Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º semestre 10/11

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark, LERC, LEGI, LEE
26 de Novembro de 2010 (18:30)

Teste 202 (com soluções)

Nome:
Número:
Curso:
Sala:

O Teste que vai realizar tem a duração total de **70 minutos** e consiste de seis problemas. Os problemas estão divididos em alíneas com as cotações indicadas nas alíneas apenas quando a divisão não é uniforme.

O quadro abaixo destina-se à correcção da prova. Por favor não escreva nada.

Perg 1	4.5 Val	
Perg 2	3 Val	
Perg 3	4 Val	
Perg 4	2.5 Val	
Perg 5	3 Val	
Perg 6	3 Val	

NOTA FINAL:

Problema 1 (4.5 valores)
Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} l \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & k \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & h \end{bmatrix}.$$

(a) Indique os valores dos parâmetros l, k e h para os quais as matrizes A, B e C, respectivamente, são invertíveis.

(b) Calcule a inversa da matriz B para $k = 1$.

(c) Calcule a inversa da matriz C para $h = 1$.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) A é invertível sse $l \neq 0$, B é invertível sse $k \neq -6/5$, C é invertível sse $h \neq 0$; (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/11 & -2/11 \\ 3/11 & 5/11 \end{bmatrix}$; *(c)* $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 2 (3 valores)
Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base para o espaço $\operatorname{Col} A$ e indique a respectiva dimensão.

(b) Determine uma base para o espaço $\operatorname{Nul} A$ e indique a respectiva dimensão.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: *(a)* $\mathcal{B}_{\mathrm{Col\,A}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim \mathrm{Col\,A} = 3$; *(b)* $\mathcal{B}_{\mathrm{Nul\,A}} = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim \mathrm{Nul\,A} = 2$.

Problema 3 (4 valores)
Considere nas alíneas seguintes os vários problemas de computação gráfica $2D$ relativamente ao triângulo de vértices $(1, 2)$, $(3, 2)$ e $(3, 4)$.

(a) (1 val.) Usando coordenadas homogéneas, construa a matriz que permite deslocar o vértice $\mathbf{p} = (1, 2)$ para a origem.

(b) (1.5 val.) Esboce o triângulo original, e usando a matriz da alínea anterior, esboce a imagem do triângulo deslocado.

(c) (1.5 val.) Usando coordenadas homogéneas, construa a matriz que permite rodar o triângulo em torno do ponto $\mathbf{p} = (1, 2)$ num ângulo de $-\pi/4$.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; *(c)* $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 - 3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2 - \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 4 (2.5 valores) Considere as matrizes elementares

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (1 val.) Calcule $\det(E_1^3)$.

(b) (1.5 val.) Calcule $\det(E_2^{-1} E_3^T)$.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) $\det(E_1^3) = -1$; *(b)* $\det(E_2^{-1} E_3^T) = 1/3$.

Problema 5 (3 valores)
Numa dado região metropolitana, 20% da população tem tendência a migrar anualmente da grande cidade para os arredores. No sentido inverso, verifica-se anualmente uma movimentação de 20% da população residente dos arredores para a metrópole.

(a) Faça uma representação esquemática da mobilidade da população e construa a matriz estocástica P que descreve a mobilidade anual da população na região em causa.

(b) Para um residente actual nos arredores, qual a probabilidade de vir a morar decorridos dois anos na grande cidade?

(c) Mostre que $\lambda = 1$ é valor próprio da matriz estocástica P e determine o **vector próprio** associado $\mathbf{q}$, que constitui um **vector de probabilidades**, i.e. determine o vector estacionário $\mathbf{q}$ para a distribuição de população nessa região.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$; *(b)* 32%; *(c)* $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

Problema 6 (3 valores)
Sejam A, B, C e D matrizes quadradas $n \times n$, com A invertível, que constituem uma matriz M por blocos. Considere a seguinte factorização LU da matriz M por blocos:

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os blocos X e Y da factorização LU em função das matrizes A, B, C e D.

(b) Usando a factorização-LU, calcule $\det M$ em função das matrizes A, B, C e D.

(c) Supondo $AB = BA$, mostre que $\det M = \det(AD - BC)$.

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar!

Solução: (a) $X = BA^{-1}$, $Y = D - BA^{-1}C$; *(b)* $\det M = \det(AD - ABA^{-1}C)$.