Instituto Superior Técnico - 1$^o$ Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

**1$^a$ Ficha de exercícios para as aulas práticas: 25 - 29 Setembro de 2006**

$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.

1. Verifique que, apesar de serem verdadeiras para os primeiros naturais, as seguintes afirmações são falsas.

   **(a)** $n^2 - 2n = n - 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(b)** $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

2. Mostre que, apesar de verificarem a propriedade hereditária, as seguintes afirmações são falsas.

   **(a)** $5n + 3$ é múltiplo de 5 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(b)** $\operatorname{sen}(2n\pi) = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(c)** $n^2 + 3n + 1$ é par para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

3. Verifique que se tem:

   **(a)** $n^2 + 3n + 1$ é ímpar para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(b)** $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(c)** $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(d)** $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(e)** $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(f)** $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{4n^3 - n}{3}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(g)** $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(h)** $1.3 + 2.4 + \cdots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(i)** $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(j)** $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(k)** $2^{2n} + 2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(l)** $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(m)** $5^{2n} - 1$ é divisível por 8 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(n)** $n < 2^n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   **(o)** $2^n < n!$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

   **(p)** $1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

**(q)** $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

**(r)** $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \dfrac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

**(s)** $(n!)^2 > 2^n n^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

**(t)** $n! \geq 2^{n-1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

**(u)** $n^2 > 3\,(n+1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

**(v)** $\dfrac{3^{n-1}}{n!} < \dfrac{19}{n^2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

**(w)** $|\operatorname{sen} nx| \leq n\,|\operatorname{sen} x|$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

**(x)** $(1+a)^n \geq 1 + na$ *(desigualdade de Bernoulli)* para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq -1$.

**(y)** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. A igualdade anterior é conhecida por *fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton*, onde $\binom{n}{k}$ designa as combinações de $n$ elementos $k$ a $k$, tendo-se $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Uma propriedade importante é a seguinte: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq n$, a qual é conhecida pela *lei do triângulo de Pascal*. Verifique ainda que se tem como consequência da fórmula anterior: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ e $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**(z)** $a^n - b^n = (a-b) \sum\limits_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

   **(a)** Mostre que, se para algum $r \in \mathbb{R}$ tivermos $a_{k+1} - a_k = r$ com $1 \leq k \leq n-1$, então $S_n = n\dfrac{a_1 + a_n}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. (Fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão aritmética.)

   **(b)** Mostre que, se para algum $r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tivermos $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ com $1 \leq k \leq n-1$, então $S_n = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. (Fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão geométrica.)