CDI 1

* Lógica Matemática

- Equivalentes ou Sinónimos (=)
- Termo / designação $\neq$ Objecto/ente
- Valor lógico (verdadeiro = 1 ; falso = 0)
- Proposição (= ou $\neq$)
- Proposições equivalentes ($\Leftrightarrow$) ⇒ mesmo valor lógico
- $\sim$ (negação)
- $\wedge$, "e" (Conjunção)
- $\vee$, "ou" (disjunção)
- $\Rightarrow$, "se" (implicação)

Primeiras Leis de Morgan

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r$$
$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$
$$(\sim(p \Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow (p \not\Leftrightarrow q)$$
$$(\sim(p \not\Leftrightarrow q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$$

Conjunção Disjunção implicação equivalencia

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow \sim q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p$
V	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F	F	V

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$
$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$
$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$$
$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$$
$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$$

- Expressões com variáveis (termos, proposições)
- Expressões designatórias (x^2; $x+y+z$ ...)
- Expressões proposicionais ($x+1<y$; $x^2 \geq 0$ ...)

× Quantificadores

$\forall$ Universal (qualquer que seja, para todo)

$\exists$ Existêncial (existe - pelo menos - um)

Segundas Leis de Morgan

- $\sim (\forall x \ \ p(x)) \Leftrightarrow \exists x \sim p(x)$
- $\sim (\exists x \ \ p(x)) \Leftrightarrow \forall x \sim p(x)$

$\forall x \ \exists y : \ p(x)$ V

$\exists y \ \forall x : \ p(x)$ F

→ Não são comutáveis

× Conjuntos (colecção de objectos)

$\Rightarrow$	$\subset$	(está contido)
$\wedge$	$\cap$	(intersecção) (e)
$\vee$	$\cup$	(união) (ou)
$\sim$	C	(complementar)

$\boxed{x \in X}$ → o elemento x pertence ao conjunto X

$\boxed{x \notin X}$ → o elemento x não pertence ao conjunto X

$A = B$ → o conjunto A tem os mesmos elementos que o conjunto B

$\{x : p(x)\}$ → Conjunto formado pelos elementos que tornam verdadeira uma condição

- A e B conjuntos

$B \supset A$

$p(x) \Rightarrow q(x)$ → $A \subset B \iff \{\forall x : \in A \Rightarrow x \in B\}$ ⇐ A está contido em B

→ $A \not\subset B \iff \{\exists x : x \in A \wedge x \notin B\}$ A não está contido em B

$p(x) \wedge q(x)$ → $A \cap B \iff \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ intersecção

$p(x) \vee q(x)$ → $A \cup B \iff \{x : x \in A \vee x \in B\}$ Reunião

→ $A \setminus B \iff \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ diferença

$\sim p(x)$ → $A^c \iff \{x : x \notin A\}$ Complementar

$$\boxed{A \setminus B = A \cap B^c}$$

- Conjunto singular $\{\ \}$

✓ $1 \in \{1\}$ $\qquad$ $0 \notin \{1\}$ ✓

✓ $\{1\} \subset \{1\}$ $\qquad$ $\{0\} \not\subset \{1\}$ ✓

$\{1\} \cancel{\notin} \{1\}$

- Conjunto vazio

$\emptyset$ ou $\{\ \}$ ou $\{x : x \neq x\}$

× Pares ordenados / sequências / termos ordenados

$$(a,b) \neq (b,a) \qquad \text{NOTA: } \{a,b\} = \{b,a\}$$

$$(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$$

× Produtos cartesianos

A e B conjuntos
produto cartesiano de A e B = $\boxed{A \times B}$

$$A \times B = (x,y) : x \in A \vee y \in B$$

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$
$$\neq$$
$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$

$\mathbb{N}$ | Naturais $\{1, 2, 3 \ldots\}$
$\mathbb{Z}$ | Inteiros $\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
$\mathbb{Q}$ | Racionais $\{p/q$, com p e $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0\}$
$\mathbb{R}$ | Reais
$\mathbb{C}$ | Complexos

*

Propriedade arquimediana

$a, b \in \mathbb{R} \quad a > 0 \mid \exists n \quad a.n$
?

NOTA:
se $n^2 = 2p^2$
$\Downarrow$
n é par

Teorema
$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
então,
$\exists u \in \mathbb{Q} \quad u \in \,]a, b[$
$\exists w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad w \in \,]a, b[$

ex: $a = 0 \quad]0, b[\quad b > 0$
$\Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N} \quad nb > 1 \Leftrightarrow b > \frac{1}{n} > 0$ ($\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$)

$\exists k \in \mathbb{N} : kb > \sqrt{2} \Leftrightarrow b > \frac{\sqrt{2}}{k} > 0$ ($\frac{\sqrt{2}}{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Corolário
$]a, b[\cap \mathbb{Q}$ é infinito
$]a, b[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é infinito

× Numeros reais

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \mathbb{R}$ (n vezes)

- Axiomas Algébricos
  - Comutatividade $a+b=b+a$, $a \times b = b \times a$
  - Associatividade (+ e .)
  - Distributividade $x(y+z) = xy + xz$
  - Elementos neutros $(a+0=0;\ a \times 1 = a)$
  - Simétricos $(a+(-a)=0)$
  - Inversos $(a \times a^{-1} = 1,\ a^{-1} = \frac{1}{a})$

NOTA:

- Lei do corte para a <u>adição</u>

  $a+b=a+c$ então $b=c$

- Lei do corte para a <u>multiplicação</u>

  $a \times b = a \times c$, $a \neq 0$ então $b=c$

- Se $a.b=0$ então $a=0 \wedge b=0$
- $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
- $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$
- $x>y \Leftrightarrow x+(-y) \in \mathbb{R}^+$

(demonstração pg 4) • Módulo ou valor absoluto

$$- |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$- |x+y| \leq |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

• Transitividade ($a<b$, $b<c \Rightarrow a<c$)

• $a<b \Leftrightarrow -a>-b$ / a e $b \in \mathbb{R}^+$ então $a+b \in \mathbb{R}^+$

• Lei do corte

$$a<b \Leftrightarrow a+c < b+c$$

× Intervalos

• Intervalo aberto: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a<x<b\}$
• Intervalo fechado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
• Intervalos ilimitados: $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$

e

$|x| > a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$

× Indução Matemática

• $\mathbb{N}$ é o menor conjunto indutivo que contém o 1 de $\mathbb{R}$

• $1 \in \mathbb{N}$
• $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a+1 \in \mathbb{N}$

Se $A \subset \mathbb{N}$ é indutivo, então $A = \mathbb{N}$

Pretende-se mostrar que p(n) é verdadeira

PROVAR 1) P(1) é verdadeira ($1 \in A$)

2) Se p(n) é verdadeira para um determinado $n \in \mathbb{N}$, então P(n+1) também é verdadeira

($n \in A \Rightarrow (n+1) \in A$)

Apartir de 1) e 2) conclui-se que P(n) é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$

PROVAR → se $s \in \mathbb{Q}$ $\boxed{s^2 = 2}$

$s = \frac{m}{p} \Leftrightarrow \frac{m^2}{p^2} = 2$; $m^2 = 2p^2$ são pares ; $p^2 = 2p^2$

→ $mdc(m,p) = 1$ ✗

× Axioma do supremo →

Se $x \geq a$ para $\forall a \in A$, x é Majorante de A
(A é majorado ou limitado superiormente)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x > S - \varepsilon$

Se $x \leq a$ para $\forall a \in A$, x é minorante de A
(A é minorado ou limitado inferiormente)

IN não é majorado! $S = \sup \mathbb{N}$ $\exists n \in \mathbb{N} : n > S - 1 \Rightarrow n + 1 > S$, $n+1 \in \mathbb{N}$ absurdo!

Se b é majorante de A e não há majorantes de A menores que b

↓

b é Supremo de A → sup A

Se b é minorante de A e não existem minorantes de A maiores que b

↓

b é Infimo de A → inf A

Se o supremo de A pertence ao conjunto A

→ O conjunto A tem Máximo (= sup A)

Se o ínfimo de A pertence a A

→ tem Minimo (= inf A)

Propriedade arquimediana

NOTA: "são primos entre si" → mdc = 1

× Relações

• uma relação G é um conjunto de pares ordenadas (conjuntos)

• $x\,G\,y \rightarrow x$ está na relação com y

• G tem domínio $D_G = \{x : \exists y \; x G y\}$

• G tem contradomínio $C_G = \{y : \exists x \; x G y\}$

• Uma relação tem sempre inversa G^{-1}

$$x G y \Leftrightarrow y G^{-1} x$$

× Funções

• As funções são casos particulares das relações.

• $f : A \longmapsto B$

domínio (A), contradomínio (B)

• $f(A) = y = Im(f)$ imagem

contradomínio → $\{y \in \mathbb{R} : y = f(x)$ para algum $x \in D\}$

• Uma função pode ser majorada e/ou minorada, se for majorada e minorada diz-se limitada

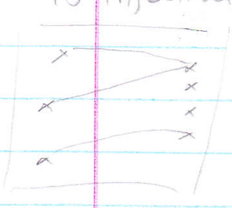
- Uma função de domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

  - par, se $f(x) = f(-x), \forall x \in D$
  - ímpar, se $f(x) = -f(-x), \forall x \in D$
  - crescente, se $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)), \forall x_1, x_2 \in D$
    ESTRITAMENTE, se $f(x) < f(y)$
  - decrescente, se $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)), \forall x_1, x_2 \in D$
    ESTRITAMENTE, se $f(x) > f(y)$
  - monótona, se é crescente ou decrescente em D'
  - Periódica com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$

A e B equipotentes → têm o mesmo cardinal

e/ou

Ñ injectiva



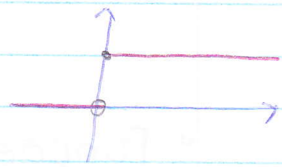
  - sobrejectiva, $\forall y \in B \ \exists x \in A : y = f(x)$
  - Injectiva, $\forall x_1, x_2 \in A \ \begin{cases} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \end{cases}$ — tem inversa $f^{-1}(x)$
  - Bijectiva, se for injectiva e sobrejectiva

- Heaviside

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Limite lateral →

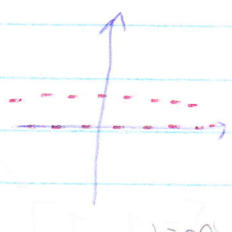
$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



- Dirichlet

$$\text{dir} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{dir}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



RESTRIÇÃO

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} d(x) = \lim_{x \to a} d|_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} d(x) = \lim_{x \to a} d|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \lim_{x \to a} 1 = 1$$

• Se o domínio de uma função é $\mathbb{N}$ chamamos de sucessão

$$u: \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$$

- u_n: termo de ordem n / termo geral

- Progressão aritmética:

o termo geral é $u_n = a + (n-1)r$ $\qquad u_{n+1} - u_n = c$

u_1 razão

- Progressão Geométrica:

o seu termo geral é $u_n = a \cdot r^{n-1}$ $\qquad u_{n+1}/u_n = c$

u_1 RAZÃO

- Sucessão de Fibonacci

$$u_1 = u_2 = 1$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

• Funções polinomiais

$$F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 \dots + C_n x^n$$
$$D = \mathbb{R}$$

• Funções racionais

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinomios}$$

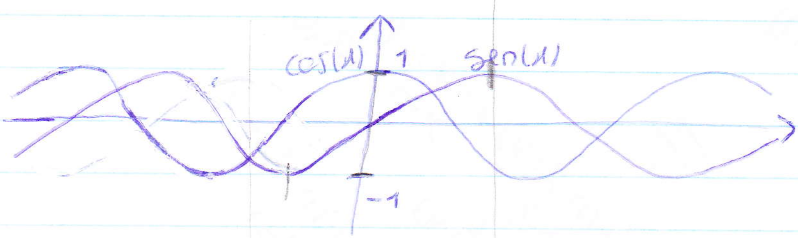
sempre $\neq 0$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

• Funções trigonométricas

limitados

$$D' = [-1, 1]$$



Def. de HEIN ☆

$\lim g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$a_n = \frac{1}{n\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = n\pi$

$g(a_n) = 0 \to 0$

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0$

$g(b_n) = 1 \to 1$

$K\pi \to 0$

$\frac{\pi}{2} + 2K\pi \to 0$

$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ e $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \forall x \in \mathbb{R}$

e

$\cos(x) = \cos(-x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\cos(0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$

$\cos(\pi) = -1$

as funções trigonométricas tg e ~~cotg~~ arc tg

$\tan = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ e $\cot = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

tangente

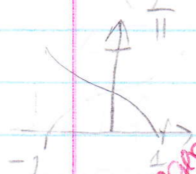
$D = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq K\pi + \frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}\}$

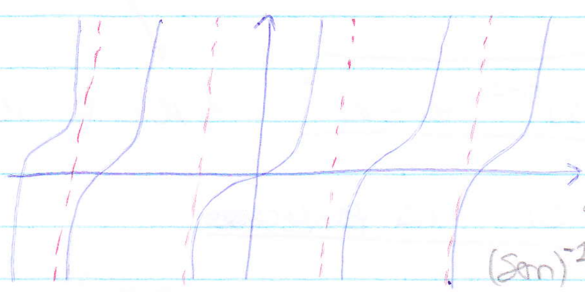
$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

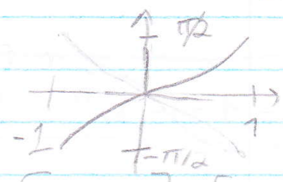
$(\cos)^{-1} = \text{arcocoseno}(x)$

$\text{arcocoseno}\, x = y$

$\Leftrightarrow \cos y = x$







$\operatorname{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$

$(\operatorname{sen})^{-1} = \text{arcoseno}(x) =$

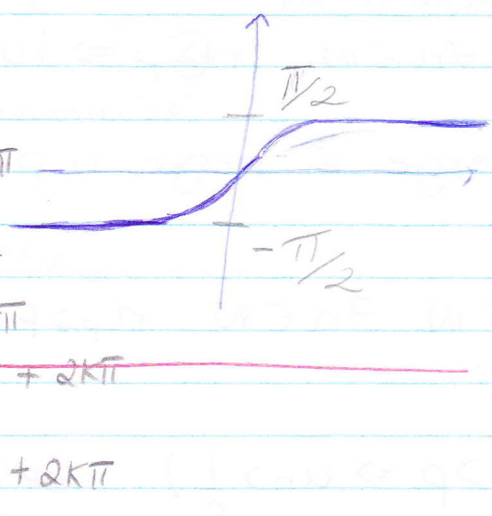
$\text{arcosen}\, x = y \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$

arccotangente

$D = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$

$\operatorname{Tg} x :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$

$\operatorname{arc tg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$



NOTA:

$\cos x = 0 \quad x \in \frac{\pi}{2} + K\pi$

$\cos x = 1 \quad x \in 2K\pi$

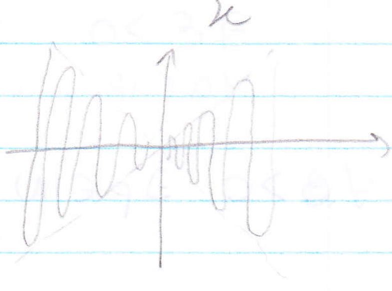
$\cos x = -1 \quad x \in \pi + 2K\pi$

$\operatorname{sen} x = 0$ se $x \in \pi + K\pi$

$\operatorname{sen} x = 1$ se $x \in \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

$\operatorname{sen} x = -1$ se $x \in \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$

$x . \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

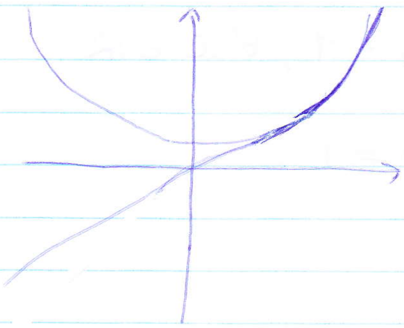


11

$D = \mathbb{R}$
$D' = \mathbb{R}$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$D' = [1, +\infty[$
$D = \mathbb{R}$



$x \longmapsto \log x = y \longrightarrow 1 + y = z \rightarrow \sqrt{z}$

$\varphi(x) = \sqrt{1 + \log x}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \log x \in \mathbb{R} \wedge 1 + \log x \geq 0\}$

$\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ $\quad \log x \geq -1$ $\quad e^{\log x} = x \geq e^{-1}$

- <u>FUNÇÃO COMPOSTA</u>

$f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g: D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f \circ g): D_{f \circ g} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x))$

$\{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ e } g(x) \in D_f\}$

NOTA: $\boxed{a_n = 1 - (-1)^n = 1 + (-2)^{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

- <u>CONVERGÊNCIA DE UMA SUCESSÃO</u>

vizinhança
Bolzano-Weierstrass

$u_n \to a$ $\longrightarrow$ A sucessão (é convergente) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende (converge) para um número real a
sse

"a partir do qual" $\quad u_n \in V_\varepsilon(a)$ $\quad$ é irrelevante ser $\leq$ ou $<$

não pode ser $\geq$ / $\varepsilon = 0$, $u_n = a$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$

é irrelevante ser $\geq$ ou $>$

Dizer que não converge é negar a proposição anterior:

n depende de p?

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} \quad n_p \geq p \wedge |u_{n_p} - a| \geq \varepsilon$

$\forall a \in \mathbb{R} : \sim(u_n \to a)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : (n > p \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon})$
$: (n > p \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon})$

Se a sucessão tende para $+\infty$ (ou $-\infty$)

Exemplo:

$$u_n = \frac{1}{n+1} \qquad a=0$$

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \varepsilon}$$

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \iff n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

tomando um número natural p: $p > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ é possível porque $\mathbb{N}$ não é majorado

então: $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$.

u_n verifica a proposição com $a=0$.

Subsucessões

X Limite de uma função num ponto (ver exemplos pg 76/77)

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{ou} \quad f(x) \to b \text{ quando } x \to a$$

e quando a função não está definida em a, mas está definida em pontos arbitrariamente próximos de a?

- o erro $\overbrace{|f(x) - b|}^{\varepsilon>0}$ pode ser reduzido a valores tão pequenos quanto se deseje através da redução da diferença $|x-a|$

dado um erro admissível $\varepsilon>0$ existe sempre um correspondente $\delta>0$ tal que quando $|x-a|<\delta$ então $|f(x)-b|<\varepsilon$

Nota:

se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ então a sucessão $u_n := f(n)$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} u_n = l$

Cauchy $\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \iff \left[\forall (x_n) \subset D_f \quad x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b\right]$ HEIN exemplo ★

$\{\forall R>0 \quad V_R(a) \cap D \setminus \{a\} \neq \emptyset\} \iff a$ é ponto de acumulação → só faz sentido

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = mx + p \quad (m, p \in \mathbb{R})$ ← Grau ≤ 1, Polinomial

$a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to a} f(x) = ma + p$ ↳ $m \neq 0$

PROVÁMOS NA AULA ⟹ $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$

Definição

• Então dizemos que uma função f tem limite b quando x tende para a se para todo o $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que, para todo o x, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$.

↳ x é uma aproximação a a com erro inferior a δ

↳ $f(x)$ é uma aproximação a b com erro inferior a ε

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon}$$

$\forall x \in D \setminus \{a\}$

$]a - R, a + R[$

Vizinhança:

$$V_R(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < R\}$$

(Raio R, centro a)

$$V_R'(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < R\}$$

$a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq b$

$\varepsilon > 0 = \frac{|b - a|}{2}$

$V_\varepsilon(a) \cap V_\varepsilon(b) = \emptyset$

$a \qquad b$

$$x \in V_\delta'(a) \cap D$$

Nota:

$\lim_{x \to a} f(x) = b \ ; \ \lim_{x \to a} (f(x) - b) = 0$

• Se $f(x)$ é uma função constante, $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

• Si $f(x)$ é a função identidade, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a \ , \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Nota:

Não é necessário que a pertence ao domínio de f. No entanto a definição só faz sentido se para todo o $\delta > 0$ $\exists x \in D : 0 < |x - a| < \delta$.

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} [\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ \forall x \in D \ x > R \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon]$

$(-\infty \ x < -R)$

• $\lim f(x) = +\infty \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ x \in D \ 0 < |x - a| < R \Rightarrow f(x) > R$

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} : 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon$ ‖ NE $\lim_{x \to a} f(x) = b$

$-\infty \quad f(x) < -R$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \forall \varepsilon>0\ \exists R>0 : \forall x\in D\ x>R \Rightarrow f(x)>L \\ -\infty & \dots \Rightarrow f(x)<-L \end{cases}$

$-\infty \quad \dots \quad x<-R \quad \dots$

× Propriedades elementares de limites num ponto

- Unicidade do limite $\left|\ \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ e } \lim_{x\to a} f(x) = b',\ b = b'\right.$
- $\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ → se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

$a_n \leq b_n$ → convergente ou $a_n < b_n$

$\lim a_n \leq \lim b_n$

- $\sqrt{f(x)}$, $f(x)>0$

- Princípio do encaixe ou da função enquadrada

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

$\forall x \in D_f \cap D_g \cap D_h$

$g(x)$ é convergente

$\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x) \Rightarrow \lim g(x) = b$

Exemplo:

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Como $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \lim_{x\to 0} 1$,

então $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}}{x}$ → s enquadrada; $\alpha \left| x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}}{x} \right| < |x|$ → suc. lim × suc. que tende p/ 0

exemplo:

$0 < 2\,\underbrace{\dfrac{1+(-1)^n}{n!}}_{\downarrow\ 0} < \dfrac{2 \cdot 2}{(2n)!} \leq \dfrac{4}{n}$, com $0 \to 0$ e $\dfrac{4}{n} \to 0$ — Princípio da sucessão enquadrada

∃ subsuc. div ou ∃ 2 c/ limites ≠ ⇒ a_n divergente

a_n convergente ⇒ toda a subsuc. é converg. e tem o mesmo limite

b é sublimite de a_n ⟺ b é limite de ss de a_n

$\forall n \in \mathbb{N}$, b_n subsucessão de a_n: $b_n = a_{k_n}$, k_n estritamente crescente

b_n sub sucessão de a_n: $a_1\ \underbrace{a_2}_{b_1}\ a_3\ \underbrace{a_4}_{b_2}\ a_5\ \underbrace{a_6}_{b_3}$

n̄ pode ser da mesma ordem ou inferior

- Limite de funções compostas

$$\lim_{x \to a} g(x) = b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{y \to b} f(y) = c \in \mathbb{R}$$

então $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = c$

$x_n \to a \Rightarrow g(x_n) \to b \Rightarrow f(g(x)) \to c$

Dem

$\lim_{x \to a} g(x) = b \Leftrightarrow \forall r > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |g(x) - b| < r$

e

$\lim_{y \to b} f(y) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 : 0 < |y-b| < r \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(y) - c| < \varepsilon$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < r$
$\Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon$

então:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = c$

- Limites relativos e laterais

quando $x \to a$ apenas de um dos lados do limite, $x > a$ (ou) ou $x < a$ (esq)

- Limite à direita:

Restrição de $f(x)$ a $D_f \cap]a, +\infty[$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$

Sse.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$

$x \in D \wedge 0 < x < a + \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

- Limite à esquerda:

Restrição de f(x) a $D \cap]-\infty, a[$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

sse:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0:$$

$$x \in D \wedge a-\delta < x < a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

- Indeterminações e Recta Acabada

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $-\infty < x < +\infty$

$\widetilde{\mathbb{R}}$

$\forall x \in \mathbb{R} \ -\infty < x < +\infty$

$\lim a^n \ (a \in \mathbb{R})$

- $a > 1$, $a^n \to +\infty$
- $a < -1$, a^n NE $\lim a^n$

$a = -|a|$

$a^n = (-1)^n |a|^n$

$|a| < 1$, $\lim a^n = 0$

$a = 1$, $\lim a^n = 1$

$a = -1$, $\lim a^n$ NE

$(+\infty) + (-\infty) \to \boxed{\infty - \infty}$

$\boxed{0 \pm \infty}$

$\boxed{0/0}$

$\boxed{\pm\infty / \pm\infty}$ dividir pelo maior

$\boxed{\pm\infty / 0}$

$\boxed{1^{\pm\infty}}$

$\boxed{\pm\infty^0}$

$$\boxed{n^p, \ a^n, \ n!, \ n^n} \quad a > 1$$

$\lim \sqrt[n]{a_n} \ (a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N})$

Se existe $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

$\ell \in [0, +\infty[$

então $\boxed{\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell}$

$u_n \to -\infty \Leftrightarrow \forall R > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ n > p \Rightarrow u_n < -R$

$u_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall R > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ n > p \Rightarrow u_n > R$

$\mathbb{N}$ não é majorado

$\exists p \ a_p > R \quad \forall n \ n > p \Rightarrow a_n > a_p > R$

se $u_n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{u_n} \to 0$

$\varepsilon > 0 \quad \left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon \Leftrightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon} = R_\varepsilon$

$u_n \to 0$

$u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{u_n} \to 0$

× CONTINUIDADE

A Relação $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$ pode falhar quando:

• O limite de $f(x)$ quando $x \to a$ não existe (Ex: $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ em $a=0$)

• O limite existe mas o ponto a não pertence ao domínio, e portanto não faz sentido falar em $f(a)$ (Ex: $f(x) = x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ em $a=0$)

• O limite existe, a pertence ao domínio mas o limite é ≠ de $f(a)$.

LOCAL

Uma função diz-se contínua num ponto $a \in D$ se

$$\text{existe } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

e diz-se contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio, D.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

NOTA

f e g são contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g tmb são contínuas em a

se $a \in D_{f \circ g}$, (~~g e f são contínuas~~) g é contínua em $g(a)$ e f contínua em a então $(f \circ g)$ é contínua em a.

- Continuidade lateral

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \rightarrow$ contínua à direita em a

$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \rightarrow$ contínua à esquerda em a

se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

$\downarrow$

é contínua em a

NOTA:

Funções contínuas: global

f é contínua em a $\forall a \in D$

- Polinomiais $p(x)$
- Racionais $p(x)/q(x)$ (onde $q(a) \neq 0$)
- Módulo $|x|$
- trigonométricas
- exponenciais
- logaritmo

- RESTRIÇÃO DE $f(x)$ a A =

$f|_A (x) = f(x) \quad \forall x \in A$

$A \subset D_f$

inverso

- Prolongamento por continuidade

se existe $\lim_{x \to a} f(x) = b$

então existe $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$

Se uma função tem limite quando $x \to a$, mas a função não está definida para $x = a$:

$f(x) \begin{cases} f(x), \text{ se } x \neq 0 \\ 1, \text{ se } x = 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

$\downarrow$

é uma extenção da função original

Dizemos que $f(x)$ é um prolongamento por continuidade da função original ao ponto $x=0$.

Corolário

I intervalo
f é contínua em I $\Rightarrow f(I)$ intervalo

contínua

× Teorema do valor intermédio ou de Bolzano

Seja f uma função contínua num intervalo fechado e limitado $[a,b]$, tal que $f(a) \neq f(b)$. Então para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \alpha$.

Corolário
I intervalo, f contínua em I
$f(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ tem sempre o mesmo sinal

• Corolário

Seja f uma função contínua num intervalo $[a,b] \subset D$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$

$\rightarrow f(I)$ intervalo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monótona $\Rightarrow$ contínua em I

$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \wedge x < c\}$ e c^+ inf $x > c$ logo é contínua em c

• Propriedade do supremo

Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo

Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, então f é limitada nesse intervalo, o ~~conjunto~~ contradomínio $f([a,b])$ é um conjunto limitado ou, de forma equivalente, existe $M > 0$: $|f(x)| < M$ para qualquer $x \in [a,b]$

(Demonstrações: pg 29/30)

× Teorema de Weierstrass

Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, então f tem máximo e mínimo nesse intervalo.

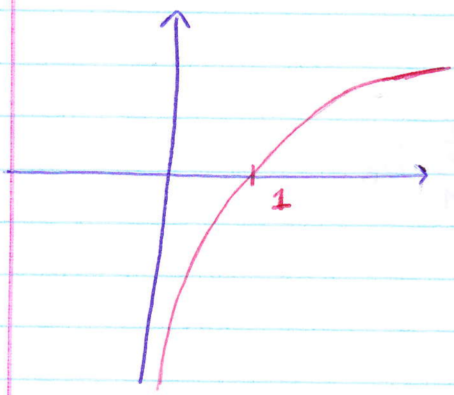
(Demonstração: pg. 30)

Inversa

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e est. monótona
então $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ é contínua (em $f(I)$)

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARITMO

logaritmo:



derivada $= \frac{1}{x}$

anula-se em $\log 1$

$\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$

$\log(x/y) = \log x - \log y \quad \forall x, y < 0$

$\log(x^n) = n \log x$

$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

não é minorada, nem majerada

contradominio $= \mathbb{R}$

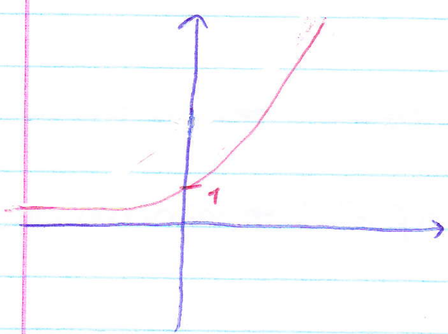
$\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é estritamente crescente, a sua inversa é e^x.

$\log \frac{1}{a} = -\log a$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ \forall a > 0}$$

$$a = e^{\log a} \Leftrightarrow a^x = (e^{\log a})^x \Leftrightarrow a^x = e^{(\log a) x} \Leftrightarrow a^x = e^{x \log a} \Leftrightarrow$$

exponencial:



derivada $= \exp x = e^x$

$\exp(x+y) = \exp x + \exp y$

Dominio: $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\exp(0) = 1 \quad , \quad e = \exp(1)$

$1 = \log(e)$ — e é irracional

$a^x = e^{x \log a}$

é estritamente crescente, concavidade virada para cima

SOMATÓRIO

(Definições por recorrência)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Propriedades

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot c) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

TEOREMA DE BOLZANO-WEIRSTRASS

Toda a sucessão limitada tem (pelo menos) um sublimite (i.e. uma subsucessão convergente)

(a_n), suc limitada, $S = \{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha$ é sublimite de $a(n) \}$

(i) $S \neq \emptyset$

(ii) S é limitada

maior sublimite (iii) $\overline{\lim}\, a_n$: limite máximo | superior — $\sup S \in S \Rightarrow$ máximo de S

menor sublimite (iv) $\underline{\lim}\, a_n$ limite mínimo | inferior — $\inf S \in S \Rightarrow$ mínimo de S

$\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$

Nota: $(\operatorname{sen})^{-1} a = \operatorname{arcsen} a$

$(\operatorname{sen} a)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$

DERIVADAS

→ se faz sentido n ponto interior de uma função

- Recta tangente a uma curva num dado ponto
- dada uma função $f: D \subset \mathbb{R} \to$ e um ponto

$P = (a, f(a))$ do seu gráfico G, qual é a recta tangente a G em P?

- se não for vertical ⇒ $y - f(a) = m(x-a)$ ← declive

- A recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(a, f(a))$ é obtida como o limite das rectas secantes ao gráfico.

Definição

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \in D$, a ponto de acumulação de D

f é diferenciável no ponto $a \in D$ com derivada $f'(a)$ se existir o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

→ declive da recta que passa por $(a, f(a)), (x, f(x))$
↓
tende para o declive da tg

$$\boxed{h = x - a \Leftrightarrow x = a + h}$$

Nota:

- $D_{f'}$ é um subconjunto de D_f
- Recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

Exemplo: se $f(x) = \alpha x + \beta$ ← declive

$f'(x) = \alpha$, constante

$f'(x) = 1 \to f(x) = x$

$f'(a) = 0$

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$
$f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$a = 0 \to \lim \frac{\operatorname{sen} x - 0}{x - 0} = 1 = f'(0)$

$y = f(0) + f'(0)x = x$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$

$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ equação da recta tg ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{x-a} = 0$

NOTA: $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}x \cdot \text{sen}y$

Nota: $\frac{d}{dx}(f(x))$ | notação de Leibnitz

$f(x) = \log x$
$f'(x) = 1/x$

$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$

$f(x) = x^n$
$f'(x) = nx^{n-1}$

$(\cos)'(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot (-1) = -\text{sen}\,a$

Derivadas laterais

derivada lateral à direita em a se existir o limite

$$f_d'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tem derivada lateral à esquerda se existir o limite

$$f_e'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se $f_d'(a) = f_e'(a) = f'(a)$, a função tem derivada no ponto a.

Diferenciabilidade / Continuidade

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in D$ então f é contínua em A

Se f não é contínua em a $\Rightarrow$ f não é diferenciável em a

Regras da derivação

$f: D_f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: D_g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
> diferenciáveis em $a \in D_f \cap D_g$

C, constante

linear
$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
$(cf)'(a) = c\,f'(a)$

$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

- $\tan x = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$

$$\tan' x = \frac{(\text{sen}x)'\cos x - \text{sen}x(\cos x)'}{\cos x^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

- $(\sec x)' = \dfrac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = -\tan x \cdot \sec x$

$(a^x)' = \log_a x$

$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow x = e^{y\log(a)} \Leftrightarrow y\log(a) = \log x$

- $(\log_a(x))' = \left(\dfrac{\log(x)}{\log(a)}\right)', \quad x>0 \quad = \dfrac{(\log(x))'}{\log(a)} = \dfrac{1}{x\log a}$

Derivada de compostas

$g: D_g \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in D_g$

$f: D_f \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $g(a) = b \in D_f$

Então $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f\circ g}$

$(f\circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

ex: $g(x) = e^{\operatorname{sen}(\cos x^2)}$

$x \longrightarrow x^2 = b_1 \longrightarrow \cos(b_1) = b_2 \longrightarrow \operatorname{sen} b_2 = b_3 \longrightarrow e^{b_3}$

$$g'(a) = e^{b_3} \cdot (\operatorname{sen} b_2)' \cdot (\cos b_1)' \cdot b_1' =$$
$$= e^{b_3} \cdot (\cos b_2) \cdot (-\operatorname{sen} b_1) \cdot 2a =$$
$$= e^{\operatorname{sen}(\cos a^2)} \cdot \cos(\cos a^2) \cdot \operatorname{sen} a^2 \cdot (-2a)$$

Teorema

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e estritamente monótona

$a \in I$ f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$

então f^{-1} é diferenciável em $f(a)$

e $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$

NOTA: $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \iff \cos^2 x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = (tg\, x)'$

exemplo: $f(x) = e^x$ $\rightarrow$ loge $\log x$ é diferenciável em $x>0$

$f'(x) = e^x \neq 0$ e $(\log(x))' = \frac{1}{e^{\log x}}$

exemplo: $f(x) = \text{sen}\, x$ $\Rightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$f'(x) = \cos x \neq 0$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\text{sen}x"] & \text{sen}x \arrow[l, bend left, "\text{arcsen}x"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \left]-1,1\right[\\ x \arrow[r, bend left, "\text{arcsen}x"] & \text{arcsen}x \arrow[l, bend left, "\text{sen}"] & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{tikzcd}$$

arcsen$x$ é diferenciável em x $\forall x \in]-1, 1[$

$$(\text{arcsen}x)' = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}x)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}(\text{arcsen}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\text{arcoseno}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

TEOREMA

- f tem extremo local em f(a):

se f diferenciável em a

e $f'(a) = 0$

extremos locais

$f: D \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in D$

→ f(a) é máximo local de f se $\exists R>0 \ \forall x \in V_R(a) \cap D_f$ $f(x) \leq f(a)$

→ f(a) é mínimo local de f se $\exists R>0 \ \forall x \in V_R(a) \cap D_f$ $f(x) \geq f(a)$

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D$

def

$f(a)$ é máximo local estrito se
$\exists R>0 \ \forall x \in V_R(a) \setminus \{a\}$
$f(x) < f(a)$

$f(a)$ é mínimo local estrito de f se
$\exists R>0 \ \forall x \in V_R(a) \setminus \{a\}$
$f(x) > f(a)$

a é ponto de máximo de f
e f(a) é máximo de f
se $\forall x \in D_f \ f(x) \leq f(a)$

a é ponto de mínimo de f
e f(a) é mínimo de f
se $\forall x \in D_f \ f(x) \geq f(a)$

TEOREMA

$F(x): C \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
F é diferenciável em a
$\forall a \in D$

↓

Diferenciabilidade Global

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CALCULO DIFERENCIAL
(Lagrange)

Teorema de Rolle

Teorema de cauchy

TEOREMA DE ROLLE

$a, b \in \mathbb{R} \quad a<b$
f contínua em $[a,b]$
f diferenciável em $]a,b[$
$f(a) = f(b)$

então $\exists c \in]a,b[\ : f'(c) = 0$

Por Weirstrass $[a,b]$ tem máximo e min

i) $M = m \Rightarrow$ f constante
$f' = 0$

ii) $M > m$
se $f(a) = m \Leftrightarrow f(b) = m$
então $\exists c \in]a,b[$
tq $f(c)$ é máximo
$\Downarrow$
$f'(c) = 0$

Corolário 1

Entre 2 zeros de uma função diferenciável em I, existe pelo menos um 0 da derivada.

$]a, b[\quad f(a) = 0 = f(B)$

Corolário 2

Entre 2 zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável, existe no máximo um 0 da função.

TEOREMA DE LAGRANGE

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \alpha$

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

f contínua em $[a, b]$

$g(x) = f(x) - \alpha x$

f diferenciável em $]a, b[$

então $\exists c \in]a, b[\quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f(c)$

Corolário 1

I intervalo

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \rightarrow f$ é constante em I

Corolário 2

I intervalo

$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I$

então $(f - g)$ é constante

$(f - g)'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

Corolário 3

I, intervalo

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ é estritamente crescente em I

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ é estritamente decrescente em I

Dem $\quad \forall x, y \in I \quad x < y \quad [x, y] \subset I$

se $f'(x) < 0 \quad \exists c \in]x, y[$

$$\frac{f(x) - f(y)}{\underbrace{x - y}_{<0}} = f'(c) < 0 \Rightarrow f(x) > f(y)$$

TEOREMA DE CAUCHY

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

f, g contínuas em $[a, b]$
f, g diferenciáveis em $]a, b[$

$g'(x) \neq 0$

Dem
pelo teorema de lagrange

$$\exists c \in]a, b[\quad \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}_{\alpha} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\varphi(x) = f(x) - \alpha g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

pelo teorema de rolle $\varphi(a) = \varphi(b)$
$\exists c \in]a, b[: \varphi'(c) = 0$

TEOREMA (REGRA) DE CAUCHY

$]a, b[\quad , \quad (a, b \in \tilde{\mathbb{R}})$

f, g diferenciáveis em $]a, b[$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ (ou $\pm\infty$)

$g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$

se $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe em $\tilde{\mathbb{R}}$,

então também existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

exemplo: $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$
$g(x) = x$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x)$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 - x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x}\right)^2}{1} =$$

$$= \frac{2x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1}$$

não existe

- não existe $\lim f'(x)$, logo não se pode usar a regra de Cauchy
- mas existe $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Aplicações

- $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$

$= \lim(-x) = 0$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

- $\lim_{x\to 0^+} x^{\text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\text{sen}\, x \cdot \log x}$

$\lim_{x\to 0^+} \text{sen}\, x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/\text{sen}\, x} =$

$= \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = -1 \cdot 0 = 0$

logo $\lim_{x\to 0^+} e^0 = 1$

N-ÉSIMA DERIVADA / DERIVADA DE ORDEM N

- derivada de ordem 1, primeira derivada de f é $f^{(1)} = f'$

- derivada de ordem n+1 é $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Def

$f : I \to \mathbb{R}$ (trigonométricas, log, polinomios, racionais)

Se existir n-ésima derivada de f em I e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for contínua então f é uma função de classe $\boxed{C^n(I)}$ ou $\boxed{f \in C^n(I)}$

- Se $f \in C^n(I)$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \in C^\infty(I)$

exemplo:

e^x é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$

$e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ ou $\forall n \in \mathbb{N}$ $f \in C^n(\mathbb{R})$

$N \in \mathbb{N}$ $a \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = (x-a)^N$

$f^1(x) = N(x-a)^{(N-1)}$

$f^K(x) = N(N-1)\dots(N-K+1)(x-a)^{N-K}$

se $K \geq N+1 \Rightarrow f^{(K)}(x) = 0$

$f(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ f é (pelo menos) 3 vezes diferenciável em $\mathbb{R}$

$a = 0 \Rightarrow f'(0)$ $f''(0)$ $f'''(0)$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!}$$

$P_3(0) = 0$

$P_3(0)' = f'(0)$

$P_3(0)'' = f''(0)$

$P_3(0)''' = f'''(0)$

$$\boxed{P_3(0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_3(x) \to 0$$

se $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}}{x^3} =$$

Regra de cauchy

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}}{x^3} - \frac{1}{3!} =$$

→ derivável

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} - \frac{1}{3!} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0 - 1}{6x} - \frac{1}{3!} =$$

→ Derivável

$$= \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{1}{3!}$$

$f'(0)$

Teorema

I, intervalo $a \in I$

f é n-vezes diferenciável em IR

Fórmula de taylor de ordem N de f no ponto a

$$\forall x \in I \quad f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(N)}(a)(x-a)^N}{N!}}_{\text{polinomio de Taylor de ordem n de f no ponto a}} + R_N(x)$$

polinomio de Taylor de ordem n de f no ponto a

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{R_N(x)}{(x-a)^N} = 0}$$

Resto da fórmula de Taylor de ordem n de f no ponto a

Teorema

I, intervalo , $a \in I$
f é n-vezes diferenciável em I

$$f(x) = \dots + \frac{f^{N-1}(a)\,(x-a)^{N-1}}{(N-1)!} \circ R_{N-1}(x)$$

prova-se que para
$\forall x \in I \ \exists c \in \,]a, x[$ tal que $R_{N-1}(x) = f^{(N)}(c_x)\dfrac{(x-a)^N}{N!}$

Resto de lagrange

$\boxed{\text{No ponto } x = 0}$

$$f(x) = \dots + \frac{f^{N-1}(0)\, x^{(N-1)}}{(N-1)!} \circ R_{N-1}(x)$$

Polinómio de Maclaurin

fórmula de Maclaurin

Extremos e concavidades

monotonia da função

f continua em $[a,b]$ e diferenciavel em $]a,b[$

- $f'(x)=0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ constante em $[a,b]$
- $f'(x)>0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ crescente em $[a,b]$
- $f'(x)<0 \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ decrescente em $[a,b]$

---

sinal da função

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad c \in I$

$f(c)=0$

$f'(c) \neq 0$

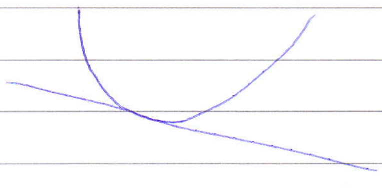
então existe $V_\delta(c)$ onde o sinal de f muda presisamente no ponto c

---

$f:]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $c \in]a,b[$

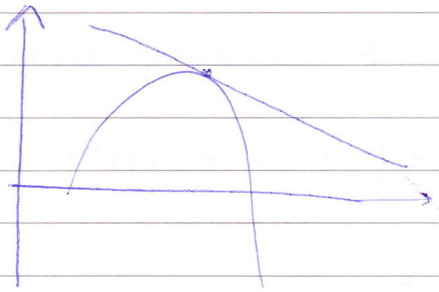
- f é convexa (concavidade voltada para cima) em c se o gráfico de f estivel ~~na~~ por cima da recta tangente ao gráfico de f no ponto c (numa vizinhança de c)

$$\exists R>0 \quad \forall x \in D \cap V_R(c) \quad f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$



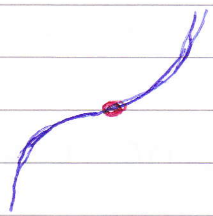
- f é côncava em c (tem a concavidade voltada para baixo) se o gráfico de f estiver por baixo da recta tangente a f no ponto c

$\exists R>0 \quad \forall x \in D \cap V_R(c) \quad f(x) \leq f(c) + f'(c)(x-c)$



- f tem ponto de inflexão em c se

$\exists R>0$ tq f é convexa num dos intervalos $]c-R, c[$ ou $]c, c+R[$ e côncava no outro



$f(a)' = \pm\infty \qquad f(a)'' = 0$

Teorema

f diferenciável em $]a, b[\quad c \in]a, b[$
f é duas vezes diferenciável $f''(c)$

- $f''(c) > 0 \Rightarrow$ f é convexa em c
- $f''(c) < 0 \Rightarrow$ f é concava em c

$\forall x \in I \quad \exists c_x$ entre a e x

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{f''(c_x)}_{>0} \frac{\overbrace{(x-a)^2}^{\geq 0}}{2!} \quad \Big| \geq 0$

$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$

Denominador: logaritmo?
arctg?

Teorema

f diferenciável em $I =]a, c[$ $c \in I$, ponto crítico
existe $f''(c)$

- $f''(c) > 0$ f tem mínimo local em c
- $f''(c) < 0$ f tem máximo local em c

~~Ante~~ PRIMITIVAS

NOTA: T Lagrange
se duas funções têm a mesma derivada em I, estas diferem apenas de uma constante

$f: I \to \mathbb{R}$

g é primitiva de f em I

sse $g'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

f é primitivável em I → Nunca é única

$\boxed{Pf = g}$

exemplo: $P1 = x + c \quad (c \in \mathbb{R})$ → todas as primitivas

uma primitiva

$P2x = x^2$ $\quad Pe^x = e^x$

$Px^5 = \frac{x^6}{6}$ $\quad P\cos x\, e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}$

$P x \operatorname{sen} x^2 = \frac{-\cos x^2}{2}$ $\quad P x e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2}$

vem do 2x

$\frac{4}{-3} P -3\cancel{4}x^2 e^{-x^3} = -\frac{4}{3} e^{-x^3}$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x}, e^{1/x}, \ldots$

$P e^{x^2} \cancel{=} \frac{e^{x^2}}{2x}$ altera o domínio

NÃO ELEMENTARMENTE DERIVÁVEL

logaritmo

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$P x^\alpha = \frac{x^{(\alpha+1)}}{\alpha+1}$$

$$P\frac{1}{x} = \begin{cases} \log x + C_1, & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) + C_2, & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$[\log(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$P\frac{1}{x} = \log|x|$$

Condicoes iniciais

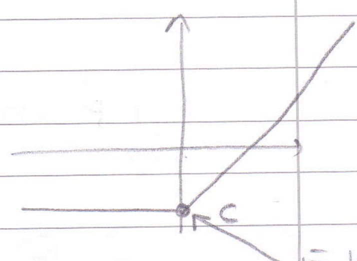
exemplo

Determinar f tq.

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ f(2) = 3 \\ f(-5) = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \log x + 3 - \log 2 & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) + 1 - \log 5 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Nem todas as funções são primitivavel



ñ tem derivad

ex. $F : F'(x) = H(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \begin{cases} x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

tem de ser derivavel no ponto 0 $\quad 0 + C_1 = C_2 \Leftrightarrow C_1 = C_2$

Primitivação por partes

NOTA:

$\alpha \log x = \log x^\alpha$

$-\log x = \log \frac{1}{x}$

$$D(fg) = f'g + fg'$$

$$(f'g) = D(fg) - fg'$$

$$P(f'g) = fg - \underbrace{P(fg')}_{\text{mais simples}}$$

exemplo:

$$P(xe^x) = xe^x - P(1 \cdot e^x) = xe^x - e^x$$

$f' = e^x \qquad f(x) = e^x$

$g = x \qquad g(x)' = 1$

$$P(1 \log x) = x \log x - P\left(\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) = x \log x - x$$

$$= x(\log x - 1)$$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = 1$

$g(x) = \log x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$

$$P(1 \operatorname{arctg} x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - P\left(\frac{x}{1+x^2}\right) =$$

$f'(x) = 1 \qquad f(x) = x$

$g(x) = \operatorname{arctg} x \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log|1+x^2|$$

$$= x \operatorname{arctg} + \log \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$P\left(\frac{1}{3+2x^2}\right) = P\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2x^2}{3}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) = P\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, x\right)$$

$\cos^3 x = 3 \cdot \cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x)$

$-\frac{1}{3} P (3\cos^2 x \cdot (-\operatorname{sen} x)) = -\frac{1}{3} \cos^3 x$

$P \cos^2 x = P(\cos x \cdot \cos x) =$

$f'(x) = \cos x \quad f(x) = \operatorname{sen} x$
$g(x) = \cos x \quad g'(x) = (-\operatorname{sen} x)$

$= \operatorname{sen} x \cos x - P(\operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)) =$

$= \operatorname{sen} x \cos x + P \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cos x + P(1 - \cos^2 x)$

$= \operatorname{sen} x \cos x + x - P(\cos^2 x) \Rightarrow 2 P(\cos^2 x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + x$

$= P(\cos^2 x) = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ver formas trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\Downarrow$

$P(\cos^2 x) = P\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)$

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$ se grau p $\geq$ grau q

$\Downarrow$

imprópria

dividir

$$= p_1(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$$

grau R < grau q

olhar para raízes denominador

método dos coeficientes determinados ?

exemplo:

$$\frac{x^2}{x^2+3} = 1 - \frac{3}{x^2+3}$$

$$\frac{x-1}{x^2(x-1)(3x^2+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{3x^2+5}$$

Raízes reais $x=0$, $x=1$

$$A(x)(x+1)(3x^2+5) + B(x+1)(3x^2+5) + C(x^2)(3x^2+5)$$

$$+(Dx+E)(x^2)(x+1) = x-1$$

$\boxed{x=0}$

$5B = -1$

Coeficientes em x^4

$3A + 3C + D = 0$

$\boxed{x=-1}$

$8C = -2$

....

• Primitivar cada um

Riemann → Deuboux

Lebergue

INTEGRAL

$I = [a,b]$ $(a<b\ ;\ a,b \in \mathbb{R})$

$f: I \to \mathbb{R}$ limitada   ~~ÁREA~~

Def.

$\{x_1, \ldots, x_n\} = d$

↳ decomposição de $I = [a,b]$

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$

$b = x_{n+1}$

$[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \ldots, n$

$M_i = \sup f([x_i, x_{i+1}])$

$m_i = \inf f([x_i, x_{i+1}])$

Nota:

$\{(x,y) : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le g(x)\}$

↓ mais pontos

supremo → área menor → aumenta

ínfimo → área maior → diminui

$m_i \le M_i$

$m_i(x_{i+1} - x_i) \le M_i(x_{i+1} - x_i)$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

Soma superior Δ_d de f relativa à decomposição d (aumenta)

Soma inferior S_d de f relativa à decomposição d (diminui)

$d' = d \cup \{c\} \to [x_0, x_1] = [x_0, c] \cup [c, x_1]$

$[x_0, x_1] = [x_0, c] \cup [c, x_0]$

$m_0 \cdot (x_1 - x_0)$ $\quad m'(c - x_0) + m''(x_1 - c)$

$$\geq$$

$$m_0(c - x_0) + m_0(x_1 - c) = m_0(x_1 - x_0)$$

$m' = \inf f([x_0, c])$ (os outros são todos iguais)

$m'' = \inf f([c, x_1])$ então $\boxed{s_{d'} \geq s_d}$

$$\boxed{S_d \geq S_{d'} \geq s_{d'} \geq s_d} \leftarrow d \subset d'$$

d' é mais fina que d / d é menos fina que d'

TEOREMA

$\forall d', d'' \quad s_{d'} \leq S_{d''}$

$d = d' \cup d''$

$d' \subset d \Rightarrow s_{d'} \leq s_d$

$d'' \subset d \Rightarrow S_d \leq S_{d''}$

$s_{d'} \leq s_d \leq S_d \leq S_{d''}$

$\mathcal{E} = \{ S_d : d \in \mathcal{D}(I) \} \neq 0$, minorado $= \inf \mathcal{E}$

$\Gamma = \{ s_d : d \in \mathcal{D}(I) \} \neq 0$, majorado $= \sup \Gamma$

$\sup \Gamma =$ integral inferior de f em $[a, b]$

$$\underline{\int_I} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f$$

$\inf \mathcal{E} =$ integral superior de f em $[a, b]$

$$\overline{\int_I} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f$$

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f}$$ → existem sempre

exemplo

$I = [-2, 3]$

$$f(x) \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [-2,3] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [-2,3] \end{cases}$$

$\forall d \in \mathcal{D}(I)$ $\quad s_d = 0 \quad S_d = 3-(-2) = 5$

$\mathcal{E} = \{5\} \Rightarrow \overline{\int_{-2}^{3}} f(x)\,dx = 5$

$\sigma = \{0\} \Rightarrow \underline{\int_{-2}^{3}} f(x)\,dx = 0$

Teorema

se $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Leftrightarrow f$ é integrável em $[a,b]$

intervalo de integração

se $f(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$

então f é integrável em $[a,b]$ → extremo inferior/superior de integração

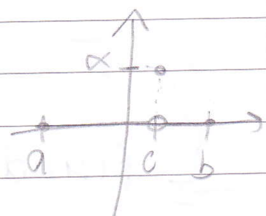
$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$$

→ variável de integração

→ função integranda

exemplo:

$I = [a,b] \quad c \in [a,b]$



$$g(x) \begin{cases} 0 & \text{se } x = c \\ \alpha & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

suponhamos que $\alpha > 0$

$\forall \alpha \in \mathcal{D}(I)$ em cada intervalo existe sempre pelo menos um 0

$$S\alpha = 0 \Rightarrow \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = 0$$

$S\alpha \geq 0$

zero é minorante

$\forall \varepsilon x$

$\alpha_\varepsilon =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$

$S\alpha_\varepsilon = \alpha \cdot 2\varepsilon$ não há nenhum numero positivo minorante de $S\alpha$

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = 0$$

Se $f(x) = 0$, exepto num numero finito de pontos, $\int_a^b f(x)\,d(x) = 0$

TEOREMA

$I = [a,b] \subset \mathbb{R}$
$f : I \to \mathbb{R}$, limitada

então

a) f é monotona em $I \Rightarrow f$ é integravel em I

(sem demonst.) b) f é continua em $I \Rightarrow f$ é integravel em I

NOTA: $|a \mp b| \leq |a| + |b|$ Desigualdade triangular

Teorema

aplicação linear, espaço vectorial

Sejam f, g integráveis em I e $\alpha \in \mathbb{R}$
então $f+g$ e αf são integráveis em I e ainda

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx;$$

Teorema

Sejam f, g integráveis em I

$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in I$

então, $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Dem

$h = f - g$ pelo teorema, é integrável em I, $h(x) \geq 0 \ \forall x \in I$

$\forall d \in \mathcal{D}(I)$ todas as $s_d \geq 0$

ínfimo ≥ 0 $\Rightarrow \int_I h(x)\,dx \geq 0$ então $\int_I f(x)\,dx \geq \int_I g(x)\,dx$

Teorema

f é integrável em $I \Rightarrow |f|$ é função integrável em I

e $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Dem.

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Teorema

$[c, d] \subset [a, b]$

f é integrável em $[a,b]$

então

f é integrável em $[c,d]$

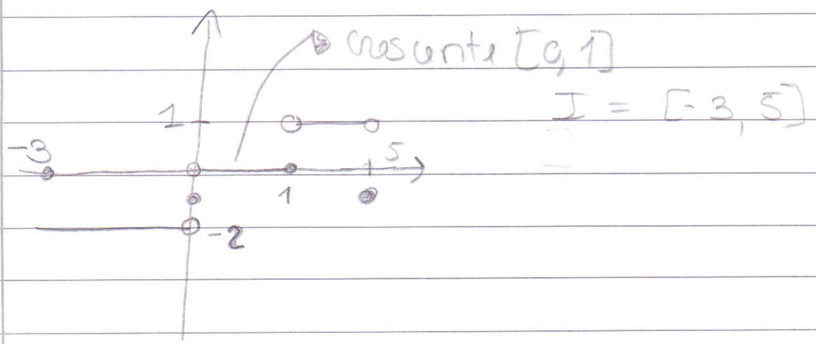
Teorema

f é integrável em $[a,c]$
f é integrável em $[c,b]$

então f é integrável em $[a,b]$

e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

exemplo



$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} (-2)\,dx = -2 . 3 = -6$

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = -6 + 0 + 4 = -2$

$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 1\,dx = 4$

$b = a$

$$\int_a^a f(x)\,dx \overset{\text{Def}}{=} 0$$

$$\int_a^c f(x)\,dx \overset{\text{Def}}{=} -\int_c^a f(x)\,dx$$

TEOREMA DA MÉDIA

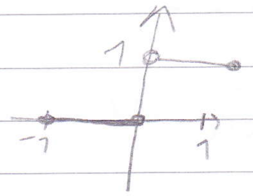
f integrável em $[a,b]$

$M = \sup f([a,b])$, $m = \inf f([a,b])$

então

Pode ñ ser do contradomínio

$$\exists \lambda \in [m, M] \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lambda(b-a)$$



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2$$

λ

Dem

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f \leq M$$

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

$\to \lambda$

Corolário

f contínua em $[a,b]$

então

$$\exists c \in [a,b] \text{ tq } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

$$f(x) = e^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Não é limitada numa vizinhança do 0

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\psi(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$\forall x > 0$

TEOREMA

$I \subset \mathbb{R}$, qualquer intervalo

$f: I \to \mathbb{R}$

integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em

$a \in I$

$$\varphi_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in I$$

função integral indefinido de f com origem em a

$$\varphi(x) = -\int_2^x \frac{1}{t}\,dt \quad \forall x > 0$$

simétrico

a e $b \in I$

então:

- $\varphi_a - \varphi_b$ é constante em I $\quad \varphi = \varphi_a + C$
- φ_a é contínua em I

DEM

i) $\forall x \in I \quad \varphi_a(x) - \varphi_b(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt$

$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

ii) $c \in I \quad |\varphi_a(x) - \varphi_a(c)| \xrightarrow[x \to c]{} 0$

$$|\varphi_a(x) - \varphi_a(c)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_a^x f(t)dt + \int_c^a f(t)dt\right| = \left|\int_c^x f(t)dt\right| \leq M|x-c|$$

$\boxed{c<x}$ $$\left|\int_c^x f(t)\,dt\right| \leq \int_c^x |f(t)|\,dt \leq \underline{M(x-c)}$$

$\boxed{c>x}$ $$\left|\int_c^x f(t)\,dt\right| = \left|-\int_x^c f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^c f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_x^c |f(t)|\,dt \leq \underline{M(c-x)}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

$f: I \to \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo fechado e limitado contido em I

$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall a \in I$ $\to$ integral indefinido

$\forall c \in I$, f é contínua em c

$\downarrow$

φ é diferenciável em c

e

$\varphi'(c) = f(c)$

Corolário:

Se f é contínua em I, então φ é diferenciável em I e

$\varphi'(a) = f(a) \quad \forall a \in I$

NOTA: Toda a função contínua é primitivável dem.

$$\lim_{x\to c} \frac{\varphi(a)-\varphi(c)}{a-c} = f(c)$$

se $f(c)=0 \rightarrow \left|\frac{\varphi(a)-\varphi(c)-f(c)(a-c)}{a-c}\right| = 0$

$$\frac{\left|\int_a^{a} f(t)\,dt - \int_a^{c} f(t)\,dt - \int_c^{a} f(c)\,dt\right|}{|a-c|} =$$

$$= \frac{\left|\int_c^{a} f(t)-f(c)\,dt\right|}{|a-c|}$$

ex.: $\varphi(a)=\int_1^{a} \frac{1}{t}\,dt \quad a>0$

→ $f(t)$ é continua em $\mathbb{R}^+ \Rightarrow \varphi$ é diferenciavel em $\mathbb{R}$

exemplo

$\varphi'(a)=\frac{1}{a} \quad \forall a>0 \qquad P\frac{1}{a}=\log|a|$

$\exists c\in\mathbb{R} \quad \varphi(a)=\log a + c \quad \forall a>0$

$\varphi(1)=0=\log 1 + c = c=0 \qquad \varphi(a)=\log a$

Teorema (Regra de Barrow)

f contínua em $[a,b] \in \mathbb{R}$
G é uma primitiva de f em $[a,b]$

então $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$

Dem.

$\varphi(u) = \int_a^u f(t)\,dt \quad \forall a \in [a,b]$

$\varphi'(u) = f(u) \quad \forall u \in [a,b]$

$\int_a^x f(t)\,dt + C$

$\exists C \in \mathbb{R}: \quad \varphi(u) = G(u) + C \quad \forall u \in [a,b]$

$\boxed{\text{com } u=a \quad G(a) = C}$

$\varphi(u) = \int_a^u f(t)\,dt + G(a)$

pelo que $\varphi(b) = G(b)\ G(a) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

$\int_a^b f(t)\,dt$

Integração por partes

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[P(f'g)\right]_a^b = \left[fg - P(fg')\right]_a^b =$$
$$= \left[fg\right]_a^b - \left[P(fg')\right]_a^b = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Integração por substituição

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$x = \varphi(t)$

$b = \varphi(\beta) \quad a = \varphi(\alpha)$

exemplo:

$$\int_{\sqrt{2}}^{4} e^{-\sqrt{t}}$$

$\sqrt{t} = x$

$t = x^2 = \varphi(x)$

$\varphi'(x) = 2x$

$t = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}$

$t = 4 \Rightarrow x = 2$

$$= \int_{\sqrt[4]{2}}^{2} \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{f'(x)} \, dx =$$

$f(x) = -e^{x}$

$g'(x) = 2x$

$$= \left[-2xe^{-x}\right]_{\sqrt[4]{2}}^{2} - \int_{\sqrt[4]{2}}^{2} -2e^{-x} \, dx =$$

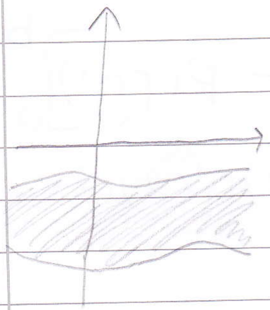
$$= -4e^{-2} - \left(-2\sqrt[4]{2}\, e^{-\sqrt[4]{2}}\right) + \int_{\sqrt[4]{2}}^{2} 2e^{-x} \, dx =$$

$$= -4e^{-2} + 2\sqrt[4]{2}\, e^{-\sqrt[4]{2}} + \left[-2e^{-x}\right]_{\sqrt[4]{2}}^{2} =$$

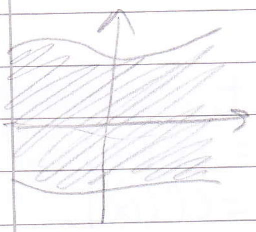
$$= -6e^{-2} + 2e^{-\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt[4]{2} + 1\right)$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

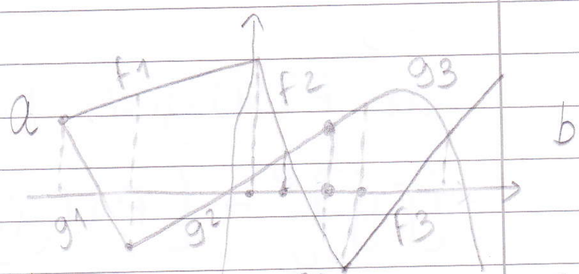
$$\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)(x)\, dx$$



$$-\int_a^b (g-f)$$



$$-\int_a^b (f-g)$$



$$\int_a^{c_1} (f_1 - g_1) + \int_{c_1}^{c_2} (f_1 - g_2) +$$

$$+ \int_{c_2}^{c_3} (f_2 - g_2) + \int_{c_3}^{c_4} (g_3 - f_2) +$$

$$+ \int_{c_4}^{c_5} (g_3 - f_2) + \int_{c_5}^{c_6} (g_3 - f_3) +$$

$$+ \int_{c_6}^{c_7} (f_3 - g_3) \;//$$