Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1^{o} semestre 10/11

1^{o} TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERC, LEGI, LEE
22 de Outubro de 2010 (18:30)

Teste 101

Nome:
Número:
Curso:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **70 minutos** e consiste de sete perguntas. As perguntas estão divididas em alíneas com as cotações indicadas na tabela abaixo.

O quadro abaixo destina-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Perg 1	2 Val	
Perg 2	2 Val	
Perg 3.a)	1.5 Val	
Perg 3.b)	1.5 Val	
Perg 4.a)	2 Val	
Perg 4.b)	2 Val	
Perg 5	2 Val	
Perg 6.a)	2 Val	
Perg 6.b)	1.5 Val	
Perg 7.a)	2 Val	
Perg 7.b)	1.5 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1

Sejam os vectores $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$. Determine o(s) valor(es) de h que faz(em) com que o vector $\mathbf{b}$ pertença ao conjunto gerado por $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$, i.e. $\mathbf{b} \in \mathcal{L}\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 2
Descreva todas as soluções de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ na forma vectorial paramétrica, em que A é a matriz equivalente por linhas à seguinte matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 3
Sejam $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ e $\mathbf{u_4}$ vectores não nulos de $\mathbb{R}^6$. Sabendo que

- $\mathbf{u_2} \notin \mathcal{L}\{\mathbf{u_1}\}$,
- $\mathbf{u_3} = \mathbf{2u_1} - \mathbf{u_2}$,
- $\mathbf{u_4} \notin \mathcal{L}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.

(a) Como classifica o conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ quanto à independência linear?

(b) Indique um conjunto linearmente independente com três dos vectores dados.

Justifique todas as afirmações que fizer!

Problema 4

Considere o problema de determinar se existe solução para o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z.

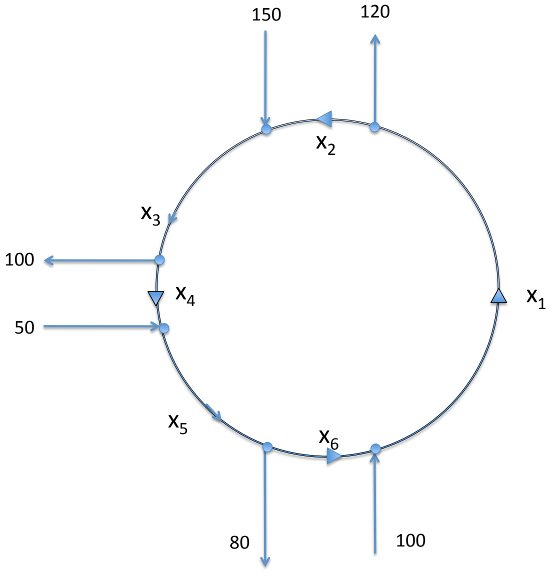
$$\left\{\begin{array}{llllll} a_1x & +b_1y & +c_1z & = & d_1 \\ a_2x & +b_2y & +c_2z & = & d_2 \\ a_3x & +b_3y & +c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

(a) Defina vectores apropriados e enuncie o problema da existência de solução da equação vectorial em termos de combinações lineares de vectores.

(b) Defina uma matriz A apropriada e enuncie o problema da existência de solução da equação matricial, usando a expressão "colunas da matriz A".

Não é necessário resolver os problemas. Apenas enunciar.

Problema 5
Imagine que o tráfico da rotunda de acesso ao Taguspark se realizava com os sentidos indicados no esquema abaixo. Tomando as entradas e saídas de viaturas a uma certa hora do dia como as indicadas, construa o sistema de equações que permite determinar a solução geral para o fluxo de trânsito na rotunda a essa hora do dia. Escreva a matriz aumentada do sistema de equações.



Indique os cálculos para construir o sistema. Não é necessário resolver!!!

Problema 6

(a) Construa a matriz A que representa a transformação linear T em $\mathbb{R}^2$ que roda vectores relativamente à origem num ângulo de $\pi/4$ **no sentido dos ponteiros do relógio**.

(b) Use a matriz A e faça a representação geométrica do transformado do quadrado unitário pela transformação T.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Problema 7
Considere uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

(a) Mostre, com base nas propriedades do produto $A\mathbf{x}$, que se trata duma transformação linear. **Justifique todos os passos que realizar!**

(b) Dê o exemplo duma matriz A que realize uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injectivamente. Justifique a escolha com propriedades das colunas de A.