ficha nº 8 : Integração por substituição (I.P.S.)

f contínua em $[a,b]$ $\quad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

$x = \varphi(t)$ $\quad \varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$

φ tem derivada integrável $\quad \varphi(\beta) = b$

1b) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\,dx \overset{\text{I.P.S.}}{=} \int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t}\cdot \ln(t)\,dt \overset{\text{Barrow}}{=} \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}$ //

$\ln x = t$

$x = e^t = \varphi(t)$ $\quad x = e \Rightarrow t = \ln(e) = 1$

$\quad x = e^e \Rightarrow t = e\ln(e) = e$

$\varphi'(t) = e^t$, $f(x) \underset{x=\varphi(t)}{\longmapsto} f(\varphi(t))\,\varphi'(t) = \dfrac{\ln t}{e^t\, t} \cdot e^t$

<u>Nota</u>: $\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \ln x \overset{P.P}{=} \underset{f}{\ln x} \cdot \underset{g}{\ln x} - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2\int \frac{1}{x} \ln x = \ln^2(x)$.

<u>Integral indefinido</u>: f integrável em $[a,b] = I$

Define-se $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e é contínua em I

Teorema Fundamental do cálculo

f contínua em I então $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é uma função diferenciável e $F'(x) = f(x)$ em I

Exercícios 4 da ficha nº 8

4 a) $\int_x^0 e^{4t^2}\,dt$ b) $\int_0^{\cos x} e^{t^2+2x}\,dt$ c) $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t^2+1)}\,dt$

a) $-\int_0^x e^{4t^2}\,dt$, $f(t)=e^{4t^2}$ contínua em $\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x e^{4t^2}\,dt$

$D_F=\mathbb{R}$ e F diferenciável em $\mathbb{R}$ do TFC

e $F'(x)=e^{4x^2}$ $x\in\mathbb{R}$

ou seja $\left(\int_x^0 e^{4t^2}\,dt\right)'_x = -\left(\int_0^x e^{4t^2}\,dt\right)' = -e^{4x^2}$ $x\in\mathbb{R}$

b) $G(x)=\int_0^{\cos x} e^{t^2}\cdot e^{2x}\,dt = e^{2x}\int_0^{\cos x} e^{t^2}\,dt = e^{2x}\cdot F(\cos x)$

$F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$, $f(t)=e^{t^2}$ contínua em $\mathbb{R}$ $\overset{TFC}{\Rightarrow}$ F diferenciável em $\mathbb{R}$

e $F'(x)=f(x)=e^{x^2}$

G sendo representada pelo produto e composição de funções diferenciáveis

G é diferenciável em $\mathbb{R}$, $G'(x)=\left(e^{2x}\cdot F(\cos x)\right)' = 2e^{2x}F(\cos x)+e^{2x}\left(F(\cos x)\right)' =$

$G'(x)=2e^{2x}\cdot\int_0^{\cos x} e^{t^2}\,dt + e^{2x}\left((\cos x)'\cdot F'(\cos x)\right) = 2e^{2x}\cdot F(\cos x) - \operatorname{sen} x\cdot e^{2x}\cdot e^{\cos^2 x}$.

c) $H(x)=\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$

$f(t)=\frac{1}{\ln(1+t^2)}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

f não limitada numa vizinhança de zero.

$x<0$, o intervalo $[x,x^2]$ contém 0

$D_H=\mathbb{R}^+$

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt \quad x\in\mathbb{R}$$

$a>0$ fixo

Assim $H(x)=F(x^2)-F(x)$ $x>0$

$f(t)=\frac{1}{\ln(1+t^2)}$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ então F

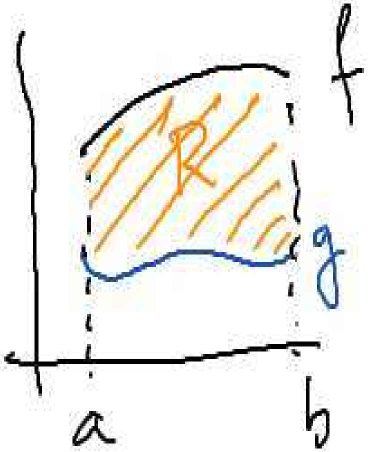
TFC

é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, $F'(x)=\frac{1}{\ln(1+x^2)}$

H é igualmente diferenciável em $\mathbb{R}^+$ uma vez que resulta da composição e soma de funções diferenciáveis.

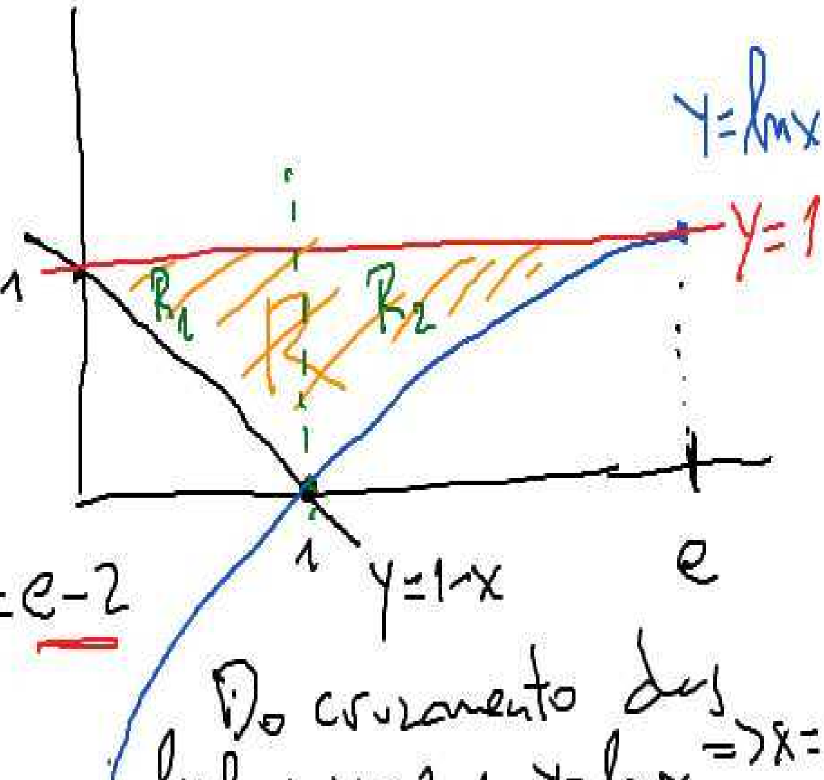
$$H'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\frac{2x}{\ln(1+x^4)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

ficha nº 9 . Aplicação do integral na determinação da área de regiões planas limitadas.



$$\text{área } R = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Exe. 3 i) $y = \ln x$, $y = 1-x$, $y = 1$



$\text{área } R = \text{área } R_1 + \text{área } R_2 = 1/2 + e - 2$

$\text{área } R_1 = \int_0^1 (1-(1-x))\,dx = \frac{1}{2}$

$\text{área } R_2 = \int_1^e (1-\ln x)\,dx \underset{\text{Barrow}}{=} \left[x - (x(\ln x - 1))\right]_1^e = e-2$

$P \ln x \overset{\text{P.P.}}{=} x(\ln x - 1)$

Do cruzamento das linhas $y = 1$ e $y = \ln x \Rightarrow x = e$

4ii) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1 \wedge 0\le y\le \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}\}$

$$\text{área } R = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}-0\right)dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+(x+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$$

$$\stackrel{\text{Barrow}}{=} \left[2\,\text{arctg}(\sqrt{x+2})\right]_{-1}^{1} = \ldots$$

Método de substituição $\sqrt{x+2}=t \Rightarrow x=t^2-2=\varphi(t)$

$x=-1 \Rightarrow t=1,\ x=1 \Rightarrow t=\sqrt{3}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}dx = \int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{(1+t^2)\,t}\cdot 2t\,dt = 2\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt \stackrel{\text{Barrow}}{=} 2\left[\text{arctg}\,t\right]_{1}^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(\text{arctg}\sqrt{3}-\text{arctg}\,1\right) = 2\left(\pi/3-\pi/4\right)$$

ficha nº 8. exercício 5: $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t \, dt$

Barrow

a) $\varphi(2) = \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln(t) \, dt = \left[\frac{-\ln t}{2+2t^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right]_1^2 = \frac{-\ln 2}{10} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$P \frac{t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} P\, 2t \cdot (1+t^2)^{-2} = \frac{1}{2} \frac{(1+t^2)^{-1}}{-1}$. Primitivando por partes

$P \frac{t}{(1+t^2)^2} \cdot \ln t \overset{P.P.}{=} \frac{-1}{2(1+t^2)} \cdot \ln t - P \frac{-1}{2(1+t^2)} \cdot \frac{1}{t}$.

$P \frac{1}{(1+t^2)\,t} = P\left(\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}\right) = A \ln|t| + \frac{B}{2} \ln(1+t^2) + C \operatorname{arctg} t = \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$1 = A(1+t^2) + (Bt+C)\,t \Rightarrow 0t^2 + 0t + 1 = (A+B)t^2 + Ct + A$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$\frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$

b) $f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t$ contínua em $\mathbb{R}^+ \underset{TFC}{\Longrightarrow} \varphi$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$

$$\varphi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln x$$

c) $x > 0$, $0 < x < 1$ $\varphi'(x) < 0$ e $\varphi'(1) = 0$

$x > 1$ $\varphi'(x) > 0$

φ é decrescente em $]0,1]$ e crescente em $[1,+\infty[$

$\varphi(1)$ é mínimo e $\varphi(1) = 0$

Se existissem c_1, c_2, $\varphi(c_1) = \varphi(c_2) = 0$

$c_1 = 1$ ou $c_2 = 1$

então existiria em $]c_1, c_2[$ pelo menos

(do teorema de Rolle) $d \in]c_1, c_2[$ tal que $\varphi'(d) = 0$

impossível pois $\varphi'(d) \neq 0$ para $d \neq 1$