RESOLUÇÃO DO TESTE DE AMII DE 7 DE MAIO DE 2005

1. Calcule uma primitiva das seguintes funções

$$\frac{x}{3+2x^2}, \qquad \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}, \qquad \frac{\sin(\log x)}{5x}, \qquad x \operatorname{arctg} x.$$

Desenvolva a primeira função em série de potências de x.

Resolução: As três primeiras primitivas são imediatas:

$$\int \frac{x}{3+2x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{3+2x^2}dx = \frac{1}{4}\log(3+2x^2).$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)(2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = -(2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\int \frac{\sin(\log x)}{5x}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}\sin(\log x)dx = -\frac{1}{5}\cos(\log x).$$

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.
\end{aligned}$$

O desenvolvimento da primeira função em série de potências de x é o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3+2x^2} &= \frac{x}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}x^2} \\
&= \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}x^2\right)^n \qquad \text{para } \left|\frac{2}{3}x^2\right| < 1, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}x^{2n+1} \qquad \text{para } |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

2. Determine a área da região plana dada por

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0, 2\pi] \wedge \sin x \leq y \leq x\}.$$

Resolução: Uma vez que $\sin x \leq x$ para todo o $x \geq 0$, a área é dada pelo integral

$$\int_0^{2\pi}(x - \sin x)dx = \frac{x^2}{2} + \cos x\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 + 1 - (0+1) = 2\pi^2.$$

3. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Prove que $\varphi(0) + \varphi'(0) + \varphi''(0) = f(0) - f'(0)$.

(b) Supondo que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, mostre que ϕ tem um extremo local no ponto zero. Será máximo ou mínimo?

Resolução:

(a) Seja

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

o integral indefinido de f. Uma vez que f é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que F é diferenciável e $F'(x) = f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Por aditividade relativamente ao intervalo de integração (ou pela regra de Barrow)

$$\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$$

Logo $\varphi(0) = F(0) - F(0) = 0$. Pela regra de derivação da função composta

$$\varphi'(x) = f(x^2)2x - f(x),$$

e uma vez que f é diferenciável temos ainda

$$\varphi''(x) = f'(x^2)4x^2 + 2f(x^2) - f'(x). \tag{1}$$

Logo

$$\varphi(0) + \varphi'(0) + \varphi''(0) = 0 - f(0) + 2f(0) - f'(0) = f(0) - f'(0).$$

(b) Se $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ então pela alínea anterior,

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$$

e

$$\varphi''(0) = -1.$$

Uma vez que φ é de classe C^2 (a equação (1) mostra que a segunda derivada é contínua), a fórmula de Taylor garante que φ tem um máximo relativo no ponto 0.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ seja $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por

$$\phi_n(x) = \frac{\sin n^2 x^2}{n^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Convergirá ϕ_n pontualmente? E uniformemente? Justifique.

(b) Prove que a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\phi_n(x)$$

converge pontualmente em $\mathbb{R}$ e uniformemente em qualquer intervalo $[a, b](a, b \in \mathbb{R}; a < b)$.

Resolução:

(a) Seja $\epsilon > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Então para $n > p$ temos

$$|\phi_n(x) - 0| = \left| \frac{\sin n^2 x^2}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{p^2} < \epsilon.$$

Conclui-se que ϕ_n converge uniformemente para a função nula, e portanto converge também pontualmente para a mesma função.

(b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, seja

$$a_n = \frac{\max\{|a|, |b|\}}{n^2}.$$

Então

$$|x\phi_n(x)| = |x||\phi_n(x)| \leq \max\{|a|, |b|\}\frac{1}{n^2} \leq a_n \qquad \text{para } a \leq x \leq b.$$

Uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

(uma vez que se trata de uma série de Dirichlet com expoente < 1), pelo critério de Weierstrass concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\phi_n(x)$$

converge uniformemente no intervalo $[a, b]$. Em particular, a série converge pontualmente no intervalo $[a, b]$ e, da arbitrariedade de a e b obtemos que a série converge pontualmente em $\mathbb{R}$.

5. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{ e } \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, f''(x) \geq 1.$$

(a) Prove que f e f' são estritamente crescentes em $\mathbb{R}^+$.

(b) Sendo $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

prove que

$$\frac{x^3}{3} \leq \psi(x) \leq xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Resolução:

(a) Uma vez que f é de classe C^2, f' é de classe C^1 e portanto dado $x > 0$, a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange para a função f' diz-nos que

$$f'(x) = f'(0) + f''(\xi)x \text{ para algum } \xi \in]0, x[.$$

e portanto

$$f'(x) \geq 0 + 1x > 0 \text{ para todo o } x > 0.$$

De um Corolário do Teorema de Lagrange conclui-se então que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Uma vez que $f''(x) \geq 1 > 0$, para $x > 0$, o mesmo Corolário garante que f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

(b) Uma vez que f é de classe C^2 para todo o $x > 0$, existe $\xi \in]0, x[$ tal que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(\xi)\frac{x^2}{2} = f''(\xi)\frac{x^2}{2}. \tag{2}$$

Conclui-se que para todo o $x \geq 0$ temos

$$f(x) \geq 1\frac{x^2}{2}$$

e portanto, por monotonia do integral

$$\psi(x) = \int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x \frac{t^2}{2}dt = \frac{x^3}{6} \quad \text{para todo o } x \geq 0.$$

Por outro lado, a fórmula (2) mostra que $f(x) > 0 = f(0)$ para todo o $x > 0$ e uma vez que f é crescente em $\mathbb{R}^+$, temos portanto

$$f(t) \leq f(x) \text{ para todo o } 0 \leq t \leq x.$$

A monotonia do integral implica então que dado $x > 0$

$$\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x f(x)dt = xf(x),$$

o que conclui a demonstração.