EXERCÍCIO 1.— Sendo (u_n) e (v_n) sucessões de termos positivos tais que

$$1 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \frac{1}{n}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N},$$

prove que (u_n) converge sse (v_n) converge. Mostre também que, quando existem, os seus limites são iguais.

EXERCÍCIO 2.— Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{3 + x_n^2}{2}}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

2.1 Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

EXERCÍCIO 3.— Para que valores de $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ são convergentes as sucessões:

$$\text{(a) } \frac{2^n(n^2+2)}{|a|^n} \qquad \text{(b) } \frac{a^n}{2^{1+2n}} + \left(\frac{n!\,4^n}{n^n}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

EXERCÍCIO 4.— Determine, caso existam, os limites das seguintes sucessões:

$$(1)\ x_n := n - \frac{n^2}{n+2} \qquad (2)\ x_n := \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} \qquad (3)\ x_n = \sqrt{n(n+1)} - n$$

$$(4)\ x_n := na^n \text{ (com } |a| < 1) \qquad (5)\ x_n = \frac{2^{2n} + 6n}{3^n - 4^{n+2}} \qquad (6)\ x_n := \frac{(3^n)^2}{1 + 7^n}.$$

EXERCÍCIO 5.— Determine, caso existam, os limites das seguintes sucessões.

$$(1)\ x_n := \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \qquad (2)\ x_n := \frac{n!\,100^n}{n^n} \qquad (3)\ x_n := \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}}$$

$$(4)\ x_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad (5)\ x_n := \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3} \qquad (6)\ x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2.$$