matemática discreta

3 teste

2018/2019

TESTE MODELO - EXEMPLOS

1 FUNÇÕES GERADORAS

$$\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+p-1}{p-1} z^k$$

$$\binom{k+p-1}{p-1} = \frac{(k+p-1)!}{k!(p-1)!}$$

Grupo 1 ex 1

17 crianças

3 adultos / grupos

- pelo menos 4 crianças
- máximo de 7 crianças

Pa → por adulto

manipular p/ obter somatório

$$Pa(z) = (z^4 + z^5 + z^6 + z^7)^3 = (z^4(z^0 + z + z^2 + z^3))^3 = \left(z^4 \times \frac{z^4 - 1}{z - 1}\right)^3 =$$

$$\left(z^4 \times \frac{1 - z^4}{1 - z}\right)^3 = (z^4 - z^8)^3 \times \left(\frac{1}{1-z}\right)^3 = (z^4 - z^8)^3 \times \frac{1}{(1-z)^3} \overset{\text{somatório}}{=}$$

Binómio Newton

$$(z^4 - z^8)^3 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+2}{2} z^k$$

Encontrar z^{17}

$$\underbrace{(z^4 - z^8)^3}$$

$$\binom{3}{k}(z^4)^{3-k}(-z^8)^k$$

k = 5

$k = 0$

$$\binom{3}{0}(z^4)^3(-z^8)^0 \longrightarrow \binom{3}{0} z^{12} \times (-z^8)^0 \times \binom{7}{2} z^5$$

$\hookrightarrow z^{12}$

$$+$$

k = 1

$k = 1$

$$\binom{3}{1}(z^4)^2 \times (-z^8) \longrightarrow -\binom{3}{1} z^8 \times z^8 \times \binom{3}{2} z^1$$

$\hookrightarrow z^{16}$

$$=$$

$$\binom{3}{0} \times \binom{7}{2} z^{17} - \binom{3}{1}\binom{3}{2} z^{17}$$

$$=$$

$$\left(\binom{3}{0} \times \binom{7}{2} - \binom{3}{1}\binom{3}{2}\right) z^{17} =$$

$$= (1 \times 21 - 3 \times 3) = 12$$

2 CONCEITOS ELEMENTARES SOBRE GRAFOS, GRAFOS EULERIANOS E ATRAVESSÁVEIS, GRAFOS PLANARES, RELACIONAMENTOS ESTÁVEIS, LABIRINTOS, ÁRVORES DE COBERTURA MÍNIMA E ORIENTAÇÃO DE GRAFOS

CONCEITOS ELEMENTARES SOBRE GRAFOS

1. A soma dos graus dos vértices de G é sempre par e é igual ao dobro do número de arestas.
2. Se n é o número de vértices de grau ímpar então n é par.

Grupo 2 ex 1 a)

Soma dos graus é sempre par (1), logo a soma dos graus ímpares tem de ser par. Como $\frac{n}{2}$ têm grau ímpar e a soma de ímpares só é par se o nº de elementos da soma for par $\Rightarrow$ $\frac{n}{2}$ tem de ser um nº par (2)

$\hookrightarrow$ ou seja, tem de ser múltiplo de 4.

(tem de ser do tipo $2n \rightarrow \frac{4n}{2} = 2n$

Grupo 2 ex 1 b)

15 arestas

$\frac{n}{2}$ é par → grau 2

$\frac{n}{2}$ é ímpar → grau 3

$n = ?$

1 Soma dos graus é par $= 2 \times 15 = 30$

$$2 \times \frac{n}{2} + 3 \times \frac{n}{2} = 30 \Leftrightarrow n + \frac{3n}{2} = 30 \Leftrightarrow \frac{5}{2}n = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5n = 60 \Leftrightarrow \frac{60}{5} = \boxed{12 = n}$$

GRAFOS EULERIANOS E ATRAVESSÁVEIS

ATALHO Se não repete arestas;

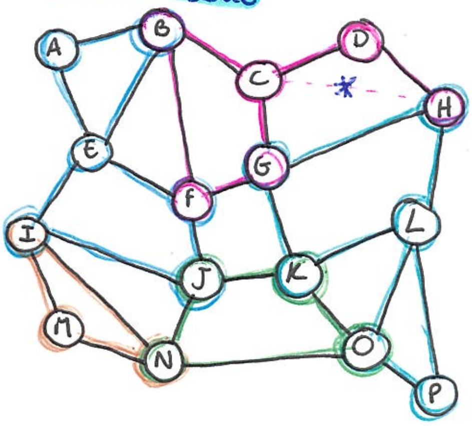
GRAFO CONEXO Existe um caminho $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ quais que sejam os vértices v_1 e v_n do multigrafo/grafo;

GRAFO ATRAVESSÁVEL Quando tem um atalho aberto que tem todas as arestas e todos os vértices;

GRAFO EULERIANO Quando tem um atalho fechado que tem todas as arestas e todos os vértices;

TEOREMA
1. G é euleriano sse todos os vértices têm / é conexo de grau par;
2. G é atravessável sse existem exatamente dois vértices com grau ímpar / é conexo.

Atalho Euleriano



Conexo
2 vértices de grau ímpar: C e H
↳ grafo atravessável

1 Transformar em grafo euleriano: (adicionar aresta)
* aresta que liga C e H

2 fazer atalhos fechados (o início do novo atalho tem de estar no anterior:

1. <C, *, H, D, C, B, F, G, C>
2. <G, H, L, P, O, L, K, G>
3. <K, O, N, J, K>
4. <N, M, I, N>
5. <I, E, A, B, E, F, J, I>

3 Juntar: <H, D, C, B, F, G, H, L, P, O, L, K, O, N, M, I, E, A, B, E, F, J, I, N, J, K, G, C.

GRAFOS PLANARES

Podem desenhar-se no plano de modo a que as arestas se intersectem apenas nos vértices:

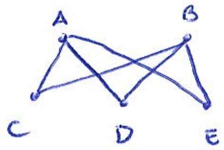
NÃO PLANAR Tem como subgrafo k3,3 ou k5:

k3,3 k3,3 k5

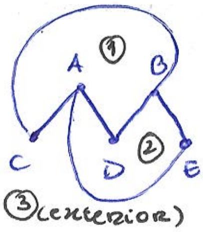
FÓRMULA EULER p vértices / q arestas / r regiões $\Rightarrow p - q + r = 2$

TEOREMA Se G é conexo e plano então $q \leq 3p - 6$ e $p \geq 3$.

FÓRMULA EULER



$\boxed{1}$ escrever/cruzar arestas



$\boxed{2}$ encontrar regiões

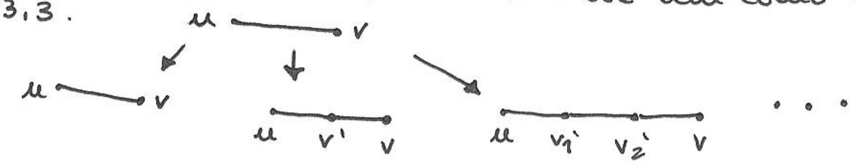
$\boxed{3}$ aplicar fórmula

$p - q + R = 2$

$5 - 6 + 3 = 2$ ✓

TEOREMA DE KURATOWSKI

G conexo // G não é planar se e sse tem como subgrafo uma subdivisão de K_5 e $K_{3,3}$.



RELACIONAMENTOS ESTÁVEIS

GALE-SHAPLEY Algoritmo;

RELACIONAMENTO ESTÁVEL função bijetiva² $f: H \to M$ que não tem bloqueios, ou seja, não existem pares (h, m), com $h \in H$ e $m \in M$, tais que:

- $(h, m) \notin f$
- h prefere m a $f(h)$ (o seu par em f);
- m prefere h a $f^{-1}(m)$ (o seu par em f);

INPUT: conjunto H de homens, conjunto M de mulheres e preferências;

OUTPUT: relacionamento estável entre H e M

PROCESSAMENTO:

0. No início todos estão livres.
1. Se $h \in H$ está livre:
   - por ordem das suas preferências propõe-se a uma nova $m \in M$;
   - se m está livre, aceita;
   - se m não está livre e prefere h ao seu par atual h', m aceita h e liberta h';
   - se m não está livre e não prefere h a h', m rejeita até não existir $h \in H$

* uma linha tipo (1, ~~2~~), (2, 3), (3, 2), (4,) por iteração *

Grupo 2 ex 3.

Não é estável pois tem um bloqueio: (1, 3) ou (2, 4)

- GALE-SHAPLEY

(1,), (2,), (3,), (4,)

(1, 3), (2,), (3,), (4,)

(1, 3), (2, ~~3~~), (3,), (4,)

(1, 3), (2, 4), (3,), (4,)

(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4,)

(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2) → Relacionamento estável

LABIRINTOS → entroncamentos = vértices
→ caminhos = arestas

TRÉMAUX Algoritmo

$\boxed{1}$ Ao chegar a vértice não visitado, seguir por qualquer aresta ainda não percorrida;

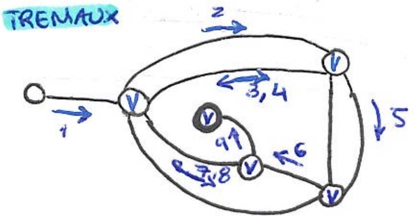
$\boxed{2}$ Se por aresta ainda não percorrida, se chegar a vértice já visitado ou de grau 1 (beco s/ saída), recuar pela mesma aresta;

$\boxed{3}$ Se por aresta já percorrida se chegar a vértice já visitado, seguir por aresta ainda não percorrida ou, se não existir, por aresta já percorrida uma única vez.

TEOREMA

Iniciando um caminho num vértice x de um grafo conexo [illegible] omprindo as regras do algoritmo de Tremaux, regressa-se a X, depois de percorrer cada aresta do grafo exatamente duas vezes, uma em cada sentido.

TREMAUX



Pode continuar-se para voltar ao início

LABIRINTO

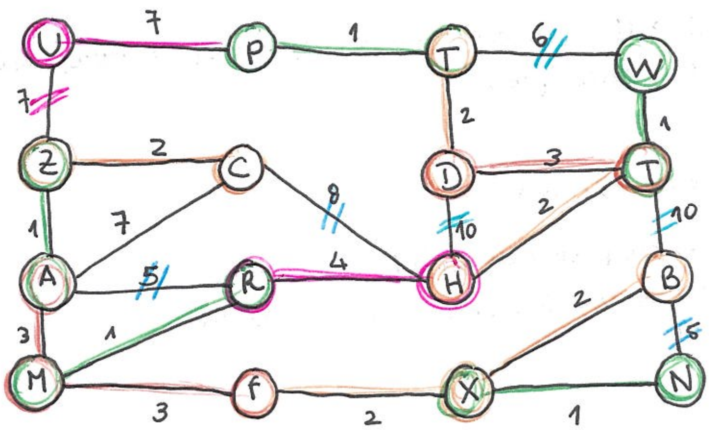
ÁRVORES DE COBERTURA MÍNIMA

ÁRVORE: Grafo conexo sem ciclos;

ALGORITMO DE KRUSKAL

1. Acrescentar as de menor valor;
2. Contar as que criam ciclos fechados;

KRUSKAL

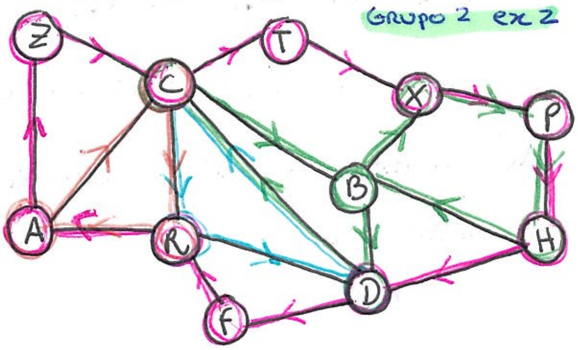


CUSTO 1
CUSTO 2
CUSTO 3
CUSTO 4
CUSTO 5
CUSTO 6
CUSTO 7
CUSTO 8
CUSTO 10

GRAFOS ORIENTADOS

TEOREMA DE ROBINS: Um grafo é fortemente orientável se e só se não tem pontes.

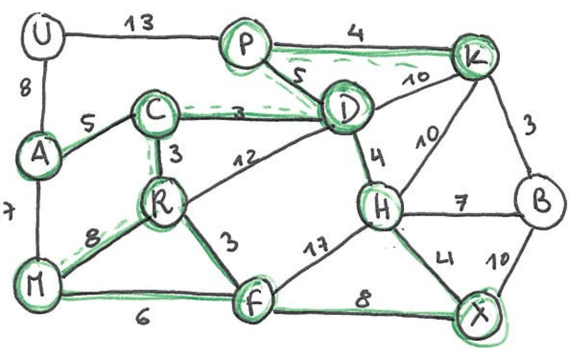
GRUPO 2 ex 2



1º atalho
ZCTXPHDFRAZ
2º atalho
CBXPHBDC
3º atalho
ACR
4º atalho
RDC

3) ALGORITMO DE DIJKSTRA

GRUPO 3



Trajetória: <M, R, C, D, P, K>

Custo: 23

PERCORRIDO
MK

ARESTAS	CUSTOS
MA	17 X
MR	8 √3
MF	6 √2
FH	23
FR	9 √4
FX	14 √5
RC	11 √
RD	20 X
CA	16 √7
CD	14 √5
DP	19 √10
DK	24
DH	18 √8
XH	18 √9
XB	24
AU	24
HK	28
HB	25
PK	23 √

(4) FORD-FULKERSON

ALGORITMO DE FORD-FULKERSON

f:= fluxo nulo em R

existe trajetória Q = < s, ..., t > na rede incremental de f

não → FIM

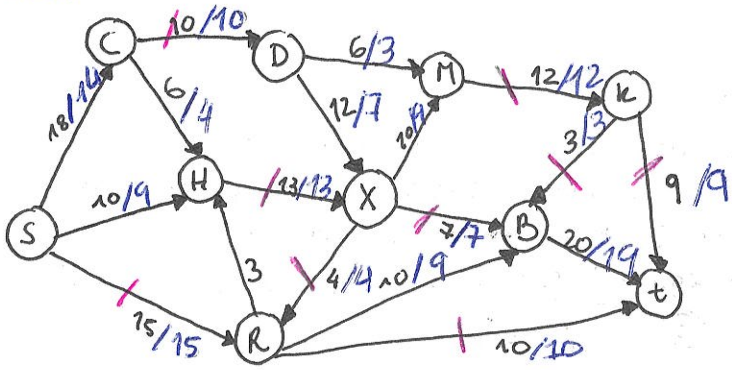
sim → f := incremento de f em Q

TEOREMA DO FLUXO-MÁXIMO CORTE-MÍNIMO Sejam f um fluxo e $\langle V_s, V_t \rangle$ um corte numa rede capacitada, se val(f) = cap(V_s, V_t), então o fluxo é máximo e o corte é mínimo.

val(f): entram nos (no fim)

cap(V_s, V_t): corte

Grupo 4



$Q_1 = \langle s, R, t \rangle$
$\Delta Q_1 = 10$
$Q_2 = \langle s, R, B, t \rangle$
$\Delta Q_2 = 5$
$Q_3 = \langle s, H, X, M, K, t \rangle$
$\Delta Q_3 = 9$
$Q_4 = \langle s, C, D, X, B, t \rangle$
$\Delta Q_4 = 7$
$Q_5 = \langle s, C, H, X, R, B, t \rangle$
$\Delta Q_5 = 4$
$Q_6 = \langle s, C, D, M, K, B, t \rangle$
$\Delta Q_6 = 3$

(S, C) + (S, H) + (S, R) = 14 + 9 + 15 = 38

Possível corte: {(S, R), (H, X), (C, D)}

(5) AUTÓMATO FINITO DETERMINÍSTICO, AUTÓMATO FINITO NÃO DETERMINÍSTICO, ESPECIFICAÇÃO DE GRAMÁTICAS, CONVERSÃO DE AFND EM AFD, LEMA DA BOMBAGEM

AUTÓMATOS FINITOS DETERMINÍSTICOS

ALFABETO Conjunto finito; Σ

PALAVRA Sequência de símbolos do alfabeto; ε ou λ

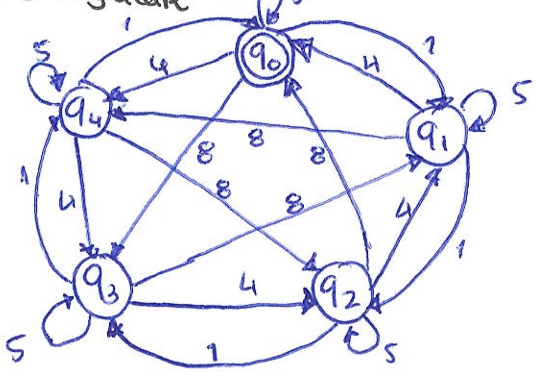
LINGUAGEM Conjunto de palavras sobre o alfabeto; Σ^*

LINGUAGEM RECONHECIDA A linguagem reconhecida por um afd D é o conjunto de todas as palavras que são aceites por D.

LINGUAGEM REGULAR Uma linguagem L diz-se regular se existe um afd que a reconhece, isto é, existe um afd que aceita todas as palavras de L e apenas essas.

TEOREMA Não existe afd que aceite todas as palavras sobre {a,b} do tipo $a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}_1$ e apenas essas, isto é, a linguagem sobre {a,b} das palavras do tipo $a^n b^n$, $n \in \mathbb{N}_1$, não é regular.

Grupo 5 ex 1

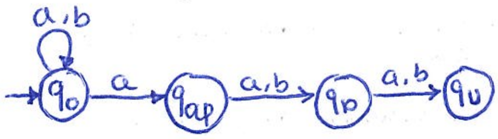


AUTÓMATOS FINITOS NÃO DETERMINÍSTICOS

AFND

Autómato p/ linguagem que aceita a em antepenúltimo

$\{a, b\}$



ESPECIFICAÇÃO DE GRAMÁTICAS

GRUPO 5 ex 2

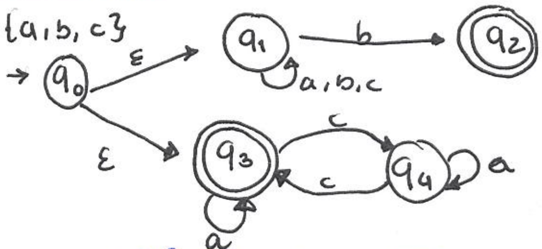
$\{x, y, z\}$ $\quad x^n y x^m y z^n \quad m, n \in \mathbb{N}_1$

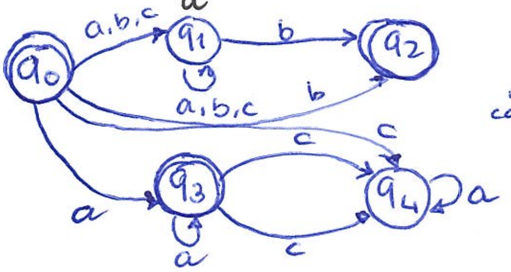
$$S \rightarrow xSz \mid xyXyz$$
$$X \rightarrow xX \mid x$$

CONVERSÃO DE AFND EM AFD

CONVERSÃO

$\{a, b, c\}$

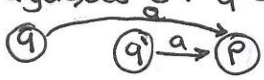




novos casos

1 ($\not\varepsilon$) Eliminação dos movimentos ε:

1. manter estado inicial e transições não ε
2. Se $q \rightarrow \ldots \rightarrow$ q_2, então q
3. Ligações ε: $q \rightarrow \ldots \; q' \xrightarrow{a}$ p, então



// → est. final

2 Eliminação não determinismo

	a	b	c
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_3\}$//	$\{q_1, q_2\}$//	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$//	$\{q_1, q_2\}$//	$\{q_1, q_4\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$//	$\{q_1\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2\}$//	$\{q_1, q_3\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$

* pode transformar-se em autómato *

LEMA DA BOMBAGEM

GRUPO 5 ex 3a)

Uma linguagem regular é uma linguagem que aceita todas as suas palavras e apenas essas $L = \underbrace{a^k b^k}_{w} \underbrace{a^k b^k}_{w}$, $k \in \mathbb{N}$

Supondo que L é regular, verifica o Lema da Bombagem:

Seja $k \in \mathbb{N}_1$, o comprimento da bombagem e seja $s = a^k b^k a^k b^k$

$|s| = 4k$, então $s = \alpha\beta\gamma$, com: 1. $\beta \neq \varepsilon$ // 2. $|\alpha\beta| \leq k$ // 3. $\alpha\beta^m\gamma \in L, m \in \mathbb{N}$

então, por 2, α só tem a's, logo β só tem a's, $\beta = a^p$; por 3, $(p = 0)$, $\alpha\gamma \in L$,

$\alpha\gamma = a^{k-p} b^k a^k b^k$; por 1: $p \in \mathbb{N}_1$, logo $k - p \neq k$, logo $\alpha\gamma \notin L \Rightarrow L$ não é Regular.