Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 20 – Equações de Maxwell e ondas electromagnéticas

Equações de Maxwell e Teorema de Poynting

- A corrente de deslocamento
- As equações de Maxwell
- Teorema e vector de Poynting

Popovic & Popovic Cap. 19

Serway 30.7

Equações de Maxwell

Juntando tudo o que aprendemos até agora:

Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Lei de Gauss (c. magnético)

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\ dS = 0$$

CAMPO ELÉCTRICO **CAMPO MAGNÉTICO**

Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

Lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{in}$$

Equações de Maxwell no vácuo (forma integral)

Equações de Maxwell

Juntando tudo o que aprendemos até agora:

Lei de Gauss	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot B = 0$	**Lei de Gauss (c. magnético)**
	CAMPO ELÉCTRICO	**CAMPO MAGNÉTICO**	
Lei de Faraday	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	**Lei de Ampère**

Equações de Maxwell no vácuo (forma diferencial)

Equações de Maxwell

J. C. Maxwell demonstrou (1865) que os fenómenos eléctricos, magnéticos e luminosos são descritos pelo mesmo **conjunto de equações**.
É um dos resultados mais importantes da física e que gerou mais aplicações, como a descoberta das ondas de rádio por H. Hertz.

Descobriu ainda a última peça do puzzle: um termo novo na Lei de Ampère que relaciona a criação de campo magnético com a presença de um campo eléctrico que varia no tempo.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{in} + \cdots$$

Lei de Ampère revisitada

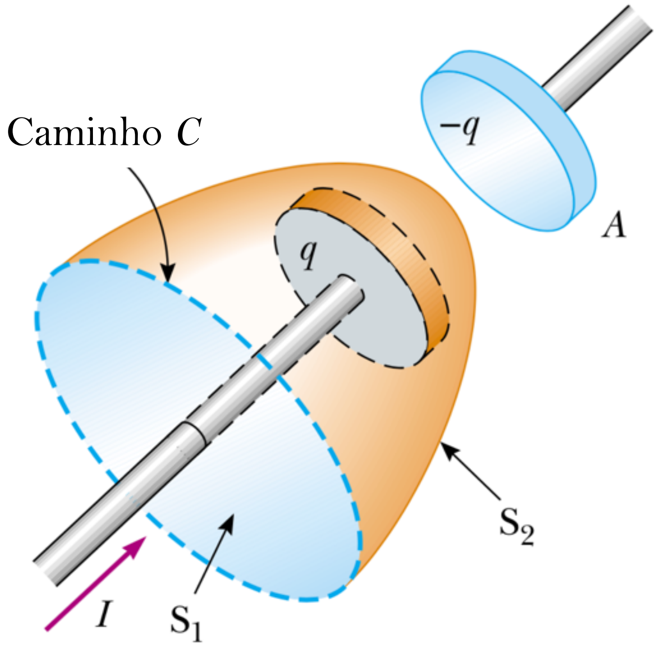
Lei de Ampère: o integral de linha do campo magnético $\vec{B}$ num caminho fechado C é igual a $\mu_0 I_{in}$, em que I_{in} é a corrente total que atravessa **qualquer superfície** delimitada por C:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{in}$$

No condensador da figura, o caminho C delimita S_1 e S_2 :

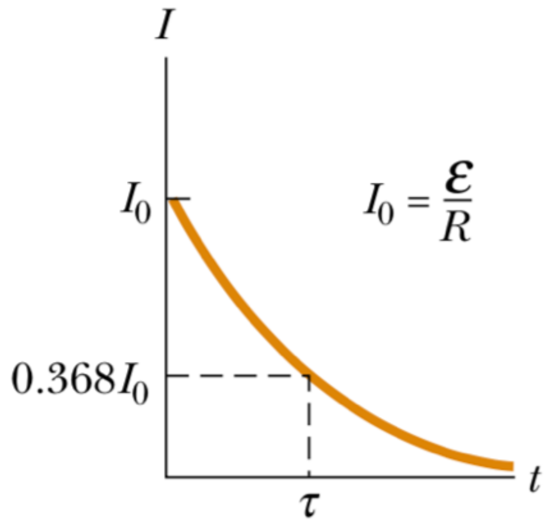
- Superfície S_1: $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$
- Superfície S_2: $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = 0$

Resultados diferentes?!



Lei de Ampère revisitada

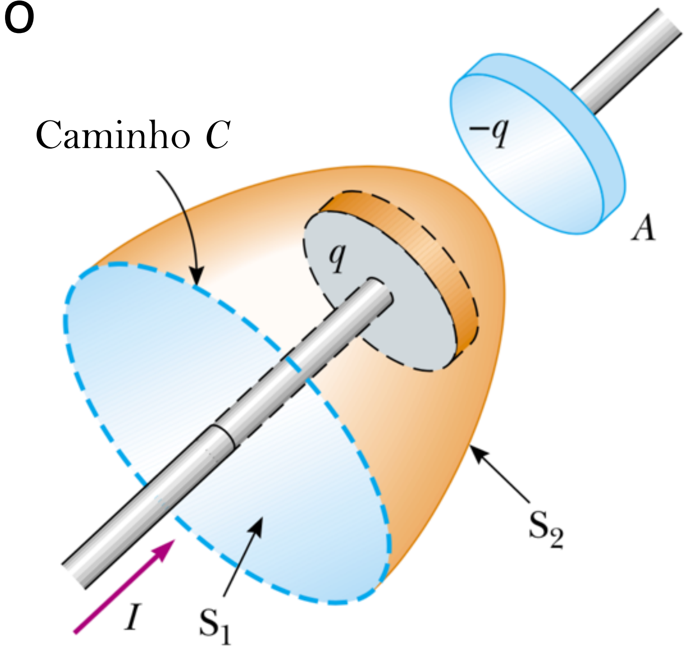
- Só passa corrente I enquanto o condensador está a carregar, e é uma corrente que varia no tempo (cf. circuito RC)
- A acumulação de carga na placa positiva cria um campo eléctrico crescente $\vec{E}$
- Esse campo **desloca** as cargas na outra placa, actuando como uma corrente "à distância"



$$\boxed{I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}}$$ **Corrente de deslocamento** [A]

Assim, a **Lei de Ampère-Maxwell** é

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$$



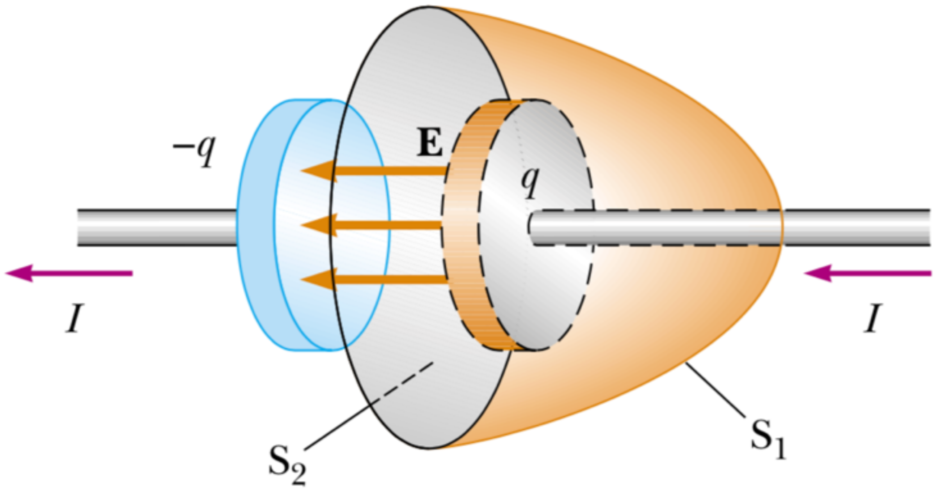
Lei de Ampère revisitada

Verificação

- Campo eléctrico entre as placas: $E = \sigma/\epsilon_0$
- Fluxo eléctrico entre as placas: $\Phi_e = EA = \sigma A/\epsilon_0 = Q/\epsilon_0$
- Corrente de deslocamento:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(Q/\epsilon_0)}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I$$

em que $I = I(t)$ é a corrente que carrega o condensador. Assim:



- Superfície S_1: $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$
- Superfície S_2: $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \mu_0 I_d = \mu_0 I$

Equações de Maxwell

Agora completetas, e com interpretação física

O campo eléctrico é criado por cargas...

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\; dS = 0$$

Não existem monopolos magnéticos

CAMPO ELÉCTRICO

CAMPO MAGNÉTICO

... ou por campos magnéticos variáveis.

$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{in} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}$$

O campo magnético é criado por correntes ou por campos eléctricos variáveis

Equações de Maxwell no vácuo (forma integral)

Densidade de corrente de deslocamento

Lei de conservação de carga: $$\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\int_v \rho dv$$

Lei de Gauss generalizada: $$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = \int_v \rho_{in} dv$$

Sup. 2 e 4: $J_{in} = J_{out}$

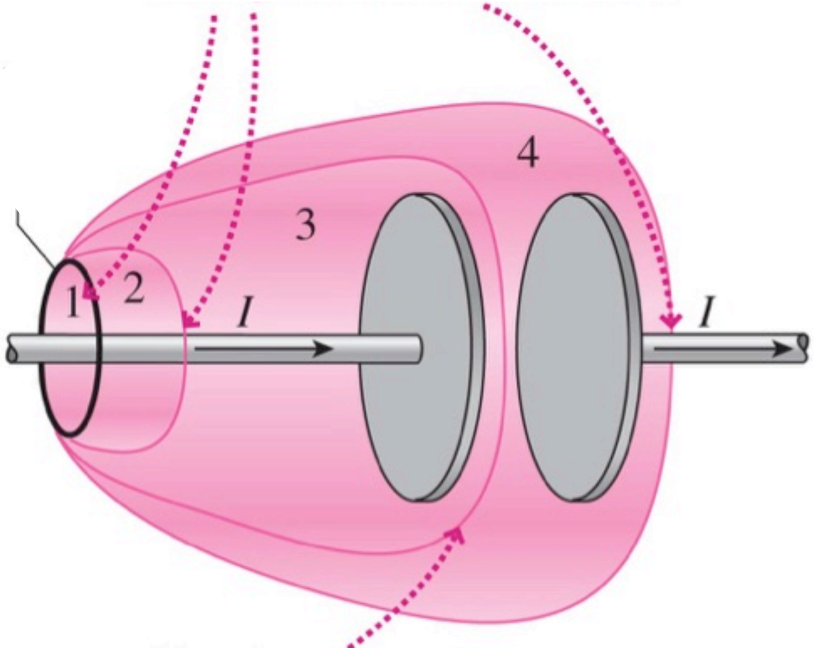
Sup. 3: $\oint_S \vec{J}_{in}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\int_v \rho_{in} dv$

Juntando as duas leis acima:

$$\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS \rightarrow \boxed{\oint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}\,dS = 0}$$

Densidade de corrente de deslocamento [A/m^2]

Superfícies fechadas 2 e 4: passa corrente I



Superfície fechada 3: entra corrente, mas não sai

Qual o significado físico da densidade de corrente de deslocamento?

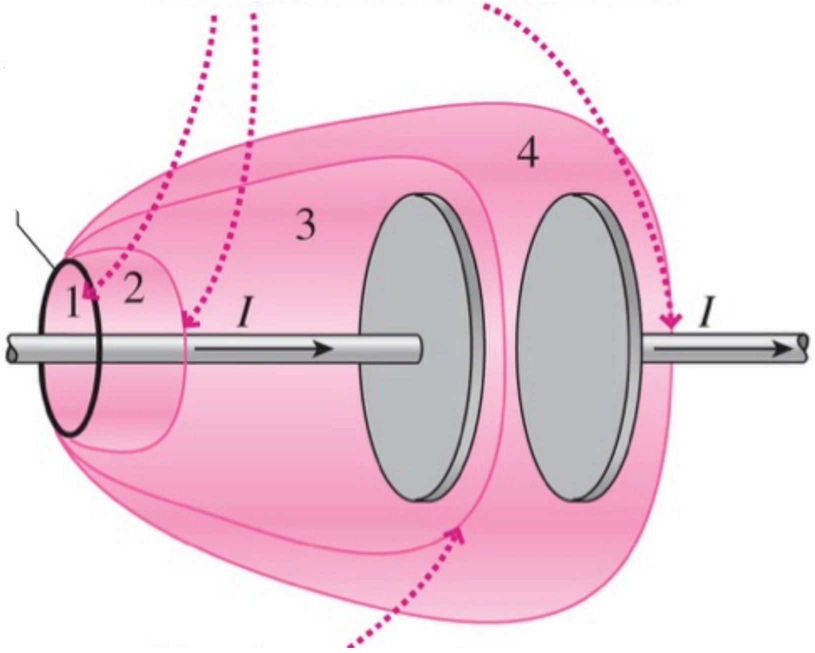
Caso estacionário: $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS = 0$

Todas as correntes *estacionárias* que entram em S, saem. A corrente total não varia e as linhas de corrente são fechadas.

Caso variável: $\oint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \vec{n}\, dS = 0$

A **corrente total** (condução + deslocamento) que entra em S, sai. A corrente total não varia e as linhas de corrente são fechadas.

Interpretação de Maxwell: para campos variáveis, o campo magnético pode ser criado por **correntes de condução** ou por **correntes de deslocamento**.



Equações de Maxwell

Agora completas, e com interpretação física

O campo eléctrico é criado por cargas...	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot B = 0$	**Não existem monopolos magnéticos**
	CAMPO ELÉCTRICO	**CAMPO MAGNÉTICO**	
... ou por campos magnéticos variáveis.	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \right)$	**O campo magnético é criado por correntes ou por campos eléctricos variáveis**

Equações de Maxwell no vácuo (forma diferencial)

Equações de Maxwell – caso geral

Lei de Gauss generalizada

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = \int_v \rho dv$$

Lei de Gauss (c. magnético)

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\;dS = 0$$

CAMPO ELÉCTRICO **CAMPO MAGNÉTICO**

Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \;= -\int_S \frac{\partial B}{\partial t}dS$$

Lei de Maxwell-Ampère generalizada

$$\oint_C \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl} \;= \int_S \left(\vec{J}+\frac{\partial D}{\partial t}\right)dS$$

$$\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\int_v \rho dv$$

Equações de Maxwell num meio (forma integral)

Equações de Maxwell – caso geral

Lei de Gauss generalizada

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

Lei de Gauss (c. magnético)

CAMPO ELÉCTRICO

CAMPO MAGNÉTICO

Lei de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Lei de Maxwell-Ampère generalizada

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Equações de Maxwell num meio (forma diferencial)

Energia no campo electromagnético

As eqs. Maxwell são o ponto de partida geral para a derivação das propriedades do campo eléctrico + campo magnético = **campo electromagnético (e.m.)**

Exemplo: energia no campo e.m.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Derivação detalhada:
Popovic & Popovic pág. 370

Multiplicando por $\vec{H}$ e $-\vec{E}$ e somando:

$$\vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right) - \vec{E} \cdot \vec{J} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon E^2\right)$$

Teorema de Poynting

O resultado final da derivação anterior pode ser escrito na forma da taxa de variação temporal de densidades de energia [J/m^{3}s]:

$$\vec{E}_i \cdot \vec{J} = \frac{J^2}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2 + \frac{1}{2}\epsilon E^2\right) + \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right)$$

Derivação detalhada:
Popovic & Popovic pág. 370

Integrando num dado volume V e usando o teo. divergência

$$\boxed{\int_V \vec{E}_i \cdot \vec{J}\, dv} = \boxed{\int_V \frac{J^2}{\sigma}\, dv} + \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mu H^2 + \frac{1}{2}\epsilon E^2\right) dv} + \boxed{\int_S \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) \cdot \vec{n}\, dS}$$

Potência criada pelas fontes (baterias) em V	**Potência dissipada** em V	Taxa de variação da **energia eléctrica e magnética** em V	Potência trocada **através da superfície** de V

Teorema de Poynting

O termo final do Teorema de Poynting representa a taxa a que é trocada energia através da superfície fechada que rodeia o volume V e tem forma de um **fluxo**:

$$\Phi = \int_S \vec{S} \cdot \vec{n}\, dS, \qquad \boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}} \quad [\,\mathrm{W/m^2}\,]$$

O **vector de Poynting** $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ aponta no sentido de transferência de energia.

O teorema de Poynting diz que a energia e.m. gerada num volume pode variar

- Se for **dissipada** (resistência / efeito de Joule)
- Se for **armazenada** no campo eléctrico (condensador) ou magnético (indutor)
- Se **entrar ou sair** através da superfície (vector de Poynting)