CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

7. SÉRIES DE FOURIER

1 Definição e Convergência de Séries de Fourier

Fixando $l \in \mathbb{R}$, dada uma função $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ definimos, quando os integrais existam,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} \quad (\text{para } n = 0, 1, 2, \cdots)$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} \quad (\text{para } n = 1, 2, \cdots)$$

e formamos a *série de Fourier* para f em $[-l, l]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

Teorema
Se f e f' são seccionalmente contínuas em $]-l, l[$, então a série de Fourier converge para $f(x)$ em cada ponto x onde f é contínua.

A série de Fourier converge para:

$f(x)$, se f é contínua em x e $x \in]-l, l[$;

$\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, se f é descontínua em x e $x \in]-l, l[$;

$\dfrac{f(l^-) + f(-l^+)}{2}$, se $x = \pm l$.

Ou seja, (certos) f são dados por uma soma de senos e cosenos.

Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Neste caso, $l = 1$, e assim

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{1} \mathrm{dx} = 1$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{1} \cos(n\pi x)\,\mathrm{dx} = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi} = 0$$

(para $n \geq 1$)

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x)\,\mathrm{dx} = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

(para $n \geq 1$)

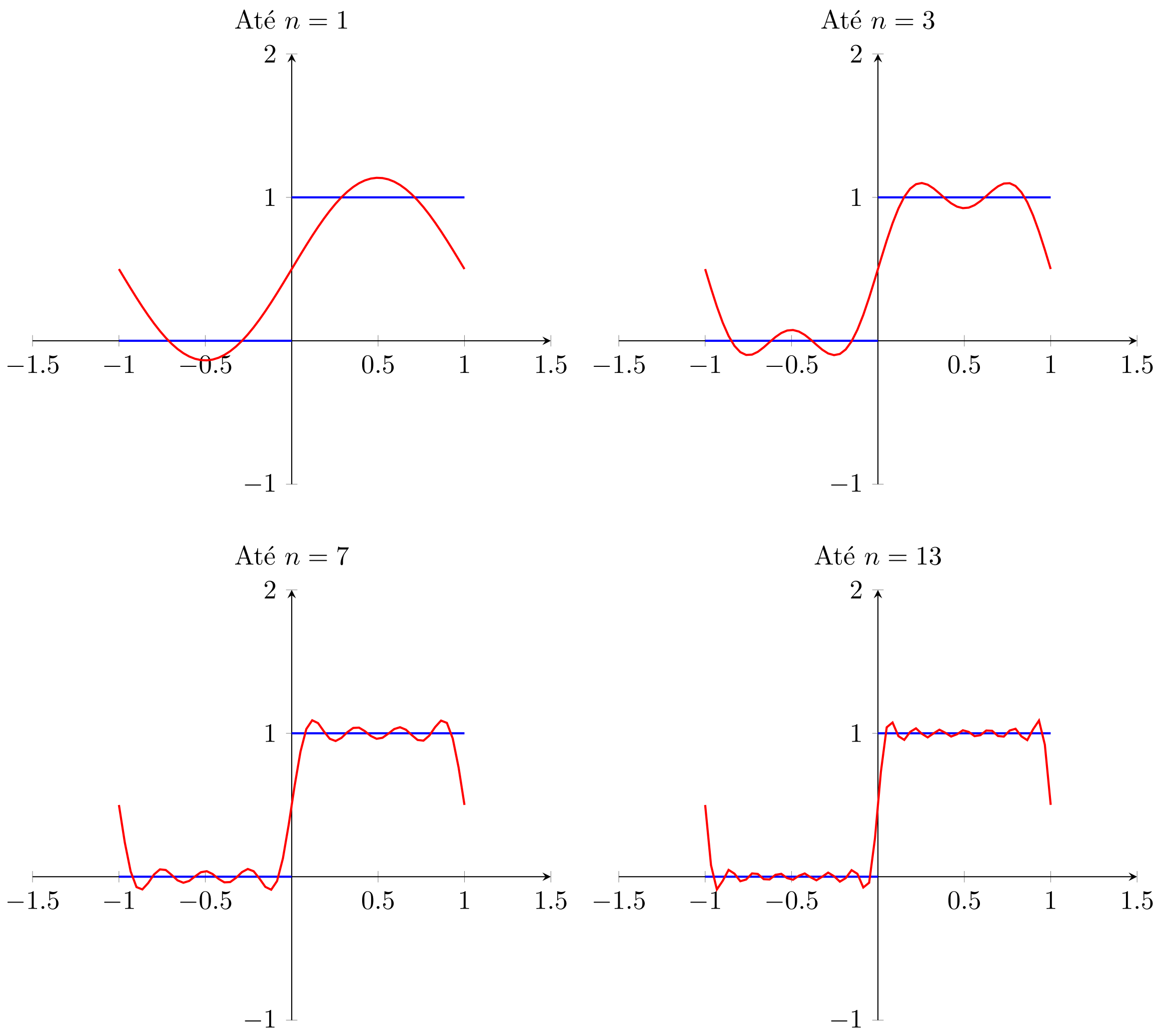
A série fica:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Donde, para $x \in]-1, 1[$ e $x \neq 0$, temos:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) = f(x)$$

A convergência para a função original (em alguns pontos) pode ser intuida se se desenhar os gráficos de várias aproximações para a soma da série. Nos exemplos seguintes mostram-se aproximações cada vez melhores para a função f, a azul.



Pode também confirmar-se visualmente que, para $x = -1, 0$ ou 1, a série converge para $1/2$ (que não é o valor de f nesses pontos.)

Por exemplo, para $x = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = *$$

Os coeficientes só são não nulos se $n = 2k + 1$, para $k = 0, 1, \cdots$, e portanto

$$* = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \operatorname{sen}\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2}\Big)$$

Como $\operatorname{sen}\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2}\Big) = \operatorname{sen}\Big(k\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = (-1)^k$, ficamos com

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Ou seja, as séries de Fourier permitem deduzir somas de algumas séries numéricas que, de outro modo, poderiam não ser facilmente calculadas.

Para $x = 0$, a série anterior converge para $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$. Note-se que, para $x = 0$, a série é $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} 0$, o que confirma o resultado.

Para $x = \pm 1$, a série converge para $\frac{f(-1^+) + f(1^-)}{2} = \frac{1}{2}$. Para $x = \pm 1$, a série é $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi) = \frac{1}{2}$, o que confirma também o resultado.

<u>Exemplo</u>:

$f(x) = x, \quad x \in [-1, 1]$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} x \, \mathrm{dx} = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} x \cos(n\pi x) \, \mathrm{dx} = x \, \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} \, \mathrm{dx} = \frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{(-1)^n - (-1)^n}{(n\pi)^2} = 0$$

(para n ≥ 1)

$$b_n = \int_{-1}^{1} x \operatorname{sen}(n\pi x) \, \mathrm{dx} = -x \, \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \, \mathrm{dx} = -\frac{1}{n\pi}[(-1)^n + (-1)^n] + \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi}$$

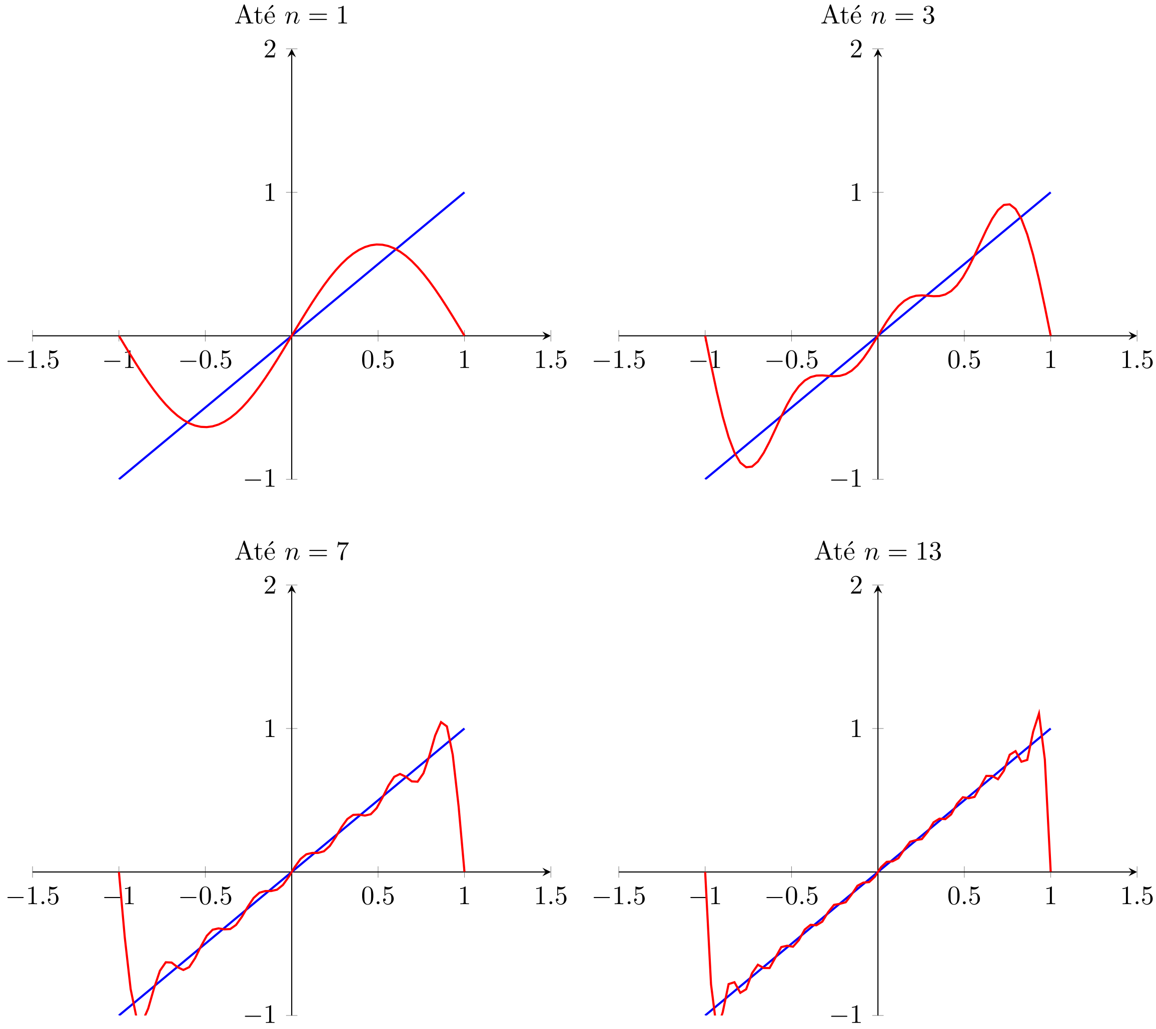
(para n ≥ 1)

Logo, para $x \in]-1, 1[$, temos:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

(A série converge para $\dfrac{f(-1^+) + f(1^-)}{2} = 0$ em $x = \pm 1$.)

Nos exemplos seguintes mostram-se aproximações cada vez melhores para a função f, a azul.



Em particular, temos:

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} (-1)^k.$$

Este é o desenvolvimento anterior.

2 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Em certos casos, como no exemplo anterior, a série de Fourier reduz-se a uma série só de cosenos ou só de senos.

Se f for ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$ para qualquer x), temos

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{dx} = 0$$

Como $\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ é uma função par (isto é, $f(-x) = f(x)$ para qualquer x) e o produto de uma função par por uma função ímpar resulta numa função ímpar, obtemos:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = 0 \quad (\text{para } n = 1, 2, \cdots)$$

Por outro lado, $\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ é uma função ímpar, e o produto de duas funções ímpares é uma função par, donde:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} \quad (\text{para } n = 1, 2, \cdots)$$

A série de Fourier para f reduz-se portanto a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

Por outro lado, se f for par, temos

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x)\,\mathrm{dx}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} \quad (\text{para } n = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = 0 \quad (\text{para } n = 1, 2, \cdots)$$

e a série fica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

Se quisermos desenvolver $f :]0, l[\to \mathbb{R}$ em série de Fourier, podemos considerar os seus prolongamentos par e ímpar.

Para obtermos uma série de senos, fazemos o seu prolongamento ímpar:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]0, l[\\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & x \in]-l, 0[\end{cases}$$

Com $\widetilde{f}(l) = \widetilde{f}(-l) = 0$, obtemos a série de senos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

onde:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \widetilde{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} \widetilde{f}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx}$$

(para $n = 1, 2, \cdots$)

Note-se que estes coeficientes dependem apenas dos valores de f (no intervalo inicial $]0, l[$).

Para obtermos uma série de cosenos, fazemos o prolongamento par de f:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in]0, l[\\ 0, & x = 0 \\ f(-x), & x \in]-l, 0[\end{cases}$$

Com $\widetilde{f}(l) = \widetilde{f}(-l) = 0$, obtemos a série de cosenos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

onde:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \widetilde{f}(x) \,\mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \,\mathrm{dx}$$

e

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \widetilde{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx}$$

(para $n = 1, 2, \cdots$)

Estes coeficientes dependem também apenas dos valores de f no intervalo inicial.