IST - 1º Semestre de 2016/17

EXERCÍCIOS DE ÁLGEBRA LINEAR [1]

FICHA 1 - Método de Eliminação de Gauss

1 Sistemas de equações lineares

Uma **equação linear** nas variáveis (ou incógnitas) $x_1, ..., x_n$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = d, \tag{1.1}$$

onde $a_1, ..., a_n$ e d são números (reais ou complexos); $a_1, ..., a_n$, dizem-se os **coeficientes da equação** e d o seu **segundo membro**.

Um **sistema de** p **equações lineares (**SEL**) nas** n **variáveis (ou incógnitas)** $x_1, ..., x_n$, é um conjunto de p de equações do tipo da equação (1.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n = d_p \end{cases} . \tag{1.2}$$

Uma sequência numérica $(s_1, ..., s_n)$ diz-se uma **solução do sistema** (1.2) se for solução de cada uma das equações que compõem (1.2).

Dois sistemas de p equações lineares a n incógnitas são **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto de soluções

Tornando implícitas as variáveis de um SEL, ele acha-se plenamente caracterizado pela **matriz**

$$\mathbf{A}|\mathbf{d} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & ... & a_{2n} & d_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & ... & a_{pn} & d_p \end{array}\right].$$

que toma o nome de **matriz aumentada do sistema (MAS).** A matriz com p linhas e n colunas (matriz $p \times n$) sem os segundos membros das equações do sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{p1} & ... & a_{pn} \end{bmatrix},$$

toma o nome de **matriz dos coeficientes do sistema**, ou **matriz do sistema**.

[1]Coligidos por: João Ferreira Alves, Ricardo Coutinho e José M. Ferreira.

1.1 Classificação dos sistemas de equações lineares

Um SEL pode ser:

- **Impossível** se não tiver soluções.
- **Possível e determinado** se possuir uma só solução.
- **Possível e indeterminado** se tiver infinitas soluções.

1.2 Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Sobre as linhas de uma matriz iremos considerar as seguintes operações:

1. Trocar linhas.
2. Multiplicar uma linha por um número diferente de zero, obtendo-se um múltiplo dessa linha.
3. Substituir uma linha pela sua soma com o múltiplo de outra linha.

Estas operações podem ser resumidamente indicadas através da seguinte notação:

$L_i \longleftrightarrow L_j$	significa a operacão de trocar a linha i com a linha j.
αL_i	diz-nos que estamos a multiplicar a linha L_i pelo número $\alpha \neq 0$.
$L_i + \alpha L_j$	indica que estamos a substituir a linha L_i pela sua soma com o múltiplo αL_j da linha L_j

1.3 Matriz em escada de linhas

Uma matriz diz-se em **escada de linhas** se tiver as seguintes características:

1. Não tem linhas nulas seguidas de linhas não nulas.
2. Chamando pivô de uma linha à primeira entrada não nula dessa linha, caso exista, cada pivô de uma linha encontra-se numa coluna à direita da coluna a que pertence o pivô da linha imediatamente anterior.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4 Forma reduzida de uma matriz em escada de linhas

Uma matriz em escada de linhas diz-se na forma reduzida se possuir as seguintes características adicionais:

- Todos os pivôs são iguais a 1.
- Cada pivô é a única entrada não nula da coluna respectiva.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.5 Variáveis dependentes e variáveis livres

Se a MAS, $\mathbf{A}|\mathbf{d}$, estiver em escada de linhas, dizemos que, com $1 \leq i \leq n$, x_i é uma **variável dependente** se na coluna i de $\mathbf{A}|\mathbf{d}$ existir um pivô. Caso contrário diremos que x_i é **variável livre**. Nestas condições podem ainda tirar-se as seguintes conclusões:

1. O sistema é impossível se e só se existir um pivô na última coluna de $\mathbf{A}|\mathbf{d}$.
2. O sistema é possível e determinado se e só se não existir um pivô na última coluna de $\mathbf{A}|\mathbf{d}$ e não existirem variáveis livres.
3. O sistema é possível e indeterminado se e só se não existe um pivô na última coluna de $\mathbf{A}|\mathbf{d}$ e existirem incógnitas livres.

1.6 Método de eliminação de Gauss[2]

PASSO 1: Ordenar as variáveis e escrever a matriz aumentada do sistema $\mathbf{A}|\mathbf{d}$.

PASSO 2: Por meio de operações elementares de linhas obter uma matriz em escada de linhas.

PASSO 3: Verificar se o sistema é possível. Neste caso identificar as variáveis livres e as dependentes e:

PASSO 4: Por meio de operações elementares de linhas obter uma matriz na forma reduzida e ler a solução.

[2] Johann Carl Friederich Gauss, n. 30 de Abril de 1777 em Brunswick, m. em 23 de Fevereiro de 1855 em Gottingen.

1.7 Exercícios

Exercício 1 *Quais dos seguintes pares* (x, y)*:*

$$(0,0)\,,\ (-1,1)\,,\ (1,-1)\ \ e\ \ (1,1)\,,$$

são soluções do sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x-2y=1 \\ 2x+2y=0 \end{cases} ?$$

Exercício 2 *Quais dos seguintes ternos* (x, y, z)*:*

$$(0,0,0)\,,\ (-1,1,0)\,,\ (1,-1,0)\,,\ (0,-1,1)\,,\ (-2,0,1)\ \ e\ \ (0,-1,0)$$

são soluções do sistema

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -x-2y-z=1 \end{cases} ?$$

Exercício 3 *Resolva os seguintes sistemas de equações lineares a duas incógnitas e interprete geometricamente as suas eventuais soluções :*

$$\text{a)} \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \end{cases} . \quad \text{b)} \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases} . \quad \text{c)} \begin{cases} 4x+5y=1 \\ 12x+15y=0 \end{cases} .$$

$$\text{d)} \begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases} . \quad \text{e)} \ \{x+y=1\,. \quad \text{f)} \begin{cases} 2x-y=4 \\ x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases} .$$

Exercício 4 *Resolva os seguintes sistemas de equações lineares a três incógnitas e proceda à interpretação geométrica das suas eventuais soluções:*

$$\text{a)} \begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ x+2y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} . \quad \text{b)} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+7y+7z=3 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} .$$

$$\text{c)} \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+10y+10z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases} . \quad \text{d)} \begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} .$$

Exercício 5 *Resolva os seguintes sistemas de equações lineares*

$$\text{a)} \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=3 \end{cases} . \quad \text{b)} \begin{cases} 2x+2y+2z+3w=3 \\ x+y+z+w=1 \\ 3x+3y+3z+2w=2 \end{cases} .$$

$$\text{c)} \begin{cases} x+z+2w=0 \\ 2x+3z+3w=0 \\ y+2w=2 \\ x+2z+w=0 \end{cases} . \quad \text{d)} \begin{cases} y_1+y_3+2y_4=0 \\ y_1+2y_2+y_3+y_4=1 \\ y_2+2y_4=8 \\ y_1+2y_3+y_4=0 \end{cases} .$$

Exercício 6 *Determine o conjunto das soluções dos seguintes sistemas:*

$$\text{a)}\ \begin{cases} y+z=0 \\ 2x+3w=2 \\ 6x+3y+3z+4w=6 \\ 3x+2w=3 \\ 5x+y+z+5w=5 \end{cases} . \quad \text{b)}\ \begin{cases} 3y-2z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ x+4y-3z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases} .$$

Exercício 7 *Em função dos parâmetros α e β, discuta os seguintes sistemas de equações lineares:*

$$\text{a)}\ \begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases} . \quad \text{b)}\ \begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 2x+y+(\alpha+1)z=4 \end{cases} .$$

Exercício 8 *Caracterize os vectores $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ que tornam possível o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z*

$$\begin{cases} x+y+3z=b_1 \\ 2x+2y-z=b_2 \\ 4x+4y+5z=b_3 \end{cases} .$$

Exercício 9 *Considere o sistema de equações lineares com parâmetros α e β, e incógnitas x, y e z :*

$$\begin{cases} 2x+7y=9 \\ 2x+\alpha y+\beta z=1 \\ 2x+7y+z=7 \end{cases} .$$

Determine os únicos valores de α e β para os quais o sistema é indeterminado.

Exercício 10 *Obtenha uma equação linear cujo conjunto de soluções seja:*

a) $S = \{(1+t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$.

b) $S = \{(1-t, 2s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

c) $S = \{(3t+2s, t-s+1, 2t-s+2) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 11 *Indique um sistema de equações lineares que tenha como conjunto de soluções:*

a) $S = \{(3s-2t+1, s, 5t-1, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

b) $S = \{(3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 12 *Determine um polinómio $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ cujo gráfico passe pelos pontos*

$$(1, 12),\ (2, 15)\ \text{ e }\ (3, 16).$$

Exercício 13 *Um mealheiro contém moedas de 1, 5 e 10 cêntimos num total de 13 moedas e de 83 cêntimos. Quantas moedas de cada tipo contém o mealheiro?*

Exercício 14 *Quatro números inteiros são dados. Seleccionando três deles, fazendo a respectiva média e adicionando ao quarto obtiveram-se os seguintes valores: 29, 23, 21 e 17. Determine aqueles números.*

Exercício 15 *Um filamento de espessura negligenciável está representado na Figura 1, onde são também indicadas as temperaturas em três nós do filamento (30º, 40º e 60º). Determinar as temperaturas dos restantes três nós, sabendo que cada uma delas é igual às médias das temperaturas dos três nós mais próximos.*

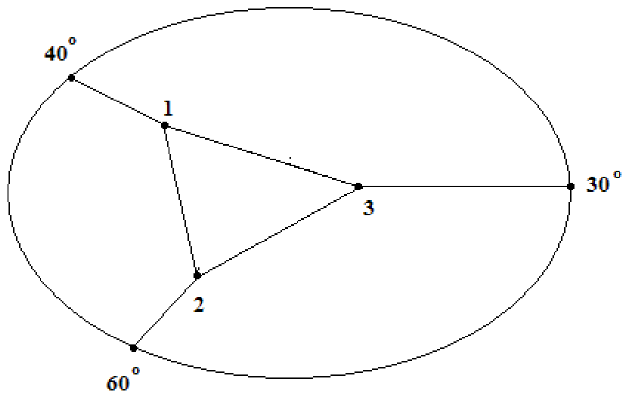

Figura 1

Exercício 16 *Sejam* $\mathrm{v}_1, ..., \mathrm{v}_p$, *pontos de* $\mathbb{R}^3$ *e suponha-se que para cada* $j = 1, ..., p$, *se encontra um objecto em* v_j *de massa* m_j. *Em Física tais objectos são chamados de pontos de massa. A massa total do sistema é*

$$m = m_1 + ... + m_p$$

e o ponto

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{1}{m}\left(m_1 \mathrm{v}_1 + ... + m_p \mathrm{v}_p\right)$$

é chamado de centro de gravidade (ou centro de massa) do sistema.

a) *Calcule o centro de gravidade de um sistema composto pelos pontos de massa indicados na seguinte tabela:*

Pontos	*Massas*
$(5, -4, 3)$	*2g*
$(4, 3, -2)$	*5g*
$(-4, -3, -1)$	*2g*
$(-9, 8, 6)$	*1g*

b) *Uma placa de espessura negligenciável com 3g de massa tem a forma de um triângulo de vértices* $(0, 1, 0)$, $(8, 1, 0)$ *e* $(2, 4, 0)$. *Supondo que a densidade da placa é uniforme, determine o seu centro de massa. (Este ponto coincide com o centro de massa de um sistema composto por 1g de massa colocado em cada vértice do triângulo).*

c) *Como distribuiria uma massa adicional de 6g pelos três vértices da placa de modo a deslocar o centro de gravidade da placa para o ponto* $(2, 2, 0)$?

2 Operações com matrizes

Uma matriz $m \times n$ é um quadro de números reais ou complexos com m filas horizontais e n filas verticais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chamaremos **linhas** às filas horizontais de $\mathbf{A}$ e **colunas** às suas filas verticais. O coeficiente (ou entrada) de uma matriz $\mathbf{A}$ relativo à linha i e coluna j representa-se por a_{ij} ou $[\mathbf{A}]_{ij}$.

O conjunto das matrizes $m \times n$ com coeficientes reais (resp. complexos) representa-se por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$).

2.1 Soma de matrizes e produto de uma matriz por um escalar

Dadas duas matrizes $p \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

pela **soma** de $\mathbf{A}$ com $\mathbf{B}$ entendemos a matriz, também $p \times n$,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}+b_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & \dots & a_{pn}+b_{pn} \end{bmatrix}.$$

O produto do escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ pela matriz $\mathbf{A}$ consiste na matriz

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{p1} & \alpha a_{p2} & \dots & \alpha a_{pn} \end{bmatrix}.$$

- Decorrentes de propriedades bem conhecidas dos números reais, facilmente se observa a validade das propriedades seguintes onde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são matrizes $n \times p$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

i) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$ (comutatividade).

ii) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (associatividade).

iii) $\alpha\,(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ (distributividade).

iv) $(\alpha+\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ (distributividade).

v) $(\alpha\beta)\,\mathbf{A} = \alpha\,(\beta\mathbf{A})$ (associatividade).

2.2 Produto de matrizes

Consideremos duas matrizes **A** e **B**, a primeira $m \times n$ e a segunda $n \times p$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{bmatrix}$$

(note que o número de colunas de **A** é igual ao número de linhas de b). À matriz **AB** com m linhas, p colunas e entradas $[\mathbf{AB}]_{ij}$ definidas por

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

chamamos matriz produto de **A** por **B**.

Observemos que, como consequência da definição de produto, a coluna j da matriz **AB** é dada pela expressão

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ ... \\ b_{nj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Analogamente, a linha i da matriz **AB** é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \end{bmatrix} \mathbf{B} &= a_{i1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \end{bmatrix} + a_{i2} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \end{bmatrix} + \cdots \\ & \cdots + a_{in} \begin{bmatrix} b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O produto de matrizes goza das propriedades a seguir indicadas.

- Seja **A** uma matriz $m \times n$, **B**, **C** matrizes de tamanhos adequados e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

i) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (associatividade).

ii) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade).

iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributividade).

iv) $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$ (associatividade).

v) $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{AI}_n$ onde

$$\underset{(\text{matriz } m\times m)}{\mathbf{I}_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underset{(\text{matriz } n\times n)}{\mathbf{I}_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

são chamadas de matrizes identidade (existência de elementos neutros).

Notemos que em geral o produto de matrizes **não é comutativo**.

2.3 Descrição matricial de um SEL

O produto de matrizes permite ainda uma descrição matricial do SEL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad ... \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n = d_p \end{cases},$$

através da relação

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_p \end{bmatrix}.$$

2.4 Transposta de uma matriz

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $p \times n$. A matriz **transposta** de $\mathbf{A}$ é a matriz $\mathbf{A}^T$ que se obtém a partir de $\mathbf{A}$, transformando a primeira linha de $\mathbf{A}$ na primeira coluna de $\mathbf{A}^T$, a segunda linha de $\mathbf{A}$ na segunda coluna de $\mathbf{A}^T$, etc. $\mathbf{A}^T$ é uma matriz $n \times p$.

Esta operação de transposição de uma matriz satisfaz as propriedades a seguir estabelecidas.

- Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $p \times n$, $\mathbf{B}$ uma matriz $n \times k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então (ver *ex.* 26 b):

i) $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$.

ii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

iii) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$.

iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

2.5 Exercícios

Exercício 17 *Sempre que possível efectue as seguintes operações de matrizes. Justifique os casos de impossibilidade.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$. c) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$. e) $\dfrac{2}{3}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 9 & 3 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} + \dfrac{3}{2}\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

f) $\begin{bmatrix} 0 & 8 & -7 & -6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ -4 & 6 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -9 & 10 \\ -4 & 2 & -8 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$.

Exercício 18 *Efectue os seguintes produtos de matrizes. Caso algum deles não seja possível, explique porquê.*

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}. \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 19 *Nos seguintes produtos, preencha os espaços em branco.*

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \square \end{bmatrix} = [3]. \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} \square & 1 & -8 & 4 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ \square \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ \square & 1 \\ 9 & \square \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ -9 \\ 12 \\ \square \end{bmatrix}. \qquad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \square & 6 & 1 \\ -7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ 2 \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exercício 20 *Efectue os seguintes produtos de matrizes:*

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}. \quad \text{h) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}. \quad \text{i) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

Exercício 21 *Preencha os espaços em branco nos seguintes produtos de matrizes:*

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & \square \\ \square & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & \square \\ \square & -4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} \square & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & 0 \\ 1 & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 2 & \square \\ \square & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & \square \\ 2 & 1 \\ \square & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \square & 1 \\ -3 & -1 & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \square & \square \\ \square & 3 & \square \\ \square & -3 & 12 \end{bmatrix}.$$

Exercício 22 *Resolva o SEL* $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *para:.*

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -8 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 23 *Com $a \in \mathbb{R}$ qualquer, seja*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Calcule* $\mathbf{A}^2$ *e* $\mathbf{A}^3$.

b) *Mostre as seguintes relações:*

$$\mathbf{A}^{2k} = \begin{bmatrix} a^{2k} & 0 \\ 0 & a^{2k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & a^{2k+1} \\ a^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, ...) .$$

Exercício 24 *Dê um exemplo de duas matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *para as quais:*

i) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$. ii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.

Exercício 25 *O traço de uma matriz quadrada* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ *consiste na soma das entradas de A que se encontram na diagonal principal. Isto é:*

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

a) *Justifique que* $\mathrm{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\mathbf{A} + \mathrm{tr}\mathbf{B}$.

b) *É uma relação do mesmo tipo verificada para a multiplicação de uma matriz por um escalar? E para o produto de matrizes?*

c) *Verifique para matrizes* 2×2 *que* $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.

Exercício 26 *A transposta de uma matriz* $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ *é uma outra matriz designada por* $\mathbf{A}^T$ $(n \times m)$ *em que a primeira linha de* $\mathbf{A}^T$ *é a primeira coluna de* $\mathbf{A}$, *a segunda linha de* $\mathbf{A}^T$ *é a segunda coluna de* $\mathbf{A}$, *etc.*

a) *Indique as transpostas das seguintes matrizes:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) *Justifique que:* i) $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$. ii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$. iii) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$. iv) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Exercício 27 *Uma matriz* $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ *diz-se simétrica sempre que* $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

a) *Dê exemplo de uma matriz,* 3×3, *simétrica sem entradas nulas.*

b) $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ *é sempre uma matriz simétrica? E* $\mathbf{AA}^T$?

Exercício 28 *Uma matriz quadrada,* $\mathbf{M}$, *é dita de Markov se cada entrada da matriz estiver entre zero e um e a soma dos elementos de cada coluna for igual a* 1.

a) *Diga se as seguintes matrizes são de Markov:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,24 \\ 0,25 & 0 & 0,37 \\ 0,55 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

b) *Analise para matrizes* 2×2, *se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:*

i) A soma de matrizes de Markov é uma matriz de Markov.

ii) O produto de matrizes de Markov é uma matriz de Markov.

3 Inversão de matrizes

Uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, diz-se **invertível** se existir uma matriz $\mathbf{C}$, também $n \times n$, tal que

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n,$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade $n \times n$ (elemento neutro para a multiplicação de matrizes). Nestas circunstâncias a matriz $\mathbf{C}$ diz-se **matriz inversa de A** e será representada por $\mathbf{A}^{-1}$.

- Quando existe, a inversa de uma matriz é única (ver *ex.* 31).
- Para o caso $n = 2$, se
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
é uma matriz tal que $ad - bc \neq 0$, então A é invertível e a sua inversa é
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Uma matriz que não admite inversa é chamada de **matriz singular**.

3.1 Propriedades das matrizes invertíveis

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes $n \times n$ invertíveis. Então:

i) $\mathbf{A}^{-1}$ é invertível e $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$ (ver exercício 32 a)).

ii) $\mathbf{A}^T$ é invertível e $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$.

iii) Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash \{0\}$, $(\alpha\mathbf{A})$ é invertível e $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$ (ver exercício 32 c)).

iv) $(\mathbf{AB})$ é invertível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

3.2 Teorema da matriz inversa

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

(1) $\mathbf{A}$ é invertível.

(2) A forma reduzida de $\mathbf{A}$ é $\mathbf{I}_n$.

(3) A forma reduzida de $\mathbf{A}$ tem n pivôs.

(4) Para qualquer $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ é possível e determinado.

(5) O sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ só tem a solução nula.

(6) Existe uma matriz $\mathbf{C}$ $(n \times n)$ tal que $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_n$.

(7) Existe uma matriz $\mathbf{D}$ $(n \times n)$ tal que $\mathbf{AD} = \mathbf{I}_n$.

3.3 Matrizes elementares

Uma **matriz elementar** $(n \times n)$ é uma matriz que se obtém a partir da matriz identidade $\mathbf{I}_n$ por meio de uma única operação elementar sobre as linhas de $\mathbf{I}_n$.

Estas matrizes possuem as seguintes propriedades:

- Uma matriz elementar é invertível e a sua inversa é também uma matriz elementar.
- Se $\mathbf{A}$ é uma matriz qualquer e $\mathbf{E}$ uma matriz elementar, ambas $n \times n$, $\mathbf{EA}$ é a matriz que se obtém a partir de $\mathbf{A}$ por execução da mesma operação elementar que permitiu obter $\mathbf{E}$ a partir da matriz identidade $\mathbf{I}_n$.
- A forma reduzida da matriz $\mathbf{A}$ pode ser obtida por sucessivas multiplicações de matrizes elementares.
- A forma reduzida da matriz $\mathbf{A}$ será $\mathbf{I}_n$ se e só se existirem matrizes elementares $\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_k$, tais que
$$\mathbf{E}_k ... \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{I}_n.$$
Nestas circunstâncias $\mathbf{A}$ é invertível e
$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k ... \mathbf{E}_1 \mathbf{I}_n.$$

Estas relações resumem o **algoritmo de Gauss-Jordan**[3] para a inversão de uma matriz: **todas as operações elementares que transformem a matriz $\mathbf{A}$ na matriz identidade $\mathbf{I}_n$, igualmente repetidas pela mesma ordem sobre $\mathbf{I}_n$ originam a matriz $\mathbf{A}^{-1}$.**

[3] Wilhelm Jordan, n. em 1842 em Ellwangen, m. 1899 em Hannover.

3.4 Exercícios

Exercício 29 *Sempre que possível, calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes:*

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício 30 *Escreva os seguintes sistemas de equações lineares na forma matricial* $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *e utilize, respectivamente, as alíneas* e) *e* h) *do exercício anterior para os resolver.*

$$\text{a)} \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} . \quad \text{b)} \begin{cases} x + z = 1 \\ y + w = 1 \\ x + 2z + w = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} .$$

Exercício 31 *Mostre que a inversa de uma matriz quadrada* $\mathbf{A}$*, quando existe, é única.*

Exercício 32 *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes* $n \times n$*, invertíveis.*

a) *Será* $\mathbf{A}^{-1}$ *invertível?*

b) *Ter-se-á* $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$, $(k = 1, 2, ...)$?

c) *Se* $\alpha \in \mathbb{R}$*, caso exista, qual é a inversa de* $\alpha\mathbf{A}$? *E a de* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$? *Será* $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$?

Exercício 33 *Considere as matrizes;*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz $\mathbf{ABCD}$ *e a sua inversa* $(\mathbf{ABCD})^{-1}$.

Exercício 34 *Considere as matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$*, definidas pelas igualdades*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Determine a matriz* $\mathbf{A}^{-1}$.

b) *Calcule a única matriz* $\mathbf{X}$ *que satisfaz a igualdade*

$$\mathbf{B}^2\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}.$$

Exercício 35 *Considere as matrizes* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$*, definidas pelas igualdades*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz $\mathbf{X}$ *tal que:*

a) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{B} + 3\mathbf{A}^{-1}$.

b) $\mathbf{BX} = \mathbf{A}$.

Exercício 36 [4]*Com* $\alpha \in \mathbb{R}$ *seja* $\mathbf{R}_\alpha$ *a matriz dada pela relação*

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{R}_\alpha\mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_{\alpha+\beta}$ *e com base nesta igualdade determine a inversa de* $\mathbf{R}_\alpha$*. Indique ainda se a relação*

$$\mathbf{R}_\alpha^{-1} = \mathbf{R}_\alpha^T$$

é verdadeira ou falsa.

Exercício 37 *Uma matriz quadrada diz-se de permutação se cada coluna e cada linha tiver uma entrada igual a* 1 *e as restantes entradas iguais a zero. Por exemplo, a matriz identidade é uma matriz de permutação.*

a) *Dê exemplo de uma matriz* $\mathbf{A}$ *de permutação,* 3×3*, que seja diferente da matriz identidade.*

b) *Verifique que dada uma matriz qualquer* $\mathbf{B}$ (3×3), *a matriz* $\mathbf{AB}$ *procede a uma permutação das linhas de* $\mathbf{B}$ *e a matriz* $\mathbf{BA}$ *resulta de* $\mathbf{B}$ *por uma permutação das suas colunas.*

c) *Verifique que* $\mathbf{A}$ *é invertível, tendo como inversa a sua transposta.*

Exercício 38 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada tal que* $\mathbf{A}^3 = 0$*. Por exemplo*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que a matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ *é invertível com inversa dada por* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2$.

Exercício 39 *Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal principal são todos nulos:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, a identidade é uma matriz diagonal.

[4]Tenha em conta que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ e $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

a) *Use o método de indução para mostrar que*

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^k \end{bmatrix}.$$

b) *Mostre que se nenhum dos elementos da diagonal principal de* $\mathbf{A}$ *é zero então* $\mathbf{A}$ *é invertível e indique a respectiva inversa.*

4 Soluções

1) Apenas $(1,-1)$. 2) Somente $(1,-1,0)$ e $(-2,0,1)$

3) a) Sistema possível e determinado: $S = \{(3,-1)\}$; as duas rectas intersectam-se no ponto $(3,-1)$.

b) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \{(1/2 - 3y/2, y) : y \in \mathbb{R}\}$; as duas rectas são coincidentes.

c) Sistema impossível: $S = \varnothing$; as duas rectas são paralelas.

d) Sistema impossível: $S = \varnothing$; as três rectas não são concorrentes num ponto.

e) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \{(1-y, y) : y \in \mathbb{R}\}$; equação de uma recta.

f) Sistema possível e determinado: $S = \{(3,2)\}$; as três rectas são concorrentes no ponto $(3,2)$.

4) a) Sistema possível e determinado: $S = \{(-1,0,1)\}$; os três planos intersectam-se no ponto $(-1,0,1)$.

b) Sistema impossível: $S = \varnothing$; os três planos não se intersectam num ponto.

c) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \{z\,(5,-3,1) : z \in \mathbb{R}\}$; os três planos intersectam-se segundo uma recta.

d) Sistema indeterminado com uma incógnita livre: $S = \{z\,(-2,1,1) : z \in \mathbb{R}\}$; os dois planos intersectam-se segundo uma recta.

5) a) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres:

$$S = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4, x_2, -1, x_4\right) : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Sistema indeterminado com duas incógnitas livres:

$$S = \{(-y-z, y, z, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

c) Sistema indeterminado com uma incógnita livre:

$$S = \{(-3w, 2-2w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}.$$

d) Sistema possível e determinado $S = \{(-9,2,3,3)\}$.

6) a) $\{(1,-z,z,0) : z \in \mathbb{R}\}$. b) $\{(1,2,3)\}$.

7) a) Se $\alpha \neq 11$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha = 11$ e $\beta = 20$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 11$ e $\beta \neq 20$ o sistema é impossível.

b) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 6$ o sistema é possível e determinado; se $\alpha = 0$ e $\beta = -2/3$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 0$ e $\beta \neq -2/3$ o sistema é impossível; se $\alpha = 6$ e $\beta = -2/63$ o sistema é indeterminado; se $\alpha = 6$ e $\beta \neq -2/63$ o sistema é impossível.

8) O sistema é possível se e só se $2b_1 + b_2 - b_3 = 0$.

9) $\alpha = 7$ e $\beta = 4$.

10) a) $x_1 + x_2 = 2$. b) $x_1 + 0x_2 + x_3 = 1$. c) $x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -3$.

11) a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

12) $p(t) = 7 + 6t - t^2$.

13) 3, 4 e 6, respectivamente.

14) 3, 9, 12 e 21.

15) Nó 1: 42,5°; nó 2: 47,5°; nó 3: 40°.

16) a) $\left(\frac{13}{10}, \frac{9}{10}, 0\right)$. b) $\left(\frac{10}{3}, 2, 0\right)$. b) 3,5g pelo vértice $(0,1,0)$, 0,5g pelo vértice $(8,1,0)$ e 2g pelo vértice $(2,4,0)$.

17) a) Não é possível. Uma matriz é 1×2 e a outra 2×1.

b) $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 22 & 5 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. e) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

f) Não é possível. Uma matriz é 3×4 e a outra 3×3.

18) a) $[4]$. b) Não é possível. A primeira matriz é 3×2 e a segunda 3×1.

c) Não é possível. A primeira matriz é 3×1 e a segunda 2×1.

d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$. e) $\begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

f) Não é possível. A primeira matriz é 2×2 e a segunda 3×1.

19)

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \boxed{2} \end{bmatrix} = [3]$. b) $\begin{bmatrix} \boxed{5} & 1 & -8 & 4 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ \boxed{3} \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ \boxed{2} & 1 \\ 9 & \boxed{-6} \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ -9 \\ 12 \\ \boxed{-4} \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \boxed{-4} & 6 & 1 \\ -7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 2 \\ \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$.

20)

$$\text{a)}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}.\ \text{b)}\begin{bmatrix}4&-3&-14\\3&-1&-8\end{bmatrix}.\ \text{c)}\begin{bmatrix}5&2&1\\5&1&3\\6&3&0\end{bmatrix}.\ \text{d)}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.\ \text{e)}\begin{bmatrix}1&2&1\\4&1&4\end{bmatrix}.$$

$$\text{f)}\begin{bmatrix}30&4\\2&10\\2&20\end{bmatrix}.\ \text{g)}\begin{bmatrix}2&20\\2&10\\30&4\end{bmatrix}.\ \text{h)}\begin{bmatrix}30&4\\2&10\\6&60\end{bmatrix}.\ \text{i)}\begin{bmatrix}30&4\\2&10\\62&28\end{bmatrix}.$$

21)

$$\text{a)}\begin{bmatrix}4&\boxed{-2}\\\boxed{-3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&\boxed{6}\\\boxed{4}&-4\end{bmatrix}.$$

$$\text{b)}\begin{bmatrix}\boxed{3}&-1\\-2&0\\0&\boxed{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boxed{-1}&0\\1&\boxed{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-2\\2&\boxed{0}\\\boxed{1}&2\end{bmatrix}.$$

$$\text{c)}\begin{bmatrix}1&\boxed{-1}\\2&1\\\boxed{0}&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\boxed{2}&1\\-3&-1&\boxed{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&\boxed{3}&\boxed{-3}\\\boxed{-3}&3&\boxed{6}\\\boxed{-9}&-3&12\end{bmatrix}.$$

22) a) Sistema impossível. b) Sistema possível e determinado $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3/5\\-4/5\\1\end{bmatrix}$.

23) a) $\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix}0&a^3\\a^3&0\end{bmatrix}$.

24) As relações não são verificadas se for $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

25) b) Para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$ é $\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A})=\alpha(\operatorname{tr}\mathbf{A})$. A relação $\operatorname{tr}(\mathbf{AB})=(\operatorname{tr}\mathbf{A})(\operatorname{tr}\mathbf{B})$ não é válida como se pode comprovar através do exemplo

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

26) a) $\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}1&0\\3&2\\-1&4\\-3&-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T=\begin{bmatrix}2&1&-3&0\\0&3&4&-1\\-1&-2&5&1\end{bmatrix}$.

27) a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&1&2\\1&b&3\\2&3&c\end{bmatrix}$. b) Sim, em ambos os casos.

28) a) $\mathbf{A}$ é de Markov, $\mathbf{B}$ não.

b) i) Falsa. Por exemplo $\begin{bmatrix}0,3&0,1\\0,7&0,9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0,8&0,3\\0,2&0,7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1,1&0,4\\0,9&1,6\end{bmatrix}$.

ii) Verdadeira.

29 a) A matriz não é invertível.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. e) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

f) A matriz não é invertível. g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30) a) $\{(0,0,-1)\}$; b) $\{(4,0,-3,1)\}$.

32) a) Sim e a sua inversa é A. b) Sim. Pode usar o método de indução para o mostrar.

c) Se $\alpha \neq 0$, $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$. Para $\alpha = 0$ não há invertibilidade. O mesmo pode acontecer quando se somam duas matrizes invertíveis. Por exemplo, $\mathbf{I}$ e $-\mathbf{I}$ são invertíveis (elas próprias constituem as suas inversas). Mas $\mathbf{I} + (-\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ não é invertível.

33) $\mathbf{ABCD} = \begin{bmatrix} 0 & -13 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $(\mathbf{ABCD})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 \\ -5/2 & 0 & -13/2 \end{bmatrix}$.

34) a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

35) a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

36) $\mathbf{R}_\alpha^{-1} = \mathbf{R}_{-\alpha} = \mathbf{R}_\alpha^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

37) a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

39) b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$.