**Ficha 8**
**Resolução dos exercícios propostos**

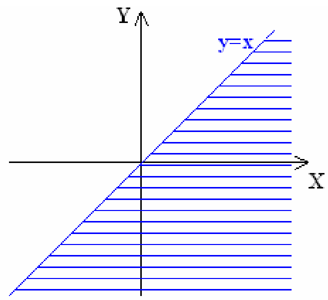
| Esboços no plano |
|---|

**I.1** Represente os seguintes domínios no plano:

**a)** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq y\}$

***Resolução:***

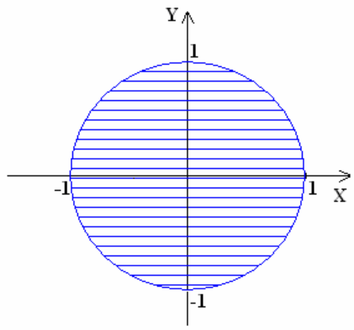
Representação gráfica do domínio:




**b)** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

***Resolução:***

Representação gráfica do domínio:

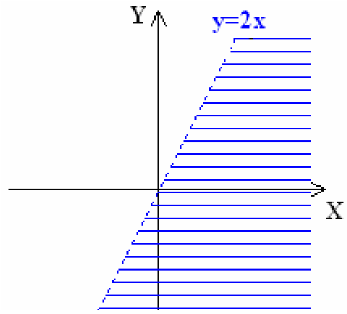



**c)** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x-y>0\}$

***Resolução:***

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x-y>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -y>-2x\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y<2x\}$

Representação gráfica do domínio:

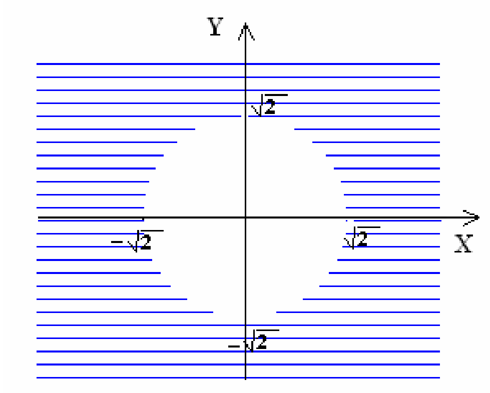


**d)** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2>0\}$

***Resolução:***

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>2\}$

Representação gráfica do domínio:

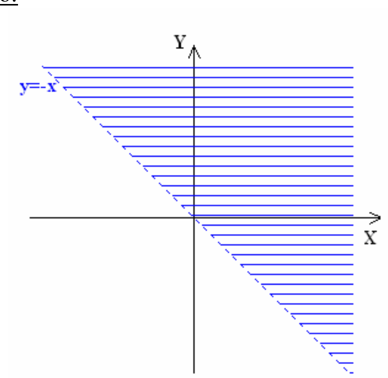



**e)** $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}$

***Resolução:***

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>-x\}$

Representação gráfica do domínio:



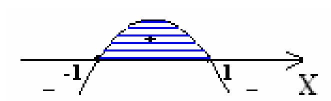

**f)** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\wedge 1-x^2\geq 0\}$

***Resolução:***

$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\wedge 1-x^2\geq 0\}\underset{(*)}{=}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\wedge -1\leq x\leq 1\}$

*Cálculos auxiliares*: $(*)$

$1-x^2=0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)=0\Leftrightarrow 1-x=0\vee 1+x=0\Leftrightarrow -x=-1\vee x=-1\Leftrightarrow x=1\vee x=-1$



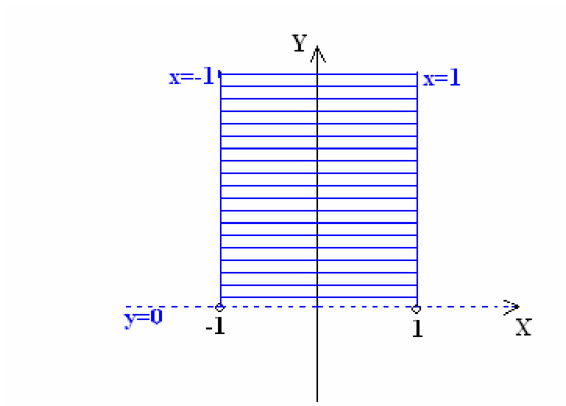
***Outra forma de racionar:***

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(1-x^2>0 \vee 1-x^2=0\right) \Leftrightarrow \left[(1-x)(1+x)>0 \vee -x^2=-1\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\left((1-x>0 \wedge 1+x>0) \vee (1-x<0 \wedge 1+x<0)\right) \vee x^2=1\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\left((-x>-1 \wedge x>-1) \vee (-x<-1 \wedge x<-1)\right) \vee x=\pm 1\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\left((x<1 \wedge x>-1) \vee (x>1 \wedge x<-1)\right) \vee x=\pm 1\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\left((-1<x<1) \vee (x\in\varnothing)\right) \vee x=\pm 1\right] \Leftrightarrow -1<x<1 \vee x=\pm 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$$

***Outra forma de resolver:***

$$1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \vee 1-x^2=0 \Leftrightarrow -x^2>-1 \vee -x^2=-1$$
$$\Leftrightarrow x^2<1 \vee x^2=1 \underset{\substack{\uparrow \\ x^2<y^2 \Leftrightarrow |x|<|y| \\ \text{(folhas de apoio de Mat.I – pág. 1)}}}{\Leftrightarrow} |x|<1 \vee x=\pm 1 \Leftrightarrow -1<x<1 \vee x=\pm 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$$

<u>Representação gráfica do domínio:</u>




**Domínios de funções**

**I.2** Determine os domínios das seguintes funções e represente-os graficamente:

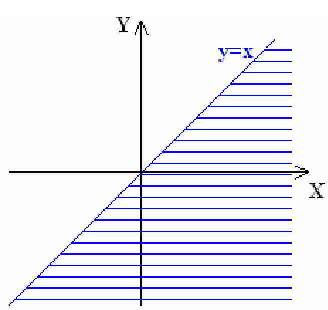
**a)** $f(x,y)=\sqrt[5]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}$

***<u>Resolução:</u>***

<u>Domínio:</u>

$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\geq 0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq y\right\}$

<u>Representação gráfica do domínio:</u>



**b)** $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)+\cos\left(x^2-y^2\right)$

***Resolução:***

Domínio:

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2\neq 0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sim\left(x^2-y^2=0\right)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sim\left(x^2=y^2\right)\right\}$$

$$\underset{(*)}{=}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sim\left(x=y\vee x=-y\right)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y\wedge x\neq -y\right\}$$

*Cálculos auxiliares*: $(*)$

$$x^2=y^2\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pela propriedade}\\ x^2=y^2\Leftrightarrow x=y\vee x=-y}}{\Leftrightarrow} x=y\vee x=-y$$

***Outra forma de resolver:***

$$x^2=y^2\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ambos os membros}\\ \text{são positivos}}}{\Leftrightarrow}\sqrt{x^2}=\sqrt{y^2}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Se } n \text{ é par e } x\in\mathbb{R}^-\\ \text{então } \sqrt[n]{x^n\cdot a}=|x|\cdot\sqrt[n]{a}\\ \text{(folhas de apoio de Mát.0 pág.5)}}}{\Leftrightarrow}|x|=|y|\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Pela propriedade:}\\ |x|=|y|\Leftrightarrow x=y\ \vee\ x=-y\\ \text{(folhas de apoio de Mát.I pág.1)}}}{\Leftrightarrow}x=y\vee x=-y$$

***Outra forma de resolver:***

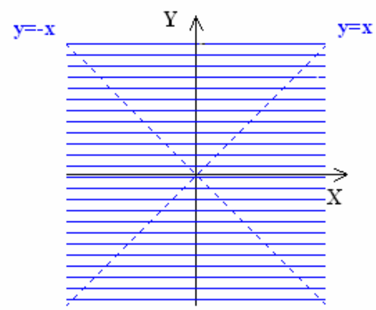
$$x^2=y^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y^2}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Se } n \text{ é par e } x\in\mathbb{R}^-\\ \text{então } \sqrt[n]{x^n\cdot a}=|x|\cdot\sqrt[n]{a}\\ \text{(folhas de apoio de Mát.0 pág.5)}}}{\Leftrightarrow}x=\pm|y|$$

- Se $y\geq 0$ então $|y|=y$, e temos $x=\pm y\Leftrightarrow x=-y\vee x=y$
- Se $y<0$ então $|y|=-y$, e temos $x=\pm(-y)\Leftrightarrow x=-(-y)\vee x=-y\Leftrightarrow x=y\vee x=-y$

Logo em qualquer dos casos tem-se:

$$x=-y\vee x=y\,.$$

Representação gráfica do domínio:

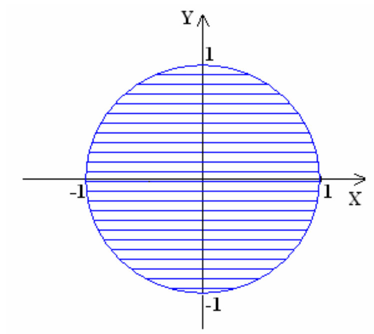


**c)** $f(x,y) = 2^{4-x^2-y^2} + \sqrt{1-x^2-y^2}$

***Resolução:***
Domínio:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2-y^2 \geq -1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

Representação gráfica do domínio:




**d)** $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}} + \sqrt[6]{4-x^2}$

***Resolução:***
Domínio:

$$\begin{aligned} D_f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2-y^2} \neq 0 \wedge x^2-y^2 \geq 0 \wedge 4-x^2 \geq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2 \neq 0 \wedge x^2-y^2 \geq 0 \wedge 4-x^2 \geq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2 > 0 \wedge 4-x^2 \geq 0\} \\ &\underset{(*)}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)(x+y) > 0 \wedge -2 \leq x \leq 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(x-y>0 \wedge x+y>0) \vee (x-y<0 \wedge x+y<0)] \wedge -2 \leq x \leq 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(-y>-x \wedge y>-x) \vee (-y<-x \wedge y<-x)] \wedge -2 \leq x \leq 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(y<x \wedge y>-x) \vee (y>x \wedge y<-x)] \wedge -2 \leq x \leq 2\} \end{aligned}$$

*Cálculos auxiliares*: $(*)$

- $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x=y \vee x=-y$
  (ver no exercício 1.b outras formas de resolver a equação $x^2-y^2=0$ )

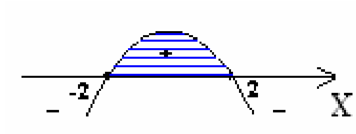
  Assim,
  $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$

  ***Outra forma de raciocinar:***

  $$x^2-y^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Caso notável da multiplicação:} \\ a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \\ \text{(Folhas de apoio de Mat.0-pág.7)}}}{=} (x-y)(x-y)$$

- $4-x^2=0 \Leftrightarrow 2^2-x^2=0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Caso notável da multiplicação:} \\ a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \\ \text{(Folhas de apoio de Mat.0 - pág.7)}}}{\Leftrightarrow} (2-x)(2+x)=0 \Leftrightarrow 2-x=0 \vee 2+x=0$

  $\Leftrightarrow -x=-2 \vee x=-2 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$




***Outra forma de raciocinar:***

$$4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(4-x^2>0 \vee 4-x^2=0\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Caso notável da multiplicação:} \\ a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \\ \text{(Folhas de apoio de Mat.0 - pág.7)}}}{\Leftrightarrow} \left[(2-x)(2+x)>0 \vee -x^2=-4\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left((2-x>0 \wedge 2+x>0) \vee (2-x<0 \wedge 2+x<0)\right) \vee x^2=4\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left((-x>-2 \wedge x>-2) \vee (-x<-2 \wedge x<-2)\right) \vee x=\pm 2\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left((x<2 \wedge x>-2) \vee (x>2 \wedge x<-2)\right) \vee x=\pm 2\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\left((-2<x<2) \vee (x \in \varnothing)\right) \vee x=\pm 2\right] \Leftrightarrow -2<x<2 \vee x=\pm 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

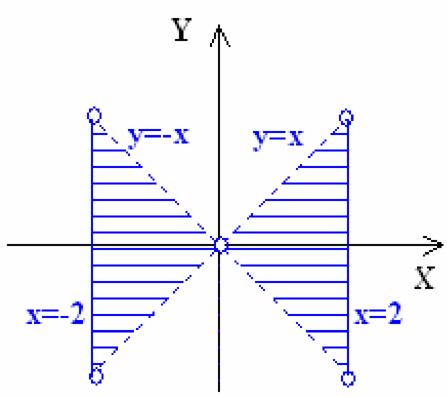
***Outra forma de raciocinar:***

$$4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4-x^2>0 \vee 4-x^2=0 \Leftrightarrow -x^2>-4 \vee -x^2=-4$$

$$\Leftrightarrow x^2<4 \vee x^2=4 \Leftrightarrow x^2<2^2 \vee x^2=4 \underset{\substack{\uparrow \\ x^2<y^2 \Leftrightarrow |x|<|y| \\ \text{(folhas de apoio de Mat.1 - pág. 1)}}}{\Leftrightarrow} |x|<2 \vee x=\pm 2$$

$$\Leftrightarrow -2<x<2 \vee x=\pm 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

<u>Representação gráfica do domínio:</u>



**Curvas de Nível**

**I.3** Represente, sempre que possível, graficamente as curvas de nível -1,0,1 das funções seguintes:

**a)** $f(x,y) = x$

***Resolução:***

As curvas de nível são dadas por:

$$L(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\}$$

Assim a curva de nível associada

- ao valor -1:

  $L(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\}$

  Representa uma recta vertical

- ao valor 0:

  $L(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

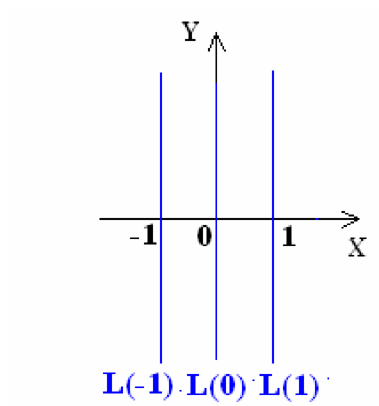
  Representa uma recta vertical

- ao valor 1:

  $L(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$

  Representa uma recta vertical

Representação gráfica destas curvas de nível:




**b)** $f(x,y) = y$

***Resolução:***

As curvas de nível são dadas por:

$$L(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = c\}$$

Assim a curva de nível associada

- ao valor -1:

  $L(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$

  Representa uma recta horizontal

- ao valor 0:

  $L(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

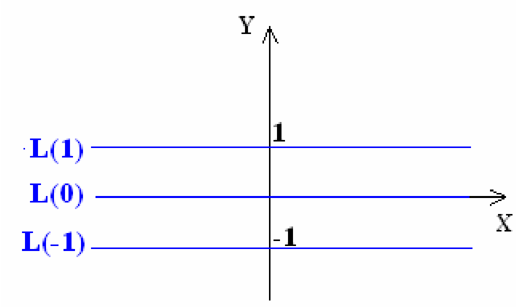
  Representa uma recta horizontal

- ao valor 1:

$$L(1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1\}$$

Representa uma recta horizontal

Representação gráfica destas curvas de nível:




**c)** $f(x,y)=x+y$

***Resolução:***

As curvas de nível são dadas por:

$$L(c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=c\}$$

Assim a curva de nível associada

- ao valor -1:

$$L(-1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=-1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x-1\}$$

Representa uma recta

- ao valor 0:

$$L(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x\}$$

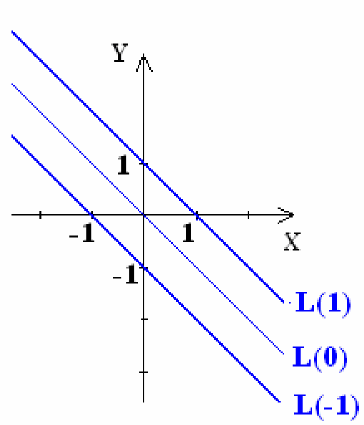
Representa uma recta

- ao valor 1:

$$L(1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1\}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-x+1\}$$

Representa uma recta

Representação gráfica destas curvas de nível:



**d)** $f(x,y) = x^2 - y$

***Resolução:***

As curvas de nível são dadas por:

$$L(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = c\}$$

Assim a curva de nível associada

- ao valor -1:

$$L(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = -1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}$$

Representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para cima.

- ao valor 0:

$$L(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

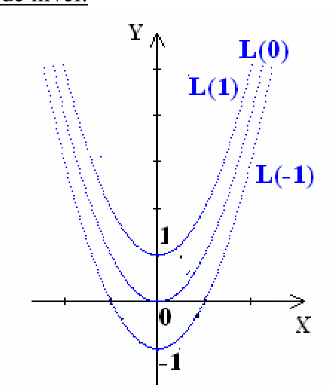
Representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para cima.

- ao valor 1:

$$L(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1\}$$

Representa uma parábola de eixo vertical com concavidade voltada para cima.

Representação gráfica destas curvas de nível:




**e)** $f(x,y) = y^2 - x$

***Resolução:***

As curvas de nível são dadas por:

$$L(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x = c\}$$

Assim a curva de nível associada

- ao valor -1:

$$L(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x = -1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 + 1\}$$

Representa uma parábola de eixo horizontal com concavidade voltada para a direita.

- ao valor 0:

$$L(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$$

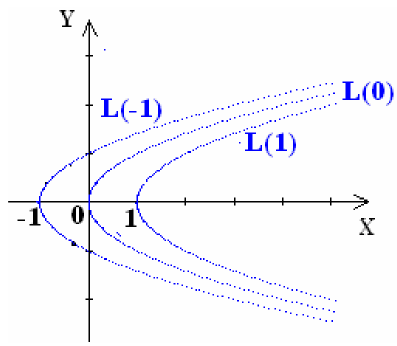
Representa uma parábola de eixo horizontal com concavidade voltada para a direita.

- ao valor 1:

$$L(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2 - 1\}$$

Representa uma parábola de eixo horizontal com concavidade voltada para a direita.

Representação gráfica destas curvas de nível:




**f)** $f(x,y) = x^2 + y^2$

***Resolução:***

As curvas de nível são dadas por:

$$L(c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$$

Assim a curva de nível associada

- ao valor -1:

$$L(-1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 = -1}_{\text{Condição impossível}}\right\} = \varnothing$$

- ao valor 0:

$$L(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y = 0\} = \{(0,0)\}$$

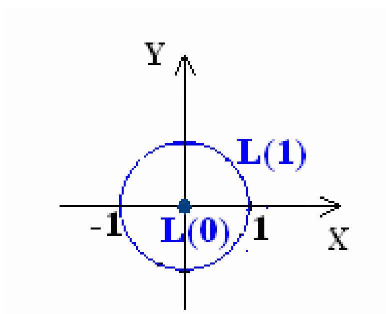
Representa o ponto $(0,0)$.

- ao valor 1:

$$L(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Representa uma circunferência de centro (0, 0) e de raio 1

Representação gráfica destas curvas de nível:



**g)** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

***Resolução:***

As curvas de nível são dadas por:

$$L(c)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=c\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln(x^2+y^2)=c\}$$

Assim a curva de nível associada

- ao valor -1:

$$L(-1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln(x^2+y^2)=-1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=e^{-1}\}$$

Representa uma circunferência de centro (0, 0) e de raio $\sqrt{e^{-1}}$

- ao valor 0:

$$L(0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln(x^2+y^2)=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=e^0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$$

Representa uma circunferência de centro (0, 0) e de raio 1

- ao valor 1:

$$L(1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln(x^2+y^2)=1\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=e\}$$

Representa uma circunferência de centro (0, 0) e de raio $\sqrt{e}$

Representação gráfica destas curvas de nível: