CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
1º TESTE/ 2º TESTE/ EXAME (Versão A)

5/ Fevereiro/ 2011 Duração: 1h30m / 3h

I (1ºTeste)

1. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x|\,(x-3)}{x-5} \leq 0 \right\}$$

a) Mostre que $A = \{0\} \cup [3,5[$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$,

$\sup A$, $\sup(A \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$, $\min A$, $\min A\backslash\mathbb{Q}$, $\inf(A \cap \mathbb{Q})$, $\max(A \cap \mathbb{N})$.

c) Decida, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente.

(ii) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em A converge para 5.

(iii) Toda a sucessão decrescente de termos em A converge para um elemento de A.

(iv) Toda a sucessão de termos em A tem um sublimite.

2. Calcule (caso existam em $\mathbb{R}$):

$$\lim \frac{n^2(2n+1) - 3n^2}{3n^3+4}, \qquad \lim \frac{\sin(n!)}{\sqrt{n}+1}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{3^n+2}{3+2^n}}$$

3. Mostre por indução que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^{n-1}}$$

4. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} arctg(x+1) & , \text{ se } x \leq -1 \\ \log |x| & , \text{ se } -1 < x < 1 \wedge x \neq 0 \\ e^{-x} + 5 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estude quanto a continuidade a função f nos pontos $x = -1$ e $x = 1$.

b) Diga, justificando, se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.

c) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

d) Justificando, determine o conjunto $f([1, +\infty[)$.

5. Seja f uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f \geq 0$ e

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{\,3}\left(-\frac{1}{n}\right) = f^{\,2}\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

a) Indique, justificando, o valor de $f(0)$.

b) Supondo ainda que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

indique, justificando, o contradomínio de f.

II (2^{o}Teste)

1. Calcule os limites seguintes:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{2x} \quad , \qquad\qquad \lim_{x\to 1} \frac{\int_x^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt}{x^2-1}$$

[Não deve tentar calcular o integral.]

.

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\frac{3e^x}{3+e^x} \quad , \qquad x\sin x \quad , \qquad x^3 - \frac{1}{x^5}$$

3. Calcule a área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le x\le 1 \wedge 2x^3\le y\le e^x\right\}$$

4. Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^2-n+1} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}$$

e calcule a soma de uma delas.

5. Seja f uma função definida e duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f>0$, $f(1)=1$ e $f'(1)=0$. Considere a função ψ dada por

$$\psi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \log\left(f(x)\right) \qquad \forall x\neq 0$$

Determine as funções ψ' e ψ''; mostre ainda que $\psi'(1)+\psi''(1)=2f''(1)$.

6. Seja $g\in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $g(0)=g(1)=0$.

a) Mostre que

$$\int_1^e g(\log t)dt = \int_e^1 g'(\log t)dt$$

[Sugestão: pode fazer uma integração por partes.]

b) Mostre que

$$\int_e^1 g'(\log t)dt = \int_1^0 g'(s)e^s ds \quad .$$

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
1º TESTE/ 2º TESTE/ EXAME (Versão B)

5/ Fevereiro/ 2011 Duração: 1h30m / 3h

I (1ºTeste)

1. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x|\,(x-4)}{x-1} \leq 0 \right\}$$

a) Mostre que $B = \{0\} \cup \,]1,4]$.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$,
$\sup B, \quad \max(B \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})), \quad \min B, \quad \min B\backslash\mathbb{Q}, \quad \inf(B \cap \mathbb{Q}), \quad \max(B \cap \mathbb{N}).$
c) Decida, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:
(i) Toda a sucessão monótona de termos em B é convergente.
(ii) Toda a sucessão de termos em B tem um sublimite.
(iii) Toda a sucessão crescente de termos em B converge para um elemento de B.
(iv) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em B converge para 4.

2. Calcule (caso existam em $\mathbb{R}$):

$$\lim \frac{1-3n^3}{2n^2+n(n^2+1)}, \qquad \lim \frac{\cos(n!)}{n\sqrt{n}+1}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{5^n+4}{5+4^n}}$$

3. Mostre por indução que se tem, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = \frac{3^{n+1}-2n-3}{3^n}$$

4. Considere a função $h : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} e^x + 4 & , \text{ se } x \leq -1 \\ \log|x| & , \text{ se } -1 < x < 1 \wedge x \neq 0 \\ arctg(x-1) & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estude quanto a continuidade a função h nos pontos $x=-1$ e $x=1$.
b) Diga, justificando, se h é prolongável por continuidade ao ponto $x=0$.
c) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
d) Justificando, determine o conjunto $h(]-\infty,-1])$.

5. Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $g \geq 0$ e

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g\left(-\frac{1}{n^2}\right) = g^{\,2}\left(\frac{1}{3n}\right) - g^{\,3}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

a) Indique, justificando, o valor de $g(0)$.
b) Supondo ainda que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g\,(n) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{n}\right)}$$

indique, justificando, o contradomínio de g.

II (2^{o}Teste)

1. Calcule os limites seguintes:

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^x \quad , \qquad\qquad \lim_{x\to 2} \frac{\int_{2x}^{x^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right) dt}{x^2-4}$$

[Não deve tentar calcular o integral.]

.

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\frac{e^x}{1-e^x} \quad , \qquad x\cos x \quad , \qquad 2x^3 - \frac{1}{x^4}$$

3. Calcule a área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \wedge 2x^2 \le y \le e^x\right\}$$

4. Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{3n^3+n+2} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^{n-1}$$

e calcule a soma de uma delas.

5. Seja f uma função definida e duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f(1) = f'(1) = 0$. Considere a função φ dada por

$$\varphi(x) = f(\log x) + e^{\,f(x)} \qquad \forall x > 0$$

Determine as funções φ' e φ''; mostre ainda que $\varphi'(1) + \varphi''(1) = f''(0) + f''(1)$.

6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $f(0) = f(1) = 0$.

a) Mostre que

$$\int_1^e f(\log t)dt = \int_e^1 f'(\log t)dt$$

[Sugestão: pode fazer uma integração por partes.]

b) Mostre que

$$\int_1^e f'(\log t)dt = \int_0^1 f'(u)e^u du \quad .$$