finalização da ficha nº 11

3 a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{(n-1)}}{5^n}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n}$, c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$

Análise da natureza:

① $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ é uma série divergente

② se $a_n \to 0$, nada se conclui quanto à natureza da série $\sum a_n$

③ critérios de convergência

Em 3a) e 3b) $a_n \to 0$. em 3a) $\sum a_n$, $a_n = \frac{2^{n-1}}{5^n}$, a série $\sum a_n$ converge, do crit. d'Alembert, cuja condição é

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^n}{5^{n+1}}}{\frac{2^{n-1}}{5^n}} = \lim \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = l < 1$$

na realidade, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{5}$, a série é geométrica $\sum r^n$, $r = \frac{2}{5} < 1$

a série geométrica é convergente, e cuja soma consigo determ.

Continuação de 3a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n} = 2^{-1}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, série geométrica convergente de razão $r<1$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{15}$$

$$\sum_{n=p}^{+\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r} \qquad p\in\mathbb{N}_0$$

Falta ainda analisar a natureza das séries em 3b) e 3c)

e 3h), $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2+n}$; ? b_n, $\sum b_n$

Séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

s. converg. $\alpha>1$

e séries div. $\alpha\leq 1$

$$a_n = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}_{b_n}\cdot\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

série de Dirichlet $\alpha=\frac{3}{2}>1$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1\in\mathbb{R}^+$$, satisfaz a condição do critério de comparação

logo as séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ são ambas convergentes, $\sum b_n$ série convergente $\alpha=\frac{3}{2}>1$

3c) $\sum n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, $n\operatorname{sen}\frac{1}{n} \longrightarrow \not\to 0$ ind.

$$n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \text{ , de } (*)$$

Conclusão: $a_n = n\operatorname{sen}\frac{1}{n} \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ série divergente.

Em $\mathbb{R}$

Como $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (posso usar a R. Cauchy (em $\mathbb{R}$!))

$$\Rightarrow x_n \to 0 \Rightarrow \lim_{x_n\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = 1$$

$$x_n = 1/n \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \to 1 \quad (*)$$

5. $a_n > 0$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$ série convergente. Mostre q $\sum \frac{a_n}{n}$ é uma série convergente

Será q consigo majorar $\frac{a_n}{n}$ envolvendo a_n^2:

$$0 \leq \left(a_n - \frac{1}{n}\right)^2 = a_n^2 - 2\frac{a_n}{n} + \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

$\sum a_n^2$ s. conv.

$\sum \frac{1}{n^2}$ s. Dirichlet conv.

Sendo $\sum \left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$ uma série convergente

Critério geral de comparação $\Rightarrow$

$\sum \frac{a_n}{n}$ é uma série convergente

Ficha nº 12 : 1. Determine a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Série de Mengoli: $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$, $a_n = ?$

(séries convergentes sse $\lim a_n \in \mathbb{R}$)

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - a_{n+1} = a_1 - \lim a_n$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = a_1 - \lim a_n =$

$= 1 - 0 = 1$

$a_n \in \mathbb{R}$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ série absolutamente $\overset{\text{def.}}{\text{sse}}$ $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$ são ambas convergentes

Nota: Se $\sum a_n$ converge e $\sum |a_n|$ diverge, diz-se q̄ a série $\sum a_n$ converge simplesmente

T: $\sum |a_n|$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ série convergente e tem convergência absoluta

2a) $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3} \to e \neq 0 \Rightarrow \sum \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}$ série divergente

b) $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \sum \frac{1}{n^2+1}$, $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ série de Dirichlet convergente

(critério geral de comparação) $\Rightarrow$

$\sum \frac{1}{n^2+1}$ é convergente

Como $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right|$ série convergente $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ é uma série absolutamente convergente

2c) $\sum \frac{2^n+n^4}{e^n+n^3}$, série de termos positivos e for convergente a sua convergência é absoluta

$\sum \frac{2^n}{e^n} = \sum \left(\frac{2}{e}\right)^n$ série geométrica convergente de razão $r = \frac{2}{e} < 1$

$a_n = \frac{2^n+n^4}{e^n+n^3}$, $b_n = \frac{2^n}{e^n}$, $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 1$ do critério de comparação

da escala de sucessões

$n^a \ll b^n$ $a>0$, $b>1$

Concluímos que as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas convergentes.

$$a_0 + a_1 x^n + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \underline{x \in \mathbb{R}}$$

$$r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$ raio de convergência

$\Rightarrow$ A série de potências de x conv. absolutamente $x \in]-r, r[$ intervalo de convergência

caso exista $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow r = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

3. i) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot x^n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$, $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}} \to 1 = r$

Como o maior intervalo aberto onde a serie de potências de x converge absolutamente coincide com o intervalo de convergência, obtemos o referido o intervalo com $]-r, r[=]-1, 1[$.

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n u^n$, $r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$, $u = (1-3x)^2$

a série converge absolutamente $u \in]-r, r[$

ou seja $|u| < r$

$a_n = \frac{1}{5^n (n+1)}$, $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left| \frac{\frac{1}{5^n(n+1)}}{\frac{1}{5^{n+1}(n+2)}} \right| = 5 \left| \frac{n+2}{n+1} \right| = 5 \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right) \to 5 = r$

ou seja $|(1-3x)^2| < 5$

TPC

o conj. solução será onde a série converge absolutamente.

(assim, $]\frac{1-\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}[$ é o maior intervalo aberto onde a série $\sum a_n (1-3x)^{2n}$ é convergente)

Série de potências de x-a $\qquad a \in \mathbb{R}$

$$\sum a_n(x-a)^n \quad , \quad r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

intervalo de convergência $\left]-r+a, r+a\right[$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{1-n} \cdot (x+1)^{n+2} = 2(x+1)\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \cdot (x+1)^n \quad , \quad \left|\frac{x+1}{2}\right| < 1$

$\Rightarrow r = 2$, $\left]-2-1, 2+1\right[= \left]-3, -1\right[$ int. convergência absoluta

$a = -1$

$x = -3$ e $x = -1 \Rightarrow \sum 2^{-n}(-2)^n$ e $\sum 2^{-n} \cdot 2^n$ séries divergentes

A série é divergente $x \in \mathbb{R} \setminus \left]-3, -1\right[$

$x = 0 \quad S = 2 \cdot \displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = 2$