Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Álgebra Linear

1º Teste / 21 de Outubro de 2010 / Versão A
Duração: 40 minutos

Justifique todas as respostas

Problema I. Considere o seguinte sistema, em que α e β são números reais:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + (1-\alpha)z = \beta + 2 \\ x + y + (1+\alpha)z = \beta + 4 \end{cases}$$

1. Escreva a matriz aumentada do sistema.
2. Aplicando eliminação de Gauss à matriz aumentada, diga para que valores de α e β o sistema é:
   (i) possível;
   (ii) impossível;
   (iii) indeterminado;
   (iv) determinado.
3. Descreva na forma paramétrica o conjunto-solução no caso em que $\alpha = 0$ e $\beta = -1$ e diga qual é o grau de indeterminação.

Problema II. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calcule a matriz $A^T + AA$.
2. Calcule a matriz A^{-1} por eliminação de Gauss–Jordan.
3. Diga qual é o valor de $\det(A)$ (nota: recorra à eliminação de Gauss já feita).
4. Enuncie a relação que estudou entre A^{-1} e $\mathrm{cof}(A)$, e recorrendo a esta relação calcule a matriz $\mathrm{cof}(A)$.

Problema III. Considere a seguinte matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Calcule os co-factores da linha 1 da matriz B.
2. Calcule $\det(B)$ pela fórmula de Laplace aplicada à linha 1 de B (atenção: não repita o cálculo dos co-factores da alínea anterior).
3. Utilize a regra de Cramer para obter o valor de y tal que

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$