Equações diferenciais

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função e que envolve derivadas da função incógnita.

- Uma equação diferencial ordinária (EDO) corresponde à incógnita ser função de uma variável, e. g.

$$\frac{dy}{dt} = y \quad \text{com } y = y(t);$$

- Uma equação com derivadas parciais (EDP) corresponde à incógnita ser função de várias variáveis, e. g.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com } u = u(x, y).$$

Equações diferenciais ordinárias

A equação diferencial mais simples é

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

onde $f(t)$ é uma função contínua

As soluções são bem conhecidas,

$$y = y(t) = F(t) + C$$

onde F é uma primitiva de f e C é uma constante real. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} = t \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

É preciso saber primitivar para resolver equações diferenciais!

Uma equação diferencial à qual se junta uma condição inicial $y(t_0) = y_0$ diz-se um problema de valor inicial (PVI)

Equações lineares homogéneas

Em simplicidade seguem-se as equações lineares homogéneas:

$$\frac{dy}{dt} = a(t)\, y$$

Para as soluções tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\log|y(t)| &= a(t) \\ \log|y(t)| &= \int a(t)dt + K \\ y(t) &= \left(\pm e^{K}\right) e^{\int a(t)dt}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Incluindo a solução identicamente nula, obtem-se a solução geral

$$y(t) = Ce^{\int a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Observação

A equação diz-se linear porque é equivalente a $T(y) = 0$, onde $T = \frac{d}{dt} - a(t)$ é uma transformação linear do espaço das funções diferenciaveis para o espaço de todas as funções.

Equações lineares (não homogéneas)

Definição

As equações diferenciais que se podem escrever na forma

$$\frac{dy}{dt} = a(t)\, y + b(t), \qquad \text{onde } a(t) \text{ e } b(t) \text{ são funções dadas,}$$

dizem-se equações diferenciais lineares.

Esta equação reduz-se ao caso anterior multiplicando por

$$e^{-\int a(t)dt} \qquad \text{(chamado factor integrante).}$$

De facto, a equação é equivalente a

$$e^{-\int a(t)dt}\, \frac{dy}{dt} - a(t)\, e^{-\int a(t)dt}\, y = e^{-\int a(t)dt}\, b(t)$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int a(t)dt}\, y(t)\right) = e^{-\int a(t)dt}\, b(t)$$

A solução obtém-se por primitivação do lado direito da igualdade.

Em resumo, a solução geral de

$$\frac{dy}{dt} = a(t)\, y + b(t)$$

é

$$y(t) = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int \left(e^{-\int a(t)dt}\, b(t) \right) dt \right)$$

onde C é uma constante real e $t \in I$ para algum intervalo aberto I em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Resolver o problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dt} = -ty + 2t; \qquad y(0) = 0.$

Neste caso $a(t) = -t$ e $b(t) = 2t$ com o factor integrante $e^{-\int a(t)dt} = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Multiplicando a equação por $e^{\frac{t^2}{2}}$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t^2}{2}}\,y(t)\right) = 2t\,e^{\frac{t^2}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{t^2}{2}}\,y(t) = \int 2t\,e^{\frac{t^2}{2}}\,dt + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}}\,y(t) = 2\,e^{\frac{t^2}{2}} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = 2 + K\,e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Da condição inicial $y(0) = 0$ obtém-se

$$0 = 2 + K \quad \Leftrightarrow \quad K = -2$$

logo a solução do PVI é

$$y(t) = 2 - 2\,e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

aula 1 – problemas

1. Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações

$$\text{a)}\quad \frac{dy}{dt} = -ye^t$$

$$\text{b)}\quad \frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x \qquad \text{c)}\quad \psi' = \psi - t$$

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial

(a) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0, \quad v(0) = 1.$

(b) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$.

3. Considere a equação diferencial

$$t^2\frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

Determine uma solução da equação, efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$, que satisfaz $y(1) = 1$.

Soluções

1. a) Ce^{-e^t}; b) $2x + Ce^{-x}$; c) $t + 1 + Ce^t$;
(em todos os casos, $C \in \mathbb{R}$ é uma constante).

2. a) $\frac{u+1}{u^2+1}$; b) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se} \quad t \leqslant 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$.

3. A solução geral é $y(t) = \pm\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$, onde c é uma constante real;
A solução do PVI é $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}}$ para $t > 0$.