CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR HOMOGÉNEAS E NÃO HOMOGÉNEAS

EXERCÍCIOS

1. Mostre que as funções $y_1(t) = \operatorname{sen} t$, $y_2(t) = \cos t$ e $y_3(t) = t\cos t$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - y = 0$.

(b) $6y'' - 7y' + y = 0$.

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

(d) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

(e) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

(f) $y''' - y'' + y' - y = 0$.

(g) $y^{(v)} - 2y''' + y' = 0$.

3. Para cada uma das equações do exercício anterior, determine as soluções que satisfazem $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

4. Considere uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes, com a menor ordem possível, que admite as funções t e $\operatorname{sen}(2t)$ como soluções. Qual a solução geral dessa equação?

5. Determine os valores de α para os quais os seguintes problemas de valor na fronteira têm soluções não constantes:

(a) $y'' - 2y' + (1+\alpha)\,y = 0,\;\; y(0) = 0,\;\; y(1) = 0$.

(b) $y'' + \alpha y = 0$, $y(0) = y(2\pi),\;\; y'(0) = y'(2\pi)$.

6. Determine a solução geral das equações diferenciais não homogéneas:

(a) $y'' - 2y' + y = t$.

(b) $y'' + y = \cos t$.

(c) $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$.

(d) $y'' + y' - 2y = e^t + \cos t.$

(e) $y''' - 4y' = 8t - 16\,\mathrm{sen}\,(2t).$

7. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y'' - 3\pi y' + 2\pi^2 y = \pi^2 e^{\pi t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \pi$.

(b) $y''' - 4\pi y'' + 3\pi^2 y' = 10\pi^3 \cos(\pi t)$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4\pi$, $y''(0) = 7\pi^2$.

8. Considere a seguinte equação diferencial linear:

$$y'' - \frac{1}{e^t + 1}\, y' - \frac{e^{2t}}{(e^t + 1)^2}\, y = \frac{2e^t}{e^t + 1}$$

(a) Verifique que as funções $y_1(t) = e^t + 1$ e $y_2(t) = \dfrac{1}{e^t + 1}$ constituem duas soluções linearmente independentes da equação homogénea associada.

(b) Através do método de variação das constantes, resolva a equação não homogénea com as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$.

RESPOSTAS

1. O wronskiano é $2\,\mathrm{sen}\,t$.

2. **(a)** $y(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{t},\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = c_1\,e^{t/6} + c_2\,e^{t},\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(c) $y(t) = c_1\,e^{3t} + c_2\,t\,e^{3t},\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(d) $y(t) = c_1\,e^{t}\cos(2t) + c_2\,e^{t}\,\mathrm{sen}\,(2t),\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(e) $y(t) = c_1\,e^{t}\cos t + c_2\,e^{t}\,\mathrm{sen}\,t,\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(f) $y(t) = c_1\,e^{t} + c_2\cos t + c_3\,\mathrm{sen}\,t,\;\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

(g) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-t} + c_3\,t\,e^{-t} + c_4\,e^{t} + c_5\,t\,e^{t},\;\; c_i \in \mathbb{R}.$

3. **(a)** $y(t) = \mathrm{senh}\,t.$

(b) $y(t) = \frac{6}{5}\big(e^{t} - e^{t/6}\big).$

(c) $y(t) = t\,e^{3t}.$

(d) $y(t) = \frac{1}{2}\,e^{t}\,\mathrm{sen}\,(2t).$

(e) $y(t) = e^{t}\,\mathrm{sen}\,t.$

(f) $y(t) = c\,e^{t} - c\cos t + (1-c)\,\mathrm{sen}\,t,\;\; c \in \mathbb{R}.$

(g) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-t} + c_3\,t\,e^{-t} - (c_1 + c_2)\,e^{t} + (1 + c_1 + 2\,c_2 - c_3)\,t\,e^{t},\;\; c_i \in \mathbb{R}.$

4. $y(t) = c_1 + c_2\,t + c_3\,\mathrm{sen}\,(2t) + c_4\cos(2t),\; c_i \in \mathbb{R}.$

5. **(a)** $\alpha = k^2\pi^2,\;\; (k \in \mathbb{N}).$

(b) $\alpha = k^2,\;\; (k \in \mathbb{N}_0).$

6. **(a)** $y(t) = c_1\,e^{t} + c_2\,t\,e^{t} + t + 2,\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = c_1\cos t + c_2\,\mathrm{sen}\,t + \frac{1}{2}\,t\,\mathrm{sen}\,t,\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(c) $y(t) = c_1\,e^{t} + c_2\,e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} - t\right)e^{2t},\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(d) $y(t) = c_1\,e^{-2t} + c_2\,e^{t} + \dfrac{t}{3}\,e^{t} + \dfrac{\mathrm{sen}\,t - 3\cos t}{10},\;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(e) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-2t} + c_3\,e^{2t} - t^2 - \cos(2t),\;\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

7. **(a)** $y(t) = 2\,e^{2\pi t} - (2 + \pi t)\,e^{\pi t}.$

(b) $y(t) = 1 + e^{3\pi t} + 2\cos(\pi t) + \mathrm{sen}\,(\pi t).$

8. **(b)** $y(t) = (\log 2)\,(e^{t} + 1) + \dfrac{1}{(e^{t} + 1)} + (e^{t} + 1)\log\left(\dfrac{e^{t}}{e^{t} + 1}\right) - \dfrac{e^{t} + t}{e^{t} + 1}.$