Resolução do Teste 2A

1.A Tem-se que

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)(\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}}$$

A este limite podemos aplicar a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{[(\sin x)^{-1}]'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-(\cos x)/(\sin x)^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}(\tan x) = 1\times 0 = 0.$$

Pelo que o limite original vale também 0.

1.B Tem-se que,

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{(1/x)\ln\cos x}$$

Basta agora calcular o limite do expoente e, para isso, recorremos à regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

O limite original é assim, $e^0 = 1$.

2. Usando a definição de *derivada*, calcularemos a derivada esquerda e direita de f em $x = 1$, tendo em conta que,

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} x(x-1) & (\text{se } x\geq 1)\\ -x(x-1) & (\text{se } x<1).\end{cases}$$

Tem-se então:

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} -x = -1.$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x = 1.$$

Tem-se assim que $f'(1^-)\neq f'(1^+)$ pelo que f não é diferenciável em $x = 1$.

3.1 A função é crescente em $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ $(f'\geq 0)$. E f é decrescente em $[-1,1]$ $(f'\leq 0)$.

3.2 A função f tem um extremo local (máximo) em $x=-1$ pois é contínua nesse ponto, cresce à esquerda e decresce à direita. A função f tem ainda um extremo local (mínimo) no ponto $x = 1$, pois decresce à esquerda, cresce à direita e é contínua em $x = 1$.

4. A primeira das derivadas que não se anula no ponto $x = 0$ é a derivada de ordem 3 (ímpar) logo não existe extremo em $x = 0$. No caso do ponto $x = 1$ a primeira derivada que não se anula é a derivada de ordem 4 (par) logo existe um extremo local neste ponto que é um máximo local porque $f^{(4)}(1) < 0$.

5.1 Calculando as sucessivas derivadas da função f obtém-se:

$$f(x) = \sin(x/2);\quad f'(x) = (1/2)\cos(x/2);\quad f^{(2)}(x) = -(1/4)\sin(x/2);$$

$$f^{(3)}(x) = -(1/8)\cos(x/2);\quad f^{(4)}(x) = (1/16)\sin(x/2);\quad f^{(5)}(x) = (1/32)\cos(x/2);\ldots$$

Assim,

$$p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}.$$

5.2 Observando que, neste caso se tem, $p_{3,0}(x) = p_{4,0}(x)$, podemo usar o resto de Lagrange de ordem 4, que constitui uma melhor estimativa do erro. Assim,

$$|f(x) - p_{3,0}(x)| = |f(x) - p_{4,0}(x)| = |R_4(x)|.$$

Usando a fórmula do resto de Lagrange tem-se,

$$|R_4(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}x^5\right| = \left|\frac{(1/32)\cos(\theta/2)}{5!}x^5\right| \leq \frac{1}{32\times(5!)}\frac{\pi^5}{2^5} = \frac{\pi^5}{2^2\times 2^5\times(5!)} = \frac{\pi^5}{4^5}\frac{1}{5!} \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} \leq \frac{1}{100}$$

como se pretendia.

6. Fazendo a substituição indicada rem-se $x = 1 - t^2$ e $dx = -2t\, dt$. Assim,

$$\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\, dx = \int \frac{-2t}{(2-(1-t^2))t}\, dt = -2\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = -2\arctan t = -2\arctan\sqrt{1-x}.$$

7. Tem-se,

$$\frac{(f(x))^2}{2} = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2-\cos t}\, dt \Rightarrow \left(\frac{(f(x))^2}{2}\right)' = \left(\int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2-\cos t}\, dt\right)'$$

o lado direito é equivalente a

$$f'(x)f(x) = f(x)\frac{\sin x}{2-\cos x} \equiv f'(x) = \frac{\sin x}{2-\cos x}.$$

Primitivando, obtém-se:

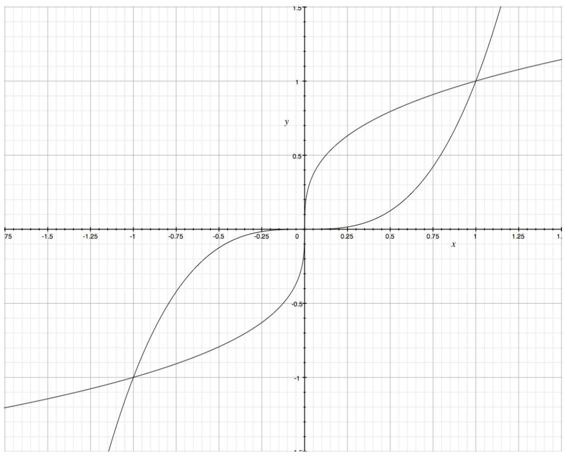
$$f(x) = \int \frac{\sin x}{2-\cos x}\, dx = \ln(2-\cos x) + C.$$

Devido à implicação acima, temos que testar estas soluções na equação original, para ver quais destas, de facto a solucionam.

$$\frac{[\ln(2-\cos x)+C]^2}{2} = \int_0^x \frac{\sin x}{2-\cos x}(\ln(2-\cos x)\, dx = [[\ln(2-\cos x)]^2/2]_0^x = \frac{[\ln(2-\cos x)]^2}{2}.$$

Obtendo-se a igualdade acima quando $C = 0$, sendo portanto esta a única solução do problema original.

8. A representação gráfica das duas funções é a seguinte:



Como a figura é simétrica, obtém-se que a área pretendida, A. é dada por

$$A = 2\int_0^1 (x^{1/3} - x^3)\, dx = 2\left[\frac{3x^{4/3}}{4} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

9. O raio de convergência desta série de potências calcula-se através da relação,

$$R = \lim \frac{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n+1+\sqrt{n+1}}} = \lim \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} = 1.$$

Como a série se encontra centrada no ponto $a = 1$, ficamos a saber que a série converge absolutamente para valores de x no intervalo $]0,2[$ e é divergente para valores de x no conjunto $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$. Resta-nos estudar os casos particulares $x = 2$ e $x = 0$.

No primeiro caso, substituindo x por 2 obtém-se a série:

$$\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

Verifica-se facilmente que esta série é divergente por comparação com a série harmónica, i.e., a série $\sum 1/n$ (que é divergente).

Substituindo agora x por 0, obtemos a série

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

A série dosmódilos desta séri é a série anterior sendo, por isso, divergente. A série não é pois absolutamente convergente. Mas, converge simplesmente pois, sendo uma série alternada, aplica-se-lhe o critério de Leibniz e, $1/(n+\sqrt{n})$ é decrescente e tende para zero.