Ficha 5
Resolução dos exercícios propostos

Primitivas de funções racionais imediatas

I.1 Calcule as seguintes primitivas:

a) $P\dfrac{1}{(3x+2)^5}$

Resolução:

$$P\frac{1}{(3x+2)^5} = P(3x+2)^{-5} \underset{\substack{\uparrow \\ u=3x+2,\ k=-5 \\ u'=3}}{=} \frac{1}{3}P\left(3(3x+2)^{-5}\right) = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{-5+1}}{-5+1}+C$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{-4}}{-4}+C = -\frac{1}{12(3x+2)^4}+C$$

b) $P\dfrac{1}{x}$

Resolução:

$$P\frac{1}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x \\ u'=1}}{=} \ln|x|+C$$

c) $P\dfrac{4x^2}{x^3+5}$

Resolução:

$$P\frac{4x^2}{x^3+5} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x^3+5 \\ u'=3x^2}}{=} \frac{4}{3}P\frac{3x^2}{x^3+5} = \frac{4}{3}\ln\left|x^3+5\right|+C$$

d) $P\dfrac{x^2+1}{x^3+3x+1}$

Resolução:

$$P\frac{x^2+1}{x^3+3x+1} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x^3+3x+1 \\ u'=3x^2+3}}{=} \frac{1}{3}P\frac{3(x^2+1)}{x^3+3x+1} = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x+1\right|+C$$

e) $P\dfrac{2x}{1+x^4}$

Resolução:

$$P\frac{2x}{1+x^4} = P\frac{2x}{1+(x^2)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x^2 \\ u'=2x}}{=} \operatorname{arctg}(x^2)+C$$

f) $P\dfrac{4x+2}{1+(x^2+x)^2}$

Resolução:

$$P\frac{4x+2}{1+(x^2+x)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x^2+x \\ u'=2x+1}}{=} 2P\frac{2x+1}{1+(x^2+x)^2} = 2\operatorname{arctg}(x^2+x)+C$$

I.2 Calcule a seguinte primitiva $P\frac{1}{x^2-1}$.

Resolução:

A primitiva da função $\frac{1}{x^2-1}$ não é imediata, como tal, iremos calculá-la recorrendo à primitivação de funções racionais, uma vez que se trata de uma função racional.

Primitivação da função racional:

$$P\frac{1}{x^2-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pelo} \\ 5^{\text{o}}\text{passo}}}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\text{grau}(1)=0<2=\text{grau}(x^2-1)$ então a função $\frac{1}{x+x^2}$ já é própria.

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x^2-1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Caso notável da multiplicação} \\ \text{(Folhas de apoio de Mat.0} - \text{pág 7)}}}{=} (x+1)(x-1)$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} \Rightarrow 1=A(x-1)+B(x+1)$$

- Para $x=1$ vem $1=A(1-1)+B(1+1) \Leftrightarrow 1=A\cdot 0+B\cdot 2 \Leftrightarrow B=\frac{1}{2}$

- Para $x=-1$ vem $1=A(-1-1)+B(-1+1) \Leftrightarrow 1=A\cdot(-2)+B\cdot 0 \Leftrightarrow A=-\frac{1}{2}$

Assim,

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{1}{(x+1)(x-1)}=P\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)=P\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+P\frac{\frac{1}{2}}{x-1}=-\frac{1}{2}P\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}P\frac{1}{x-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C=\frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Elaborado por Maria Cristina Jorge e João Prata

Primitivas de funções racionais – Denominador sem zeros reais

I.3 Calcule as seguintes primitivas:

a) $P\dfrac{1}{1+(x\text{-}1)^2}$

Resolução:

$$P\frac{1}{1+(x\text{-}1)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x\text{-}1 \\ u'=1}}{=} \operatorname{arctg}(x\text{-}1)+C$$

b) $P\dfrac{1}{x^2+2x+5}$

Resolução:

$$P\frac{1}{x^2+2x+5} \underset{\substack{\uparrow \\ x^2+2x+5=x^2+2x+2^2+1=1+(x-2)^2}}{=} P\frac{1}{1+(x-2)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ u=x\text{-}1 \\ u'=1}}{=} \operatorname{arc\,tg}(x-2)+C$$

Primitivas de funções racionais – Redução a fracções próprias

I.4 Calcule a seguinte primitiva $P\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$

Resolução:

A primitiva da função $\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}$ não é imediata, como tal, iremos calculá-la recorrendo à primitivação de funções racionais, uma vez que se trata de uma função racional.

Primitivação da função racional:

$$P\left(\frac{x^3+1}{x^3-x^2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pelo} \\ 1^{\text{o}}\text{passo}}}{=} P\left(1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}\right) = P1 + P\frac{x^2+1}{x^3-x^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pelo} \\ 5^{\text{o}}\text{Passo}}}{=} x+\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$$

1º Passo: Obtenção de uma função racional própria

Como $\operatorname{grau}(x^3+1)=3=\operatorname{grau}(x^3-x^2)$, então efectua-se a divisão do polinómio (x^3+1) pelo polinómio (x^3-x^2):

$$\begin{array}{rr|l}
x^3 & +1 & x^3-x^2 \\ \cline{3-3}
-x^3+x^2 & & 1 \\ \hline
 & x^2+1 &
\end{array}$$

Assim,

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2} = 1 + \underbrace{\frac{x^2+1}{x^3-x^2}}_{\text{função própria}}.$$

2º Passo: Factorização do denominador da função própria

$$x^3-x^2=x^2(x-1)$$

3º Passo: Decomposição da função própria numa soma de elementos simples, de acordo com os factores obtidos

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A}{x-1}$$

4º Passo: Cálculo das constantes pela variante do método dos coeficientes indeterminados

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A}{x-1}\Rightarrow x^2+1=A_1\left(x-1\right)+A_2x\left(x-1\right)+Ax^2$$

- Para $x=0$ vem $\quad 0^2+1=A_1\left(0-1\right)+A_2 0\left(0-1\right)+A0^2 \Leftrightarrow 1=-A_1 \Leftrightarrow A_1=-1$

- Para $x=1$ vem $\quad 1+1=A_1\left(1-1\right)+A_2 1\left(1-1\right)+A1^2 \Leftrightarrow 2=A \Leftrightarrow A=2$

- Para $x=-1$ vem $\quad \left(-1\right)^2+1=A_1\left(-1-1\right)+A_2\left(-1\right)\left(-1-1\right)+A\left(-1\right)^2 \Leftrightarrow 2=-2A_1+2A_2+A$

$$\Leftrightarrow 2=-2\left(-1\right)+2A_2+2 \Leftrightarrow 2=4+2A_2 \Leftrightarrow -1=A_2 \Leftrightarrow A_2=-1$$

Assim,

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{-1}{x^2}+\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}$$

5º Passo: Determinação da primitiva da função própria

$$P\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=P\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}\right)=P\frac{-1}{x^2}+P\frac{-1}{x}+P\frac{2}{x-1}=-P\frac{1}{x^2}-P\frac{1}{x}+2P\frac{1}{x-1}=-Px^{-2}-P\frac{1}{x}+2P\frac{1}{x-1}$$

$$=-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\ln\left|x\right|+2\ln\left|x-1\right|+C=-\frac{x^{-1}}{-1}-\ln\left|x\right|+2\ln\left|x-1\right|+C=\frac{1}{x}-\ln\left|x\right|+2\ln\left|x-1\right|+C$$