Instituto Superior Técnico - TagusPark
Matemática Discreta 2020/2021
Exercícios para as aulas de problemas e teorico-práticas

Lista 11

Após a aula teorico-prática e a de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina. Com a exeção da Secção 1, vários dos exercícios (ou muito semelhantes) são apresentados como exemplos ou exercícios resolvidos no Capítulo 7 do livro.

Exercícios desta lista serão resolvidos apenas em aulas teorico-práticas e aulas teóricas. A maior parte dos exercícios da Secção 1 está resolvida no guião da aula teorico-prática 11.

1 Princípio do pombal

1. Mostre que num conjunto de 13 indivíduos existem 2 indivíduos que fazem anos no mesmo mês.

2. Conclua que nas 27 primeiras palavras da Constituição Portuguesa existem duas palavras que começam pela mesma letra.

3. Conclua que num estádio da Luz com lotação esgotada estão pelo menos 2 pessoas cujos primeiros nomes começam pela mesma letra, e cujos últimos nomes começam também pela mesma letra.

4. Numa sala de cinema estão presentes $n \in \mathbb{N}_2$ pessoas. Mostre que pelos menos duas dessas pessoas têm o mesmo número de colegas de trabalho presentes na sala.

5. Mostre que, se há mais livros numa biblioteca do que páginas em qualquer dos livros, então pelo menos dois livros têm igual número de páginas.

6. Mostre que, se a_i é uma sucessão de números naturais e $n \in \mathbb{N}_2$, então existem $k, m \in \mathbb{N}$ tais que a soma $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+m}$ é divisível por n.

7. Mostre que todo o conjunto de 7 números inteiros inclui dois inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 10.

8. Mostre que se se selecionarem aleatoriamente 10 pontos num triângulo equilátero de lado 3 cm, pelo menos 2 dos 10 pontos estão a uma distância que não excede 1 cm.

9. Mostre que se se selecionarem 151 alunos do IST com números compreendidos entre 99001 e 99300, inclusive, pelo menos dois alunos têm números consecutivos.

10. Uma fila de uma sala de cinema é constituída por 35 cadeiras e nessa fila estão sentadas 20 pessoas. Mostre que existem pelo menos duas pessoas sentadas à distância de 4 cadeiras (isto é, se uma está na cadeira k, a outra está na cadeira $k + 4$).

11. Mostre que se m e n são primos entre si, então para todos os $a_1 \in \mathbb{N}_{<m}$ e $a_1 \in \mathbb{N}_{<n}$ existe x tal que $x \equiv_m a_1$ e $x \equiv_m a_2$.

12. Mostre que num grupo de 6 indivíduos há 3 indivíduos que se conhecem ou há 3 indivíduos que não se conhecem.

13. Um cesto contém 10 *t-shirts* vermelhas, 10 *t-shirts* brancas e 10 *t-shirts* azuis. Qual o número mínimo de *t-shirts* a retirar aleatoriamente de modo a obter 4 *t-shirts* da mesma cor?

14. Um cesto contém 20 *t-shirts* de várias cores: 4 brancas, 7 verdes e 9 azuis. Qual é o menor número de *t-shirts* a retirar aleatoriamente do cesto de modo a obter (a) 4, (b) 5, (c) 6, (d) 7, (e) 8, (f) 9 *t-shirts* da mesma cor?

15. Mostre que toda a sequência de $n^2 + 1$ números reais distintos contém uma subsequência crescente ou decrescente de pelo menos $n + 1$ termos.

2 Árvores

Recorde que uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos.

1. Mostre que um grafo é uma árvore se e só se é conexo e toda a aresta é uma ponte.

2. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}_1$, se uma árvore tem um total de n vértices então tem um total de $n-1$ arestas. Sugestão: use indução completa em $n \in \mathbb{N}_1$.

3 Algoritmo de Gale-Shapley

1. Considere as listas de preferências seguintes.

Rapazes		**Raparigas**	
1	$2 > 3 > 4 > 1$	1	$1 > 3 > 4 > 2$
2	$2 > 4 > 3 > 1$	2	$3 > 2 > 4 > 1$
3	$2 > 1 > 4 > 3$	3	$4 > 1 > 3 > 2$
4	$3 > 2 > 1 > 4$	4	$1 > 4 > 2 > 3$

(a) Mostre que a lista de relacionamentos $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ não é estável.

(b) Use o algoritmo de Gale-Shapley para obter uma lista de relacionamentos estáveis.

2. Considere as listas de preferências seguintes.

Rapazes		**Raparigas**	
1	$1 > 2 > 3 > 4$	1	$4 > 3 > 1 > 2$
2	$1 > 4 > 3 > 2$	2	$2 > 4 > 1 > 3$
3	$2 > 1 > 3 > 4$	3	$4 > 1 > 2 > 3$
4	$4 > 2 > 3 > 1$	4	$3 > 2 > 1 > 4$

(a) Mostre que a lista de relacionamentos $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ não é estável.

(b) Use o algoritmo de Gale-Shapley para obter uma lista de relacionamentos estáveis.

11
11 2~~1~~
11 2~~1~~ 32
11 2~~1~~ 32 4~~4~~
11 24 32 4~~4~~
11 24 3~~2~~ 42
1~~1~~ 24 31 42
1~~1~~ 24 31 42
13 24 31 42

3. Considere as listas de preferências seguintes.

Rapazes		**Raparigas**	
1	$4 > 3 > 1 > 2$	1	$1 > 4 > 2 > 3$
2	$4 > 1 > 2 > 3$	2	$1 > 3 > 4 > 2$
3	$2 > 4 > 1 > 3$	3	$4 > 1 > 2 > 3$
4	$4 > 1 > 2 > 3$	4	$2 > 1 > 4 > 3$

14
1~~4~~ 24
1~~4~~ 24 32
1~~4~~ 24 32 4~~4~~
13 24 32 41

(a) Mostre que a lista de relacionamentos $\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$ não é estável.

(b) Use o algoritmo de Gale-Shapley para obter uma lista de relacionamentos estáveis.

4. O Departamento de Informática de uma certa universidade está para contratar 5 monitores para apoio às aulas de 5 disciplinas no próximo ano letivo. Após a seleção foram escolhidos 5 candidatos. A distribuição dos candidatos pelas disciplinas será feita tendo em conta as preferências dos 5 docentes responsáveis pelas disciplinas pelos monitores, e também as preferências dos monitores pelas disciplinas, de forma a conseguir uma distribuição (relacionamento) estável. São os docentes que propõem contratação. As listas de preferências são

Docentes									
1	3	>	2	>	1	>	4	>	5
2	3	>	5	>	2	>	1	>	4
3	**X**	>	**Y**	>	1	>	**Z**	>	2
4	3	>	5	>	1	>	2	>	4
5	**Y**	>	2	>	**Z**	>	**X**	>	1

Candidatos									
1	**X**	>	**Y**	>	2	>	**Z**	>	1
2	4	>	3	>	1	>	2	>	5
3	3	>	2	>	1	>	5	>	4
4	1	>	3	>	4	>	5	>	2
5	**Z**	>	**Y**	>	**X**	>	2	>	1

Use o algoritmo de Gale-Shapley para obter uma lista de relacionamentos estáveis quando

(a) **X**=5, **Y**=3 e **Z**=4 (b) **X**=4, **Y**=5 e **Z**=3.

4 Labirintos

1. Recorde o algoritmo de Trémaux para percorrer labirintos (sem conhecer as suas plantas/grafos).

   (a) Use o algoritmo de Trémaux para percorrer os labirintos $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_5$, $\mathcal{L}_6$ e $\mathcal{L}_7$ desde a entrada até ao centro. Continue depois a aplicação para voltar ao ponto de partida, confirmando o enunciado no teorema de Trémaux.

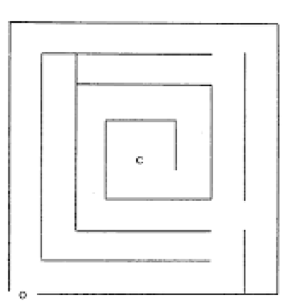
   (b) Use o algoritmo de Trémaux para percorrer os labirintos $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ e $\mathcal{L}_4$ desde a entrada até à saída.

2. O algoritmo de Tarry é um outro algoritmo para percorrer labirintos:

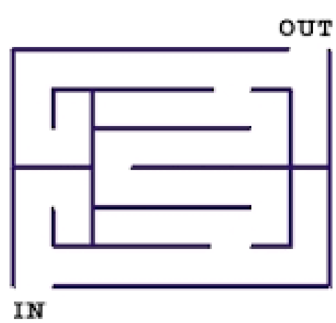
   (a) sempre que por aresta uv se chegar a um vértice v (não inicial) ainda não visitado, seguir por uma aresta vz qualquer;

   (b) nunca se deve escolher (agora no sentido oposto), a aresta através da qual chegou pela primeira vez a um vértice, a não ser que seja a única opção.

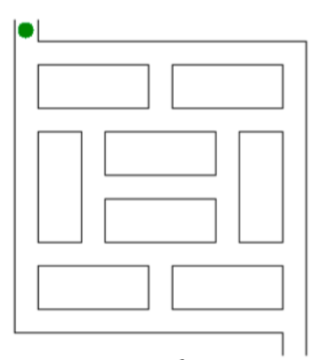
   Repita o exercício anterior, usando agora o algoritmo de Tarry.



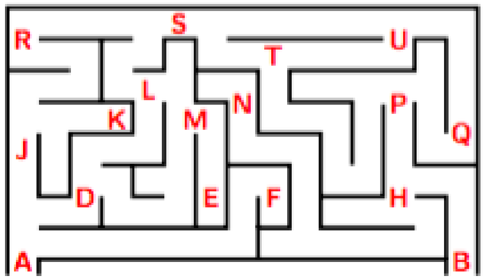
$\mathcal{L}_1$



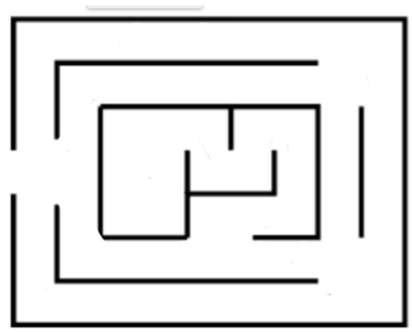
$\mathcal{L}_2$

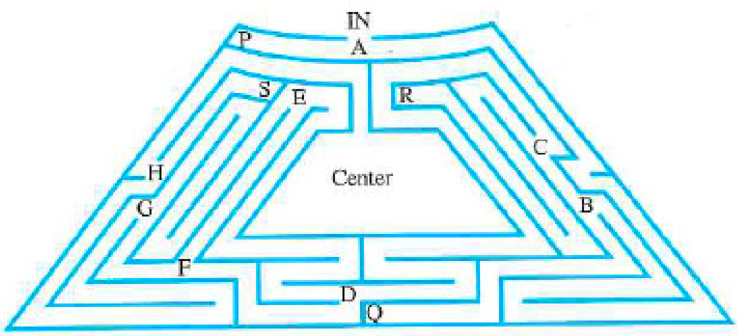


$\hat{\mathcal{L}}_3$



$\mathcal{L}_4$


$\mathcal{L}_5$



$\mathcal{L}_6$


$\mathcal{L}_7$