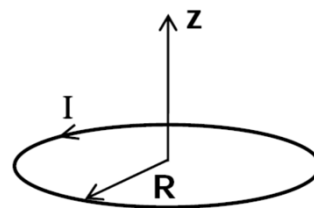


3 Campo magnético

Campo magnetostático no vácuo: lei de Bio-Savart

Exercício 3.1: Uma espira circular de raio $R = 2 \text{ cm}$ está colocada no plano horizontal e é percorrida por uma corrente $I = 5 \text{ mA}$.



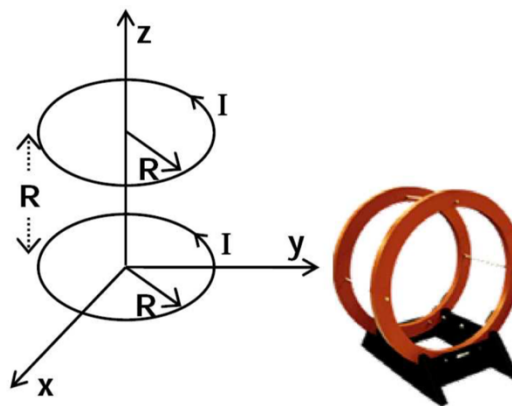
- Determine a expressão do campo magnético num qualquer ponto do eixo vertical que passa pelo seu centro.
- Calcule a intensidade do campo no centro da espira e numa posição $z = 20 \text{ cm}$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\int \frac{dl \times \vec{r}}{r^3}$$

Exercício 3.2: Um fio condutor retilíneo e muito comprido é percorrido por uma corrente $I = 16 \text{ A}$. Calcule o campo magnético a uma distância $r = 5 \text{ cm}$ do fio.

Exercício 3.3: Uma espira quadrada de lado $a = 1 \text{ cm}$ é percorrida por uma corrente elétrica $I = 10 \text{ mA}$. Determine o campo magnético existente no seu centro.

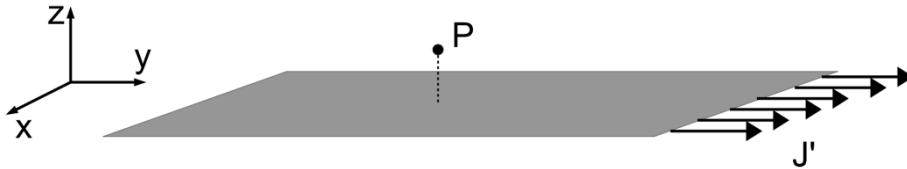
Exercício 3.4: Uma forma de gerar um campo magnético relativamente uniforme numa dada zona do espaço é através de um sistema composto por duas espiras circulares de raio R , separadas por uma distância R também e percorridas por uma corrente I com igual sentido, tal como se mostra na figura (bobinas de Helmholtz).



- Utilizando o resultado do exercício 3.1, calcule o campo magnético criado pelo sistema de duas espiras num ponto do eixo zz (ver figura).
- Verifique que para $z = \frac{R}{2}$ se tem $\frac{dB}{dz} = 0$.
(Nota: Derivando mais uma vez obter-se-ia, $\frac{d^2B}{dz^2} = 0$, o que é indicador de que o campo magnético é aproximadamente constante (até à segunda ordem) na região entre as espiras)

Campo magnetostático no vácuo: lei de Ampère

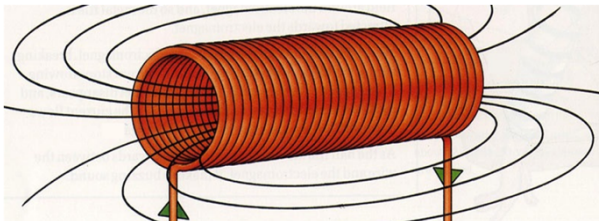
Exercício 3.5: Numa fábrica de plásticos, devido à fricção do plástico nos rolos cilíndricos ao longo dos quais este é arrastado com uma velocidade v , gerou-se no plástico uma carga superficial $+\sigma$.



- Determine a expressão que descreve a densidade de corrente elétrica. Note que neste caso a corrente se distribui ao longo de uma linha pelo que a sua densidade é definida por unidade de comprimento, \vec{J}' .
- Se a densidade de corrente elétrica for $J' = 10 \text{ mA} \cdot \text{m}^{-1}$, qual o campo magnético num ponto P próximo do plano do plástico?

Exercício 3.6: Refaça o exercício 3.2 utilizando agora a lei de Ampère. Podia utilizar a lei de Ampère para refazer os exercícios 3.2 ou 3.3?

Exercício 3.7: Um solenoide (bobine) bastante longo (comprimento muito maior que o raio), de eixo principal alinhado com zz , possui uma densidade de espiras n e é percorrido por uma corrente estacionária I . Determine o campo magnético no interior do solenoide.

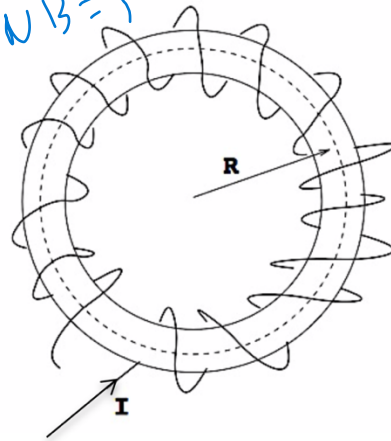


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

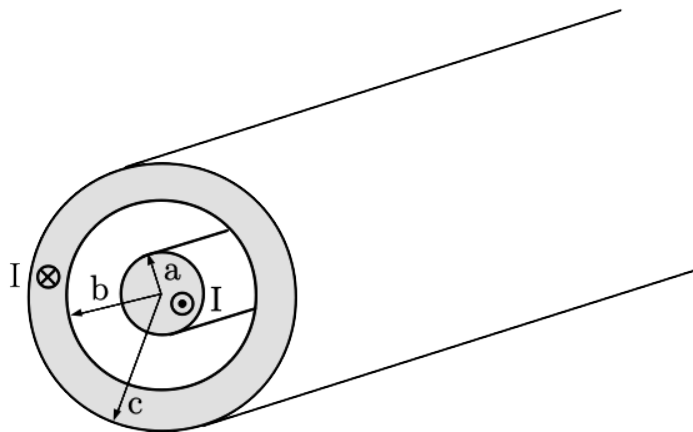
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$NB = \mu_0 I n$$

Exercício 3.8: O *tokamak*, acrónimo russo para câmara magnética toroidal, é usado no confinamento do plasma quente ionizado na fusão nuclear. O enrolamento eléctrico tem uma forma toroidal de raio médio R , possui N espiras e é percorrido por uma corrente eléctrica I . Determine o campo magnético na circunferência de raio R , que passa pelo centro das espiras e expresse o resultado em função da densidade de espiras $n = \frac{N}{2\pi R}$.



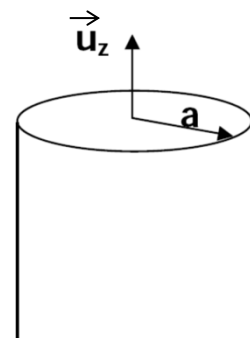
Exercício 3.9: Um cabo coaxial tem um condutor central de raio a separado por um material de permeabilidade magnética μ_0 um tubo condutor concêntrico de raios interno e externo b e c , respetivamente. Os dois condutores transportam correntes eléctricas com sentidos opostos, uniformemente. A intensidade da corrente em cada um dos condutores é I . Determine o campo magnético nas seguintes regiões:



- interior do condutor central ($r < a$);
- espaço entre os dois condutores ($a < r < b$);
- interior do condutor exterior ($b < r < c$);
- exterior do cabo coaxial ($r > c$).

Exercício 3.10: Um condutor cilíndrico muito comprido, de raio a e preenchido por um material de permeabilidade magnética μ_0 , é percorrido por uma corrente eléctrica estacionária não uniforme cuja densidade de corrente é descrita por $\vec{J} = J_0 r \vec{u}_z$.

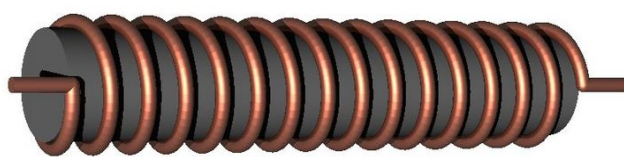
- Determine a intensidade de corrente que atravessa a secção transversal do condutor.



- b) Obtenha as expressões que descrevem o campo magnético em todo o espaço ($r < a$ e $r > a$). Faça um gráfico de $B(r)$.
- c) Sabendo que a corrente é mantida por uma fonte que aplica ao condutor uma diferença de potencial por unidade de comprimento V' , determine a condutividade do cilindro, σ_c .

Campo magnetostático na matéria: lei de Ampère generalizada

Exercício 3.11: Um solenoide de raio $a = 2 \text{ cm}$, altura $\ell = 20 \text{ cm}$ e $N = 1000$ espiras é percorrido por uma corrente $I = 100 \text{ mA}$.



*Adaptado de
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solenoid-with-core.JPG>*

Determine o campo magnético B no interior do solenoide quando:

- a) tem ar no seu interior;
- b) tem alumínio no seu interior;
- c) tem ferro macio no seu interior (99,8% de pureza).

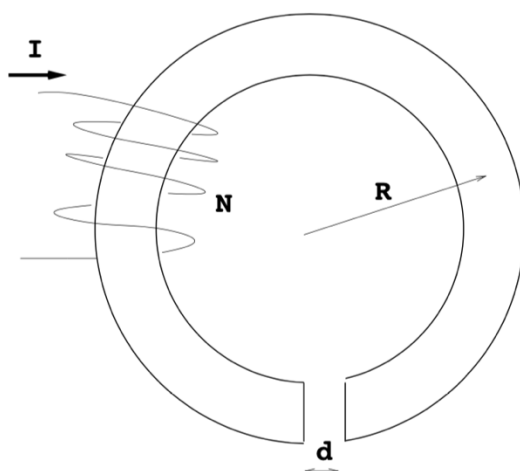
Exercício 3.12: Um cilindro com um comprimento $\ell = 20 \text{ cm}$, muito estreito e feito de um material com uma susceptibilidade magnética $\chi_m = 2$, constitui o núcleo de um enrolamento com $N = 150$ espiras que são percorridas por uma corrente $I = 2 \text{ A}$. Determine:

- a) a permeabilidade magnética do material, μ ;
- b) a intensidade do campo magnético, H , a magnetização produzida no material, M , e o campo magnético, B , no interior do material. De que tipo de material se trata?

Exercício 3.13: Um material condutor cilíndrico muito comprido de raio a e permeabilidade magnética μ , é percorrido por uma corrente elétrica estacionária uniformemente distribuída de intensidade I . Determine:

- a) o campo magnético, \vec{B} , criado pelo condutor no seu exterior a uma distância r do seu eixo.
- b) o campo magnético, \vec{B} , criado pelo condutor no seu interior.
- c) a magnetização, \vec{M} , em todo o espaço.

Exercício 3.14: Nas cabeças de gravação magnéticas tradicionais (usadas em fitas magnéticas, por exemplo) utilizam-se entreferros (aberturas em núcleos de materiais ferromagnéticos) para se obterem campos intensos. Um caso simples de um entreferro está representado na figura abaixo, em que um núcleo de material ferromagnético com a forma de um anel cilíndrico de raio médio $R = 1\text{ cm}$, possui um enrolamento de $N = 20$ espiras, percorridas por uma corrente de $I = 1\text{ mA}$. Nesse núcleo foi aberto um espaço de largura $d = 10\text{ }\mu\text{m}$.



- Utilizando as equações que descreve o fluxo do campo magnético através de uma superfície fechada ($\oint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$), verifique que na fronteira de separação entre o ar e o ferro, se verifica a condição $B_{\perp ar} = B_{\perp Fe}$.
- Calcule o campo magnético no entreferro, B_{ar} , na linha de campo média ($r = R$), assumindo que o material ferromagnético apresenta para estas condições uma permeabilidade magnética $\mu = 10^5 \mu_0$.

Forças magnéticas: força de Laplace e força de Lorentz

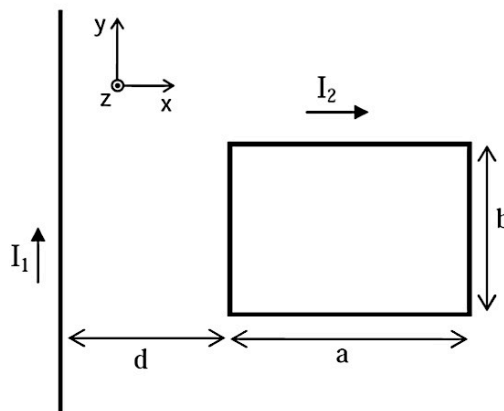
Exercício 3.15: Um fio retilíneo percorrido por uma corrente elétrica de intensidade $I = 8\text{ A}$ encontra-se na presença de um campo magnético uniforme de intensidade $B = 10\text{ mT}$. Determine a intensidade da força sofrida por $0,5\text{ m}$ desse fio nas seguintes situações:

- O campo magnético é paralelo ao fio;
- O campo magnético é perpendicular ao fio.

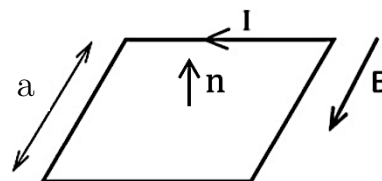
Exercício 3.16: Um fio retilíneo muito longo transporta uma corrente I_1 e na sua proximidade e à distância d é colocada uma espira rectangular, que é percorrida por uma corrente eléctrica I_2 .

Determine:

- a) a força que o fio exerce sobre a espira;
- a) a força que a espira exerce sobre o fio.



Exercício 3.17: Um motor de corrente contínua é constituído por um circuito quadrado de lado a , percorrido por uma corrente I , na presença de um campo magnético uniforme, B . Num dado instante a normal ao circuito forma um ângulo de 90° com a direcção do campo magnético, como se mostra na figura.



- b) Determine a força exercida em cada um dos lados do circuito.
- c) Determine a resultante das forças que atuam no circuito.
- d) Determine o momento das forças ($\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$) que atuam no circuito, relativamente ao seu centro.
- e) Define-se o momento dipolar magnético de uma espira como $\vec{m} = IA\vec{n}$, sendo A a área do circuito, I a corrente que o percorre e \vec{n} a sua normal. Mostre que se pode escrever o momento das forças aplicadas ao circuito como $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$.

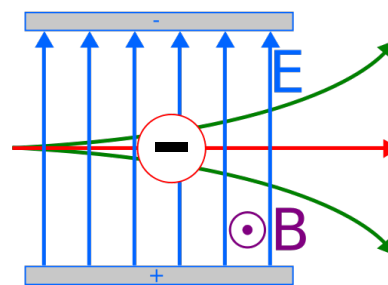
Exercício 3.18: Uma partícula α (dois prótons e dois neutrões - núcleo de um átomo de Hélio) descreve uma trajetória circular de raio $R = 0,5 \text{ m}$ na presença de um campo de intensidade $B = 1 \text{ mT}$.

- a) Determine o ângulo entre a velocidade da partícula e o campo magnético.
- b) Determine o módulo da velocidade da partícula.

Exercício 3.19: O campo magnético terrestre em Lisboa tem atualmente uma intensidade de $43,8 \text{ } \mu\text{T}$, apontando praticamente na direcção do norte geográfico e sendo inclinado para baixo, com um ângulo de cerca de 53° com a horizontal. Uma partícula de $q = 1 \text{ } \mu\text{C}$ é lançada na vertical com uma velocidade $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ numa experiência realizada num laboratório em Lisboa.

- a) Calcule as componentes da velocidade da partícula segundo as direcções paralela e perpendicular ao campo magnético terrestre.
- b) Determine a intensidade da força magnética que atua sobre a partícula.
- c) Descreva o tipo de trajetória da partícula.

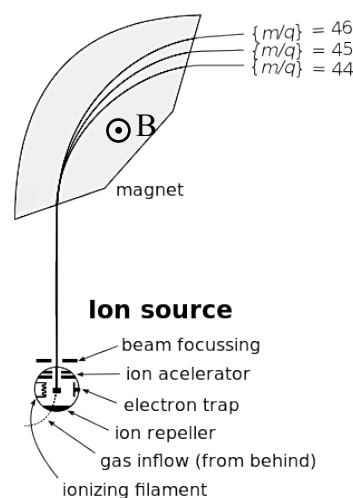
Exercício 3.20: Um feixe de elétrons passa por um selector de velocidades em que lhe é aplicado um campo elétrico $E = 1000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ e um campo magnético $B = 0,3 \text{ T}$ de tal modo que a força magnética tem a mesma direção que a força elétrica, mas sentido oposto. Os elétrons selecionados são os que têm uma velocidade tal que passam sem sofrerem alteração na sua trajetória. Qual a velocidade dos elétrons?



Adaptado de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Velocity_selector.svg

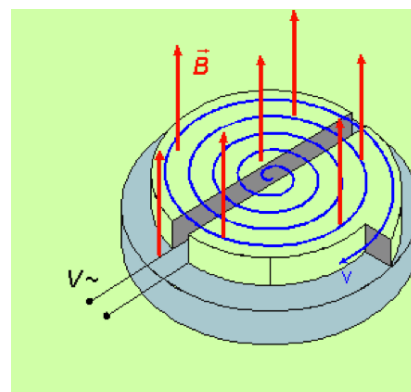
Exercício 3.21: Um espectroscópio de massa é utilizado para separar dois isótopos de uma substância, de massas m_1 e m_2 . Inicialmente os átomos são ionizados, adquirindo ambos uma carga $+Q$. Em seguida são acelerados por uma diferença de potencial V adquirindo uma velocidade respetivamente v_1 e v_2 . Por fim os átomos entram numa zona em que lhes é aplicado um campo magnético perpendicular à sua velocidade, B .

- Determine a razão entre as velocidades à saída da zona com um campo elétrico, $\frac{v_1}{v_2}$.
- Determine a razão entre os raios das trajetórias dos átomos na zona com campo magnético, $\frac{R_1}{R_2}$.



Adaptado de http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_spectrometry

Exercício 3.22: Num ciclotrão (acelerador de partículas), partículas carregadas com uma carga q são sujeitas a um campo magnético B perpendicular à sua velocidade, sendo a sua trajetória circular. Para além do campo magnético, ao fim de cada semivolta aplica-se às partículas uma tensão sinusoidal dada por $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$. O campo elétrico aplicado às partículas aumenta a sua velocidade, deixando a trajetória de ser circular e passando a consistir em troços semi-circulares de raio cada vez maior. Neste exercício pretende-se dimensionar um ciclotrão que acelera partículas α (núcleos de átomos de hélio que possuem 2 prótons e 2 neutrões).

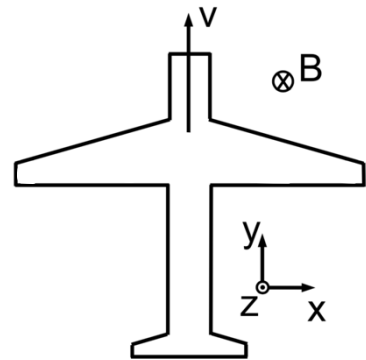


Adaptado de <http://personales.upv.es/jquiles/prffi/magnetismo/ayuda/hlpciclo.htm>

- Para que haja sincronia entre o efeito da aceleração do campo elétrico e o movimento de rotação das partículas, qual deve ser a frequência da tensão sinusoidal aplicada (em função do campo B , da carga q e da massa m das partículas)?

- b) Suponha que a frequência da tensão sinusoidal aplicada é $f = 10 \text{ kHz}$. Qual deve ser então, de acordo com a alínea a), o valor do campo magnético aplicado?
- c) Qual é a energia ganha por uma partícula em cada volta completa se lhe for aplicada a amplitude máxima da tensão, V_0 ?
- d) Suponha que o raio da órbita de extração (raio da última volta) é $R = 1 \text{ m}$. Qual a energia cinética com que saem do ciclotrão as partículas α ?
- e) Suponha que a partícula que menos tempo permanece no ciclotrão percorre 12 voltas no seu interior. A partir das alíneas c) e d) calcule a tensão máxima V_0 que é aplicada às partículas.

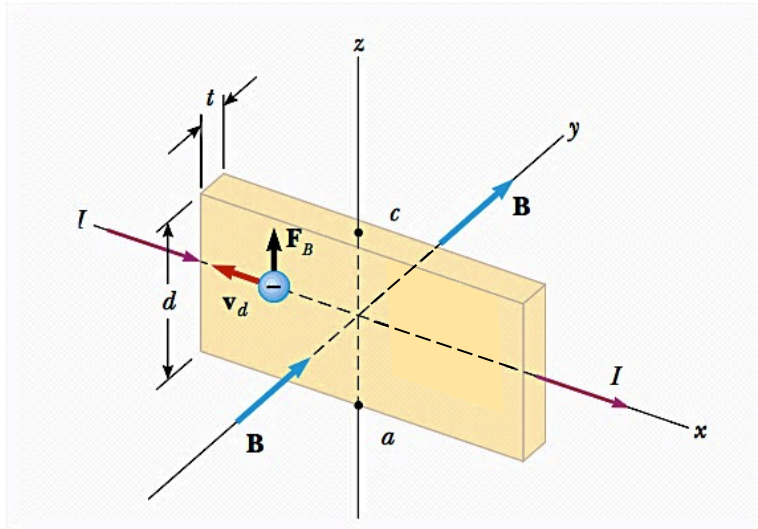
Exercício 3.23: Um avião, com uma envergadura de asas $L = 40 \text{ m}$ desloca-se horizontalmente com uma velocidade de cruzeiro de $\vec{v} = 900 \vec{u}_y \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. No local em que se encontra o campo magnético terrestre tem uma componente vertical $\vec{B}_\perp = -35 \vec{u}_z \mu\text{T}$.



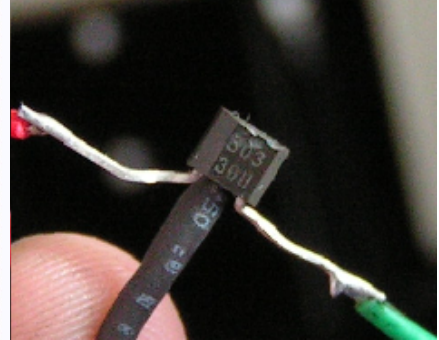
- a) Determine a expressão da força magnética sofrida pelos elétrons das asas do avião.
- b) Determine a expressão da força elétrica sofrida pelos elétrons das asas do avião.
- c) Calcule a diferença de potencial entre as pontas das asas do avião.
- d) Se ligarmos as pontas das asas com um fio condutor que tem uma resistência $R = 2 \Omega$, qual a corrente que a percorre?

Exercício 3.24: As sondas de efeito de Hall podem ser utilizadas para medir campos magnéticos. Estas sondas tiram partido do facto de as cargas elétricas que se movem quando a sonda é percorrida por uma corrente sofrerem uma força quando estão presentes campos magnéticos. Com este problema iremos analisar uma sonda de secção retangular de altura d e espessura $t = 5 \text{ mm}$ quando percorrida por uma corrente de intensidade $I = 1 \text{ A}$, sendo os portadores de carga electrões com uma densidade $N = 10^{26} \text{ electrões} \cdot \text{m}^{-3}$ (ver figura).

- a) Determine a expressão da força magnética (designada por F_B na figura) sofrida pelos elétrons da corrente elétrica quando submetidos a um campo magnético transversal à sonda.
- b) Determine o campo elétrico e a diferença de potencial de Hall entre as faces da sonda quando o equilíbrio é estabelecido (entre os pontos c e a).
- c) Determine a expressão que relaciona a diferença de potencial de Hall com a intensidade da corrente elétrica e a intensidade do campo magnético.



Adaptado de
Physics for Scientists and Engineers, R. A. Serway, J. W. Jewett

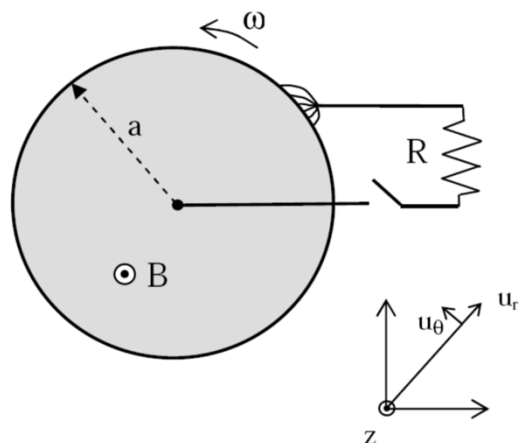


Von Mennopeeren - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7128374>

- d) Diga como colocaria a sonda em relação a um qualquer campo magnético para que a diferença de potencial medida corresponda ao máximo possível.
- e) Sabendo que a diferença de potencial de Hall medida na sonda é $V_H = 2,50 \mu V$, determine a intensidade do campo magnético.

Exercício 3.25: Numa experiência de efeito de Hall, uma corrente de intensidade $I = 10 A$ percorre um condutor de secção quadrada com $\ell = 0,5 cm$ de lado. Um campo magnético transversal ao condutor e de amplitude $B = 2 T$ cria uma tensão de Hall $V_H = 2,5 \times 10^{-4} V$. Supondo que os portadores de carga são electrões, calcule a densidade destes no condutor.

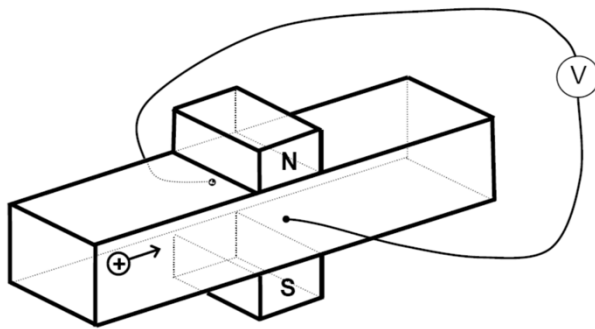
Exercício 3.26: O primeiro gerador foi inventado por Faraday em 1831 e consiste num disco metálico que é posto a rodar na presença de um campo magnético perpendicular à sua superfície (na realidade o disco era um íman e o campo magnético era devido ao próprio disco) – ver figura. Após se fechar um interruptor, o centro do disco e a sua periferia ficam ligados por um circuito imóvel que é percorrido por corrente. O disco, que possui raio a e espessura b , é posto a rodar com uma velocidade angular ω e encontra-se sujeito a um campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.



- a) Determine a expressão da força a que ficam sujeitos os electrões livres do metal devido ao campo magnético, \vec{F}_m .

- b) Determine a expressão do campo eletrostático dentro do disco, devido à distribuição de carga do disco, após se ter atingido o equilíbrio, \vec{E} .
- c) Determine a densidade de carga no interior do disco e na sua superfície exterior, no equilíbrio.
- d) Determine a diferença de potencial, V , a que vai ficar sujeita a resistência R após se fechar o interruptor.
- e) Determine a potência mecânica fornecida ao disco para o manter a rodar com velocidade angular constante, após se fechar o interruptor e a resistência R passar a ser percorrida por uma corrente elétrica.

Exercício 3.27: Um caudalímetro eletromagnético, representado na figura, está ser utilizado para medir o caudal volumétrico (volume por unidade de tempo) de um líquido que contém iões $NaCl^+$ ($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$).



https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_flow_meter

Neste caudalímetro, o líquido iónico (até a água da torneira contém iões!) passa numa zona do tubo de secção quadrangular em que existe um campo magnético uniforme criado por um ímã (de Norte para Sul). A diferença de potencial que surge entre as paredes do tubo é medida com um voltímetro. No presente caso o líquido tem um caudal volumétrico $\dot{V} = 2 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$, o campo magnético tem uma intensidade $B = 2 \text{ mT}$, o tubo tem de lado $d = 2 \text{ cm}$ e a densidade de iões é $N = 2 \times 10^{10} \text{ iões} \cdot \text{m}^{-3}$.

- a) Calcule a velocidade dos iões, v , e a intensidade de corrente elétrica no tubo por eles criada, I .
- b) Calcule a força magnética que atua sobre cada ião, F_m .
- c) Calcule a diferença de potencial medida pelo voltímetro, V , e indique a sua polaridade.
- d) Diga, justificando a sua resposta, como se alterava a medida do voltímetro se se tratasse de um outro líquido com o mesmo caudal mas com outro tipo e/ou densidade de iões.

Indução magnética

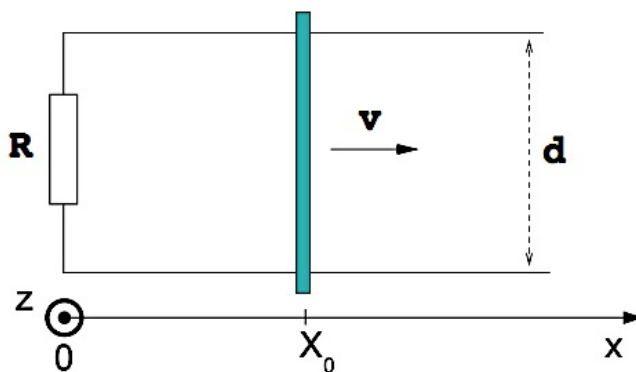
Exercício 3.28: Um circuito de área $A = 20 \text{ cm}^2$ e resistência elétrica $R = 0,1 \, \Omega$ é atravessado por um campo magnético uniforme que lhe é perpendicular e cuja intensidade é descrita pela equação: $B = 10^{-2} \cos(50\pi t) \text{ T}$. Calcule:

- a) a força eletromotriz induzida no circuito;
- b) a corrente elétrica que percorre o circuito;
- c) faça um gráfico do campo magnético e da força eletromotriz induzida e comente a diferença de fase entre as duas grandezas.

Exercício 3.29: Um circuito quadrado de resistência $R = 20 \, \Omega$ e de lado $L = 0,2 \text{ m}$ roda 100 vezes por segundo em torno de um eixo horizontal que o divide ao meio. Existe no local em que se encontra o circuito um campo magnético uniforme, de intensidade $B = 1 \text{ T}$ e perpendicular à posição ocupada pelo circuito quando $t = 0 \text{ s}$. Calcule:

- a) o fluxo do campo magnético através da espira, em função do tempo;
- b) a corrente induzida;
- c) a energia dissipada por efeito de Joule em dois minutos.

Exercício 3.30: Dois carris condutores paralelos entre si, que se encontram a uma distância d , estão unidos numa das extremidades por uma barra condutora.



A resistência equivalente deste sistema é R . Uma barra condutora de resistência desprezável desliza apoiada nos carris com uma velocidade constante $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ sem atrito, sob ação de uma força exterior. Existe um campo $\vec{B} = B \vec{u}_z$ uniforme em toda a região ocupada pelo sistema. No instante inicial a barra encontra-se na posição X_0 . Determine:

- a) a força magnética sofrida pelos elétrons livres da barra;
- b) a diferença de potencial entre as extremidades da barra;
- c) a corrente elétrica que percorre o circuito, indicando o seu sentido;

- d) a força eletromotriz existente no circuito; compare este resultado com os resultados das alíneas anteriores;
- e) a força que o campo magnético exerce sobre a barra móvel;
- f) a potência correspondente ao trabalho da força aplicada sobre a barra para a movimentar; compare com a potência dissipada por efeito de Joule na resistência.

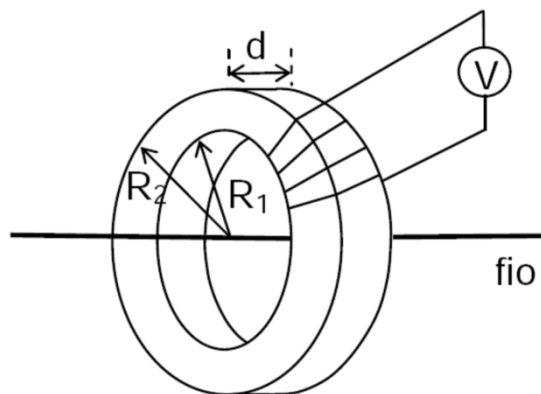
Exercício 3.31: Uma bobina muito comprida, com um raio $a = 10 \text{ cm}$ e uma densidade de espiras $n = 1000 \text{ espiras} \cdot \text{m}^{-1}$, é percorrida por uma corrente elétrica de intensidade i que varia de $i_1 = 10 \text{ A}$ para $i_2 = 1 \text{ A}$ num décimo de segundo. Em torno do seu eixo vertical existe um anel de um material condutor com um raio $b = 20 \text{ cm}$.

- a) Escreva a equação que descreve a corrente elétrica na bobina e o campo magnético dentro da bobina.
- b) Determine o campo elétrico criado pela variação do campo magnético, dentro e fora da bobina quando a corrente na bobina. Concretize o seu valor para $r = b$.
- c) Calcule a força eletromotriz induzida no anel.
- d) Se o anel tiver uma seção $S = 1 \text{ cm}^2$ e uma condutividade $\sigma_c = 6 \times 10^8 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, qual a corrente que o percorre?
- e) Qual a resposta à alínea b) se o anel tiver 1 m de diâmetro? É importante que os eixos estejam coincidentes?

Exercício 3.32: Um amperímetro do tipo *clamp* é um dispositivo para medir correntes alternadas em cabos sem ter que cortar o cabo.



https://en.wikipedia.org/wiki/Current_clamp#/media/File:Clampmeter.jpg

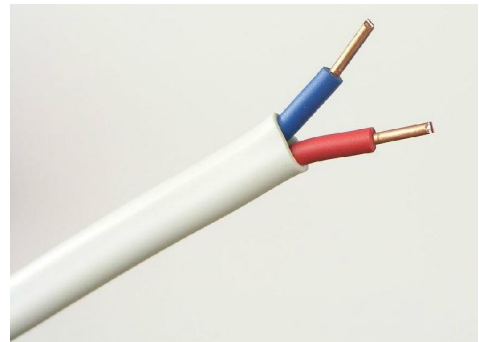


No caso que se vai estudar consiste num enrolamento em torno de um núcleo metálico de permeabilidade magnética μ com a forma de um anel cilíndrico, de secção quadrada. O dispositivo é colocado de modo a que a normal que passa pelo centro do anel esteja alinhada com o fio e possui um voltímetro que mede a diferença de potencial aos terminais do enrolamento. Considere um destes dispositivos com um anel de raios $R_1 = 10 \text{ cm}$ e $R_2 = 11 \text{ cm}$, uma espessura $d = 2 \text{ cm}$ e um enrolamento de $N = 5000$ espiras.

- Determine a expressão do campo magnético produzido pelo fio no núcleo metálico, em função da corrente i que o percorre.
- Determine a expressão do fluxo do campo magnético criado pelo fio no enrolamento.
- Calcule a diferença de potencial medida pelo voltímetro, sabendo que a corrente que passa pelo fio é $i = 16 \cos(100\pi t) \text{ A}$ e que o núcleo metálico tem uma permeabilidade magnética relativa $\mu_r = 1000$.

Coefficientes de indução, energia e forças

Exercício 3.33: Pretende-se determinar o coeficiente de autoindução externo (sem contabilizar os próprios fios, cuja contribuição é diminuta) por unidade de comprimento de dois fios condutores muito compridos de raio $R = 1 \text{ mm}$ cujos centros se encontram a uma distância $d = 1 \text{ cm}$ um do outro. Os fios são utilizados para transportar uma corrente estacionária I num circuito pelo que a corrente num dos fios tem o sentido contrário à corrente no outro.



https://www.diytrade.com/china/pd/10221436/flat_BV_VB_electrical_wiring.html

- Determine a expressão do fluxo do campo criado por um dos fios através do retângulo definido pelos dois fios e com 1 m de comprimento.
- Determine a expressão do fluxo total do campo criado pelos dois fios através do retângulo referido na alínea anterior.
- Determine o coeficiente de autoindução pretendido.

Exercício 3.34: Considere uma bobina de comprimento $\ell = 5 \text{ cm}$, raio $a = 5 \text{ mm}$, com $n = 10000$ espiras por unidade de comprimento e com um núcleo de um material com permeabilidade magnética relativa $\mu_r = 500$. A bobina é percorrida por uma corrente variável $i = 0,5 \cos(100\pi t)$ imposta por uma fonte. Determine:

- o coeficiente de autoindução da bobina;
- a força eletromotriz induzida na bobine;

- c) a energia da bobine;
- d) Qual o papel da fonte de corrente neste problema?

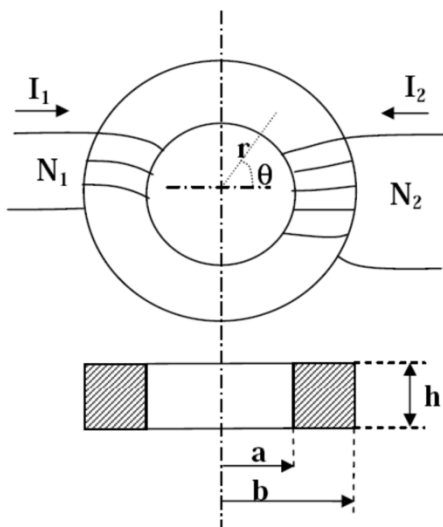
Exercício 3.35: Considere uma bobina de comprimento ℓ , raio a_1 , N_1 espiras e núcleo de ar, percorrida por uma corrente $i = I_0 e^{-\alpha t}$. Esta bobina está colocada dentro de uma segunda bobina de comprimento ℓ , de raio a_2 , N_2 espiras e de resistência R . Os eixos das duas bobinas estão coincidentes e $\ell \gg a_2$.

- a) Determine o coeficiente de indução mútua do sistema das duas bobinas.
- b) Determine a corrente induzida na bobina exterior (utilize também o resultado obtido em 3.34 para o coeficiente de autoindução de uma bobina).

Exercício 3.36: Considere uma bobina de comprimento ℓ e diâmetro D em que $\ell \gg D$, com n espiras por unidade de comprimento e um núcleo de ar, possui uma resistência R . Em torno da bobina existe uma espira quadrada de lado a que é percorrida por uma corrente $i = I_0 \cos(\omega t)$. Determine:

- a) o coeficiente de indução mútua entre a espira e a bobina;
- b) a expressão da equação diferencial que permite determinar a corrente induzida na bobina (utilize também o resultado obtido em 3.34 para o coeficiente de autoindução de uma bobina).

Exercício 3.37: Na figura que se segue está representado um transformador de núcleo circular e de secção quadrada. Este núcleo é constituído por um material ferromagnético linear de permeabilidade $\mu \gg \mu_0$. Os enrolamentos primário e secundário são atravessados por correntes i_1 e i_2 e possuem N_1 e N_2 espiras, respetivamente. Determine:



https://www.diytrade.com/china/pd/10221436/flat_BV_VB_electrical_wiring.html

- a) o campo magnético (\vec{B}) no interior do núcleo;
- b) o coeficiente de indução mútua entre os enrolamentos;
- c) as forças eletromotrizes induzidas em cada um dos enrolamentos, ε_1 e ε_2 , em função do fluxo do campo magnético (Φ) que atravessa uma secção do núcleo e do número de espiras. Calcule a razão entre as tensões no circuito primário e secundário do transformador.

Exercício 3.38: Considere um condutor retilíneo de comprimento infinito e secção circular de raio a , com uma permeabilidade magnética μ_0 e estando a ser percorrido por uma corrente elétrica estacionária de intensidade I_1 . Determine:

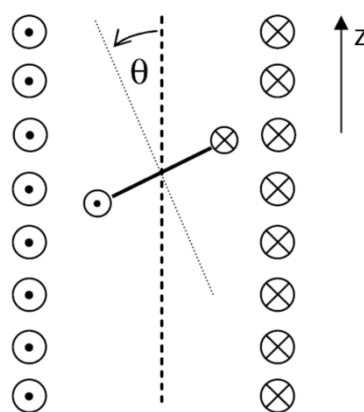
- a) a densidade de energia magnética no interior do condutor;
- b) a energia magnética do condutor por unidade de comprimento;
- c) o coeficiente de autoindução interno do condutor por unidade de comprimento.

Exercício 3.39: Considere um cabo coaxial retilíneo muito comprido, de raios $a = 1 \text{ mm}$ e $b = 5 \text{ mm}$, e em que o espaço entre os condutores está preenchido com ar. No caso de o cabo ser percorrido por uma corrente $I = 2 \text{ A}$, determine:

- a) a densidade de energia magnética no espaço entre os condutores;
- b) a energia magnética por unidade de comprimento, no espaço entre os condutores;
- c) o coeficiente de autoindução do cabo, por unidade de comprimento.
- d) Caso tivesse tentado calcular o coeficiente de autoindução a partir do fluxo do campo magnético, qual a área a considerar para o cálculo daquele fluxo?

Exercício 3.40: Uma bobina de N espiras e colocada na vertical, tem um comprimento ℓ e um raio a $\ell \gg a$ e é percorrida por uma corrente estacionária I_1 . No seu interior é colocada uma espira de raio $b < a$ cujo eixo faz um ângulo θ com o eixo da bobina.

- a) Determine o coeficiente de autoindução da bobina.
- b) Determine o coeficiente de indução mútua do sistema.
- c) Desprezando a autoindução da espira, determine a expressão da energia magnética do sistema quando a espira também é percorrida por uma corrente estacionária I_2 com o mesmo sentido de I_1 .
- d) Determine o momento da força que atua a espira, τ . Identifique o ponto de equilíbrio estável e verifique se esse ponto corresponde a um mínimo ou a um máximo de

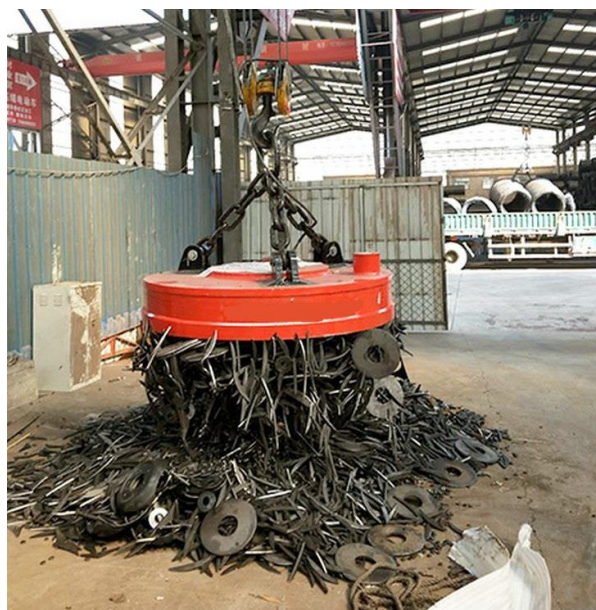
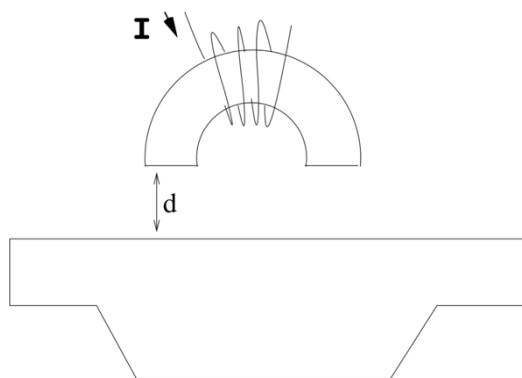


energia. Comente. (Nota: Recorde que a derivada de uma energia em ordem a um ângulo não é uma força mas sim o momento de uma força)

Exercício 3.41: As bobinas projetadas para campos magnéticos fortes têm problemas mecânicos de construção devido às pressões a que ficam sujeitas. Considere uma bobina de comprimento ℓ e raio R ($\ell \gg R$), com n espiras por unidade de comprimento, núcleo de ar e percorrida por uma corrente I . Determine:

- a) a densidade de energia magnética armazenada no interior da bobina;
- b) a energia magnética armazenada na bobina;
- c) o coeficiente de autoindução da bobine, a partir da energia magnética;
- d) qualitativamente se a bobine fica sujeita a uma força de implosão ou de explosão;
- e) a pressão sobre os enrolamentos em função do campo magnético, B .

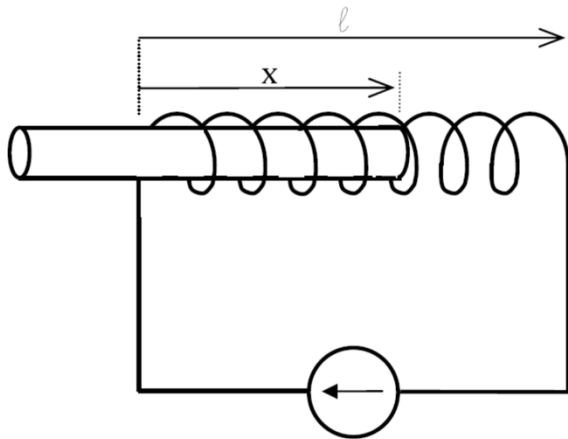
Exercício 3.42: Um eletroímã é constituído por um enrolamento de espiras em torno de um núcleo ferromagnético com a forma indicada na figura e cuja secção é $S = 400 \text{ cm}^2$. Admitindo que a distância entre o objeto a elevar e o núcleo ferromagnético seja pequena, pode-se considerar uniforme o campo magnético existente nessa região. No nosso caso a sua intensidade é $B = 1 \text{ T}$.



<http://m.ca.gantrycranesupplier.com/crane-parts/magnet-for-crane/crane-use-steel-scrap-lifting-electromagnet.html>

- a) Determine a energia magnética existente no espaço entre o núcleo ferromagnético e o objeto que se pretende elevar, em função da distância (d) que separa o eletroímã do objeto.
- b) Determine a força exercida pelo eletroímã sobre o objeto a elevar.

Exercício 3.43: Considere uma bobina de raio R , comprimento $\ell \gg R$ e densidade de espiras n , preenchida com ar. A bobina está parcialmente preenchida com um núcleo de material ferromagnético de raio R e permeabilidade magnética μ : este problema descreve o funcionamento de sistemas tão habituais com o trinco elétrico de uma porta ou uma campainha eletromecânica.



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Electric_strike.jpg

Determine:

- o coeficiente de autoindução da bobina quando o núcleo está na posição x - ver figura; (*Nota: para efeitos de cálculo, considere como válida a aproximação da bobina infinita quer do lado do material ferromagnético quer do lado do ar*)
- a potência média fornecida pela fonte ao sistema para estabelecer a corrente no circuito (partindo da situação $I = 0$) num intervalo de tempo Δt ; despreze as resistências dos condutores;
- a força a que fica sujeito o núcleo ferromagnético após se ter estabelecido a corrente I .

Soluções

3.1 a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$

b) $B(0) = 157 \text{ nT}$
 $B(0,2) = 157 \text{ pT}$

3.2 $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = 64 \vec{u}_\theta \text{ } \mu\text{T}$

3.3 $\vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} \vec{n} = 1,1 \vec{n} \text{ } \mu\text{T}$

3.4 a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} [(R^2 + z^2)^{-3/2} + ((R - z)^2 + R^2)^{-3/2}] \vec{u}_z$

3.5 a) $\vec{J}' = \sigma v \vec{u}_y$
b) $\vec{B} = \frac{\mu_0 J'}{2} \vec{u}_x = 6,3 \vec{u}_x \text{ nT}$

3.6 *A utilização da lei de Ampère tornou muito mais simples a resolução do exercício 3.2. A lei é geral e válida em qualquer situação mas quando não se trata de uma das quatro geometrias às quais o seu uso é aconselhado, a sua aplicação não permite determinar o campo (note que para a aplicar é necessário conhecer à partida a forma geométrica exata das linhas de campo).*

3.7 $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

3.8 $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_\theta$

3.9 a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \vec{u}_\theta$
b) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
c) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) \vec{u}_\theta$
d) $B = 0$

3.10 a) $I = J_0 \frac{2\pi}{3} a^3$
b) $r < a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{3} J_0 r^2 \vec{u}_\theta$
 $r > a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{3} \frac{J_0}{r} a^3 \vec{u}_\theta$
c) $\sigma_c(r) = \frac{J_0}{V'} r$

3.11 a) $B_{ar} = \mu_0 H = 628 \text{ } \mu\text{T}$
b) $B_{Al} = \mu_{r,Al} B_{ar} = 628 \text{ } \mu\text{T}$
c) $B_{Fe} = \mu_{r,Fe} B_{ar} = 3,2 \text{ T}$

3.12 a) $\mu = 3,8 \text{ } \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_r = 3$
b) $H = 1500 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$
 $M = 3000 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$
 $B = 5,7 \text{ mT}$
O material é paramagnético.

3.13 a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
b) $\vec{B} = \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$
c) $r > a$, $\vec{M} = 0$
 $r < a$, $\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$

3.14 b) $B = \frac{\mu N I}{2\pi R + d(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)} \simeq \mu_0 n I$, $n \equiv \frac{N}{d}$
 $B = 2,5 \text{ mT}$

3.15 a) $F_m = 0$
b) $F_m = 40 \text{ mN}$

3.16 a) $\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 b \left(\frac{a}{d(d+a)}\right) \vec{u}_x$
b) $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

3.17 a) $F_m = 0$ nos lados paralelos ao campo
 $\vec{F}_m = \pm I B a \vec{n}$ nos outros dois lados
b) $\sum \vec{F}_m = 0$
c) $\vec{N} = I a^2 B$

3.18 a) *são perpendiculares caso contrário a trajetória não seria uma circunferência mas sim uma hélice*

3.19 a) $v_{||} = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_{\perp} = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
b) $F_m = 1,31 \times 10^{-10} \text{ N}$
c) *a partícula descreve uma hélice com o eixo paralelo ao campo magnético*

- b) $v = \frac{RqB}{m} = 24 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
- 3.20 $v = \frac{E}{B} = 3,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
- 3.21 a) $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$
b) $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$
- 3.22 a) $f = \frac{qB}{2\pi m}$
b) $B = 1,3 \text{ mT}$
c) $\Delta E_c = 2qV_0$
d) $E_c = 1,3 \times 10^{-17} \text{ J}$
e) $V_0 = 1,7 \text{ V}$
- 3.23 a) $\vec{F}_m = -evB \vec{u}_x$
b) $\vec{E} = vB \vec{u}_x$
c) $V = 0,35 \text{ V}$
d) $I = 0$
- 3.24 a) $\vec{F}_m = evB \vec{u}_z$
b) $\vec{E} = vB \vec{u}_z$; $V_H = vBd$
c) $V_H = \frac{IB}{Ne}$
d) Colocando a face da sonda perpendicular ao campo
e) $B = 0,2 \text{ T}$
- 3.25 $N = 10^{26} \text{ electrões} \cdot \text{m}^{-3}$
- 3.26 a) $\vec{F}_m = -e\omega r B_0 \vec{u}_r$
b) $\vec{E} = -\omega r B_0 \vec{u}_r$
c) $\rho = -2\varepsilon_0 \omega B_0$
 $\sigma = +\varepsilon_0 \omega B_0 a$
d) $V = \frac{1}{2} \omega B_0 a^2$
e) $P = \frac{\omega^2 B_0^2 a^4}{4R}$
- 3.27 a) $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $I = 6,4 \text{ pA}$
b) $F_m = 16 \times 10^{-22} \text{ N}$
c) $V = 0,2 \text{ mV}$, da face posterior para a face anterior do tubo.
d) Não se alterava. Este é um dos interesses destes caudalímetros.
- 3.28 a) $\varepsilon = \pi \times 10^{-3} \text{ sen}(50\pi t) \text{ V}$
b) $I = \frac{\varepsilon}{R} = \pi \times 10^{-2} \text{ sen}(50\pi t) \text{ A}$
c) Quando o módulo do campo magnético diminui o módulo da força eletromotriz aumenta, e vice-versa
- 3.29 a) $\Phi_B = BL^2 \cos(\omega t) = 0,04 \cos(200\pi t) \text{ Wb}$
b) $I = 1,3 \text{ sen}(200\pi t) \text{ A}$
c) $E = 2,0 \text{ kJ}$
- 3.30 a) $\vec{F}_B = ev_0 B \vec{u}_y$
b) $V = v_0 B d$
c) $I = \frac{V}{R} = \frac{v_0 B d}{R}$ sentido horário
d) $\varepsilon = v_0 B d$ sentido horário e idêntica à diferença de potencial calculada em b)
e) $\vec{F}_{\text{barra}} = -\frac{v_0 B^2 d^2}{R} \vec{u}_x$
f) $P = \frac{v_0^2 B^2 d^2}{R} = \frac{V^2}{R} = P_{\text{feito de Joule}}$
- 3.31 a) $i(t) = 10 - 90t$
 $\vec{B}(t) = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$
b) $r < a$, $\vec{E} = 45\mu_0 n r \vec{u}_\theta$
 $r > a$, $\vec{E} = \frac{45\mu_0 n a^2}{r} \vec{u}_\theta$
 $r = b$, $\vec{E} = 2,83 \vec{u}_\theta \text{ mV} \cdot \text{m}^{-1}$
c) $\varepsilon = 3,6 \text{ mV}$
b) $I = 172 \text{ A}$
c) $I = 69 \text{ A}$; não é importante que os eixos sejam coincidentes
- 3.32 a) $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$
b) $\Phi = \frac{N\mu Id}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$
c) $\varepsilon = 9,6 \text{ sen}(100\pi t) \text{ V}$
- 3.33 a) $\Phi_{B,1\text{fio}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d-R}{R}\right)$
b) $\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln\left(\frac{d-R}{R}\right)$
c) $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d-R}{R}\right) = 0,9 \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$
- 3.34 a) $L = \mu n^2 l \pi a^2 = 250 \text{ mH}$
b) $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} = 39,3 \text{ sen}(100\pi t) \text{ V}$

- c) $U_M = \frac{1}{2}LI^2 = 31,3 \cos^2(100\pi t) \text{ mJ}$
d) *Impor a corrente no circuito, contrariando a autoindução que se opõe à variação dessa corrente.*

3.35 a) $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi a_1^2$
b) $i_2(t) = \frac{M \alpha I_0}{R - \alpha L} (e^{-\alpha t} - e^{-\frac{R}{L}t})$

3.36 a) $M = \mu n \pi (\frac{D}{2})^2$
b) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{MI_0 \omega}{L} \sin(\omega t)$

3.37 a) $\vec{B} = \mu \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi r} (-\vec{e}_\theta)$
b) $M = \mu \frac{N_1 N_2}{2\pi} h \ln(\frac{b}{a})$
c) $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2}$

3.38 a) $u_m = \frac{\mu_0}{8} (\frac{Ir}{\pi a^2})^2$
b) $U_m = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2$
c) $L' = \frac{\mu_0}{8\pi}$

3.39 a) $u_M(r) = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{8} (\frac{I}{\pi r})^2$
b) $U'_M = \int u_M(r) dv = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln(\frac{b}{a})$
c) $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$
d) *A expressão da alínea c) é idêntica à expressão de 3.33 c) no caso de haver a contribuição de apenas uma das correntes pelo que se conclui que a área a considerar seria idêntica (uma secção do cabo entre os dois condutores – entre a e b).*

3.40 a) $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$
b) $M = \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \cos \theta$
c) $U_M = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 I_1^2 + \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \cos \theta I_1 I_2$
d) $\tau = -\mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \sin \theta I_1 I_2$

o sinal negativo significa que θ diminui, ou seja, a espira roda em sentido horário ; Os pontos de equilíbrio ($\tau = 0$) são $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ mas apenas $\theta = 0$ é estável. Como o $\cos \theta$ é máximo para $\theta = 0$, ao ponto de equilíbrio

estável corresponde um máximo de energia. Isto acontece porque a espira não está isolada, está ligada a uma fonte que lhe impõe a corrente e que realiza trabalho nesse processo.

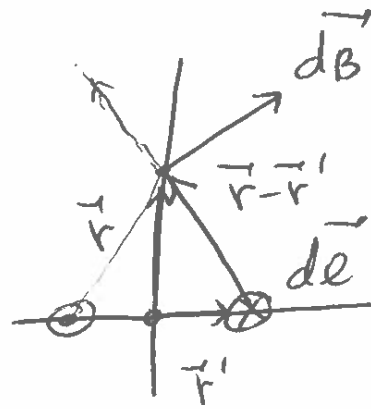
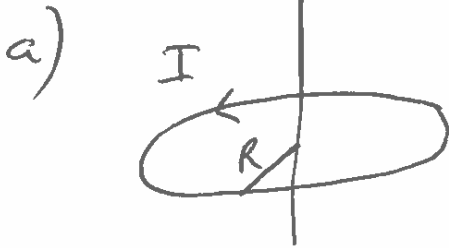
3.41 a) $u_M = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_1^2$
b) $U_M = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_1^2 \pi R^2 \ell$
c) $L = \mu_0 n^2 \pi R^2 \ell$
d) *Explosão*
e) $P = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_1^2$

3.42 a) $U_M = 3,2 \times 10^4 d \text{ [J]}$
b) $F = -3,2 \times 10^4 \text{ N}$
(~3,2 toneladas força, para cima)

3.43 a) $L = n^2 \pi R^2 [\mu_0 (\ell - x) + \mu x]$
c) $\bar{P} = \frac{\frac{1}{2} L I^2}{\Delta t}$
d) $F_x = \frac{1}{2} n^2 \pi R^2 (\mu - \mu_0)$

①

3.1 (AT)

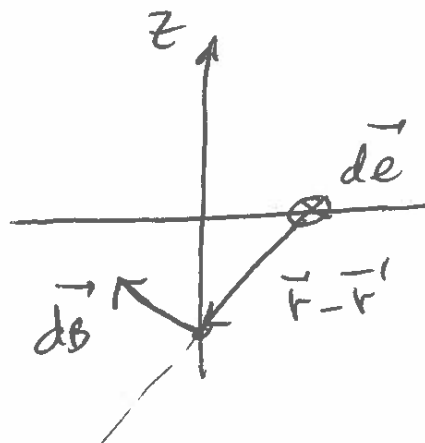


$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$z=0$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}$$



(2)

$$b) \begin{cases} R = 0,02 \\ I = 5 \times 10^{-3} A \end{cases}$$

$$z=0 \quad B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{5 \times 10^{-3}}{0,02} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{-3}}{2 \times 0,02}$$

$$B_z = 1,57 \times 10^{-7} T$$

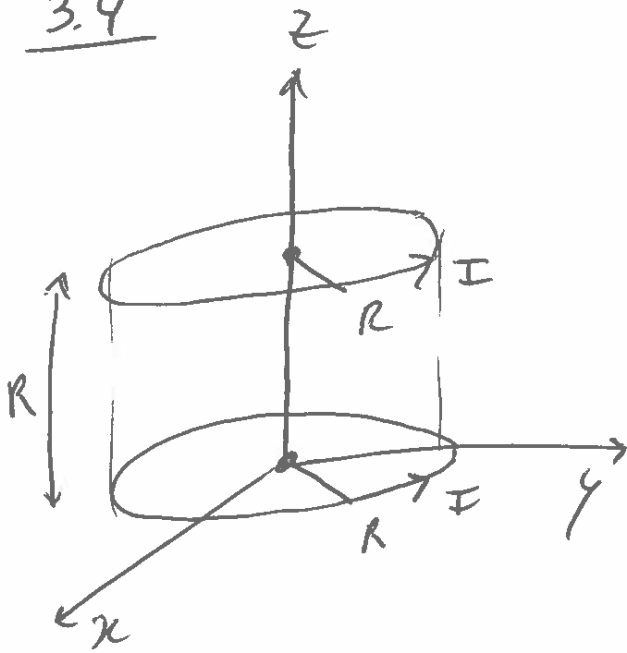
$$z = 0,2 \quad B_z = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2} \times 5 \times 10^{-3} \frac{(0,02)^2}{(0,2^2 + 0,02^2)^{3/2}}$$

$$B_z = 1,57 \times 10^{-7} \left(\frac{0,02}{\sqrt{0,2^2 + 0,02^2}} \right)^3$$

$$B_z = 1,57 \times 10^{-10} T$$

3.4

(7)



a) 1 espine

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

2 espines

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I R^2 \left[\frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z-R)^2 + R^2)^{3/2}} \right] \vec{\mu}_z$$

$$b) \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[-\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + R^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{2(z-R)}{[(z-R)^2 + R^2]^{5/2}} \right]$$

$$\frac{dB_z}{dz} = -\frac{3}{2}\mu_0 I R^2 \left[\frac{z}{(z^2 + R^2)^{5/2}} + \frac{z-R}{[(z-R)^2 + R^2]^{5/2}} \right] \quad (8)$$

$$\left. \frac{dB_z}{dz} \right|_{z=\frac{R}{2}} = -\frac{3}{2}\mu_0 I R^2 \left[\frac{R/2}{[(\frac{R}{2})^2 + R^2]^{5/2}} - \frac{R/2}{[(-\frac{R}{2})^2 + R^2]^{5/2}} \right]$$

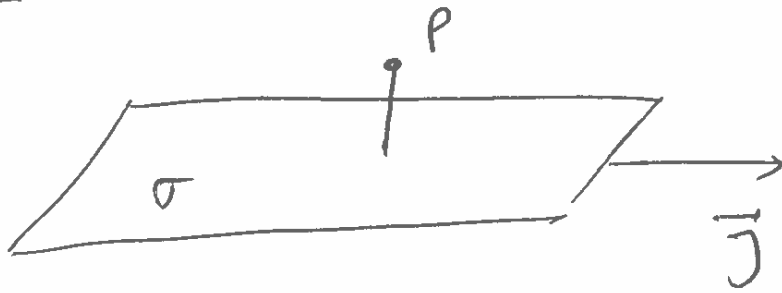
$$= 0$$

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = -\frac{3}{2}\mu_0 I R^2 \left[\frac{z}{[(\frac{R}{2})^2 + R^2]^{5/2}} - 5 \frac{(\frac{R}{2})^2}{[(\frac{R}{2})^2 + R^2]^{7/2}} - 5 \frac{(\frac{R}{2})^2}{[(\frac{R}{2})^2 + R^2]^{7/2}} \right]$$

$$= 0$$

3.5

(9)

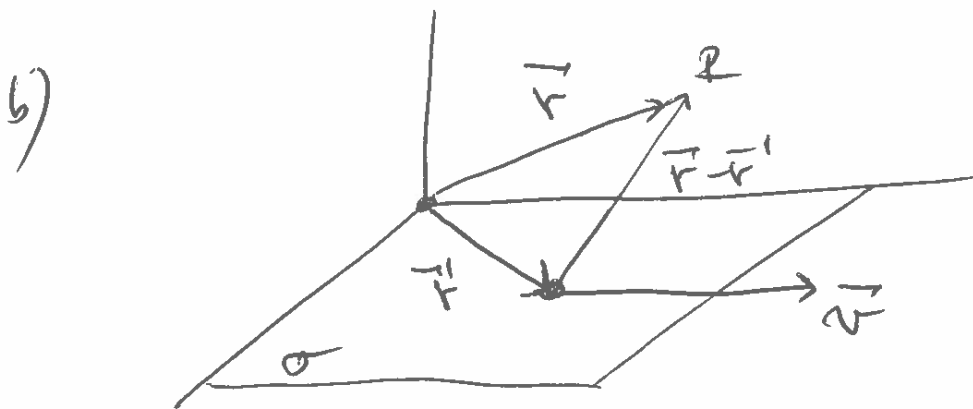


$$\begin{aligned} a) \quad q \vec{v} &= i d\vec{\ell} = \vec{j} dV = dz ds \vec{j} = \rho \vec{v} dz ds \\ &= \vec{v} \sigma ds \end{aligned} \quad \sigma = \rho dz$$

$$\vec{j}_s ds \Rightarrow \vec{j}_s = \sigma \vec{v}$$

$$\vec{j} ds dz = \vec{j}_s ds$$

$$\Rightarrow \vec{j} dz = \vec{j}_s$$



$$\begin{aligned}\vec{r} &= z \vec{u}_z \\ \vec{r}' &= x' \vec{u}_x + y' \vec{u}_y \\ \vec{a} &= v \vec{u}_y\end{aligned}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \vec{u}_z - x' \vec{u}_x - y' \vec{u}_y$$

$$\vec{a} \times (\vec{r} - \vec{r}') = v \vec{u}_y \times (z \vec{u}_z - x' \vec{u}_x - y' \vec{u}_y)$$

$$= v z \vec{u}_x + v x' \vec{u}_z$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma dx' dy' \frac{v z \vec{u}_x + v x' \vec{u}_z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$B_z = 0$ Integreio de \pm $\frac{1}{r^3}$ (1) para em x'

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma v z \int_{-L_x}^{L_x} dx' \int_{-L_y}^{L_y} dy' \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

(11)

ou, cooreded, polmes

$$| \rho'^2 = x'^2 + y'^2$$

$$dx' dy' = \rho' d\rho' d\varphi'$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma_N z 2\pi \int_0^R \rho' d\rho' \frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{2} \sigma_N z \left. \frac{-1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right|_0^R$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \sigma_N z \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{|z|} \right]$$

$$R \rightarrow \infty$$

$$| B_x = \frac{\mu_0}{2} \sigma_N \operatorname{sgn}(z)$$

$$B_x = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2} \times 10 \times 10^{-3} = 6,28 \times 10^{-9} \text{ T}$$

3.6

loi de A-père

12

3.2



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$B_{\varphi} 2\pi R = \mu_0 I$$

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

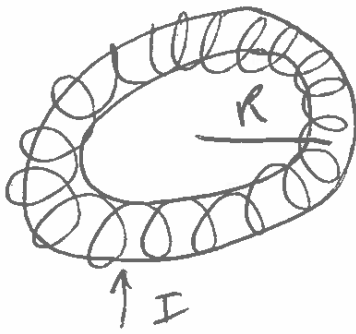
$$\vec{B} = B_{\varphi} \vec{e}_{\varphi}$$

3.3 e 3.4

Complicado

3.8

14

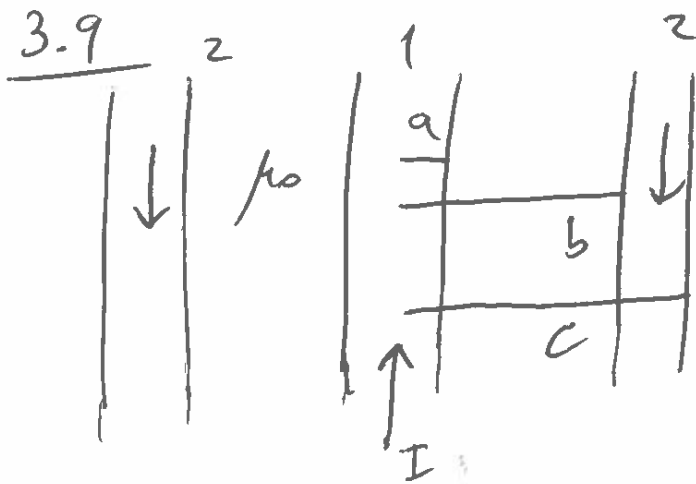


$$n = \frac{N}{2\pi R}$$

$$B_{\varphi} 2\pi R = n 2\pi R I \mu_0$$

$$\boxed{B_{\varphi} = n I \mu_0}$$

$$\vec{B} = B_{\varphi} \vec{e}_{\varphi}$$



$$\partial_1 \pi a^2 = I \quad \parallel \quad \partial_1 = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$\partial_2 (\pi c^2 - \pi b^2) = I \quad \parallel \quad \partial_2 = \frac{I}{\pi c^2 - \pi b^2}$$

a) $r < a$

~~$$B_\varphi 2\pi r = \mu_0 I_r = \mu_0 \partial_1 \pi r^2$$~~

$$B_\varphi = \mu_0 \partial_1 \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2} \partial_1 r = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

b) $a < r < b$

$$B_{\varphi} 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

c) $b < r < c$

$$B_{\varphi} 2\pi r = \mu_0 I \cdot \frac{\pi r^2 - \pi b^2}{\pi c^2 - \pi b^2}$$

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{r^2 - b^2}{(c^2 - b^2)r} \right]$$

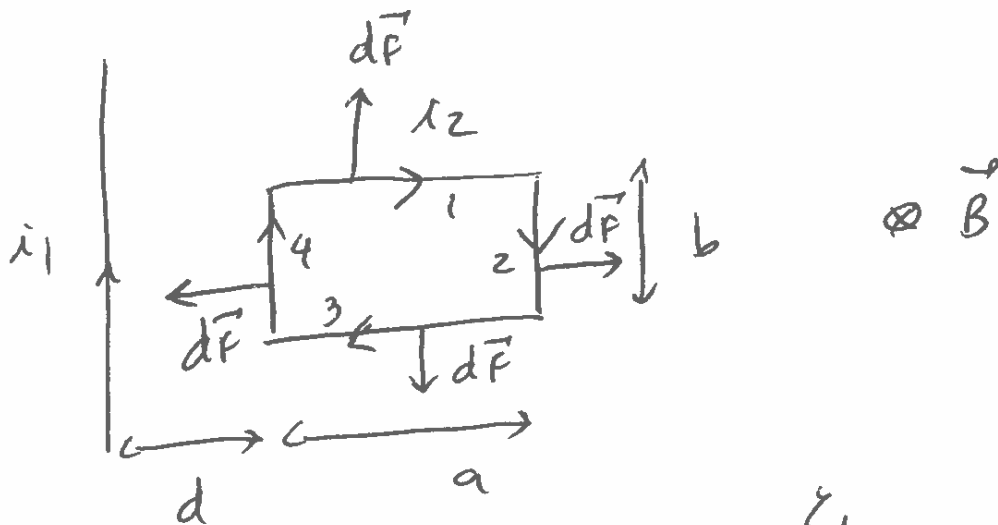
$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right]$$

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - b^2 - r^2 + b^2}{c^2 - b^2}$$

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

d) $B_{\varphi} = 0$

3.16



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_z$$

$$a) \quad d\vec{F} = i_2 d\vec{\ell} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{e}_\varphi}{r}$$

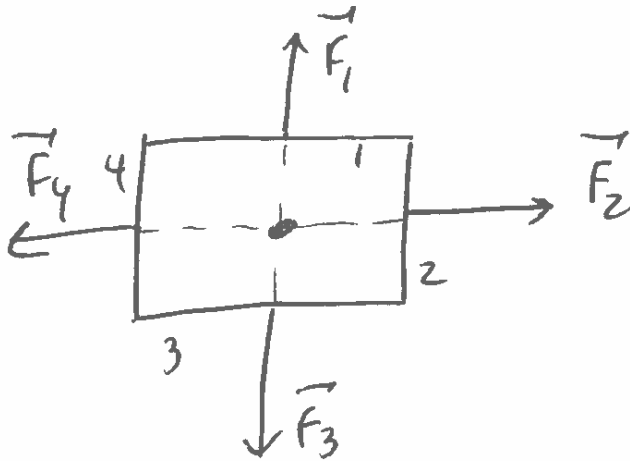
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{F} = \vec{e}_x \left[\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} b \left(\frac{1}{d+a} - \frac{1}{d} \right) \right]$$

$$\vec{F} = -\vec{e}_x \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} b \frac{a}{d(d+a)} \quad ; \quad b) \quad -\vec{F}$$

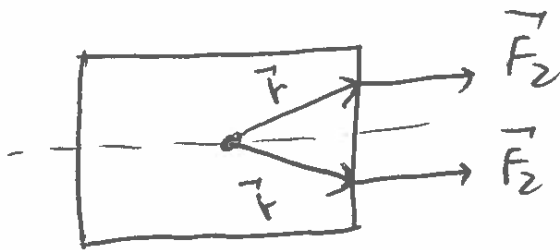
(9)

c)



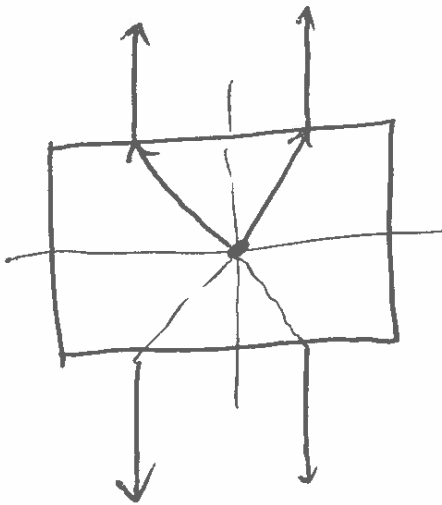
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F}$$



$$\vec{N}_2 = 0$$

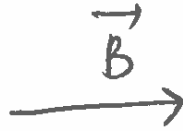
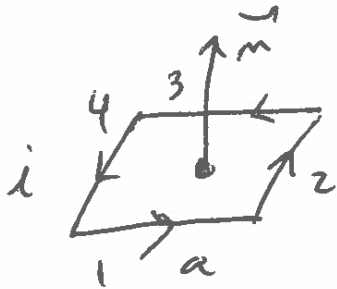
$$\vec{N}_4 = 0$$



$$\vec{N}_1 + \vec{N}_3 = 0$$

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4 = 0$$

(5)

3.17Motor de corrente contínua

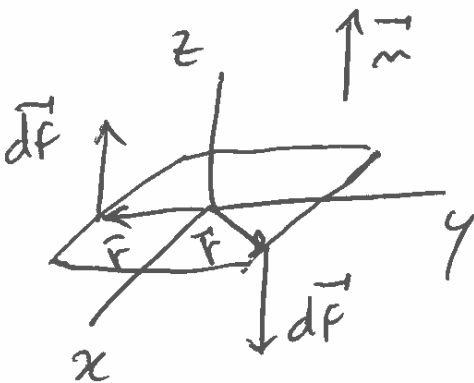
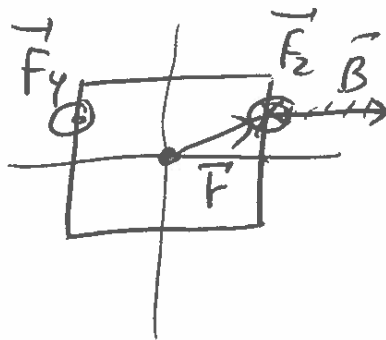
$$t=0 \quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$$

$$d\vec{F} = i d\vec{e} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{F}_1 &= 0 & \vec{F}_2 &= -\vec{n} a i B \\ \vec{F}_3 &= 0 & \vec{F}_4 &= \vec{n} a i B \end{aligned}$$

$$b) \quad \vec{F}_{\text{total}} = 0$$

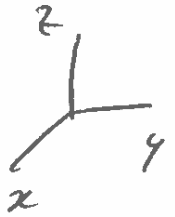
$$c) \quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$



(6)

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$\begin{cases} d\vec{F} = -iB dx \vec{e}_z \\ \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \end{cases}$$



$$\begin{aligned} d\vec{N} &= (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \times (-iB dx \vec{e}_z) \\ &= -iB dx [x(-\vec{e}_y) + y \vec{e}_x] \end{aligned}$$

$$d\vec{N} = iB [x dx \vec{e}_y - y dx \vec{e}_x]$$

$$\vec{N}_2 = \int d\vec{N}$$

$$= iB \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx (x \vec{e}_y - y \vec{e}_x)$$

$$y = \frac{l}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_2 &= iB \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(-\frac{a}{2} \right)^2 \right] \vec{e}_y \\ &\quad - iB a \frac{a}{2} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\vec{N}_2 = -\frac{iB}{2} a^2 \vec{e}_x$$

(7)

4

$$\vec{N}_4 = \vec{N}_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{N} = \vec{N}_2 + \vec{N}_4 = -iB a^2 \vec{e}_x \\ \vec{B} = B \vec{e}_y \end{array} \right.$$

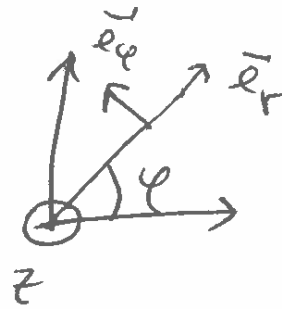
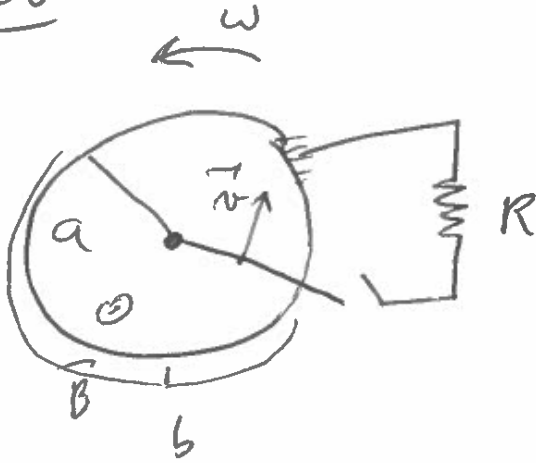
$$d) \quad \vec{m} = iA \vec{m}$$

$$A = a^2$$

$$\vec{m} = i a^2 \vec{m} = i a^2 \vec{e}_z$$

$$\vec{m} \times \vec{B} = i a^2 \vec{e}_z \times B \vec{e}_y$$

$$= -i a^2 B \vec{e}_x = \vec{N}$$

3.26

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$$

$$a) \quad \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$q = -e$$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{v} = v_\phi \vec{e}_\phi \\ \vec{B} = B_0 \vec{e}_z \end{array} \right.$$

$$v_\phi = \omega r$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \omega r B_0 \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = \omega r B_0 \vec{e}_r$$

$$\vec{F}_m = q \omega r B_0 \vec{e}_r = -e \omega r B_0 \vec{e}_r$$

$$b) \quad \vec{E}_m = \frac{\vec{F}_m}{q} = \omega r B_0 \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = -\vec{E}_m = -\omega r B_0 \vec{e}_r$$

$$c) \begin{cases} \rho = -2\epsilon_0 \omega B_0 \\ \sigma = \epsilon_0 \omega B_0 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{j} = \vec{e}_\varphi \rho \omega r \\ I = \rho \omega b \frac{1}{2} a^2 \end{cases} \quad \text{le } \rho = c^{Te}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$E_r = -\omega r B_0, \quad E_\varphi = E_z = 0$$

$$-\epsilon_0 \omega B_0 \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} = \rho$$

$$\rho = -2\epsilon_0 \omega B_0$$

Disc |¹/₂ exterior

$$E_{m2} - E_{m1} = \sigma / \epsilon_0$$

//
0

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -E_{m1} = \omega a B_0$$

$$\sigma = \epsilon_0 \omega a B_0$$

$$d) \quad d\phi = -E_r dr$$

$$\int_0^a d\phi = V = -\int_0^a E_r dr$$

$$V = \omega B_0 \int_0^a r dr$$

$$V = \frac{\omega B_0}{2} a^2$$

$$e) \quad P = Ri^2 = R \left(\frac{\omega B_0 a^2}{2R} \right)^2 = \frac{\omega^2 B_0^2 a^4}{4R}$$

Constantes Físicas

massa do electrão	m_e	$9,10 \times 10^{-31} \text{ kg}$
massa do protão	m_p	$1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
carga elementar	e	$1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
permitividade eléctrica do vácuo	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
permitividade magnética do vácuo	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	10^{-7} N.A^{-2}
constante de Planck	h	$6,6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
número de Avogadro	N_A	$6,022 \times 10^{23}$
velocidade da luz no vácuo	c	$3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
raio médio da Terra	R_T	6371 km
constante gravítica	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^{-2}.\text{kg}^{-2}$

Formulário matemático

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + b}\right)$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{s} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_x, F_y, F_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{s} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dA = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{s} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{s} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Formulário de Eletromagnetismo e Óptica

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_v \rho_{liv} dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $V_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i q_i V_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $U_E = \int_v u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{u}_k = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle S \rangle$
 $I = v \langle u \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$
 $U_M = \int_v u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Propriedades de materiais

- Resistividade a 20° C e coeficiente de temperatura

Material	Resistividade ρ ($\Omega \cdot m$)		Coeficiente de temperatura α ($^{\circ}C^{-1}$)
Prata	1,59	$\times 10^{-8}$	0,0038
Cobre	1,68	$\times 10^{-8}$	0,00386
Alumínio	2,65	$\times 10^{-8}$	0,00429
Tungsténio	5,6	$\times 10^{-8}$	0,0045
Ferro	9,71	$\times 10^{-8}$	0,00651
Platina	10,6	$\times 10^{-8}$	0,003927
Manganina	48,2	$\times 10^{-8}$	0,000002
Chumbo	22	$\times 10^{-8}$...
Mercúrio	98	$\times 10^{-8}$	0,0009
Nicrome	100	$\times 10^{-8}$	0,0004
Constantan	49	$\times 10^{-8}$	0,00001
Carbono (grafite)	3 - 60	$\times 10^{-5}$	- 0,0005
Germânio*	1 - 500	$\times 10^{-3}$	- 0,05
Silício*	0,1 - 60	...	- 0,07
Vidro	1 - 10000	$\times 10^9$...
Quartzo (fundido)	7,5	$\times 10^{17}$...
Borracha endurecida	1 - 100	$\times 10^{13}$...

* A resistividade dos semicondutores depende fortemente da presença de impurezas, o que os torna muito úteis em eletrónica

(Adaptado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu> em 29/10/2014)

- Permittividade elétrica relativa de alguns materiais à temperatura ambiente e 1 kHz

Material	ϵ_r
Vácuo	1
Ar (a PTN, 0,9 MHz)	1,00058986±0,00000050
Teflon	2,1
Polyethylene	2,25
Papel de impressão, 200 kHz,	1,4
Mica	3–6[2]
Safira	8,9–11,1
Betão	4,5
Pyrex	3,7–10
Neoprene	6,7
Borracha	7
Diamante	5,5–10
Sal	3–15
Grafite	10–15
Metanol	30
Água	87,9, 80,2, 55,5 (0, 20, 100 °C) Para luz visível: 1,77
Ácido sulfúrico	84–100 (20–25 °C)
Titanato de Estrôncio	310
Titanato de Bário	1200–10.000 (20–120 °C)
Polímeros conjugados	1.8–6 up to 100.000
Titanato de Cálcio e Cobre	>250.000

(Adaptado de https://en.wikipedia.org/wiki/Relative_permittivity em 13/02/2019)

- Permeabilidade magnética relativa de alguns materiais

Material	Permeabilidade relativa μ/μ_0
supercondutores	0
Água	0,999992
Cobre	0,999994
Vácuo	1
Hidrogénio	1,0000000
Teflon	1,0000
Ar	1,00000037
Madeira	1,00000043
Alumínio	1,000022
Aço inox (austenítico)	1,003 – 7
Íman de Neodímio	1,05
Aço inox (martensítico endurecido)	40 – 95
Aço carbono	100
Níquel	100 – 600
Aço elétrico	4000
Ferro (99.8% puro)	5000
Permalloy	8000
Ferro (99.95% puro recozido em H)	200000
Metglas	1000000

(Adaptado de [http://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_\(electromagnetism\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Permeability_(electromagnetism)) em 12/11/2014)