CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
1$^{\underline{o}}$ TESTE (Versão A)

14 /Novembro /2009 Duração: 1h30m

I

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq \frac{2}{x} \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \log \frac{x}{2} \leq 0 \right\}.$$

1. Mostre que $A =]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$ e identifique o conjunto B.
2. Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\min(A \cap B)$, $\max(B \backslash A)$, $\sup(B \backslash \mathbb{Q})$.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{n\sqrt{n}-1}{1-n}, \qquad \lim \frac{(-1)^n n}{n^4 + \cos n}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3+4^n}}$$

2. Considere a sucessão de números reais definida por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n} \quad \text{se } n \geq 1$$

Mostre por indução que se tem $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$

III

1. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\log(x+1)}}{xe^x}$.
a) Determine o domínio de f .
b) Estude a função f quanto a continuidade.

2. Considere a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x^2}{1+x} & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] e^x \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Justificando, diga se h é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 0.
b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

3. Seja φ uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$. Supondo que se tem

$$\varphi\left((-1)^n + \frac{n}{n+2}\right) = \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

indique, justificando, os valores de $\varphi(0)$ e de $\varphi(2)$.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC

$1^{\underline{0}}$ TESTE (Versão B)

14 /Novembro /2009 Duração: 1h30m

I

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |2x-1| \geq \frac{1}{x} \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : e^x \log x \leq 0\}.$$

1. Mostre que $A =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ e identifique o conjunto B.

2. Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\min(A \cap B)$, $\max(B \setminus A)$, $\sup(B \setminus \mathbb{Q})$.

II

1. Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{n+1}{1-2\sqrt{n}}, \qquad \lim \frac{(-1)^n n}{n^3 + \sin n}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{2+3^n}{n}}$$

2. Considere a sucessão de números reais definida por

$$b_1 = \frac{1}{4}, \qquad b_{n+1} = \frac{1}{4(1-b_n)} \qquad \text{se } n \geq 1$$

Mostre por indução que se tem $b_n = \dfrac{n}{2(n+1)}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

III

1. Considere a função g definida por $g(x) = \dfrac{e^x}{x\,\sqrt{1-\log(x+2)}}$.

a) Determine o domínio de g.

b) Estude a função g quanto a continuidade.

2. Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\cos x & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x^2+2}{x-\pi} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Justificando, diga se f é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda no ponto 0.

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Seja ψ uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$. Supondo que se tem

$$\psi\left((-1)^n + \frac{2n}{n+1}\right) = \arccos\left(\frac{-n}{n+2}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

indique, justificando, os valores de $\psi(1)$ e de $\psi(3)$.