Análise Matemática I

1º Exame - 23 de Janeiro de 2004

LEAN, LEC e LET

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule, caso existam: (2)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{3n+4}{n+2}+e^{-n}+\tfrac{\cos n}{n}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^n}{\pi^n}+\sqrt[n]{\pi}+\frac{\pi^n}{n!}+\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{n^2}\right)^{n^2}\right].$$

2. Analise a convergência das séries (2.5)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$,
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$,
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3}$,
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$,

calcule

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$,

e

f) analise a convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n2^n}$. (2)

3. Calcule, caso exista: (2.5)

a) $\frac{d}{dx}(x^3e^x)$,
b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+2}$,
c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$,
d) $\frac{d}{dx}\sqrt{\ln x}$,
e) $\frac{d}{dx}e^{x\arctan x}$.

4. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, contínua, definida por (2)

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{se } x\le e,\\ k+\ln x & \text{se } x>e.\end{cases}$$

a) Determine $k\in\mathbb{R}$. Esboce o gráfico de f.
b) Estude f do ponto de vista da diferenciabilidade. Esboce o gráfico de f'.

5. Considere as funções f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por (2)

$$f(x) = \sin[\sin(\sin x)], \qquad g(x) = x^2 - 1.$$

a) Prove que f tem máximo e mínimo. Note: Não precisa determinar os pontos onde ocorrem.

b) Prove que $f = g$ em pelo menos dois pontos.

6. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e que o seu gráfico intersecta a recta $y = x$ em todos os pontos da forma (n, n), com $n \in \mathbb{N}$. (2)

a) O que pode afirmar acerca do comportamento de $f(x)$ quando $x \to +\infty$? Justifique.

b) Prove que existe $x_n \to +\infty$ tal que $f'(x_n) = 1$.

7. Prove por definição que $\frac{d}{dx}x = 1$ e por indução que $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}_1$. (2)

8. Considere a sucessão (x_n) obtida por truncatura da dízima que representa π com n casas decimais. Considere também a sucessão (y_n), em que y_n se obtém de x_n por uma troca da ordem dos seus dígitos: (3)

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 3.1 & y_1 = 1.3 \\
x_2 = 3.14 & y_2 = 4.13 \\
x_3 = 3.141 & y_3 = 1.413 \\
x_4 = 3.1415 & y_4 = 5.1413 \\
x_5 = 3.14159 & y_5 = 9.51413 \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

a) Diga se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ tem ínfimo, supremo, mínimo e máximo.

b) A sucessão (x_n) converge? Qual o seu limite? Justifique.

c) Determine $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$.

d) Prove que (y_n) tem pelo menos dois sublimites.