Análise Matemática I

15 de Janeiro de 2003
LEBM, LEFT e LMAC

2º Teste –	Perguntas 4, 5, 6 e 7	– 90 minutos
1º Exame –	Todas as Perguntas	– 3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule os limites das sucessões cujos termos gerais são:

a) $\frac{(n+1)^{18}(4n+1)^2}{(n+3)^{20}}$, (1)
b) $\left(\frac{n-3}{n}\right)^n$, (1)
c) $\frac{\pi^n}{n!}$. (1)

2. Seja (x_n) a sucessão definida por recorrência por

$$\begin{cases} x_1 = 99, \\ x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{2x_n - 1} & \text{se } x_n \geq 1/2, \\ 0 & \text{se } x_n < 1/2. \end{cases} \end{cases}$$

a) Prove, por indução, que $x_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. (1.5)
b) Analise a monotonia da sucessão. (1.5)
c) Analise a convergência da sucessão e, no caso de convergência, calcule o seu limite. (2)
d) A resposta às alíneas anteriores seria diferente se $x_1 = 0.99$? Justifique. (1)

3. Seja (x_n) uma sucessão limitada e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x_n) = x_n + \frac{1}{n}$. Então f tem pelo menos um ponto fixo. Justifique cuidadosamente. (1)

4. Analise a convergência das séries. Calcule também a soma de uma delas.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} 4^{-n}$, (1)
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+100}\right)^5$, (0.5)
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, (0.5)
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[3]{n+2}}$, (1)
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{(4n)!}$. (1)

5. Calcule:

a) $\frac{d}{dx}\tan x$, (0.5)
b) $\frac{d}{dx}\frac{\arctan x}{\ln x}$, (1)
c) $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}}$, (1)
d) $\frac{d}{dx}x^x$, (1)
e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$. (1)

6. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, se $x\neq 0$, $f(0)=0$. Analise a continuidade de f. Justifique cuidadosamente a resposta no que concerne ao ponto 0. (1)

7. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável tal que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)=1$. Pode afirmar algo acerca do valor de $f'(0)$? Justifique. (0.5)