Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º semestre 17/18

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark
16 de outubro de 2017 (18:00)

Teste 101 - soluções

Nome:
Número:

O teste que vai realizar tem a duração de **60 minutos** e consiste na resolução de **6 problemas**. Os 4 primeiros são de escolha múltipla; cada resposta em branco vale 0 valores, **e cada resposta errada vale -1/3 da respectiva classificação.** Os dois últimos problemas **não são de escolha múltipla**, devendo por isso apresentar os cálculos efetuados e/ou justificar cuidadosamente as suas respostas.

NOTA FINAL:

Problema 1 (0.5 valores)
Considere o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \quad\;\; - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Identifique a única matriz aumentada na forma reduzida de escada de linhas, que lhe está associada.

☐ (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; ☒ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; ☐ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; ☐ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Problema 2 (0.5 valores)
Considere o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & = & k \\ 4x_1 & + & hx_2 & = & 8 \end{cases}$$

Assinale a única afirmação **verdadeira** sobre a classificação deste SEL.

☒ (a) para $h = 12, k \neq 2$ é impossível, para $h = 12, k = 2$ é indeterminado, para $h \neq 12$ é determinado;
☐ (b) para $h \neq 12, k = 2$ é impossível, para $h = 12$ é indeterminado, para $h \neq 12$ é determinado;
☐ (c) para $h = 10, k \neq 2$ é impossível, para $h = 10, k = 2$ é indeterminado, para $h \neq 10$ é determinado;
☐ (d) para $h = 12, k \neq -2$ é impossível, para $h = 12, k = -2$ é indeterminado, para $h \neq 12$ é determinado.

Problema 3 (1 valor)
Considere as seguintes matrizes A, B e C

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 12 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 15 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assinale a única afirmação **falsa** sobre as colunas destas matrizes.

☐ (a) as colunas de A geram uma reta em $\mathbb{R}^3$;
☐ (b) as colunas de C geram $\mathbb{R}^3$;
☒ (c) as colunas de B são linearmente independentes;
☐ (d) as colunas de C são linearmente dependentes.

Problema 4 (1 valor)
Considere a seguinte solução geral de um sistema de equações lineares : $(x_1,\ x_2,\ x_3) = (3,\ 0,\ 0) + t(-1,\ 1,\ 0) + s(2,\ 0,\ 1)$
Assinale a única afirmação **verdadeira**.

☐ (a) o conjunto solução representa uma reta que passa no ponto $(3,\ 0,\ 0)$;
☐ (b) o sistema de equações lineares é homogéneo;
☒ (c) a matriz aumentada na forma reduzida pode ter a forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$;
☐ (d) o conjunto solução tem três variáveis livres.

Problema 5 (1 valor)
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2, 4x_2)$.

a) Determine $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = (-1, 3, 4)$.

b) Classifique T quanto à sobrejetividade e injetividade.

a) $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ com $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Resolver $T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ pode ser feito com

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde se conclui $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) T não é sobrejetiva, porque as colunas de A não geram $\mathbb{R}^3$, p. ex. $(0,0,1) \notin \mathrm{Im}\, T$; T é injetiva, porque as colunas de A são L.I. São dois vetores não-colineares de $\mathbb{R}^3$.

Problema 6 (1 valor)
Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear tal que $A = [T(\mathbf{e}_1) \ldots T(\mathbf{e}_n)]$ é a matriz que representa T e que tem em coluna as imagens dos vetores canónicos $\mathbf{e}_j$.

Mostre que a matriz A é única, ou seja, se $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, então $A = B$ (sugestão: mostre que A e B têm as mesmas colunas).

Se $T(\underline{x}) = B\underline{x}$, então $T(\underline{e}_1) = B\underline{e}_1 = \underline{b}_1$, sendo $\underline{b}_1$ a 1ª coluna de B, e $T(\underline{e}_2) = B\underline{e}_2 = \underline{b}_2$, 2ª coluna de B, ... $T(\underline{e}_n) = \underline{b}_n$, a coluna-n de B. Então

$$A = [T(\underline{e}_1)\ T(\underline{e}_2) \ldots T(\underline{e}_n)] = [\underline{b}_1\ \underline{b}_2 \ldots \underline{b}_n] = B \quad \blacksquare$$