1 Números Reais (Soluções)

1. a) $\frac{x^2}{4}$
   b) x
   c) $\frac{1}{x}$
   d) $|x|$
   e) x
   f) 2^{x+2}
   g) $2^{x(x+2)}$
   h) $\sqrt{x}$
   i) $\sqrt{x^2 - 4}$
   j) $\sqrt{x(x+1)} + x$
   k) $\log(x)$
   l) $2\log\left(x^2 + x^{-2}\right)$.
2. a) $x = 1 \vee x \geq 2$
   b) $-2 \leq x \leq 1$
   c) $-1 \leq x \leq 1$
   d) $x \leq 0 \vee x = 1$
   e) $x = -4 \vee x = 2$
   f) $x = 1 \vee x = 2$
   g) $x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x > 1$
   h) $x = 1 \vee x = -1$
   i) $0 < x < 1 \vee x < -1$
   j) $x < 0$

k) $x \geq 2 \vee x \leq -\frac{2}{3}$

l) $x \leq 1$

m) $-2 \leq x \leq 2$

n) $-2 \leq x < 1 \vee 1 < x \leq 2$

o) $x < 0$

p) $x = 0$

q) $0 < x \leq 1$

r) $x \leq -2 \vee x \geq 2$.

3. a) $]-1, +\infty[$

   b) $]0, +\infty[$

   c) $[-4, 1]$

   d) $]-\infty, -2] \cup \{1\} \cup [2, +\infty[$

   e) $[-2, -1] \cup [1, 2]$

   f) $\{-1\} \cup [0, 2]$

   g) $[-2, 2]$

   h) $]-1, 0] \cup]1, +\infty]$

   i) $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, 3[$.

4. a) Verdadeira; b) Falsa; c) Falsa; d) Falsa; e) Verdadeira; f) Falsa; g) Verdadeira; h) Verdadeira; i) Falsa; j) Falsa; k) Verdadeira; l) Falsa; m) Verdadeira.

5. a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$:
   Para $n = 1$, temos $2 \cdot 1 - 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}_1$, temos $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
   Tese (a provar): $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$.
   Usando a hipótese de indução, temos:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

   como queríamos mostrar.

   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}_1$:
   Para $n = 1$, temos $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}_1$, temos $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
   Tese (a provar): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

Usando a hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

6. b) Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1}-1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$, a condição acima fica $a-1 = a-1$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1}-1$.
Tese: $(a-1)(1+a+\cdots+a^n+a^{n+1}) = a^{n+2}-1$.
Simplificando o lado esquerdo da igualdade acima, temos que

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) = (a-1)(1+a+\cdots+a^n)+(a-1)a^{n+1}.$$

Usando a hipótese de indução, temos agora

$$\begin{aligned}
(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) &= a^{n+1}-1+(a-1)a^{n+1} \\
&= a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1} \\
&= a^{n+2}-1,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

c) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$, a condição fica $0 = 1-\frac{1}{1!} \Leftrightarrow 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}$.
Tese: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} = 1-\frac{1}{(n+2)!}$.
Usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)+\left(\frac{n+1}{(n+2)!}\right) \\
&= 1-\frac{n+2-n-1}{(n+2)!} \\
&= 1-\frac{1}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

7. a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$:
   Para $n = 1$, temos que $3! \geq 4$ que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \in \mathbb{N}_1$, temos $(n+2)! \geq 2^{2n}$.
   Tese: $(n+3)! \geq 2^{2n+2}$.
   Temos que $(n+3)! \geq 2^{2n+2} \Leftrightarrow (n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$. Como, por hipótese de indução, $(n+2)! \geq 2^{2n}$ e, para $n \geq 1$, $n+3 \geq 4 > 0$, temos então que
   $$(n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$$
   como queríamos mostrar.

   b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$:
   Para $n = 5$, temos que $10 - 3 < 2^3 \Leftrightarrow 7 < 8$, que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $2n - 3 < 2^{n-2}$.
   Tese: $2(n+1) - 3 < 2^{(n+1)-2}$.
   Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade acima e usando a hipótese, temos
   $$2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = (2n-3) + 2 < 2^{n-2} + 2,$$
   Como, para $n \geq 5$, temos $2 < 2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2} + 2 < 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Logo
   $$2(n+1) - 3 < 2^{n-1}.$$

   c) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$:
   Para $n = 1$, temos $7^1 - 1 = 6$, que é divisível por 6.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}_1$, $7^n - 1$ é divisível por 6. Isto significa que existe $k \in \mathbb{N}_1$ tal que $6k = 7^n - 1$.
   Tese: $7^{n+1} - 1$ é divisível por 6, isto é, existe um natural positivo j tal que $7^{n+1} - 1 = 6j$.
   Então:
   $$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(7^n - 1 + 1) - 1 = 7(6k+1) - 1 = 6 \cdot 7k + 7 - 1 = 6(7k+1)$$
   em que na terceira igualdade usámos a hipótese de indução. Demonstrámos então a tese com $j = 7k + 1$.

8. Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$:
   Para $n = 0$, a condição fica $(1+a)^0 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$, que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
   Tese: $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.
   Desenvolvendo o lado esquerdo e usando a hipótese de indução, temos que
   $$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a).$$

Como

$$(1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

uma vez que $na^2 \geq 0$, temos agora $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$, como queríamos mostrar.

9. a) Vamos ver que $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, ou seja, que se $n^2 + 3n + 1$ é par, também $(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1$ é par. Temos

$$(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1 = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 1 = (n^2 + 3n + 1) + 2n + 4.$$

Assumindo que n^2+3n+1 é par, como $2n+4 = 2(n+2)$ é também par, conclui-se que $(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1$ sendo uma soma de números pares será par.

b) Não.

c) Indução... (Como acima: se $n^2 + 3n + 1$ é ímpar, $(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1$ será uma soma de um número ímpar com um número par, e será portanto ímpar. Mas neste caso $P(0)$ é verdadeira: 1 é ímpar.)

12. Para $n = 1$, temos $u_1 = \sqrt{2^1 - 1} = 1$.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2^n - 1}$.

Tese: $u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$.

Temos por hipótese, $u_n^2 = 2^n - 1$. Assim, usando a fórmula de recorrência,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 2 + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 1},$$

como queríamos mostrar.

13. Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar, com $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ é ímpar, uma vez que $4k^2 + 4k$ é par para qualquer k.

Conclui-se que se n^2 é par, n também será.

14. Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, ou seja $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Então, $-x = \frac{-p}{q}$, $x^{-1} = \frac{q}{p}$, $x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$, logo $-x$, x^{-1}, $x + y \in \mathbb{Q}$.

15. Seja $x \neq 0$ um racional e y um irracional. Se $x + y$ fosse racional, uma vez que a soma e a subtracção de dois racionais é também racional, teriamos que $(x + y) - x$ seria racional. Mas $(x + y) - x = y$, logo y seria racional, o que contradiz a hipótese. Conclui-se que $x + y$ é irracional.

Para mostrar que $x - y$, xy e y/x são irracionais, a prova é semelhante (usando o facto da soma, divisão e multiplicação de racionais ser racional).

Sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais. Por exemplo: com $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \text{etc.}$$

16. a) $A =]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [4, +\infty[$, logo $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.

    b) $\sup A$ não existe, porque A não é majorado;
    $\min(A \cap B) = -3$, $\max(A \cap B) = 4$;
    $\inf(A \cap B \cap C) = -3$, $\sup(A \cap B \cap C) = -\frac{4}{3}$, $\min(A \cap B \cap C)$ não existe, porque $-3 \notin A \cap B \cap C$.

17. $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$: $\sup A$, $\max A$ não existem, uma vez que A não é majorado; $\inf A = 0 \notin A$, logo $\min A$ não existe.

    $\sup A \cup B$ (e $\max A \cup B$) não existem, porque $A \cup B$ não é majorado; $\inf A \cup B = \min A \cup B = -1$.

18. $A =]1, e]$: Majorantes de A: $[e, +\infty[$, Minorantes de A : $]-\infty, 1]$, $\sup A = e = \max A$, $\inf A = 1$, $\min A$ não existe, porque $1 \notin A$.

    $B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$: Majorantes de B: $[2, +\infty[$, Minorantes de B : $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $\sup B = \max B = 2$, $\inf B = \min B = \frac{1}{2}$.

19. a) $x^2 + 2|x| > 3 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \ \vee \ |x| < -3 \Leftrightarrow x < -1 \ \vee \ x > 1$.
    Assim, $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

    b) $\inf A$ não existe, porque A não é minorado;
    $A \cap B = \left]1, \sqrt{2}\right[$: $\min A \cap B$, $\max A \cap B$ e $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$ não existem e $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q} = 1$;
    $\max C$ não existe; $\max B \setminus C$ não existe.

20. a) $A =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

    b) $A \cap B = \{-2\} \cup [1, 2]$: $\min A \cap B = -2$, $\max A \cap B = 2$.
    $A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) =]1, 2[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$: $\sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 2$, $\inf A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1$, $\min A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $\max A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não existem, porque $1, 2 \notin A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

21. b) $A \cap B = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right] \cap \mathbb{Q}$: $\sup A \cap B = 3$, $\max A \cap B = 3$, uma vez que $3 \in A \cap B$, $\inf A \cap B = -1 + \sqrt{2}$, $\min A \cap B$ não existe, porque $-1 + \sqrt{2} \notin A \cap B$.
    $C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1\right\}$: $\sup C = \max C = 1$ (porque $1 \in C$ e 1 é majorante), $\inf C = 0$, $\min C$ não existe porque $0 \notin C$.

22. b) $A \cap C = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup [1, +\infty[\cap \mathbb{Q}$: Majorantes de $A \cap C$: $\emptyset$.
$B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, logo $B \cap C = \{0\}$, uma vez que $k\pi \notin \mathbb{Q}$, para $k \neq 0$. Majorantes de $B \cap C = [0, +\infty[$.
$\sup A$ não existe, $\inf A \cap C = -1/2$, $\min A \cap C = -1/2$, $\min B$ não existe, porque B não é minorado, $\min B \cap C = 0$.

23. a) Começamos por notar que

$$\begin{aligned}\frac{x^4-4}{|x-1|} \leq 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{|x-1|} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow\; x^2-2 \leq 0 \;\wedge\; |x-1| \neq 0 \quad (\text{porque } x^2+2>0 \text{ e } |x-1| \geq 0) \\ &\Leftrightarrow\; x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Então,

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \;\wedge\; x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}\right\} = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.$$

Relativamente a B começamos por notar que se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $kx \notin \mathbb{Q}$ então $x \notin \mathbb{Q}$ pois, caso contrário, $kx \in \mathbb{Q}$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Portanto $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então $1 \cdot x = x \notin \mathbb{Q}$. Portanto B é de facto o conjunto dos números irracionais positivos.

b) Notamos que $A \setminus B = \left(\left[0, \sqrt{2}\right[\setminus \{1\}\right) \cap \mathbb{Q}$. Então,

$$\begin{gathered}\sup A = \sup A \setminus B = \sqrt{2} = \max A, \\ \inf A = \inf A \setminus B = 0 = \min A = \min A \setminus B.\end{gathered}$$

$A \setminus B$ não tem máximo pois $\sup A \setminus B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

24. a)

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2}{|x|-1} \leq 0 \Leftrightarrow &(x^2 < 2 \wedge |x| > 1) \vee (x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1) \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \wedge (x < -1 \vee x > 1),\end{aligned}$$

uma vez que $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$, logo $x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1$ é impossível. Assim, $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) $A \cap \mathbb{Q} = \left(\left]-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right[\right) \cap \mathbb{Q}$. $\sup A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo, $\inf A \cap \mathbb{Q} = -\sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem mínimo.
$B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}_1\}$. $\inf B = \min B = \sqrt{2}$, $\sup B$ e $\max B$ não existem, porque B não é majorado.
$B \cap \mathbb{Q}$: temos $2^{n/2} \in \mathbb{Q}$ sse n é par, ou seja, $B \cap \mathbb{Q} = \{2^n : n \in \mathbb{N}_1\}$. $\inf B \cap \mathbb{Q} = \min B \cap \mathbb{Q} = 2$, $\sup B \cap \mathbb{Q}$ e $\max B \cap \mathbb{Q}$ não existem, porque B não é majorado.

25. Se m é majorante de A e $m \neq \sup A$ então $m > \sup A$. Tem-se $x \leq \sup A < m$, para qualquer $x \in A$, logo, para $0 < \epsilon < m - \sup A$, $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

26. Se B é majorado e $A \subset B$, então A é majorado e qualquer majorante de B é majorante de A (directamente da definição de majorante). Por outro lado $A \neq \emptyset \wedge A \subset B \Rightarrow B \neq \emptyset$. Logo como A e B são majorados e não-vazios, o axioma do supremo garante que $\sup A$ e $\sup B$ existem. Como $\sup B$ é majorante de B será também majorante de A, logo $\sup A \leq \sup B$.

27. a) $x \in U \Rightarrow x \leq \sup U < \sup V$.

    b) Se para qualquer $y \in V$, $y \leq \sup U$, então $\sup U$ é majorante de V e seria $\sup U \geq \sup V$.

28. b) $\sup A > \inf V \ \wedge\ \sup B > \inf A$, por exemplo:
    $A = [0,1]$, $B = [\frac{1}{2}, 2] : A \cap B \neq \emptyset$;
    $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $B = [\frac{1}{2}, 2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : A \cap B = \emptyset$.