CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC

2^{0}EXAME (Versão A)

25/Janeiro/2010 Duração: 3h

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{ex + e^2}{x} \leq e + x \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq 2\}, \qquad C = A \cap B$$

a) Mostre que $C = [-e, 0[$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min B$, $\sup C$, $\min(C \cap \mathbb{Q})$ e $\inf(C \cap \mathbb{Z})$.

2. Determine a natureza de cada uma das seguintes séries e calcule a soma de uma delas

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{5^n}$.

II

1. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $\arctan\left(\dfrac{1}{2x} + 1\right)$ **b)** $e^{\sin(\cos x)}$

2. Justificando, calcule (caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$) o limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^{x^2} \frac{\log t}{t} dt}{\sin \pi x}$$

III

1. Calcule

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\sqrt{1+3x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$

2. Calcule a área do subconjunto B do plano definido por

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x(x-\pi) \leq y \leq \sin x\right\}.$$

3. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x^2 \log x & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) Estude f quanto a continuidade no ponto zero. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Indique, justificando, o domínio de diferenciabilidade de f e determine a função f'.

c) Determine os intervalos de monotonia de f e, caso existam, os respectivos extremos locais e absolutos.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

e) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$.

IV

1. Seja g uma função definida e diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $g'(0) = 2$ e

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad xg'(x) = g(x)$$

a) Justifique que a função g é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e determine g''.

b) Justificando, identifique a função g.
[Sugestão: Pode ser-lhe útil considerar a fórmula de MacLaurin de 1^a ordem com resto de Lagrange.]

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
2º EXAME (Versão B)

25/Janeiro/2010 Duração: 3h

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\pi x + \pi^2}{x} \leq \pi + x \right\}, \qquad B = \{ x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq 3 \}, \qquad C = A \cap B$$

a) Mostre que $C = [-\pi, 0[$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min B$, $\sup C$, $\min(C \cap \mathbb{Q})$ e $\inf(C \cap \mathbb{Z})$.

2. Determine a natureza de cada uma das seguintes séries e calcule a soma de uma delas

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$.

II

1. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $\arctan\left(\dfrac{1}{3x} + 2\right)$ **b)** $e^{\cos(\sin x)}$

2. Justificando, calcule (caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$) o limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} dt}{\sin \pi x}$$

III

1. Calcule

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\sqrt{1+4x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$

2. Calcule a área do subconjunto B do plano definido por

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x(x-\frac{\pi}{2}) \leq y \leq \cos x\right\}.$$

3. Considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 \log x & \text{se} \quad x > 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

a) Estude g quanto a continuidade no ponto zero. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Indique, justificando, o domínio de diferenciabilidade de g e determine a função g'.

c) Determine os intervalos de monotonia de g e, caso existam, os respectivos extremos locais e absolutos.

d) Indique, justificando, o contradomínio de g.

e) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 1$.

IV

1. Seja g uma função definida e diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $g'(0) = 2$ e

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad xg'(x) = g(x)$$

a) Justifique que a função g é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e determine g''.

b) Justificando, identifique a função g.
[Sugestão: Pode ser-lhe útil considerar a fórmula de MacLaurin de 1^a ordem com resto de Lagrange.]