AULA 08
FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL — LIMITES E CONTINUIDADE (CONTINUAÇÃO)

A definição de limite segundo Heine permite, como já vimos anteriormente no caso da álgebra de limites, transpor quase imediatamente alguns resultados acerca de limites de sucessões para limites de funções. O resultado seguinte é mais um desses casos.

TEOREMA 8.1.— *Consideremos funções f, g, h e suponhamos que numa vizinhança $\dot{V}_\epsilon(\alpha)$ se tem:*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Nestas condições, se $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x) = \beta$ *então* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$. *O resultado anterior permanece válido se substituirmos* $\dot{V}_\epsilon(\alpha)$ *por* $V_\epsilon(\alpha^+)$ *(resp.* $V_\epsilon(\alpha^-)$*) e* $\lim_{x\to\alpha}$ *por* $\lim_{x\to\alpha^+}$ *(resp.* $\lim_{x\to\alpha^-}$*).*

Concluímos esta secção apresentando alguns exemplos que constituirão importantes limites de referência.

EXEMPLO 1.— Tem-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{8.1}$$

De modo a estabelecer considere-se a figura 8.1

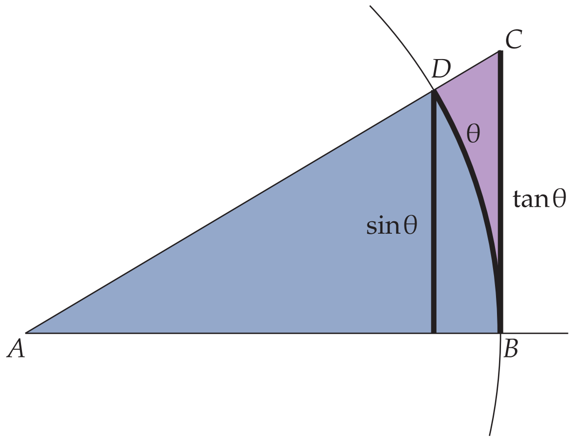

Figura 8.1:

A demonstração de (8.1) é feita com base numa certa dose de intuição geométrica. Uma demonstração absolutamente rigorosa exige recursos de que não dispomos neste momento.

De acordo com a figura facilmente se constata que $\sin\theta < \theta$. Por outro lado comparando as áreas da «fatia» do círculo determinada pelos pontos A, B, D e do triângulo $\triangle ABC$, resulta que $\theta/2 < (\tan\theta)/2$. Desta duas relações resulta sem dificuldade que

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta.$$

Desta relação, dividindo por $\sin\theta$ e passando aos inversos, obtem-se:

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

Passando ao limite, quando θ tende para zero, os extremos daquela sequência de desigualdades tendem para 1. Assim temos que concluir que também $(\sin\theta)/\theta$ tende para 1 quando $\theta \to 0$.

Os exemplos seguintes são apresentados sem justificações, uma vez que os recursos necessários para as respectivas demonstrações só se encontrarão disponíveis mais tarde. Na devida altura teremos ocasião de justificar todas estas igualdades.

Exemplo 2.— Tem-se que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{8.2}$$

Exemplo 3.— Tem-se que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{8.3}$$

Exemplo 4.— Tem-se que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad (\alpha\in\mathbb{R}). \tag{8.4}$$

8.1 Continuidade

Definição 8.1.— *Consideremos uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $x_0 \in A$ é ponto de acumulação de A. Dizemos que f é contínua no ponto x_0 se se tiver que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Caso contrário a função diz-se descontínua no ponto x_0. Se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ dizemos que f é* contínua à direita em x_0 *e se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ que é* contínua à esquerda em x_0.

Tal como a definimos, a noção de limite só tem sentido para pontos de acumulação do domínio de uma função. Assim sendo a definição de continuidade que acabámos de apresentar não permite classificar quanto à continuidade, uma função em pontos do domínio que não sejam pontos de acumulação (ou seja, *em pontos isolados*). Assim sendo, por convenção iremos sempre considerar que uma função é contínua nos pontos do seu domínio que são isolados, i.e., pontos α do domínio de f para os quais existe um $\epsilon > 0$ tal que $\dot{V}_\epsilon(\alpha)$ não tem pontos do domínio de f.

Definição 8.2.— *Suponhamos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função. Consideremos um conjunto $X \subseteq A$. Dizemos que f é contínua no conjunto X se é contínua em todos os pontos $x \in X$.*

Exemplo 5 (A função de Dirichlet).— A função de Dirichlet é a função $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida através da relação,

$$d(x) = \begin{cases} 1 & (x\in\mathbb{Q}) \\ 0 & (x\notin\mathbb{Q}) \end{cases}.$$

Esta função não é contínua em nenhum ponto do seu domínio. De facto, não existe o $\lim_{x\to\alpha} d(x)$ seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6 (Função de Riemann). — A função de Riemann é a função $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$r(x) = \begin{cases} 1/q & (\text{se } x = p/q, \text{ sendo } p/q \text{ irredutível}) \\ 0 & (\text{se } x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

A função de Riemann é contínua nos irracionais e descontínua nos racionais.

A continuidade possui *carácter local*, i.e., satisfaz:

(1) Se U, V são abertos e f é contínua em U e em V então, f é contínua em $U \cup V$;

(2) Se f é contínua em X e $Y \subseteq X$ então, f é contínua em Y.

Teorema 8.2. — *As funções racionais (quocientes de dois polinómios), as funções trigonométricas:* $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ *e* $\mathrm{cotan}(x)$*; as funções trigonométricas inversas* $\mathrm{arccos}(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$ *e* $\mathrm{arccotan}(x)$*; a função exponencial e a função logatitmo bem como as funções* $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ *e a função módulo são todas contínuas nos respectivos domínios.*

Funções mais complexas obtém-se em geral, considerando operações algébricas e composição de funções. Todas estas operações preservam a continuidade de uma função.

Teorema 8.3. — *Suponhamos que* $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são contínuas num ponto* x_0*. Nestas condições tem-se:*

(1) *A função* $f + g$ *é contínua no ponto* x_0*.*

(2) *A função* $f \cdot g$ *é contínua em* x_0*.*

(3) *Se* $g(x_0) \neq 0$ *então, a função* f/g *é contínua em* x_0*.*

Teorema 8.4. — *Suponhamos que* g *é contínua em* α *e* f *é contínua em* $g(\alpha)$*. Nestas condições, a composição* $f \circ g$ *é contínua em* α*.*

Dem. — Consideremos uma sucessão arbitrária de pontos do domínio de $f \circ g$ tais que $(x_n) \to \alpha$. Pela continuidade de g, tem-se que $(g(x_n)) \to g(\alpha)$. Por outro lado, como os x_n estão no domínio de $f \circ g$ resulta que os $g(x_n)$ pertencem ao domínio de f. Assim. como f é contínua em $g(\alpha)$, tem-se que $(f(g(x_n))) = ((f \circ g)(x_n)) \to f(g(\alpha)) = (f \circ g)(\alpha)$. Conclui-se assim que

$$\lim_{x\to\alpha}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(\alpha).$$

■

Uma noção associada à composição de funções é a de *função inversa*. A inversa de uma função $f : A \to B$ é, quando existe, a única função $f^{-1} : B \to A$ que satisfaz:

$$(\forall x \in A)(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{e} \quad (\forall x \in B)(f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Recordamos que quando uma função $f : A \to B$ tem inversa se diz que é *invertível* e que, tem inversa se e só se é uma bijecção. Não é verdade, em geral, que a inversa de uma bijecção contínua seja contínua.

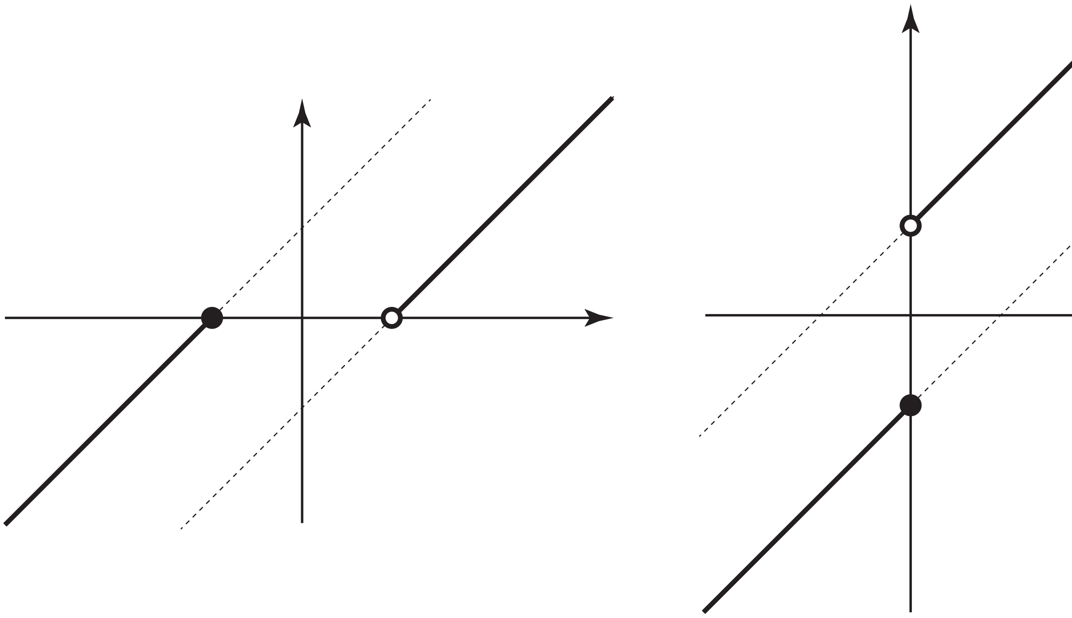

Figura 8.2: Função f (à esquerda) e a respectiva inversa (à direita).

Exemplo 7 (Uma bijecção contínua com inversa descontínua).— Considerando a função $f :]-\infty, -1]\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x \in]-\infty, -1]) \\ x - 1 & (x \in]1, +\infty[) \end{cases}$$

resulta que esta função é uma bijecção mas a sua inversa é descontínua no ponto 0 (*ver* fig. 8.2).

Apesar disso tem-se o resultado seguinte.

Teorema 8.5.— *Suponhamos que $f :]a, b[\to]c, d[$ (ou $f : [a, b] \to [c, d]$) é estritamente crescente, sobrejectiva e contínua então, a sua inversa é contínua.*

Dem.— ■

Por vezes é possível estender uma função contínua a pontos que não sendo pontos do seu domínio são pondos de acumulação do mesmo. Quando isso é possível a nova função diz-se um *prolongamento por continuidade* da função original.

Definição 8.3 (prolongamento por continuidade).— *Suponhamos que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função e que α é um ponto de acumulação de A tal que $\alpha \notin A$. A função f diz-se prolongável por continuidade ao ponto α se existe uma função $f^\sharp : A \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ que coincide com f em A e é contínua em α.*

Observe-se que a continuidade em α de $f^\sharp$ é equivalente a dizer que

$$\lim_{x\to\alpha} f^\sharp(x) = f^\sharp(\alpha).$$

No entanto, como para todos os valores diferentes de α se tem que $f^\sharp(x) = f(x)$. A igualdade anterior é equivalente a dizer que

$$f^\sharp(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} f(x).$$

Fica assim estabelecido o resultado seguinte,

Teorema 8.6.— *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $\alpha \notin A$ um ponto de acumulação de A. A função f é prolongável por continuidade ao ponto α sse existe $\lim_{x\to\alpha} f(x)$. Nesse caso, o prolongamento, que é único, é a função $f^\sharp : A \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f^\sharp(x) = \begin{cases} f(x) & (\text{se } x \in A) \\ \lim_{x\to\alpha} f(x) & (\text{se } x = \alpha) \end{cases}.$$

As funções contínuas possuem algumas propriedades interessantes.

Teorema 8.7 (do valor intermédio de Bolzano).— *Se f está definida num intervalo $[a, b]$ e se f é contínua então f possui a propriedade do valor intermédio, ou seja, se $\alpha < \beta$ e $\alpha, \beta \in f([a, b])$ então, $[\alpha, \beta] \subseteq f([a, b])$.*

É costume enunciar o resultado anterior (de forma equivalente) dizendo que se f é contínua em $[a, b]$ e λ é um número real entre $f(a)$ e $f(b)$ então, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \lambda$.

Dem (do teorema de Bolzano).— ■

Corolário 8.7.1.— *Uma função contínua transforma intervalos em intervalos.*

Teorema 8.8.— *Se f é uma função contínua num conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}$ então $f(K)$ é compacto. Em particular, num conjunto compacto, uma função contínua atinge sempre um máximo e um mínimo.*

Dem.— ■