Exercícios do Capítulo 2

Os símbolos © **ESD** e © **AL** indicam que o exercício foi retirado de uma lista de exercícios da Professora Esmeralda Sousa Dias ou do Professor Amarino Lebre, respectivamente.

1 Espaços lineares, bases e dimensão

Exercício 1.—Considere os vectores $v_1 = (2,1,0,3)$, $v_2 = (3,-1,5,2)$ e $v_3 = (-1,0,2,1)$. Quais dos vetores seguintes pertencem a $L_V(\{v_1, v_2, v_3\})$? © **ESD**

a) $(2,3,-7,3)$; b) $(0,0,0,0)$; c) $(1,1,1,-1)$; d) $(-4,6,-13,4)$.

Exercício 2.—Quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de adição vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$? © **ESD**

(a) O conjunto de vectores da forma $(a,0,0)$ com a real.

(b) O conjunto de vectores da forma $(a,1,1)$ com a real.

(c) O conjunto de vectores da forma (a,b,c) com $b = a + c$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) O conjunto de vectores da forma (a,b,c) com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(e) O conjunto de vectores da forma (a,b,c) com $b = a + c + 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercício 3.—Para cada uma das matrizes, determine dois conjuntos geradores distintos para: (i) o núcleo (ou espaço nulo); (ii) o espaço das colunas; (iii) o espaço das linhas. © **ESD**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.—Sempre que b pertencer ao espaço das colunas de A escreva-o como combinação linear dessas colunas. © **ESD**

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$, $\quad$ b$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\quad$ b $= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Exercício 5.—Seja A uma matriz real $4{\times}4$ e b um vector de $\mathbb{R}^4$ para o qual o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ tem solução única. Explique por que razão as colunas de A geram $\mathbb{R}^4$. © ESD

Exercício 6.—Indique quais dos seguintes conjuntos W são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$? © ESD

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 10\}$.

(b) $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\})$.

(c) $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 0, 1)\}) \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$.

(d) $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, -1, 0)\}) \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$.

(e) $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1, 1)\}) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

(f) $W = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1, 1)\}) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}$.

Exercício 7.—Seja $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e $A^\top$ a sua transposta. Suponha que: © AL

I O núcleo de $A^\top$ tem dimensão 3,

II Existe um vector v em $\mathbb{R}^p$ formando uma base do espaço das linhas da mariz transposta $A^\top$,

III O núcleo de A tem dimensão 4.

Então os valores de p e q são:
A) $p = 5, q = 5$; B) $p = 5, q = 4$; C) $p = 4, q = 5$.

Exercício 8.—Considere o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ definido por: © ESD

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}.$$

(a) Determine uma base ordenada B de W, e indique a dimensão de W.

(b) Verifique que o vetor $\mathrm{v} = (1, 2, 1)$ pertence a W, e determine o vector de coordenadas de v na base B.

Exercício 9.—Seja W o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ definido por: © ESD

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - w = 0 \wedge -x + z = 0\}.$$

(a) Determine uma base ordenada B para o subespaço W, e indique a dimensão de W.

(b) Verifique que o vetor $\mathrm{v} = (1, 2, 1, 1)$ pertence a W, e determine o vetor v_B (o vector de coordenadas de v na base B.

Exercício 10.—Sejam v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 vectores não nulos de um espaço linear V e $W = L_V(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\})$ o subespaço por eles gerado. Admitindo que: © AL

(a) $v_2 \notin L_V(\{v_1\})$,

(b) $2v_1 - 3v_2 + 2v_3 = \mathbb{0}$,

(c) $v_4 \notin L_V(\{v_1, v_2, v_3\})$,

(d) $v_5 \notin L_V(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$,

qual a dimensão de W?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 2.

Exercício 11.—Seja $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear W. Mostre que $\{u_1, u_2, u_3\}$, com $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$ e $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$, também é uma base de W. © ESD

Exercício 12.—Considere a base ordenada $B = (u, v, w)$ de um espaço linear V e $x_B = (6, 2, 1)$. Determine x_{B_i} $(i = 1, 2, 3)$ onde: © ESD

(a) $B_1 = (u + v, u - v, w)$.

(b) $B_2 = (u + v + w, v, v - w)$.

(c) $B_3 = (2u, v + w, v - w)$.

Exercício 13.—Seja A uma matriz 3×4 cujo núcleo admite uma base formada pelo vector $(2, 0, 0, 6)$. Considere a seguinte lista de afirmações: © AL

I $\dim(\mathrm{EL}(A)) = 3$;

II $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 1$;

III $\dim(\mathrm{Nuc}(A^\top) = 2$;

IV $\dim(\mathrm{EC}(A^\top) = 2$.

Indique todas as conclusões que pode inferir.

A) I, III e IV; B) I e II; C) II e IV; D) I e III.

Exercício 14.—Sejam S e U os subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos como se segue: © AL

$$S = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 2, 3), (-3, 7, 1), (19, 10, -13)\})$$
$$U = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, -11, -7), (4, -5, 2)\}).$$

Designando por a, b as dimensões de $S \cap U$ e $S + U$, respectivamente, indique qual o valor do par (a, b):

A) $(1, 3)$; B) $(1, 4)$; C) $(2, 2)$; D) $(2, 3)$.

Exercício 15.—Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ formado por todas as matrizes que são triangulares superiores e que têm traço nulo (o traço de uma matriz quadrada A, que se denota $\operatorname{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal de A). Qual a dimensão de S? © AL

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

Exercício 16.—Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

e considere as seguintes afirmações:

I As linhas de A formam um conjunto linearmente independente;

II As colunas de A formam um conjunto linearmente independente;

III A característica de A é igual a 3;

IV O sistema de equações lineares $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ tem uma única solução, qualquer que seja $\mathrm{b} \in \mathbb{R}$.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e II; B) I, II e III; C) III; D) Todas.

Exercício 17.—Determine uma base e equações cartesianas que descrevam o subespaço $S = L_{\mathbb{R}^4}(X) \subset \mathbb{R}^4$, onde © ESD

$$X = \{(1,-1,1,0),(1,0,0,1),(1,-2,2,-1),(-2,10,-10,8),(-1,8,-8,7)\}.$$

Exercício 18.—Seja B uma base ordenada e x_B o vector das coordenadas de x na base B. Determine em cada alínea o vector x. © ESD

(a) $B = ((5,-1),(1,-1))$ e $\mathrm{x}_B = (3,-1)$;

(b) $B = ((1,-1,4),(0,1,2),(1,2,0))$ e $\mathrm{x}_B = (3,-1,1)$.

Exercício 19.—Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$: © AL

$$\mathrm{v}_1 = (1,2,1), \mathrm{v}_2 = (1,2,3), \mathrm{v}_3 = (1,2,2).$$

Qual dos vectores a seguir indicados não pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$?

A) $(0,0,0)$; B) $(0,0,1)$; C) $(1,1,5)$; D) $(0,1,0)$.

Exercício 20.—Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços lineares gerados pelos conjuntos seguintes. © ESD

(a) $\{(1,1,2),(1,2,2),(2,3,4)\}$.

(b) $\{(-1,1,1,2),(1,1,0,1),(-2,0,1,1),(3,1,-1,0)\}$.

Exercício 21.—Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para © ESD

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

(a) V não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V.

(c) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\}$ é uma base de V.

(d) $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V.

Exercício 22.—Seja A uma matriz tal que $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 2, 1)\}$ é uma base do núcleo $\mathrm{Nuc}(A)$ da matriz A. Considere as afirmações seguintes: © ESD

(a) O vetor $x = (-5, -2, 3, -2)$ é solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$;

(b) A dimensão do espaço das colunas $\mathrm{EC}(A)$ da matriz A é 2;

(c) A matriz A tem 4 colunas;

(d) $\mathrm{Nuc}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z = y \wedge z = w\}$.

A lista completa das afirmações correctas é:

A) (a), (b) e (c) B) (b), (c) e (d) C) (b) e (d) D) (b) e (c)

Exercício 23.—Seja A uma matriz 4×4. Responda às questões seguintes. © ESD

(a) Se o espaço das colunas de A não é $\mathbb{R}^4$ que pode dizer a respeito do núcleo de A?

(b) Se o núcleo de A não é o subespaço $\{\mathbb{0}\}$ que pode dizer a respeito do espaço das colunas de A?

(c) Se o espaço das colunas de A é $\mathbb{R}^4$ que pode dizer a respeito das soluções do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ para $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$?

(d) Se o núcleo de A é $\{\mathbb{0}\}$ que pode dizer a respeito das soluções do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ para $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$?

Exercício 24.—Dê exemplos, se existirem, de: © ESD

(a) uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times4}$ tal que $\dim \mathrm{EL}(A) = 2$;

(b) uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times3}$ tal que $\dim \mathrm{Nuc}(A) = 2$;

(c) três vetores distintos de $\mathbb{R}^4$ que gerem um subespaço de dimensão 2.

Exercício 25.—Seja $\mathrm{x} = (1, 3, 2)$ uma solução (particular) do sistema não homogéneo $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. Sabendo que a solução geral do sistema homogéneo associado ($A\mathrm{x} = \mathbb{0}$) é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - 4z\}$, indique a forma vectorial da solução geral de $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. © ESD

Exercício 26.—Exprima a matriz X como combinação linear das matrizes R, S, T onde: © ESD

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercício 27.—Exprima o polinómio $p(x) = -5 + 19x - 8x^2$ como combinação linear dos polinómios © ESD

$$p_1(x) = 3x - x^2, \quad p_2(x) = 2 + 4x - x^2, \quad p_3(x) = 1 - x + 3x^2.$$

Exercício 28.—Seja $\mathbb{R}_2[t]$ o espaço real dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ de grau menor ou igual a 2, considere os elementos de $\mathbb{R}_2[t]$ definidos por: © AL

$$p_1(t) = 1, p_2(t) = (1-t)(1+t), p_3(t) = (1-t)(1+2t), p_4(t) = t(1-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}_2[t]$:

$$P_1 = \{p_1, p_2\}, P_2 = \{p_1, p_2, p_3\}, P_3 = \{p_2, p_3, p_4\}, P_4 = \{p_1, p_2, p_4\}.$$

Qual a lista completa de conjuntos que constituem bases de $\mathbb{R}_2[t]$?

A) P_1 e P_2; B) P_2 e P_3; C) P_2 e P_4; D) P_3 e P_4.

Exercício 29.—Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pelas matrizes R, S, T onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as seguintes afirmações:

I. S tem dimensão 2,

II. S tem dimensão 3,

III. $A \in S$,

IV. $A \notin S$.

Quais as verdadeiras?

A) I e III; B) I e IV; C) II e III; D) II e IV.

Exercício 30.—Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 0, -2, -1)$ e $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira? © AL

A) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - w = 0\}$,

B) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - w = 0\}$,

C) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - w = 0\}$,

D) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - w = 0\}$.

Exercício 31.—Seja $\mathbb{R}_2[t]$ o espaço dos polinómios reais de variável real com grau menor ou igual a 2, munido com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real. © ESD

(a) Indique uma base ordenada de $\mathbb{R}_2[t]$ e calcule o vector das coordenadas de $p(t) = (1 - t)(1 + t)$ nessa base.

(b) Considere $S = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 - 2t, 1 + t^2, 1 + 2t - 3t^2, t^2\})$. Verifique que $\{1 - 2t, 1 + t^2, 1 + 2t - 3t^2, t^2\}$ não é uma base de S, e indique uma base ordenada de S.

(c) Determine as coordenadas do polinómio $p(t) = 5 + t^2$ nas bases das alíneas (a) e (b).

(d) Considere o conjunto $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(0) = 0\}$. Mostre que W é um subespaço linear de $\mathbb{R}_2[t]$ e indique a dimensão deste subespaço.

Exercício 32.—Determine quais dos conjuntos seguintes são espaços lineares reais, e nesses casos indique a dimensão e encontre uma base. © ESD

(a) O subconjunto do espaço linear $\mathbb{R}_5[t]$, dos polinómios de variável real com grau menor ou igual a 5, formado pelos polinómios:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad \text{com } a_0 + a_1 = 0.$$

(b) O subconjunto do espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ das matrizes reais quadradas de ordem 2 formado pelas matrizes invertíveis.

(c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| a \in \mathbb{Z} \right\}$.

(d) $L_V(\{\cos^2 t, \cos 2t, \sin^2 t\})$, onde V é o espaço linear das funções contínuas reais de variável real.

Exercício 33.—Considere os subespaços U e W seguintes e determine a dimensão e uma base para $U \cap W$ e $U + W$. Além disso, verifique em cada caso o teorema da dimensão $(\dim(U+W) = \dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W))$ e diga se os subespaços U e W decompõem $\mathbb{R}^4$ em soma directa. © ESD

(a) $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, 2, 0)\})$ e

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2z - w = 0 \wedge -y + 3w = 0 \wedge z = 0\}.$$

(b) $U = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0)\})$ e

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - 2w = 0 \wedge 2y - z = 0\}.$$

(c) $U = L : \mathbb{R}^4(\{(0,0,1,0),(-2,0,0,-2)\})$ e

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z - w = 0 \wedge x - w = 0\}.$$

Exercício 34.—Encontre a matriz mudança de base, da base canónica de $\mathbb{R}^2$ para a base ordenada $B = ((2,-2),(3,4))$, e determine o vector das coordenadas de $\mathrm{w} = (2,2)$ na base B. **© ESD**

Exercício 35.—Seja $B = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$, tendo-se que $\mathrm{u}_1 = (2,1,0)$, $\mathrm{u}_2 = (-1,1,1)$, e $\mathrm{u}_3 = (1,1,1)$. **© ESD**

(a) Determine a matriz de mudança de base, da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base B.

(b) Use a matriz calculada na alínea anterior, para determinar o vector de coordenadas de $\mathrm{v} = (5,1,3)$ na base B.

Exercício 36.—Seja $\mathrm{v} = (1,2,3)$ e considere $B = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ a base ordenada de $\mathbb{R}^3$, onde $\mathrm{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathrm{v}_2 = (1,1,0)$ e $\mathrm{v}_3 = (1,1,1)$, Qual dos seguintes é o vector de coordenadas de v na base B? **© AL**

A) $(3,-2,4)$; B) $(-1,4,4)$; C) $(-1,-2,4)$; D) $(-1,-2,6)$.

Exercício 37.—Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gerado pela matrizes: **© AL**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais das matrizes seguintes *não* pertencem a S?

A) $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, B) $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, C) $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, D) $M_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 38.—Determine a matriz de mudança de base $M_{B' \leftarrow B}$, onde os vetores das bases ordenadas $B = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$ e $B' = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ satisfazem: **© ESD**

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_1 &= \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 - \mathrm{u}_3 \\ \mathrm{v}_2 &= \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{v}_3 &= \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_3. \end{aligned}$$

Exercício 39.—Seja $\mathbb{R}_2[t]$ o espaço linear dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2. Encontre a matriz de mudança da base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$ para a base ordenada $B = (1 - t, t^2, 1 + t + t^2)$ de $\mathbb{R}_2[t]$, e determine o vetor das coordenadas de $\mathrm{w} = 2 - 3t + t^2$ na base B. **© ESD**

Exercício 40.—Considere o e.l. W e bases ordenadas $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$, $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$ e $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$ tais que:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - v_2 + v_3 \\ u_2 &= v_2 - v_3 \\ u_3 &= v_1 + v_2 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 - v_3 \\ w_2 &= v_2 + v_3 \\ w_3 &= v_1 + v_3 \end{aligned}$$

(a) Determine as matrizes de mudança de base $M_{B_2 \leftarrow B_1}$, $M_{B_3 \leftarrow B_2}$ e $M_{B_3 \leftarrow B_1}$.

(b) Seja $v = 2u_1 + 5u_2 - 3u_3$. Use as matrizes calculadas nas alíneas anteriores para determinar v_{B_1}, v_{B_2} e v_{B_3}.

2 Exercícios suplementares

Exercício 41.—Sejam U, W subespaços de V. Mostre que $U \cup W$ é um subespaço de V se e só se $U \subset W$ ou $W \subset U$.

Exercício 42.—Seja $V = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ o espaço linear das sucessões reais. Mostre que o conjunto das sucessões convergentes é um subespaço de V. E o conjunto das sucessões divergentes?

Exercício 43.—Considere os subespaços W_1, W_2 de $\mathbb{K}^n$ definidos por:

$$W_1 = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_n = 0\}, \quad W_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 = \cdots .a_{n-1} = 0\}.$$

Mostre que $\mathbb{K}^n = W_1 \oplus W_2$.

Exercício 44.—Considere os espaço $\mathbb{K}^{n \times n}$

(a) Mostre que $W_1 = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid A^\top = -A\}$ é um subespaço de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

(b) Seja W_2 o subespaço de $\mathbb{K}^{n \times n}$ constituído pelas matrizes simétricas i.e., as matrizes A que satisfazem $A^\top = A$. Mostre que $\mathbb{K}^{n \times n} = W_1 \oplus W_2$.

Exercício 45.— Sejam V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V. Dado $v \in V$ definimos $v + W := \{v + w \mid w \in W\}$.

(a) Prove que $v + W$ é um subespaço de V sse $v \in W$.

(b) Mostre que $v_1 + W = v_2 + W$ sse $(v_1 - v_2) \in W$.

(c) Considere $V/W = \{v + W \mid v \in V\}$ e as operações:

$$\begin{aligned} &(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W \\ &\alpha(v_1 + W) = (\alpha v_1) + W \end{aligned}$$

Mostre que estas operações estão bem definidas, ou seja, verifique que se $v_1 + W = w_1 + W$ e $v_2 + W = w_2 + W$ então tem-se que

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (w_1 + W) + (w_2 + W)$$

e, além disso, verifique que se $v_1 + W = w_1 + W$ então

$$\alpha(v_1 + W) = \alpha(w_1 + W).$$

(d) Mostre que V/W com as operações descritas na alínea anterior é um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. (Designa-se de *espaço quociente* de V por W.)

Exercício 46.—Sejam V um espaço linear e W_1, W_2 subespaços de V. Mostre que $L_V(S_1 \cap S_2) \subset L_V(S_1) \cap L_V(S_2)$. Dê exemplos em que se tenha a igualdade e exemplos de que a inclusão pode ser estrita.

Exercício 47.—Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$.

(1) Mostre que $\{u, v\}$ é linearmente independente sse $\{u + v, u - v\}$ é linearmente independente.

(2) Mostre que $\{u, v, w\}$ é linearmente independente sse $\{u+v, u+w, v+w\}$ é linearmente independente.

Exercício 48.—Seja $\mathbb{R}[t]$ o espaço dos polinómios com coeficientes reais. Seja $S \subset \mathbb{R}[t]$ uma família finita de polinómios todos com graus diferentes. Mostre que S é linearmente independente.

Exercício 49.—Considere o espaço ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ das funções reais de variável real. Seja $S = \{e^{\alpha t}, e^{\beta t}\}$ onde $\alpha \neq \beta$. Mostre que S é linearmente independente.

Exercício 50.—Seja $W \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ o subespaço constituído pelas matrizes A tais que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

(a) Determine uma base de W

(b) Qual a dimensão de W.

Exercício 51.—Sejam V um espaço linear tal que $\dim(V) = n$ e $S \subset V$ um conjunto que gera V. Mostre que existe $S' \subset S$ que é uma base de V.

Exercício 52.—Sejam $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ e

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Prove que W_1, W_2 são subespaços de V e determine $\dim(W_1)$, $\dim(W_2)$, $\dim(W_1 + W_2)$ e $\dim(W_1 \cap W_2)$.

Exercício 53.—Sejam W_1, W_2 subespaços de V com bases B_1 e B_2 tais que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Mostre que $B_1 \cup B_2$ é uma base de $W_1 + W_2$.

Exercício 54.—Sejam V um espaço linear e U um subespaço de V. Mostre que existem $W, \bar{W}$, subespaços de V, tais que $W \neq \bar{W}$ e

$$V = U \oplus W = U \oplus \bar{W}.$$

Exercício 55.—Considere o exercício e a respectiva notação. Mostre que $\dim(V/W) + \dim(W) = \dim(V)$. (*Sugestão*: estenda uma base de W para obter uma base de V, descrevendo a partir daí uma base de V/W.)