IST - 1º Semestre de 2016/17

EXERCÍCIOS DE ÁLGEBRA LINEAR [1]

FICHA 3 - Transformações Lineares

1 Linearidade

Transformações lineares são funções

$$T : E_1 \to E_2$$

entre dois espaços vectoriais E_1 e E_2 (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com as seguintes características:

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_1$.

ii) $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

A partir destes axiomas pode facilmente mostrar-se que as transformações lineares gozam das seguintes propriedades:

- $T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- $T(-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$.
- $T(0) = 0$.

Um exemplo de transformação linear pode ser obtido através da operação de derivação de funções, dadas as suas propriedades no que concerne à soma e ao produto de funções. Se considerarmos o espaço $\mathbb{P}$ de todos os polinómios, a função $D : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ tal que

$$Dp(t) = p'(t),$$

ou mais concretamente

$$D\left(a_n t^n + ... + a_2 t^2 + a_1 t + a_0\right) = n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + ... + 2a_2 t + a_1,$$

constitui uma transformação linear entre $\mathbb{P}$ e ele próprio.

[1] Coligidos por: João Ferreira Alves, Ricardo Coutinho e José M. Ferreira.

1.1 Algumas transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

Outro exemplo de transformação linear

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é-nos dado pelo produto de uma matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, por um vector coluna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Entre elas constam as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ (ver exercícios 8 e 11 da secção seguinte).

1. MUDANÇA DE ESCALA:
$$S_r(x,y) = (rx, ry) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
(ampliação se $r > 1$, redução se $r < 1$).

2. ROTAÇÃO EM TORNO DA ORIGEM DE AMPLITUDE θ:
$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

3. REFLEXÃO RELATIVAMENTE ÀS RECTAS $y = \pm x$:
$$R(x,y) = (\pm y, \pm x) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

4. REFLEXÃO RELATIVA AO EIXO DOS xx:
$$R_x(x,y) = (x, -y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

5. REFLEXÃO RELATIVA AO EIXO DOS yy:
$$R_y(x,y) = (-x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

6. REFLEXÃO RELATIVA À ORIGEM:
$$R_0(x,y) = (-x, -y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

7. PROJECÇÃO SOBRE O EIXO DOS xx:
$$P_x(x,y) = (x, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

8. PROJECÇÃO SOBRE O EIXO DOS yy:
$$P_y(x,y) = (0, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

1.2 Exercícios

Exercício 1 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *é uma transformação linear tal que*

$$T(\mathbf{u}_1) = (1,-1), \ T(\mathbf{u}_2) = (1,2), \ T(\mathbf{u}_3) = (-3,-1).$$

a) *Calcule*

$$i) \ T(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2). \ ii) \ T(3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \ iii) \ T(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3).$$

b) *Determine* α *e* β *tais que* $T(\alpha\,\mathbf{u}_1 + \beta\,\mathbf{u}_3) = (0,-8)$.

Exercício 2 *Quais das seguintes transformações são lineares?*

a) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

b) $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$.

c) $T(x_1, x_2) = (2x_1^2 + x_1x_2, x_1)$.

d) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + 2x_2 + x_3)$.

e) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$.

f) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_1 + x_2 - 3x_3)$.

Exercício 3 *Com* $k, m \in \mathbb{R}$, *sejam* T_k *e* T_m *as transformações de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^2$ *dadas, respectivamente, por:*

$$T_k(x,y,z) = (x - y - z, x + y + z) + (k,k),$$
$$T_m(x,y,z) = \left(x^m - y^m - z^m, y^{m-1}z\right).$$

Para que valores de k *e* m *são* T_k *e* T_m *transformações lineares?*

Exercício 4 *A transformação* $T : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, *entre o espaço de todos os polinómios* $\mathbb{P}$ *e ele próprio, é dada por*

$$T(p(t)) = tp(t).$$

a) *Calcule* $T(5 + 4t + 3t^2 + 2t^3)$.

b) *Mostre que* T *é uma transformação linear.*

Exercício 5 *Seja* $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1t : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ *o espaço dos polinómios de grau não superior a 1. A transformação* $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, *entre* $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ *e ele próprio, é dada por*

$$T(a_0 + a_1t) = b_0 + b_1t$$

em que

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}.$$

a) *Calcule* $T(1 + 2t)$.

b) *Determine* a_0 *e* a_1 *tais que* $T(a_0 + a_1t) = 1 - t$. *E tais que* $T(a_0 + a_1t) = 1 - 2t$?

c) *Mostre que* T *é uma transformação linear.*

Exercício 6 *Sejam* $\mathrm{v}_1, ..., \mathrm{v}_p$, *vectores de* $\mathbb{R}^n$ *e* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma transformação linear. Mostre que se* $T(\mathrm{v}_1), ..., T(\mathrm{v}_p)$ *são linearmente independentes então o mesmo sucede a* $\mathrm{v}_1, ..., \mathrm{v}_p$.

Exercício 7 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a transformação linear definida por* $T(x, y) = x - y$. *Dado* $E \subset \mathbb{R}$, *por* $T^{-1}(E)$ *entende-se o subconjunto de* $\mathbb{R}^2$,

$$T^{-1}(E) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) \in E\right\}.$$

Determine e represente geometricamente:

a) $T^{-1}(\{3\})$. b) $T^{-1}(\{0\})$. c) $T^{-1}([-1, 1])$.

Exercício 8 *Seja* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ *o triângulo de vértices* $(1, 1)$, $(1, -1)$ *e* $(2, 0)$ *e* $C_\rho \subset \mathbb{R}^2$ *a circunferência de centro na origem e raio* $\rho > 0$. *Relativamente às transformações lineares* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *descritas a seguir, determine:*

i) $T(\Delta)$. *ii)* $T(C_\rho)$.

a) *Reflexão relativamente ao eixo dos* xx.

b) *Reflexão relativamente ao eixo dos* yy.

c) *Reflexão relativa à recta* $y = x$.

d) *Reflexão relativa à recta* $y = -x$.

e) *Mudança de escala de razão* $r > 0$.

Exercício 9 *A transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}\right).$$

Determine $T(E)$, *onde* E *designa a elipse de equação*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Exercício 10 *Com* $\theta \in \mathbb{R}$, *a transformação linear* $\mathcal{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\mathcal{R}_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta,\ x \sin\theta + y \cos\theta),$$

diz-se uma rotação de amplitude θ.

a) *Calcule os vectores* $\mathcal{R}_{\pi/2}(1, 0)$, $\mathcal{R}_{\pi/2}(0, 1)$, $\mathcal{R}_{\pi/2}(1, 1)$, $\mathcal{R}_{\pi/3}(1, 1)$. *Interprete os resultados geometricamente.*

b) *Quais das seguintes matrizes representam rotações? Em caso afirmativo indique a respectiva amplitude.*

$$i) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\ ii) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.\ iii) \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

$$iv) \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.\ v) \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

c) *A composição de duas rotações,* $\mathcal{R}_{\theta_2} \circ \mathcal{R}_{\theta_1}$*, é uma rotação? Em caso afirmativo, qual a sua amplitude?*

d) *Mostre que para qualquer* $\theta \in \mathbb{R}$*,* $\mathcal{R}_\theta$ *admite inversa. Determine-a.*

e) *Se* $C_\rho \subset \mathbb{R}^2$ *for a circunferência de centro na origem e raio* $\rho > 0$*, mostre que* $\mathcal{R}_\theta (C_\rho) = C_\rho$*, para qualquer* $\theta \in \mathbb{R}$.

f) *Seja* r_a *a recta de* $\mathbb{R}^2$ *cuja equação analítica é* $y = ax$ $(a \neq 0)$. *Qual a equação analítica da recta* $\mathcal{R}_{\pi/2}(r_a)$?

Exercício 11 *Seja* $\Delta \subset \mathbb{R}^3$*, o triângulo de vértices* $(1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 2)$. *Relativamente às transformações lineares* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *descritas a seguir, determine* $T(\Delta)$.

a) *Reflexão com relação ao plano* xOz.

b) *Reflexão com relação ao plano* yOz.

c) *Rotação em torno do eixos dos* zz *de amplitude* $\pi/2$.

2 Representação matricial de transformações lineares

Se $T : E_1 \to E_2$ for uma transformação linear entre E_1 e E_2, e estes forem espaços vectoriais de dimensão finita, então T admite uma representação matricial no sentido que passamos a descrever.

Sejam $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ uma base de E_1 $(\dim E_1 = n)$ e $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$ uma base de E_2 $(\dim E_2 = m)$. Então com $\mathbf{x} \in E_1$ temos

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + ... + x_n\mathbf{u}_n$$

e

$$T(\mathbf{x}) = x_1 T(\mathbf{u}_1) + ... + x_n T(\mathbf{u}_n).$$

Como tal, as coordenadas de $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}_2}$ de $T(\mathbf{x})$ na base $\mathcal{B}_2$ relacionam-se com as coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1}$ de $\mathbf{x}$ na base $\mathcal{B}_1$ através de uma matriz $[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ $(m \times n)$:

$$[T(\mathrm{x})]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1},$$

em que as colunas de $[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ são as coordenadas na base $\mathcal{B}_2$, $[T(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{B}_2}, ..., [T(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{B}_2}$, de

$$T(\mathbf{u}_1), ..., T(\mathbf{u}_n).$$

No caso de ser $E_1 = \mathbb{R}^n$ e $E_2 = \mathbb{R}^m$, ou seja, quando $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, os vectores $\mathbf{x}$ e $T(\mathbf{x})$ confundem-se com as suas coordenadas nas correspondentes bases canónicas, $\mathcal{E}_n$ e $\mathcal{E}_m$. Assim, em tal caso

$$T(\mathbf{x}) = [T]\ \mathbf{x}$$

em que as colunas da matriz $[T]$ são as coordenadas na base $\mathcal{E}_m$ dos vectores $T(\mathbf{u}_1), ..., T(\mathbf{u}_n)$.

2.1 Composição de transformações lineares

Com E_1, E_2 e E_3 espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sejam $T_1 : E_1 \to E_2$ e $T_2 : E_2 \to E_3$ duas transformações lineares. Então facilmente se observa que a composição de T_2 com T_1,

$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

é uma transformação linear entre os espaços E_1 e E_3.

Se E_1, E_2 e E_3 forem espaços de dimensão finita tais que

$$\dim E_1 = n \ , \quad \dim E_2 = m \quad \text{e} \quad \dim E_3 = \ell \ ,$$

de bases, respectivamente, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$, T_1 admite uma representação matricial através de uma matriz $[T_1]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$, $m \times n$, e T_2 uma representação matricial por uma matriz $[T_2]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}$, $\ell \times m$. Como tal, $T_2 \circ T_1$ terá como representação matricial a matriz $[T_2]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}[T_1]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} \quad (\ell \times n)$. Na verdade,

$$\begin{aligned}
[(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}_3} &= [T_2(T_1(\mathbf{x}))]_{\mathcal{B}_3} \\
&= [T_2]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}[T_1(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}_2} \\
&= [T_2]_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}[T_1]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} \ .
\end{aligned}$$

2.2 Representação matricial e mudanças de base

Se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ forem outras bases, respectivamente, de E_1 e E_2 a transformação linear $T : E_1 \to E_2$ terá uma representação matricial diferente, dada agora por uma outra matriz $[T]_{\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1}$, igualmente $m \times n$.

As matrizes $[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ e $[T]_{\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1}$ relacionam-se de acordo com o diagrama

$$\begin{array}{cccccc}
 & [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} & \overset{[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}}{\longrightarrow} & [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}_2} & \\
\mathbf{M}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{D}_1} & \uparrow & & \downarrow & \mathbf{M}_{\mathcal{D}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2} \\
 & [\mathbf{x}]_{\mathcal{D}_1} & \underset{[T]_{\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1}}{\longrightarrow} & [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{D}_2} &
\end{array}$$

onde $\mathbf{M}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{D}_1}$ é a matriz de mudança de base $\mathcal{D}_1$ para a base $\mathcal{B}_1$ e $\mathbf{M}_{\mathcal{D}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2}$ é a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_2$ para $\mathcal{D}_2$. Ou seja,

$$[T]_{\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\mathbf{M}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{D}_1}$$

2.3 Exercícios

Exercício 12 *Considere $\mathbb{R}^2$ munido da base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, onde $\mathbf{v}_1 = (1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1)$. Represente matricialmente na base $\mathcal{B}$ as seguintes transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas pelas seguintes relações:*

a) $T(1,2) = (2,1)$ *e* $T(2,1) = (1,2)$.

b) $T(1,2) = (3,3)$ *e* $T(2,1) = (6,6)$.

c) $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ *e* $T(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2$.

d) $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ *e* $T(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2$.

Exercício 13 *Considere uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$T(1,3) = (1,1,1) \quad e \quad T(5,7) = (2,2,3)$$

Determine uma base $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e uma base* $\mathcal{B}_3 = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *de forma que a representação matricial de* T *nestas bases* $\mathcal{B}_2$*,* $\mathcal{B}_3$ *seja*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 14 *Considerem-se as aplicações lineares* $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definidas por* $S(x,y,z) = (3x + y + 4z, x + z)$ *e* $T(x,y) = (x - 4y, 2x - 5y, 3x - 6y)$*. Determine a representação matricial de* $S \circ T$ *e de* $T \circ S$ *nas bases canónicas de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente.*

Exercício 15 *Considere* $\mathbb{R}^2$ *munido da base* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$*, onde* $\mathbf{v}_1 = (0,2)$*,* $\mathbf{v}_2 = (2,0)$*. Represente matricialmente na base* $\mathcal{B}$ *as seguintes transformações lineares* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*:*

a) T *é definida por* $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$.

b) T *é representada na base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *pela matriz*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Exercício 16 $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ *constitui uma base de* $\mathbb{R}^2$*, onde* $\mathbf{v}_1 = (1,1)$*,* $\mathbf{v}_2 = (1,2)$.

a) *Qual a representação matricial da transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *na base* $\mathcal{B}$*, se na base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *ela for representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

b) *Supondo que* T *é representada na base* $\mathcal{B}$ *pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

determine a expressão analítica para $T(x_1, x_2)$.

Exercício 17 *Com* $\mathbf{v}_1 = (0,2,0)$*,* $\mathbf{v}_2 = (0,0,2)$ *e* $\mathbf{v}_3 = (2,0,0)$*,* $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ *forma uma base de* $\mathbb{R}^3$*. Determine as representações matriciais na base* $\mathcal{B}$ *das seguintes transformações lineares* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*:*

a) T *é dada analiticamente por* $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3 + x_2)$.

b) *Relativamente à base canónica de* $\mathbb{R}^3$*,* T *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Exercício 18 *Considere a base de* $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, *onde* $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$ *e* $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$.

a) *Sabendo que* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é uma transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine a sua representação matricial na base $\mathcal{B}$.

b) *Supondo que na base* $\mathcal{B}$, *uma transformação linear* T *é representada matricialmente pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

determine analiticamente $T(x_1, x_2, x_3)$.

Exercício 19 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *é a transformação linear dada por*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_3 + 3x_2).$$

Por que matrizes é representada T *relativamente à base* $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *nos casos em que:*

a) $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1)$.

b) $\mathbf{u}_1 = (0,2,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,0,2)$, $\mathbf{u}_3 = (2,0,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1)$.

c) $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2)$.

d) $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,2)$.

Exercício 20 *Considerem-se as bases* $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$, *onde*

$$\mathbf{v}_1 = (1,-1,0),\ \mathbf{v}_2 = (-1,1,1)\ \text{ e } \mathbf{v}_3 = (1,0,-1).$$

Sejam $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *aplicações lineares tais que*

$$S(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2,\ S(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2,\ S(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_1,$$

$$T(\mathbf{w}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \text{ e } T(\mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

determine a expressão analítica para $T \circ S(x, y, z)$.

Exercício 21 *Seja* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ *definida por* $T(p(t)) = tp'(t)$. *Determine a matriz que representa* T *na base* $\mathcal{P}_2 = \{1, t, t^2\}$.

Exercício 22 *Seja* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ *definida por* $T(p(t)) = p(t^2) + p(2)\, t^3$. *Determine a matriz que representa* T *nas bases* $\mathcal{P}_2 = \{1, t, t^2\}$, $\mathcal{P}_4 = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

Exercício 23 *Seja* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(p(t)) = (p(-1), p(0), p(1))$. *Determine a matriz que representa* T *nas bases canónicas* $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{E}_3$.

Exercício 24 *$T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ é uma transformação linear tal que*

$$T(1) = 1 + t,\ T(t) = 1 + 2t,\ T\left(t^2\right) = t - t^3.$$

a) *Que polinómio é $T(1 - 2t + 3t^2)$?*

b) *Represente matricialmente T com respeito às bases canónicas de $\mathbb{P}_2$ e de $\mathbb{P}_3$.*

c) *Represente matricialmente T relativamente às bases $\mathcal{B} = (1, 1+t, 1+t+t^2)$ de $\mathbb{P}_2$ e $\mathcal{D} = (1, 1+t, 1+t^2, 1+t^3)$ de $\mathbb{P}_3$.*

Exercício 25 *Seja $F : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por*

$$F(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T.$$

a) *F é uma transformação linear. Justifique.*

b) *Por que matriz é representada F relativamente à base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Exercício 26 *Seja*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

uma matriz arbitrária do espaço vectorial $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2. Quais das seguintes transformações de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$, são lineares?

$$T_1(\mathbf{A}) = a + d. \quad T_2(\mathbf{A}) = ab - cd. \quad T_3(\mathbf{A}) = a + b + c + d. \quad T_4(\mathbf{A}) = abcd.$$

Nos casos afirmativos indique a respectiva representação matricial relativamente à base canónica de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 27 *Considere as transformações $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ e $P : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ definidas por:*

$$Dp(t) = p'(t), \quad Pp(t) = \int_0^t p(s)\, ds,$$

em que p designa um polinómio de $\mathbb{P}_3$.

a) *Ambas são transformações lineares. Justifique.*

b) *Determine as matrizes que representam D e P relativamente às bases canónicas $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ e $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$.*

c) *D e P são transformações inversas?*

3 Núcleo e contradomínio de uma transformação linear

Relativamente a uma qualquer transformação linear $T : E_1 \to E_2$ entre dois espaços vectoriais E_1 e E_2, facilmente se verifica que o **contradomínio** de T ou **conjunto imagem**

$$\operatorname{Im} T = \{\mathbf{y} \in E_2 : \mathbf{y} = T(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in E_1\}$$

constitui um subespaço de E_2. Sempre que $\operatorname{Im} T = E_2$ diremos que T é uma transformação linear **sobrejectiva** ou uma **sobrejecção** de E_1 em E_2.

A invertibilidade de T fica então apenas dependente de ser uma transformação **injectiva**, ou seja de satisfazer a propriedade

$$\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow T(\mathbf{x}_1) \neq T(\mathbf{x}_2)$$

(ou de modo equivalente a implicação $T(\mathbf{x}_1) = T(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$). Na verdade, se T for injectiva então podemos considerar a transformação **inversa**

$$T^{-1} : \operatorname{Im} T \to E_1,$$

ou seja a transformação que satisfaz as relações

$$\begin{aligned}\left(T^{-1} \circ T\right)(\mathbf{x}) &= \mathbf{x},\ \forall \mathbf{x} \in E_1,\\ \left(T \circ T^{-1}\right)(\mathbf{y}) &= \mathbf{y},\ \forall \mathbf{y} \in \operatorname{Im} T.\end{aligned}$$

Nestas circunstâncias, pode facilmente verificar-se que T^{-1} é igualmente uma transformação linear entre $\operatorname{Im} T$ e E_1. Quando T for simultaneamente injectiva e sobrejectiva diremos que T é **bijectiva** ou uma **bijecção** entre E_1 e E_2.

Para aferirmos da injectividade da transformação T, um outro espaço assume um papel relevante: o chamado de **núcleo** de T definido por

$$\operatorname{Nuc} T = \{\mathbf{x} \in E_1 : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\},$$

que facilmente se observa constituir um subespaço de E_1. Na verdade, pode mostrar-se que T é injectiva se e só se for válida a seguinte equivalência

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

facto que é equivalente a afirmar que $\operatorname{Nuc} T = \{\mathbf{0}\}$.

Podemos pois estabelecer que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $T : E_1 \to \operatorname{Im} T$ é invertível.
- T é injectiva.
- $\operatorname{Nuc} T = \{0\}$.

3.1 Núcleo e contradomínio de uma transformação linear entre espaços de dimensão finita

No caso em que os espaços E_1 e E_2 são de dimensão finita há a registar algumas particularidades específicas. Na verdade, tomando uma base $\mathcal{B}_1$ de E_1, uma base $\mathcal{B}_2$ de E_2 e a matriz $[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ que, relativamente a estas bases, representa a transformação linear $T : E_1 \to E_2$, atendendo a que

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1},$$

podemos concluir que

$$\operatorname{Nuc} T = \left\{ \mathbf{x} \in E_1 : [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} \in \operatorname{Nul} [T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} \right\}.$$

Do mesmo modo,

$$\operatorname{Im} T = \left\{ \mathbf{y} \in E_2 : [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}_2} \in \operatorname{Col} [T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} \right\}.$$

Assim, recordando a nulidade, $\mathrm{n}(A)$, e a característica, $\mathrm{c}(A)$, de uma matriz A, temos

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Nuc} T) &= \dim\left(\operatorname{Nul} [T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\right) = \mathrm{n}\left([T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\right) \\ \dim(\operatorname{Im} T) &= \dim\left(\operatorname{Col} [T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\right) = \mathrm{c}\left([T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\right) \end{aligned}$$

e

$$\dim(\operatorname{Nuc} T) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim E_1.$$

Se $\dim(E_1) = \dim(E_2)$, podemos ainda afirmar que T é uma transformação invertível (ou bijectiva) se e só se a matriz $[T]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ for invertível. Nestas condições, relativamente às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, a matriz que representa a transformação inversa, T^{-1}, é a matriz inversa da matriz que representa T: $\left[T^{-1}_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\right] = [T]^{-1}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$.

3.2 Exercícios

Exercício 28 *Determine bases para o núcleo e para o contradomínio (ou espaço imagem) de cada uma das seguintes transformações lineares:*

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 2x_1 + x_2)$.

b) $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_2 - x_3)$.

d) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + x_3)$.

e) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + 2x_3, x_2 + 3x_3)$.

f) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 + x_3)$.

g) $T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 4x_1 + 2x_2, 0)$.

Exercício 29 *A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, na base constituída pelos vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$ é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine bases para o núcleo e para o espaço imagem de T e indique a dimensão desses subespaços.

Exercício 30 *Na base formada pelos vectores*

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1),\ \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1),$$

a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine bases dos subespaços $\operatorname{Nuc} T$ *e* $\operatorname{Im} T$.

Exercício 31 *A transformação linear* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$, *relativamente às bases canónicas destes espaços, é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) *Que polinómio é* $T(1 + 2t + t^2)$?

b) *Determine bases do núcleo e do contradomínio de* T.

Exercício 32 $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ *é uma transformação linear que nas bases canónicas de* $\mathbb{P}_1$ *e* $\mathbb{P}_2$ *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Caso exista, qual o polinómio* $p(t)$ *de* $\mathbb{P}_1$ *tal que* $T(p(t)) = 1 - t$?

b) *Determine bases do núcleo e do contradomínio de* T.

Exercício 33 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma transformação linear e* $\mathbf{A}$ *a matriz que representa* T *nas bases canónicas de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$. *Justificando as suas respostas, indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas*[2].

a) $\dim(\operatorname{Nuc} T) = \operatorname{n}(\mathbf{A})$.

b) T *é injectiva se e só se* $\operatorname{n}(\mathbf{A}) = 0$.

c) T *é injectiva se e só se a característica de* $\mathbf{A}$ *coincide com o número de colunas de* $\mathbf{A}$.

d) *A dimensão da imagem de* T *coincide com a característica de* $\mathbf{A}$.

e) T *é sobrejectiva se e só se a característica de* $\mathbf{A}$ *coincide com o número de linhas de* $\mathbf{A}$.

Exercício 34 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3).$$

a) *Calcule a matriz que representa* T *nas bases canónicas de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$.

[2] Recorde que $\operatorname{n}(A)$ designa a nulidade da matriz A.

b) *Determine uma base para o núcleo de* T*. A transformação* T *é injectiva?*

c) *Determine uma base para o contradomínio de* T*.* T *é sobrejectiva?*

d) *Resolva a equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (1, 1)$.

e) *Existe algum vector* $(a, \mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2$ *para o qual a equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (a, \mathrm{b})$ *é impossível?*

f) *Existe algum vector* $(a, \mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2$ *para o qual a equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (a, \mathrm{b})$ *é possível e determinada?*

Exercício 35 *Considere a transformação linear que na base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) *Determine uma base para o núcleo de* T*.* T *é injectiva?*

b) *Indique uma base para a imagem de* T*.* T *é sobrejectiva?*

c) *Resolva a equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (3, 3, 0)$.

d) *Existe algum vector* $(a, b, \mathrm{c}) \in \mathbb{R}^3$ *para o qual a equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (a, b, \mathrm{c})$ *é impossível?*

e) *Existe algum vector* $(a, b, \mathrm{c}) \in \mathbb{R}^3$ *para o qual a equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (a, b, \mathrm{c})$ *é indeterminada?*

Exercício 36 *Na base de* $\mathbb{R}^2$ *formada por* $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$*,* $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$*, a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é representada pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) *Encontre uma base de* $\mathrm{Nuc}\, T$*.* T *é injectiva?*

b) *Indique uma base de* $\mathrm{Im} T$*.* T *é sobrejectiva?*

c) *Resolva a equação* $T(x_1, x_2) = (3, 2)$.

d) *Existe algum vector* $(a, \mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2$ *para o qual a equação* $T(x_1, x_2) = (a, \mathrm{b})$ *é impossível?*

e) *Existe algum vector* $(a, \mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2$ *para o qual a equação* $T(x_1, x_2) = (a, \mathrm{b})$ *é possível e determinada?*

Exercício 37 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear que na base constituída pelos vectores* $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$*,* $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$*,* $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$ *é representada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) *Determine uma base para o núcleo de* T*.* T *é injectiva?*

b) *Indique uma base para a imagem de* T*.* T *é sobrejectiva?*

c) *Mostre que equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 0)$ *não tem soluções.*

d) *Existe algum vector* $(a, b, \mathrm{c}) \in \mathbb{R}^3$ *para o qual a equação* $T(x_1, x_2, x_3) = (a, b, \mathrm{c})$ *é indeterminada.*

Exercício 38 *T é a transformação linear dada por*

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2).$$

a) *Qual a matriz que representa T na base canónica?*

b) *Mostre que T é bijectiva e calcule $T^{-1}(y_1, y_2)$.*

c) *Resolva a equação linear $T(x_1, x_2) = (1, 1)$.*

Exercício 39 *A matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

representa a transformação linear T na base de $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,1,0),\ \mathbf{v}_3 = (1,0,0).$$

a) *Mostre que T é bijectiva e calcule $T^{-1}(y_1, y_2, y_3)$.*

b) *Resolva a equação linear $T(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$.*

Exercício 40 *Relativamente à base canónica de $\mathbb{P}_2$, a transformação linear $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, tem a representação matricial*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é bijectiva e calcule $T^{-1}(1 + t + 2t^2)$.

Exercício 41 *Seja $\mathfrak{I} : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}$ a transformação dada por*

$$\mathfrak{I}(p) = \int_0^1 p(t)\, dt \quad (p(t) \in \mathbb{P}_n).$$

a) *$\mathfrak{I}$ é uma transformação linear. Justifique.*

b) *Qual a matriz que na base canónica $\{1, t, ..., t^n\}$ de $\mathbb{P}_n$ representa $\mathfrak{I}$?*

c) *Determine o núcleo de $\mathfrak{I}$? Qual a sua dimensão?*

d) *É $\mathfrak{I}$ uma bijecção entre $\mathbb{P}_n$ e $\mathbb{R}$?*

Exercício 42 *Designe-se por S o subespaço das matrizes simétricas 2×2, i.e.*

$$S = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \right\}.$$

Considere-se $T : S \to S$ a transformação linear definida por

$$T(\mathbf{A}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BA},\ \textit{onde}\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Determine uma base para S e indique a matriz que, nessa base, representa T.*

b) *Calcule uma base do $\operatorname{Nuc} T$ e justifique que T não é injectiva nem sobrejectiva.*

c) *Resolva em $\mathcal{S}$, a equação $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$.*

Exercício 43 *No espaço* $\mathbb{P}_3$ *dos polinómios de grau menor ou igual a três considere a transformação linear* $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ *definida pela fórmula*

$$T\left(p\left(t\right)\right) = p\left(0\right) + 2\,p\left(1\right)t^3$$

a) *Indique uma base para o espaço imagem de* T*.*

b) *Determine o conjunto* S *dos polinómios que são soluções da equação* $T\left(p\left(t\right)\right) = t^3$*.*

Exercício 44 *No espaço* $\mathbb{P}_2$ *dos polinómios de grau menor ou igual a dois considere a base ordenada* $\mathcal{P}_2 = \{1, t, t^2\}$ *e a transformação linear* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ *definida pela fórmula*

$$T\left(p\left(t\right)\right) = p\left(-3+t\right) + p\left(-3-t\right)$$

a) *Determine a matriz que representa* T *na base* $\mathcal{P}_2$*.*

b) *Determine o conjunto* S *dos polinómios que são soluções da equação* $T\left(p\left(t\right)\right) = 9 + t^2$*.*

4 Soluções

1) a) *i)* $(-1,-5)$. *ii)* $(2,-5)$. *iii)* $(-12,-7)$. b) $\alpha = 6$, $\beta = 2$.

2) São lineares as transformações das alíneas a), d) e f).

3) $k = 0$ e $m = 1$.

4) a) $5t + 4t^2 + 3t^3 + 2t^4$.

5) a) $t - 1$. b) $a_0 = a_1 + 1$. Não existe.

7) a) Recta $y = x - 3$. b) Recta $y = x$. c) Região do plano entre as rectas $y = x - 1$ e $y = x + 1$.

8) a) *i)* $T(\Delta) = \Delta$; *ii)* $T(C_\rho) = C_\rho$.

b) *i)* Triângulo de vértices $(-1,1)$, $(-1,-1)$ e $(-2,0)$; *ii)* $T(C_\rho) = C_\rho$.

c) *i)* Triângulo de vértices $(1,1)$, $(-1,1)$ e $(0,2)$; *ii)* $T(C_\rho) = C_\rho$.

d) *i)* Triângulo de vértices $(-1,-1)$, $(1,-1)$ e $(-2,0)$; *ii)* $T(C_\rho) = C_\rho$.

e) *i)* Triângulo de vértices (r,r), $(r,-r)$ e $(2r,0)$; *ii)* $T(C_\rho) = C_{r\rho}$.

9) $T(E)$ é a circunferência de centro na origem e raio 1.

10) a) $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$ e $\left(\left(1-\sqrt{3}\right)/2, \left(1+\sqrt{3}\right)/2\right)$.

b) *i)* $\theta = \pi/2 + 2k\pi$. *ii)* $\theta = -\pi/2 + 2k\pi$. *iii)* $\theta = 3\pi/4 + 2k\pi$. *iv)* $\theta = -5\pi/6 + 2k\pi$. *v)* Não.

c) Sim; $\theta_1 + \theta_2$. d) $\mathcal{R}_{-\theta}$. f) $y = -x/a$.

11) a) Triângulo de vértices $(1,0,1)$, $(-1,-1,0)$ e $(0,0,2)$.

b) Triângulo de vértices $(-1,0,1)$, $(1,1,0)$ e $(0,0,2)$.

c) Triângulo de vértices $(0,1,1)$, $(-1,-1,0)$ e $(0,0,2)$.

12) a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

13) Por exemplo $\mathbf{v}_1 = (1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (5,7)$, $\mathbf{w}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{w}_2 = (0,0,1)$, $\mathbf{w}_3 = (1,0,0)$.

14) $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 17 & -41 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$, $[T \circ S] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

15) a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$.

16) a) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. b) $T(x_1, x_2) = (4x_1, 4x_1 + x_2)$.

17) a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} e & f & d \\ h & i & g \\ b & c & a \end{bmatrix}$.

18) a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$.

19) a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. d) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

20) $T \circ S\,(x, y, z) = (0, -y, 3x + 2y + 2z)$

21) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 22) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 23) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

24) a) $-3t^3 - 1$. b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

25) b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

26) T_1 e T_3 são lineares; T_2 e T_4 não. T_1 é representada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e T_3 é representada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

27) b) D é representada por $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e P por $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$. c) Não.

28) a) $\{(1,-2)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$ e $\{(1,1)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

b) $\varnothing$ é base de $\operatorname{Nuc} T$; $\{(1,1),(1,-1)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

c) $\{(-2,1,1)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$; $\{(1,2,0),(1,2,1)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

d) $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$; $\{(1,2,-1)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

e) $\varnothing$ é base de $\operatorname{Nuc} T$; $\{(1,1,0),(0,0,1),(-1,2,3)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

f) $\{(1,-1,1)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$; $\{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

g) $\left\{\left(-\frac{1}{2},1\right)\right\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$; $\{(2,4,0)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

29) $\{(0,1)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$ e $\{(5,1)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$. $\dim \operatorname{Nuc} T = \dim \operatorname{Im} T = 1$.

30) $\{(0,2,-1)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$ e $\{(2,-4,0),(2,0,0)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

31) a) $1-3t$. b) $\{1-2t, 3+2t^2\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$, $\{2-6t\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

32 a) $p(t)=t$. b) $\varnothing$ é base de $\operatorname{Nuc} T$, $\{1+t+t^2, 1-t\}$ é base de $\operatorname{Im} T$.

33) Todas as afirmações são verdadeiras.

34) a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\{(-1,1,0)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$. A transformação T não é injectiva pois $\dim \operatorname{Nuc} T \neq 0$.

c) $\{(1,1),(0,-1)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$. A transformação T é sobrejectiva pois $\dim \operatorname{Im} T = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

d) O conjunto das soluções é $\{(1,0,0)\} + \operatorname{Nuc} T = \{(1,0,0) + x_2(-1,1,0) : x_2 \in \mathbb{R}\}$.

e) Não, porque T é sobrejectiva.

f) Não, porque T não injectiva.

35) a) $\varnothing$ é base do $\operatorname{Nuc} T$. T é injectiva.

b) $\{(1,2,0),(2,1,0),(2,4,2)\}$ é base de $\operatorname{Im} T$. T é sobrejectiva.

c) A única solução da equação é $(1,1,0)$.

d) e e) Como T é bijectiva a equação $T(x_1,x_2,x_3)=(a,b,\mathrm{c})$ é possível e determinada para qualquer $(a,b,\mathrm{c}) \in \mathbb{R}^3$.

36) a) $\{(1,2)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$, logo T não é injectiva.

b) $\{(3,2)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$, pelo que T não é sobrejectiva.

c) O conjunto das soluções é $\{(0,-1)\} + \operatorname{Nuc} T$.

d) Sim. Por exemplo, $T(x_1,x_2)=(1,0)$ é impossível.

e) Não.

37) a) $\{(1,1,2)\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$, logo T não é injectiva.

b) $\{(8,6,2),(-2,0,0)\}$ é uma base de $\operatorname{Im} T$, pelo que T não é sobrejectiva.

d) Sim.

38) a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. b) $T^{-1}(y_1,y_2) = (2y_1 - y_2, -y_1 + y_2)$.

c) Como T é bijectiva, a única solução da equação é o vector $T^{-1}(1,1) = (1,0)$.

39) a) $T^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (-y_1 + 2y_2, y_2, y_3)$. b) A única solução da equação é $(3,2,1)$.

40) $T^{-1}\left(1 + t + 2t^2\right) = 2t^2 + 10t - 11.$

41) b) $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/\left(n+1\right) \end{bmatrix}$.

c) $\operatorname{Nuc}\mathfrak{I} = \left\{a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n : a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0\right\}$, $\dim \operatorname{Nuc}\mathfrak{I} = n$. d) Não.

42) a) Na base $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$,

a matriz que representa T é $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é base de $\operatorname{Nuc} T$. c) O conjunto das soluções é $\left\{\begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$.

43a) $\{1, t^3\}$ b) $S = \left\{\dfrac{t}{2}\right\} + \mathcal{L}\left\{t^2 - t, t^3 - t\right\}$

44a) $[T]_{\mathcal{P}_2} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $S = \left\{3b + bt + \frac{1}{2}t^2 : b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{1}{2}t^2\right\} + \mathcal{L}\left\{3 + t\right\}$