Recorde o princípio de indução: se $\Phi(n)$ é um predicado nos naturais $n \in \mathbb{N}$ então, podemos estabelecer que todo o natural possui o predicado Φ, verificando que o possui o predicado Φ, ou seja, que se tem $\Phi(0)$ e demonstrando para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem $\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$. Mais geralmente, para demonstrar $(\forall n \geq k)\Phi(n)$ basta verificar que se tem $\Phi(k)$ e que, para todo o $n \geq k$ se tem $\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$.

Exercício 1.— Estabeleça (usando indução) que para todo o o natural $n \in \mathbb{N}$ se tem

1. $\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$;
2. $\sum_{k=0}^{n} ca_k = c\sum_{k=0}^{n} a_k$;
3. $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$.

Exercício 2.— Mostre por indução que para qualquer $n \geq 1$ se tem,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercício 3.— Usando indução mostre que dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ se tem para qualquer $n \geq 1$ que

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}.$$

Exercício 4.— Mostre que se tem para qualquer $n \in \mathbb{N}$ que,

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Exercício 5.— Mostre que se tem para qualquer $n \geq 2$ que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Exercício 6.— Considerando $\binom{n}{k} = n!/k!\,(n-k)!$ tem-se

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{e} \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Usando indução estabeleça a fórmula do binómio de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$