + \cdots - v_i + \cdots + \alpha_p v_p = 0.$$

Os coeficientes da combinação linear da equação anterior não são todos nulos (o coeficiente de v_i é igual a (-1)), e portanto o conjunto S é linearmente dependente.

$\square$

A Proposição 3.6 garante que um conjunto é linearmente independente se nenhum dos vectores do conjunto é combinação linear de outros vectores do conjunto.

Exemplo 3.10. As Figuras 3.2 ilustram exemplos de conjuntos linearmente independentes e dependentes.

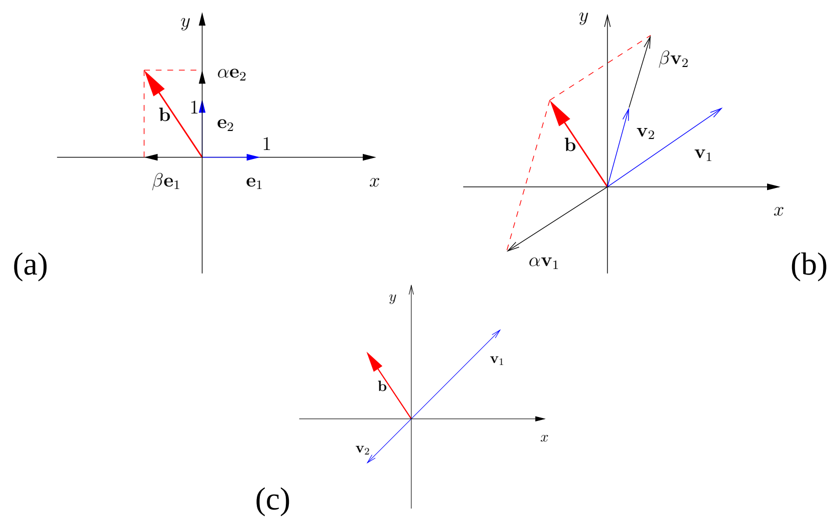

Figura 3.2: (a) Qualquer vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$; (b) O vector $\mathbf{b}$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; (c) $\mathbf{b}$ não é combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Fig. 3.2-(a): Conjuntos linearmente independentes: $\{\mathbf{e}_1\}$, $\{\mathbf{e}_2\}$, $\{\beta\mathbf{e}_1\}$, $\{\alpha\mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{e}_1, \alpha\mathbf{e}_2\}$, $\{\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{b}\}$, $\{\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{b}\}$, $\{\alpha\mathbf{e}_2, \mathbf{b}\}$, $\{\alpha\mathbf{e}_2, \beta\mathbf{e}_1\}$, etc.

Conjunto linearmente dependente: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b}\}$.

Fig. 3.2-(b): Conjuntos linearmente independentes: $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{b}\}$.

Conjunto linearmente dependente: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{b}\}$.

Fig. 3.2-(c): Conjuntos linearmente independentes: $\{\mathbf{v}_1\}$, $\{\mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{b}\}$.

Conjunto linearmente dependente: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

♦

Vimos, na página 122, que ao removermos de um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ vectores que sejam combinações lineares de outros vectores do conjunto, o conjunto resultante ainda gera o mesmo espaço linear que o conjunto S. Este resultado é válido em qualquer espaço linear. Ou seja, removendo de um dado conjunto linearmente dependente, vectores que sejam combinações lineares de outros vectores do conjunto, o conjunto resultante e o conjunto dado geram o mesmo subespaço linear, conforme se enuncia na proposição a seguir.

Proposição 3.7. Seja $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ um subconjunto linearmente dependente de um espaço linear W e v_k um vector de S que é combinação linear de vectores de S, distintos de v_k.

O conjunto S e o conjunto S' obtido de S removendo v_k, isto é, $S' = S \backslash \{v_k\}$, geram o mesmo subespaço linear. Isto é,

$$\operatorname{Span} S' = \operatorname{Span} S.$$

Demonstração. A demonstração é inteiramente análoga à prova apresentada na página 122 para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. □

Exemplo 3.11. Sejam v_1, v_2, v_3 e v_4 vectores não nulos de um espaço linear e $V = \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Suponhamos que os vectores v_i verificam as relações:

(a) $v_1 + 2v_2 = 0$ (b) $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ (c) $v_4 \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Determinemos um subconjunto de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, com o menor número possível de vectores que gere V.

Da última proposição sabemos que se removermos de um conjunto um vector que seja combinação linear de outros vectores do conjunto, o novo conjunto ainda gera o mesmo espaço linear. Assim, da alínea (c) sabemos que v_4 é uma combinação linear de v_1, v_2, v_3, logo $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$. De igual modo, a alínea (b) diz-nos que $v_3 = v_2 - v_1$, ou seja, v_3 é uma combinação linear de v_2 e v_1, e portanto $V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$. Finalmente, por (a), o vector v_2 é combinação linear de v_1 e portanto

$$V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\} = \mathrm{Span}\{v_1\}.$$

Claramente o subespaço V não pode ser gerado por menos do que um vector. ⧫

Apresentamos a seguir a noção de base.

Definição 3.6. Base
Um subconjunto (finito) B de um espaço linear $W \neq \{0\}$ diz-se uma *base* de W se são verificadas as duas condições seguintes.

1. B é linearmente independente.
2. B gera W, isto é, $\mathrm{Span}(B) = W$.

Nota 17. *Uma base nunca pode conter o vector zero do espaço já que, qualquer conjunto que contenha este vector é linearmente dependente (ver quadro na página 126).*

Exemplo 3.12. Para os vectores representados na Figura 3.2-(a)-(c) (pág. 129) podemos formar as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$.

(a) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{e}_1, \alpha\mathbf{e}_2\}$, $\{\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{b}\}$, $\{\beta\mathbf{e}_1, \mathbf{b}\}$, $\{\alpha\mathbf{e}_2, \mathbf{b}\}$, $\{\alpha\mathbf{e}_2, \beta\mathbf{e}_1\}$, etc.

(b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{b}\}$.

(c) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{b}\}$ e $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{b}\}$.

⧫

Exemplo 3.13. Consideremos os vectores de $\mathbb{R}^3$ representados na Figura 3.3- (a).

Os três vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ formam o que se designa por *base canónica* de $\mathbb{R}^3$. De facto, qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear destes três vectores, já que

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3.$$

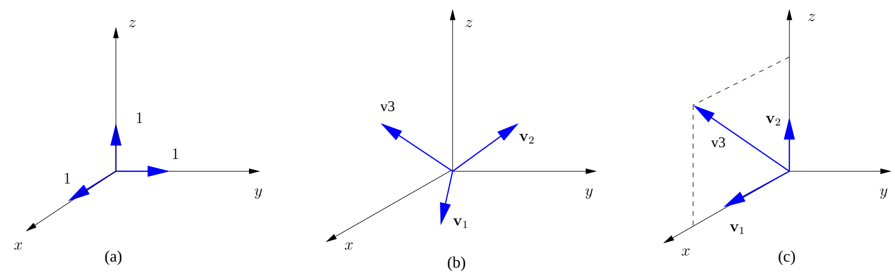

Figura 3.3: (a) Base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$; (b) $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$; (c) $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Além disso, $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ é linearmente independente, uma vez que

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3=\mathbf{0} &\Longleftrightarrow \alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)=(0,0,0)\\ &\Longleftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0).\end{aligned}$$

Por conseguinte, o conjunto $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ é linearmente independente e gera $\mathbb{R}^3$.

Na Figura 3.3-(b) os vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Na Figura 3.3-(c) os vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ não formam uma base de $\mathbb{R}^3$ já que estes três vectores geram o plano xz e portanto não geram $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}=\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}.$$

♦

Exemplo 3.14.

1. O conjunto $B=\{(1,2),(0,1),(2,5)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, apesar de $\operatorname{Span}(B)=\mathbb{R}^2$. De facto, B não é linearmente independente já que $(2,5)=2(1,2)+(0,1)$.

2. O conjunto $B=\{(1,2)\}$ é linearmente independente (ver quadro na pág. 126) e não é uma base de $\mathbb{R}^2$, já que $\operatorname{Span}(B)\neq\mathbb{R}^2$. De facto, $\operatorname{Span}(B)$ é uma recta que passa pela origem e tem a direcção do vector $(1,2)$.

3. O conjunto $B=\{(1,2),(1,1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$ uma vez que os vectores de B não são colineares. Além disso, B é linearmente independente já que o sistema

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

só admite a solução trivial $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$, visto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Por conseguinte, B é uma base de $\mathbb{R}^2$.

♦

Exemplo 3.15. Qualquer vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vectores do conjunto

$$BC = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\} \subset \mathbb{R}^n,$$

uma vez que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1).$$

Os vectores de BC são linearmente independentes já que,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 1) &\iff (0, \ldots, 0) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ &\iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto BC é uma base de $\mathbb{R}^n$. A base BC é designada por *base canónica* de $\mathbb{R}^n$. ♦

Como consequência da Proposição 3.7 podemos obter o resultado que se segue.

Proposição 3.8. Seja $W \neq \{0\}$ um espaço linear e S um subconjunto (finito) de W que gera W. Existe um subconjunto de S que é uma base de W.

Demonstração. Se S é linearmente independente, então S já é uma base de W. Se S não é linearmente independente, pela Proposição 3.7, podemos ir removendo vectores de S por forma a obter um subconjunto $S' \subset S$ que seja linearmente independente. Se o conjunto S' tem um único vector ele é necessariamente não nulo pois, por hipótese, $W \neq \{0\}$, e portanto S' é conjunto linearmente independente. Como $W = \operatorname{Span} S = \operatorname{Span} S'$ (cf. Proposição 3.7), então S' é uma base de W. □

O teorema a seguir é um resultado fundamental na teoria dos espaços lineares porquanto, desde que se fixe uma base ordenada no espaço linear, ele permitirá estabelecer uma correspondência biunívoca entre vectores de um espaço linear real (resp. complexo) e vectores de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Teorema 3.1. Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço linear W.

Qualquer vector v de W escreve-se, de forma única, como combinação linear dos vectores da base B. Isto é, existem escalares α_i únicos tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Demonstração. Obviamente que qualquer $x \in W$ é uma combinação linear dos vectores de B já que, por definição de base, o conjunto gerado por B é W. Para mostrar que esta combinação linear é única vamos supor, por redução ao absurdo, que existe um vector $x \in W$ que se escreve como combinação linear dos vectores de B de duas formas distintas.

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{3.7}$$

$$x = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \tag{3.8}$$

com $\alpha_i \neq \beta_i$ para algum $i = 1, 2, \dots, n$. Subtraindo (3.7) a (3.8) obtemos:

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n.$$

Como $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base, este conjunto é linearmente independente, e portanto a última igualdade só se verifica se $(\alpha_i - \beta_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Isto é, quando $\alpha_i = \beta_i$, o que é uma contradição. $\square$

Dada uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ podemos ordenar os seus vectores. Para designar que uma base está *ordenada* usamos parênteses curvos em vez de chavetas. Por exemplo, o conjunto $B = \{(1, 2), (1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ que pode ser ordenado de duas formas distintas. Nomeadamente, podemos considerar as bases ordenadas $B_1 = ((1, 2), (1, 1))$ e $B_2 = ((1, 1), (1, 2))$.

Definição 3.7. Vector das coordenadas

Seja $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ uma base ordenada de um espaço linear W. As coordenadas de um vector $x \in W$ na base B são os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ da combinação linear

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n.$$

O vector $\mathbf{x}_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é designado por *vector das coordenadas* de x na base (ordenada) B.

Nota 18. *1. Se W é um espaço linear real, então o vector das coordenadas $\mathbf{x}_B$, na definição anterior, é um vector de $\mathbb{R}^n$ (mesmo que o espaço linear não seja $\mathbb{R}^n$) pois neste caso os escalares α_i são números reais.*

2. *Quando em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, não indicamos o índice B no vector das coordenadas supomos que a base B que estamos a considerar é a base canónica do espaço linear em questão. Esta notação está de acordo com a notação usada na definição de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{C}^n$. Ver ainda Exemplo 3.15, na página 133.*

3. *O Teorema 3.1 garante a unicidade do vector das coordenadas numa base fixada, para todo o vector x do espaço linear.*

Exemplo 3.16. No Exemplo 3.14-3 (pág. 132) vimos que $B = \{(1,2),(1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Esta base pode ser ordenada de duas formas distintas. Sejam $B_1 = ((1,2),(1,1))$ e $B_2 = ((1,1),(1,2))$. Determinemos as coordenadas de $\mathbf{x} = (10,4)$ nas bases ordenadas B_1 e B_2. Como

$$(10,4) = -6(1,2) + 16(1,1),$$

temos $\mathbf{x}_{B_1} = (-6,16)$ e $\mathbf{x}_{B_2} = (16,-6)$. ♦

Exemplo 3.17. Consideremos a base ordenada de $\mathbb{R}^2$, $B = (\mathbf{b},\mathbf{c}) = ((2,2),(-2,2))$ e o vector $\mathbf{v} = (10,6)$. As coordenadas de $\mathbf{v}$ na base B são $\mathbf{v}_B = (4,-1)$, já que

$$(10,6) = \alpha(2,2) + \beta(-2,2) = (2\alpha - 2\beta, 2\alpha + 2\beta) \iff \begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 10 \\ 2\alpha + 2\beta = 6 \end{cases}$$
$$\iff \alpha = 4 \text{ e } \beta = -1.$$

Na Figura 3.4 ilustramos geometricamente este exemplo. ♦

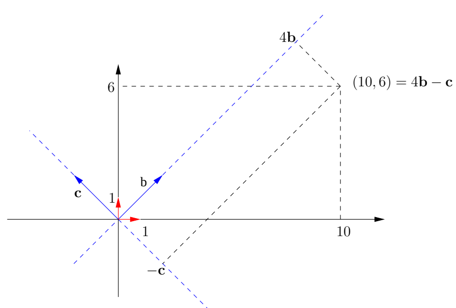

Figura 3.4: O vector das coordenadas de $\mathbf{v} = (10,6)$ na base $B = (\mathbf{b},\mathbf{c})$ é $\mathbf{v}_B = (4,-1)$. Isto é, $\mathbf{v} = 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$.

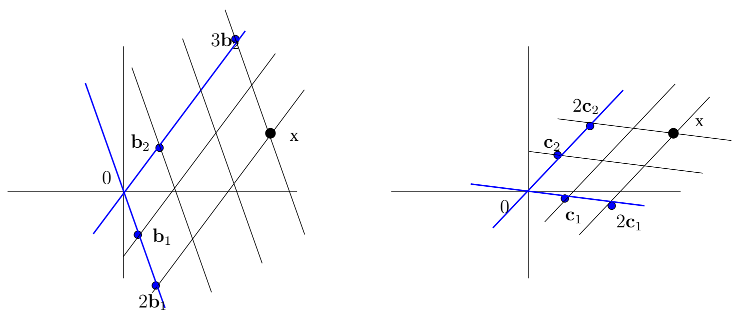

Figura 3.5: Duas bases distintas $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ e $B' = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ do mesmo espaço linear, e as coordenadas do vector $\mathbf{x}$ nessas bases: $\mathbf{x}_B = (2, 3)$ e $\mathbf{x}_{B'} = (2, 2)$.

Exemplo 3.18. Na Figura 3.5 ilustramos a representação do vector $\mathbf{x}$ em duas bases ordenadas distintas, nomeadamente nas bases $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ e $B' = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$. O vector das coordenadas de $\mathbf{x}$ nestas bases é

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = 2\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2.$$

♦

Exercício 3.2. Considere a base ordenada $B = (u, v)$ de um certo espaço linear. Sabendo que $\mathbf{x}_B = (1, 2)$, determine o vector das coordenadas de x nas bases ordenadas seguintes.

a) $B_1 = (u, 2v)$.
b) $B_2 = (-u, u + v)$.
c) $B_3 = (u - v, u + v)$.
d) $B_4 = (4u, 6v)$.

Solução: $\mathbf{x}_{B_1} = (1, 1)$, $\mathbf{x}_{B_2} = (1, 2)$, $\mathbf{x}_{B_3} = (-1/2, 3/2)$, $\mathbf{x}_{B_4} = (1/4, 1/3)$.

▲

É fácil mostrar que fixada uma base ordenada $B = (v_1, \ldots, v_n)$ num espaço linear W, um subconjunto $\{u_1, \ldots, u_p\}$ de W é linearmente independente se e só se o conjunto dos vectores das coordenadas $\{(\mathbf{u}_1)_B, \ldots, (\mathbf{u}_p)_B\}$ é linearmente independente. Para tal, considerem-se as combinações lineares

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta_{11}v_1 + \cdots + \beta_{1n}v_n \\ u_2 &= \beta_{21}v_1 + \cdots + \beta_{2n}v_n \\ &\vdots \\ u_p &= \beta_{p1}v_1 + \cdots + \beta_{pn}v_n \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por definição de vector das coordenadas numa certa base, as igualdades anteriores significam que os vectores das coordenadas de $u_1, \ldots, u_p$ na base B são:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1)_B &= (\beta_{11}, \ldots, \beta_{1n}) \\ &\vdots \\ (\mathbf{u}_p)_B &= (\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pn}). \end{aligned}$$

De (3.9) tem-se que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ é equivalente a

$$(\alpha_1\beta_{11} + \cdots + \alpha_p\beta_{p1})v_1 + \cdots + (\alpha_1\beta_{1n} + \cdots + \alpha_p\beta_{pn})v_n = 0.$$

Como os vectores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, da igualdade anterior segue que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ se e só se

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha_1\beta_{11} + \cdots + \alpha_p\beta_{p1} = 0 \\ \qquad\vdots \\ \alpha_1\beta_{1n} + \cdots + \alpha_p\beta_{pn} = 0 \end{cases} &\iff \alpha_1 \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_p \begin{bmatrix} \beta_{p1} \\ \vdots \\ \beta_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \alpha_1(\mathbf{u}_1)_B + \cdots + \alpha_p(\mathbf{u}_p)_B = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por conseguinte, $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é linearmente independente se e só se $\{(\mathbf{u}_1)_B, \ldots, \mathbf{u}_p)_B\}$ é linearmente independente. Para referência futura enunciamos a seguir o que acabámos de mostrar.

Proposição 3.9. Fixada uma base ordenada B no espaço linear W, um subconjunto $\{u_1, \ldots, u_p\}$ de W é linearmente independente se e só se o conjunto dos vectores das coordenadas $\{(\mathbf{u}_1)_B, \ldots, (\mathbf{u}_p)_B\}$ é linearmente independente.

O teorema que enunciamos a seguir mostra que todas as bases de um espaço linear têm o mesmo cardinal.

Teorema 3.2. Todas as bases de um espaço linear W têm o mesmo número de elementos.

Demonstração. Vamos usar um raciocínio por contradição. Sejam $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ duas bases de W, e assuma-se que $p > n$.

Consideremos os vectores das coordenadas $(\mathbf{u}_1)_B, (\mathbf{u}_2)_B, \ldots, (\mathbf{u}_p)_B$. Colocando estes vectores numa matriz por colunas obtém-se a seguinte matriz A do tipo $n \times p$.

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{u}_1)_B & (\mathbf{u}_2)_B & \cdots & (\mathbf{u}_p)_B \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Como $p > n$, o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é indeterminado (tem mais incógnitas que equações) e portanto os vectores coluna de A são linearmente dependentes. Assim, da Proposição 3.9 tem-se que os vectores $u_1, \ldots, u_p$ são linearmente dependentes, e portanto B' não é uma base, o que é uma contradição.

Para o caso $p < n$ a prova é análoga bastando para tal considerar os vectores das coordenadas dos vectores de B na base B'. □

A dimensão de um espaço linear define-se como o número de elementos de uma (qualquer) base do espaço.

Definição 3.8. Dimensão

Chama-se dimensão de um espaço linear W ao número de vectores de uma (qualquer) base do espaço. Designa-se a dimensão de W por $\dim W$.

Se o espaço linear W apenas possui o vector zero, isto é, se $W = \{0\}$, convenciona-se que a sua dimensão é igual a zero.

Decorre do Teorema 3.1 que, uma vez fixada uma base ordenada B num espaço linear real (resp. complexo) W de dimensão n, existe uma correspondência biunívoca entre W e $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Esta correspondência associa a cada vector do espaço linear o seu vector das coordenadas na base fixada. Esquematicamente,

$$\begin{array}{ccc} (W, B) \text{ espaço linear real de dimensão } n & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x \in W & \longleftrightarrow & \mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^n. \end{array} \tag{3.10}$$

Nota 19. 1. *Refira-se de novo que neste livro apenas se tratam espaços lineares de dimensão finita.*

Com base nos resultados obtidos, enunciamos a seguir um teorema de grande utilidade prática. Este teorema aplica-se com frequência quando se pretende decidir se um dado subconjunto de um espaço linear é ou não uma base desse espaço linear.

Teorema 3.3. Seja W é um espaço linear de dimensão $n \geq 1$, e S é um subconjunto de W com p vectores. São verdadeiras as afirmações:

1. Se $p > n$, então S é linearmente dependente;
2. Se $p < n$, então S não gera W;
3. Se S é linearmente independente e $p < n$, então pode acrescentar-se $(n-p)$ vectores a S por forma a obter uma base de W;
4. Se $p = n$ e S é linearmente independente, então S é uma base de W;
5. Se $p = n$ e S gera W, então S é uma base de W.

Demonstração.

1. Este resultado segue da demonstração do Teorema 3.2.
2. Suponha-se, por absurdo, que S gera W. Se S gera W, pela Proposição 3.8 existe um subconjunto B de S que é uma base de W. Porém a base B tem no máximo $p < n$ vectores. Logo, B não pode ser uma base já que qualquer base de W tem n vectores (o que é uma contradição).
3. Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ linearmente independente com $p < n$. Pelo item 2, S não gera W, e portanto existe pelo menos um vector u de W que não pertence ao conjunto gerado por S. Ora o conjunto $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, u\}$ também é linearmente independente já que, se na igualdade

   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} u = 0,$$

   α_{p+1} não fosse igual a zero, então $u = \frac{1}{\alpha_{p+1}}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p)$ era uma combinação linear de elementos de S, o que contraria a hipótese de u não pertencer ao conjunto gerado por S.

   Se S' não tiver n elementos, então podemos repetir o processo, aumentando S' com outro vector não pertencente a $\operatorname{Span} S'$, e obter um novo conjunto linearmente independente. Quando chegamos a um conjunto com n elementos este conjunto tem necessariamente que gerar W, caso contrário poderíamos acrescentar um novo vector ao conjunto e obter um conjunto com $n+1$ elementos o qual, pelo item 1, seria linearmente dependente. Como um conjunto linearmente independente que gera W é uma base de W, o conjunto obtido é uma base de W.

4. Como se viu na prova do item anterior, se S é linearmente independente e tem n elementos, então gera W. Logo, S é uma base.

5. Como $W \neq \{0\}$ (já que por hipótese a dimensão de W é pelo menos 1) e S gera W, a Proposição 3.8 garante que existe um subconjunto $B \subseteq S$, que é uma base de W. Como $\dim W = n$, o número de elementos de B é n. Logo, $B = S$.

□

Do teorema anterior conclui-se que um conjunto gerador de um espaço linear de dimensão n não pode ter menos do que n vectores. Também se conclui que a dimensão de um espaço linear W é o número máximo de vectores linearmente independentes existentes num conjunto gerador de W.

Exemplo 3.19. A dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n já que, como se viu no Exemplo 3.15, uma base de $\mathbb{R}^n$ é a base canónica

$$BC = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}.$$

♦

Exemplo 3.20. Considerem-se os vectores não nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ de $\mathbb{R}^3$. Do Teorema 3.3 temos:

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ é linearmente dependente uma vez que a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3 (cf. Teorema 3.3-1)).

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$ uma vez que não gera $\mathbb{R}^3$ (cf. Teorema 3.3-2)).

- Se $S = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ é linearmente independente e $\mathbf{v}_2 \notin \operatorname{Span} S$, então $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ (cf. Teorema 3.3-3)).

♦

A finalizar esta secção vamos referir uma importante relação entre a dimensão da soma de subespaços e a dimensão da sua intersecção. Recorde-se, do Exercício 3.1 na página 119, que a soma $U + V$, do subespaço U com o subespaço V, é o conjunto de todas as somas de vectores de U com vectores de V. Saliente-se ainda que o espaço $U + V$ não é em geral a união $U \cup V$, mas contém esta união, como se pode depreender analisando a Figura 3.6.

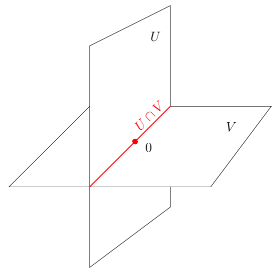

Figura 3.6: A união e a intersecção de subespaços.

Proposição 3.10. Sejam U e V subespaços de um espaço linear W. Verifica-se a igualdade:

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V). \tag{3.11}$$

Demonstração. Do Exercício 3.1 (pág. 119), sabemos que a intersecção $U \cap V$ é um subespaço de W. Seja $S = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ uma base de $U \cap V$. Como $S \subseteq U$ e $S \subseteq V$, o Teorema 3.3 garante que podemos completar S por forma a obter bases para U e para V. Seja $B_U = \{z_1, \ldots, z_k, x_1, \ldots x_p\}$ uma base de U e $B_V = \{z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots y_n\}$ uma base de V. Verifiquemos agora que $B = B_U \cup B_V$ é uma base de $U + V$. É óbvio, a partir da definição de $U + V$, que B é um conjunto gerador para $U + V$, uma vez que vectores $w \in U + V$ são da forma $w = u + v$ com $u \in U$ e $v \in V$. Mostremos agora que B é linearmente independente.

Se

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j + \sum_{r=1}^{n} \gamma_r y_r = 0, \tag{3.12}$$

então

$$\sum_{r=1}^{n} \gamma_r y_r = -\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j \right) \in U.$$

Como $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r y_r \in V$, segue da igualdade anterior que $\sum_{r=1}^{n} \gamma_r y_r \in U \cap V$, e portanto têm de existir escalares δ_i tais que

$$\sum_{r=1}^{n} \gamma_r y_r = \sum_{i=1}^{k} \delta_i z_i \iff \sum_{r=1}^{n} \gamma_r y_r - \sum_{i=1}^{k} \delta_i z_i = 0.$$

Como B_V é linearmente independente, segue da equivalência anterior que todos os γ_i e δ_i são nulos. Logo, a equação (3.12) reduz-se a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j = 0$. Porém, B_U é linearmente independente e portanto a última equação só tem a solução $\alpha_i = \beta_j = 0$, para todo i, j. Assim, a igualdade (3.12) só é satisfeita quando os α's, γ's e δ's são todos nulos. Isto é, B é linearmente independente. Assim, $B = B_U \cup B_V$ é uma base de $U + V$. Logo,

$$\dim(U+V) = k+p+n = (k+p)+(k+n)-k = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

$\square$

3.3.1 Bases e dimensão dos quatro subespaços fundamentais

Na Secção 3.2.2 chamámos dimensão do espaço das linhas de uma matriz A e do núcleo de A, respectivamente, à característica de A e ao grau de indeterminação do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nesta secção mostramos que essas designações correspondem de facto às dimensões desses espaços lineares. Aproveitamos ainda para mostrar que a dimensão do espaço das colunas é igual à dimensão do espaço das linhas.

Teorema 3.4. Seja R uma matriz em escada obtida da matriz A por eliminação de Gauss, e $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_k$ as linhas não nulas de R. São verdadeiras as afirmações seguintes.

(a) Uma base B para o espaço das linhas de A é constituída pelas linhas não nulas de R. Isto é, $B = \{\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_k\}$ é uma base de $EL(A)$.

(b) Uma base para o espaço das colunas de A é constituída pelas colunas de A correspondentes às colunas de R que contêm pivôs.

(c) $\dim EL(A) = \dim EC(A) = k$.

(d) $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A^T) = k$.

Demonstração. (a): Da Proposição 3.4 sabemos que as linhas não nulas de R geram o espaço das linhas de A. Para mostrar que as linhas não nulas de R formam uma base de $EL(A)$ basta provar que são linearmente independentes. Para tal considere-se a matriz P constituída pelas linhas não nulas de R, respeitando a ordem pela qual aparecem em R. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz transposta de P obtém-se uma matriz em escada com um pivô em todas as colunas. Assim, a única solução do sistema $P^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é a solução nula e portanto as colunas de P^T (isto é, as linhas não nulas de R) são linearmente independentes (cf. Proposição 3.5, pág. 127).

(b): Aplicando operações elementares à matriz transposta de R é possível anular as linhas de R^T que correspondem às colunas de R sem pivôs. Isto significa que as colunas de uma matriz em escada que não contêm pivôs são combinações lineares das colunas com pivô à sua esquerda. Assim, como a matriz A e R têm a mesma característica, existem no máximo $k = \text{car}(A)$ colunas de A que são linearmente independentes. Seja R' a matriz que se obtém de R suprimindo as colunas sem pivô, e A' a matriz que se obtém de A suprimindo as colunas correspondentes às colunas de R sem pivô. Os sistemas $R'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ têm as mesmas soluções. Como todas as colunas de R' têm pivô, o sistema $R'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só possui a solução nula. Logo, a única solução de $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é a solução nula, e portanto as colunas de A' são linearmente independentes. Conclui-se ainda que

$$\dim EC(A) = \text{car}(A) = k.$$

(c): A igualdade é consequência imediata de (a) e de (b) e do facto da característica de A ser igual a k.

(d): É consequência imediata de (c), visto que

$$\text{car}(A) = k = \dim EC(A) = \dim EL(A) = \dim EC(A^T) = \text{car}(A^T).$$

$\square$

Verificamos de seguida que a dimensão do núcleo de uma matriz A é igual ao grau de indeterminação do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Teorema 3.5. A dimensão do núcleo de uma matriz A é igual ao grau de indeterminação do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Demonstração. Seja A uma matriz $p \times n$. O núcleo de A é o conjunto das soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Suponha-se que a característica de A é igual a k, pelo que o grau de indeterminação do sistema é $(n-k)$. Isto é, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem $(n-k)$ incógnitas livres. Reordenando (se necessário) as colunas da matriz, o que só afecta a ordenação das incógnitas, podemos supor que as incógnitas livres são as primeiras $(n-k)$ incógnitas. Assim, as soluções do sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ são

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-k} \\ x_{n-k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-k} \\ \alpha_{11}x_1+\cdots\alpha_{1(n-k)}x_{n-k} \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1+\cdots\alpha_{n(n-k)}x_{n-k} \end{bmatrix} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_{n-k} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_{1(n-k)} \\ \vdots \\ \alpha_{n(n-k)} \end{bmatrix} \\
&= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_{n-k}\mathbf{u}_{n-k}.
\end{aligned}$$

Da igualdade anterior resulta que $N(A) = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$. Para mostrar que a dimensão do núcleo é $(n-k)$, basta provar que o conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$ é linearmente independente, ou seja, que S forma uma base para $N(A)$. Este conjunto é obviamente linearmente independente já que, o sistema $P\mathbf{x} = 0$, onde P é a matriz cujas colunas são $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}$ (por esta ordem), só tem a solução nula (ver Proposição 3.5). Por conseguinte, S é uma base de $N(A)$, e a dimensão de $N(A)$ coincide com o grau de indeterminação de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é igual a $(n-k)$.

$\square$

Como consequência imediata deste teorema e do facto da soma da característica de uma matriz A com o grau de indeterminação do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ser igual ao número de colunas de A, tem-se o importante teorema sobre as dimensões dos quatro subespaços fundamentais associados a uma matriz.

Teorema 3.6. Teorema da dimensão para matrizes
Seja A uma matriz $p \times n$. Verificam-se as igualdades

a) $\dim EL(A) + \dim N(A) = n =$ número de colunas de A.
b) $\dim EC(A) + \dim N(A^T) = p =$ número de linhas de A.

Demonstração. A alínea a) é exactamente a igualdade (3.3) onde se substituiu $\operatorname{car}(A)$ por $\dim EL(A)$.

Como a igualdade da alínea a) é válida para qualquer matriz, em particular é válida para A^T. Ou seja,

$$\dim EL(A^T) + \dim N(A^T) = p,$$

uma vez que p é igual ao número de colunas de A^T. Assim, o resultado b) segue da igualdade anterior e do facto de $EL(A^T) = EC(A)$. $\square$

Para finalizar esta secção, vamos relacionar as dimensões de $U+V$ e de $U\cap V$ com as dimensões do espaço das colunas e do núcleo de uma matriz, no caso em que U e V são subespaços de $\mathbb{R}^n$.

Sejam B_U e B_V bases, respectivamente, dos subespaços $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ dadas por

$$B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \qquad B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}.$$

Relembremos que

$$\begin{aligned} U + V &= \{\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} : \ \mathbf{u} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in V\} \subset \mathbb{R}^n \\ U \cap V &= \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y} \in U \text{ e } \mathbf{y} \in V\} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Assim, como B_U e B_V são bases, respectivamente, de U e de V, qualquer vector $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{v} \in V$ é uma combinação linear dos vectores da base do espaço linear respectivo. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in U + V &\Longleftrightarrow \mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k + \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_p\mathbf{v}_p \\ \mathbf{y} \in U \cap V &\Longleftrightarrow \mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k = \beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_p\mathbf{v}_p, \end{aligned}$$

para alguns $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$. Destas equivalências podemos concluir:

$$\begin{aligned} U + V &= \operatorname{Span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} \\ \mathbf{y} \in U \cap V &\Longrightarrow \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k - (\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_p\mathbf{v}_p) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Consideremos agora uma matriz A cujas colunas são os vectores da base de U juntamente com os da base de V:

$$A = \begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_k & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_p \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix}.$$

É óbvio que $EC(A) = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$, e portanto uma base para $U + V$ é uma base para o espaço das colunas de A. Logo, uma base para $U + V$ é constituída pelas colunas de A correspondentes às colunas com pivô de uma matriz em escada por linhas obtida de A por eliminação de Gauss. Assim,

$$\dim(U + V) = \dim EC(A) = \text{car}(A).$$

Além disso, por construção da matriz A, o número de colunas de A satisfaz as igualdades

$$\text{Número de colunas de } A = k + p = \dim U + \dim V.$$

Do Teorema da dimensão para matrizes (Teorema 3.6) e do Teorema 3.4, tem-se

$$\text{Número de colunas de } A = \dim EC(A) + \dim N(A). \tag{3.14}$$

Da Proposição 3.10 sabemos que

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

Tendo em conta que $\dim(U + V) = \dim EC(A)$ e que o número de colunas de A é igual a $\dim U + \dim V$, da igualdade (3.14) obtém-se

$$\underbrace{\dim U + \dim V}_{\text{número de colunas de } A} = \underbrace{\dim(U + V)}_{\dim EC(A)} + \dim(U \cap V) \iff \dim(U \cap V) = \dim N(A).$$

Nota 20. *Apesar de $U \cap V$ e $N(A)$ terem a mesma dimensão, estes subespaços não são em geral iguais. Note-se que $U \cap V \subset \mathbb{R}^n$ e $N(A) \subset \mathbb{R}^{k+p}$. Para determinar $U \cap V$ podemos usar a equação (3.13) como se exemplifica a seguir.*

Exemplo 3.21. Determinemos bases para $U + V$ e $U \cap V$, onde U e V são os subespaços

$$U = \text{Span}\,\{(0,0,1), (1,-1,2)\} \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = y - z\right\}.$$

Como se verifica facilmente, os vectores $\mathbf{u}_1 = (0,0,1)$ e $\mathbf{u}_2 = (1,-1,2)$ são linearmente independentes e portanto formam uma base para U. Como,

$$\begin{aligned} V &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = y - z\right\} = \{(y-z, y, z) : \, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0) + z(-1,0,1) : \, y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\,\{(1,1,0), (-1,0,1)\}, \end{aligned}$$

e os vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1,0,1)$ são linearmente independentes, estes vectores formam uma base de V.

Construa-se a matriz A cujas colunas são os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, isto é, as colunas de A são vectores de uma base de V e de uma base de U. Aplicando o método de eliminação de Gauss a esta matriz, obtém-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = R.$$

Assim, uma base de $EC(A)$, e portanto do subespaço $U+V$, é $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\}$. Logo, $\dim(U+V) = 3$. Além disso, podemos já concluir qual é a dimensão de $U \cap V$, uma vez que esta dimensão é igual à dimensão do núcleo de A. Do Teorema da dimensão para matrizes, tem-se $\dim N(A) = 4 - \operatorname{car} A = 4 - 3 = 1$. Determinemos agora uma base para $U \cap V$. Os vectores $\mathbf{y} \in U \cap V$ são vectores da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 \\ &\iff \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 - \alpha_1 \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \\ &\iff A\mathbf{w} = \mathbf{0} \iff R\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{com } \mathbf{w} = (\beta_1, \beta_2, -\alpha_1, -\alpha_2). \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema $R\mathbf{w} = \mathbf{0}$, obtém-se

$$\alpha_1 = -4\alpha_2, \quad \beta_2 = -2\alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2 + \alpha_2 = -\alpha_2.$$

Consequentemente, os vectores $\mathbf{y} \in U \cap V$ satisfazem:

$$\begin{aligned} &\mathbf{y} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \alpha_2(\mathbf{u}_2 - 4\mathbf{u}_1) = \alpha_2(1,-1,-2) \\ &\text{e} \\ &\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 = -\alpha_2(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) = \alpha_2(1,-1,-2). \end{aligned}$$

Logo, uma base para $U \cap V$ é $\{(1,-1,-2)\}$, confirmando-se assim que $\dim U \cap V = 1$. ♦

3.3.2 Característica e sistemas de equações lineares

Nesta secção reformulamos alguns resultados obtidos para espaços lineares em termos de sistemas de equações lineares. Neste contexto, a noção de característica de uma matriz é fundamental, sendo por isso importante entender este conceito sob diferentes pontos de vista. Historicamente, a caracterização da característica de uma matriz apresentada na Proposição 3.12 abaixo, foi a definição adoptada por G. Frobenius[2] em 1879. Esta proposição estabelece que a característica de uma matriz pode ser determinada com recurso ao cálculo de determinantes de submatrizes.

Começamos por estabelecer um lema cujo resultado será usado nas demonstrações das proposições 3.11 e 3.12.

Lema 3.1. Se A é uma matriz $p \times n$, e P e Q são matrizes invertíveis de ordem p e n respectivamente, satisfazendo a igualdade

$$PAQ = B,$$

então $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(B)$.

Demonstração. Comecemos por mostrar que dada uma matriz invertível P, as matrizes PA e A têm a mesma característica.

Do Teorema 1.4 (pág. 57) sabemos que qualquer matriz invertível é um produto de matrizes elementares, logo P é um produto de matrizes elementares. Como a multiplicação (à esquerda) de uma matriz por matrizes elementares não altera a sua característica, resulta que

$$\operatorname{car}(PA) = \operatorname{car}(A), \quad \text{para qualquer } P \text{ invertível.} \tag{3.15}$$

Uma vez que a transposição de matrizes não altera a característica (cf. Teorema 3.4-(d)), tem-se

$$\operatorname{car}(AQ) = \operatorname{car}(AQ)^T = \operatorname{car}(Q^T A^T) = \operatorname{car}(A^T) = \operatorname{car}(A), \tag{3.16}$$

onde na penúltima igualdade aplicámos (3.15). Por conseguinte, de (3.15) e (3.16), resulta

$$\operatorname{car}(B) = \operatorname{car}(PAQ) = \operatorname{car}(P(AQ)) = \operatorname{car}(AQ) = \operatorname{car}(A).$$

□

[2] Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917), matemático alemão com inúmeras contribuições na área de equações diferenciais. No âmbito da álgebra linear, refira-se que Frobenius apresentou a primeira demonstração do Teorema de Cayley-Hamilton que abordaremos no próximo capítulo.

Proposição 3.11. Forma normal de uma matriz de característica k

Seja A uma matriz de característica k. Existem matrizes invertíveis P e Q tais que

$$PAQ = \begin{bmatrix} M_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

onde $M_{k\times k}$ é uma submatriz de A de ordem k, invertível, e $\mathbf{0}$ designa matrizes nulas.

Demonstração. Seja A uma matriz do tipo $p \times n$. Sendo $\mathrm{car}(A) = k$, a matriz A tem k linhas e k colunas linearmente independentes. Podemos pois efectuar sucessivas trocas de linhas em A e colocar k linhas linearmente independentes nas primeiras k linhas de uma matriz. Isto corresponde a multiplicar A, à esquerda, por uma matriz invertível (igual ao produto de matrizes de permutação correspondentes às trocas de linhas efectuadas). Em seguida podemos usar operações elementares sobre a matriz construída para reduzir a linhas nulas todas as linhas abaixo da linha k. Designemos por P a matriz (invertível) igual ao produto de matrizes elementares correspondentes às operações elementares efectuadas (troca de linhas e redução de linhas a linhas nulas). Assim,

$$PA = \begin{bmatrix} U_{k\times n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = R, \tag{3.17}$$

onde a matriz $U_{k\times n}$, do tipo $k \times n$, possui k colunas linearmente independentes, uma vez que, pelo Lema 3.1, se tem $\mathrm{car}(R) = \mathrm{car}(PA) = \mathrm{car}(A) = k$.

A matriz $R^T = \begin{bmatrix} U^T_{k\times n} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{n\times k} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ tem portanto k linhas linearmente independentes. Assim, usando o mesmo argumento que anteriormente, podemos colocar k linhas linearmente independentes de W nas primeiras k linhas e depois reduzir a linhas nulas as linhas abaixo dessas primeiras k linhas. Tal corresponde à existência de uma matriz invertível N, verificando

$$NR^T = \begin{bmatrix} V_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Logo, como N é invertível, a igualdade anterior é equivalente a

$$R^T = N^{-1}\begin{bmatrix} V_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \iff R = \begin{bmatrix} V^T_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}(N^{-1})^T.$$

Da expressão (3.17), tem-se

$$PA = R = \begin{bmatrix} V^T_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}(N^{-1})^T \iff PAN^T = \begin{bmatrix} V^T_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

onde na equivalência anterior usámos o facto $(N^{-1})^T = (N^T)^{-1}$ (ver Exercício 2.5, pág. 103). A matriz $V^T_{k\times k}$ é uma submatriz de A uma vez que foi obtida de A suprimindo linhas e colunas (linearmente dependentes). Além disso, pelo Lema 3.1, tem-se $\mathrm{car}(V^T_{k\times k}) = \mathrm{car}(A) = k$, pelo que $V^T_{k\times k}$ é invertível (cf. Proposição 1.12, pág. 62). Tomando $Q = N^T$ e $M_{k\times k} = V^T_{k\times k}$, obtemos o resultado enunciado.

□

Nota 21. *Uma submatriz M como a do enunciado da proposição anterior pode obter-se do seguinte modo: (i) reduzir A a uma matriz em escada por linhas T; (ii) suprimir em T as linhas nulas e as colunas sem pivô, obtendo-se assim uma matriz quadrada; (iii) Tomar M igual à matriz que se obtém suprimindo em A as linhas e as colunas correspondentes às linhas e colunas que foram suprimidas em T.*

A proposição que enunciamos a seguir estabelece que a característica de uma matriz pode obter-se calculando determinantes de submatrizes.

Proposição 3.12. A característica de uma matriz A, do tipo $p \times n$, é igual à ordem da maior submatriz de A invertível.

Isto é, se $\mathrm{car}(A) = k$, então existe pelo menos uma submatriz de A invertível de ordem k e não existem outras submatrizes invertíveis de ordem superior.

Demonstração. Se $\mathrm{car}(A) = k$, pela Proposição 3.11 existem matrizes invertíveis P e Q tais que $PAQ = \begin{bmatrix} M_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, onde $M_{k\times k}$ é uma submatriz de A (de ordem k) invertível.

Falta mostrar que não existe nenhuma submatriz (quadrada) de A de ordem superior a k que seja invertível. Para tal, suponha-se por absurdo que W é uma submatriz de A invertível de ordem superior a k. Usando troca de linhas e de colunas, podemos determinar duas matrizes invertíveis P e Q, tais que o produto PAQ tem a forma

$$PAQ = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}.$$

Considere-se as matrizes em blocos $E = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -YW^{-1} & I \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} I & -W^{-1}X \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$ e $S = Z - YW^{-1}X$, onde I designa a matriz identidade. Calculando o produto $EPAQF$ de matrizes em blocos como se indica na Secção 1.6, tem-se

$$EPAQF = \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{bmatrix}.$$

Uma vez que as matrizes E, P, Q e F são invertíveis, EP e QF também o são. Logo, usando o Lema 3.1 resulta

$$\operatorname{car}(EPAQF) = \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}\left(\begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{bmatrix}\right) \geq \operatorname{car}(W) > k.$$

Tem-se portanto a contradição $\operatorname{car}(A) > k$. □

Exercício 3.3. Verifique que as matrizes E, F, Q e P na demonstração anterior possuem os tamanhos adequados para efectuar o produto $EPAQF$. Para tal, comece por fixar o tamanho de W. ▲

Exemplo 3.22. Usemos a proposição anterior para determinar a característica de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A) = 0$, a característica de A não é 3. Consideremos, por exemplo, a submatriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ que se obtém de A suprimindo a linha 2 e a coluna 3. A matriz M tem determinante igual a -2, e portanto é invertível. Logo, a característica de A é 2.

Na demonstração do Teorema 3.4 a submatriz M é obtida de A suprimindo colunas e linhas dependentes. Além disso, M tem linhas e colunas linearmente independentes (M é invertível). Podemos portanto concluir que os conjuntos $\{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_3\}$ e $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, onde $\mathbf{l}_i$ e $\mathbf{c}_i$ designam respectivamente a linha i e a coluna i de A, são linearmente independentes (como facilmente se confirma uma vez que são conjuntos de dois vectores não colineares). ♦

Sistemas de equações lineares

Reformulamos agora em termos de sistemas de equações lineares alguns dos resultados obtidos para espaços lineares.

Como é sabido (Proposição 1.3), tem-se a equivalência

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ é possível} \iff \mathbf{b} \text{ é combinação linear das colunas de } A.$$

Ou seja, um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível se e só se $\mathbf{b} \in EC(A)$.

Por outro lado, a Proposição 1.1 diz-nos que $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}([A \mid \mathbf{b}])$ se e só se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível. Podemos portanto enunciar o seguinte resultado.

Proposição 3.13. Para um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ são equivalentes as afirmações:

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível.

(b) $\mathbf{b}$ pertence ao espaço das colunas de A, isto é, $\mathbf{b} \in EC(A)$.

(c) A característica de A e da matriz aumentada $[A \,|\, \mathbf{b}]$ são iguais.

Proposição 3.14. Seja A uma matriz $p \times n$. As afirmações seguintes são equivalentes.

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ só admite a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(c) As colunas de A são vectores linearmente independentes.

(d) Qualquer que seja $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^p$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite no máximo uma solução (pode não admitir nenhuma).

Demonstração. As equivalências $(a) \iff (b) \iff (c)$ são o enunciado da Proposição 3.5.

Mostremos agora a equivalência $(a) \iff (d)$:

$(a) \Rightarrow (d)$: O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível ou impossível. Se é possível, pode ter uma ou mais soluções. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ soluções distintas do sistema. Temos de mostrar que se $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ e $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Mas

$$A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

ou seja, $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como, por hipótese, a única solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é a solução nula, resulta $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Assim, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite no máximo uma solução.

$(d) \Rightarrow (a)$: Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admite no máximo uma solução, qualquer que seja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, em particular $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite no máximo uma solução. Como $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é sempre solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, temos (a).

□

A proposição a seguir é uma consequência imediata de vários resultados anteriores, ficando por isso a sua demonstração como exercício.

Proposição 3.15. Seja A uma matriz $n \times n$. São equivalentes as afirmações seguintes.

(a) A é invertível.

(b) $\det(A) \neq 0$.

(c) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(d) As colunas de A formam uma base de $\mathbb{C}^n$.

(e) As linhas de A formam uma base de $\mathbb{C}^n$.

(f) Todo o $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ pertence a $EC(A)$.

Finalizamos esta secção com um resultado elementar mas de grande utilidade prática na resolução de equações lineares.

Teorema 3.7. A solução geral de um sistema não homogéneo, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, é a soma da solução geral do sistema homogéneo associado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, com uma solução particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ou seja, qualquer solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h,$$

onde $\mathbf{x}_h$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_p$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Demonstração. Seja $\mathbf{x}_p$ um vector tal que $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ Então, $\mathbf{x}$ é solução do sistema não homogéneo se e só se $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$ pertence ao núcleo de A, uma vez que $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Assim, as soluções do sistema não homogéneo são obtidas adicionando a $\mathbf{x}_p$ todas as soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

No exemplo que apresentamos a seguir ilustramos como a aplicação do método de eliminação de Gauss ao sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nos fornece a solução geral deste sistema na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, onde $\mathbf{x}_p$ e $\mathbf{x}_h$ designam, respectivamente, uma solução particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e a solução geral do sistema homogéneo associado.

Exemplo 3.23. Considere-se o sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

Geometricamente, temos dois planos em $\mathbb{R}^3$ que se intersectam segundo uma recta. Assim, uma solução particular do sistema é um ponto desta recta. Pretendemos escrever a solução geral do sistema como a soma de uma solução particular com a solução geral do sistema homogéneo associado.

Apliquemos o método de eliminação de Gauss para determinar a solução geral do sistema na forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] = R$$

A matriz em escada por linhas R diz-nos que o sistema tem uma variável livre que vamos escolher como sendo a variável associada à coluna que não possui pivô, ou seja, tomamos z como variável livre. A solução geral do sistema é então dada por

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = \left(\frac{4}{3} - z, \frac{1}{3} + z, z\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + z(-1, 1, 1). \tag{3.18}$$

É claro que uma solução particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser obtida da solução geral deste sistema fazendo, por exemplo, as variáveis livres iguais a zero. Ou seja, de (3.18), podemos tomar

$$\mathbf{x}_p = (4/3, 1/3, 0).$$

Além disso, o sistema homogéneo associado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tem solução geral igual à solução geral do sistema $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ que facilmente se verifica ser

$$\mathbf{x}_h = z(-1, 1, 1).$$

Assim, (3.18) exprime a solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ na forma pretendida.

O núcleo da matriz dos coeficientes do sistema (ou seja, a solução geral $\mathbf{x}_h$) é uma recta que passa pela origem e a solução geral do sistema não homogéneo (isto é, $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$) é uma recta que não passa pela origem. A recta correspondente à solução geral do sistema não homogéneo obtém-se adicionando o vector $\mathbf{x}_p$ à recta correspondente ao núcleo da matriz dos coeficientes. Uma ilustração deste resultado é apresentada na Figura 3.7. Saliente-se ainda que, enquanto o conjunto solução geral de um sistema homogéneo (isto é, o núcleo de uma matriz) é um subespaço linear de $\mathbb{C}^n$, o mesmo não acontece com a solução geral de um sistema não homogéneo (o vector nulo não pertence ao conjunto das soluções). ♦

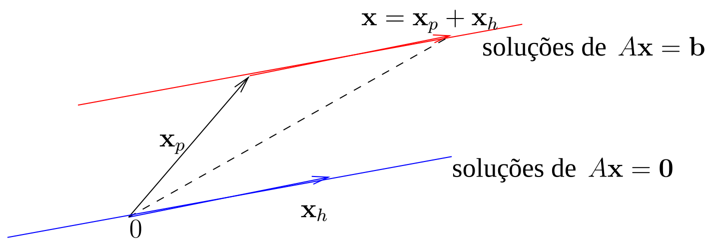

Figura 3.7: A solução geral de um sistema não homogéneo.

3.4 Matriz de mudança de base

Como vimos (pág. 138 e Teorema 3.1), existe uma correspondência biunívoca entre vectores de um espaço linear W e os respectivos vectores das coordenadas numa base ordenada fixada em W. Se fixarmos duas bases ordenadas distintas B e B' num espaço linear W, então qualquer vector $x \in W$ é representado por dois vectores distintos $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{x}_{B'}$. A questão que naturalmente se coloca é a de saber qual a relação entre os vectores das coordenadas $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{x}_{B'}$ que representam o mesmo vector em bases distintas. Trata-se pois de um problema de mudança de coordenadas, porventura já familiar ao leitor noutros contextos.

Como veremos, fixadas duas bases ordenadas num espaço linear, existe uma matriz invertível que relaciona as coordenadas de um qualquer vector numa das bases com as suas coordenadas na outra base. Ou seja, para todo o vector $x \in W$, existe uma matriz invertível M tal que $\mathbf{x}_{B'} = M\mathbf{x}_B$. A matriz M recebe a designação de matriz de mudança de base.

Sejam $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e B' duas bases ordenadas do espaço linear W e x um qualquer vector de W cujos vectores das coordenadas nas bases B e B' são $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{x}_{B'}$. Comecemos por mostrar que, se existe uma matriz invertível M que verifica

$$\mathbf{x}_{B'} = M\mathbf{x}_B, \quad \text{para todo } x \in W, \tag{3.19}$$

então esta matriz é única. Para tal considere-se matrizes invertíveis M e S que verificam (3.19), isto é, tais que $M\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_{B'} = S\mathbf{x}_B$ para todo $x \in W$. Em particular, para os vectores da base B, tem-se

$$S^{-1}M(\mathbf{v}_1)_B = (\mathbf{v}_1)_B,\ \ S^{-1}M(\mathbf{v}_2)_B = (\mathbf{v}_2)_B,\ \ldots, S^{-1}M(\mathbf{v}_n)_B = (\mathbf{v}_n)_B. \tag{3.20}$$

Os vectores das coordenadas de $v_1, v_2, \ldots v_n$ na base B são:

$$\begin{array}{lcl} v_1 = 1\times v_1 + 0\times v_2 + \cdots + 0\times v_n & \rightsquigarrow & (\mathbf{v}_1)_B = (1,0,0,\ldots,0) = \mathbf{e}_1 \\ v_2 = 0\times v_1 + 1\times v_2 + \cdots + 0\times v_n & \rightsquigarrow & (\mathbf{v}_2)_B = (0,1,0,\ldots,0) = \mathbf{e}_2 \\ \\ v_n = 0\times v_1 + 0\times v_2 + \cdots + 1\times v_n & \rightsquigarrow & (\mathbf{v}_n)_B = (0,0,0,\ldots,1) = \mathbf{e}_n. \end{array}$$

Logo, as relações (3.20) são equivalentes a

$$S^{-1}M\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1, \quad S^{-1}M\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \ldots \quad , S^{-1}M\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n.$$

Destas igualdades, e da Definição 1.12 (pág. 39) de produto de matrizes, resulta

$$S^{-1}MI_n = I_n,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Como $S^{-1}M = I_n$, multiplicando por S ambos os membros desta igualdade obtém-se $S = M$ conforme pretendido.

Determinemos agora a matriz M que satisfaz (3.19). Se M verifica (3.19) para todo $x \in W$, em particular satisfaz esta relação para os vectores que formam a base B, ou seja,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1)_{B'} &= M(\mathbf{v}_1)_B = M\mathbf{e}_1 = \text{coluna } 1 \text{ de } M \\ (\mathbf{v}_2)_{B'} &= M(\mathbf{v}_2)_B = M\mathbf{e}_2 = \text{coluna } 2 \text{ de } M \\ &\vdots \\ (\mathbf{v}_n)_{B'} &= M(\mathbf{v}_n)_B = M\mathbf{e}_n = \text{coluna } n \text{ de } M. \end{aligned}$$

Logo, M é a matriz cujas colunas são os vectores das coordenadas na base B' dos vectores da base B. Isto é,

$$M = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{v}_1)_{B'} & (\mathbf{v}_2)_{B'} & \cdots & (\mathbf{v}_n)_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Verifiquemos agora que M é invertível. A matriz M tem colunas linearmente independentes uma vez que, sendo os vectores $v_1, \ldots, v_n$ linearmente independentes (são vectores de uma base) os vectores $(\mathbf{v}_1)_{B'}, (\mathbf{v}_2)_{B'}, \ldots, (\mathbf{v}_n)_{B'}$ também o são (cf. Proposição 3.9). Por conseguinte, a Proposição 3.15 garante que M é invertível.

Definição 3.9. Matriz de mudança de base
Sejam B e B' duas bases ordenadas de um espaço linear W. Chama-se *matriz de mudança da base* B para a base B', à matriz quadrada invertível M, ou $M_{B' \leftarrow B}$, que verifica:

$$\mathbf{x}_{B'} = M\mathbf{x}_B \quad (\text{ou} \quad \mathbf{x}_{B'} = M_{B' \leftarrow B}\mathbf{x}_B), \quad \text{para todo } x \in W, \tag{3.22}$$

onde $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{x}_{B'}$ são os vectores das coordenadas de x, respectivamente, na base B e na base B'.

Como a matriz M, de mudança da base B para a base B', é invertível, multiplicando a igualdade $\mathbf{x}_{B'} = M\mathbf{x}_B$ por M^{-1} obtém-se $\mathbf{x}_B = M^{-1}\mathbf{x}_{B'}$. Logo, da definição de matriz de mudança de base, tem-se que M^{-1} é a matriz de mudança da base B' para a base B.

Enunciamos no teorema seguinte o que se provou relativamente à forma da matriz de mudança de base.

Teorema 3.8. Sejam $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e B' duas bases ordenadas de um espaço linear W. A matriz que efectua a mudança da base B para a base B' é a matriz cujas colunas são os vectores das coordenadas na base B' dos vectores que formam a base B (respeitando a ordem de B). Isto é,

$$M_{B' \leftarrow B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{v}_1)_{B'} & (\mathbf{v}_2)_{B'} & \cdots & (\mathbf{v}_n)_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

A matriz $M_{B' \leftarrow B}$ é invertível e a sua inversa é a matriz que efectua a mudança da base B' para a base B. Ou seja, para todo o vector $x \in W$ verifica-se

$$\mathbf{x}_{B'} = M_{B' \leftarrow B}\mathbf{x}_B \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}_B = M_{B' \leftarrow B}^{-1}\mathbf{x}_{B'} = M_{B \leftarrow B'}\mathbf{x}_{B'}.$$

Exemplo 3.24. Considerando em $\mathbb{R}^2$ as base ordenadas $B = ((1,2),(1,7))$ e $B' = ((0,2),(1,1))$, determinemos a matriz M de mudança da base B para a base B'.

Designemos os vectores da base B por $\mathbf{u} = (1,2)$ e $\mathbf{v} = (1,7)$. Calculemos os vectores das coordenadas na base B' dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}
(1,2) = \alpha(0,2) + \beta(1,1) = (\beta, 2\alpha+\beta) &\iff \beta = 1 \text{ e } 2\alpha+\beta = 2\\
&\iff \beta = 1 \text{ e } \alpha = 1/2 \iff \mathbf{u}_{B'} = (1/2, 1).\\
(1,7) = \alpha(0,2) + \beta(1,1) = (\beta, 2\alpha+\beta) &\iff \beta = 1 \text{ e } 2\alpha+\beta = 7\\
&\iff \beta = 1 \text{ e } \alpha = 3 \iff \mathbf{v}_{B'} = (3, 1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \mathbf{u}_{B'} & \mathbf{v}_{B'} \\ | & | \end{bmatrix}.$$

Usemos agora a matriz M para calcular as coordenadas do vector $\mathbf{x}$ sabendo que o vector das coordenadas de $\mathbf{x}$ na base B é $\mathbf{x}_B = (2/5, 3/5)$.

O vector das coordenadas de $\mathbf{x}$ na base B' é:

$$\mathbf{x}_{B'} = M\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{x} = 2(0,2) + (1,1) = (1,5).$$

♦

Exemplo 3.25. Determinemos a matriz M de mudança da base $B = (u_1, u_2, u_3)$ para a base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ sabendo que

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 - u_2 + u_3\\
v_2 &= u_2 - u_3\\
v_3 &= u_1 + u_3.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

A matriz M é a matriz que tem nas colunas os vectores das coordenadas $(\mathbf{u}_1)_{B'}$, $(\mathbf{u}_2)_{B'}$, e $(\mathbf{u}_3)_{B'}$. Calculemos estes vectores. Somando as duas primeiras equações de (3.23) obtemos $u_1 = v_1 + v_2$. Substituindo esta expressão de u_1 na última equação de (3.23) tem-se $u_3 = -v_1 - v_2 + v_3$. Finalmente, substituindo u_3 na segunda equação obtém-se $u_2 = v_3 - v_1$. Assim,

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 + v_2 && \rightsquigarrow \quad (\mathbf{u}_1)_{B'} = (1,1,0)\\
u_2 &= -v_1 + v_3 && \rightsquigarrow \quad (\mathbf{u}_2)_{B'} = (-1,0,1)\\
u_3 &= -v_1 - v_2 + v_3 && \rightsquigarrow \quad (\mathbf{u}_3)_{B'} = (-1,-1,1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$M_{B'\leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Refira-se que das expressões (3.23) é imediato determinar a matriz inversa de $M_{B'\leftarrow B}$, uma vez que $M^{-1}_{B'\leftarrow B}$ é a matriz que efectua a mudança da base B' para a base B. Nomeadamente,

$$M_{B\leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ (\mathbf{v}_1)_B & (\mathbf{v}_2)_B & (\mathbf{v}_3)_B \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

♦

3.5 Exemplos de espaços lineares

Finalizamos este capítulo capresentando alguns exemplos de conjuntos munidos de operações de adição e multiplicação por escalares que possuem a estrutura de espaço linear e outros que não possuem essa estrutura para as operações aí definidas. Aproveitamos estes exemplos para propor algumas resoluções de exercícios de aplicação dos conceitos estudados neste capítulo.

1. Como vimos na página 113 e no Exemplo 3.15 (pág. 133), o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n\}$ munido das operações usuais de adição de vectores e multiplicação por escalares reais *é um espaço linear real* de dimensão n. A base canónica de $\mathbb{R}^n$ é dada por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$, com

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1). \end{aligned}$$

   Considere-se o subconjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, com

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 1),\ \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, -2),\ \mathbf{u}_3 = (3, 1, 2, -3),\ \mathbf{u}_4 = (5, 1, 3, -4).$$

   Pretendemos descrever o subespaço gerado por S através de equações. Para tal, consideremos a matriz A cujas colunas são os vectores de S. Ora, o subespaço $V = \operatorname{Span} S$ é o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, isto é, o conjunto de todos os vectores $\mathbf{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ para os quais o sistema $A\mathbf{u} = \mathbf{x}$ é possível. Equivalentemente, V é o conjunto de todos os vectores $\mathbf{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ para os quais se tem $\operatorname{car}[A|\mathbf{x}] = \operatorname{car}[A]$. Verifiquemos agora que a igualdade $\operatorname{car}[A|\mathbf{x}] = \operatorname{car}[A]$ nos fornece equações (cartesianas) para $V = \operatorname{Span} S$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada $[A|\mathbf{x}]$ tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & x \\ -1 & 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 2 & 3 & z \\ 1 & -2 & -3 & -4 & w \end{array}\right] \xrightarrow[L_2+L_1]{L_4-L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & x \\ 0 & 2 & 4 & 6 & x+y \\ 0 & 1 & 2 & 3 & z \\ 0 & -3 & -6 & -9 & w-x \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3-1/2L_2]{L_4+3/2L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 & x \\ 0 & 2 & 4 & 6 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-\frac{x}{2}-\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-\frac{x}{2}-\frac{3y}{2} \end{array}\right].$$

Assim, $\operatorname{car}[A|\mathbf{x}] = \operatorname{car}[A]$ se e só se

$$\left\{\begin{array}{l} z-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0 \\ w-\frac{x}{2}-\frac{3y}{2}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ x-3y-2w=0. \end{array}\right.$$

Podemos concluir que o subespaço $V = \operatorname{Span} S$ tem dimensão dois (o espaço das colunas de A tem dimensão 2) e é definido pelas duas equações (cartesianas) acima.

2. **Conjunto $\mathbb{C}^n$:**

   Na página 113 definimos $\mathbb{C}^n$ como o conjunto dos n-uplos de números complexos e munimos este conjunto de operações de adição e multiplicação por escalares definidas em (3.2). Vimos também que $\mathbb{C}^n$ munido destas operações é um espaço linear complexo. No entanto, $\mathbb{C}^n$ pode ser igualmente encarado como espaço linear real, como veremos a seguir para o caso $n = 2$ (o caso geral é inteiramente análogo).

   Consideremos
   $$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\},$$
   com as operações
   $$(z_1, z_2) + (w_1, w_2) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \qquad \alpha \cdot (z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2),$$

para $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}^2$ é fechado para a multiplicação por escalares complexos (ao contrário do que acontece com $\mathbb{R}^2$).

Seja $(z_1, z_2) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$ um qualquer vector de $\mathbb{C}^2$. O vector $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ pode ser escrito nas formas:

$$(z_1, z_2) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1)(1, 0) + (a_2 + ib_2)(0, 1) \tag{3.24}$$

ou

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) &= (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \\ &= a_1(1, 0) + b_1(i, 0) + a_2(0, 1) + b_2(0, i). \end{aligned} \tag{3.25}$$

No primeiro caso, (z_1, z_2) está escrito como combinação linear de $(1, 0)$ e $(0, 1)$ com coeficientes complexos, e no segundo caso está escrito como combinação linear com coeficientes reais de $(1, 0), (i, 0), (0, 1)$ e $(0, i)$. As igualdades (3.24) e (3.25) dizem-nos que o conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ gera $\mathbb{C}^2$ enquanto espaço linear complexo, e o conjunto

$$\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\},$$

gera $\mathbb{C}^2$ como espaço linear real. Expressamos este facto por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &= \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\} \\ \mathbb{C}^2 &= \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \{(1, 0), (0, 1)\}. \end{aligned}$$

Para mostrar que estes conjuntos formam uma base, resta verificar que são linearmente independentes. Usando as igualdades (3.24) e (3.25) com o membro do lado esquerdo igual a $\mathbf{0} = (0 + i0, 0 + i0)$ temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} (0 + i0, 0 + i0) &= (a_1 + ib_1)(1, 0) + (a_2 + ib_2)(0, 1) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \\ &\iff a_1 + ib_1 = 0 + i0 \text{ e } a_2 + ib_2 = 0 + i0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (0 + i0, 0 + i0) &= a_1(1, 0) + b_1(i, 0) + a_2(0, 1) + b_2(0, i) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \\ &\iff a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0. \end{aligned}$$

Logo, os conjuntos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ são linearmente independentes no contexto correspondente. Assim,

- Uma base do espaço linear *complexo* $\mathbb{C}^2$ é $\{(1,0),(0,1)\}$, e a dimensão de $\mathbb{C}^2$ como espaço linear complexo é 2.
- Uma base do espaço linear *real* $\mathbb{C}^2$ é $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$, e a dimensão de $\mathbb{C}^2$ como espaço linear real é 4.

Analogamente, considerando $\mathbb{C}^n$ um espaço linear real, a sua dimensão é $2n$ e considerando $\mathbb{C}^n$ um espaço linear complexo a sua dimensão é igual a n.

Consideremos agora o seguinte subconjunto do espaço linear complexo $\mathbb{C}^2$

$$S = \{(1+i, 2i), (2, 2+2i)\}.$$

Uma vez que a dimensão de $\mathbb{C}^2$ é igual a 2, o subconjunto S será uma base se os vectores de S forem linearmente independentes (ver Teorema 3.3). Verifiquemos se S é ou não linearmente independente. Usando a definição de independência linear tem-se que $\alpha_1(1+i,2i)+\alpha_2(2,2+2i) = (0+0i, 0+0i)$, para escalares $\alpha_1 = a_1+ib_1$ e $\alpha_2 = a_2+ib_2$, é equivalente a

$$(a_1+ib_1)(1+i,2i)+(a_2+ib_2)(2,2+2i) = (0+0i,0+0i) \iff$$

$$((a_1-b_1+2a_2)+i(a_1+b_1+2b_2)\,,\,(-2b_1+2a_2-2b_2)+i(2a_1+2b_2+2a_2)) = (0+0i,0+0i)$$

$$\iff \begin{cases} a_1-b_1+2a_2 & = 0 \\ a_1+b_1+2b_2 & = 0 \\ -2b_1+2a_2-2b_2 & = 0 \\ 2a_1+2b_2+2a_2 & = 0. \end{cases}$$

Nas equivalências anteriores usámos as operações de adição e multiplicação de números complexos e as suas propriedades, bem como o facto de dois complexos serem iguais se as respectivas partes reais e imaginárias forem iguais. Se necessitar de rever estas operações pode consultar o Apêndice A. O sistema anterior admite a solução $(a_1,b_1,a_2,b_2) = (1,-1,-1,0)$, ou seja, a solução $\alpha_1 = 1-i$ e $\alpha_2 = -1$, pelo que S é linearmente dependente. Logo, S não é uma base do espaço linear complexo $\mathbb{C}^2$.

3. **Conjunto das matrizes reais do tipo** $p \times n$

   Seja $\mathcal{M}_{p\times n}$ o conjunto de todas as matrizes reais $p\times n$ munido das operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por um número real definidas pelas expressões (1.8) e (1.9) (pág. 38). Como vimos no final da Secção 3.1, as propriedades destas operações garantem que $\mathcal{M}_{p\times n}$ é um espaço linear real. Relembremos que o vector zero de $\mathcal{M}_{p\times n}$ é a matriz nula.

Consideremos o espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Qualquer matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ pode escrever-se como combinação linear de 4 matrizes do tipo 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, o conjunto ordenado $B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente uma vez que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Logo, B é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e portanto $\dim \mathcal{M}_{2\times 2} = 4$. A base B é designada por base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Como B é uma base, qualquer matriz A de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos vectores de B. Por exemplo, o vector das coordenadas da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ na base ordenada B é $\mathbf{A}_B = (1, 5, 4, 3) \in \mathbb{R}^4$.

4. **Conjunto das matrizes simétricas**

   Consideremos agora o conjunto $Sym(2)$ das matrizes reais e simétricas 2×2, isto é, matrizes A tais que $A^T = A$. Este conjunto é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ já que a soma de duas matrizes simétricas ainda é uma matriz simétrica, e a multiplicação de uma matriz simétrica por um escalar real também é simétrica. Ou seja, $Sym(2)$ é fechado para a adição e multiplicação por escalares reais. Logo, $Sym(2)$ é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e portanto também é um espaço linear (ver Definição 3.3 e Nota 15).

Qualquer matriz simétrica, do tipo $2{\times}2$, pode escrever-se como uma combinação linear de três matrizes simétricas:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = aS_1 + bS_2 + cS_3.$$

As matrizes simétricas S_1, S_2, S_3 são linearmente independentes como se verifica facilmente usando a definição de independência linear. Portanto, as matrizes S_1, S_2 e S_3 formam uma base do espaço linear das matrizes reais e simétricas do tipo 2×2. Assim, $Sym(2)$ é um espaço linear de dimensão 3.

Considerando a base ordenada $B = (S_1, S_2, S_3)$, o vector das coordenadas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \in Sym(2)$ na base B é o vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{A}_B = (2, 5, 3).$$

5. **Conjunto das matrizes anti-simétricas**

   Considere-se o conjunto das matrizes reais anti-simétricas do tipo 2×2, ou seja, matrizes que satisfazem a igualdade $A = -A^T$. Este conjunto é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ uma vez que é fechado para a adição e multiplicação por escalares reais. As matrizes reais anti-simétricas de segunda ordem são matrizes da forma

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   Estas matrizes podem escrever-se na forma

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

   pelo que a matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ gera o espaço linear das matrizes anti-simétricas de segunda ordem. Como um conjunto com um único vector não nulo é necessariamente linearmente independente, o conjunto $\{C\}$ é uma base do espaço linear das matrizes anti-simétricas de segunda ordem. Portanto, o espaço linear das matrizes anti-simétricas de ordem 2 tem dimensão é igual a 1.

6. Como vimos (Proposição 3.2), o núcleo de uma matriz (ou seja o conjunto das soluções de um sistema homogéneo) é um espaço linear. Contudo, o conjunto S das soluções de um sistema não homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, não é um espaço linear. De facto, se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tem-se $A\mathbf{u}+A\mathbf{v} = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 2\mathbf{b}$, e portanto $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ não é solução do sistema. Assim, S não é fechado para a adição (nem para a multiplicação por escalares).

7. Seja P o conjunto dos polinómios de grau $n\,(n \geq 1)$ de coeficientes reais, munido das operações usuais de adição de polinómios e multiplicação de um polinómio por um número real.

   Este conjunto não é um espaço linear visto não ser fechado para a adição. Por exemplo, para $p_1(t) = t^n \in P$ e $p_2(t) = -t^n \in P$, tem-se $p_1 + p_2 = 0 \notin P$ (0 denota o polinómio constante igual a zero, que não tem grau ≥ 1).

8. **Conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n**

   O conjunto P_n dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a n, munido das operações usuais de adição de polinómios e de multiplicação de um polinómio por um número real, é um espaço linear real.

   É óbvio que qualquer polinómio $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n$ de P_n se escreve como combinação linear dos monómios do conjunto $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Este conjunto é linearmente independente já que, a equação

   $$\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots \alpha_n t^n = 0 \times 1 + 0 \times t + \cdots + 0 \times t^n, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

   é equivalente a $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. A base $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ é designada por *base canónica* de P_n. Assim, $\dim P_n = n + 1$.

   Consideremos o polinómio $p(t) = 3t^2 - t^3$ do espaço linear P_3 (dos polinónios de grau menor ou igual a 3). O vector das coordenadas de p na base ordenada $BC = (1, t, t^2, t^3)$ é $\mathbf{p}_{BC} = (0, 0, 3, -1)$, já que

   $$p(t) = 0 \times 1 + 0 \times t + 3t^2 - t^3.$$

   Consideremos agora o seguinte subconjunto S de P_3

   $$S = \left\{1 + t^2 + 4t^3, -1 + t + 2t^3, t + t^2 + 6t^3, 2 + 3t + 2t^2 + t^3\right\}.$$

   Pretendemos saber se este conjunto de quatro polinómios é ou não uma base de P_3. Para tal, vamos fixar a base canónica em P_3 e usar a correspondência biunívoca, estabelecida na página 138, entre vectores de P_3 e vectores de $\mathbb{R}^4$. Os vectores das coordenadas, na base (canónica) BC de P_3, dos vectores de S são:

$$\begin{array}{lll}
p_1(t) = 1 + t^2 + 4t^3 & \rightsquigarrow & (\mathbf{p_1})_{BC} = (1, 0, 1, 4) \\
p_2(t) = -1 + t + 2t^3 & \rightsquigarrow & (\mathbf{p_2})_{BC} = (-1, 1, 0, 2) \\
p_3(t) = t + t^2 + 6t^3 & \rightsquigarrow & (\mathbf{p_3})_{BC} = (0, 1, 1, 6) \\
p_4(t) = 2 + 3t + 2t^2 + t^3 & \rightsquigarrow & (\mathbf{p_4})_{BC} = (2, 3, 2, 1).
\end{array}$$

Da Proposição 3.9 sabemos que os vectores de S são linearmente independentes se e só se os respectivos vectores das coordenadas são linearmente independentes. Colocando os vectores das coordenadas numa matriz, por exemplo, por linhas, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Como a terceira linha de A é a soma das duas primeiras, as linhas de A são linearmente dependentes, e por conseguinte o conjunto S é linearmente dependente. Assim, S não é uma base de P_3.

Determinamos agora um subconjunto de S, com o maior número possível de elementos, que seja linearmente independente. Conforme segue da demonstração da Proposição 3.12, basta determinar uma submatriz P de A, invertível, e de ordem igual à característica de A. As linhas de A correspondentes às linhas de P são linearmente independentes (ver Nota 21, pág. 150).

Considere-se a submatriz P que se obtém de A suprimindo a primeira linha e a primeira coluna de A. A matriz P tem determinante diferente de zero ($\det P = -13$) e portanto a característica de A é 3, conforme decorre da Proposição 3.12. Além disso, a segunda, terceira e quarta linhas de A são linearmente independentes, e portanto o subconjunto $S' = \{p_2, p_3, p_4\} \subset S$ é linearmente independente.

Alternativamente poderíamos ter usado o método de eliminação de Gauss para determinar uma base para o espaço das linhas da matriz A, e os polinómios correspondentes aos vectores dessa base formariam o subconjunto S' pretendido.

9. Seja S o conjunto dos polinómios p de grau menor ou igual a n tais que $p(0) = 1$. Ou seja,

$$S = \{p \in P_n : \; p(0) = 1\} = \{1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n\}.$$

   S não é um subespaço de P_n uma vez que o vector zero de P_n não pertence a S, isto é, o polinómio constante igual a zero não pertence a S.

10. **Conjunto das funções reais de variável real**

    O conjunto $\mathcal{F}$ de todas as funções reais de variável real munido das operações

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{F},$$

    é um espaço linear real. É fácil verificar que as operações acima satisfazem as propriedades da definição de espaço linear, e que o elemento neutro da adição é a função (constante) que toma o valor zero em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

    Considere-se em $\mathcal{F}$ o subconjunto $S = \{\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, \cos(2x)\}$. O conjunto S não é linearmente independente, uma vez que $\cos(2x)$ é uma combinação linear de $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$ (relembre que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$).