Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

Soluções da 1^a Ficha de Exercícios

$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.

1. **(a)** Para $n = 1$ tem-se $1^2 - 2 = -1$ e $1 - 2 = -1$. Para $n = 2$ tem-se $2^2 - 4 = 0$ e $2 - 2 = 0$. No entanto, para $n = 3$ tem-se $3^2 - 6 = 3$ e $3 - 2 = 1$. Logo, a proposição: $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é falsa.

   (b) Para $n = 1$ tem-se $1^3 - 6 + 11 - 6 = 0$. Por outro lado, tem-se $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 =$ $= (n-1)(n^2 - 5n + 6) = (n-1)(n-2)(n-3)$. Assim, a equação $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = 0$ é satisfeita para $n \in \{1, 2, 3\}$, não o sendo por exemplo para $n = 4$. Logo, a proposição: $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é falsa.

2. **(a)** Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos agora que a proposição "$5n + 3$ é múltiplo de 5" é verdadeira para n e mostremos que também o é para $n + 1$. Em resumo:

   HI (hipótese de indução): $5n + 3$ é múltiplo de 5.

   Tese: $5(n+1) + 3$ é múltiplo de 5.

   Demonstração (da tese):

   $$5(n+1) + 3 = 5n + 5 + 3 = \underbrace{\underbrace{5n+3}_{\text{é múltiplo de 5 por HI}} + \underbrace{5}_{\text{é múltiplo de 5}}}_{\text{é múltiplo de 5}}$$

   No entanto, para $n = 1$, tem-se $5 + 3 = 8$ o qual não é múltiplo de 5. Logo, a proposição: $5n + 3$ é múltiplo de 5 para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é falsa.

   (b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos agora que a proposição $\operatorname{sen}(2n\pi) = 1$ é verdadeira para n e mostremos que também o é para $n + 1$. Em resumo:

   HI (hipótese de indução): $\operatorname{sen}(2n\pi) = 1$.

   Tese: $\operatorname{sen}(2(n+1)\pi) = 1$.

   Demonstração (da tese):

   $$\operatorname{sen}(2(n+1)\pi) = \operatorname{sen}(2n\pi + 2\pi) = \operatorname{sen}(2n\pi) \underset{\text{por HI}}{=} 1.$$

   No entanto, para $n = 1$, tem-se $\operatorname{sen}(2\pi) = 0 \neq 1$. Logo, a proposição: $\operatorname{sen}(2n\pi) = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é falsa.

   (c) Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos agora que a proposição "$n^2 + 3n + 1$ é par" é verdadeira para n e mostremos que também o é para $n + 1$. Em resumo:

   HI (hipótese de indução): $n^2 + 3n + 1$ é par.

   Tese: $(n+1)^2 + 3(n+1) + 1$ é par.

   Demonstração (da tese):

   $$(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = \underbrace{\underbrace{n^2 + 3n + 1}_{\text{é par por HI}} + \underbrace{2n + 4}_{\text{é par}}}_{\text{é par}}.$$

No entanto, para $n=1$, tem-se $1^2+3+1=5$ o qual não é par. Logo, a proposição: "n^2+3n+1 é par" para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é falsa.

Como se verá a seguir, o que se tem é: n^2+3n+1 é ímpar para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3. **(a)** Vamos mostrar que n^2+3n+1 é ímpar para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para $n=1$ tem-se $1^2+3+1=5$ o qual é ímpar. Logo, a proposição "n^2+3n+1 é ímpar" é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos agora que a proposição "n^2+3n+1 é ímpar" é verdadeira para n e mostremos que também o é para $n+1$. Em resumo:

HI (hipótese de indução): n^2+3n+1 é ímpar.

Tese: $(n+1)^2+3(n+1)+1$ é ímpar.

Demonstração (da tese):

$$(n+1)^2+3(n+1)+1 = \underbrace{\underbrace{n^2+3n+1}_{\text{é ímpar por HI}} + \underbrace{2n+4}_{\text{é par}}}_{\text{é ímpar}}.$$

Deste modo, tem-se: $(n+1)^2+3(n+1)+1$ é ímpar.

Logo, a proposição: n^2+3n+1 é ímpar para qualquer $n \in \mathbb{N}$, é verdadeira.

(b) Para $n=1$ tem-se $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Tese: $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Demonstração (da tese):

$$1+2+\cdots+n+(n+1) \underset{\text{por HI}}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Deste modo, tem-se: $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Logo, tem-se: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(c) Para $n=1$ tem-se $1^2=1=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Tese: $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Demonstração (da tese):

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 \underset{\text{por HI}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right]=$$

$= (n+1)\left[\dfrac{2n^2+7n+6}{6}\right] = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$

Deste modo, tem-se: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$

Logo, tem-se: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(d) Para $n = 1$ tem-se $1^3 = 1^2$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Tese: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = [1 + 2 + \cdots + n + (n+1)]^2$.

Demonstração (da tese):

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \underset{\text{por HI}}{=} (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 =$

$= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 =$

$= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + n^2 + 2n + 1 + n^3 + 2n^2 + n =$

$= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^2 + n\,(n+1)^2 =$

$= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^2 + 2\,(n+1)\underbrace{\dfrac{n\,(n+1)}{2}}_{=1+2+\cdots+n} = [1 + 2 + \cdots + n + (n+1)]^2.$

Deste modo, tem-se: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = [1 + 2 + \cdots + n + (n+1)]^2$.

Logo, tem-se: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(e) Para $n = 1$ tem-se $1 = 1^2$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Tese: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$.

Demonstração (da tese):

$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) \underset{\text{por HI}}{=} n^2 + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$

Deste modo, tem-se: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$.

Logo, tem-se: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(f) Para $n = 1$ tem-se $1^2 = 1 = \dfrac{4-1}{3}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{4n^3 - n}{3}$.

Tese: $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \dfrac{4\,(n+1)^3 - (n+1)}{3}$.

Demonstração (da tese):

$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 \underset{\text{por HI}}{=} \dfrac{4n^3 - n}{3} + (2n+1)^2 = \dfrac{4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3}{3} =$

$$= \frac{4\left(n^3+3n^2+3n+1\right)-n-1}{3} = \frac{4\left(n+1\right)^3-\left(n+1\right)}{3}.$$

Deste modo, tem-se: $1^2+3^2+\cdots+\left(2n-1\right)^2+\left(2n+1\right)^2 = \dfrac{4\left(n+1\right)^3-\left(n+1\right)}{3}$.

Logo, tem-se: $1^2+3^2+\cdots+\left(2n-1\right)^2 = \dfrac{4n^3-n}{3}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(g) Para $n=1$ tem-se $\dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Tese: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Demonstração (da tese):

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{\text{por HI}}{=} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Deste modo, tem-se: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Logo, tem-se: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(h) Para $n=1$ tem-se $1.3 = 3 = \dfrac{\left(1+1\right)\left(2+7\right)}{6}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1.3+2.4+\cdots+n\left(n+2\right) = \dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+7\right)}{6}$.

Tese: $1.3+2.4+\cdots+n\left(n+2\right)+\left(n+1\right)\left(n+3\right) = \dfrac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2n+9\right)}{6}$.

Demonstração (da tese):

$$1.3+2.4+\cdots+n\left(n+2\right)+\left(n+1\right)\left(n+3\right) \underset{\text{por HI}}{=} \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+7\right)}{6}+\left(n+1\right)\left(n+3\right) =$$

$$= \frac{\left(n+1\right)\left[n\left(2n+7\right)+6\left(n+3\right)\right]}{6} = \frac{\left(n+1\right)\left(2n^2+13n+18\right)}{6} = \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2n+9\right)}{6}.$$

Deste modo, tem-se: $1.3+2.4+\cdots+n\left(n+2\right)+\left(n+1\right)\left(n+3\right) = \dfrac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2n+9\right)}{6}$.

Logo, tem-se: $1.3+2.4+\cdots+n\left(n+2\right) = \dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+7\right)}{6}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(i) Para $n=1$ tem-se $\dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2} = 1-\dfrac{1}{(1+1)!}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!} = 1-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

Tese: $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}+\dfrac{n+1}{(n+2)!}=1-\dfrac{1}{(n+2)!}$.

Demonstração (da tese):

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}\underset{\text{por HI}}{=}1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}=$$

$$=1-\frac{n+2-n-1}{(n+2)!}=1-\frac{1}{(n+2)!}.$$

Deste modo, tem-se: $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}+\dfrac{n+1}{(n+2)!}=1-\dfrac{1}{(n+2)!}$.

Logo, tem-se: $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

(j) Para $n=1$ tem-se $5^1-4-1=0$ é divisível por 16. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n\in\mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): 5^n-4n-1 é divisível por 16.

Tese: $5^{n+1}-4(n+1)-1$ é divisível por 16.

Demonstração (da tese):

$$5^{n+1}-4(n+1)-1=5.5^n-4n-5=\underbrace{\underbrace{5\underbrace{\left(5^n-4n-1\right)}_{\text{é divisível por 16 por HI}}}_{\text{é divisível por 16}}+\underbrace{16n}_{\text{é divisível por 16}}}_{\text{é divisível por 16}}.$$

Deste modo, tem-se: $5^{n+1}-4(n+1)-1$ é divisível por 16.

Logo, tem-se: 5^n-4n-1 é divisível por 16 para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

(k) Para $n=1$ tem-se $2^2+2=6$ é múltiplo de 3. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n\in\mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $2^{2n}+2$ é múltiplo de 3.

Tese: $2^{2n+2}+2$ é múltiplo de 3.

Demonstração (da tese):

$$2^{2n+2}+2=4\left(2^{2n}+2\right)-6=\underbrace{\underbrace{4\underbrace{\left(2^{2n}+2\right)}_{\text{é múltiplo de 3 por HI}}}_{\text{é múltiplo de 3}}-\underbrace{6}_{\text{é múltiplo de 3}}}_{\text{é múltiplo de 3}}.$$

Deste modo, tem-se: $2^{2n+2}+2$ é múltiplo de 3.

Logo, tem-se: $2^{2n}+2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

(l) Para $n=1$ tem-se $1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=36$ é divisível por 9. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n\in\mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ é divisível por 9.

Tese: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ é divisível por 9.

Demonstração (da tese):

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 =$$

$$= \left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right] + (9n^2 + 9n + 27) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right]}_{\text{é divisível por 9 por HI}}}_{\text{é divisível por 9}} + 9\underbrace{\left(n^2 + n + 3\right)}_{\text{é divisível por 9}}}_{\text{é divisível por 9}}.$$

Deste modo, tem-se: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ é divisível por 9.

Logo, tem-se: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(m) Para $n = 1$ tem-se $5^2 - 1 = 24$ é divisível por 8. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $5^{2n} - 1$ é divisível por 8.

Tese: $5^{2n+2} - 1$ é divisível por 8.

Demonstração (da tese):

$$5^{2n+2} - 1 = 5^2 5^{2n} - 1 = 25\left(5^{2n} - 1\right) + 24 = \underbrace{\underbrace{25\underbrace{\left(5^{2n} - 1\right)}_{\text{é divisível por 8 por HI}}}_{\text{é divisível por 8}} + \underbrace{24}_{\text{é divisível por 8}}}_{\text{é divisível por 8}}.$$

Deste modo, tem-se: $5^{2n+2} - 1$ é divisível por 8.

Logo, tem-se: $5^{2n} - 1$ é divisível por 8 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(n) Para $n = 1$ tem-se $1 < 2^1$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $n < 2^n$.

Tese: $n + 1 < 2^{n+1}$.

Demonstração (da tese):

$n + 1 \underset{\text{por HI}}{<} 2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$. Deste modo, tem-se: $n + 1 < 2^{n+1}$.

Logo, tem-se: $n < 2^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(o) Para $n = 4$ tem-se $2^4 = 16 < 24 = 4!$ e assim $2^4 < 4!$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 4$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

HI (hipótese de indução): $2^n < n!$.

Tese: $2^{n+1} < (n+1)!$.

Demonstração (da tese):

$2^{n+1} = 2^n 2 \underset{\text{por HI}}{<} n!2 \underset{\text{pois } n>1}{<} n!\,(n+1) = (n+1)!$. Deste modo, tem-se: $2^{n+1} < (n+1)!$.

Logo, tem-se: $2^n < n!$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

(p) Para $n=1$ tem-se $1 \leq 2-\dfrac{1}{1}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2} \leq 2-\dfrac{1}{n}$.

Tese: $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\dfrac{1}{n+1}$.

Demonstração (da tese):

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \underset{\text{por HI}}{\leq} 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=2-\frac{(n+1)^2-n}{n(n+1)^2}=$$

$$=2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}<2-\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}=2-\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}=2-\frac{1}{(n+1)}.$$ Deste modo, tem-se:

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n+1}.$$

Logo, tem-se: $1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2} \leq 2-\dfrac{1}{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

(q) Para $n=2$ tem-se $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}>\dfrac{1+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. Deste modo, tem-se: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=2$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

HI (hipótese de indução): $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

Tese: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$.

Demonstração (da tese):

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{\text{por HI}}{>} \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}>\frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}}=$$

$$=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$ Deste modo, tem-se: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$.

Logo, tem-se: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

(r) Para $n=1$ tem-se $0<\dfrac{1}{4}<1$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3<\dfrac{n^4}{4}<1^3+2^3+\cdots+n^3$.

Tese: $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3<\dfrac{(n+1)^4}{4}<1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$.

Iremos ver primeiro que $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3<\dfrac{(n+1)^4}{4}$. E a seguir mostraremos que $\dfrac{(n+1)^4}{4}<1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$.

Demonstração (da tese):

$$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 \underset{\text{por HI}}{<} \frac{n^4}{4}+n^3=\frac{n^4+4n^3}{4}<\frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{4}=\frac{(n+1)^4}{4}.$$

Deste modo, tem-se: $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3<\dfrac{(n+1)^4}{4}$.

Por outro lado, $\dfrac{(n+1)^4}{4}=\dfrac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}{4}=\dfrac{n^4}{4}+n^3+\dfrac{6n^2+4n+1}{4}\underset{\text{por HI}}{<}$

$\underset{\text{por HI}}{<}\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)+n^3+\dfrac{6n^2+4n+1}{4}<\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)+n^3+\dfrac{12n^2+12n+4}{4}=$

$=\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)+n^3+3n^2+3n+1=1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$.

Deste modo, tem-se: $\dfrac{(n+1)^4}{4}<1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$.

Logo, tem-se: $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3<\dfrac{n^4}{4}<1^3+2^3+\cdots+n^3$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

(s) Para $n=4$ tem-se $(4!)^2=24^2>16^2=2^4 4^2$. Deste modo, tem-se: $(4!)^2>2^4 4^2$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=4$.

Seja $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq 4$.

HI (hipótese de indução): $(n!)^2>2^n n^2$.

Tese: $[(n+1)!]^2>2^{n+1}(n+1)^2$.

Demonstração (da tese):

$[(n+1)!]^2=(n!)^2(n+1)^2\underset{\text{por HI}}{>}2^n n^2(n+1)^2\underset{n^2>2}{>}2^n 2(n+1)^2=2^{n+1}(n+1)^2$. Deste modo, tem-se: $[(n+1)!]^2>2^{n+1}(n+1)^2$.

Logo, tem-se: $(n!)^2>2^n n^2$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq 4$.

(t) Para $n=1$ tem-se $1!\geq 2^0$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n\in\mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $n!\geq 2^{n-1}$.

Tese: $(n+1)!\geq 2^n$.

Demonstração (da tese):

$(n+1)!=n!(n+1)\underset{\text{por HI}}{\geq}2^{n-1}(n+1)\underset{n\geq 1}{\geq}2^{n-1}2=2^n$.

Deste modo, tem-se: $(n+1)!\geq 2^n$.

Logo, tem-se: $n!\geq 2^{n-1}$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

(u) Para $n=4$ tem-se $4^2=16>15=3(4+1)$. Deste modo, tem-se: $4^2>3(4+1)$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=4$.

Seja $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq 4$.

HI (hipótese de indução): $n^2>3(n+1)$.

Tese: $(n+1)^2>3(n+2)$.

Demonstração (da tese):

$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \underset{\text{por HI}}{>} 3\,(n+1)+2n+1 \underset{n>1}{>} 3\,(n+1)+2+1 = 3\,(n+2)$. Deste modo, tem-se: $(n+1)^2 > 3\,(n+2)$.

Logo, tem-se: $n^2 > 3\,(n+1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

(v) Para $n=4$ tem-se $\dfrac{3^{4-1}}{4!} = \dfrac{27}{24} = \dfrac{54}{48} < \dfrac{57}{48} = \dfrac{19}{16} = \dfrac{19}{4^2}$. Deste modo, tem-se: $\dfrac{3^{4-1}}{4!} < \dfrac{19}{4^2}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=4$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

HI (hipótese de indução): $\dfrac{3^{n-1}}{n!} < \dfrac{19}{n^2}$.

Tese: $\dfrac{3^n}{(n+1)!} < \dfrac{19}{(n+1)^2}$.

Demonstração (da tese):

$$\frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{3^{n-1}}{n!}\frac{3}{n+1} \underset{\text{por HI}}{<} \frac{19}{n^2}\frac{3}{n+1} = \frac{1}{n^2}19\frac{3}{n+1} \underset{\text{por 3u)}}{<} \frac{1}{3\,(n+1)}19\frac{3}{n+1} = \frac{19}{(n+1)^2}.$$

Deste modo, tem-se: $\dfrac{3^n}{(n+1)!} < \dfrac{19}{(n+1)^2}$.

Logo, tem-se: $\dfrac{3^{n-1}}{n!} < \dfrac{19}{n^2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

(w) Seja $x \in \mathbb{R}$. **Para** $n=1$ tem-se $|\operatorname{sen} x| \leq |\operatorname{sen} x|$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $|\operatorname{sen} nx| \leq n\,|\operatorname{sen} x|$.

Tese: $|\operatorname{sen}\,(n+1)\,x| \leq (n+1)\,|\operatorname{sen} x|$.

Demonstração (da tese):

$$|\operatorname{sen}\,(n+1)\,x| = |\operatorname{sen}\,(nx+x)| = |\operatorname{sen} nx\cos x + \cos nx \operatorname{sen} x| \leq |\operatorname{sen} nx \cos x| + |\cos nx \operatorname{sen} x| =$$
$$= |\operatorname{sen} nx|\,|\cos x| + |\cos nx|\,|\operatorname{sen} x| \leq |\operatorname{sen} nx| + |\operatorname{sen} x| \underset{\text{por HI}}{\leq} n\,|\operatorname{sen} x| + |\operatorname{sen} x| = (n+1)\,|\operatorname{sen} x|.$$

Deste modo, tem-se $|\operatorname{sen}\,(n+1)\,x| \leq (n+1)\,|\operatorname{sen} x|$.

Logo, tem-se: $|\operatorname{sen} nx| \leq n\,|\operatorname{sen} x|$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

(x) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq -1$. **Para** $n=1$ tem-se $1+a \geq 1+a$. Logo, a proposição é verdadeira para $n=1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $(1+a)^n \geq 1+na$.

Tese: $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)\,a$.

Demonstração (da tese):

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \underset{\text{por HI e por se ter } a\geq -1}{\geq} (1+na)\,(1+a) = 1+na+a+na^2 \geq 1+na+a =$$
$$= 1+(n+1)\,a.$$

Deste modo, tem-se: $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)\,a$.

Logo, tem-se: $(1+a)^n \geq 1+na$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq -1$.

(y) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. **Para** $n = 1$ tem-se $a + b = \binom{1}{0} a^{n-1}b^0 + \binom{1}{1} a^{n-1}b^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{n-1}b^k$, pois $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Deste modo, tem-se: $a + b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{n-1}b^k$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$.

Tese: $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k$.

Demonstração (da tese):

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n \underset{\text{por HI}}{=} (a + b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}b^k =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k \right) =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1}b^0 + \binom{n}{n} a^0b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}b^k \right) \underset{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1}{=}$$

$$= a^{n+1}b^0 + a^0b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k}b^k \right) \underset{\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1}{=}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{n+1} a^0b^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k}b^k \right) \underset{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}}{=}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{n+1} a^0b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k.$$

Deste modo, tem-se: $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k$.

Logo, tem-se: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

Se fizermos $a = b = 1$ obtemos $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se fizermos $a = -b = 1$ obtemos $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

OBS. Vamos ver que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$.

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$. Tem-se $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} =$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Logo $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$.

(z) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. **Para** $n = 1$ tem-se $a - b = (a - b) \sum_{k=1}^{1} a^{1-k}b^{k-1}$, pois $\sum_{k=1}^{1} a^{1-k}b^{k-1} =$ $= a^{1-1}b^{1-1} = 1$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$.

Tese: $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum\limits_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}b^{k-1}$.

Demonstração (da tese):

$$(a-b)\sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}b^{k-1} = (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k}b^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{n+1} a^{n+1-k}b^{k-1}\right) =$$

$$= (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k}b^{k-1} + b^n\right) = (a-b)\left(a\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} + b^n\right) =$$

$$= a(a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} + (a-b)\,b^n \underset{\text{por HI}}{=} a(a^n - b^n) + (a-b)\,b^n =$$

$$= a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Deste modo, tem-se: $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum\limits_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}b^{k-1}$.

Logo, tem-se: $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(a) Suponhamos que se tem $a_{k+1} - a_k = r$ para algum $r \in \mathbb{R}$, com $1 \leq k \leq n-1$.

Para $n = 1$ tem-se $S_1 = a_1 = 1\dfrac{a_1 + a_1}{2}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $S_n = n\dfrac{a_1 + a_n}{2}$.

Tese: $S_{n+1} = (n+1)\dfrac{a_1 + a_{n+1}}{2}$.

Demonstração (da tese):

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \underset{\text{por HI}}{=} n\frac{a_1 + a_n}{2} + a_{n+1} = n\frac{a_1 + a_n}{2} + \frac{2a_{n+1}}{2} =$$

$$= n\frac{a_1 + a_n}{2} + \frac{a_{n+1} + a_{n+1}}{2} \underset{a_{n+1} = a_1 + nr}{=} n\frac{a_1 + a_n}{2} + \frac{a_1 + nr + a_{n+1}}{2} = n\frac{a_1 + a_n + r}{2} + \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} =$$

$$\underset{a_{n+1} = a_n + r}{=} n\frac{a_1 + a_{n+1}}{2} + \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} = (n+1)\frac{a_1 + a_{n+1}}{2}.$$

Deste modo, tem-se: $S_{n+1} = (n+1)\dfrac{a_1 + a_{n+1}}{2}$.

Logo, tem-se: $S_n = n\dfrac{a_1 + a_n}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $a_{k+1} - a_k = r$ para algum $r \in \mathbb{R}$, com $1 \leq k \leq n-1$.

(b) Suponhamos que se tem $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ para algum $r \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, com $1 \leq k \leq n-1$.

Para $n = 1$ tem-se $S_1 = a_1 = a_1\dfrac{1-r}{1-r}$. Logo, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

HI (hipótese de indução): $S_n = a_1 \dfrac{1-r^n}{1-r}$.

Tese: $S_{n+1} = a_1 \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Demonstração (da tese):

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \underset{\text{por HI}}{=} a_1 \frac{1-r^n}{1-r} + a_{n+1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} + a_1 r^n =$$
$$= a_1 \frac{1-r^n}{1-r} + a_1 r^n \frac{1-r}{1-r} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} + a_1 \frac{r^n - r^{n+1}}{1-r} = a_1 \frac{1-r^n+r^n-r^{n+1}}{1-r} = a_1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Deste modo, tem-se: $S_{n+1} = a_1 \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Logo, tem-se: $S_n = a_1 \dfrac{1-r^n}{1-r}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ para algum $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, com $1 \leq k \leq n-1$.