Exemplo: Delta de Dirac

Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $d > 0$ e as funções $\delta_{t_0,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\delta_{t_0,d}(t) = \frac{1}{2d}\left(H_{t_0-d}(t) - H_{t_0+d}(t)\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 - d \text{ ou } t \geqslant t_0 + d \\ \frac{1}{2d} & \text{se } t_0 - d \leqslant t < t_0 + d \end{cases}$$

Para quaisquer valores de t_0 e d estas funções satisfazem

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0,d}(t)\,dt = 1$;
- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0,d}(t) f(t)\,dt = f(t_*)$$
onde $t_0 - d < t_* < t_0 + d$;
- Supondo $t_0 \geqslant 0$ e d suficientemente pequeno
$$\mathcal{L}\left[\delta_{t_0,d}(t)\right](s) = \frac{\text{senh}\,(sd)}{sd} e^{-st_0}.$$

Definição

Para cada $t \in \mathbb{R}$ define-se a passagem ao limite

$$\delta(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{t_0, d \to 0} \delta_{t_0,d}(t)$$

como uma função generalizada designada por delta de Dirac ou impulso unitário. Para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$ tem-se ainda

$$\delta(t - t_0) = \lim_{d \to 0} \delta_{t_0,d}(t).$$

Resulta da definição que

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1;$
- Se $t_0 \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t)\, dt = f(t_0);$$

- Supondo $t_0 \geqslant 0$ e $t \in [0, +\infty[$ tem-se

$$\mathcal{L}\left[\delta(t - t_0)\right](s) = e^{-st_0}, \qquad \forall s \in \mathbb{R};$$

e em particular

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right](s) = 1, \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Mais propriedades da transformada de Laplace

10. Sejam $c \geqslant 0$ e $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\mathcal{L}\left[\delta(t - c)f(t)\right](s) = f(c)e^{-cs}.$$

Exemplos

- Calcule $\mathcal{L}\left[\delta(t-\pi)\, t \cos(t)\right](s)$;
- Resposta: $-\pi e^{-s\pi}$.
- Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{s^2+1}\right](t)$;
- Resposta: $\delta(t) - \operatorname{sen} t$.

Exemplo: Resolva o problema de valores iniciais

- $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$
- Resposta: $y(t) = e^{-t}\left(\cos t + \operatorname{sen} t\right) - H(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen} t$.

Definição: Produto de convolução

Sejam $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funções seccionalmente contínuas. Então

$$h(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

define uma função, definida para $t \in [0, +\infty[$, designada por convolução de f e g e denotada por $f * g$.

Algumas propridades simples são:

- Comutatividade $f * g = g * f$;
- Associatividade $(f * g) * h = f * (g * h)$;
- Distributividade $(f + g) * h = f * h + g * h$;
- Elemento unidade $\delta * f = f * \delta = f$;

Mostra-se ainda:

Teorema da convolução

Se $f, g \in \mathcal{E}_a$ para algum $a \in \mathbb{R}$ então $f * g \in \mathcal{E}_a$. Além disso, se $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ e $G(s) = \mathcal{L}[g](s)$ então

$$\mathcal{L}[f * g](s) = F(s)G(s) \qquad \text{para } s > a.$$

Exemplo

Use o teorema de convolução para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+1)^2}\right](t).$$

Resposta: $-\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{t}$.

Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Definição

Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície se para qualquer ponto $P \in S$ existir uma bola $B(P)$ tal que o conjunto $M \cap B(P)$ pode ser descrito de uma das três maneiras seguintes:

1. Como um conjunto de nível de uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ na classe C^1 num aberto U, tal que $\nabla F(P) \neq 0$ para qualquer $P \in M \cap B(P)$:

$$M \cap B(P) = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = c\}.$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante real. Ajustando F pode sempre usar-se $c = 0$.

Num ponto $P \in M \cap B(P)$ o vector $\nabla F(P)$ é um vector normal à superfície M no ponto P e os vectores tangentes à superfície M no ponto P obtêm-se como soluções da equação

$$\nabla F(P) \cdot \vec{t} = 0.$$

Exemplos

- A esfera em $\mathbb{R}^3$ de centro na origem e raio $R > 0$ é definida por

$$S_R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

que é um conjunto de nível da função $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

- Um cilindro em $\mathbb{R}^3$ com o eixo dos zz como eixo de simetria e raio $R > 0$ é definido por

$$C_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\right\}$$

que é um conjunto de nível da função $F(x, y, z) = x^2 + y^2$.

- Um parabolóide em $\mathbb{R}^3$ com o eixo dos zz como eixo de simetria e vértice em $\alpha\mathbf{k}$ é definido por

$$P_\alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 = \alpha\right\}$$

que é um conjunto de nível da função $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$.

2. Como a imagem de uma parametrização $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, que é uma função $g(u,v)$ na classe $C^1(U)$ (i. e. existem e são contínuas, no interior de U, as derivadas parciais de g).

   Para algum (u,v) no interior de U, considere-se o ponto $P = g(u,v) \in M$ e os vectores
   $$\vec{t_1} = \frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{e} \quad \vec{t_2} = \frac{\partial g}{\partial v}.$$

   Então

   - O ponto $P \in M$ diz-se regular se $\vec{t_1} \times \vec{t_2}$ é um vector não-nulo;
   - Se $P \in M$ é regular, $\vec{t_1}$ e $\vec{t_2}$ são vectores tangentes à superfície M no ponto P;
   - Se $P \in M$ é regular, $\vec{t_1} \times \vec{t_2}$ é um vector normal à superfície M no ponto P.

Revisão: Produto externo em $\mathbb{R}^3$

Dados dois vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ com $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ define-se o vector produto externo de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ por

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ designam os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Algumas propriedades:

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j};$
- $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b};$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$;
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\det \Delta^t \Delta}$ em que Δ é a matriz cujas colunas são $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Exemplos

- Usando coordenadas esféricas define-se a parametrização para S_R

$$g(\theta, \phi) = (R \cos\theta \,\text{sen}\,\phi, R \,\text{sen}\,\theta \,\text{sen}\,\phi, R\cos\phi)$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$.

- Usando coordenadas cilíndricas define-se a parametrização para C_R

$$g(\theta, z) = (R\cos\theta, R\,\text{sen}\,\theta, z)$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in \mathbb{R}$.

3. Como o gráfico de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ na classe $C^1(U)$. Por exemplo

$$M \cap B(P) = \{(x, y, z) : z = f(x, y), \quad (x, y) \in U\}.$$

Neste caso tem-se para um ponto regular $P = (x, y, z) \in M$

$$\vec{t_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ e } \vec{t_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

são vectores tangentes à superfície M no ponto P e

$$\vec{t_1} \times \vec{t_2} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

é um vector normal à superfície M no ponto P.

Obtém-se outros exemplos com $x = f(y, z)$ ou $y = f(x, z)$.

Exemplo

O parabolóide P_α define-se como o gráfico da função

$$f(x, y) = \alpha + x^2 + y^2 \qquad \text{onde } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

i. e.

$$P_\alpha = \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Definição: Espaço tangente e espaço normal

Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $P \in M$ um ponto regular. Então

- O espaço tangente a M no ponto P, denotado por $T_P M$, é o espaço vectorial, de dimensão 2, gerado pelos vectores tangentes a M no ponto P;
- O espaço normal a M no ponto P, é o complemento ortogonal $(T_P M)^\perp$ i. e. o espaço vectorial de dimensão 1 gerado pelo vector normal a M no ponto P.

Definição: Plano tangente e recta normal

Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $P \in M$ um ponto regular. Suponhamos $\vec{t_1}$ e $\vec{t_2}$ geram $T_P M$ e $\vec{n} \in (T_P M)^\perp$, então

- O plano tangente a M em P é o conjunto dos pontos $T \in \mathbb{R}^3$ dados por

$$\vec{n} \cdot (T - P) = 0 \qquad \text{(equação cartesiana)}$$

ou

$$T = P + \alpha \vec{t_1} + \beta \vec{t_2} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{(equação vectorial)}$$

- A recta normal a M em P é o conjunto dos pontos $N \in \mathbb{R}^3$ dados por

$$\begin{cases} \vec{t_1} \cdot (N - P) = 0 \\ \vec{t_2} \cdot (N - P) = 0 \end{cases} \qquad \text{(equações cartesianas)}$$

ou

$$N = P + \lambda \vec{n} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{(equação vectorial)}$$