Ficha 7
Resolução dos exercícios propostos

I.1 Verifique se os seguintes integrais são ou não convergentes.

No caso afirmativo, indique o seu valor.

a) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{1}{x}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, logo, em particular, é contínua em $[2,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$
- $\lim\limits_{x\to 2^{+}}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}[\ln x]_{2}^{b}=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 2)=\lim_{b\to+\infty}\ln b-\lim_{b\to+\infty}\ln 2=\ln(+\infty)-\ln 2=+\infty-\ln 2=+\infty$$

Logo, o integral $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ é divergente.

b) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{2}}dx$

Resolução:

A função integranda $\left(\frac{1}{x^{2}}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, logo, em particular, é contínua em $]0,1]$.

Atendendo a que

- $\lim\limits_{x\to 1^{-}}\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{0^{+}}=+\infty$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo inferior, então, podemos concluir que este integral é impróprio de segunda espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{2}}dx=\lim_{a\to0^{+}}\int_{a}^{1}\frac{1}{x^{2}}dx=\lim_{a\to0^{+}}\int_{a}^{1}x^{-2}dx=\lim_{a\to0^{+}}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{a}^{1}=\lim_{a\to0^{+}}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{a}^{1}=\lim_{a\to0^{+}}\left[-\frac{1}{x}\right]_{a}^{1}$$

$$=\lim_{a\to0^{+}}\left(-\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{a}\right)\right)=\lim_{a\to0^{+}}\left(-1+\frac{1}{a}\right)=-1+\frac{1}{0^{+}}=-1+(+\infty)=+\infty.$$

Logo, o integral $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^{2}}dx$ é divergente.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$ é contínua em $]0,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-\sqrt{+\infty}}}{\sqrt{+\infty}} = \frac{e^{-(+\infty)}}{+\infty} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{1}{(+\infty)e^{+\infty}} = \frac{1}{(+\infty)\cdot(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-\sqrt{0^+}}}{\sqrt{0^+}} = \frac{e^{-(0^+)}}{0^+} = \frac{e^{0^-}}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo inferior, então podemos concluir que se trata de um integral impróprio misto.

Assim, o integral será:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{a\to0^+\\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \underset{(*)}{=} \lim_{\substack{a\to0^+\\ b\to+\infty}} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_a^b = \lim_{\substack{a\to0^+\\ b\to+\infty}} \left(-2e^{-\sqrt{b}} - \left(-2e^{-\sqrt{a}}\right)\right) = -2e^{-\sqrt{+\infty}} + 2e^{-\sqrt{0}}$$

$$= -2e^{-\infty} + 2e^{0} = -2\cdot\frac{1}{e^{+\infty}} + 2\cdot 1 = -2\cdot\frac{1}{+\infty} + 2 = -2\cdot 0 + 2 = 2.$$

Logo, o integral $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ é convergente e $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2$.

Cálculos auxiliares: $(*)$

$$P\left(\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right) \underset{\uparrow}{=} -2P\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\right) \underset{\uparrow}{=} -2e^{-\sqrt{x}} + C$$

Regra de primitivação: $P\,u'\cdot e^u = e^u + C$

em que $\begin{cases} u = -\sqrt{x} \\ u' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

Usando a regra de primitivação enunciada na igualdade anterior

I.2 Verifique se os seguintes integrais são ou não convergentes.

No caso afirmativo, indique o seu valor.

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}$, logo, em particular, é contínua em $[0,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(+\infty)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} x\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arc\,tg} b - \operatorname{arc\,tg} 0\right) = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} b - \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} 0 = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) - \operatorname{arc\,tg} 0 \underset{(*)}{=} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Logo, o integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ é convergente e $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Observação $(*)$:

Observando o gráfico podemos concluir que, quando $x \to +\infty$, tem-se que $y \to \frac{\pi}{2}$, sendo $y = \operatorname{arc\,tg} x$,

isto é, $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$ e, o valor da função no ponto x=0 é y=0, isto é, $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$.

b) $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^6}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{x^2}{1+x^6}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Como os extremos superior e inferior do intervalo de integração são infinitos e atendendo a que

- $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x^6} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regra de Cauchy}}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{6x^5} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{3x^4} = \frac{1}{3(\pm\infty)^4} = \frac{1}{+\infty} = 0$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^6}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x^2}{1+\left(x^3\right)^2}dx + \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{3x^2}{1+\left(x^3\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(x^3\right)\right]_a^0 + \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(x^3\right)\right]_0^b = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}(0) - \operatorname{arc\,tg}\left(a^3\right)\right) + \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(b^3\right) - \operatorname{arc\,tg}(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left((-\infty)^3\right) + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left((+\infty)^3\right) = -\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(-\infty) + \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(+\infty)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Logo, o integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^6}dx$ é convergente e $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{\pi}{3}$.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arc tg}(x)}{1+x^2}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\frac{\text{arc tg}(x)}{1+x^2}\right)$ é contínua em $\mathbb{R}$, logo, em particular, é contínua em $[0,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{arc tg}(x)}{1+x^2} = \frac{\text{arc tg}(+\infty)}{1+(+\infty)^2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0$
- $\lim_{x\to0^+} \frac{\text{arc tg}(x)}{1+x^2} = \frac{\text{arc tg}(0)}{1+0^2} = \frac{0}{1} = 0$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{arc tg}(x)}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,\text{arc tg}(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(\text{arc tg}\,x)^2}{2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left[(\text{arc tg}\,x)^2\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left((\text{arc tg}\,b)^2 - (\text{arc tg}\,0)^2\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left((\text{arc tg}\,b)^2 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{arc tg}(+\infty))^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

Logo, o integral $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arc tg}(x)}{1+x^2}dx$ é convergente e $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arc tg}(x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{8}$.

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(e^{-|x|}\right)$ é contínua em $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$. Como os extremos superior e inferior do intervalo de integração são infinitos e atendendo a que

- $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-|x|} = e^{-|\pm\infty|} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie. Assim, o integral será:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-(-x)}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx + \lim_{b\to+\infty}\left(-\int_0^b -e^{-x}dx\right) = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left(-\left[e^{-x}\right]_0^b\right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) - \lim_{b\to+\infty}\left[e^{-x}\right]_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left(1-e^a\right) - \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b} - e^0\right)$$

$$= 1 - e^{-\infty} - \left(e^{-(+\infty)} - 1\right) = 1 - e^{-\infty} - e^{-\infty} + 1 = 2 - 2e^{-\infty} = 2 - \frac{2}{e^{+\infty}} = 2 - \frac{2}{+\infty} = 2 - 0 = 2$$

Logo, o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$ é convergente e $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = 2$.

e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Resolução:

A função integranda $\left(\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)$ é contínua em $]-2,2[$, logo, em particular, é contínua em $[0,2[$.

Atendendo a que

- $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-0^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$,

isto é, a função integranda é ilimitada no extremo superior, então podemos concluir que este integral é impróprio de segunda espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \underset{(*)}{=} \lim_{b\to 2^-}\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right]_0^b = \lim_{b\to 2^-}\left(\operatorname{arcsen}\frac{b}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{0}{2}\right)$$

$$= \operatorname{arcsen}\frac{2^-}{2} - \operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arcsen} 1^- - \operatorname{arcsen} 0 \underset{(*)}{=} \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Logo, o integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ é convergente e $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Observação $(*)$:

Observando o gráfico da função podemos concluir que, quando $x \to 1^-$, tem-se que $y \to \dfrac{\pi}{2}$, sendo

$y = \operatorname{arc\,sen} x$, isto é, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2}$ e, quando $x = 0$ tem-se que $y = \operatorname{arc\,sen}(0) = 0$.

f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

Resolução:

A função a integrar $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ é contínua em $]0,+\infty[$, logo, em particular, é contínua em $[1,+\infty[$.

Como o extremo superior do intervalo de integração é infinito $(+\infty)$ e atendendo a que

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \underset{\text{Regra de Cauchy}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$,

isto é, a função integranda é limitada no intervalo de integração, então podemos concluir que este integral é impróprio de primeira espécie.

Assim, o integral será:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\ln(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{(\ln(b))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2}\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{(\ln(b))^2}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\ln(b)\right)^2 = \frac{1}{2}(\ln(+\infty))^2 = \frac{1}{2}(+\infty)^2 = +\infty$$

Logo, o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ é divergente .