Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 5 – Electrostática V

Campo eléctrico no vácuo e conceitos fundamentais da electrostática

- Dipolo eléctrico e aproximação dipolar
- Campo eléctrico nos materiais dieléctricos
- Vector polarização eléctrica e cargas de polarização
- Vector deslocamento eléctrico

Popovic & Popovic Cap. 7.1 – 7.6

Três tipos de materiais

Condutores

Contém cargas (electrões) que não estão ligadas a nenhum átomo e se movem livremente. São bons condutores de corrente.

Semicondutores

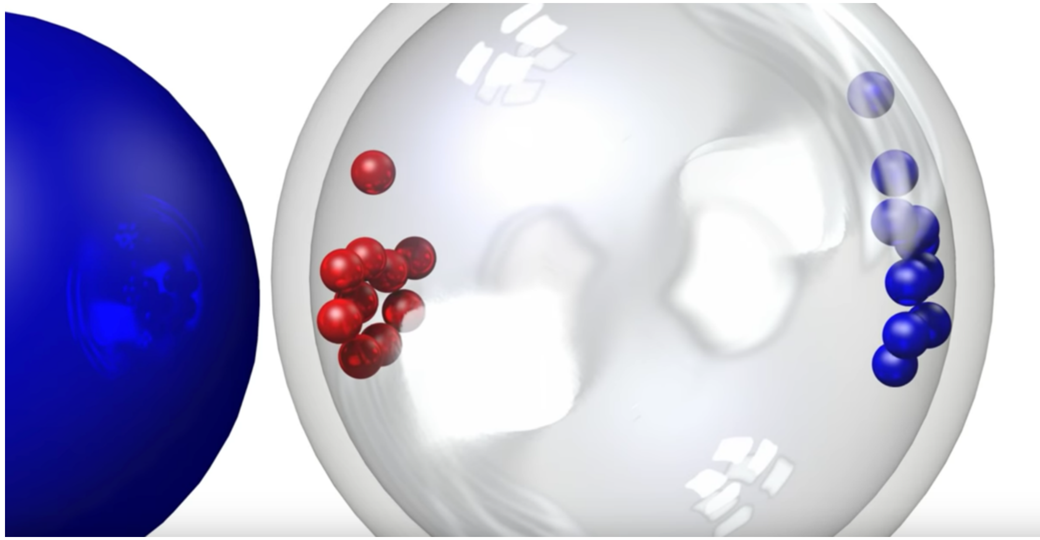
Contém algumas cargas livres, que podem conduzir corrente. São isolantes a baixa temperatura e condutores a alta.

Dieléctricos

Não possuem cargas livres. São maus condutores de corrente (isolantes).

Condutores vs. dieléctricos num campo eléctrico

Os condutores possuem **cargas livres**, que se movimentam em resposta a um campo eléctrico externo.

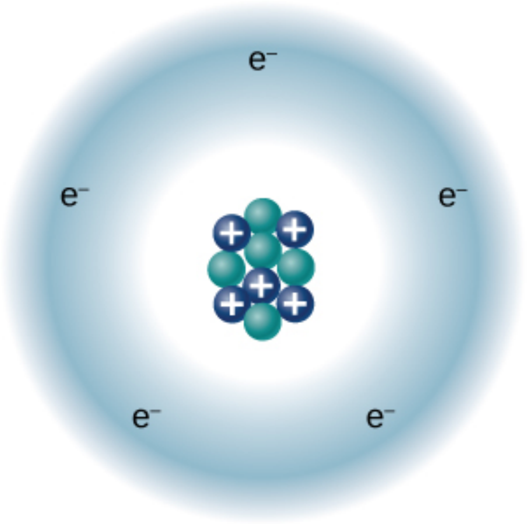


Um condutor carregado cria campos eléctricos, que por sua vez podem induzir o surgimento de cargas noutro condutor na vizinhança (indução electrostática).

Os **dieléctricos** não possuem cargas livres. Como se comportam no campo electrostático?

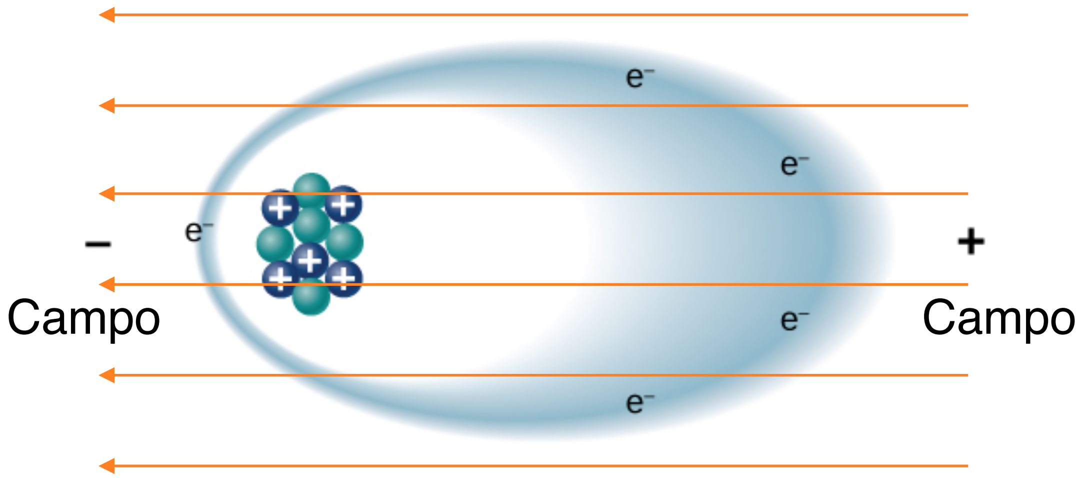
Átomo neutro num campo eléctrico

Sem campo externo

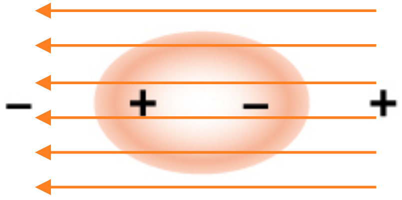


Não polarizado

Com campo externo

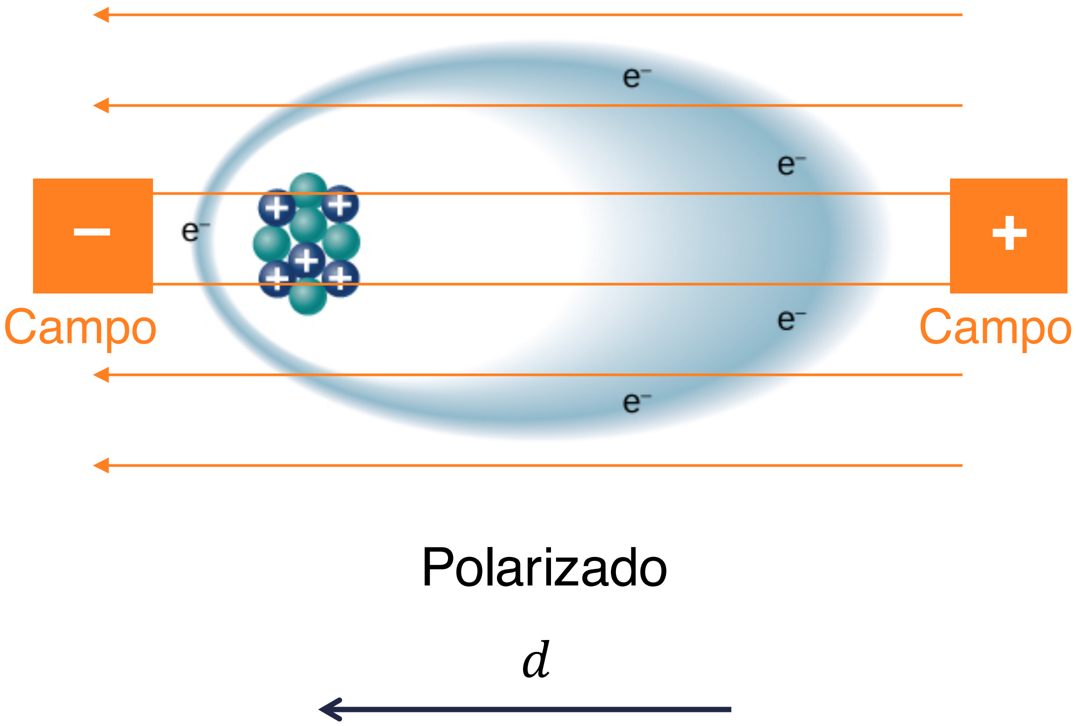


Polarizado

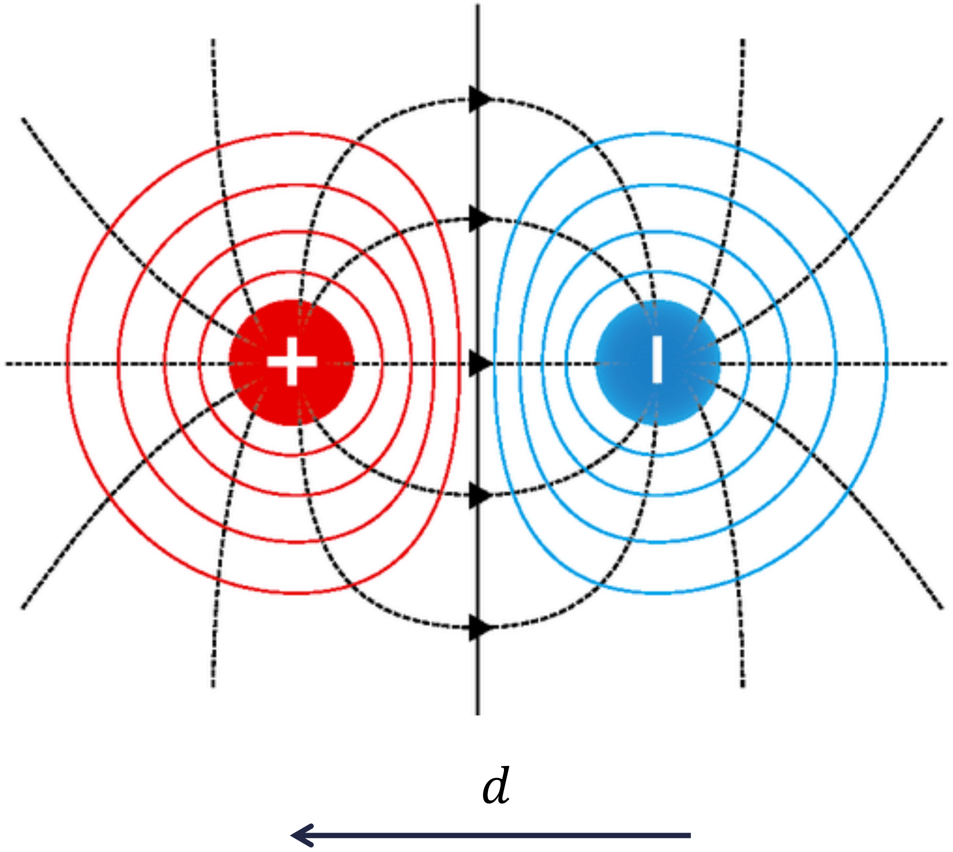


Átomo visto ao longe

Um átomo neutro num campo eléctrico comporta-se como um dipolo eléctrico

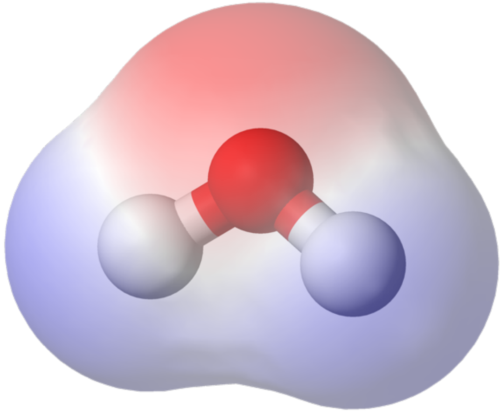


Polarizado

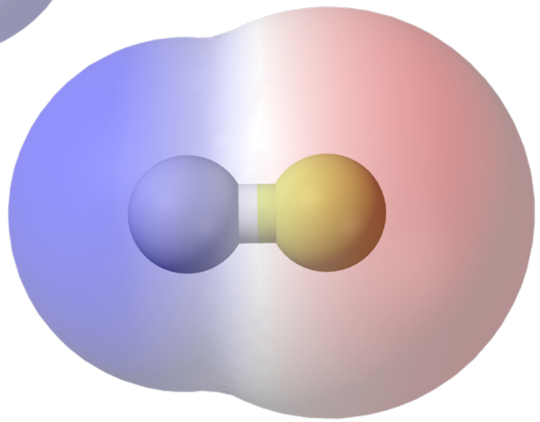


Algumas moléculas possuem dipolos permanentes

Polares

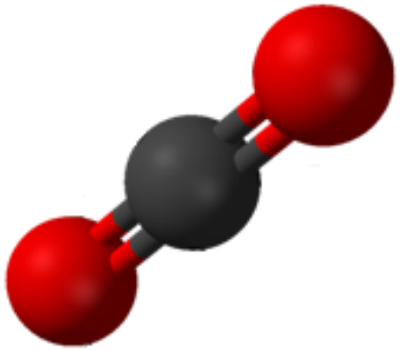


Água

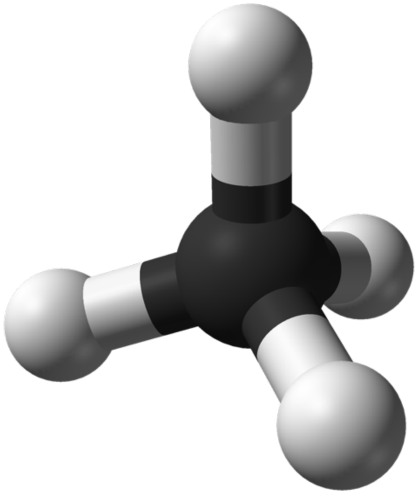


Fluoreto de hidrogénio

Não-polares



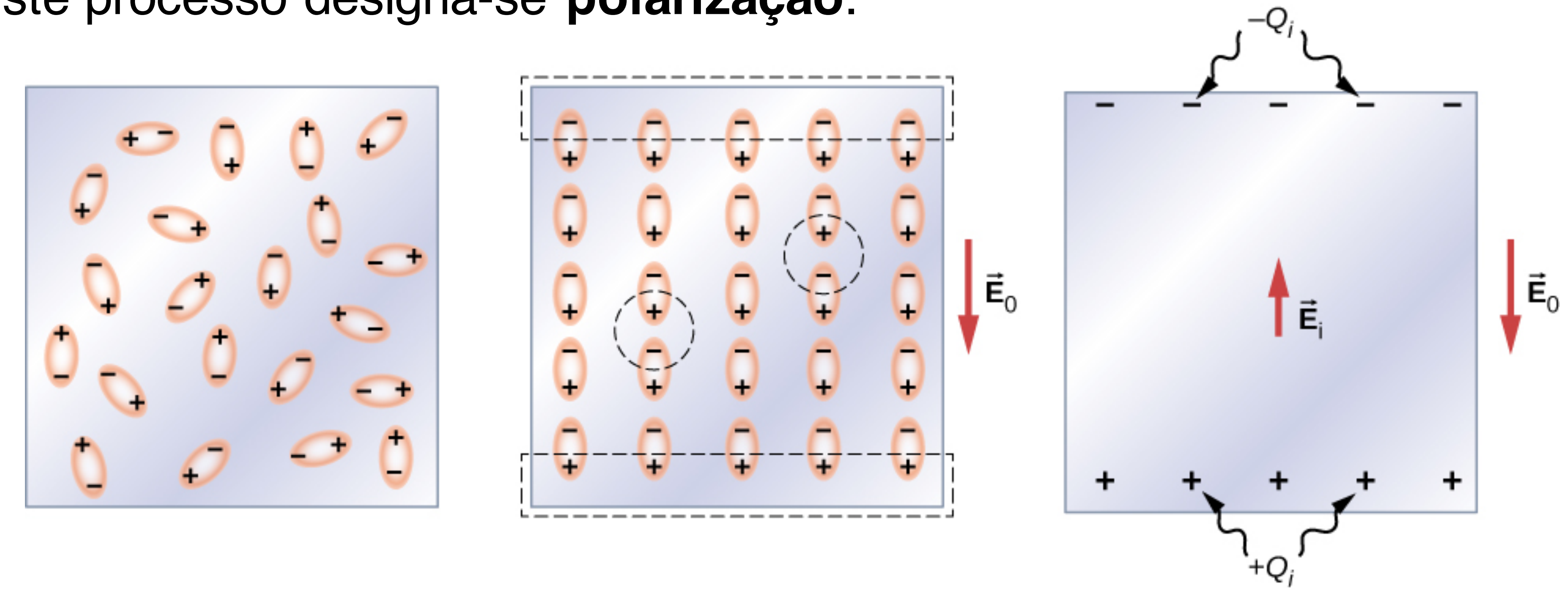
CO_2



Metano

As moléculas polares alinham-se com as linhas do campo eléctrico

Diz-se que o dieléctrico fica **polarizado.**
Este processo designa-se **polarização**.



Sem campo

Com campo $\vec{E}_0$

Campo induzido $\vec{E}_i$

Dieléctricos no campo electrostático

1. Um dieléctrico no campo electrostático comporta-se como **um grande número de dipolos** no vácuo
2. Para calcular o potencial e o campo eléctrico total, precisamos de saber todas as cargas e posições

Como calcular todas as cargas e posições?!

O que já sabemos sobre dipolos individuais

Aproximação dipolar, campo em $y >> a$:

$$\vec{E} = k\frac{2q}{y^2 + a^2}\frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}\vec{e}_x \approx k\frac{2aq}{y^3}\vec{e}_x$$

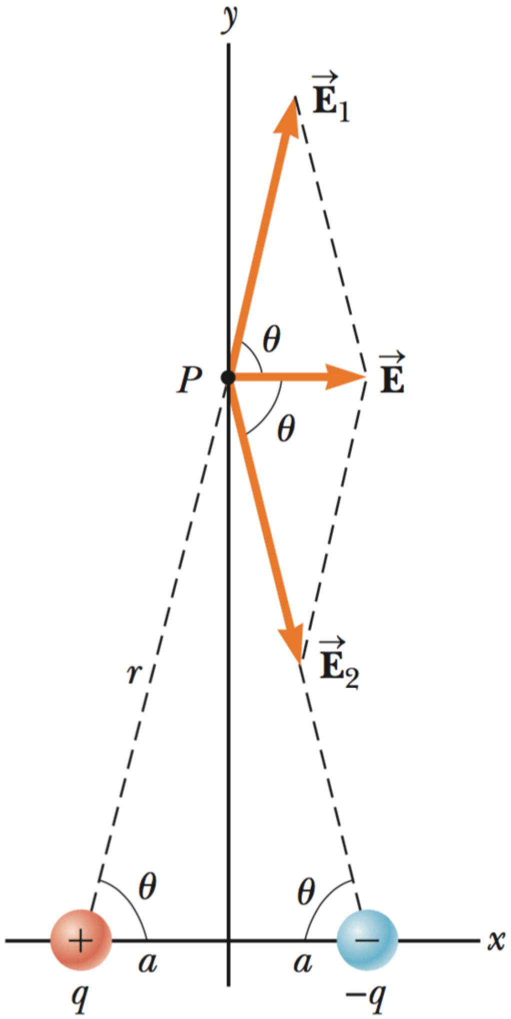
O campo eléctrico do dipolo é proporcional a $1/r^3$

Sendo $\vec{d} = 2a\vec{e}_x$ o vector que une as cargas, define-se

$\vec{p} = q\vec{d} = 2aq\vec{e}_x \; [\mathrm{C.m}]$

momento dipolar

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}\vec{p}$$



Como descrever o campo eléctrico de um grande número de dipolos?

Consideremos um pequeno volume Δv no qual existem n dipolos por unidade de volume [m^{-3}]. Se cada um tiver momento dipolar $\vec{p}$:

$$\vec{p}_{\text{total}} = (n\Delta v)\vec{p}$$

A **densidade de momento dipolar** é

$$\frac{\vec{p}_{\text{total}}}{\Delta v} = \boxed{n\vec{p} \equiv \vec{P}}$$

Vector polarização [C/m^2]

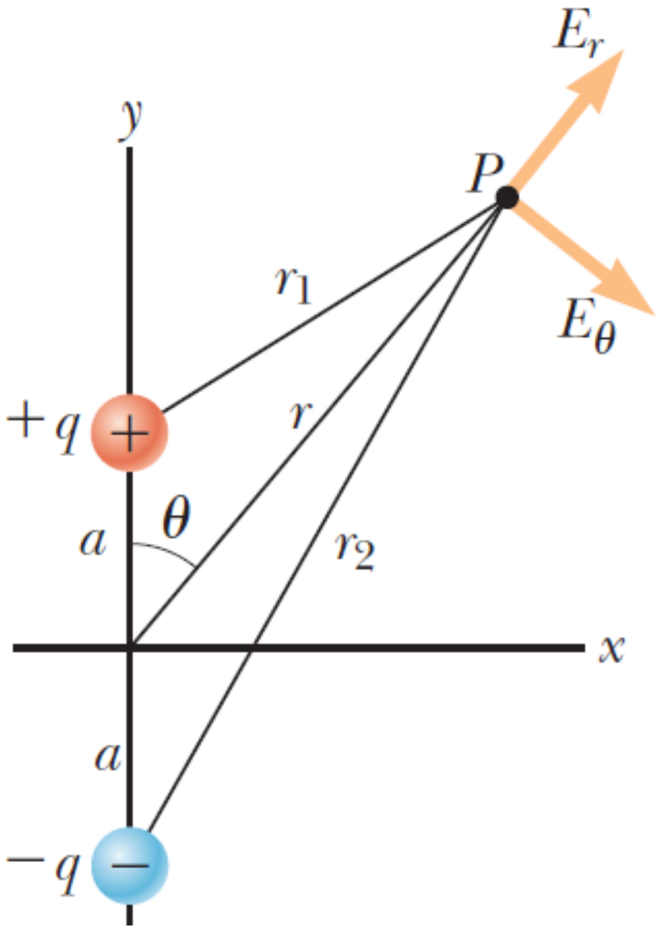
Assim, se conhecermos $\vec{P}$ num ponto podemos substituir um volume dv em seu redor por um único dipolo, de momento dipolar equivalente

$$\overrightarrow{dp} = \vec{P}\,dv \qquad \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

Potencial de um dieléctrico no campo electrostático

Na aproximação $a \ll r$ temos para **um dipolo**

$$V_P \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{r^2}$$



O potencial de um **dieléctrico de volume** v é a soma daqueles de todos os dipolos individuais $\overrightarrow{dp}$:

$$V = \int_V dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\overrightarrow{dp}\cdot\vec{u}_r}{r^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}\cdot\vec{u}_r}{r^2}dv}$$

$$d\vec{p} = \vec{P}dv$$

Dieléctricos no campo electrostático

1. Um dieléctrico no campo electrostático comporta-se como **um grande número de dipolos** no vácuo
2. Para calcular o potencial e o campo eléctrico total, precisamos de saber ~~todas as cargas e posições~~ o **vector polarização**

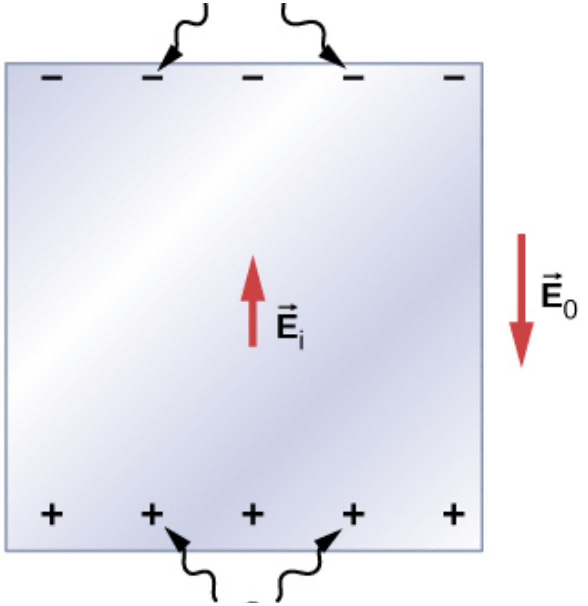
Como calcular o vector polarização?

Relação entre $\vec{P}$ e $\vec{E}$

O campo total $\vec{E}$ (resultante) a que o dieléctrico está sujeito é a soma

- do campo **aplicado externo** $\vec{E}_0$
- do campo **próprio** (de sinal oposto) $\vec{E}_i$ **induzido** pela polarização $\vec{P}$

$\sigma_{pol} = -|\vec{P}|$



$\sigma_{pol} = +|\vec{P}|$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i}$$

Verificam-se as seguintes relações:

$$\boxed{\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \, \vec{E}}$$

χ_e : susceptibilidade eléctrica

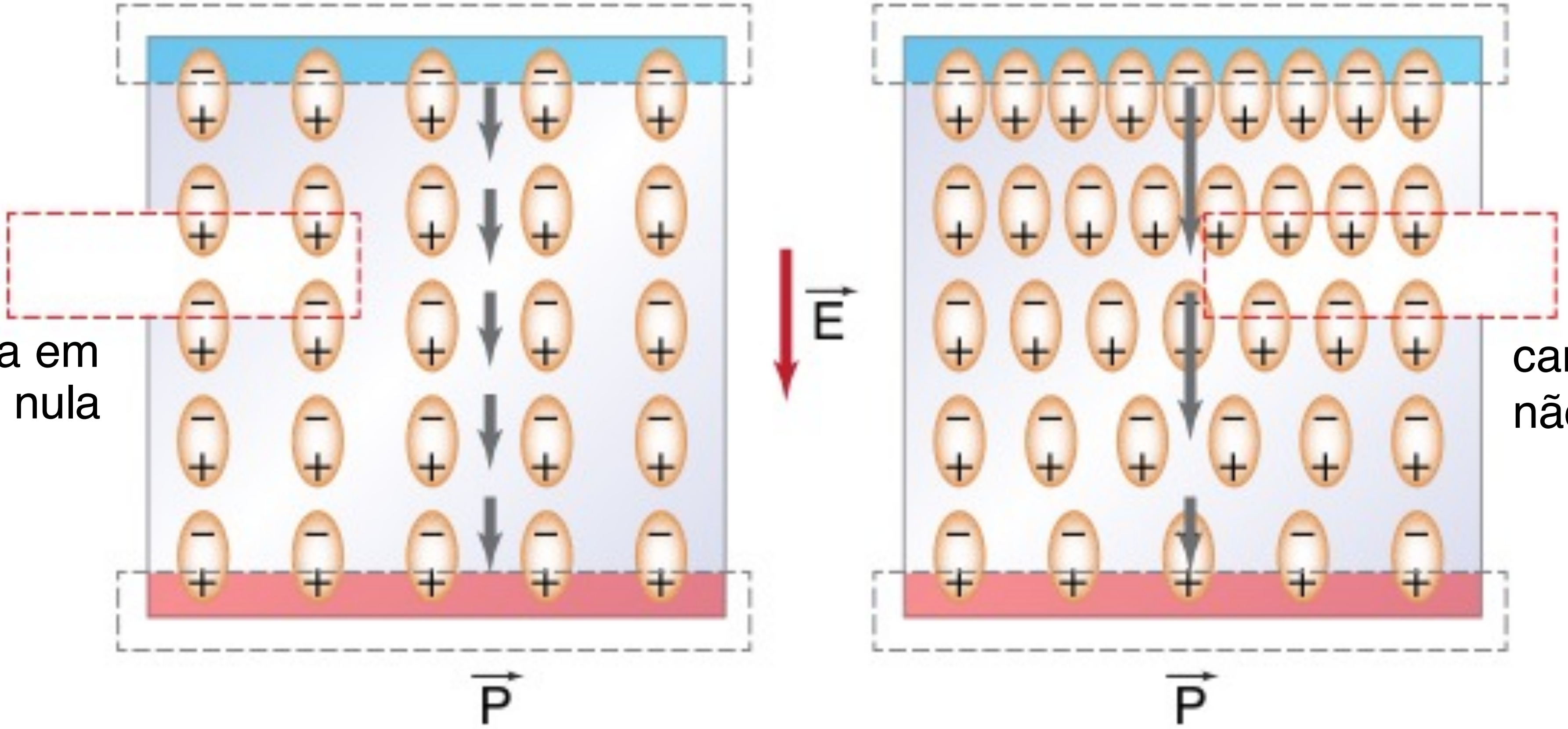
$$\boxed{\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}}$$

Densidade de carga de polarização em superfície [C/m^2]

Densidade de carga de polarização em volume

Dieléctrico homogéneo:
$\vec{P}$ uniforme

Dieléctrico não -homogéneo:
$\vec{P}$ não-uniforme



carga em volume nula

carga em volume não-nula

Densidade de carga de polarização em volume

As densidades de carga em superfície são um caso particular para quando a polarização $\vec{P}$ é homogénea. No caso geral (dieléctricos ou $\vec{P}$ não homogéneos), pode existir **densidade de carga em volume** e tem-se

$$\boxed{\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}$$

Densidade de carga de polarização em volume [C/m³]

A **carga de polarização** contida dentro de uma superfície fechada é

$$Q_{pol} = \int_v \rho_{pol} dv = -\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dv = -\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n}\, ds$$

(Teo. Divergência)

Vector deslocamento do campo eléctrico

Para ter em conta o campo gerado por um dieléctrico, a lei de Gauss deve ter em conta as **cargas livres** e as **cargas de polarização**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{Q_{livre} + Q_{pol}}{\epsilon_0}$$

Q_{livre} = carga livre total
Q_{pol} = carga de polarização total

Como $Q_{\mathrm{pol}} = -\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n}\, dS$, podemos substituir na equação acima e passar para o lado esquerdo:

$$\oint_S \underbrace{\boxed{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}}_{\equiv \vec{D}} \cdot \vec{n}\, dS = Q_{livre}$$

$\equiv \vec{D}$ = **Deslocamento do campo eléctrico**

No caso de um meio em que $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \boxed{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \vec{E}$$

$\equiv \varepsilon$ = **Permitividade eléctrica**

(ϵ mede a *polarizabilidade* do dieléctrico)

Permitividade eléctrica

Material	$\epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e$
Vácuo	1.000
Ar seco	1.0059
Esferovite	1.03
Teflon	2.1
Papel	2 - 4
Borracha (butil)	2.3
Borracha (silicone)	3.2
Plexiglass	3.4
Plástico PVC	4.0
Vidro	3.8-14.5
Água destilada	~80

No vácuo:

Permitividade do vácuo: $\epsilon_0 \approx 8{,}85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}$

Susceptibilidade do vácuo: $\chi_0 = 0$

Num dieléctrico:

Permitividade dieléctrica: $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)\quad [\mathrm{F/m}]$

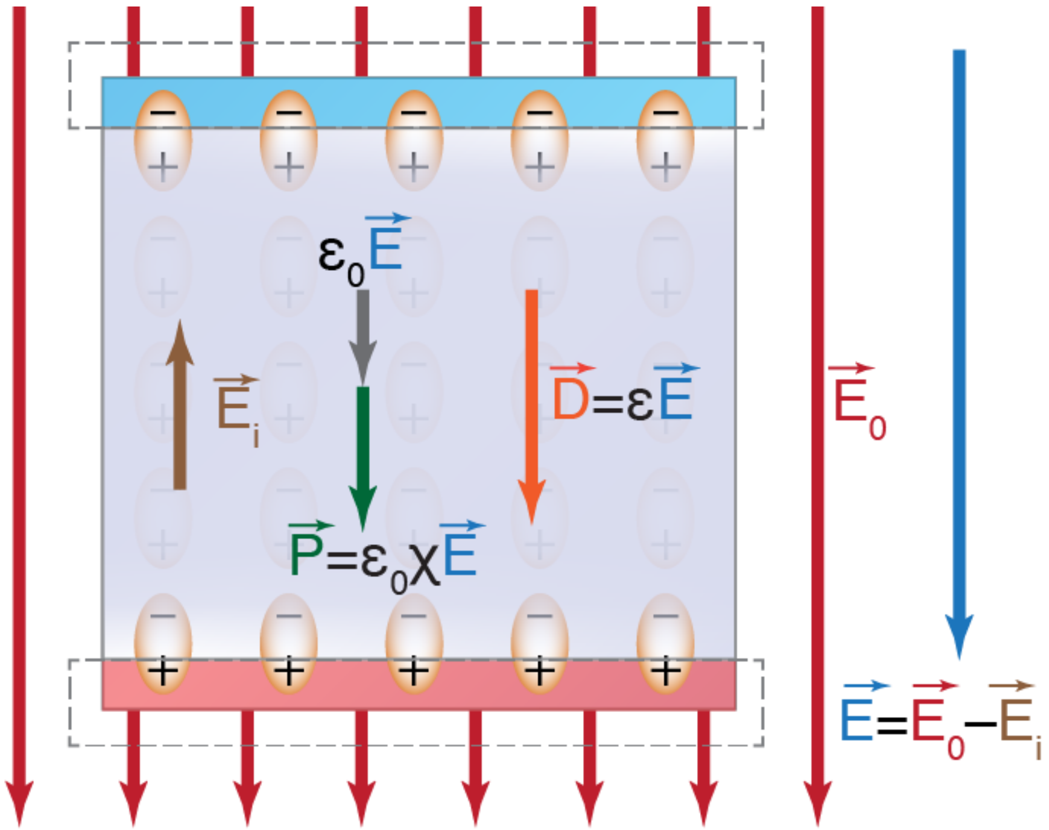
Susceptibilidade dieléctrica: $\chi_\mathrm{e} > 0$

Constante dieléctrica (ou permitividade relativa): $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e$

Dieléctricos: relações entre vectores

Dieléctrico colocado num campo externo $\vec{E}_0$

$\vec{E}_i$	Campo **induzido** [V/m]
$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_i$	Campo **resultante** [V/m]
$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$	Vector polarização [C/m^2]
$D = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$	Deslocamento eléctrico [C/m^2]



Qual o campo resultante no interior do dieléctrico?

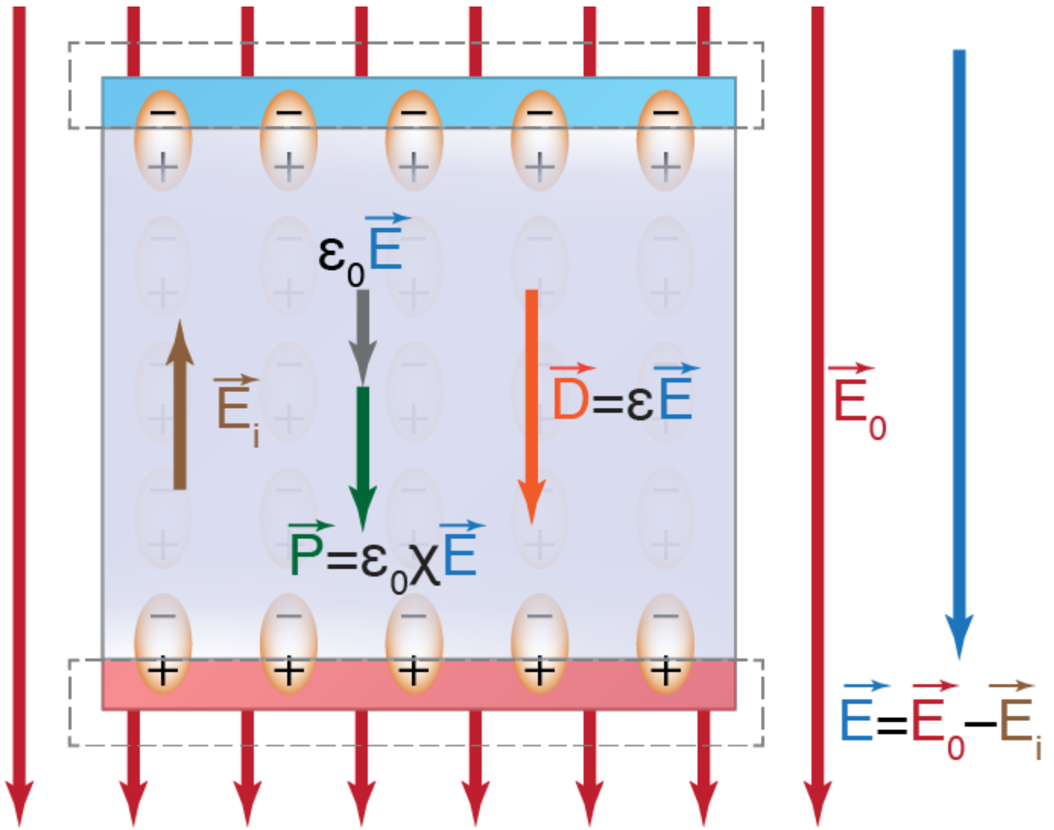
Para o exemplo da figura, podemos usar a expressão já conhecida para o campo eléctrico entre duas placas infinitas:

$$E_{res} \equiv E = E_0 - E_i$$

$$E = E_0 - \frac{\sigma_{pol}}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

$$E(1+\chi_e) = E_0 \Leftrightarrow E = \frac{E_0}{1+\chi_e} = \boxed{\frac{E_0}{\epsilon/\epsilon_0}}$$

O campo no dieléctrico é **mais fraco** por um factor igual à constante dieléctrica ϵ/ϵ_0.



Sumário

1. Um dieléctrico no campo electrostático comporta-se como **um grande número de dipolos** no vácuo, e diz-se que está **polarizado**.
2. A polarização é representada pelo **vector polarização** (momento dipolar por unidade de volume, C/m^2)
3. Para efeitos de calcular o campo eléctrico total, o dieléctrico é **equivalente a uma distribuição de cargas** no vácuo:
   - Em superfície: $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
   - Em volume: $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ (se existirem) $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}_0$
4. No interior do dieléctrico definimos o campo **deslocamento eléctrico** $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E}$, que tem em conta as cargas livres e de polarização.