CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC

$2^{\underline{0}}$ TESTE (Versão A)

15/Janeiro/2011 Duração: 1h30m

1. Calcule os limites seguintes:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x}{e^x} \qquad\qquad \lim_{x\to e}(\log x)^{\frac{1}{e-x}}$$

Resolução:

Quanto ao 1^o limite, e aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x}{e^x}\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x+1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{e^x}\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$$

Para o 2^o, tem-se

$$\lim_{x\to e}(\log x)^{\frac{1}{e-x}}=\lim_{x\to e}e^{\frac{1}{e-x}\log(\log x)}$$

Aplicando de novo a Regra de Cauchy à indeterminação $\frac{0}{0}$ no expoente,

$$\lim_{x\to e}\frac{\log(\log x)}{e-x}\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x\log x}}{-1}=-\frac{1}{e}.$$

Então

$$\lim_{x\to e}(\log x)^{\frac{1}{e-x}}=e^{-1/e}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\frac{\cos(\arctan x)}{1+x^2}\quad,\qquad\frac{2\log x}{x}\quad,\qquad\frac{4e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

Resolução:

$$P\frac{\cos(\arctan x)}{1+x^2}=\sin(\arctan x)\qquad\qquad P\frac{2\log x}{x}=(\log x)^2$$

$$P\frac{4e^{3x}}{1+e^{3x}}=\frac{4}{3}P\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}=\frac{4}{3}\log\left|1+e^{3x}\right|=\frac{4}{3}\log\left(1+e^{3x}\right)$$

3. Calcule a área da região plana delimitada pelas rectas de equação $x=\dfrac{1}{e}$, $x=e$ e $y=1-x$ e pelo gráfico da função $\log x$.

Resolução:
A área vem dada por

$$\int_{1/e}^{1}(1-x-\log x)dx+\int_{1}^{e}\left[\log x-(1-x)\right]dx$$

Primitivando por partes, vem

$$P\log x = x\log x - x$$

pelo que

$$P(1-x-\log x)=x-\frac{x^2}{2}-x\log x+x \quad \text{e} \quad P\left[\log x-(1-x)\right]=x\log x-x-x+\frac{x^2}{2}$$

Assim,

$$\int_{1/e}^{1}(1-x-\log x)dx+\int_{1}^{e}\left[\log x-(1-x)\right]dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}-x\log x\right]_{1/e}^{1}+\left[x\log x-2x+\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{e}=$$

$$=2-\frac{1}{2}-(\frac{2}{e}-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{e}\log\frac{1}{e})+e-2e+\frac{e^2}{2}-(-2+\frac{1}{2})=3-e-\frac{3}{e}+\frac{1}{2e^2}+\frac{e^2}{2}$$

4. Determine a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{e^{n+1}}$$

e, na hipótese de convergência, calcule a sua soma.

Resolução:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{e^{n+1}}=\frac{1}{e}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n+\frac{1}{e}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{e}\right)^n$$

A série é soma de duas séries geométricas de razão $\frac{2}{e}$ e $\frac{-1}{e}$, respectivamente. Como $\left|\frac{2}{e}\right|<1$ e $\left|\frac{-1}{e}\right|<1$, são ambas convergentes e a série dada é, pois, convergente. A sua soma vem

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{e^{n+1}}=\frac{1}{e}\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^2}{1-\frac{2}{e}}+\frac{1}{e}\frac{\left(\frac{-1}{e}\right)^2}{1-\left(\frac{-1}{e}\right)}=\frac{4}{e^2(e-2)}+\frac{1}{e^2(e+1)}=\frac{5e+2}{e^2(e-2)(e+1)}$$

5. Seja g uma função definida e diferenciável em $]0,+\infty[$ e considere a função ϕ dada por

$$\phi(x) = \int_{2x}^{\log x} g(t)dt$$

a) Indique, justificando, qual é o domínio de ϕ.

Resolução:

Dado que g é diferenciável em $]0,+\infty[$, g é contínua, logo é integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em $]0,+\infty[$. Assim, devemos ter

$$2x > 0 \wedge \log x > 0 \Longleftrightarrow x > 0 \wedge x > 1 \Longleftrightarrow x > 1$$

O domínio da função g é $]1,+\infty[$.

b) Determine as funções ϕ' e ϕ''.

.**Resolução:**

$$\phi'(x) = \frac{1}{x}g(\log x) - 2g(2x)$$

$$\phi''(x) = -\frac{1}{x^2}g(\log x) + \frac{1}{x^2}g'(\log x) - 4g'(2x) \ ,$$

para todo o $x > 1$.

6. Determine a única função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e

$$\frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} = \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

.**Resolução:**

Primitivando ambos os membros da igualdade acima, sabemos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\arctan f(x) = c - \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Atendendo a que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

$$\arctan f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arctan 0 = 0 = c - \cos\frac{\pi}{2} = c$$

Então,

$$\arctan f(x) = -\cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e tem-se

$$f(x) = tg(-\cos x) = -tg(\cos x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

.