Cálculo Diferencial e Integral I
Fichas de Exercícios
MEEC
1º semestre 2008/09

Miguel Abreu
Secção de Álgebra e Análise
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

24 de Novembro de 2008

DMIST - 2008

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1ª Ficha de Exercícios

1. Mostre que:

1.1. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+3} < 2\right\} =]-\infty, -7[\cup]-3, +\infty[$

1.2. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+3} \geq 2\right\} = [-7, -3[$

1.3. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x-3} \leq 2\right\} =]-\infty, 3[\cup [7, +\infty[$

1.4. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x-3} > 2\right\} =]3, 7[$

1.5. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+1} < 3\right\} = \left]-\infty, -\dfrac{5}{2}\right[\cup]-1, +\infty[$

1.6. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+1} \geq 3\right\} = \left[-\dfrac{5}{2}, -1\right[$

1.7. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+2}{x-1} \leq 3\right\} =]-\infty, 1[\cup \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

1.8. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+2}{x-1} > 3\right\} = \left]1, \dfrac{5}{2}\right[$

1.9. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-3}{x+2} < 1\right\} =]-2, +\infty[$

1.10. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-3}{x+2} \geq 1\right\} =]-\infty, -2[$

1.11. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+3}{x-2} \leq 1\right\} =]-\infty, 2[$

1.12. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+3}{x-2} > 1\right\} =]2, +\infty[$

1.13. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+3} < 2x\right\} =]-3, -2[\cup \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

1.14. $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-2}{x+3} \geq 2x\right\} =]-\infty, -3[\cup \left[-2, \dfrac{1}{2}\right]$

1.15. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x+2}{3-x} > 2x\right\} = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \,]2,3[$

1.16. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x+2}{3-x} \leq 2x\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, 2\right] \cup \,]3,+\infty[$

1.17. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x+4}{x-1} < 3x\right\} = \left]-\dfrac{2}{3}, 1\right[\cup \,]2,+\infty[$

1.18. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x+4}{x-1} \geq 3x\right\} = \left]-\infty, -\dfrac{2}{3}\right] \cup \,]1,2]$

1.19. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{4-x}{x+1} > 3x\right\} = \,]-\infty,-2[\, \cup \left]-1, \dfrac{2}{3}\right[$

1.20. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{4-x}{x+1} \leq 3x\right\} = [-2,-1[\, \cup \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$

1.21. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x-7}{x-3} < 3x\right\} = \left]1, \dfrac{7}{3}\right[\cup \,]3,+\infty[$

1.22. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x-7}{x-3} \geq 3x\right\} = \,]-\infty,1[\, \cup \left[\dfrac{7}{3}, 3\right[$

1.23. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x+7}{x+3} \leq -3x\right\} = \,]-\infty,-3[\, \cup \left[-\dfrac{7}{3}, -1\right]$

1.24. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \dfrac{x+7}{x+3} > -3x\right\} = \left]-3, -\dfrac{7}{3}\right[\cup \,]-1,+\infty[$

2. Mostre que:

2.1. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x+2| = 3\} = \{-5, 1\}$

2.2. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x+2| \leq 1\} = [-3,-1]$

2.3. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |3-x| > 2\} = \,]-\infty,1[\, \cup \,]5,+\infty[$

2.4. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 < |x| < 3\} = \,]-3,-2[\, \cup \,]2,3[$

2.5. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 3 < 2|x-1| \leq 5\} = \left[-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right]$

2.6. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-3| > 2 \;\wedge\; x \geq 0\} = [0,1[\, \cup \,]5,+\infty[$

2.7. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x+2| \leq 3 \;\wedge\; x+1 > 0\} = \,]-1,1]$

2.8. $\{x \in \mathbb{R} : |3-4x| < 1\} = \left]\frac{1}{2}, 1\right[$

2.9. $\{x \in \mathbb{R} : |4x+3| > 1\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2.10. $\{x \in \mathbb{R} : |5-3x| \leq 2\} = \left[1, \frac{7}{3}\right]$

2.11. $\{x \in \mathbb{R} : |5+3x| \geq 2\} = \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-1, +\infty\right[$

2.12. $\{x \in \mathbb{R} : |4x+1| > 5\} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

2.13. $\{x \in \mathbb{R} : |1-4x| < 5\} = \left]-1, \frac{3}{2}\right[$

2.14. $\{x \in \mathbb{R} : |5x+2| \geq 3\} = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$

2.15. $\{x \in \mathbb{R} : |2-5x| \leq 3\} = \left[-\frac{1}{5}, 1\right]$

2.16. $\{x \in \mathbb{R} : |3x-4| \leq 1\} = \left[1, \frac{5}{3}\right]$

2.17. $\{x \in \mathbb{R} : |3x+4| \geq 1\} = \left]-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup \left[-1, +\infty\right[$

2.18. $\{x \in \mathbb{R} : |2x+3| > 5\} = \left]-\infty, -4\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

2.19. $\{x \in \mathbb{R} : |3-2x| < 5\} = \left]-1, 4\right[$

2.20. $\{x \in \mathbb{R} : |2-3x| < 1\} = \left]\frac{1}{3}, 1\right[$

2.21. $\{x \in \mathbb{R} : |2+3x| > 1\} = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$

2.22. $\{x \in \mathbb{R} : |5x-4| \leq 1\} = \left[\frac{3}{5}, 1\right]$

2.23. $\{x \in \mathbb{R} : |5x+4| \geq 1\} = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[-\frac{3}{5}, +\infty\right[$

2.24. $\{x \in \mathbb{R} : |5-2x| < 1\} = \left]2, 3\right[$

2.25. $\{x \in \mathbb{R} : |2x+5| > 1\} =]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$

2.26. $\{x \in \mathbb{R} : |5-6x| \leq 1\} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

2.27. $\{x \in \mathbb{R} : |6x-5| > 1\} = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[\cup]1, +\infty[$

2.28. $\{x \in \mathbb{R} : |9-2x| < 1\} =]4, 5[$

2.29. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-9| \geq 1\} =]-\infty, 4] \cup [5, +\infty[$

2.30. $\{x \in \mathbb{R} : |4-3x| < 8\} = \left]-\frac{4}{3}, 4\right[$

2.31. $\{x \in \mathbb{R} : |3x-4| \geq 8\} = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [4, +\infty[$

2.32. $\{x \in \mathbb{R} : |3-4x| \leq 7\} = \left[-1, \frac{5}{2}\right]$

2.33. $\{x \in \mathbb{R} : |4x-3| > 7\} =]-\infty, -1[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

2.34. $\{x \in \mathbb{R} : |7-2x| \leq 1\} = [3, 4]$

2.35. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-7| > 1\} =]-\infty, 3[\cup]4, +\infty[$

2.36. $\{x \in \mathbb{R} : |5-2x| < 9\} =]-2, 7[$

2.37. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-5| \geq 9\} =]-\infty, -2] \cup [7, +\infty[$

2.38. $\{x \in \mathbb{R} : |5-3x| < 1\} = \left]\frac{4}{3}, 2\right[$

2.39. $\{x \in \mathbb{R} : |3x-5| \geq 1\} = \left]-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty[$

2.40. $\{x \in \mathbb{R} : 2 < 3|x+1| \leq 5\} = \left[-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

3. Mostre que:

3.1. $\{x \in \mathbb{R} : |3-2x| \geq |x+2|\} = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [5, +\infty[$

3.2. $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x-2|\} = \{1\}$

3.3. $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |x-2|\} = \,]-\infty, 1]$

3.4. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-5| \geq |1-x|\} = \,]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$

3.5. $\{x \in \mathbb{R} : |6x-5| < |1-8x|\} = \,]-\infty, -2[\cup \left]\frac{3}{7}, +\infty\right[$

3.6. $\{x \in \mathbb{R} : |5-6x| \geq |8x-1|\} = \left[-2, \frac{3}{7}\right]$

3.7. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-9| < |1-8x|\} = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right[\cup \,]1, +\infty[$

3.8. $\{x \in \mathbb{R} : |9-2x| \geq |8x-1|\} = \left[-\frac{4}{3}, 1\right]$

3.9. $\{x \in \mathbb{R} : |3x-4| \leq |8-9x|\} = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty[$

3.10. $\{x \in \mathbb{R} : |4-3x| > |9x-8|\} = \left]\frac{2}{3}, 1\right[$

3.11. $\{x \in \mathbb{R} : |4x-3| < |7-6x|\} = \,]-\infty, 1[\cup \,]2, +\infty[$

3.12. $\{x \in \mathbb{R} : |3-4x| \geq |6x-7|\} = [1, 2]$

3.13. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-7| < |1-6x|\} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \,]1, +\infty[$

3.14. $\{x \in \mathbb{R} : |7-2x| \geq |6x-1|\} = \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$

3.15. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-5| \leq |9-4x|\} = \,]-\infty, 2] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right[$

3.16. $\{x \in \mathbb{R} : |5-2x| > |4x-9|\} = \left]2, \frac{7}{3}\right[$

3.17. $\{x \in \mathbb{R} : |3x-5| \leq |1-4x|\} = \,]-\infty, -4] \cup \left[\frac{6}{7}, +\infty\right[$

3.18. $\{x \in \mathbb{R} : |5-3x| > |4x-1|\} = \left]-4, \frac{6}{7}\right[$

3.19. $\{x \in \mathbb{R} : 3|2-x| \leq |x|\} = \left[\frac{3}{2}, 3\right]$

3.20. $\{x \in \mathbb{R} : 3|x-2| > |x|\} = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\cup]3, +\infty[$

3.21. $\{x \in \mathbb{R} : |4x-9| \geq |6-x|\} =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

3.22. $\{x \in \mathbb{R} : |9-4x| < |6-x|\} =]1, 3[$

3.23. $\{x \in \mathbb{R} : |3x+4| \leq |x+8|\} = [-3, 2]$

3.24. $\{x \in \mathbb{R} : |3x+4| > |x+8|\} =]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$

3.25. $\{x \in \mathbb{R} : |5x-2| \geq |x+2|\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

3.26. $\{x \in \mathbb{R} : |2-5x| < |x+2|\} =]0, 1[$

3.27. $\{x \in \mathbb{R} : |7-4x| \leq |2x+1|\} = [1, 4]$

3.28. $\{x \in \mathbb{R} : |4x-7| > |2x+1|\} =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$

3.29. $\{x \in \mathbb{R} : |5x-4| \geq |x+4|\} =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

3.30. $\{x \in \mathbb{R} : |4-5x| < |x+4|\} =]0, 2[$

3.31. $\{x \in \mathbb{R} : |7-2x| \leq |x+1|\} = [2, 8]$

3.32. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-7| > |x+1|\} =]-\infty, 2[\cup]8, +\infty[$

3.33. $\{x \in \mathbb{R} : |5-2x| < |x-1|\} =]2, 4[$

3.34. $\{x \in \mathbb{R} : |2-x| \geq |3+2x|\} = \left[-5, -\frac{1}{3}\right]$

3.35. $\{x \in \mathbb{R} : |3-5x| < |7x-6|\} = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

3.36. $\{x \in \mathbb{R} : |5x-3| \geq |6-7x|\} = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$

3.37. $\{x \in \mathbb{R} : |3x-2| > |4-9x|\} = \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

3.38. $\{x \in \mathbb{R} : |2-3x| \leq |9x-4|\} = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

3.39. $\{x \in \mathbb{R} : |2x-5| > |4-x|\} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

3.40. $\{x \in \mathbb{R} : |5-2x| \leq |x-4|\} = [1, 3]$

4. Mostre que:

4.1. $\left\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\right\} =]-3, -2[\cup]2, 3[$

4.2. $\left\{x \in \mathbb{R} : 9 \leq (x-1)^2 < 25\right\} =]-4, -2] \cup [4, 6[$

4.3. $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0 \ \wedge \ x - 3 \leq 0\right\} =$
$]-\infty, -1[\cup]1, 3]$

4.4. $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0 \ \wedge \ x + 1 > 0\right\} =]-1, 2]$

4.5. $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \geq 0\right\} =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

4.6. $\left\{x \in \mathbb{R} : 2 - x - x^2 > 0\right\} =]-2, 1[$

4.7. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 1\right\} = \left[-\sqrt{3}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{3}\right]$

4.8. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x + x^2| = 5\right\} = \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}$

4.9. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x + x^2| < 5\right\} = \left]1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right[$

4.10. $\left\{x \in \mathbb{R} : |15 + 2x - x^2| \geq 9\right\} =$
$]-\infty, -4] \cup \left[1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\right] \cup [6, +\infty[$

4.11. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x - 15| < 9\right\} =$
$\left]-6, -1 - \sqrt{7}\right[\cup \left]-1 + \sqrt{7}, 4\right[$

4.12. $\left\{x \in \mathbb{R} : |4x - 3x^2| > 1\right\} =$
$\left]-\infty, \frac{2 - \sqrt{7}}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, 1\right[\cup \left]\frac{2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$

4.13. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + 4x| \leq 1\right\} = \left[\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right]$

4.14. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 - 5x + 1| \geq 1\right\} =$
$]-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$

4.15. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + 5x + 1| < 1\right\} = \left]-\frac{5}{3}, -1\right[\cup \left]-\frac{2}{3}, 0\right[$

4.16. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 4x - 3| > 2\right\} =$
$]-\infty, -5[\cup \left]-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}\right[\cup]1, +\infty[$

4.17. $\{x \in \mathbb{R} : |3+4x-x^2| \leq 2\} = \left[-1, 2-\sqrt{5}\right] \cup \left[2+\sqrt{5}, 5\right]$

4.18. $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2-5x| \geq 3\} =$
$\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right] \cup [3, +\infty[$

4.19. $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2+5x| < 3\} = \left]-3, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-1, \frac{1}{2}\right[$

4.20. $\{x \in \mathbb{R} : |1+4x-3x^2| > 1\} =$
$\left]-\infty, \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]0, \frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{10}}{3}, +\infty\right[$

4.21. $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2+4x-1| \leq 1\} = \left[\frac{-2-\sqrt{10}}{3}, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[0, \frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right]$

4.22. $\{x \in \mathbb{R} : |x^2+3x-2| \geq 2\} =$
$]-\infty, -4] \cup [-3, 0] \cup [1, +\infty[$

4.23. $\{x \in \mathbb{R} : |2+3x-x^2| < 2\} =]-1, 0[\cup]3, 4[$

4.24. $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-5x+2| \geq 2\} =$
$]-\infty, 0] \cup [1, 4] \cup [5, +\infty[$

4.25. $\{x \in \mathbb{R} : |x^2+5x+2| < 2\} =]-5, -4[\cup]-1, 0[$

4.26. $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2-3x-1| > 1\} =$
$\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, \frac{3}{2}\right[\cup]2, +\infty[$

4.27. $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2+3x-1| \leq 1\} = \left[-2, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$

4.28. $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2+4x-3| > 3\} =$
$]-\infty, -3[\cup]-2, 0[\cup]1, +\infty[$

4.29. $\{x \in \mathbb{R} : |3+4x-2x^2| \leq 3\} = [-1, 0] \cup [2, 3]$

4.30. $\{x \in \mathbb{R} : |x^2+3x-7| \geq 3\} =$
$]-\infty, -5] \cup [-4, 1] \cup [2, +\infty[$

4.31. $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-3x-7| < 3\} =]-2, -1[\cup]4, 5[$

4.32. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |4 - x - x^2| \geq 2\right\} =$
$]-\infty, -3] \cup [-2, 1] \cup [2, +\infty[$

4.33. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x^2 - x - 4| < 2\right\} =]-2, -1[\cup]2, 3[$

4.34. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |3x^2 + 2x - 3| > 2\right\} =$
$\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right[\cup \left]-1, \frac{1}{3}\right[\cup]1, +\infty[$

4.35. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |3 + 2x - 3x^2| \leq 2\right\} = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{5}{3}\right]$

4.36. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |5x^2 + 4x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\right\} =$
$]-\infty, -1[\cup \left]-\frac{4}{5}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{5}, +\infty\right[$

4.37. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |5x^2 - 4x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{5}, 0\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right]$

4.38. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |5x^2 + 4x - 5| \geq 4\right\} = \left]-\infty, -\frac{9}{5}\right] \cup \left[-1, \frac{1}{5}\right] \cup [1, +\infty[$

4.39. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |5 + 4x - 5x^2| < 4\right\} = \left]-1, -\frac{1}{5}\right[\cup \left]1, \frac{9}{5}\right[$

5. Mostre que:

5.1. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x(x - 3)| = |1 - 3x|\} = \left\{-1, 3 - 2\sqrt{2}, 1, 3 + 2\sqrt{2}\right\}$

5.2. $\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x(x - 3)| > |1 - 3x|\} =]-\infty, -1[\cup \left]3 - 2\sqrt{2}, 1\right[\cup \left]3 + 2\sqrt{2}, +\infty\right[$

5.3. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x^2 + x| \leq |x + \frac{3}{4}|\right\} = \left[\frac{-3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

5.4. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - x^2| \leq |x - \frac{3}{4}|\right\} = \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right]$

5.5. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |3x + 4| > |x^2 + 3x|\right\} = \left]-3 - \sqrt{5}, -2\right[\cup \left]-3 + \sqrt{5}, 2\right[$

5.6. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |4 - 3x| > |3x - x^2|\right\} = \left]-2, 3 - \sqrt{5}\right[\cup \left]2, 3 + \sqrt{5}\right[$

5.7. $\left\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 5x| \leq |5x - 8|\right\} = [-2, 1] \cup [2, 4]$

5.8. $\left\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 + 5x| \leq |5x + 8|\right\} = [-4, -2] \cup [-1, 2]$

5.9. $\left\{x \in \mathbb{R} : |2x - x^2| < |1 - 2x|\right\} = \left]-1, 2 - \sqrt{3}\right[\cup \left]1, 2 + \sqrt{3}\right[$

5.10. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x| < |2x + 1|\right\} = \left]-2 - \sqrt{3}, -1\right[\cup \left]-2 + \sqrt{3}, 1\right[$

5.11. $\left\{x \in \mathbb{R} : |5x + 4| > |4x^2 + 5x|\right\} =]-2, -1[\cup \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$

5.12. $\left\{x \in \mathbb{R} : |5x - 4| > |4x^2 - 5x|\right\} = \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup]1, 2[$

5.13. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x| \geq |2x - x^2|\right\} = \left[-\sqrt{3}, 1\right] \cup \left[\sqrt{3}, 3\right]$

5.14. $\left\{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| \geq |x^2 + 2x|\right\} = \left[-3, -\sqrt{3}\right] \cup \left[-1, \sqrt{3}\right]$

5.15. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 3x| \leq |3x + 5|\right\} = \left[-5, -\sqrt{5}\right] \cup \left[-1, \sqrt{5}\right]$

5.16. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3x| \leq |3x - 5|\right\} = \left[-\sqrt{5}, 1\right] \cup \left[\sqrt{5}, 5\right]$

5.17. $\left\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 + 3x| < |3x + 4|\right\} = \left]-2, -\sqrt{2}\right[\cup \left]-1, \sqrt{2}\right[$

5.18. $\left\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 3x| < |3x - 4|\right\} = \left]-\sqrt{2}, 1\right[\cup \left]\sqrt{2}, 2\right[$

5.19. $\left\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 + x| > |2x + 1|\right\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

5.20. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x - 2x^2| \geq |1 - 2x|\right\} =]-\infty, -1] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1, +\infty[$

5.21. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + x| \leq |3x + 1|\right\} = [-1, 1]$

5.22. $\left\{x \in \mathbb{R} : |x - 3x^2| < |1 - 3x|\right\} = \left]-1, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, 1\right[$

5.23. $\left\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + 4x| \geq |3x + 2|\right\} =]-\infty, -2] \cup \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$

5.24. $\left\{x \in \mathbb{R} : |4x - 3x^2| > |2 - 3x|\right\} = \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, 1\right[\cup]2, +\infty[$

5.25. $\left\{x \in \mathbb{R} : 3|x + 1| \leq 2|x^2 + 2x|\right\} =]-\infty, -3] \cup \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$

5.26. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 3|1-x| < 2|2x-x^2|\right\} =]-\infty, -1[\cup \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\cup]3, +\infty[$

5.27. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 8|x^2+x| \geq 3|2x+1|\right\} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

5.28. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 8|x^2-x| > 3|1-2x|\right\} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

5.29. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 3|x+6| \leq |x^2+4x|\right\} = \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{73}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{73}}{2}, +\infty\right[$

5.30. $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 3|6-x| < |4x-x^2|\right\} = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{73}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{73}}{2}, +\infty\right[$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2ª Ficha de Exercícios

I. Indução Matemática

1. Demonstre por indução as relações seguintes (entre parentesis, cada relação é escrita usando o símbolo de somatório, cf. exercícios do grupo II).

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$)

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$)

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$)

(d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$)

(e) $0^3 + 1^3 + \cdots + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
($\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 < n^4/4 < \sum_{k=1}^{n} k^3$)

(f) $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.
$\left(\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k} > \sqrt{n} \right)$

2. Seja $P(n)$ a proposição: $n^2 + 3n + 1$ é par para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se $P(k)$ é verdadeira para um dado $k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Critique a afirmação: “Por indução fica provado que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$”.

(c) Prove que $n^2 + 3n + 1$ é ímpar para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $P(n)$ a proposição: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = (2n+1)^2/8$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se $P(k)$ é verdadeira para um dado $k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Critique a afirmação: "Por indução fica provado que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$".

(c) Modifique $P(n)$, mudando a igualdade para uma desigualdade que seja verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre a **desigualdade de Bernoulli**, i.e. $(1+x)^n \geq 1+nx$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$.

II. Símbolo de Somatório

Dado $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, o símbolo de somatório $\sum_{k=1}^{n} a_k$ define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \quad \text{se } n = 1\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \quad \text{se } n > 1\,.$$

Resolva os exercícios seguintes com base nesta definição.

1. Determine os valores numéricos das seguintes somas:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8}(2i-3)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(k-4)^2$ (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} j(j+1)(j+2)$ (d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} 6$

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} j^{2j}$ (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}(-1)^k(2k-3)$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n(n+1)}$

2. Demonstre as seguintes propriedades do somatório:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescópica).

3. Utilizando os resultados do Exercício I.1 e as propriedades anteriores do somatório, calcule:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{18}(k+1)$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(2k-1)^2$; (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}(k-3)^3$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$; (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(3^k-3^{k+2}\right)$.

4. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

(a) usando indução.

(b) observando que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e usando as propriedades do Exercício 2.

5. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $a, b \in \mathbb{R}$ é válida a igualdade

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} \ .$$

6. Mostre que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

(a) usando indução.

(b) aplicando as propriedades do Exercício 2 a $(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k$.

A que é igual a soma quando $r = 1$?
Nota: por definição, $r^0 = 1$.

7. O símbolo $n!$, designado por n-**factorial**, define-se por recorrência da seguinte forma:

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n \cdot (n-1)!\,, \ \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}\,.$$

Observe que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Dados inteiros $0 \leq k \leq n$, o **coeficiente binomial** $\binom{n}{k}$ (às vezes também representado por C_k^n) é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

(a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\,.$$

Esta última fórmula é a chamada **lei do triângulo de Pascal**, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

(b) Prove por indução a **fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,, \ \text{para quaisquer } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,, \ \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

8. Usando a desigualdade triangular ($|x+y| \leq |x| + |y|$) e o método de indução, mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ é válida a desigualdade

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,.$$

III. Indução e Somatórios Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(3k+2) = (n-1)n(n+2)$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^{k-1} = n2^n$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k+5) = n(n+1)(n+3)$

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)3^k = n3^{n+1}$

14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)3^{k-1} = n3^n$

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$

17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$

18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+2)2^k = (n^2+1)2^{n+1} - 2$

19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+2)2^{k-1} = (n^2+1)2^n - 1$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n}$

21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-3)^2}{2^k} = 3 - \frac{(n-1)^2+2}{2^n}$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!}$

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-3)3^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{3^n}{n!}$

IV. Funções Elementares

1) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, assinalando de forma conveniente os seus três pontos de intersecção.

2) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$, assinalando de forma conveniente os seus dois pontos de intersecção.

3) Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$. Prove cada uma das seguintes proposições.

(a) Se $n \geq 1$ e $f(0) = 0$, então $f(x) = xg(x)$ com g um polinómio de grau $n - 1$.

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, a função p dada por $p(x) = f(x + a)$ é também um polinómio de grau n.

(c) Se $n \geq 1$ e $f(a) = 0$ para um dado $a \in \mathbb{R}$, então $f(x) = (x - a)h(x)$ com h um polinómio de grau $n - 1$. [Sugestão: considere $p(x) = f(x + a)$.]

(d) Se $f(x) = 0$ para $(n + 1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $c_k = 0\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $f(x) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) Seja $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}$, com $m \geq n$. Se $g(x) = f(x)$ para $(m + 1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $m = n$, $b_k = c_k\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $g(x) = f(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas.

(a) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$ (c) $p(0) = p(1) = 1$
(b) $p(0) = p(1) = 1\,,\ p(2) = 2$ (d) $p(0) = p(1)$

5) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1 - x)$ (b) $p(x) = p(1 + x)$

(c) $p(2x) = 2p(x)$ (d) $p(3x) = p(x + 3)$

6) Considere as seguintes propriedades fundamentais das funções **seno**, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno**, cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. $\cos(0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi) = -1$.
2. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\ .$$
3. Para $0 < x < \pi/2$ tem-se que
$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}\ .$$

Prove a partir delas as seguintes propriedades importantes das funções seno e coseno. [Sugestão: Apostol, Vol. I, §2.5.]

(a) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\operatorname{sen}(0) = \cos(\pi/2) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$.

(c) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(-x) = \cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno é uma função ímpar e o coseno uma função par).

(d) $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos(x)$ e $\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen}(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno e o coseno são funções periódicas).

(f) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\ , \\ \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)\ . \end{aligned}$$

(g) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ , \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\ . \end{aligned}$$

(h) No intervalo $[0, \pi/2]$, o seno é estritamente crescente e o coseno é estritamente decrescente.

7) Com base nas propriedades das funções seno e coseno listadas no exercício anterior, mostre que:

(a) $\operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \pi/2$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x + \pi) = -\cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ e $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(f) $2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(g) $2\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(h) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\cos(x + h/2)\ , \\ \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= -\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\operatorname{sen}(x + h/2)\ . \end{aligned}$$

8) Considere as funções **seno hiperbólico**, senh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno hiperbólico**, cosh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ .$$

Mostre que:

(a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\operatorname{senh}(0) = 0$ e $\cosh(0) = 1$.

(c) $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$ e $\cosh(-x) = \cosh(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)\ , \\ \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)\ . \end{aligned}$$

(e) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$ e $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(f) $\cosh(x) + \operatorname{senh}(x) = e^x$ e $\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) = e^{-x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

9) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $f(x) = \tan\dfrac{x}{2} - \cot\dfrac{x}{2}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ (d) $f(x) = \log(\log x)$

(e) $f(x) = \log\left(1 + x^{3/2}\right)$ (f) $f(x) = \log\left(1 - x^{2/3}\right)$

(g) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$

V. Limites Elementares

1) Calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2) Usando o caso notável

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1\ ,$$

mostre que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}=2$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} x}=5$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{x}=2$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}=\cos a$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen} x}=2$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

3) Calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\tan t)}{\operatorname{sen}(t)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}(\cos x)}{\cos x}$ (c) $\displaystyle\lim_{t\to \pi}\frac{\operatorname{sen}(t-\pi)}{t-\pi}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$

4) Seja $D=[0,+\infty[\setminus\{1\}$ e $f:D\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$. Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)\qquad \text{e}\qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)\ .$$

5) Calcule os limites quando $x\to 0^+$, $x\to 0^-$, $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$ das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(a) $e^{1/x}$ (b) $\operatorname{senh}(1/x)$ (c) $\cosh(1/x)$

(d) e^{1/x^2} (e) $\operatorname{senh}(1/x^2)$ (f) $\cosh(1/x^2)$

6) Calcule os limites quando $x \to 0$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$ (b) $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $\cos\left(\dfrac{2x+\pi}{x^2+1}\right)$

(d) $\cos\left(\dfrac{2x-\pi}{x^2+1}\right)$ (e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-\pi}{x^2+2}\right)$ (f) $\cos\left(\dfrac{x+\pi}{x^2+2}\right)$

(g) $\cos\left(\dfrac{x+\pi}{x^2+2}\right)$ (h) $\cos\left(\dfrac{x-\pi}{x^2+2}\right)$ (i) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+\pi}{x^2+4}\right)$

(j) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-\pi}{x^2+4}\right)$ (k) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2x-1}\right)$ (l) $\cos\left(\dfrac{\pi x}{x+1}\right)$

(m) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$ (n) $\cos\left(\dfrac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$

7) Calcule os limites quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $\log\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$ (b) $\log\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$ (c) $\log\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$

(d) $\log\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$ (e) $\log\left(\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}\right)$ (f) $\log\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x}\right)$

(g) $\log\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ (h) $\log\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ (i) $\log\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$

(j) $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

8) Calcule os limites quando $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ (b) $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ (c) $e^{\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ (d) $e^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}$ (e) $e^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}$

(f) $e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ (g) $e^{\frac{1-x^2}{x}}$ (h) $e^{\frac{x^2}{1+x}}$ (i) $e^{\frac{x^2}{1+x^2}}$ (j) $e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

3ª Ficha de Exercícios

I. Continuidade de Funções.

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{x}} & , \ x > 0 \\ x(2-x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

2) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ (x+k)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) & , \ x > 1 \\ \\ 1 - x^2 & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto 1.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} & , \ x > 0 \\ \\ k(x+1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

6) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2(1+x)}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (x+1)^2 - k & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & , \ x > 0 \\ \\ 1 - x^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

8) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2 + x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k - x)(2 + x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

9) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} & , \ x > 1 \\ \\ (k - x)(1 + x) & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto um.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

10) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

11) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3\cos\left(\dfrac{\pi}{1+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (k-x)(x+1) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

12) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{k}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ \\ -x(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

13) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \ x > 0 \\ (k-x)(x+1) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

14) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{2}{2+x^2}\right) & , \ x > 0 \\ (k-x)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

15) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2+x}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (x-1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(c) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

16) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \\ g(x) &= x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(c) Mostre que são funções limitadas.

17) Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= \log\log(1+x) \\ g(x) &= \sqrt{x} \operatorname{sen}\frac{1}{x^2} \ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(c) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

II. Axioma de Supremo

1) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > s - \epsilon$.

2) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Seja ainda $m \in \mathbb{R}$ um majorante de A distinto de s. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $a < m - \epsilon$ para todo o $a \in A$.

3) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) Prove que se $\sup A < \inf B$ então A e B são disjuntos.

(b) Mostre por meio de exemplos que se $\sup A \geq \inf B$ então A e B podem ser ou não disjuntos.

4) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Considere o subconjunto $C \subset \mathbb{R}$ definido por

$$C = A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \, x = a + b \text{ com } a \in A\,, \ b \in B\}\,.$$

Mostre que:

(a) Se A e B têm supremo, então C também tem supremo e $\sup C = \sup A + \sup B$.

(b) Se A e B têm ínfimo, então C também tem ínfimo e $\inf C = \inf A + \inf B$.

5) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que

$$a \leq b\,, \text{ para quaisquer } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Mostre que existem o supremo de A e o ínfimo de B, e que $\sup A \leq \inf B$.

6) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que

$$\inf A < \sup B\,.$$

Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ com $a < b$.

7) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e limitados, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < 1$.

8) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e limitados, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < \varepsilon$.

9) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos não-vazios e limitados, tais que $\inf B - \sup A = 1$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $1 \leq b - a < 2$.

10) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos não-vazios e limitados, tais que $\sup A - \inf B = 1$. Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $0 < a - b \leq 1$.

11) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado e não-vazio, tal que $\sup A - \inf A = 2$. Mostre que existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $1 < a_2 - a_1 \leq 2$.

12) Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, tal que $|a_1 - a_2| < 1$ para quaisquer $a_1, a_2 \in A$. Mostre que A tem supremo.

13) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, não-vazios e majorados, tais que $\sup A \leq \sup B$. Mostre que o conjunto $C = A \cup B$ tem supremo e que $\sup C = \sup B$.

14) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que B é majorado e $A \subset B$. Mostre que A e B têm supremo e que $\sup A \leq \sup B$.

15) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, não-vazio e majorado, tal que $\sup A = 1$. Mostre que $A \cap [0, 1] \neq \emptyset$.

III. Propriedades Globais das Funções Contínuas

1) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0, 1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0, 1]$. Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [0, 1]$ com $f(c) = c$. [Sugestão: aplique o teorema de Bolzano a $g(x) = f(x) - x$.]

2) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), tal que $f(a) \leq a$ e $f(b) \geq b$. Prove que f tem um ponto fixo em $[a, b]$.

3) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(-1) = 0 = f(1)\,.$$

Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [-1, 1]$ com $f(c) = c$.

4) Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty\,.$$

Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in]-1, 1[$ com $f(c) = c$.

5) Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$ para todo o $x > b$. Mostre que f tem mínimo em $[0, +\infty[$.

6) Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(0) > f(x)$ para todo o $x > b$. Prove que f tem máximo em $[0, +\infty[$.

7) Dada uma função $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, considere a função f que é definida em $[-1, 1]$ por $f(x) = g(1 - x^2)$.

(a) Supondo que g é contínua em todo o seu domínio, mostre que f tem máximo e mínimo.

(b) Supondo apenas que g é contínua em $]0, +\infty[$, poderemos garantir a existência de máximo e mínimo de f? Justifique.

8) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

(a) Prove que f é limitada.

(b) Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

(c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique, justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2} .$$

9) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:

(a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.

(b) f tem mínimo em $\mathbb{R}$.

10) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta \,,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha, \beta[$.

11) Seja $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x \to 1^-} f(x) \,.$$

Prove que f tem máximo no intervalo $]-1, 1[$.

12) Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to 1^-} f(x)\,.$$

Prove que f tem mínimo no intervalo $]-1,1[$.

13) Sejam f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, e considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) < g(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) > g(x)\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = g(x)\}$. Prove que se A e B são não-vazios, então C também é não-vazio.

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $f(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$), tal que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to +\infty} f(x)\,.$$

Prove que f tem máximo.

15) Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,.$$

Prove que f tem máximo no intervalo $[0,+\infty[$.

IV. Cálculo de Derivadas de Funções.

1) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ (b) $f(x) = x^4 + \operatorname{sen}(x)$

(c) $f(x) = x^4 \operatorname{sen}(x)$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$

(g) $f(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$ (h) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen}(x)}{1+x^2}$

(i) $f(x) = \operatorname{senh}(x)\cosh(x)$

2) (a) A área de uma círculo de raio r é πr^2 e o seu perímetro é $2\pi r$. Mostre que a taxa de variação da área em relação ao raio é igual ao perímetro.

(b) O volume de uma esfera de raio r é $4\pi r^3/3$ e a área da sua superfície é $4\pi r^2$. Mostre que a taxa de variação do volume em relação ao raio é igual à área da superfície.

3) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (c) $f(x) = x^{3/2}$

(d) $f(x) = x^{-3/2}$ (e) $f(x) = x^{1/3} + x^{-1/4}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

4) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \tan(x) - x$ (b) $f(x) = x\tan(x)$ (c) $f(x) = \cot(x) + x$

(d) $f(x) = \dfrac{\cot(x)}{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\cot(x)}$ (f) $f(x) = \tan^2(x)$

5) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = x|x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = e^{-|x|} \ .$$

Para cada uma destas funções,

(a) mostre que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule a derivada;

(b) estude a diferenciabilidade no ponto 0.

6) Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \ . \end{cases}$$

7) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (b) $f(x) = \tan(x/2) - \cot(x/2)$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ (d) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2(x))\cos(\operatorname{sen}^2(x))$

(e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ (f) $f(x) = (2-x^2)\cos(x^2) + 2x\operatorname{sen}(x^3)$

(g) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (h) $f(x) = \cos(2x) - 2\operatorname{sen}(x)$

(i) $f(x) = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$ (j) $f(x) = \cos^2(\sqrt{x}) + \operatorname{sen}^2(1/x)$

(k) $f(x) = x(\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + \cos(1/x))$

8) Determine a derivada g' em termos de f' se:

(a) $g(x) = f(x^2)$ (b) $g(x) = f(\operatorname{sen}^2(x)) + f(\cos^2(x))$

(c) $g(x) = f[f(x)]$ (d) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$

9) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

10) Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\phi'(1)$ e $\phi''(e)$.

11) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \log(1+x^2)$ (b) $f(x) = x^2(1 + \log x)$

(c) $f(x) = \log(\log x)$ (d) $f(x) = \log(1+\sqrt{x})$

(e) $f(x) = \log(1 + \operatorname{sen}^2 x)$ (f) $f(x) = \log(1 + \cos^2 x)$

(g) $f(x) = e^{\log x}$ (h) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ (i) $f(x) = e^{1/x}$

(j) $f(x) = e^{1/\sqrt{x}}$ (k) $f(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}$ (l) $f(x) = e^{\cos^2 x}$

(m) $f(x) = x^2 e^x$ (n) $f(x) = xe^{x^2}$ (o) $f(x) = 2^{\log x}$

(p) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ (q) $f(x) = 2^{1/x}$ (r) $f(x) = 2^{1/\sqrt{x}}$

(s) $f(x) = 2^{\operatorname{sen}^2 x}$ (t) $f(x) = 2^{\cos^2 x}$ (u) $f(x) = x^2 2^x$

(v) $f(x) = x2^{x^2}$ (x) $f(x) = x^{\log x}$ (y) $f(x) = (\log x)^x$

(w) $f(x) = x^x$ (z) $f(x) = x^{1/x}$

4ª Ficha de Exercícios

I. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Extremos.

1) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cot x - 1}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x)\log(x)$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \log(x)\log(1-x)$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}(1/x)\log(x)$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}(1/x)e^x$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{1/4}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\left(\cos(1/x) - 1\right)$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$

2) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+}(\log x)^{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(e^x-1)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-e^x)^x$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)^x$ (e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2+x^3)^{1/\log x}$ (f) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3+x^2)^{1/\log x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^x$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1/x)^{\operatorname{sen} x}$ (k) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{sen}(1/x))^{1/x}$ (l) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\cos(1/x))^x$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ (n) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\cos(1/x))^{x^2}$ (o) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{sen}(1/x))^{1/x^2}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{1/\log x}$ (q) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{sen}(1/x))^{1/\log x}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{1/\log x}$

(s) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\log(\log x)}$ (t) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ (u) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)}-1$ (w) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\operatorname{sen} x}$ (x) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\tan x)^{\operatorname{sen} x}$

(y) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\log x}$ (z) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\log(1/x)]^x$

3) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero, $V_\varepsilon(0) =]-\varepsilon, +\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$, diferenciável em $V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo o $x \in V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$.

(a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é mínimo ou máximo. No caso de f ser diferenciável no ponto 0, qual será o valor de $f'(0)$?

(b) Mostre, por meio de um exemplo, que sem a hipótese de continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

4) Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca é zero no intervalo $[-1, 1]$. Explique porque é que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

5) Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas.

(a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem máximo no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

(b) A função f é limitada.

(c) A função f' tem infinitos zeros.

6) Use o Teorema de Lagrange para deduzir as seguintes desigualdades:

(a) $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x - y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$

(b) $ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y)$ se $0 < y \leq x$ e $n \in \mathbb{N}$.

7) Seja ϕ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $\phi(n) = (-1)^n n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Prove que não existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$.

8) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada crescente e tal que $f(0) = 0$. Mostre que a função definida por $g(x) = f(x)/x$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

9) Considere a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log \sqrt{1 - x^2} & ,\ x \in]-1, 0] \\ \\ x^2 e^{1-x^2} & ,\ x \in]0, +\infty[\ . \end{cases}$$

(a) Estude a função f quanto à continuidade.

(b) Determine $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(c) Defina a função f'.

(d) Determine os intervalos de monotonia de f e os pontos em que f tem um extremo local.

10) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + x^2)}{x} & ,\ x \neq 0 \\ \\ 0 & ,\ x = 0\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no ponto zero e calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.

(c) Diga, justificando, se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

11) Supondo que f é uma função de classe C^1 em $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad \text{para quaisquer } x, y \in [a,b]\,.$$

12) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ que satisfaz a desigualdade $f(x) \geq x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \alpha$.

13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

(a) Determine e classifique os extremos locais da função φ.

(b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty\ .$$

(a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \stackrel{\text{def}}{=} f(a)$ é o mínimo absoluto de f.

(b) Dado qualquer valor $b \in]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$ tem exactamente dois elementos.

15) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\phi(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $\lim_{x \to +\infty} \phi'(x)$. O que pode dizer sobre o seu valor?

16) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivada $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e limitada, e tal que $g(0) = 0$. Considere a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Mostre que h é uma função limitada em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e prolongável por continuidade ao ponto zero.

17) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

(a) Mostre que $\lim_{x\to+\infty}[f(x+2)-f(x)]=0$.

(b) Será que se pode garantir que $\lim_{x\to+\infty}[f(2x)-f(x)]=0$? Justifique.

18) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2}\,, & \text{se } x<0;\\[2ex] -\tan\left(\dfrac{x}{6+x^2}\right)\,, & \text{se } x\geq 0.\end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=-1/6$.

(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

(c) Prove que a equação $f'(x)=0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

19) Seja $\phi:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$\phi(2n)=-2n \quad \text{e} \quad \phi(2n-1)=2n-1\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que a equação $\phi(x)=0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

(b) Mostre que a equação $\phi'(x)=0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

20) (a) Seja $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty}g(x)=p\in\mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty}g'(x)$ existe, então é igual a zero.
Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange a intervalos da forma $[x,x+1]$.

(b) Seja $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável com assímptota à direita de equação $y=mx+p\,,\ m,p\in\mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ existe, então é igual a m.

II. Representação gráfica de funções.

1) Nas alíneas seguintes, cada função está definida em todos os pontos $x\in\mathbb{R}$ para os quais a fórmula dada para $f(x)$ faz sentido. Em cada caso, determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas de f, e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ (c) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ (e) $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$ (f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(g) $f(x) = xe^{1/x}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{1+\log x}$

2) Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, <u>contínua no ponto 0</u> e tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\,\log(x),\ x > 0\,.$$

(a) Calcule $f(0)$.

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x|e^{-x^2/2},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & ,\ x > 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{1-x} & ,\ x \le 0\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

5) Considere a função $f :]1, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x+1) - \log(x-1)\,,\ \forall\, x > 1\,.$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

6) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x}\,,\ \forall\, x \neq 0\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

III. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas.

1) Considere a função inversa da função seno hiperbólico, argsenh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que temos, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ \text{ e } \ \frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2) Considere a função inversa da função coseno hiperbólico, quando esta última é restrita ao intervalo $[0, +\infty[$, argcosh : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$. Mostre que

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\ ,\ \forall x \in [1, +\infty[\ ,$$

e que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x \in\ ]1, +\infty[\ .$$

3) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{2}$ (b) $f(x) = \operatorname{arcsen} e^x$

(c) $f(x) = \arccos \left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}} \right)$ (d) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = \operatorname{arcsen} \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ (f) $f(x) = \arctan \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right)$

(g) $f(x) = \log \left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right)$ (h) $f(x) = \log\left(1 - \arctan x\right)$

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & , \ x \geq 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x > 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

6) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x/2)$

(b) $f(x) = \arccos(1/x)$

(c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$

(e) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

(f) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(g) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(h) $f(x) = \log\left(\arccos\left(1/\sqrt{x}\right)\right)$

(i) $f(x) = e^{\arctan(x)}$

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & , \ x \leq 0 \\ \arctan(1/x) & , \ x > 0 \ , \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos.

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

(b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.

(c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

8) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2)}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \operatorname{sen}(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

9) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x^2} - 1)}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

10) Considere a função $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(\log(1+x^2))}{x}\,, & \text{se } x>0;\\[2ex] \operatorname{arcsen}(x)\,, & \text{se } -1\le x\le 0.\end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

11) Considere a função $f:]-\infty,2\pi[\,\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\log(1-\cos(x))\,, & \text{se } 0<x<2\pi;\\[2ex] \arctan(x^2)\,, & \text{se } x\le 0.\end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-\infty,2\pi[\setminus\{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=0$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

12) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+\operatorname{sen}^2(x))}{x}\,, & \text{se } x<0;\\[2ex] \arctan(x)\,, & \text{se } x\ge 0.\end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

13) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\operatorname{sen}(x^2)}-1}{x}\,, & \text{se } x>0;\\[2ex] \arctan(x)\,, & \text{se } x\le 0.\end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

14) Considere a função $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x/2), & \text{se } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-2, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

15) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\log(1 + x^2))}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \arctan(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

16) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \arctan(x/2), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

17) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + \operatorname{sen}^2(x))}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

18) Considere a função $f:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\operatorname{sen}(x^2)}-1}{x}\,, & \text{se } x>0;\\[2ex] \operatorname{arcsen}(x)\,, & \text{se } -1\le x\le 0.\end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

19) Considere a função $f:]-\infty,2]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(e^x-1)}{x}\,, & \text{se } x<0;\\[2ex] \operatorname{arcsen}(x/2)\,, & \text{se } 0\le x\le 2.\end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-\infty,2[\setminus\{0\}$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0)=1/2$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,f(0))$.

20) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arcsen}(2x)-2\operatorname{arcsen}(x)}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\operatorname{arcsen}(1/x)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arcsen}(1/x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan(x)}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan(x)\right)^{1/x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right)^{1/x}$

21) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + 2 \arctan \frac{1}{x}\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ .$$

Esboce o seu gráfico e indique o seu contradomínio.

22) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right) & , x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & , x = 0\ . \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

23) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, <u>contínua no ponto 0</u> e tal que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \neq 0\,.$$

(a) Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

24) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) & , \ x \geq 0 \\[2ex] x e^{1/x} & , \ x < 0\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

25) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right) & , x \geq 0 \\ x^2 e^x & , x < 0 \, . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

26) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\arctan(x) - x \, , \; \forall\, x \in \mathbb{R} \, .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

IV. Polinómio e Teorema de Taylor.

1) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\operatorname{sen} x}.$$

2) Determine o polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\cos x} \, .$$

3) Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x - 3)$.

$i)$ $x^2 - 4x - 9$ $\quad$ $ii)$ $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $iii)$ x^5

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ dado por:

$$i)\ p_{5,0}(x) = 1 + x^4\,; \qquad ii)\ p_{5,0}(x) = x^3 - x^5\,.$$

Em cada um dos casos, determine $f^{(k)}(0)$, para $k = 0, 1, \ldots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto zero.

5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 1$ dado por

$$p_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\,.$$

Determine $f^{(k)}(1)$, para $k = 0, 1, \ldots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto um.

6) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left|e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| < \frac{1}{6}\,,\ \forall x \in [0,1]\,.$$

7) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left|\operatorname{sen}(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| < 0.01\,,\ \forall x \in [0,1]\,.$$

8) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right| < 0.1\,,\ \forall x \in [0,2]\,.$$

9) Prove, usando o Teorema de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $(n+1)$-vezes diferenciável e

$$f^{(n+1)}(x) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

então f é um polinómio de grau menor ou igual a n.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

5ª Ficha de Exercícios

I. Definição de Integral e Critérios de Integrabilidade.

1) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $a < b < c < d$, e $f : [a, d] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, d]$. Prove que f é integrável em $[b, c]$.

2) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, $c \in [a, b]$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $g(x) = f(x)$, para $x \neq c$. Mostre que g é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$.

3) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções tais $f(x) = g(x)$ excepto possivelmente num número finito de pontos. Mostre que se f é integrável em $[a, b]$ então g também é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f = \int_a^b g$.

4) Chama-se **função seccionalmente contínua** a uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que é contínua excepto num número finito de pontos $\{c_1, \ldots, c_n\}$, incluindo possivelmente os extremos a e b, e em que todos os limites laterais $\lim_{x \to c_i^\pm} f$, $\lim_{x \to a^+} f$, $\lim_{x \to b^-} f$ existem e são finitos. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua então f é integrável em $[a, b]$.

5) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então f é identicamente nula.

6) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa (i.e. $f(x) \geq 0\,,\ \forall x \in [a, b]$). Mostre que se existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$ então $\int_a^b f > 0$.

7) Seja V o espaço vectorial das funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Dada uma função $f \in V$ considere a transformação linear $T_f : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_f(g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx\ ,\ g \in V\ .$$

Mostre que T_f é identicamente nula se e só se f o for.

8) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então existe pelo menos um ponto $c \in\,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

9) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que se $\int_a^b f = \int_a^b g$ então existe pelo menos um ponto $c \in\,]a, b[$ tal que $f(c) = g(c)$.

10) Considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que

$$\overline{\int_0^1} h = \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}\ .$$

O que pode dizer quanto à integrabilidade de h em $[0,1]$?

Sugestão: Poderá usar, sem demonstrar, o seguinte facto:

$$\sup_{[a,b]} h = b\,,\ \text{ para todo o intervalo } [a,b] \text{ contido em } [0,1].$$

11) Considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} -x\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que

$$\underline{\int_0^1} h = \int_0^1 (-x)\ dx = -\frac{1}{2}\ .$$

O que pode dizer quanto à integrabilidade de h em $[0,1]$?

Sugestão: Poderá usar, sem demonstrar, o seguinte facto:

$$\inf_{[a,b]} h = -b\,,\ \text{ para todo o intervalo } [a,b] \text{ contido em } [0,1].$$

12) Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt\ ,$$

onde f é uma função limitada e integrável no intervalo $[a,b]$. Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \le K|x - y|\ ,\ \forall x, y \in [a,b]\ .$$

13) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $m \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in [a,b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\mu\,,$$

para algum $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $m \le \mu \le M$.

14) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(\xi)\,,$$

para algum $\xi \in [a, b]$.

15) Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável então $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ também é integrável.

16) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que se f é integrável em $[a, x]$ para todo o $x \in [a, b[$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f\,.$$

II. Primitivas Imediatas.

As fórmulas para as derivadas de algumas funções bem nossas conhecidas, conduzem à seguinte tabela de primitivas imediatas:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} & \Rightarrow \displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall\alpha \neq -1 \\
\dfrac{d}{dx}(\log|x|) = \dfrac{1}{x} & \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|\,,\ \forall x \neq 0 \\
\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x & \Rightarrow \displaystyle\int e^x\,dx = e^x \\
\dfrac{d}{dx}(a^x) = (\log a)a^x & \Rightarrow \displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\
\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x & \Rightarrow \displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \\
\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x & \Rightarrow \displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \\
\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} & \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x \\
\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} & \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\cot x \\
\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x & \Rightarrow \displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x \\
\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x & \Rightarrow \displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x \\
\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x \\
\dfrac{d}{dx}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2} & \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \\
\dfrac{d}{dx}(\operatorname{argsenh} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsenh} x \\
\dfrac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{argcosh} x \\
\dfrac{d}{dx}(f+g) = \dfrac{df}{dx} + \dfrac{dg}{dx} & \Rightarrow \displaystyle\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx \\
\dfrac{d}{dx}(cf) = c\dfrac{df}{dx} & \Rightarrow \displaystyle\int cf\,dx = c\int f\,dx\,,\ \text{para qualquer } c \in \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $2x^5$	2) $x+\sqrt{x}$	3) $\sqrt{2x}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$
4) $\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}}{4}$	5) $\dfrac{x^2-2x+5}{\sqrt{x}}$	6) $\dfrac{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}$
7) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2$	8) $(x^2+1)^3$	9) $\dfrac{6}{\operatorname{sen}^2(x)}$
10) $\dfrac{5}{\cos^2(x)}$	11) $\tan^2(x)$	12) $\cot^2(x)$
13) $\dfrac{4}{1+x^2}$	14) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$	15) $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$
16) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	17) e^{x+3}	18) e^{x-1}
19) $3e^x+\sqrt{x}$	20) 2^x	21) $\dfrac{a^x}{b^x}$
22) $\dfrac{1}{3x}$	23) $\dfrac{3}{x}+\sqrt{x}$	24) $3\operatorname{sen}(x)$
25) $2\cos(x)$	26) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(x)}$	27) $2\operatorname{senh}(x)+3\cosh(x)$

II. Primitivas Quase-Imediatas.

A fórmula para a derivada da função composta

$$(F(u(x)))' = F'(u(x))\cdot u'(x)$$

diz-nos que

$$F(x)=\int f(x)\,dx \Rightarrow F(u(x))=\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula, combinada com a tabela anterior de primitivas imediatas, permite determinar uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$	2) $x\sqrt{x^2+1}$	3) $x\sqrt{1-x^2}$
4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	5) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	6) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
7) $\operatorname{sen}(2x)$	8) $\cos(3x)$	9) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$
10) $x\operatorname{sen}(x^2)$	11) $x\cos(x^2)$	12) $x\cos(x^2+1)$
13) $\dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	14) $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	15) $\dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}$
16) $x^2\cos(x^3-1)$	17) $x^2\operatorname{sen}(x^3+1)$	18) $x\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)$
19) $\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)$	20) $\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$	21) $\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)$
22) e^{5x}	23) $\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}$	24) xe^{x^2}
25) xe^{-x^2}	26) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	27) $\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
28) $e^xe^{e^x}$	29) $\dfrac{1}{3x-7}$	30) $\dfrac{1}{4-5x}$
31) $\dfrac{x}{1+x^2}$	32) $\dfrac{x}{x^2+4}$	33) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$
34) $\dfrac{e^x}{2+e^x}$	35) $\dfrac{e^{x+1}}{1+e^x}$	36) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
37) $e^x\operatorname{sen}(e^x)$	38) $e^{\operatorname{sen}^2(x)}\operatorname{sen}(2x)$	39) $\dfrac{\log x}{x}$
40) $\dfrac{\cos(\log x)}{x}$	41) $\dfrac{\log(\log x)}{x\log x}$	42) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$
43) $\tan(2x)$	44) $\cot(5x-7)$	45) $\dfrac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
46) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(3x)}$	47) $\dfrac{\tan x}{\cos^2(x)}$	48) $\tan^3(x)$
49) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	50) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$	51) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$
52) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$	53) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$	54) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$
55) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$	56) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$	57) $\operatorname{senh}(2x+1)\cosh(2x+1)$

III. Primitivação por Partes.

A fórmula para a derivada do produto de duas funções u e v,

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Leftrightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v\,,$$

dá origem à **fórmula de primitivação por partes**:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx\,.$$

Esta fórmula é particularmente útil quando a função que queremos primitivar pode ser expressa como o produto de uma função u, cuja derivada é mais simples do que u, com uma função v' com primitiva imediata ou quase-imediata v.
Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $x \operatorname{sen} x$	2) $x \cos x$	3) xe^x
4) $x \log x$	5) $(\log x)^2$	6) $x^2 \operatorname{sen} x$
7) $x^2 \cos x$	8) $x^2 e^x$	9) $x^2 \log(1+x)$
10) $\operatorname{sen}^2(x)$	11) $\cos^2(x)$	12) $\operatorname{sen}^3(x)$
13) $\cos^3(x) \operatorname{sen}^2(x)$	14) $x^3 e^{x^2}$	15) $e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$
16) $\cos(\log x)$	17) $\operatorname{arcsen} x$	18) $\arctan x$
19) $x \arctan x$	20) $\sqrt{x} \arctan(1/\sqrt{x})$	21) $\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x})$
22) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$	23) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$	24) $(\log x)^3$
25) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$	26) $\sqrt{x} \log x$	27) $x(\log x)^2$
28) $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$	29) $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}$	30) $\cos(x) \log(1+\cos x)$
31) $\operatorname{sen}(x) \log(1+\operatorname{sen} x)$	32) $\cosh(x) \cos(x)$	33) $x^2 \operatorname{senh} x$
34) $x^2 \cosh x$	35) $\operatorname{senh}^2(x)$	36) $\cosh^2(x)$

IV. Primitivação por Substituição.

A fórmula para a derivada da função composta, já referida nesta ficha, dá origem à **fórmula de primitivação por substituição**:

$$\int f(x)\, dx = \left(\int f(u(t)) u'(t)\, dt \right)_{t = u^{-1}(x)}\,.$$

O procedimento associado à utilização desta fórmula para determinar $\int f(x)\,dx$ pode ser resumido nos seguintes 3 passos:

(i) considerar a substituição $x = u(t)$ e $dx = u'(t)\,dt$ em $\int f(x)\,dx$;

(ii) encontrar $\int f(u(t))u'(t)\,dt$ como função elementar da variável t;

(iii) fazer a substituição inversa $t = u^{-1}(x)$ na função elementar obtida em (ii).

Usando a substituição indicada, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}\,,\ x = t^2$

2) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\,,\ x-1 = t^2$

3) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,,\ 1-x = t^2$

4) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{x+3}}\,,\ x+3 = t^2$

5) $\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,,\ x+2 = t^2$

6) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,,\ x+1 = t^2$

7) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}\,,\ 1+2x = t^2$

8) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}\,,\ x = t^3$

9) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,,\ x = t^6$

10) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}\,,\ t^2 = \dfrac{x}{x+2}$

11) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,,\ t^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$

12) $\dfrac{1}{1+e^x}\,,\ t = e^x$

13) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,,\ t^2 = 1+e^x$

14) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}\,,\ t = e^x$

15) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\,,\ t = e^{2x}$

16) $\dfrac{1}{x(1+\log^2(x))}\,,\ t = \log x$

17) $\dfrac{\log x}{x(\log(x)-1)^2}\,,\ t = \log x$

18) $\dfrac{1}{x\log x(1-\log x)}\,,\ t = \log x$

19) $\dfrac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

20) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

21) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{4+\cos^2(x)}\,,\ t = \cos x$

22) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\,,\ t = \cos x$

23) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

24) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x-\operatorname{sen}^2(x)}\,,\ t = \cos x$

25) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{(1-\operatorname{sen}x)\cos^2(x)}$, $t=\operatorname{sen}x$

26) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x(1+\cos^2(x))}$, $t=\cos x$

27) $\dfrac{1}{\cos x}$, $t=\operatorname{sen}(x)$

28) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}$, $t=\cos(x)$

29) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen}x)}$, $t=\operatorname{sen}(x)$

30) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}x(1+\cos x)}$, $t=\cos(x)$

31) $\dfrac{1}{\cosh x}$, $t=\operatorname{senh}(x)$

32) $\dfrac{1}{\operatorname{senh}x}$, $t=\cosh(x)$

33) $\dfrac{1}{2+\tan x}$, $t=\tan x$

34) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$, $t=\tan x$

35) $\sqrt{1+x^2}$, $x=\tan t$

36) $\sqrt{1+x^2}$, $x=\operatorname{senh}t$

37) $\sqrt{x^2-1}$, $x=\dfrac{1}{\cos t}$

38) $\sqrt{x^2-1}$, $x=\cosh t$

39) $\sqrt{1-x^2}$, $x=\operatorname{sen}t$

40) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x=\operatorname{sen}t$

41) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $t^2=1-x^2$

42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $t^2=1+x^2$

43) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x=\tan t$

44) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$, $x=\operatorname{senh}t$

45) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $t^2=x^2-1$

46) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x=\dfrac{1}{\cos t}$

47) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x=\cosh t$

48) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x=\operatorname{sen}^2(t)$

6ª Ficha de Exercícios

I. Primitivas de Funções Racionais.

É possivel primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função $f = p/q$ com p e q polinómios, em termos de funções elementares (cf. Spivak). Ilustramos aqui esse facto quando p é um polinómio de grau ≤ 2 e q é um polinómio do terceiro grau da forma $q(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza deste polinómio denominador.

Caso 1. O polinómio denominador q tem 3 raizes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,, \ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| + C\log|x-\gamma|\,.$$

Caso 2. O polinómio denominador q tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \ \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

Caso 3. O polinómio denominador q tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)^3\,, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$

Caso 4. O polinómio denominador q tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)((x-a)^2+b^2)\,,\ \text{com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}\,,\ b \neq 0.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,,\ \text{com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente.

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$	2) $\dfrac{1}{x^2-1}$	3) $\dfrac{x^4}{1-x}$
4) $\dfrac{x}{x^2-25}$	5) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$	6) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$
7) $\dfrac{x+4}{x^2+1}$	8) $\dfrac{2x}{(x^2-1)(x+1)}$	9) $\dfrac{6+x}{(4-x^2)(x+2)}$
10) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}$	11) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$	12) $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$
13) $\dfrac{3x-1}{(x^2-1)(x+1)}$	14) $\dfrac{x+10}{(x^2-4)(x+2)}$	15) $\dfrac{1+x^2}{x^3-2x^2+x}$
16) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$	17) $\dfrac{x^2-4x+6}{(x+2)(x-1)^2}$	18) $\dfrac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+1)}$
19) $\dfrac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}$	20) $\dfrac{1+x}{1-x^4}$	21) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$
22) $\dfrac{x-2}{(1+x^2)(x+3)}$	23) $\dfrac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}$	24) $\dfrac{x^2+x-1}{(1+x^2)(x+3)}$
25) $\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x^2-2x+2)}$	26) $\dfrac{x^2-x}{(x-2)(x^2-2x+2)}$	27) $\dfrac{2x^2+4x+3}{(1+x)(x^2+2x+2)}$
28) $\dfrac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}$	29) $\dfrac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$	30) $\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$

II. Exercícios Complementares.

Usando qualquer um dos métodos de primitivação indicados anteriormente, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $e^{x-1}(1+e^x)$ 2) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

4) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ 5) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ 6) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ 8) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ 9) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

10) $\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ 11) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ 12) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

13) $\dfrac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}$ 14) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ 15) $\dfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}$

16) $\log(\cos x)\tan x$ 17) $\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}$ 18) $\dfrac{\tan x}{\cos^3(x)}$

19) $x\tan^2(x)$ 20) $\dfrac{1}{\cos^3(x)}$ 21) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}$

22) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$ 23) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 24) $x\arctan(1+x)$

25) $x^2\arctan x$ 26) $\dfrac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}$ 27) $\arctan(\sqrt{x})$

28) $\log(\sqrt{1+x^2})$ 29) $x\log(\sqrt{1+x^2})$ 30) $\log(a^2+x^2)$

31) $\operatorname{arcsen}(1/x)$ 32) $x\operatorname{arcsen}(1/x)$ 33) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$

34) $e^{\sqrt{x}}$ 35) $\log(x+\sqrt{x})$ 36) $(\operatorname{arcsen} x)^2$

37) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$ 38) $e^x\log(1+e^{2x})$ 39) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$

40) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ 41) $\dfrac{1}{x^4+1}$ 42) $\sqrt{\tan x}$

43) $\dfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}$ 44) $\dfrac{3x}{(x^2+x+1)^3}$ 45) $\dfrac{1}{x^6+1}$

46) $e^{x-1}(1+e^x)$ 47) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$ 48) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

49) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ 50) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ 51) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$

52) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$	53) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$	54) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
55) $\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$	56) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$	57) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$
58) $\dfrac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}$	59) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$	60) $\dfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}$
61) $\log(\cos x)\tan x$	62) $\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}$	63) $\dfrac{\tan x}{\cos^3(x)}$
64) $x\tan^2(x)$	65) $\dfrac{1}{\cos^3(x)}$	66) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}$
67) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$	68) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$	69) $x\arctan(1+x)$
70) $x^2\arctan x$	71) $\dfrac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}$	72) $\arctan(\sqrt{x})$
73) $\log(\sqrt{1+x^2})$	74) $x\log(\sqrt{1+x^2})$	75) $\log(a^2+x^2)$
76) $\operatorname{arcsen}(1/x)$	77) $x\operatorname{arcsen}(1/x)$	78) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$
79) $e^{\sqrt{x}}$	80) $\log(x+\sqrt{x})$	81) $(\operatorname{arcsen} x)^2$
82) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$	83) $e^x\log(1+e^{2x})$	84) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$
85) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$	86) $\dfrac{1}{x^4+1}$	87) $\sqrt{\tan x}$
88) $\dfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}$	89) $\dfrac{3x}{(x^2+x+1)^3}$	90) $\dfrac{1}{x^6+1}$
91) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$	92) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x}$	93) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

III. Integral Indefinido e Teorema Fundamental do Cálculo.

1) Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que se $\int_c^d f = \int_c^d g$ para quaisquer $c, d \in [a,b]$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

2) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-1, 1]$, contínua em $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e com limites laterais finitos em $x = 0$:

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f(x)\,.$$

Mostre que a função $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\, dt$$

é diferenciável em $x = 0$ e que $\varphi'(0) = f(0^-) + f(0^+)$.

Sugestão: para calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x}$ deverá usar primeiro a regra de Cauchy e analisar em seguida os casos $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$ separadamente.

3) Considere a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida pela identidade:

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} \cdot e^{\frac{t^2+1}{t}}\, dt\,.$$

(a) Mostre que $F(1/x) = -F(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_{0}^{x} x f(t)\, dt\,.$$

Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

5) Sendo F a função definida em $\mathbb{R}$ pela seguinte expressão, calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$(a)\ F(x) = \int_{x}^{0} \operatorname{sen}^2 t\, dt \quad (b)\ F(x) = \int_{x}^{x^2} \log(1 + t^2)\, dt \quad (c)\ F(x) = \int_{0}^{x} \frac{e^{x+t}}{t^2 + 1}\, dt$$

6) Mostre que os valores das seguintes expressões não dependem de x.

$$(a)\ \int_{0}^{x} \frac{1}{1 + t^2}\, dt + \int_{0}^{1/x} \frac{1}{1 + t^2}\, dt \quad (b)\ \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt\,,\ x \in [0, \pi/2]$$

7) Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela fórmula

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt\,.$$

Mostre que

$$\int_0^1 F(x)\, dx = F(1) + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}\,.$$

8) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é ímpar (i.e. $f(x) = -f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\int_{-x}^x f(t)\, dt = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

9) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é par (i.e. $f(x) = f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\int_{-x}^x f(t)\, dt = 2\int_0^x f(t)\, dt,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

10) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par, tal que

$$\log(1 + f(x)) = \int_0^{x^2} \frac{e^t}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt\,.$$

11) Determine a única função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não identicamente nula, que satisfaz a equação

$$\int_0^x f^3(t)\, dt = \left(\int_0^x f(t)\, dt\right)^2\,.$$

12) Determine a única função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par e não identicamente nula, que satisfaz a equação

$$f^2(x) = \int_0^{x^2} f(\sqrt{t})\, dt\,.$$

13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) < 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\, dt\,,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) < 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\ dt\,,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

15) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{t}{1+t^2}\ dt\,.$$

16) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ dt\,.$$

17) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{\operatorname{sen} t}{2-\cos t}\ dt\,.$$

18) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,\frac{\cos t}{2+\operatorname{sen} t}\ dt\,.$$

19) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ímpar e não identicamente nula, tal que

$$(f(x))^3 = \int_{-x}^x f^2(t)\cos(t)\ dt\,.$$

20) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ímpar e não identicamente nula, tal que

$$(f(x))^3 = \int_{-x}^x \frac{f^2(t)}{1+t^2}\ dt\,.$$

21) Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \int_x^1 t^4 f(t)\ dt + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + k\,.$$

22) Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \int_x^1 t^2 f(t)\ dt + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + k\,.$$

23) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\cos(f(x)) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(f(\sqrt{t}))\cos(t)\ dt\,.$$

24) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{sen}(f(x)) = \int_0^{x^2} \cos(f(\sqrt{t}))\operatorname{sen}(t)\ dt\,.$$

25) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, tal que

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{t}{f(t)\sqrt{1+t^2}}\ dt\,.$$

26) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, tal que

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{t}{f(t)\,(1+t^2)}\ dt\ .$$

IV. Regra de Barrow e Cálculo de Áreas.

1) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = e^x\,, \quad y = 1 - x \quad \text{e} \quad x = 1\,.$$

2) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = e^{-x}\,, \quad y = 1 + x \quad \text{e} \quad x = -1\,.$$

3) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = xe^{x-1}\,, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad x = 0\,.$$

4) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = (1-x)e^{-x}\,, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad x = 1\,.$$

5) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \log x\,, \quad y = 1 - x \quad \text{e} \quad y = 1\,.$$

6) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \log(1+x)\,, \quad y = -\log(1+x) \quad \text{e} \quad x = e - 1\,.$$

7) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \log(2+x)\,, \quad y = -\log(2+x) \quad \text{e} \quad x = e - 2\,.$$

8) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4} \quad \text{e} \quad y = \cos x\,.$$

9) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = x^2\,, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad y = x\,.$$

10) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = e^x\,, \quad y = e^{-x} \quad \text{e} \quad x = 2\,.$$

11) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \log(1+x^2) \quad \text{e} \quad y = \log(2)\,.$$

12) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq x \operatorname{sen} x\,.$$

13) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq x \cos x\,.$$

14) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$1 \leq x \leq e \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1 + \log^2(x))}\,.$$

15) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$1 \leq x \leq \sqrt{e} \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1 - \log^2(x)}}\,.$$

16) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

17) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}}\,.$$

18) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x + 2}}\,.$$

19) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{(x + 3)\sqrt{x + 2}}\,.$$

20) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{(x + 2)\sqrt{x + 1}}\,.$$

21) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{1+e^x}\,.$$

22) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$0 \leq x \leq \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{3-e^x}\,.$$

7ª Ficha de Exercícios

I. Sucessões.

1) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$a)\ x_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$ $\qquad b)\ x_n = \dfrac{2n+3}{3n+(-1)^n}$ $\qquad c)\ x_n = n - \dfrac{n^2}{n+2}$

$d)\ x_n = \dfrac{n+\cos(n)}{2n-1}$ $\qquad e)\ x_n = \dfrac{n^2-2}{5n^2}$ $\qquad f)\ x_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

$g)\ x_n = \sqrt{n} - \dfrac{n}{\sqrt{n}+2}$ $\qquad h)\ x_n = \dfrac{\sqrt{n^4-1}}{n^2+3}$ $\qquad i)\ x_n = (-1)^n \dfrac{n}{1+n^2}$

$j)\ x_n = \dfrac{n^2-1}{\sqrt{3n^4+3}}$ $\qquad k)\ x_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$ $\qquad l)\ x_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$

$m)\ x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad n)\ x_n = \sqrt{n(n+1)} - n$ $\qquad o)\ x_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$

$p)\ x_n = \dfrac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$ $\qquad q)\ x_n = na^n\,,\ \text{com } |a|<1$ $\qquad r)\ x_n = \dfrac{2^{2n}+6n}{3^n-4^{n+2}}$

$s)\ x_n = \dfrac{2^{2n}-3^n}{2^n-3^{2n}}$ $\qquad t)\ x_n = \dfrac{(3^n)^2}{1+7^n}$

2) Sendo (u_n) e (v_n) sucessões de termos positivos tais que

$$1 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,,$$

prove que (u_n) converge sse (v_n) converge. Mostre também que, quando existem, os seus limites são iguais.

3) Prove que se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0$.

4) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3/2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

5) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

6) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

7) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{3 + x_n^2}{2}} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

8) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

9) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

10) Considere as expressões

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Verifique que definem, por recorrência, uma sucessão (x_n), i.e. verifique que $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, por forma a que a segunda expressão faça sentido.

(b) Prove que $x_n \geq 2$ e $x_{n+1} \leq x_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.

(c) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

11) Mostre que as expressões

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+2x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}$$

definem por recorrência uma sucessão (x_n) que é convergente. Calcule o seu limite.

12) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$a)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+7} \qquad b)\ x_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n} \qquad c)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$d)\ x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} \qquad e)\ x_n = \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3} \qquad f)\ x_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{1-n}$$

$$g)\ x_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{n/2} \qquad h)\ x_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1} \qquad i)\ x_n = \left(\frac{2n}{n+1}-1\right)^{n}$$

13) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$$a)\ x_n = \sqrt[n]{n} \qquad b)\ x_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \qquad c)\ x_n = \sqrt[n]{n^2+n}$$

$$d)\ x_n = \sqrt[n]{2^n+1} \qquad e)\ x_n = \sqrt[n]{2^n+n^2} \qquad f)\ x_n = \sqrt[n]{3^n+2^{2n}}$$

$$g)\ x_n = \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}} \qquad h)\ x_n = \left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad i)\ x_n = \left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

II. Séries Numéricas.

1) Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}} = 3 \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9$$

$$d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3}$$

2) Determine a natureza das seguintes séries.

a) $\sum \dfrac{n-2}{3n+1}$ *b)* $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ *c)* $\sum \dfrac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ *d)* $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

e) $\sum \dfrac{n+1}{n^3+1}$ *f)* $\sum \dfrac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}}$ *g)* $\sum \dfrac{n!}{(n+2)!}$ *h)* $\sum \dfrac{n^2}{n^3+1}$

i) $\sum \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ *j)* $\sum \dfrac{5^n}{4^n+1}$ *k)* $\sum \dfrac{2^n}{3^n+1}$ *l)* $\sum \dfrac{2^{2n}}{3^n+1}$

3) Determine a natureza das seguintes séries.

a) $\sum \dfrac{n^{1000}}{(1,001)^n}$ *b)* $\sum \dfrac{2^n n}{e^n}$ *c)* $\sum \dfrac{n^3}{3^n}$ *d)* $\sum \dfrac{n^2}{n!}$

e) $\sum \dfrac{(1000)^n}{n!}$ *f)* $\sum \dfrac{n!}{(2n)!}$ *g)* $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ *h)* $\sum \dfrac{n!}{n^n}$

i) $\sum \dfrac{2^n n!}{n^n}$ *j)* $\sum \dfrac{3^n n!}{n^n}$

4) Determine a natureza das seguintes séries.

a) $\sum \dfrac{\log n}{n}$ *b)* $\sum \dfrac{1}{\log n}$ *c)* $\sum \dfrac{1}{n \log n}$ *d)* $\sum \dfrac{1}{n(\log n)^2}$

e) $\sum \dfrac{1}{n^2 \log n}$ *f)* $\sum \dfrac{1}{(\log n)^n}$ *g)* $\sum \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *h)* $\sum \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

5) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim n\, a_n = +\infty$. Mostre que a série $\sum a_n$ é divergente.

6) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim n^2 a_n = 0$. Mostre que a série $\sum a_n$ é convergente.

7) Determine se são absolutamente covergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries.

a) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ *b)* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *c)* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n^2-1}$ *e)* $\sum (-3)^{-n}$ *f)* $\sum (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

g) $\sum (-1)^n \dfrac{\log n}{n}$ *h)* $\sum (-1)^n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *i)* $\sum (-1)^n \dfrac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$

8) Mostre que se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n^2$ também converge. Dê um exemplo em que $\sum a_n^2$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge.

III. Séries de Potências.

1) Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

a) $\sum \frac{x^n}{2^n}$ *b)* $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ *c)* $\sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$

d) $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$ *e)* $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n$ *f)* $\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

g) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$ *h)* $\sum \frac{2n}{n^2+1}(x+1)^n$ *i)* $\sum \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+1}$

j) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(1-x)^n$ *k)* $\sum \frac{(5x+1)^n}{n^2+1}$ *l)* $\sum \frac{(1-3x)^{2n}}{4^n(n+1)}$

m) $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$ *n)* $\sum \frac{n!}{n^n}x^n$ *o)* $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

2) Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo a que a série

$$\sum \frac{a^{n+1}}{n+1}x^n$$

seja convergente no ponto $x = -3$ e divergente no ponto $x = 3$.

3) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

4) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 0$.

5) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

IV. Séries de Taylor.

1) Desenvolva a função $\log x$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

2) Desenvolva a função $x \log x$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

3) Desenvolva a função $\log(x^2 + 2x + 2)$ em série de potências de $(x+1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

4) Desenvolva a função $1/x$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

5) Desenvolva a função $1/x^2$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

6) Desenvolva a função $1/(x+2)$ em série de potências de $(x+1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

7) Desenvolva a função $1/(x+2)$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

8) Desenvolva a função $1/(x+1)$ em série de potências de $(x-2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

9) Desenvolva a função $1/x$ em série de potências de $(x-2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

10) Desenvolva a função $1/x^2$ em série de potências de $(x-2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

11) Desenvolva a função $\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

12) Desenvolva a função $\int_0^x \cos(t^2)\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

13) Desenvolva a função $\int_0^x e^{t^2}\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

14) Desenvolva a função

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} \log(1+t^2)\, dt$$

em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função? A função φ tem um extremo no ponto zero? Justifique com base na série que obteve para φ.