Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 4 – Primitivas Por Substituição

$$\boxed{Pf(x) = \left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}$$

Parte I – Exercícios Propostos

I. 1 Aplicando o método de primitivação por substituição, determine as seguintes primitivas:

a) $P\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)$

b) $P\left(\frac{4^{2x}+4^{x}}{4^{2x}+3\cdot 4^{x}+2}\right)$

c) $P\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$

d) $P\left(\sqrt{4 - x^2}\right)$

e) $P\left(\frac{5\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)$

f) $P\left(\sqrt{9-9x^2}+\frac{5x}{\sqrt{3+7x^2}}\right)$

I. 2 Determine a primitiva F da função $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, tal que $F(1) = 2$.

Parte II – Exercícios Resolvidos

II. 1 Aplicando o método de primitivação por substituição, determine as seguintes primitivas:

a) $P\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\sqrt{1-x^2}$ é da forma $R(x,\sqrt{a^2-b^2x^2})$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x=\frac{a}{b}\operatorname{sen}t \text{ ou } x=\frac{a}{b}\cos t$$

Efectuando a substituição: $x = 1\operatorname{sen}t \Leftrightarrow x=\underbrace{\operatorname{sen}t}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t)=\cos t$
- $x=\operatorname{sen}t \Leftrightarrow \operatorname{arc sen}x=t \Leftrightarrow t=\underbrace{\operatorname{arc sen}x}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
- $f(g(t))=f(\operatorname{sen}t)=\sqrt{1-(\operatorname{sen}t)^2}=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$

Assim,

$$P\left(\sqrt{1-x^2}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usando o método de primitivação}\\ \text{por substituição:}Pf(x)=\left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=}\left[P(\cos t\cdot\cos t)\right]_{t=\operatorname{arc sen}x}=\left[P\cos^2 t\right]_{t=\operatorname{arc sen}x}=\left[P\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\right]_{t=\operatorname{arc sen}x}$$

$$=\left[\frac{1}{2}P1+\frac{1}{2}P\cos(2t)\right]_{t=\operatorname{arc sen}x}=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P2\cos(2t)\right]_{t=\operatorname{arc sen}x}=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)+C\right]_{t=\operatorname{arc sen}x}$$

$$\underset{(*)}{=}\frac{1}{2}\operatorname{arc sen}x+\frac{1}{4}2x\sqrt{1-x^2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arc sen}x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$$

Cálculos auxiliares: (*)

Atendendo a que:

$$\operatorname{sen}(2t)=2\operatorname{sen}t\cos t\underset{\substack{\uparrow\\ \cos t=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t}}}{=}2\operatorname{sen}t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2t} \text{ e } x=\operatorname{sen}t\Leftrightarrow \operatorname{sen}t=x$$

vem $\operatorname{sen}(2t)=2x\sqrt{1-x^2}$.

b) $P\left(\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ é da forma $R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}},...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x = t^m, \text{ onde } m = \text{m.m.c}(q,s,...).$$

Efectuando a substituição: $x = \underbrace{t^2}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = 2t$
- $x = t^2 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow t = \underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$
- $f(g(t)) = f(t^2) = \frac{1}{\sqrt{t^2}\,(1+t^2)} = \frac{1}{t(1+t^2)}$

Assim,

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x) = \left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P\left(\frac{1}{t(1+t^2)}2t\right)\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[2P\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[2\,\text{arc tg}(t) + C\right]_{t=\sqrt{x}} = 2\,\text{arc tg}\left(\sqrt{x}\right) + C\,.$$

c) $P\left(\text{sen}\left(\sqrt{x}\right)\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\text{sen}\left(\sqrt{x}\right)$ é da forma $R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}},...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x = t^m, \text{ onde } m = \text{m.m.c}(q,s,...).$$

Efectuando a substituição: $x = \underbrace{t^2}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = 2t$
- $x = t^2 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow t = \underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \text{sen}\left(\sqrt{x}\right)$
- $f(g(t)) = f(t^2) = \text{sen}\left(\sqrt{t^2}\right) = \text{sen}\, t$

Assim,

$$P\left(\text{sen}\left(\sqrt{x}\right)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x) = \left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P(2t\ \text{sen}\, t)\right]_{t=\sqrt{x}} \underset{(*)}{=} \left[-2t\cos t + 2\text{sen}\, t + C\right]_{t=\sqrt{x}} = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\text{sen}\sqrt{x} + C$$

Cálculos auxiliares: (*)

Para calcular a primitiva $P(2t\ \sin t)$ vamos recorrer ao método de primitivação por partes.

Assim,

$$P(2t\ \sin t) \underset{\uparrow}{=} -\cos t\cdot 2t - P(-\cos t\cdot 2) = -2t\cos t + 2P\cos t = -2t\cos t + 2\operatorname{sen} t + C$$

Usando o método de primitivação por partes: $P(u'v)=u\,v-P(u\,v')$

em que $\begin{cases} u'=\operatorname{sen} t \\ v=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=Pu'=-\cos t \\ v'=2 \end{cases}$

d) $P\left(\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\right)$

<u>Resolução:</u>

A função a primitivar $\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ é da forma $R\left(a^{rx}, a^{sx}, \ldots\right)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$t = a^{mx}\text{, onde } m = \text{m.d.c}(r,s,\ldots).$$

Efectuando a substituição: $t = e^x \Leftrightarrow x = \underbrace{\ln t}_{g(t)}$, pois $m = \text{m.d.c.}(1,2) = 1$.

Tem-se

- $g'(t) = \dfrac{1}{t}$
- $t = \underbrace{e^x}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$
- $f(g(t)) = f(\ln t) = \dfrac{\left(e^{\ln t}\right)^2}{1+e^{\ln t}} = \dfrac{t^2}{1+t}$

Assim,

$$P\left(\frac{e^{2x}}{1+e^x}\right) \underset{\uparrow}{=} \left[P\left(\frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}\right)\right]_{t=e^x} = \left[P\left(\frac{t+1-1}{t+1}\right)\right]_{t=e^x} = \left[P\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\right]_{t=e^x} = \left[P1 - P\frac{1}{t+1}\right]_{t=e^x}$$

Usando o método de primitivação por substituição: $Pf(x)=P\left[f(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}$

$$= \left[t - \ln|t+1| + C\right]_{t=e^x} = e^x - \ln\left|e^x+1\right| + C \underset{e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}}{=} e^x - \ln\left(e^x+1\right) + C$$

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III.1 Aplicando o método de primitivação por substituição, determine as seguintes primitivas:

a) $P\left(\dfrac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\right)$

b) $P\left(\dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}\right)$

c) $P\left(\sqrt{9-x^2}\right)$

.

III. 2 Determine a primitiva H da função $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$ tal que $H(0)=2$.