Análise Matemática I

2º Exame - 6 de Fevereiro de 2004

LEAN, LEC e LET

Resolução

1. Como a função arcoseno é contínua,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{n^4+1}}{2n^2+3}+\frac{n^2}{2^n}+\arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/n^4}}{2+3/n^2}+0+\arcsin(1)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}.$$

2.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{k\to\infty}\left[\left(\sin\frac{1}{1}-\sin\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\sin\frac{1}{k}-\sin\frac{1}{k+1}\right)\right]=$ $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\left(\sin 1-\sin\frac{1}{k+1}\right)=\sin 1.$

b) Seja $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt[3]{n+2}}>0$ e $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{n^{5/6}}>0$. Então, $\lim\frac{a_n}{b_n}=1$, pelo que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ são da mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet, $\sum\frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha\le 1$, a série dada é divergente. A sua soma é $+\infty$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=\cos\pi=-1.$

d) Sabemos que $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Consideram-se correctas ambas as respostas seguintes: $s_k=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}$ pelo que $s_4=\frac{8}{3}$, ou $s_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}$ pelo que $s_4=\frac{65}{24}$.

3.

a) $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{1/(1+x^2)}{1/(2\sqrt{x})}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}=0.$

b) $\lim_{x\to0}x^{1/\ln x}=\lim_{x\to0}e^{\ln x/\ln x}=\lim_{x\to0}e=e.$

c) $\frac{d}{dx}\left(e+e^{x^2}\right)=2xe^{x^2}.$

d) $\frac{d}{dx}\frac{\ln x}{1+x^2}=\frac{(1/x)(1+x^2)-2x\ln x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}.$

e) $\frac{d}{dx}\left(x^3e^{1/x}\tan x\right)=3x^2e^{1/x}\tan x-xe^{1/x}\tan x+x^3e^{1/x}\sec^2 x.$

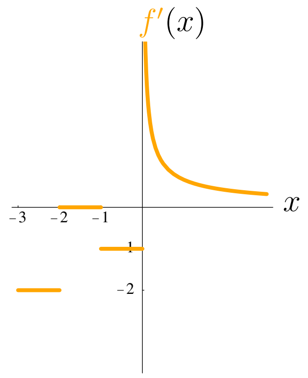
4.

a) A equação da recta é:
$y=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$

b) Como a função seno é limitada, a sucessão $(f(x_n))$ é limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem necessariamente uma subsucessão convergente.

c) Sim, porque a função f é contínua. Supondo que (x_n) converge para a, a definição de continuidade de Heine garante que $(f(x_n))$ converge para $f(a)$.

5.



Esboço do gráfico de f'.

A função f não é diferenciável em -2, -1 e 0, pelo que f' não está definida nesses pontos.

6.

a) Aplicando o Teorema de Lagrange à função f nos intervalos $[1, e]$, $[e, e^2]$ e $[1, e^2]$ conclui-se que existem $c_1 \in]1, e[$, $c_2 \in]e, e^2[$ e $c_3 \in]1, e^2[$ tais que

$$f'(c_1) = \tfrac{1}{e-1}, \;\; f'(c_2) = \tfrac{1}{e^2-e} = \tfrac{1}{e}\,\tfrac{1}{e-1}, \;\; f'(c_3) = \tfrac{2}{e^2-1} = \tfrac{2}{e+1}\,\tfrac{1}{e-1}.$$

As desigualdades

$$1 > \frac{2}{e+1} > \frac{2}{e+e} = \frac{1}{e}$$

mostram que $f'(c_1) > f'(c_3) > f'(c_2)$. Atendendo a que f' é contínua e ao Teorema do Valor Intermédio, podemos garantir que todos os valores entre $f'(c_1)$ e $f'(c_2)$ pertencem ao contradomínio de f'. Portanto, o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ que garantidamente está contido no contradomínio de f' é $S = \left[\frac{1}{e}\,\frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1}\right]$.

b) Se $f|_{[a,b]}$ não é linear, onde $a < b$, e $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(\lambda) \subset f'(]a, b[)$. De facto, se f não é linear existe um $c \in]a, b[$ tal que $(c, f(c))$ está abaixo do segmento que une $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ ou está acima deste segmento. Em qualquer caso, λ está compreendido entre o declive da recta que une $(a, f(a))$ e $(c, f(c))$ e o declive da recta que une $(c, f(c))$ e $(b, f(b))$. Portanto, a afirmação feita

é uma consequência do Teorema de Lagrange e do Teorema do Valor Intermédio.
Tendo em conta o resultado da sugestão, se $f'(\mathbb{R}) = S$, então as funções $f|_{[1,e]}$ e $f|_{[e,e^2]}$ teriam que ser lineares. Mas como $f(1) = 0$, $f(e) = 1$ e $f(e^2) = 2$, f não seria diferenciável em e, contrariamente à hipótese. Portanto, S tem que estar estritamente contido em $f'(\mathbb{R})$. Ou seja, existe $\delta > 0$ tal que um dos intervalos $\left[\frac{1}{e}\ \frac{1}{e-1} - \delta, \frac{1}{e-1}\right]$ ou $\left[\frac{1}{e}\ \frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1} + \delta\right]$ está contido em $f'(\mathbb{R})$.

7.

a) O conjunto $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem ínfimo e mínimo, ambos iguais a $x_1 = 0,01101110\ldots$. Tem também supremo s, com $s = 0,11111111\ldots$. De facto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $x_n < s$ e se $x < s$, então existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > x$. Portanto, o s definido é o menor majorante de A. O conjunto A não tem máximo porque não existe nenhum elemento de A igual a s.
Note-se que, o ínfimo de A é irracional, pois é representado por uma dízima não periódica. Já o supremo de A é racional:

$$s = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{10}\frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{9}.$$

b) Designemos por S o conjunto dos sublimites de A e seja $x \in S$. É claro que a dízima que representa x contém apenas zeros e uns.
Averiguemos da existência de $y_1 \in S$ tal que o primeiro dígito na expansão de y_1 é zero, $y_1 = 0,0\ldots$. Então, deverá existir uma subsucessão de (x_n) que converge para y_1. A partir de certa ordem, os termos dessa subsucessão terão também que ter o primeiro dígito da sua expansão igual a zero. Isto implica que, a partir de certa ordem, os termos terão que pertencer ao conjunto formado por

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0,01101110\ldots \\ x_4 & = & 0,0111011110\ldots \\ x_8 & = & 0,011110111110\ldots \\ x_{13} & = & 0,01111101111110\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

Logo, só existe um y_1 nas condições descritas, $y_1 = 0,011111111\ldots$.
Averiguemos agora da existência de $y_2 \in S$ tal que o primeiro dígito na expansão de y_2 é um e o segundo é zero, $y_2 = 0,10\ldots$. Então, deverá existir uma subsucessão de (x_n) que converge para y_2. A partir de certa ordem, os termos dessa subsucessão terão também que ter o primeiro

dígito da sua expansão igual a um e o segundo dígito igual a zero. Isto implica que, a partir de certa ordem, os termos terão que pertencer ao conjunto formado por

$$\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0,101101110\ldots \\ x_3 & = & 0,10111011110\ldots \\ x_7 & = & 0,1011110111110\ldots \\ x_{12} & = & 0,101111101111110\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

Logo, só existe um y_2 nas condições descritas, $y_2 = 0,1011111111\ldots$.
Da mesma forma, seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ e averiguemos agora da existência de $y_n \in S$ tal que os $(n-1)$ primeiros dígitos na expansão de y_n são um e o n-ésimo dígito é zero, $y_n = 0,\underbrace{11\ldots11}_{n-1 \text{ uns}}0\ldots$. Então, deverá existir uma subsucessão de (x_n) que converge para y_n. A partir de certa ordem, os termos dessa subsucessão terão também que ter os primeiros $(n-1)$ dígitos da sua expansão iguais a um e o n-ésimo dígito igual a zero. Isto implica que, a partir de certa ordem, os termos terão que pertencer ao conjunto formado por

$$\begin{array}{lcl} x_{\frac{(n+1)(n-2)}{2}} & = & 0,\underbrace{11\ldots11}_{n-1 \text{ uns}}0\underbrace{11\ldots111}_{n \text{ uns}}0 \\ x_{\frac{(n+1)(n-2)}{2}+(n+1)} & = & 0,\underbrace{11\ldots11}_{n-1 \text{ uns}}0\underbrace{11\ldots1111}_{n+1 \text{ uns}}0 \\ x_{\frac{(n+1)(n-2)}{2}+(n+1)+(n+2)} & = & 0,\underbrace{11\ldots11}_{n-1 \text{ uns}}0\underbrace{11\ldots11111}_{n+2 \text{ uns}}0 \\ \ldots & & \end{array}$$

Logo, só existe um y_n nas condições descritas,

$$y_n = 0,\underbrace{11\ldots11}_{n-1 \text{ uns}}011111111\ldots.$$

Claramente, $y_\infty := 0,11111111\ldots$ também é sublimite de (x_n).
Como não pode existir mais nenhum sublimite de (x_n) para além dos já identificados, $S = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{y_\infty\}$ é formado por todas as dízimas que têm só uns na sua expansão com a excepção de, quando muito, um zero. Mais precisamente, $S = \left\{\frac{1}{9} - \frac{1}{10^n},\ n \in \mathbb{N}_1\right\} \cup \left\{\frac{1}{9}\right\}$.
Em particular, $\liminf x_n = \min S = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90}$ e $\limsup x_n = \max S = \frac{1}{9}$.