Ficha 4
Resolução dos exercícios propostos

I. 1 Aplicando o método de primitivação por substituição, determine as seguintes primitivas:

a) $P\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ é da forma $R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x = t^m, \text{ onde } m = \text{m.m.c}(q, s, ...).$$

Efectuando a substituição: $x = \underbrace{t^2}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = 2t$
- $x = t^2 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow t = \underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
- $f(g(t)) = f(t^2) = \frac{e^{\sqrt{t^2}}}{2\sqrt{t^2}} = \frac{e^t}{2t}$

Assim,

$$P\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x) = \left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P\left(\frac{e^t}{2t}\cdot 2t\right)\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[Pe^t\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[e^t + C\right]_{t=\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} + C.$$

b) $P\left(\frac{4^{2x} + 4^x}{4^{2x} + 3\cdot 4^x + 2}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\frac{4^{2x} + 4^x}{4^{2x} + 3\cdot 4^x + 2}$ é da forma $R(a^{rx}, a^{sx}, ...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$t = a^{mx}, \text{ onde } m = \text{m.d.c}(r, s, ...).$$

Efectuando a substituição: $t = 4^x \Leftrightarrow x = \underbrace{\log_4(t)}_{g(t)}$, pois $m = \text{m.d.c.}(1,2) = 1$.

Tem-se

- $g'(t) = \frac{1}{t \ln 4}$
- $t = \underbrace{4^x}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \frac{4^{2x} + 4^x}{4^{2x} + 3 \times 4^x + 2}$
- $f(g(t)) = f(\log_4(t)) = \frac{\left(4^{\log_4 t}\right)^2 + 4^{\log_4 t}}{\left(4^{\log_4 t}\right)^2 + 3 \cdot 4^{\log_4 t} + 2} = \frac{t^2 + t}{t^2 + 3t + 2} = \frac{t(1+t)}{(t+1)(t+2)} = \frac{t}{t+2}$

Assim,

$$P\left(\frac{4^{2x} + 4^x}{4^{2x} + 3 \cdot 4^x + 2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x) = \left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P\left(\frac{t}{t+2} \cdot \frac{1}{t \ln 4}\right)\right]_{t=4^x} = \left[\frac{1}{\ln 4} P\left(\frac{1}{t+2}\right)\right]_{t=4^x} = \left[\frac{1}{\ln 4} \ln|t+2| + C\right]_{t=4^x}$$

$$= \frac{\ln\left|4^x + 2\right|}{\ln 4} + C \underset{4^x + 2 > 0}{=} \frac{\ln\left(4^x + 2\right)}{\ln 4} + C$$

c) $P\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ é da forma $R(x, \log_a x)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$t = \log_a x\ .$$

Efectuando a substituição: $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = \underbrace{e^t}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = e^t$
- $t = \underbrace{\ln(x)}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- $f(g(t)) = f(e^t) = \frac{\ln(e^t)}{e^t} = \frac{t}{e^t}$

Assim,

$$P\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x) = \left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P\left(\frac{t}{e^t} e^t\right)\right]_{t=\ln(x)} = [P\,t]_{t=\ln(x)} = \left[\frac{t^2}{2} + C\right]_{t=\ln(x)} = \frac{\ln^2(x)}{2} + C\ .$$

d) $P\left(\sqrt{4-x^2}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\sqrt{4-x^2}$ é da forma $R(x,\sqrt{a^2-b^2x^2})$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x=\frac{a}{b}\operatorname{sen} t \text{ ou } x=\frac{a}{b}\cos t.$$

Substituição: $x=\underbrace{2\operatorname{sen} t}_{g(t)}$

Tem-se

- $g'(t)=2\cos t$
- $x=2\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)=t \Leftrightarrow t=\underbrace{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x)=\sqrt{4\text{-}x^2}$
- $f(g(t))=f(2\operatorname{sen} t)=\sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}=\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}=\sqrt{4(1-\operatorname{sen}^2 t)}=\sqrt{4\cos^2 t}=2\cos t$

Assim,

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usando o método de primitivação}\\ \text{por substituição:} Pf(x)=\left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{P\left(\sqrt{4-x^2}\right)}=\left[P(2\cos t\cdot 2\cos t)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}=\left[P\left(4\cos^2 t\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\underset{(*)}{=}\left[4P\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\left[\frac{4}{2}\left(P1+P\cos(2t)\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}=\left[2\left(t+\frac{1}{2}P2\cos(2t)\right)+C\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\left[2\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right)+C\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}=\left[2t+\operatorname{sen}(2t)+C\right]_{t=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\underset{(**)}{=}2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$$

Cálculos auxiliares: (*)

$$\cos^2(t)\underset{\textit{trigonométrica}}{\overset{\textit{Fórmula}}{=}}\frac{1+\cos(2t)}{2}$$

Cálculos auxiliares: (**)

Atendendo a que:

$$\operatorname{sen}(2t)=\underset{\substack{\uparrow\\ \cos t=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}}{2\operatorname{sen} t\cos t}=2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \text{ e } x=2\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \operatorname{sen} t=\frac{x}{2}$$

vem

$$\operatorname{sen}(2t)=2\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=x\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}=x\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

c) $P\left(\dfrac{5\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)$

Resolução:

A função a primitivar $\dfrac{5\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$ é da forma $R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}},...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x = t^m,\ \text{onde } m = \text{m.m.c}\left(q, s, ...\right).$$

Efectuando a substituição: $x = \underbrace{t^2}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = 2t$
- $x = t^2 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow t = \underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$
- $f\left(x\right) = \dfrac{5\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$
- $f\left(g\left(t\right)\right) = f\left(t^2\right) = \dfrac{5\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{t^2}\right)}{\sqrt{t^2}} = \dfrac{5\,\mathrm{sen}\,t}{t}$

Assim,

$$\underbrace{P\left(\frac{5\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right) = \left[P\left(\frac{5\,\mathrm{sen}\,t}{t}\cdot 2t\right)\right]_{t=\sqrt{x}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x)=\left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}} = \left[10P\mathrm{sen}\,t\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[-10\cos t + C\right]_{t=\sqrt{x}} = -10\cos\sqrt{x} + C.$$

d) $P\left(\sqrt{9-9x^2} + \dfrac{5x}{\sqrt{3+7x^2}}\right)$

Resolução:

$$P\left(\sqrt{9-9x^2} + \frac{5x}{\sqrt{3+7x^2}}\right) = P\left(\sqrt{9-9x^2}\right) + P\left(\frac{5x}{\sqrt{3+7x^2}}\right) \underset{(*)}{=} \frac{3}{2}\arcsin x + \frac{3x\sqrt{1-x^2}}{2}\frac{5}{7}\sqrt{3+7x^2} + C$$

Cálculos auxiliares: (*)

- $P\left(\dfrac{5x}{\sqrt{3+7x^2}}\right) = P\left(\dfrac{5x}{\left(3+7x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = P\left(5x\left(3+7x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{5}{14}P\left(14x\left(3+7x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{5}{14}P\left(14x\left(3+7x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$= \frac{5}{14}\frac{\left(3+7x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{5}{14}\frac{\left(3+7x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{14}2\sqrt{3+7x^2} = \frac{5}{7}\sqrt{3+7x^2}$$

- $P\left(\sqrt{9-9x^2}\right) = P\left(\sqrt{9\left(1-x^2\right)}\right) = P\left(3\sqrt{1-x^2}\right) = 3P\left(\sqrt{1-x^2}\right) \underset{(**)}{=} 3\left(\dfrac{1}{2}\arcsin x + \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\arcsin x + \dfrac{3x\sqrt{1-x^2}}{2}$

Cálculos auxiliares: (**)

A função a primitivar $\sqrt{1-x^2}$ é da forma $R(x,\sqrt{a^2-b^2x^2})$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x=\frac{a}{b}\operatorname{sen} t \text{ ou } x=\frac{a}{b}\cos t$$

Efectuando a substituição: $x=1\operatorname{sen} t \Leftrightarrow x=\underbrace{\operatorname{sen} t}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t)=\cos t$
- $x=\operatorname{sen} t \Leftrightarrow \operatorname{arc\,sen} x=t \Leftrightarrow t=\underbrace{\operatorname{arc\,sen} x}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x)=\sqrt{1-x^2}$
- $f(g(t))=f(\operatorname{sen} t)=\sqrt{1-(\operatorname{sen} t)^2}=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$

Assim,

$$P\left(\sqrt{1-x^2}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usando o método de primitivação}\\ \text{por substituição:} Pf(x)=\left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=}\left[P(\cos t\cdot\cos t)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen} x}=\left[P\cos^2 t\right]_{t=\operatorname{arc\,sen} x}=\left[P\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen} x}$$

$$=\left[\frac{1}{2}P1+\frac{1}{2}P\cos(2t)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen} x}=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P2\cos(2t)\right]_{t=\operatorname{arc\,sen} x}=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)+C\right]_{t=\operatorname{arc\,sen} x}$$

$$\underset{(*)}{=}\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x+\frac{1}{4}2x\sqrt{1-x^2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$$

Cálculos auxiliares: (*)

Atendendo a que:

$$\operatorname{sen}(2t)=2\operatorname{sen} t\cos t\underset{\substack{\uparrow\\ \cos t=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}}{=}2\operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \text{ e } x=\operatorname{sen} t\Leftrightarrow \operatorname{sen} t=x$$

vem $\operatorname{sen}(2t)=2x\sqrt{1-x^2}$.

I. 2 Determine a primitiva F da função $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, tal que $F(1)=2$.

Resolução:

A função a primitivar $e^{\sqrt{x}}$ é da forma $R(x,x^{\frac{p}{q}},x^{\frac{r}{s}},...)$, pelo que vamos usar uma substituição da forma:

$$x=t^m, \text{ onde } m=\text{m.m.c}(q,s,...).$$

Efectuando a substituição: $x=\underbrace{t^2}_{g(t)}$

tem-se

- $g'(t) = 2t$
- $x = t^2 \Leftrightarrow t^2 = x \Rightarrow t = \underbrace{\sqrt{x}}_{g^{-1}(x)}$
- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
- $f(g(t)) = f(t^2) = e^{\sqrt{t^2}} = e^t$

Assim,

$$P\left(e^{\sqrt{x}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de primitivação} \\ \text{por substituição:} Pf(x) = \left[Pf(g(t))g'(t)\right]_{t=g^{-1}(x)}}}{=} \left[P\left(e^t \cdot 2t\right)\right]_{t=\sqrt{x}} \underset{(*)}{=} \left[2e^t(t-1)+C\right]_{t=\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$$

A expressão geral das primitivas de f (x) é dada por

$$F(x) = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$$

Pretende-se determinar uma primitiva de $F(x)$ tal que $F(1) = 2$.

Temos

$$F(1) = 2 \Leftrightarrow 2e^{\sqrt{1}}\left(\sqrt{1}-1\right)+C = 2 \Leftrightarrow C = 2.$$

Assim,

$$F(x) = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+2$$

***Cálculos auxiliares**:* (*)

Para calcular a primitiva $P\left(e^t \cdot 2t\right)$ vamos recorrer ao método de primitivação por partes.

Assim,

$$P\left(e^t \cdot 2t\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usando o método de} \\ \text{primitivação por partes: } P(u'v) = u\,v - P(u\,v') \\ \text{em que } \begin{cases} u' = e^t \\ v = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Pu' = Pe^t = e^t \\ v' = 2 \end{cases}}}{=} e^t 2t - Pe^t 2 = e^t 2t - 2e^t + C = 2e^t(t-1)+C$$