Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^{o} **semestre 18/19**

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark

15 de outubro de 2018 (18:30)

Teste 103

Nome:
Número:

O teste que vai realizar tem a duração de **60 minutos** e consiste na resolução de **5 problemas**. Os 3 primeiros são de escolha múltipla; cada resposta em branco vale 0 valores, **e cada resposta errada vale -1/3 da respectiva classificação.** Os dois últimos problemas **não são de escolha múltipla**, devendo por isso apresentar os cálculos efetuados e/ou justificar cuidadosamente as suas respostas.

NOTA FINAL:

Problema 1 (1.5 valores)

Considere a seguinte matriz aumentada correspondente a um SEL nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & \alpha & 2 & 8 \\ 4 & \alpha & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

onde α é um parâmetro real.

a) (0.75 valores) Identifique o valor de α que torna o SEL impossível.

☒ $\alpha = 4$; ☐ $\alpha = 3$; ☐ $\alpha = 2$; ☐ $\alpha = 1$.

b) (0.75 valores) Se o SEL é possível e indeterminado, selecione o conjunto solução correto.

☐ $\{(-2x_4, x_4, x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\}$;
☒ $\{(-2x_3, x_3 + 2, x_3, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$;
☐ $\{(-x_3, x_3, x_3 + 2, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$;
☐ $\{(-x_3, x_3 + 2, x_3, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Problema 2 (1 valor)

Indique todas as afirmações corretas sobre a independência linear dos vetores $\begin{bmatrix} 2 \\ b \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b \\ b \\ b \end{bmatrix}$, de acordo com o valor assumido pela coordenada b.

☒ se $b = 0$ o conjunto é linearmente dependente;
☒ se $b = 1$ o conjunto é linearmente independente;
☒ se $b = 2$ o conjunto é linearmente dependente;
☐ se $b = 3$ o conjunto é linearmente dependente.

Problema 3 (0.5 valores)
Considere a transformação linear em $\mathbb{R}^2$ com a seguinte matriz canónica de rotação

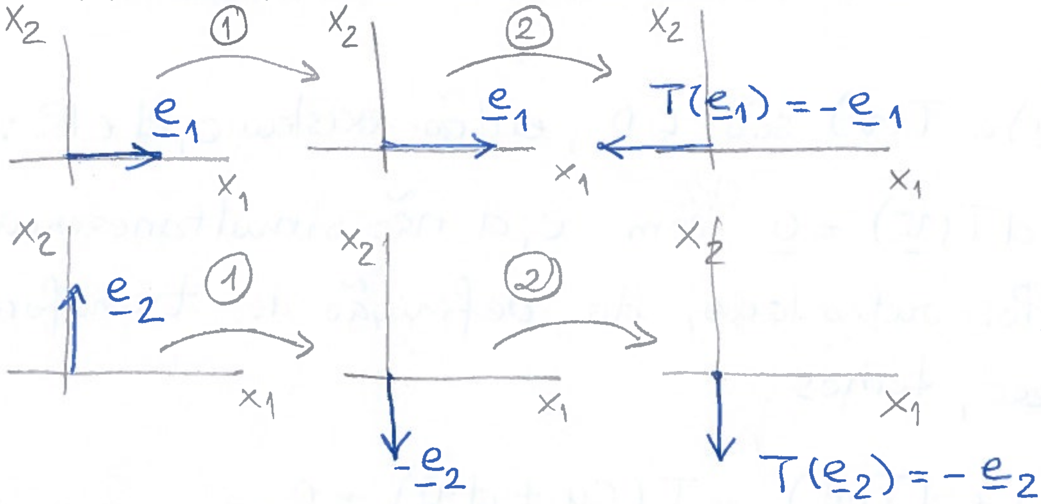
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \; a^2 + b^2 = 1.$$

Os valores a e b para os quais $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ é rodado para $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ são dados por:

☒ $a = 4/5$ e $b = -3/5$; ☐ $a = 3/5$ e $b = 4/5$;
☐ $a = 1/2$ e $b = -1/2$; ☐ $a = 4/3$ e $b = -3/4$.

Problema 4 (1 valor) ①
Considere a transformação linear T em $\mathbb{R}^2$ que reflete pontos no eixo x_1 e depois reflete pontos relativamente ao eixo x_2.②

a) (0.5 valores) Deduza a matriz canónica desta transformação linear.



$T(e_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

0.25

$T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 0.25 é a matriz canónica desta transformação.

b) (0.5 valores) Justifique que T também pode descrever uma rotação em torno da origem. Determine o ângulo dessa rotação.

A matriz canónica de uma rotação φ em torno da origem é dada por $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. 0.2

Com $\varphi = \pi$ (por exemplo), temos $\begin{bmatrix} \cos\pi & -\operatorname{sen}\pi \\ \operatorname{sen}\pi & \cos\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
0.2

Donde se conclui que A também é a matriz canónica da rotação em π. 0.1

Problema 5 (1 valor)

Mostre que se a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplica os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ linearmente independentes nos vetores $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ linearmente dependentes, então $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tem solução não trivial.

Como $T(\underline{u})$ e $T(\underline{v})$ são L.D., então existem $c, d \in \mathbb{R}$:

$c T(\underline{u}) + d T(\underline{v}) = \underline{0}$ 0.2 com c, d não simultaneamente nulos. Por outro lado, da definição de transformação linear, temos

0.3

$$c T(\underline{u}) + d T(\underline{v}) = T(c\underline{u} + d\underline{v}) = \underline{0},$$

0.3

em que $\underline{x} = c\underline{u} + d\underline{v}$ é uma solução não trivial, uma vez que $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ é L.I. e $c, d \in \mathbb{R}$ não sendo zero ao mesmo tempo ▨

0.2