Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

Soluções da 5^a Ficha de Exercícios

1.

(1) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$.

Tem-se $\frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge absolutamente e como se tem

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim \frac{\sqrt{n^4-n^3}}{n^2+2} = \lim \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1+\frac{2}{n^2}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ converge absolutamente.

(2) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1}$.

Tem-se $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n+1} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1+\frac{1}{n}} = 2 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(3) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3+3}$.

Tem-se $\frac{n^2}{n^3+3} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 3 - 2 = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{n^2}{n^3+3}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^3}{n^3+3} = \lim \frac{1}{1+\frac{3}{n^3}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3+3}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(4) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+3}$.

Tem-se $\frac{n}{n^3+3} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 3 - 1 = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge absolutamente e como se tem

$$\lim \frac{\frac{n}{n^3+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^3}{n^3+3} = \lim \frac{1}{1+\frac{3}{n^3}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+3}$ converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n}{n^3+3}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+3}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+3}$ converge absolutamente.

(5) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{1+\log n}$.

Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{2(-1)^{n+1}}{1+\log n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+\log n}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{2}{1+\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{2n}{1+\log n} = \lim \frac{2}{\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}} = +\infty,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+\log n}$ diverge, pelo Critério de Comparação. Atendendo a que $\frac{2}{1+\log n} \to 0$ e $\frac{2}{1+\log n}$ é decrescente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{1+\log n}$ converge, pelo Critério de Leibniz. Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{1+\log n}$ converge e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{2(-1)^{n+1}}{1+\log n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+\log n}$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{1+\log n}$ converge simplesmente.

(6) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3n+2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}$.

Tem-se $\dfrac{\sqrt[3]{3n+2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{6} > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ converge absolutamente e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt[3]{3n+2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} = \lim \frac{(n^7)^{\frac{1}{6}} \left[(3n+2)^2\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}} = \lim \frac{\left[n^7 (3n+2)^2\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt[6]{n^7 (3n+2)^2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}} = \lim \frac{\sqrt[6]{\left(3 + \dfrac{2}{n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}} = \sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3n+2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}$ converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{\sqrt[3]{3n+2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3n+2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3n+2}}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}$ converge absolutamente.

(7) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{5 + 2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{5 + 2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n \dfrac{5}{\sqrt{n}} + \dfrac{-2}{\sqrt{n}}\right)$.

Para $\alpha = \dfrac{1}{2} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge e então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{n}}$ também diverge.

Por outro lado, atendendo a que $\dfrac{5}{\sqrt{n}} \to 0$ e $\dfrac{5}{\sqrt{n}}$ é decrescente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{5}{\sqrt{n}}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{5 + 2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n \dfrac{5}{\sqrt{n}} + \dfrac{-2}{\sqrt{n}}\right)$ diverge por ser a série soma de uma série convergente com uma série divergente.

(8) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-2 + (-1)^n}{n^3}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-2 + (-1)^n}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{-2}{n^3} + \dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$.

Para $\alpha = 3 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ converge absolutamente e então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{-2}{n^3}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n^3}$ também converge. Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-2}{n^3}$ converge absolutamente.

Por outro lado, atendendo a que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}$ converge absolutamente.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{-2+(-1)^n}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{-2}{n^3}+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right)$ converge absolutamente por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes.

(9) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ diverge e então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}\right)$ também diverge.

Por outro lado, atendendo a que $\dfrac{1}{2n} \to 0$ e $\dfrac{1}{2n}$ é decrescente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)$ diverge por ser a série soma de uma série divergente com uma série convergente.

(10) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 2\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{2n}\right)$. Além disso, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ converge absolutamente e como se tem

$$\lim\frac{2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim\left[2\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}2\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ converge absolutamente.

(11) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+2^n}{n2^n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+2^n}{n2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n}\right)$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$. Como $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge absolutamente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+2^n}{n2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n}\right)$ diverge por ser a série soma de uma série convergente com uma série divergente.

(12) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^5$. Além disso, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1} \log\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^5\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^5.$$

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\log\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^5}{\frac{1}{n}} = \lim \left[n \log\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^5\right] = \lim \left[5 \log\left(1+\frac{\frac{1}{2-\frac{1}{n}}}{n}\right)^n\right] = 5 \log e^{1/2} = \frac{5}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^5$ diverge, pelo Critério de Comparação. Atendendo a que

$$\log\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^5 \to 0 \qquad \text{e} \qquad \log\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^5 \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^5$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^5$ converge e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1} \log\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^5\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^5$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^5$ converge simplesmente.

(13) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+1}$.

Tem-se $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+1} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \lim \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+1}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(14) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(-1)^n}{n!}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(-1)^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{n!}$. Além disso, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{\pi}{4} \frac{1}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{4} \frac{1}{n!}.$$

Para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \left(\frac{\pi}{4} \frac{n^2}{n!} \right) = 0,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{n!}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{n!} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{n!}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{n!}$ converge absolutamente.

(15) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\left((-1)^n\right)}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\left((-1)^n\right)}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\pi}{4} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Além disso, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \right) = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ também diverge, pelo Critério de Comparação. Atendendo a que

$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ converge simplesmente.

(16) Considere-se a série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{n}$.

Tem-se $\frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \pi \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{\frac{\pi}{n}} = \pi \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{n}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{n} \right| = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{n}$ converge absolutamente.

(17) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$.

Tem-se $\operatorname{tg} \frac{1}{n+1} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = 1 . \frac{1}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(18) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Tem-se $\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge absolutamente.

(19) Considere-se a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(-1)^n \log n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(-1)^n \log n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$. Além disso, tem-se

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\log n} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}.$$

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\log n} = +\infty,$$

então a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação. Atendendo a que

$$\frac{1}{\log n} \to 0 \quad \text{ e } \quad \frac{1}{\log n} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$ converge e a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\log n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\log n}$ diverge, então a série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$ converge simplesmente.

(20) Como $\log\frac{1}{n} \to -\infty \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\log\frac{1}{n}$ diverge.

(21) Considere-se a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+\operatorname{sen}^2 n}{\log n}$.

Tem-se $\frac{1}{\log n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim\frac{\frac{1}{\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim\frac{n}{\log n} = +\infty,$$

então a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\log n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Tem-se $\frac{1+\operatorname{sen}^2 n}{\log n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Por outro lado, tem-se

$$\frac{1}{\log n} \leq \frac{1+\operatorname{sen}^2 n}{\log n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Logo, como a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\log n}$ diverge, então a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1+\operatorname{sen}^2 n}{\log n}$ também diverge, pelo Critério Geral de Comparação.

(22) Considere-se a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\log^2 n}$.

Tem-se $\frac{1}{\log^2 n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim\frac{\frac{1}{\log^2 n}}{\frac{1}{n}} = \lim\frac{n}{\log^2 n} = +\infty,$$

então a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log^2 n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(23) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$.

Tem-se $\frac{\log n}{n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e, como se tem

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\log n}{n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$ também diverge, pelo Critério Geral de Comparação.

(24) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$.

Tem-se $\frac{\log n}{n^2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e, como se tem

$$\lim \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\log n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$ converge absolutamente.

(26) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-1/n}$.

Tem-se $n^{-1-1/n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{n^{-1-1/n}}{\frac{1}{n}} = \lim n^{-1/n} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1-1/n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(27) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+e^{-n}\right)$.

Tem-se $\log\left(1+e^{-n}\right) \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{e}$. Como $\left|\frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge absolutamente e como se tem

$$\lim \frac{\log\left(1+e^{-n}\right)}{\frac{1}{e^n}} = \lim \frac{\log\left(1+e^{-n}\right)}{e^{-n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+e^{-n}\right)$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\log\left(1+e^{-n}\right)\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+e^{-n}\right)$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+e^{-n}\right)$ converge absolutamente.

(28) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+\sqrt{n}}}$.

Tem-se $\sqrt{\frac{n+1}{n^3+\sqrt{n}}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n^3+\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt{\frac{n^3+n^2}{n^3+\sqrt{n}}} = \lim \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n^5}}}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+\sqrt{n}}}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(29) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n\log n}{2+\sqrt{n^5}\log n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{n\log n}{2+\sqrt{n^5}\log n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log n}{2+\sqrt{n^5}\log n}$.

Para $\alpha = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{n\log n}{2+\sqrt{n^5}\log n}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{\sqrt{n^5}\log n}{2+\sqrt{n^5}\log n} = \lim \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{n^5}\log n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\log n}{2+\sqrt{n^5}\log n}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{n \log n}{2+\sqrt{n^5}\log n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log n}{2+\sqrt{n^5}\log n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{2+\sqrt{n^5}\log n}$ converge absolutamente.

(30) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}+\cos n^3}{\sqrt{n^3}+2}$.

Tem-se

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}+\cos n^3}{\sqrt{n^3}+2} \right| = \frac{|(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}+\cos n^3|}{\sqrt{n^3}+2} \leq \frac{|(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}|+|\cos n^3|}{\sqrt{n^3}+2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{n}+|\cos n^3|}{\sqrt{n^3}+2} \leq \frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n^3}+2},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n^7}}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n^3}+2}}{\dfrac{1}{\sqrt[6]{n^7}}} = \lim \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt[6]{n^7}}{\sqrt{n^3}+2} = \lim \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n^3}+2}$ também converge, pelo Critério de Comparação. Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}+\cos n^3}{\sqrt{n^3}+2} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}+\cos n^3}{\sqrt{n^3}+2}$ converge absolutamente.

(31) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{n}+\operatorname{sen} n!}{\sqrt{n^3}+n}$.

Tem-se

$$\left| \frac{\sqrt[4]{n}+\operatorname{sen} n!}{\sqrt{n^3}+n} \right| = \frac{|\sqrt[4]{n}+\operatorname{sen} n!|}{\sqrt{n^3}+n} \leq \frac{\sqrt[4]{n}+|\operatorname{sen} n!|}{\sqrt{n^3}+n} \leq \frac{\sqrt[4]{n}+1}{\sqrt{n^3}+n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt[4]{n}+1}{\sqrt{n^3}+n}}{\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}} = \lim \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt[4]{n^5}}{\sqrt{n^3}+n} = \lim \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n}+1}{\sqrt{n^3}+n}$ também converge, pelo Critério de Comparação. Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \dfrac{\sqrt[4]{n}+\operatorname{sen} n!}{\sqrt{n^3}+n} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n}+\operatorname{sen} n!}{\sqrt{n^3}+n}$ converge absolutamente.

(32) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+\log n}}{\sqrt{n^3}+1}$.

Tem-se $\dfrac{\sqrt[3]{n^2+\log n}}{\sqrt{n^3}+1} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n^2+\log n}}{\sqrt{n^3}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}} = \lim \frac{\sqrt[6]{n^5}\sqrt[6]{\left(n^2+\log n\right)^2}}{\sqrt{n^3}+1} = \lim \frac{\sqrt[6]{n^5\left(n^2+\log n\right)^2}}{\sqrt{n^3}+1} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{\log n}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{\sqrt[3]{1+0}}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+\log n}}{\sqrt{n^3}+1}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(33) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt[3]{n^2\left(2+3n\right)}}{\sqrt{n^3}+\sqrt[3]{\left(n^2+1\right)n^3}}$.

Tem-se $\dfrac{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt[3]{n^2\left(2+3n\right)}}{\sqrt{n^3}+\sqrt[3]{\left(n^2+1\right)n^3}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n^2+\log n}}{\sqrt{n^3}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt[6]{n^5}}} = \lim \frac{\sqrt[6]{n^5}\sqrt[6]{\left(n^2+\log n\right)^2}}{\sqrt{n^3}+1} = \lim \frac{\sqrt[6]{n^5\left(n^2+\log n\right)^2}}{\sqrt{n^3}+1} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt[3]{1+\dfrac{\log n}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{\sqrt[3]{1+0}}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+\log n}}{\sqrt{n^3}+1}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(34) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\,(2n^2-1)\,n}{\left(n^2\sqrt{n}+1\right)^2+4}$.

Tem-se

$$\left|\frac{(-1)^n\,(2n^2-1)\,n}{\left(n^2\sqrt{n}+1\right)^2+4}\right| = \frac{(2n^2-1)\,n}{\left(n^2\sqrt{n}+1\right)^2+4} \leq \frac{(2n^2-1)\,n}{\left(n^2\sqrt{n}+1\right)^2} = \frac{2n^2-1}{n^3\left(\sqrt{n}+1\right)^2},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 4-2 = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{2n^2-1}{n^3\left(\sqrt{n}+1\right)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \frac{2n^4-n^2}{n^3\left(\sqrt{n}+1\right)^2} = \lim \frac{2-\dfrac{1}{n^2}}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{2-0}{(1+0)^2} = 2 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n^2-1}{n^3\left(\sqrt{n}+1\right)^2}$ também converge, pelo Critério de Comparação. Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{(-1)^n\,(2n^2-1)\,n}{\left(n^2\sqrt{n}+1\right)^2+4}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\,(2n^2-1)\,n}{\left(n^2\sqrt{n}+1\right)^2+4}$ converge absolutamente.

(35) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}{(5n+1)\sqrt{n}+2}$.

Tem-se $\dfrac{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}{(5n+1)\sqrt{n}+2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \dfrac{3}{2}-1 = \dfrac{1}{2} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}{(5n+1)\sqrt{n}+2}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{\left(\sqrt[4]{n}\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}\right)^2}{(5n+1)\sqrt{n}+2} = \lim \frac{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\left(5+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{2}{\sqrt{n^3}}} = \frac{(1+0)^2}{(5+0)+0} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}{(5n+1)\sqrt{n}+2}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(36) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3$.

Tem-se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^3}$ e $\dfrac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^3}\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Para $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim\frac{\dfrac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^3}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}}=\lim\frac{\sqrt{n^3}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^3}=\lim\frac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)^3}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)^3}=\frac{1}{8}\in\mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3\right|=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3$ converge, então a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3$ converge absolutamente.

(37) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}$.

Tem-se

$$\left|\frac{(-1)^n n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}\right|=\frac{n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n},$$

para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Para $\alpha=3-1=2>1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ converge e como se tem

$$\lim\frac{\dfrac{n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\frac{n^3}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}=\lim\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)\operatorname{arctg} n}=\frac{1}{(1+0)\,\dfrac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\in\mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{(-1)^n n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n}{(n^3+1)\operatorname{arctg} n}$ converge absolutamente.

(38) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)$.

Tem-se $\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Para $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim\frac{\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}}=\lim\left[\frac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]=1\,(1+0)=1\in\mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)$ converge, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^2}\right)(\sqrt{n}+1)$ converge absolutamente.

(39) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{1+2\sqrt{n^3}}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{1+2\sqrt{n^3}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{1+2\sqrt{(2n-1)^3}}$. Além disso, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{1+2\sqrt{(2n-1)^3}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+2\sqrt{(2n-1)^3}}.$$

Para $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim\frac{\dfrac{1}{1+2\sqrt{(2n-1)^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim\frac{\sqrt{n^3}}{1+2\sqrt{(2n-1)^3}} = \lim\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}+2\sqrt{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^3}} = \frac{1}{0+2\sqrt{(2-0)^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\in\mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+2\sqrt{(2n-1)^3}}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{1+2\sqrt{n^3}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+2\sqrt{(2n-1)^3}}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{1+2\sqrt{n^3}}$ converge absolutamente.

(40) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{[(-1)^n+10]^{2n}}$.

Tem-se

$$\left|\frac{1}{[(-1)^n+10]^{2n}}\right| = \frac{1}{[(-1)^n+10]^{2n}} \leq \left(\frac{1}{81}\right)^n,$$

para todo o $n\in\mathbb{N}$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{81}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{81}$. Como $\left|\dfrac{1}{81}\right| = \dfrac{1}{81} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{81}\right)^n$ converge absolutamente. Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{1}{[(-1)^n+10]^{2n}}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{[(-1)^n+10]^{2n}}$ converge absolutamente.

(41) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3+1000}{\log 2^n + n^4}$.

Tem-se $\dfrac{n^3+1000}{\log 2^n + n^4} = \dfrac{n^3+1000}{n\log 2 + n^4} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 4-3 = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{n^3+1000}{\log 2^n + n^4}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{n^4 + n1000}{n\log 2 + n^4} = \lim \frac{1+\dfrac{1000}{n^3}}{\dfrac{\log 2}{n^3}+1} = \frac{1+0}{0+1} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3+1000}{\log 2^n + n^4}$ diverge, pelo Critério de Comparação.

(42) Considere-se a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2n^2+3}}{\sqrt[3]{n-1}}$.

Como $\dfrac{\sqrt{n^3+2n^2+3}}{\sqrt[3]{n-1}} = \sqrt[6]{n^7}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}}} \to (+\infty)\dfrac{\sqrt{1+0+0}}{\sqrt[3]{1-0}} = +\infty \neq 0$, então a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2n^2+3}}{\sqrt[3]{n-1}}$ diverge.

(43) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$.

Tem-se

$$\left|(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right| = \operatorname{sen}\frac{1}{n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{n} \text{ é decrescente},$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$ converge e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$ converge simplesmente.

(44) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}$ e $\dfrac{1}{n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{\sqrt{n^3}}{n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)} = \lim \frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$ converge absolutamente.

(45) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^{n+1}}{\left(\sqrt{n}+1\right)n\,(-n)^n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^{n+1}}{\left(\sqrt{n}+1\right)n\,(-n)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$. Além disso, tem-se

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}+1},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \dfrac{1}{2} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = \lim \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}+1} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ converge e a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ converge simplesmente.

(46) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos\left[(n-1)\pi\right]}{1+2\sqrt{n}}$.

Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos\left[(n-1)\pi\right]}{1+2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}$. Além disso, tem-se

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}\right| = \frac{2}{1+2\sqrt{n}},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge e como se tem

$$\lim\frac{\frac{2}{1+2\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\frac{2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}} = \lim\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{n}}+1} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que

$$\frac{2}{1+2\sqrt{n}} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{1+2\sqrt{n}} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}$ converge e a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{1+2\sqrt{n}}$ converge simplesmente.

(47) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 n+\sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n+(n+1)^3}\operatorname{sen} n$.

Tem-se

$$\left|\frac{\cos^2 n+\sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n+(n+1)^3}\operatorname{sen} n\right| = \frac{\cos^2 n+\sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n+(n+1)^3}\left|\operatorname{sen} n\right| \leq \frac{1+\sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n+(n+1)^3} \leq \frac{1+\sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{1+\sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2 + \sqrt{n^5}e^n}{\sqrt{n^5}e^n} = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}e^n} + 1 \right) = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n}$ também converge, pelo Critério de Comparação. Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos^2 n + \sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n + (n+1)^3} \operatorname{sen} n \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n + \sqrt{n}e^n}{\sqrt{n^5}e^n + (n+1)^3} \operatorname{sen} n$ converge absolutamente.

(48) Considere-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt{1+n^2} - n\right)$.

Tem-se $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt{1+n^2} - n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$. Além disso, tem-se

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{1+n^2}+n} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$ converge e a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$ diverge, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}$ converge simplesmente.

(49) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{3^{-n}}{1-3^{-n}}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{3^{-n}}{1-3^{-n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{3^n - 1}$ e $\frac{1}{n} \frac{1}{3^n-1} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Atendendo a que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge por ser uma série geométrica de razão $\frac{1}{3}$ com $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ e uma vez que

$$\lim \frac{\frac{1}{n} \frac{1}{3^n - 1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim \left(\frac{1}{n} \frac{3^n}{3^n - 1}\right) = \lim \left(\frac{1}{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{3^n}}\right) = 0 \frac{1}{1-0} = 0,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{3^n - 1}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n} \frac{3^{-n}}{1-3^{-n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{3^{-n}}{1-3^{-n}}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{3^{-n}}{1-3^{-n}}$ converge absolutamente.

(50) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{2^n}{1-2^n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{2^n}{1-2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n} \frac{2^n}{2^n - 1}\right)$ e $\frac{1}{n} \frac{2^n}{2^n - 1} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{1}{n} \frac{2^n}{2^n - 1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim \frac{1}{1 - 2^{-n}} = \frac{1}{1-0} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{2^n}{2^n - 1}$ também diverge, pelo Critério de Comparação. Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1) \frac{1}{n} \frac{2^n}{2^n - 1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{2^n}{1-2^n}$ diverge.

(51) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \operatorname{arctg}(n!)}{n^2 + \log^2 n + 2}$.

Tem-se

$$0 \leq \frac{2 + \operatorname{arctg}(n!)}{n^2 + \log^2 n + 2} \leq \frac{2+2}{n^2 + \log^2 n + 2} \leq \frac{4}{n^2},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ também converge. Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \operatorname{arctg}(n!)}{n^2 + \log^2 n + 2}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{2+\operatorname{arctg}(n!)}{n^2+\log^2 n+2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2+\operatorname{arctg}(n!)}{n^2+\log^2 n+2}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2+\operatorname{arctg}(n!)}{n^2+\log^2 n+2}$ converge absolutamente.

(52) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}$. Além disso, tem-se

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}\right| = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)},$$

para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Para $\alpha=1\leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim\frac{\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}}{\dfrac{1}{n}} = \lim\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right] = \frac{1}{e}\frac{1}{1+0} = \frac{1}{e}\in\mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}\to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ converge e a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ converge simplesmente.

(53) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)}$. Além disso, tem-se $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right] = \frac{1}{e} \frac{1}{1+0} = \frac{1}{e} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(54) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$. Além disso, tem-se $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(55) Considere-se a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$.

Tem-se $\frac{1}{\sqrt{n}\log n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}\log n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\log n} = +\infty,$$

então a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(56) Considere-se a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$.

Tem-se $\frac{1}{n^2 \log n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{\log n} = 0,$$

então a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{1}{n^2 \log n} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ converge, então a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ converge absolutamente.

(57) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$.

Tem-se $\left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \frac{n}{n^2+1}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2}{n^2+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que

$$\frac{n}{n^2+1} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{n}{n^2+1} \text{ é decrescente},$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ converge e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ converge simplesmente.

(58) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\log n}$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\log n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{\log n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, por se tratar de uma série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ com $\alpha = 1 \leq 1$.

(59) Considere-se a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (\log n)^{-p}$, $(p \in \mathbb{R})$.
Seja $p \in \mathbb{R}$.
Tem-se $\dfrac{1}{\log^p n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.
Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\log^p n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\log^p n} = +\infty,$$

então a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\log^p n}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(60) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}}$.
Tem-se $\dfrac{1}{n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{\dfrac{1}{n}}{\operatorname{sen} \dfrac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 \operatorname{sen} \frac{1}{n}}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

(61) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^{n+3} + n!}{(n+2)! + n^{n+2} + 4^{n+1} + \log n}$.
Tem-se

$$\left| \frac{3^{n+3} + n!}{(n+2)! + n^{n+2} + 4^{n+1} + \log n} \right| = \frac{3^{n+3} + n!}{(n+2)! + n^{n+2} + 4^{n+1} + \log n} =$$

$$= \frac{3^{n+3}}{(n+2)! + n^{n+2} + 4^{n+1} + \log n} + \frac{n!}{(n+2)! + n^{n+2} + 4^{n+1} + \log n} \leq \frac{3^{n+3}}{4^{n+1}} + \frac{n!}{(n+2)!} =$$

$$= 3^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right),$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ é uma série de Mengoli do tipo $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n - x_{n+1})$, com $k=1$ e $x_n = \frac{1}{n+1}$. Atendendo a que $\lim x_n = 0 \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge. Como (x_n) converge, a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ converge absolutamente, uma vez que $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2} \geq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ é uma série geométrica de razão $\frac{3}{4}$. Como $\left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ converge absolutamente.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[3^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$ converge absolutamente, por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{3^{n+3}+n!}{(n+2)!+n^{n+2}+4^{n+1}+\log n}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n+3}+n!}{(n+2)!+n^{n+2}+4^{n+1}+\log n}$ converge absolutamente.

(62) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^3(n!n)+e^{-n}}{2n!n^2+\left(\sqrt[3]{n}+1\right)\sqrt{n}}$.

Tem-se

$$\left|\frac{\operatorname{sen}^3(n!n)+e^{-n}}{2n!n^2+\left(\sqrt[3]{n}+1\right)\sqrt{n}}\right| = \frac{\left|\operatorname{sen}^3(n!n)+e^{-n}\right|}{2n!n^2+\left(\sqrt[3]{n}+1\right)\sqrt{n}} \leq \frac{\left|\operatorname{sen}^3(n!n)\right|+e^{-n}}{2n!n^2+\left(\sqrt[3]{n}+1\right)\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \frac{1+1}{2n!n^2+\left(\sqrt[3]{n}+1\right)\sqrt{n}} \leq \frac{2}{2n^2} = \frac{1}{n^2},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}^3(n!n)+e^{-n}}{2n!n^2+\left(\sqrt[3]{n}+1\right)\sqrt{n}}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^3(n!n)+e^{-n}}{2n!n^2+\left(\sqrt[3]{n}+1\right)\sqrt{n}}$ converge absolutamente.

(63) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+(-n)^n}{n^{n+2}+n!n}$.

Tem-se

$$\left|\frac{2^n+(-n)^n}{n^{n+2}+n!n}\right| = \frac{\left|2^n+(-n)^n\right|}{n^{n+2}+n!n} \leq \frac{2^n+n^n}{n^{n+2}+n!n} \leq \frac{2^n+n^n}{n^{n+2}},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{2^n + n^n}{n^{n+2}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2 2^n + n^{n+2}}{n^{n+2}} = \lim \left(\frac{2^n}{n^n} + 1 \right) = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^n}{n^{n+2}}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{2^n + (-n)^n}{n^{n+2} + n!n} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + (-n)^n}{n^{n+2} + n!n}$ converge absolutamente.

(64) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n - (-3)^n}{3^n (n+1)}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n - (-3)^n}{3^n (n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n + (-1)^{n+1} 3^n}{3^n (n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3^n (n+1)} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)} \right)$.

Atendendo a que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ converge por ser uma série geométrica de razão $\frac{1}{3}$ com $\left| \frac{1}{3} \right| < 1$ e uma vez que

$$\lim \frac{\frac{n}{3^n (n+1)}}{\left(\frac{1}{3} \right)^n} = \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n (n+1)}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Por outro lado, atendendo a que $\frac{1}{(n+1)} \to 0$ e $\frac{1}{(n+1)}$ é decrescente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3^n (n+1)} + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)} \right)$ converge por ser a série soma de duas séries convergentes.

Por outro lado, tem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n - (-3)^n}{3^n (n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{3^n + (-1)^{n+1} n}{3^n (n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-1)^{n+1} n}{3^n (n+1)}.$$

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{3^n + (-1)^{n+1} n}{3^n (n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n 3^n + (-1)^{n+1} n^2}{3^n (n+1)} = \lim \left(\frac{n 3^n}{n 3^n} \frac{1 + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{3^n}}{1 + \frac{1}{n}} \right) =$$

$$= \lim \frac{1 + (-1)^{n+1} \dfrac{n^3}{3^n}}{1 + \dfrac{1}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n + (-1)^{n+1} n}{3^n (n+1)}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n - (-3)^n}{3^n (n+1)}$ converge e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \dfrac{n - (-3)^n}{3^n (n+1)} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n + (-1)^{n+1} n}{3^n (n+1)}$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n - (-3)^n}{3^n (n+1)}$ converge simplesmente.

(65) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1 + \sqrt{n} + (-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1 + \sqrt{n} + (-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \dfrac{1}{(n+1)} + (-1)^n \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{n}} \right)$.

Para $\alpha = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Por outro lado, atendendo a que $\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\sqrt{n}} \to 0$ e $\dfrac{n}{(n+1)\sqrt{n}}$ é decrescente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{n}}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Finalmente, Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1}$ também diverge, pelo Critério de Comparação.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1 + \sqrt{n} + (-1)^n n}{(n+1)\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \dfrac{1}{(n+1)} + (-1)^n \dfrac{n}{(n+1)\sqrt{n}} \right)$ diverge por ser a série soma de duas séries convergentes com uma série divergente.

2.

(1) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{(1,001)^n}$.

Tem-se $\frac{n^{1000}}{(1,001)^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^{1000}}{(1,001)^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{(1,001)^n}} = \lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1000} \frac{1}{1,001} \right) = \frac{1}{1,001} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{(1,001)^n}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^{1000}}{(1,001)^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{(1,001)^n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{(1,001)^n}$ converge absolutamente.

(2) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Tem-se $\frac{1000^n}{n!} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim \frac{1000}{n+1} = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1000^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1000^n}{n!}$ converge absolutamente.

(3) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n^3}{n! 2^n}$.

Tem-se $\frac{e^n n^3}{n! 2^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)^3}{(n+1)! 2^{n+1}}}{\frac{e^n n^3}{n! 2^n}} = \lim \left[e \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \frac{1}{2(n+1)} \right] = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n^3}{n! 2^n}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^n n^3}{n! 2^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n^3}{n! 2^n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n^3}{n! 2^n}$ converge absolutamente.

(4) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!(n+2)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)\right)^2}$.

Tem-se $\dfrac{n!(n+2)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)\right)^2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\dfrac{(n+1)!(n+3)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)(2n+3)\right)^2}}{\dfrac{n!(n+2)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)\right)^2}} = \lim \frac{(n+1)\,(n+3)}{(2n+3)^2} = \lim \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)^2} = \frac{1}{4} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!(n+2)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)\right)^2}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{n!(n+2)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)\right)^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!(n+2)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)\right)^2}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!(n+2)!}{\left(3.5.7.9.\cdots.(2n+1)\right)^2}$ converge absolutamente.

(5) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3\,(-e)^{-n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|n^3\,(-e)^{-n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{e^n}$.

$$\lim \frac{\dfrac{(n+1)^3}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^3}{e^n}} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{e} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|n^3\,(-e)^{-n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{e^n}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|n^3\,(-e)^{-n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{e^n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3\,(-e)^{-n}$ converge absolutamente.

(6) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-\pi)^{-n}}{n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{(-\pi)^{-n}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\pi^n}$.

$$\lim \frac{\dfrac{1}{(n+1)\,\pi^{n+1}}}{\dfrac{1}{n\pi^n}} = \lim \left[\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \frac{1}{\pi}\right] = \frac{1}{\pi} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{(-\pi)^{-n}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\pi^n}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-\pi)^{-n}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi^n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\pi)^{-n}}{n}$ converge absolutamente.

(7) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^n e^{-n}$.

Tem-se $n^2 2^n e^{-n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{(n+1)^2\, 2^{n+1} e^{-(n+1)}}{n^2 2^n e^{-n}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{2}{e} \right] = \frac{2}{e} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^n e^{-n}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} |n^2 2^n e^{-n}| = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^n e^{-n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^n e^{-n}$ converge absolutamente.

(8) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n! e^{-n}$.

Tem-se $n! e^{-n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{(n+1)! e^{-(n+1)}}{n! e^{-n}} = \lim \frac{(n+1)}{e} = +\infty > 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n! e^{-n}$ diverge.

(9) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Tem-se $\frac{n!}{n^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n!}{n^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge absolutamente.

(10) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Tem-se $\dfrac{2^n n!}{n^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}} = \lim \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{2^n n!}{n^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ converge absolutamente.

(11) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

Tem-se $\dfrac{3^n n!}{n^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n n!}{n^n}} = \lim \frac{3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$ diverge.

(12) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1.3.5.\cdots.(2n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)}$.

Tem-se $\dfrac{1.3.5.\cdots.(2n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\dfrac{1.3.5.\cdots.(2n+1)(2n+3)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)(3n+6)}}{\dfrac{1.3.5.\cdots.(2n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)}} = \lim \frac{2n+3}{3n+6} = \lim \frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{6}{n}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1.3.5.\cdots.(2n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{1.3.5.\cdots.(2n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1.3.5.\cdots.(2n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)}$ converge, então a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.3.5.\cdots.(2n+1)}{3.6.9.\cdots.(3n+3)}$$

converge absolutamente.

(13) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.

Tem-se $\frac{n!}{2^{n^2}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim \left[(n+1) \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} \right] = \lim \frac{n+1}{2^{2n+1}} = \lim \left(\frac{1}{2} \frac{n}{4^n} + \frac{1}{2^{2n+1}} \right) = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n!}{2^{n^2}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$ converge absolutamente.

(14) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{2^n n^n}$.

Tem-se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{2^n n^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{(n!)^2}{2^n n^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{n+1}\,(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n!)^2}{2^n n^n}} = \lim \left[\frac{n+1}{2} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \right] = +\infty > 1,$$

então $a_n \to +\infty$. Assim, $a_n \nrightarrow 0$ e então $\frac{(-1)^n (n!)^2}{2^n n^n} = (-1)^n a_n \nrightarrow 0$. Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{2^n n^n}$ diverge.

(15) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n!}{n! + n^n}$.

Tem-se $\frac{3^n + n!}{n! + n^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{3^{n+1} + (n+1)!}{(n+1)! + (n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n + n!}{n! + n^n}} = \lim \left[\frac{3^{n+1} + (n+1)!}{3^n + n!} \frac{n! + n^n}{(n+1)! + (n+1)^{n+1}} \right] =$$

$$= \lim \left[(n+1) \frac{\frac{3^n}{n!} \frac{3}{n+1} + 1}{\frac{3^n}{n!} + 1} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{\frac{n!}{n^n} + 1}{\frac{n!}{(n+1)^n} + 1} \right] =$$

$$= \lim \left[\frac{\frac{3^n}{n!}\frac{3}{n+1}+1}{\frac{3^n}{n!}+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{\frac{n!}{n^n}+1}{\frac{n!}{n^n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}+1} \right] =$$

$$= \frac{0.0+1}{0+1}\frac{1}{e}\frac{0+1}{0.\frac{1}{e}+1} = \frac{1}{e} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+n!}{n!+n^n}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3^n+n!}{n!+n^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+n!}{n!+n^n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+n!}{n!+n^n}$ converge absolutamente.

(16) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-2\sqrt{n}}{2^n+n^2}$.

Tem-se

$$\left| (-1)^{n-1} \frac{1-2\sqrt{n}}{2^n+n^2} \right| = \frac{2\sqrt{n}-1}{2^n+n^2} \leq \frac{2\sqrt{n}-1}{n^2},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para $\alpha = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e como se tem

$$\lim \frac{\frac{2\sqrt{n}-1}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{2n^2-\sqrt{n^3}}{n^2} = \lim \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2 \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}-1}{n^2}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1-2\sqrt{n}}{2^n+n^2} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1-2\sqrt{n}}{2^n+n^2}$ converge absolutamente.

(17) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n^n}{(7n+1)^n}$.

Tem-se $\frac{2^n n^n}{(7n+1)^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(7n+8)^{n+1}}}{\frac{2^n n^n}{(7n+1)^n}} = \lim \left[\frac{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}{2^n n^n} \frac{(7n+1)^n}{(7n+8)^{n+1}} \right] =$$

$$= \lim \left[2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{7n+8}\frac{(7n+1)^n}{(7n+8)^n} \right] =$$

$$= \lim \left[2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1+\frac{1}{n}}{7+\frac{8}{n}} \frac{\left(1+\frac{1/7}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{8/7}{n}\right)^n} \right] = 2e\frac{1+0}{7+0}\frac{e^{1/7}}{e^{8/7}} = \frac{2}{7} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n^n}{(7n+1)^n}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2^n n^n}{(7n+1)^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n^n}{(7n+1)^n}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n^n}{(7n+1)^n}$ converge absolutamente.

(18) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n n}{6^n}$.

Tem-se

$$\left| \frac{(4+(-1)^n)^n n}{6^n} \right| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n n,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}(n+1)}{\left(\frac{5}{6}\right)^n n} = \lim \left[\frac{5}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right) \right] = \frac{5}{6} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n n$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(4+(-1)^n)^n n}{6^n} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n n}{6^n}$ converge absolutamente.

(19) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n+n^3}{n!+1}$.

Tem-se

$$\left| (-1)^n \frac{3^n+n^3}{n!+1} \right| = \frac{3^n+n^3}{n!+1} \leq \frac{3^n+n^3}{n!},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{3^{n+1}+(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{3^n+n^3}{n!}} = \lim \left(\frac{n!}{(n+1)!} \frac{3^{n+1}+(n+1)^3}{3^n+n^3} \right) =$$

$$= \lim \left(\frac{1}{n+1} \frac{3^n}{3^n} \frac{3 + \frac{n^3}{3^n} \frac{(n+1)^3}{n^3}}{1 + \frac{n^3}{3^n}} \right) = \lim \left(\frac{1}{n+1} \frac{3 + \frac{n^3}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}{1 + \frac{n^3}{3^n}} \right) = 0 \frac{3 + 0\,(1+0)^3}{1+0} = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^3}{n!}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{3^n + n^3}{n! + 1} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n + n^3}{n! + 1}$ converge absolutamente.

(20) Considere-se a série $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{5.7.9...(2n+3)}{5^n}$.

Tem-se $\frac{5.7.9...(2n+3)}{5^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{5.7.9...(2n+3)(2n+5)}{5^{n+1}}}{\frac{5.7.9...(2n+3)}{5^n}} = \lim \frac{2n+5}{5} = +\infty > 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{5.7.9...(2n+3)}{5^n}$ diverge.

(21) Considere-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{1 + 3^{n+1}}$.

Tem-se

$$0 \leq \frac{2^n}{1 + 3^{n+1}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3},$$

para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}$ converge por ser uma série geométrica de razão $\frac{2}{3}$ com $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{1 + 3^{n+1}}$ também converge, pelo Critério Geral de Comparação.

Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}$ converge, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}$ converge absolutamente.

(22) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}$.

Tem-se $\frac{(2n)!}{(2n)^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{(2n)^n}} = \lim \left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right] = \lim \frac{2n+1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = +\infty > 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}$ diverge.

(23) Considere-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5n)!}{(3n)!\,(2n)!}$.

Tem-se $\frac{(5n)!}{(3n)!\,(2n)!} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, e

$$\lim \frac{\frac{(5n+5)!}{(3n+3)!\,(2n+2)!}}{\frac{(5n)!}{(3n)!\,(2n)!}} = \lim \left[\frac{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)\,(5n+1)}{(3n+3)\,(3n+2)\,(3n+1)\,(2n+1)\,(2n+2)}\right] =$$

$$= \lim \left[\frac{\left(5+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{2}{n}\right)\left(5+\frac{3}{n}\right)\left(5+\frac{4}{n}\right)\left(5+\frac{5}{n}\right)}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}\right] = \frac{5^5}{3^3 2^2} > \frac{5^5}{5^3 5^2} = 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5n)!}{(3n)!\,(2n)!}$ diverge.

(24) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\,(2n)!}{3^n\,(2n+1)!}$.

Tem-se $\frac{2^n\,(2n)!}{3^n\,(2n+1)!} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{2^{n+1}\,(2n+2)!}{3^{n+1}\,(2n+3)!}}{\frac{2^n\,(2n)!}{3^n\,(2n+1)!}} = \lim \left[\frac{2^{n+1}\,(2n+2)!}{2^n\,(2n)!}\,\frac{3^n\,(2n+1)!}{3^{n+1}\,(2n+3)!}\right] =$$

$$= \lim \left[2\,(2n+2)\,(2n+1)\,\frac{1}{3\,(2n+3)\,(2n+2)}\right] = \lim \left(\frac{2}{3}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right) = \frac{2}{3} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\,(2n)!}{3^n\,(2n+1)!}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{2^n\,(2n)!}{3^n\,(2n+1)!}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\,(2n)!}{3^n\,(2n+1)!}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\,(2n)!}{3^n\,(2n+1)!}$ converge absolutamente.

(25) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} \log n$.

Tem-se $e^{-n}\log n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{e^{-(n+1)}\log(n+1)}{e^{-n}\log n} = \lim \frac{\log(n+1)}{e\log n} = \lim\left[\frac{1}{e}\frac{\log\left[n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]}{\log n}\right]$$

$$= \lim\left[\frac{1}{e}\frac{\log n + \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\right] = \lim\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\right)\right] = \frac{1}{e} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}\log n$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|e^{-n}\log n\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}\log n$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n}\log n$ converge absolutamente.

(26) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n!\,(-3)^n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\dfrac{(n+1)^n}{n!\,(-3)^n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n\dfrac{(n+1)^n}{n!3^n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n!3^n}$, e

$$\lim \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)^n}{n!3^n}} = \lim\left[\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{n!3^n}{(n+1)!3^{n+1}}\right] =$$

$$= \lim\left[\frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{3}\right] = \lim\left[\frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}\frac{1}{3}\right] = \frac{e^2}{e}\frac{1+0}{1+0}\frac{1}{3} = \frac{e}{3} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n!3^n}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\dfrac{(n+1)^n}{n!\,(-3)^n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n!3^n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n!\,(-3)^n}$ converge absolutamente.

(27) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n\cos n}{n!}$.

Tem-se

$$\left|\frac{3^n\cos n}{n!}\right| = \frac{3^n\left|\cos n\right|}{n!} \leq \frac{3^n}{n!},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \lim \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n!}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{3^n \cos n}{n!}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n \cos n}{n!}$ converge absolutamente.

(28) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n \operatorname{arctg}(n^3)}{(n+1)! + \sqrt{n}}$.

Tem-se

$$\left|\frac{(-1)^{n+1} n \operatorname{arctg}(n^3)}{(n+1)! + \sqrt{n}}\right| = \frac{n \operatorname{arctg}(n^3)}{(n+1)! + \sqrt{n}} \leq \frac{n2}{(n+1)! + \sqrt{n}} \leq \frac{n2}{n!} = \frac{2}{(n-1)!},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{2}{n!}}{\frac{2}{(n-1)!}} = \lim \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{(n-1)!}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n+1} n \operatorname{arctg}(n^3)}{(n+1)! + \sqrt{n}}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n \operatorname{arctg}(n^3)}{(n+1)! + \sqrt{n}}$ converge absolutamente.

(29) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n + n^3}{2^{n+1}(n+1)^3}$.

Tem-se

$$0 \leq \frac{2^n + n^3}{2^{n+1}(n+1)^3} = \frac{2^n}{2^{n+1}(n+1)^3} + \frac{n^3}{2^{n+1}(n+1)^3} = \frac{1}{2(n+1)^3} + \frac{1}{2^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \leq \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2^{n+1}},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$. Como $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ converge absolutamente.

Para $\alpha = 3 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ converge absolutamente.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ converge absolutamente, por ser a série soma de duas séries absolutamente convergentes.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n + n^3}{2^{n+1}(n+1)^3}$ converge.

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{2^n + n^3}{2^{n+1}(n+1)^3} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^3}{2^{n+1}(n+1)^3}$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^3}{2^{n+1}(n+1)^3}$ converge absolutamente.

(30) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

Seja $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

uma vez que a sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente.

Assim $a_{n+1} > a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e deste modo $a_n \nrightarrow 0$. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ diverge.

(31) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n + n^5}{2^n + n! + \log^2(n!)}$.

Tem-se

$$\left| \frac{(-3)^n + n^5}{2^n + n! + \log^2(n!)} \right| = \frac{|(-3)^n + n^5|}{2^n + n! + \log^2(n!)} \leq \frac{|(-3)^n| + n^5}{2^n + n! + \log^2(n!)} = \frac{3^n + n^5}{2^n + n! + \log^2(n!)} \leq \frac{3^n + n^5}{n!},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{3^{n+1} + (n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{3^n + n^5}{n!}} = \lim \left(\frac{3^{n+1} + (n+1)^5}{3^n + n^5} \frac{n!}{(n+1)!} \right) = \lim \left(\frac{3 + \frac{n^5}{3^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5}{1 + \frac{n^5}{3^n}} \frac{1}{n+1} \right) = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^5}{n!}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-3)^n + n^5}{2^n + n! + \log^2(n!)} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n + n^5}{2^n + n! + \log^2(n!)}$ converge absolutamente.

(32) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{n^3}{3^n}$.

Tem-se

$$\left| \operatorname{sen} \frac{n^3}{3^n} \right| \leq \frac{n^3}{3^n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \operatorname{sen} \frac{n^3}{3^n} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{n^3}{3^n}$ converge absolutamente.

(33) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n}$.

Tem-se

$$\left| n^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n} \right| \leq \frac{n^2 \pi}{2^n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^2 \pi}{2^{n+1}}}{\frac{n^2 \pi}{2^n}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \pi}{2^n}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n} \right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n}$ converge absolutamente.

(34) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{n!}{n^n}} - 1}{\frac{3^n}{(n!)^2}}$.

Tem-se $\frac{e^{\frac{n!}{n^n}} - 1}{\frac{3^n}{(n!)^2}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\frac{e^{\frac{n!}{n^n}} - 1}{\frac{3^n}{(n!)^2}} = \frac{e^{\frac{n!}{n^n}} - 1}{\frac{n!}{n^n}} \frac{(n!)^2}{3^n} \frac{n!}{n^n} = \frac{e^{\frac{n!}{n^n}} - 1}{\frac{n!}{n^n}} \frac{(n!)^3}{3^n n^n}.$$

Vejamos qual a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{3^n n^n}$. Tem-se

$$\lim \frac{\frac{((n+1)!)^3}{3^{n+1} (n+1)^{n+1}}}{\frac{(n!)^3}{3^n n^n}} = \lim \frac{(n+1)^2}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = +\infty > 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{3^n n^n}$ diverge.

Como

$$\lim \frac{\frac{e^{\frac{n!}{n^n}}-1}{\frac{3^n}{(n!)^2}}}{\frac{(n!)^3}{3^n n^n}} = \lim \frac{e^{\frac{n!}{n^n}}-1}{\frac{n!}{n^n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{n!}{n^n}}-1}{\frac{3^n}{(n!)^2}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{3^n n^n}$ têm a mesma natureza, pelo Critério de Comparação. Logo, uma vez que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{3^n n^n}$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{n!}{n^n}}-1}{\frac{3^n}{(n!)^2}}$ também diverge.

(35) Considere-se a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n! - \operatorname{sen} n}$.

Tem-se

$$\left|\frac{2^n}{n! - \operatorname{sen} n}\right| = \frac{2^n}{n! - \operatorname{sen} n} \le \frac{2^n}{n! - 1},$$

para todo o $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, e

$$\lim \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)! - 1}}{\frac{2^n}{n! - 1}} = \lim \left[2 \frac{n! - 1}{(n+1)! - 1}\right] = \lim \left[2 \frac{1}{n+1} \frac{1 - \frac{1}{n!}}{1 - \frac{1}{(n+1)!}}\right] = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n! - 1}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{2^n}{n! - \operatorname{sen} n}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n! - \operatorname{sen} n}$ converge absolutamente.

(36) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \sqrt[3]{n^2}}$.

Tem-se

$$0 \le \frac{n^2}{n! + \sqrt[3]{n^2}} \le \frac{n^2}{n!},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1}\right] = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \sqrt[3]{n^2}}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n^2}{n! + \sqrt[3]{n^2}} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \sqrt[3]{n^2}}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \sqrt[3]{n^2}}$ converge absolutamente.

(37) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \log n^2}$.

Tem-se

$$0 \leq \frac{n^2}{n! + \log n^2} \leq \frac{n^2}{n!},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} \right] = 0 < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \log n^2}$ converge.

Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{n^2}{n! + \log n^2} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \log n^2}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n! + \log n^2}$ converge absolutamente.

(38) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + a^n}$, $(a \in \mathbb{R}^+)$.

Se $a \in \,]0, 1]$ então $\frac{1}{1 + a^n} \nrightarrow 0$, e deste modo a a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + a^n}$ diverge.

Se $a \in \,]1, +\infty[$, tem-se

$$0 \leq \frac{1}{1 + a^n} \leq \frac{1}{a^n},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ converge absolutamente por se tratar de uma série geométrica de razão $\frac{1}{a}$, com $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{a} < 1$. Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + a^n}$ converge. Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{1 + a^n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + a^n}$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + a^n}$ converge absolutamente.

(39) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(-2)^n + n^2}$.

Tem-se

$$\left| \frac{n}{(-2)^n + n^2} \right| = \left| \frac{n}{(-1)^n 2^n + n^2} \right| = \left| (-1)^n \frac{n}{2^n + (-1)^n n^2} \right| = \left| \frac{n}{2^n + (-1)^n n^2} \right| \leq \frac{n}{2^n - n^2},$$

para todo o $n > 4$, e

$$\lim \frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}-(n+1)^2}}{\dfrac{n}{2^n-n^2}} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{2^n-n^2}{2^{n+1}-(n+1)^2}\right] = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1-\dfrac{n^2}{2^n}}{2-\dfrac{n^2}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}\right] = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, pelo Critério de D'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n-n^2}$ converge.

Assim, pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n}{(-2)^n+n^2}\right|$ converge.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(-2)^n+n^2}$ converge absolutamente.

3.

(1) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Tem-se $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim \left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ é (absolutamente) convergente.

(2) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$. Tem-se $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}} = \lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e > 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$ é divergente.

(3) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$. Tem-se $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right]^{1/n} = e^0 = 1 \neq 0,$$

logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$ é divergente.

(4) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$. Tem-se $\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n^2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n} = \lim \frac{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{e^3}{e} = e^2 > 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}$ é divergente.

(5) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}$. Tem-se $e^{-n^2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{e^{-n^2}} = \lim e^{-n} = e^{-\infty} = 0 < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}$ é (absolutamente) convergente.

(6) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$. Tem-se $\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Para $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge (absolutamente) e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = e \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ também converge (absolutamente), pelo Critério de Comparação.

(7) Considere-se a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\left(\log n\right)^n}$. Tem-se $\dfrac{1}{n\left(\log n\right)^n} \geq 0$, para todo o $n \geq 2$.
Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n\left(\log n\right)^n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\frac{1}{\log n} = 1.0 < 1,$$

pois $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$. Logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\left(\log n\right)^n}$ é (absolutamente) convergente.

(8) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{1/n}-1\right)^n$. Tem-se $\left(n^{1/n}-1\right)^n \geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$, pois $n^{1/n}-1\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(n^{1/n}-1\right)^n} = \lim\left(n^{1/n}-1\right) = \lim\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = 1-1 = 0 < 1,$$

pois $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \dfrac{n+1}{n} = \lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{1/n}-1\right)^n$ é (absolutamente) convergente.

(9) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^n$. Tem-se $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^n \geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$, pois $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n} = \lim \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = 0 < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}\right)^n$ é (absolutamente) convergente.

(10) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$. Tem-se $\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}} = \lim\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^2 = \lim\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{4}{9} < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$ é (absolutamente) convergente.

(11) Considere-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{n+5}{n^2+1}\right)^n$. Tem-se $\left(\dfrac{n+5}{n^2+1}\right)^n\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{n^2+1}\right)^n} = \lim\frac{n+5}{n^2+1} = \lim\frac{1+\frac{5}{n}}{n+\frac{1}{n}} = 0 < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{n+5}{n^2+1}\right)^n$ é (absolutamente) convergente.

(12) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Tem-se $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ é (absolutamente) convergente.

(13) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Por outro lado, atendendo à alínea (5), a série $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}$ converge e então a série $(-1)\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-e^{-n^2}\right)$ também converge

Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$ diverge por ser a série soma de uma série divergente com uma série convergente.

(14) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^n}}{\sqrt{n^n}}$. Tem-se $\frac{\sqrt[3]{n^n}}{\sqrt{n^n}} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\frac{\sqrt[3]{n^n}}{\sqrt{n^n}}} = \lim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0 < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^n}}{\sqrt{n^n}}$ é (absolutamente) convergente.

(15) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2}{2+n^2}\right)^{2^n}$. Tem-se $\left(\frac{n^2}{2+n^2}\right)^{2^n} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{2+n^2}\right)^{2^n}} = \lim \left(\frac{n^2}{2+n^2}\right)^{\frac{2^n}{n}} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{2^n}{n}}} = \lim \frac{1}{\left[\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{2^n}{n^3}}} = \frac{1}{(e^2)^{+\infty}} = 0 < 1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2}{2+n^2}\right)^{2^n}$ é (absolutamente) convergente.

(16) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2}{2-n^2}\right)^{2^n}$.

Tem-se

$$\lim\left(\frac{n^2}{2-n^2}\right)^{2^n}=\lim\frac{1}{\left(1+\dfrac{-2}{n^2}\right)^{2^n}}=\lim\frac{1}{\left[\left(1+\dfrac{-2}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{2^n}{n^2}}}=\frac{1}{(e^{-2})^{+\infty}}=+\infty\neq 0,$$

logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n^2}{2-n^2}\right)^{2^n}$ é divergente.

(17) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n!+n^4}{3^n+n!}\right)^{n!}$. Tem-se $\left(\dfrac{n!+n^4}{3^n+n!}\right)^{n!}\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim\sqrt[n]{\left(\frac{n!+n^4}{3^n+n!}\right)^{n!}}=\lim\left(1-\frac{3^n+n^4}{3^n+n!}\right)^{\frac{n!}{n}}=\lim\left[\left(1+\frac{-1}{\dfrac{3^n+n!}{3^n+n^4}}\right)^{\frac{3^n+n!}{3^n+n^4}}\right]^{\frac{3^n+n^4}{3^n+n!}\,\frac{n!}{n}}=$$

$$=\lim\left[\left(1+\frac{-1}{\dfrac{3^n+n!}{3^n+n^4}}\right)^{\frac{3^n+n!}{3^n+n^4}}\right]^{\frac{\frac{3^n}{n}+n^3}{\frac{3^n}{n!}+1}}=e^{-\infty}=0<1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n^2}{2-n^2}\right)^{2^n}$ é (absolutamente) convergente. Repare-se que $\dfrac{3^n+n!}{3^n+n^4}=\dfrac{1+\dfrac{n!}{3^n}}{1+\dfrac{n^4}{3^n}}\to\dfrac{1+\infty}{1+0}=+\infty$.

(18) Considere-se a série $\sum_{n=2}^{+\infty}(\log n)^{-n}$. Tem-se $(\log n)^{-n}\geq 0$, para todo o $n\geq 2$.

Tem-se

$$\lim\sqrt[n]{(\log n)^{-n}}=\lim\frac{1}{\log n}=0<1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum_{n=2}^{+\infty}(\log n)^{-n}$ é (absolutamente) convergente.

(19) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$. Tem-se $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}\geq 0$, para todo o $n\in\mathbb{N}$.

Tem-se

$$\lim\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}<1,$$

logo, pelo Critério de Cauchy, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ é (absolutamente) convergente.

4.

(1) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{1}{1} = 1.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } |x| < 1 \Leftrightarrow x \in \left]-1,1\right[, \\ \\ \text{diverge se } |x| > 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[. \end{cases}$$

Para $x=-1$ tem-se a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergente pois $(-1)^n \nrightarrow 0$.

Para $x=1$, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ também diverge pois $1 \nrightarrow 0$.

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in \left]-1,1\right[, \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[. \end{cases}$$

(2) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{n+2}} = \lim \left(\frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)}\frac{2^n+n+1}{2^{n+1}+n+2}\right) = \lim \left(2\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\frac{1+\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{n}{2^n}+\frac{2}{2^n}}\right) = 1.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } |x| < 1 \Leftrightarrow x \in \left]-1,1\right[, \\ \\ \text{diverge se } |x| > 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[. \end{cases}$$

Para $x=-1$ tem-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}\right)(-1)^n$ simplesmente convergente pois a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}\right)(-1)^n$ converge pelo critério de Leibniz ($\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1} \to 0$ e $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}$ é decrescente) e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}\right)(-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

diverge por ser a série soma de uma série convergente (série geométrica com a razão em módulo menor que 1) com uma série divergente ($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge por comparação com a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$).

Para $x = 1$, como já foi visto, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n+1} \right)$ diverge.

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n+1} \right) x^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in \left]-1, 1\right[, \\ \\ \text{converge simplesmente se } x = -1, \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left[1, +\infty\right[. \end{cases}$$

(3) Considere-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2+1} (x+1)^{2n}$.

Tem-se

$$\begin{aligned} R &= \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\frac{2n+1}{n^2+1}}{\frac{2n+3}{(n+1)^2+1}} = \\ &= \lim \left(\frac{2n+1}{2n+3} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \right) = \lim \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \right) = 1. \end{aligned}$$

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2+1} (x+1)^{2n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } \left|(x+1)^2\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \left]-2, 0\right[, \\ \\ \text{diverge se } \left|(x+1)^2\right| > 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]0, +\infty\right[. \end{cases}$$

Para $x = -2$ ou para $x = 0$ tem-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$. Por comparação com a série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tem-se:

$$\lim \frac{\frac{2n+1}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{2n^2+n}{n^2+1} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 2 \in \mathbb{R}^+.$$

Logo, pelo Critério de Comparação, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}$ diverge.

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2+1}(x+1)^{2n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in \left]-2,0\right[, \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[0,+\infty\right[. \end{cases}$$

(4) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{n!} + \frac{4^n}{(n+1)!} \right) (x-1)^n$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\dfrac{3^n}{n!} + \dfrac{4^n}{(n+1)!}}{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{4^{n+1}}{(n+2)!}} = \lim \frac{\dfrac{3^n(n+1)+4^n}{(n+1)!}}{\dfrac{3^{n+1}(n+2)+4^{n+1}}{(n+2)!}} =$$

$$= \lim \frac{(3^n(n+1)+4^n)(n+2)}{3^{n+1}(n+2)+4^{n+1}} = \lim \frac{4^n}{4^{n+1}} \frac{\left(\dfrac{n+1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} + 1 \right)}{\dfrac{n+2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}} + 1} (n+2) = \frac{1}{4} \frac{0+1}{0+1} (+\infty) = +\infty.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{n!} + \frac{4^n}{(n+1)!} \right) (x-1)^n \ \text{ converge absolutamente para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

(5) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2} x^n$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\dfrac{\log n}{n^2}}{\dfrac{\log(n+1)}{(n+1)^2}} = \lim \left(\frac{\log n}{\log(n+1)} \frac{(n+1)^2}{n^2} \right) = \lim \left(\frac{\log n}{\log\left[n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \right) =$$

$$= \lim \left(\frac{\log n}{\log n + \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \right) = \lim \left(\frac{1}{1+\dfrac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \right) = 1.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2} x^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } |x|<1 \Leftrightarrow x \in \left]-1,1\right[, \\ \\ \text{diverge se } |x|>1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[. \end{cases}$$

Para $x=-1$ tem-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}(-1)^n$. Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\log n}{n^2}(-1)^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$

Para $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ converge e, como se tem

$$\lim \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$ também converge, pelo Critério de Comparação.

Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}(-1)^n$ converge absolutamente.

Para $x=1$ tem-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$ que, como se viu, converge absolutamente.

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2} x^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in [-1,1], \\ \\ \text{diverge se } x \in]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

(6) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos(n\pi) \frac{(x-1)^{2n+1}}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos(n\pi) \frac{(x-1)^{2n+1}}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}} \left[(x-1)^2\right]^n (x-1)$ e

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}\sqrt{2n+3}}} = \lim \left(2\sqrt{\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}}\right) = 2.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}}(x-1)^{2n+1} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } \left|(x-1)^2\right| < 2 \Leftrightarrow x \in \left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[, \\ \\ \text{diverge se } \left|(x-1)^2\right| > 2 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2},+\infty\right[. \end{cases}$$

Para $x = 1-\sqrt{2}$ tem-se a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}}(x-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}} 2^n \left(-\sqrt{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}.$$

Tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}.$$

Para $\alpha = \dfrac{1}{2} \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} \right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}$ diverge, pelo Critério de Comparação. Atendendo a que

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} \text{ é decrescente,}$$

então a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}$ converge, pelo Critério de Leibniz.

Como a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}$ converge e a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}} \right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}$ converge simplesmente.

Para $x = 1+\sqrt{2}$, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}} (x-1)^{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}} 2^n \sqrt{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}\sqrt{2n+1}}$ também converge simplesmente.

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}\sqrt{2n+1}} (x-1)^{2n+1} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in \left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[, \\ \\ \text{converge simplesmente se } x = 1-\sqrt{2} \text{ ou } x = 1+\sqrt{2}, \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left]1+\sqrt{2}, +\infty\right[. \end{cases}$$

(7) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{n}} x^{2n}$.

Tem-se

$$\begin{aligned} R &= \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{n^{-\sqrt{n}}}{(n+1)^{-\sqrt{n+1}}} = \lim \frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = \\ &= \lim \left(\frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n+1}}} \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} \right) = \lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n+1}} n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \right) = \\ &= \lim \left(\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{\sqrt{n+1}}{n}} n^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \right) = \lim \left(\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right]^{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} e^{\frac{\log n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} \right) = e^0 e^0 = 1. \end{aligned}$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{n}} x^{2n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } |x^2| < 1 \Leftrightarrow x \in]-1,1[\,, \\ \\ \text{diverge se } |x^2| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Para $x=-1$ ou para $x=1$ tem-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{n}} x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{n}}$.

Tem-se $n^{-\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\sqrt{n}}} \leq \dfrac{1}{n^2}$, para todo o $n \geq 4$. Logo, como para $\alpha = 2 > 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge, então pelo Critério Geral de Comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{n}}$ converge (absolutamente).

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{n}} x^{2n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in [-1,1]\,, \\ \\ \text{diverge se } x \in]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

(8) Considere-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n \operatorname{arctg} n}$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}}{\dfrac{1}{(n+1)\operatorname{arctg}(n+1)}} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{\operatorname{arctg} n} \right] = 1.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n \operatorname{arctg} n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } |x+1| < 1 \Leftrightarrow x \in]-2,0[\,, \\ \\ \text{diverge se } |x+1| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2[\,\cup\,]0,+\infty[\,. \end{cases}$$

Para $x=-2$ tem-se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n \operatorname{arctg} n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}$.

Tem-se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}$.

Para $\alpha = 1 \leq 1$ a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge e como se tem

$$\lim \frac{\dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = \lim \frac{2}{\pi} \in \mathbb{R}^+,$$

então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n} \right|$ diverge, pelo Critério de Comparação.

Atendendo a que $\dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n} \to 0$ e $\dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}$ é decrescente, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}$ converge, pelo Critério de Leibniz. Como a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}$ converge e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}\right|$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}$ converge simplesmente.

Para $x = 0$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n \operatorname{arctg} n}$ diverge como já se viu.

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n \operatorname{arctg} n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in \left]-2, 0\right[, \\ \\ \text{converge simplesmente se } x = -2, \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left[0, +\infty\right[. \end{cases}$$

(9) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^n + 1}{n!} x^n$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\dfrac{e^n+1}{n!}}{\dfrac{e^{n+1}+1}{(n+1)!}} = \lim \left[(n+1) \frac{1 + \dfrac{1}{e^n}}{e + \dfrac{1}{e^n}} \right] = +\infty.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + 1}{n!} x^n \text{ converge absolutamente para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

(10) Considere-se a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n!\,(x-1)^n}{n! + 4^n}$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\dfrac{n!}{n!+4^n}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!+4^{n+1}}} = \lim \left(\frac{(n+1)! + 4^{n+1}}{n! + 4^n} \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left(\frac{1 + \dfrac{4^{n+1}}{(n+1)!}}{1 + \frac{4^n}{n!}} \right) = 1.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,(x-1)^n}{n! + 4^n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } |x-1| < 1 \Leftrightarrow x \in \left]0, 2\right[, \\ \\ \text{diverge se } |x-1| > 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]2, +\infty\right[. \end{cases}$$

Para $x = 0$ tem-se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{n! + 4^n}$. Como $(-1)^n \dfrac{n!}{n! + 4^n} = (-1)^n \dfrac{1}{1 + \dfrac{4^n}{n!}} \nrightarrow 0$, pois existem duas subsucessões com limites diferentes (1 e -1), então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{n! + 4^n}$ diverge.

Para $x = 2$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n!}{n! + 4^n}$ diverge pois $\dfrac{n!}{n! + 4^n} \nrightarrow 0$, uma vez que $\dfrac{n!}{n! + 4^n} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{4^n}{n!}} \to 1 \neq 0$.

Logo, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,(x-1)^n}{n! + 4^n} \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x \in \left]0, 2\right[, \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[. \end{cases}$$

(11) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n^n}$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\dfrac{1}{n^n}}{\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim \left[(n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = (+\infty)\, e = +\infty.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n} \text{ converge absolutamente para todo o } x \in \mathbb{R}.$$

(12) Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x+2)^n$.

Tem-se

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim \left(\frac{1}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} \right) = 0 \frac{1}{e} = 0.$$

Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x+2)^n \begin{cases} \text{converge absolutamente se } x = -2, \\ \\ \text{diverge se } x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]-2, +\infty\right[. \end{cases}$$

5. Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) cada uma das seguintes séries, onde x designa um parâmetro real.

(1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{2^n+1}(2-x)^n$ **(2)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$ **(3)** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x+3)^n}{2^n(n^2-n)}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{1+n}(1-2x)^{2n-1}$ **(5)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{n-1}$ **(6)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}(x^2-x)^n$

(7) $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-|x|)^n$ **(8)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+|x|^n}\right)^{n-1}$ **(9)** $\sum_{n=0}^{+\infty} x$ **(10)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$ **(11)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{nx}{x+1}\right)^n$