Análise Matemática I

1º Teste - 10 de Novembro de 2001

Civ. e Ter.

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Sejam p e q duas proposições. Analise o valor lógico de (1.5)

$$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q).$$

2. Prove que (2)

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0.$$

3. Calcule os limites das sucessões de termo geral

a) $z_n = \frac{1}{n}\sin n$, (1.5)

b) $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n-1)}$, para n natural maior do que 1, (1.5)

c) $v_n = \frac{(n+1)^2}{n(n-1)(n-2)}$, para n natural maior do que 2, (1.5)

d) $w_n = \frac{(n+1)^2}{n!}$. (1.5)

4. Considere a sucessão u definida por recorrência:

$$u_1 = 0, \qquad u_{2n} = \frac{u_{2n-1}}{2}, \qquad u_{2n+1} = \frac{1}{2} + u_{2n}, \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}_1.$$

a) Prove por indução que, para $n \in \mathbb{N}$, $(0 \leq u_{2n+1} < 1) \wedge (0 \leq u_{2n+2} < \frac{1}{2})$. (2)

b) Em vista da alínea anterior, o que garante o Teorema de Bolzano-Weierstrass? (1)

c) Determine os oito primeiros termos da sucessão. Escreva uma expressão que permita calcular directamente os termos de ordem par da sucessão e outra que permita calcular directamente os termos de ordem ímpar. Prove essas expressões por indução. (3)

d) Determine todos os sublimites da sucessão. Justifique. (1)

e) A sucessão é de Cauchy? Justifique. (1)

5. Prove que $u_n \to a$ sse qualquer subsucessão de (u_n) tem uma subsucessão convergente para a. (2.5)