Definição

Uma equação diferencial da forma

$$M(t,y) + N(t,y)\,\frac{dy}{dt} = 0,$$

diz-se redutível a exacta se existe uma função $\mu(t,y)$ (o factor integrante), não nula, tal que

$$\mu(t,y)M(t,y) + \mu(t,y)N(t,y)\,\frac{dy}{dt} = 0,$$

é uma equação exacta.

Tal acontece se e só se

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(t,y)M(t,y)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t,y)N(t,y)\right)$$

i. e.

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t}N + \mu\frac{\partial N}{\partial t}$$

No exemplo seguinte, a equação dada não é exacta. Procuramos factores integrantes que dependam apenas de t ou de y.

Exemplo

Obter a solução geral da equação $\dfrac{y^2}{2} + 2ye^t + (y + e^t)\dfrac{dy}{dt} = 0.$

A equação não é exacta porque

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(M(t,y)\right) = y + 2e^t \qquad \neq \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(N(t,y)\right) = e^t.$$

onde $M(t,y) = \frac{y^2}{2} + 2ye^t$ e $N(t,y) = y + e^t$

Procuremos um factor integrante que depende apenas de y, i. e.

$$\mu = \mu(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 :$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)M(t,y)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(y)N(t,y)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu'(y)\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^t\right) + \mu(y)(y + e^t) = \mu(y)e^t$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu'(y)\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^t\right) = \mu(y)(-y - e^t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{1}{y}\frac{y + e^t}{\frac{y}{2} + 2e^t}$$

A última equação é impossível porque porque o lado direito não depende só de y. Logo não existe um factor integrante que dependa apenas de y.

Procuremos então um factor integrante que dependa apenas de t, i. e.

$$\mu = \mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 :$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(t)M(t,y)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t)N(t,y)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu(t)(y + 2e^t) = \mu'(t)(y + e^t) + \mu(t)e^t$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu'(t) = \mu(t)$$

Conclui-se que $\mu(t) = e^t$ é um factor integrante que depende apenas de t.

Multiplicando por $\mu(t) = e^t$, a equação do nosso problema é equivalente a

$$\frac{y^2}{2}e^t + 2ye^{2t} + (ye^t + e^{2t})\frac{dy}{dt} = 0$$

e esta é uma equação exacta.

De forma análoga ao exemplo anterior calcula-se um potencial

$$\phi(t, y) = \frac{1}{2}y^2 e^t + ye^{2t}.$$

A solução geral da equação é definida por

$$\frac{1}{2}y^2 e^t + ye^{2t} = K \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{-e^{2t} \pm \sqrt{e^{4t} + 2Ke^t}}{e^t}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = -e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 2Ke^{-t}}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Existência e unicidade de solução

Considere-se o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Como provar que existe uma função de classe C^1 que é solução do PVI?

Proposição

Suponhamos que f é uma função contínua. A função $y = y(t)$ é uma solução do PVI se e só se $y(t)$ é contínua e satisfaz

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Definição: Iteradas de Picard

Define-se por indução a sucessão de funções y_n por

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

onde $y_0(t)$ é uma função identicamente igual à constante y_0.

Exemplo de cálculo das iteradas de Picard: Considere-se o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Escolhe-se $y_0(t) \equiv 1$ e obtém-se a sucessão definida por recorrência

$$y_{n+1} = 1 + \int_0^t y_n(s)ds \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t 1 \, ds = 1 + t,$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Prova-se por indução que

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!},$$

e note-se que $\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = e^t$ que sabemos ser a solução do PVI.

Teorema de Picard-Lindelöf

Seja f uma função contínua com $\frac{\partial f}{\partial y}$ contínua num rectângulo aberto

$$U =]t_0 - a, t_0 + a[\times]y_0 - b, y_0 + b[.$$

Então o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma solução única $y(t)$ definida numa vizinhança de t_0.

Na demonstração do teorema prova-se que a solução $y(t)$ coincide com o limite das iteradas de Picard e dá-se uma estimativa para o intervalo de existência da solução

$$t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \quad \text{com } 0 < \alpha < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$$

onde $M = \sup_U |f|$ e $L = \sup_U |\frac{\partial f}{\partial y}|$

Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y(1-y)}{\text{sen}^2(ty)+1} \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A função

$$f(t,y) = \frac{y(1-y)}{\text{sen}^2(ty)+1}$$

é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, logo o teorema de Picard garante que o PVI tem solução única. Além disso a solução $y(t)$ do PVI satisfaz

$$0 < y(t) < 1, \quad \text{para qualquer } t \in \mathbb{R}$$

Prolongamento de soluções a intervalos máximos

Teorema

Sejam f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ funções contínuas num rectangulo aberto U. Então a solução local do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

pode prolongar-se de forma única a um intervalo máximo $I_{max} =]t_{min}, t_{max}[$ com

$$-\infty \leqslant t_{min} < t_0 < t_{max} \leqslant +\infty$$

de tal forma que quando $t \to t_{min}^{+}$ ou $t \to t_{max}^{-}$ se tem

1. $\|(t, y(t))\| \to \infty$, ou 2. $(t, y(t))$ tende para a fronteira de U

Definição

Quando se verifica 1. com $\lim_{t \to t_*} y(t) \to \pm\infty$ e t_* limitado, diz-se que a solução explode em tempo finito.

Exemplo

Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e mostre que o intervalo máximo de existência é $I_{max} =]-\infty, 1[$.

O problema

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \text{ com } f(t, y) = y^2$$

está nas condições do teorema de Picard-Lindelöf em conta de

$$f \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

serem ambas contínuas em $\mathbb{R}^2$.

A solução da equação $y \equiv 0$ não satisfaz o valor inicial pelo que se escreve

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} = 1,$$

que é uma equação separável.

Então

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 1\, dt + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{y} = t + K \qquad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{t+K}$$

Em conta do valor inicial $y(0) = 1$ tem-se $K = -1$. Obtém-se

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad \text{para } t < 1,$$

e que a solução explode quando $t \to 1^-$. Conclui-se que o intervalo máximo de existência é $I_{max} =]-\infty, 1[$

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

aula 3 – problemas

1. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

(a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

(b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

(c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

2. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2) \quad , \quad y(1) = 0.$$

Mostre que a solução é unica e indique o seu intervalo máximo de existência.

Soluções

1. (a) $\mu(y) = y^{-2}$; (c) $\frac{y^2}{2} + \frac{\log x}{y} = 1$.

2. $y(t) = \operatorname{tg}\frac{t^2-1}{2}, \quad t \in \left]-\sqrt{\pi+1}, \sqrt{\pi+1}\right[$.