Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo II

Licenciaturas em
Biologia, Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Civil, Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
2º Semestre 2008/2009

Ficha 10 – Cálculo Diferencial em IR^2 e IR^3

(Parte I - Derivadas Parciais, Vector Gradiente e Plano Tangente)

Parte I – Exercícios Propostos

Derivadas parciais usando as regras de derivação

I. 1 - Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y)=\frac{3}{4}xy-1$

b) $f(x,y,z)=5\,\text{sen}(2xy+z)+2x^2-3xy+6z^2$

c) $f(x,y,z)=xy+x^2z+e$

d) $f(x,y,z)=\pi+\frac{xy}{2z}$

e) $f(x,y)=2+\frac{x}{y}-4+\frac{y}{x}$

f) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}+\sqrt[3]{3}$

g) $f(x,y)=5e^{2xy}$

h) $f(x,y)=20+xe^{xy}$

Derivadas parciais pela definição

I.2 Considere a função definida por,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 \quad, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determine as derivadas parciais da função em $(0,0)$.

b) Prove que f não é contínua na origem.

Gradiente e Plano Tangente

I.3 Seja $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-2y+1$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

b) Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,0)$.

Parte II – Exercícios Resolvidos

Derivadas parciais usando as regras de derivação em IR^2 e IR^3

II.1 Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y) = xy$

Resolução:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial(xy)}{\partial x} \underset{\substack{\text{y é uma constante}\\\text{na derivação em}\\\text{ordem a x}}}{=} y\dfrac{\partial(x)}{\partial x} = y.1 = y$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial(xy)}{\partial y} \underset{\substack{\text{x é uma constante}\\\text{na derivação em}\\\text{ordem a y}}}{=} x\dfrac{\partial(y)}{\partial y} = x.1 = x$

b) $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xy + 6z^2$

Resolução:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial(2x^2 - 3xy + 6z^2)}{\partial x} = \dfrac{\partial(2x^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(-3xy)}{\partial x} + \dfrac{\partial(6z^2)}{\partial x} = \dfrac{2\partial(x^2)}{\partial x} - 3y\dfrac{\partial(x)}{\partial x} + 0 = 4x - 3y$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial(2x^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(-3xy)}{\partial y} + \dfrac{\partial(6z^2)}{\partial y} = 0 - 3x\dfrac{\partial(y)}{\partial y} + 0 = -3x$

- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial(2x^2)}{\partial z} + \dfrac{\partial(-3xy)}{\partial z} + \dfrac{\partial(6z^2)}{\partial z} = 0 + 0 + 6\dfrac{\partial(z^2)}{\partial z} = 6 \cdot 2z = 12z$

c) $f(x,y,z) = xy + x^2z$

Resolução:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial(xy + x^2z)}{\partial x} \underset{\text{derivada da soma}}{=} \dfrac{\partial(xy)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x^2z)}{\partial x} = y + 2xz$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial(xy + x^2z)}{\partial y} \underset{\text{derivada da soma}}{=} \dfrac{\partial(xy)}{\partial y} + \dfrac{\partial(x^2z)}{\partial y} = x + 0 = x$

- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial(xy + x^2z)}{\partial z} \underset{\text{derivada da soma}}{=} \dfrac{\partial(xy)}{\partial z} + \dfrac{\partial(x^2z)}{\partial z} = 0 + x^2 = x^2$

d) $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$

Resolução:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial\left(\frac{xy}{z}\right)}{\partial x} = \dfrac{y}{z}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial\left(\frac{xy}{z}\right)}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial\left(\frac{xy}{z}\right)}{\partial z} = xy\dfrac{\partial(z^{-1})}{\partial z} = xy(-1)z^{-2} = -\dfrac{xy}{z^2}$

e) $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

Resolução:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}=\frac{1}{y}+y\frac{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x}=\frac{1}{y}+y\frac{\partial\left(x^{-1}\right)}{\partial x}=\frac{1}{y}+y(-1)x^{-1-1}=\frac{1}{y}-yx^{-2}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}=x\frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial y}+\frac{1}{x}=x\frac{\partial\left(y^{-1}\right)}{\partial y}+\frac{1}{x}=x(-1)y^{-1-1}+\frac{1}{x}=-xy^{-2}+\frac{1}{x}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}$

f) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

Resolução:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}{\partial x}=\frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial x}(x+y)-(x-y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x}}{(x+y)^2}=\frac{1(x+y)-(x-y)1}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial y}(x+y)-(x-y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y}}{(x+y)^2}=\frac{-1(x+y)-(x-y)1}{(x+y)^2}=\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}=\frac{-2x}{(x+y)^2}$

g) $f(x,y)=e^{xy}$

Resolução:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(e^{xy}\right)}{\partial x}=\frac{\partial(xy)}{\partial x}e^{xy}=ye^{xy}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(e^{xy}\right)}{\partial y}=\frac{\partial(xy)}{\partial y}e^{xy}=xe^{xy}$

h) $f(x,y)=xe^{xy}$

Resolução:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(xe^{xy}\right)}{\partial x}\underset{\text{derivada do produto}}{=}\frac{\partial(x)}{\partial x}e^{xy}+x\frac{\partial\left(e^{xy}\right)}{\partial x}=1e^{xy}+x\frac{\partial(xy)}{\partial x}e^{xy}=e^{xy}+xye^{xy}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(xe^{xy}\right)}{\partial y}\underset{\text{derivada do produto}}{=}\frac{\partial(x)}{\partial y}e^{xy}+x\frac{\partial\left(e^{xy}\right)}{\partial y}=0\cdot e^{xy}+x\frac{\partial(xy)}{\partial y}e^{xy}=x^2e^{xy}$

ER II.2 – Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y)=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$

Resolução:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(x\sqrt{y}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\partial x}=\sqrt{y}+y\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\partial x}=\sqrt{y}+y\frac{\partial\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)}{\partial x}=\sqrt{y}+y\frac{\partial\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)}{\partial x}$

  $=\sqrt{y}+y\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}=\sqrt{y}-\frac{1}{3}yx^{-\frac{4}{3}}=\sqrt{y}-\frac{1}{3}y\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}=\sqrt{y}-\frac{1}{3}y\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\sqrt{y}-\frac{1}{3}y\frac{1}{\sqrt[3]{x^3\cdot x}}=\sqrt{y}-\frac{y}{3x\sqrt[3]{x}}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x\sqrt{y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\partial y}=x\frac{\partial\left(\sqrt{y}\right)}{\partial y}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x\frac{\frac{\partial y}{\partial y}}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

Resolução:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\left(\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right)}{\partial x}=\frac{\frac{\partial\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}{\partial x}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial x}(x+y)-(x-y)\frac{\partial(x+y)}{\partial x}}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\frac{1(x+y)-(x-y)1}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}}$$
$$=\frac{\frac{2y}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{2y(x+y)}{(x+y)^2(x-y)}=\frac{2y}{(x+y)(x-y)}=\frac{2y}{x^2-y^2}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\left(\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right)}{\partial y}=\frac{\frac{\partial\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}{\partial y}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\frac{\frac{\partial(x-y)}{\partial y}(x+y)-(x-y)\frac{\partial(x+y)}{\partial y}}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\frac{-1(x+y)-(x-y)1}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}}$$
$$=\frac{\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{\frac{-2x}{(x+y)^2}}{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{-2x(x+y)}{(x+y)^2(x-y)}=\frac{-2x}{(x+y)(x-y)}=\frac{-2x}{x^2-y^2}$$

c) $f(x,y,z,v)=\cos\left(x^2y+z^2v^2\right)$

Resolução:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,v)=\frac{\partial\left(\cos\left(x^2y+z^2v^2\right)\right)}{\partial x}=-\frac{\partial\left(x^2y+z^2v^2\right)}{\partial x}\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)=-2xy\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,v)=\frac{\partial\left(\cos\left(x^2y+z^2v^2\right)\right)}{\partial y}=-\frac{\partial\left(x^2y+z^2v^2\right)}{\partial y}\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)=-x^2\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)$$

- $$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,v)=\frac{\partial\left(\cos\left(x^2y+z^2v^2\right)\right)}{\partial z}=-\frac{\partial\left(x^2y+z^2v^2\right)}{\partial z}\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)=-2zv^2\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)$$

- $$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y,z,v)=\frac{\partial\left(\cos\left(x^2y+z^2v^2\right)\right)}{\partial v}=-\frac{\partial\left(x^2y+z^2v^2\right)}{\partial v}\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)=-2vz^2\operatorname{sen}\left(x^2y+z^2v^2\right)$$

II.3 – Considere a função definida por,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Verifique que a função:

a) Tem derivadas parciais em $(0,0)$

Resolução:

Notemos que a função não pode ser definida em $(0,0)$ e em pontos próximos de $(0,0)$ por uma única expressão. Temos então necessidade de recorrer à definição de derivada parcial.

Deste modo, temos:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0\cdot k}{0^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=\lim_{k\to 0}0=0$$

b) Não é contínua nesse ponto.

Resolução:

Para provar que a função $f(x,y)$ não é contínua no ponto $(0,0)$ tem de se verificar uma das seguintes condições:

i) não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ou

ii) se existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$.

Temos, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0\cdot 0}{0^2+0^2}=\dfrac{0}{0}$ (indeterminação).

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y=x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{xx}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Assim, se o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existir tem que ser $\dfrac{1}{2}$, devido a unicidade do limite.

Como $f(0,0)=0\neq\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, podemos concluir que f não verifica a condição ii), logo não é contínua no ponto $(0,0)$.

II.4 – Considere a função:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2+3x^3}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais de f na origem.

Resolução:

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h\cdot 0^2+3h^3}{h^2+0^2}-0}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3h^3}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^2}\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^2h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^3}=\lim_{h\to 0}3=3$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0k^2+3\cdot 0^3}{0^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=\lim_{k\to 0}0=0$$

Logo, existem todas as derivadas parciais no ponto $(0,0)$.

II.5 – Considere a função:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Mostre que não existe a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{7h\cdot 0^2+2h^2|h|}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^2|h|}{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2|h|}{h}$$

Calculemos os limites laterais no ponto h=0:

- $\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0^+}2=2$
- $\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-2)=-2$

Como os limites laterais no ponto h=0 são diferentes, então não existe a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Gradiente e Plano Tangente

II.6 – Seja $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+x^2y-\frac{3y^2}{2}-9x+1$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

Resolução:

$$\text{grad } f(x,y)=\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$
$$=\left(\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+x^2y-\frac{3y^2}{2}-9x+1\right)}{\partial x},\frac{\partial\left(\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+x^2y-\frac{3y^2}{2}-9x+1\right)}{\partial y}\right)$$
$$=\left(x^2+y^2+2xy-9,\, y^2+2xy+x^2-3y\right),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

b) Obtenha a equação do plano tangente a f no ponto $(0,1)$.

Resolução:

A equação do plano tangente à função no ponto $(0,1)$ é dada por:

$$z = f(0,1) + \nabla f(0,1)\cdot(x-0, y-1)$$

Substituindo na função $f(x,y)$ a variável x por 0 e a variável y por 1, vem

$$f(0,1) = \frac{0^3}{3} + \frac{1^3}{3} + 0\cdot 1^2 + 0^2\cdot 1 - \frac{3\cdot 1^2}{2} - 9\cdot 0 + 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{6}.$$

Na alínea anterior viu-se que,

$$\nabla f(x,y) = \left(x^2 + y^2 + 2xy - 9, y^2 + 2xy + x^2 - 3y\right), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então,

$$\nabla f(0,1) = \left(0^2 + 1^2 + 2\cdot 0\cdot 1 - 9, 1^2 + 2\cdot 0\cdot 1 + 0^2 - 3\cdot 1\right) = (-8,-2)$$

Assim,

$$z = f(0,1) + \nabla f(0,1)\cdot(x-0, y-1) \Leftrightarrow z = -\frac{1}{6} + (-8,-2)\cdot(x, y-1)$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{6} - 8x + (-2)\cdot(y-1) \Leftrightarrow z = -\frac{1}{6} - 8x - 2y + 2 \Leftrightarrow z = \frac{11}{6} - 8x - 2y$$

Parte III – Exercícios de Auto-Avaliação

III.1 - Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

a) $f(x,y,z)=\dfrac{xy+x^2z}{x+yz^2}$

b) $f(x,y,z)=\text{arc sen}\left(\dfrac{xy}{z}\right)$

c) $f(x,y,z,v)=\dfrac{1}{2}\text{tg}^2\left(x^2y^2+z^2v^2-xyzv\right)$

d) $f(x,y,z,v)=\ln\left(\cos\left(x^2y+z^2v^2\right)\right)$

III.2 Calcule o gradiente das seguintes funções nos pontos onde estiver definido:

a) $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2\right)+z$

b) $f(x,y,z)=e^{-x}\left(x^2+y^2+z^2\right)$

c) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{z}{x^2+y^2}$

III.3 – Determine as equações dos planos tangentes aos gráficos das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $P=(1,1)$

b) $f(x,y,z)=z-e^x\text{sen}\, y$, $P=\left(\ln 3,\dfrac{3\pi}{2},-3\right)$

III.4 – Seja $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x-y+1$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

b) Obtenha a equação do plano tangente a f no ponto $(1,2)$.

III.5 – Seja $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{y^3}{3}-y^2+\dfrac{3}{2}$.

a) Determine o gradiente de $f(x,y)$.

b) Obtenha a equação do plano tangente a f no ponto $(1,-1)$.