4. Circuitos elétricos

Exercício 4.1: Considere um circuito RC com uma fonte de tensão constante V_f. No instante inicial o condensador encontra-se descarregado.

a) Escreva a equação diferencial que descreve a carga no condensador, $q(t)$.

b) Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$. Esboce os seus gráficos.
(Sugestão: comece por experimentar uma solução do tipo $q(t) = a + be^{\alpha t}$)

c) Determine a expressão da energia fornecida pela fonte ao circuito durante a carga do condensador.

d) Determine as expressões da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante a carga do condensador e da energia armazenada no condensador após este se encontrar carregado.

[Verifique que o resultado não depende do valor da resistência utilizada e a energia fornecida pela fonte reparte-se em partes iguais pelo condensador e pela resistência!]

Exercício 4.2: Considere um circuito RC sem fonte em que o condensador tem uma carga inicial $q(0) = q_0$ e se descarrega através da resistência.

a) Escreva a equação diferencial que descreve a carga no condensador, $q(t)$.

b) Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$. Esboce os seus gráficos.
(Sugestão: comece por experimentar uma solução do tipo $q(t) = a + be^{\alpha t}$)

c) Determine a expressão da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante a descarga do condensador.

Exercício 4.3: Considere um circuito RL com uma fonte de tensão constante V_f. No instante inicial a corrente no circuito é $i(0) = 0$.

a) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente no circuito, $i(t)$.

b) Encontre as equações que descrevem $i(t)$, $v_L(t)$ e $v_R(t)$. Esboce os seus gráficos.
(Sugestão: comece por experimentar uma solução do tipo $i(t) = a + be^{\alpha t}$)

c) Determine a expressão da energia fornecida pela fonte ao circuito durante o período de estabelecimento da corrente no circuito ("carga" da indutância).

d) Determine as expressões da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante o período de estabelecimento da corrente no circuito e da energia armazenada na indutância.

Exercício 4.4: Considere um circuito RL onde uma fonte estabelece uma corrente i_0 sendo de seguida retirada do circuito.

a) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente no circuito, $i(t)$.

b) Encontre as equações que descrevem $i(t)$, $v_L(t)$ e $v_R(t)$. Esboce os seus gráficos. (Sugestão: comece por experimentar uma solução do tipo $i(t) = a + be^{\alpha t}$)

c) Determine as expressões da energia dissipada por efeito de Joule na resistência até a corrente cessar no circuito.

Exercício 4.5: Considere um circuito LC em que no instante inicial o condensador está carregado com uma carga $q(0) = q_0$ e a corrente no circuito é $i(0) = 0$.

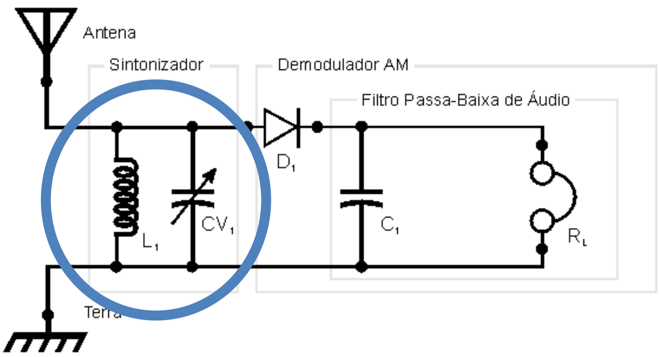
a) Escreva a equação diferencial que descreve a carga no condensador, $q(t)$.

b) Encontre as equações que descrevem $q(t)$ e $i(t)$. (Sugestão: comece por experimentar uma solução do tipo $q(t) = a\cos(\omega t + b)$.

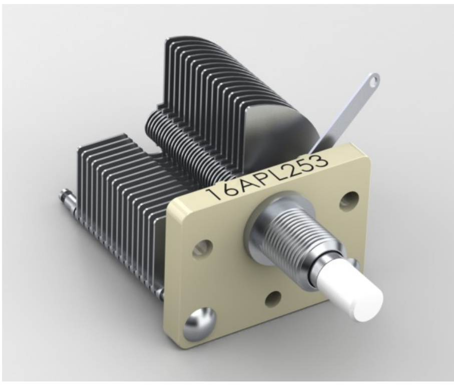
c) Qual a frequência de oscilação do circuito?

d) Determine as expressões da energia armazenada no condensador, U_C , da energia armazenada na indutância, U_L, e da energia total do sistema, $U = U_C + U_L$. Esboce os seus gráficos em função do tempo.

Exercício 4.6: Um circuito que permite sintonizar um recetor de rádio é constituído por uma indutância de 1 μH e por uma capacidade variável. Qual o valor da capacidade quando o circuito está sintonizado para receber uma estação que emite em 94,4 MHz?



Adaptado de https://pt.wikipedia.org/wiki/Rádio_de_galena#/media/File:EsquemaRadioDeGalena1.gif



http://www.orenelliottproducts.com/index-1.html

Exercício 4.7: Num circuito RLC a resistência, o condensador e a bobina encontram-se ligados em série a uma fonte de tensão sinusoidal $V(t) = V_0\text{sen}(\omega t)$, sendo $V_0 = 5\ V$. Os componentes deste circuito têm valores $R = 1\ k\Omega$, $L = 1\ mH$ e $C = 1\ \mu F$.

a) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente no circuito, i(t).

Sabendo que a solução da equação diferencial encontrada na alínea a) para o regime forçado (após ter desaparecido o regime livre) é:

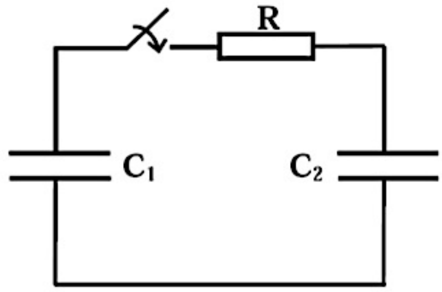
$$i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$
$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$
$$\operatorname{tg}\phi = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}$$

b) Determine as expressões que descrevem $v_R(t)$, $v_L(t)$ e $v_C(t)$.

c) Calcule a frequência angular da fonte, ω, e a correspondente frequência, f, que tornam máxima a amplitude da corrente no circuito, e calcule o seu valor.

d) Nas condições da alínea anterior, determine as expressões da energia armazenada no condensador, U_C e da energia armazenada na indutância, U_L. Verifique que a energia total armazenada no sistema é constante. Esboce os gráficos de U_C , U_L e da energia total.

Exercício 4.8: Considere o circuito da figura em que $C_1 = C_2 = 1\ \mu F$ e $R = 100\ \Omega$. Inicialmente o interruptor encontra-se aberto, o condensador C_1 tem uma tensão de 10 V e o condensador C_2está descarregado.



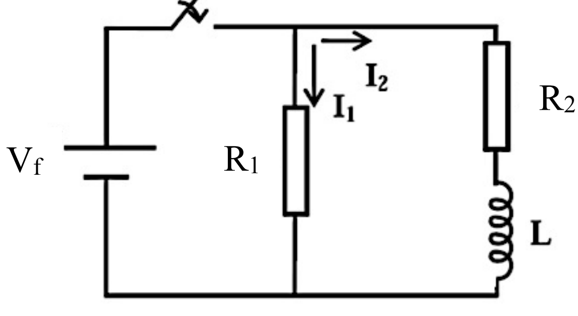
a) Calcule a carga e a energia inicial do condensador C_1.

Após se ter fechado o interruptor e se ter atingido o regime eletrostático:

b) Calcule a tensão de cada condensador.

c) Calcule a energia dissipada na resistência.

Exercício 4.9: Considere o circuito da figura com uma fonte de tensão $V_f = 10\ V$, uma resistência $R_1 = 10\ k\Omega$, uma resistência $R_2 = 1\ \Omega$ e uma indutância $L = 10\ mH$. O interruptor encontra-se fechado há muito tempo.



a) Determine a força eletromotriz induzida na bobina e as correntes elétricas I_1 e I_2. Justifique a sua resposta.

Num dado instante abre-se o interruptor.

b) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente na bobine.

c) Verifique que a solução da equação diferencial é $i(t) = i_0 e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$ e diga qual o valor de i_0.

d) Qual será a energia dissipada por efeito de Joule nas resistências até a corrente que percorre o circuito se anular?

Soluções

4.1 a) $\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC}=\frac{V_f}{R}$

b) $q(t)=CV_f\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

$i(t)=\frac{V_f}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

$v_C(t)=V_f\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

$v_R(t)=V_f e^{-\frac{t}{RC}}$

c) $U_f=C{V_f}^2$

d) $U_R=U_C=\frac{1}{2}C{V_f}^2$

4.2 a) $\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC}=0$

b) $q(t)=q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

$i(t)=\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

$v_C(t)=v_R(t)=\frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{RC}}$

c) $U_R=\frac{1}{2}\frac{{q_0}^2}{C}$

4.3 a) $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{V_f}{L}$

b) $i(t)=\frac{V_f}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

$v_L(t)=V_f e^{-\frac{R}{L}t}$

$v_R(t)=V_f\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

c) $U_f=\int_0^\infty\frac{{V_f}^2}{R}dt-L\left(\frac{V_f}{R}\right)^2$

d) $U_L=\frac{1}{2}L\left(\frac{V_f}{R}\right)^2$

$U_R=\int_0^\infty\frac{{V_f}^2}{R}dt-\frac{3}{2}L\left(\frac{V_f}{R}\right)^2$

4.4 a) $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$

b) $i(t)=i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$

$v_L(t)=-Ri_0 e^{-\frac{R}{L}t}$

$v_R(t)=Ri_0 e^{-\frac{R}{L}t}$

c) $U_R=\frac{1}{2}L{i_0}^2$

4.5 a) $\frac{d^2q}{dt^2}-\frac{q}{LC}=0$

b) $q(t)=q_0\cos(\omega t)$

$i(t)=q_0\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)$

c) $f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

d) $U_C(t)=\frac{1}{2}\frac{{q_0}^2}{C}\cos^2(\omega t)$

$U_L(t)=\frac{1}{2}\frac{{q_0}^2}{C}\mathrm{sen}^2(\omega t)$

$U=\frac{1}{2}\frac{{q_0}^2}{C}$

4.6 $C=2{,}8\ pF$

4.7 a) $\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=\frac{V_0}{L}\cos(\omega t)$

b) $v_R(t)=RI_0\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)$

$v_L(t)=\omega LI_0\cos(\omega t+\phi)$

$v_C(t)=-\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t+\phi)$

c) I_0^{max}: $\omega L=\frac{1}{\omega C}$

$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=3{,}2\times 10^5\ rad.\,s^{-1}$

$f=5\ kHz$

$I_0^{max}=\frac{V_0}{R}=5\ mA$

$i(t)=\frac{V_0}{R}\mathrm{sen}(\omega t)$

d) $U_C(t)=\frac{1}{2}LI_0^{max\,2}\cos^2(\omega t)$

$U_L(t)=\frac{1}{2}LI_0^{max\,2}\mathrm{sen}^2(\omega t)$

$U(t)=\frac{1}{2}LI_0^{max\,2}$

4.8 a) $Q_{1,i}=C_1V_{1i}=10^{-5}$ C

$U_{Ei}=\frac{1}{2}C_1{V_{1i}}^2=50\ \mu J$

b) $V_{1f}=V_{2f}=\frac{1}{2}V_{1i}=5\ V$

c) $U_{Ef}=\frac{1}{2}U_{Ei}=25\ \mu J$

$U_{E,dissipada}=25\ \mu J$

4.9 a) $\frac{dI}{dt}=0\implies\varepsilon=0$

$I_1=\frac{V_f}{R_1}=1\ mA$; $I_2=\frac{V_f}{R_2}=10\ A$

b) $\frac{di}{dt}+\frac{R_1+R_2}{L}i=0$

c) $i_0=I_2=10\ A$

d) $U_{M,dissipada}=U_{M,bobina,inicial}=\frac{1}{2}L{I_2}^2=0{,}5\ J$