Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 12 – Extremos relativos

Parte I – Exercícios Propostos

I.1 Seja $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+x^2y-\frac{3y^2}{2}-9x+1$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

b) Determine os pontos de estacionaridade de f.

c) Calcule a matriz Hessiana de f.

d) Classifique os pontos obtidos na alínea (b) quanto à sua natureza.

I.2 Determine e classifique os extremos relativos das seguintes funções:

a) $f(x,y)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$

b) $f(x,y)=x^2+y^4x$

c) $f(x,y)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$

Parte II – Exercícios Resolvidos

II. 1 Determine e classifique os extremos relativos das seguintes funções
a) $f(x,y)=x^2+y^2+4x-2y+5$

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4=0\\ 2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}$$

O ponto de estacionariedade é $(-2,1)$.

Determinemos a matriz hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Classifiquemos o ponto de estacionariedade $(-2,1)$:

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-2,1)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-2,1)$ é:

$$D_1=2>0$$
$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-(0\cdot 0)=4>0.$$

Como $D_1>0$ e $D_2>0$, então a forma quadrática é definida positiva e $(-2,1)$ é um ponto de mínimo relativo.

b) $f(x,y)=xye^{x-y}$

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(xy)'_x e^{x-y}+xy\left(e^{x-y}\right)'_x=0\\ (xy)'_y e^{x-y}+xy\left(e^{x-y}\right)'_y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ye^{x-y}+xye^{x-y}=0\\ xe^{x-y}-xye^{x-y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ye^{x-y}(1+x)=0\\ xe^{x-y}(1-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ye^{x-y}=0\vee 1+x=0\\ xe^{x-y}=0\vee 1-y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ye^{x-y}=0\vee x=-1\\ xe^{x-y}=0\vee y=1\end{cases}\underset{e^{x-y}>0,\forall x,y\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=0\vee x=-1\\ x=0\vee y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são $(0,0)$ e $(-1,1)$.

Determinemos a matriz hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ye^{x-y}(1+x)+ye^{x-y} & e^{x-y}(1+x)-ye^{x-y}(1+x)\\ e^{x-y}(1-y)+xe^{x-y}(1-y) & -xe^{x-y}(1-y)-xe^{x-y}\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix} ye^{x-y}(x+2) & e^{x-y}(1+x-y-yx)\\ e^{x-y}(1-y)(1+x) & xe^{x-y}(y-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ye^{x-y}(x+2) & e^{x-y}(1+x-y-yx)\\ e^{x-y}(1+x-y-yx) & xe^{x-y}(y-2)\end{bmatrix}$$

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto$(0,0)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,0)=\begin{bmatrix} 0e^{0-0}(0+2) & e^{0-0}(1+0-0-0\cdot 0)\\ e^{0-0}(1+0-0-0\cdot 0) & 0e^{0-0}(0-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,0)$ é:

$$D_1=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-(1\cdot 1)=-1<0.$$

Como $D_2<0,$ então a forma quadrática é indefinida e $(0,0)$ é um ponto sela.

- ponto$(-1,1)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-1,1)=\begin{bmatrix} 1e^{-1-1}(-1+2) & e^{-1-1}(1+(-1)-1-1(-1))\\ e^{-1-1}(1+(-1)-1-1(-1)) & -1e^{-1-1}(1-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-2} & 0\\ 0 & e^{-2}\end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-1,1)$ é:

$$D_1=e^{-2}>0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}e^{-2} & 0\\ 0 & e^{-2}\end{vmatrix}=e^{-2}\cdot(e^{-2})-(0\cdot 0)=e^{-4}>0.$$

Como $D_1>0$ e $D_2>0,$ então a forma quadrática é definida positiva e $(-1,1)$ é um ponto de mínimo relativo.

c) $f(x,y) = xy(x-1)$

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)'_x (x-1) + xy(x-1)'_x = 0 \\ (xy)'_y (x-1) + xy(x-1)'_y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(x-1) + xy \cdot 1 = 0 \\ x(x-1) + xy \cdot 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x-1) + xy = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx - y + xy = 0 \\ x = 0 \vee x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - y = 0 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 0 \cdot y - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2 \cdot 1 \cdot y - y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são $(0,0)$ e $(1,0)$.

Determinemos a matriz hessiana de f:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto$(0,0)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 - 1 \\ 2 \cdot 0 - 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,0)$ é:

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (-1 \cdot (-1)) = -1 < 0.$$

Como $D_2 < 0,$ então a forma quadrática é indefinida e $(0,0)$ é um ponto sela.

- ponto$(1,0)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(1,0) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 - 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(1,0)$ é:

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - (1 \cdot 1) = -1 < 0.$$

Como $D_2 < 0,$ então a forma quadrática é indefinida e $(1,0)$ é um ponto sela.

d) $f(x,y)=x^3+6x^2-3y^2+y^3$

Resolução:

Calculemos os pontos de estacionariedade da função f:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+12x=0\\ -6y+3y^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x=0\\ -2y+y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+4)=0\\ y(-2+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x+4=0\\ y=0\vee -2+y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x=-4\\ y=0\vee y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-4\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=-4\\ y=2\end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são $(0,0)$, $(0,2)$, $(-4,0)$ e $(-4,2)$.

Determinemos a matriz hessiana de f:

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6x+12 & 0\\ 0 & -6+6y\end{bmatrix}$$

Classifiquemos os pontos de estacionariedade:

- ponto$(0,0)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,0)=\begin{bmatrix}6\cdot 0+12 & 0\\ 0 & -6+6\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,0)$ é:

$$D_1=12>0$$
$$D_2=\begin{vmatrix}12 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=12\cdot(-6)-(0\cdot 0)=-72-0=-72<0.$$

Como $D_2<0$, então a forma quadrática é indefinida e $(0,0)$ é um ponto sela.

- ponto$(0,2)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(0,2)=\begin{bmatrix}6\cdot 0+12 & 0\\ 0 & -6+6\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,2)$ é:

$$D_1 = 12 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \cdot 6 - (0 \cdot 0) = 72 - 0 = 72 > 0.$$

Como $D_1 > 0$ e $D_2 > 0$, então a forma quadrática é definida positiva e $(0,2)$ é um ponto de mínimo relativo.

- ponto $(-4,0)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-4,0) = \begin{bmatrix} 6 \cdot (-4) + 12 & 0 \\ 0 & -6 + 6 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(-4,0)$ é:

$$D_1 = -12 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \cdot (-6) - (0 \cdot 0) = 72 - 0 = 72 > 0.$$

Como $D_1 < 0$ e $D_2 > 0$, então a forma quadrática é definida negativa e $(-4,0)$ é um ponto de máximo relativo.

- ponto $(-4,2)$

A matriz hessiana neste ponto é:

$$H(-4,2) = \begin{bmatrix} 6 \cdot (-4) + 12 & 0 \\ 0 & -6 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

A cadeia de menores principais de $H(0,0)$ é:

$$D_1 = -12 < 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -12 \cdot 6 - (0 \cdot 0) = -72 - 0 = -72 < 0.$$

Como $D_2 < 0$, então a forma quadrática é indefinida e $(-4,2)$ é um ponto sela.

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III.1 Seja $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2y+1$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

b) Obtenha a equação do plano tangente a f no ponto $(2,0)$.

c) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(2,0)$ segundo o vector $\vec{v}=\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$.

d) Determine os pontos de estacionaridade de f.

e) Calcule a matriz Hessiana de f.

f) Classifique os pontos obtidos na alínea (d) quanto à sua natureza.

III. 2 Seja $f(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{y^3}{3}-y^2+\frac{3}{2}$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

b) Obtenha a equação do plano tangente a f no ponto $(1,-1)$.

c) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(1,-1)$ segundo o vector $\vec{v}=(1,2)$.

d) Determine os pontos de estacionaridade de f.

e) Calcule a matriz Hessiana de f.

f) Classifique os pontos obtidos na alínea (d) quanto à sua natureza.

III.3 Determine e classifique os extremos relativos das seguintes funções:

a) $f(x,y)=x^2y^2-2xy$.

b) $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2y+1$.

c) $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x-y+1$.

d) $f(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2+yz+2xz-xy$