Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º semestre 12/13

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEE, LEGI, LEIC-T, LERC

16 de novembro de 2012

Teste 201

Nome:
Número:
Curso:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **45 minutos** e consiste de sete problemas. Os cinco primeiros são perguntas de escolha múltipla, pelo que deve assinalar a sua opção no primeiro quadro abaixo. As resposta erradas descontam 1/10 da cotação indicada. Os restantes problemas têm as cotações indicadas na segunda tabela abaixo.

Perg 1	2 Val	(b)
Perg 2	2 Val	(c)
Perg 3	3 Val	(a)
Perg 4	3 Val	(a)
Perg 5	3 Val	(c)

O quadro abaixo destina-se à correção da prova. Por favor não escreva nada.

Prob 6	4 Val	
Prob 7	3 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1

Para que valores de k é que os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -4 \\ 24 \\ k \end{bmatrix}$ são linearmente independentes?

(a) os vetores são linearmente independentes para todo o k

(b) os vetores são linearmente independentes para $k \neq -4$

(c) os vetores são linearmente independentes para $k = -4$

(d) os vetores são linearmente dependentes para todo o k

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 2

Identifique a matriz 3×3 que descreve a seguinte composição de transformações $2D$, usando coordenadas homogéneas. Rodar pontos em $\pi/4$ e depois diminuir a escala da coordenada x em 0.2 e da coordenada y em 0.4.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0.1\sqrt{2} & 0.1\sqrt{2} & 0 \\ -0.2\sqrt{2} & 0.2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0.1\sqrt{2} & -0.1\sqrt{2} & 0 \\ 0.2\sqrt{2} & 0.2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0.1\sqrt{2} & -0.2\sqrt{2} & 0 \\ 0.1\sqrt{2} & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 3
Seja T uma transformação linear, cuja matriz canónica é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Verifique se a transformação linear T é injetiva, e se T é sobrejetiva.
Indique a única afirmação verdadeira.

(a) T é injetiva e sobrejetiva

(b) T é injetiva, mas não é sobrejetiva

(c) T não é injetiva, mas é sobrejetiva

(d) T não é injetiva e não é sobrejetiva

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 4
Sejam as matrizes por blocos $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & F \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$. Determine o produto matricial AB.

(a) $\begin{bmatrix} Y & Z \\ W + FY & X + FZ \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} X & W + XF \\ Z & Y + ZF \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & Z \\ FY & FZ \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} Y & Z \\ W + YF & X + ZF \end{bmatrix}$

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 5

Determine os valores do parâmetro s para os quais a solução do seguinte sistema é única, e descreva a solução.

$$\begin{aligned} 2sx_1 + 4x_2 &= -3 \\ 2x_1 + sx_2 &= 4. \end{aligned}$$

(a) $s \neq \pm 2$; $x_1 = \frac{-3s-16}{2(s-2)(s+2)}$, $x_2 = \frac{4s+3}{2(s-2)(s+2)}$

(b) $s \neq 2$; $x_1 = \frac{-3s+16}{2(s-2)(s+2)}$, $x_2 = \frac{4s-3}{(s-2)(s+2)}$

(c) $s \neq \pm 2$; $x_1 = \frac{-3s-16}{2(s-2)(s+2)}$, $x_2 = \frac{4s+3}{(s-2)(s+2)}$

(d) $s \neq \pm 4$; $x_1 = -3s - 16$, $x_2 = 4s + 3$

Assinale a sua opção no quadro da página 1 !

Problema 6
Em 2012 a população da cidade CC rondava os cerca de 600000 habitantes, enquanto que a população dos arredores era de 900000 habitantes.
Sabendo que os estudos demográficos indicam que cerca de 5% da população de CC se desloca anualmente para os arredores, enquanto que 2% da população dos arredores se desloca para CC. Indique a distribuição da população em CC e arredores em 2013, ignorando outros fatores externos, como mortes, nascimentos, etc.

Apresente e justifique todos os cálculos que tiver de efectuar!

		De:	
		CC	ARR
	CC	0.95	0.02
Para	ARR	0.05	0.98

$$10^5 \begin{bmatrix} 0.95 & 0.02 \\ 0.05 & 0.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 10^5 \left(6 \begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.05 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.98 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} 6(0.95) + 9(0.02) \\ 6(0.05) + 9(0.98) \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 5.7 + 0.18 \\ 0.3 + 8.82 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.88 \\ 9.12 \end{bmatrix} 10^5 = \begin{bmatrix} 588\,000 \\ 912\,000 \end{bmatrix}$$

$$\overline{1500\,000}$$

R.: 588 000 habitantes em CC
912 000 habitantes nos arredores

Problema 7
Seja H um subconjunto de polinómios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes racionais. Verifique se se trata dum subespaço vetorial de polinómios com a soma e multiplicação por escalares usuais nos polinómios.
Se não for um subespaço vetorial indique qual (quais) dos três axiomas é que falha(m).

Justifique cuidadosamente todas as afirmações que fizer!

Axiomas :

1. $\underline{0} \in H$, porque $0+0t+0t^2=\underline{0}$ é um polinómio de grau ≤ 2 com coef. racionais todos iguais a zero

2. o conjunto é fechado para a soma, porque a soma de qq polinómio $p=a+bt+ct^2$ com $q = d+et+ft^2$, ambos com coef. racionais, é um polinómio de grau ≤ 2 com coeficientes $a+d$, $b+e$, $c+f$ - racionais

3. o conjunto não é fechado para a mult. por escalar, p.ex. fazemos $\alpha p = \alpha(a+bt+ct^2)$ com $\alpha = \sqrt{2}$ e o resultado é um polinómio de grau ≤ 2 com coef. $\sqrt{2}a$, $\sqrt{2}b$ e $\sqrt{2}c$ que não são racionais.

Conclusão : Falha o axioma 3 $\Rightarrow$ H não é subespaço de $\mathcal{P}_2$