CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

7. SÉRIES DE FOURIER

EXERCÍCIOS

1. Considere a função

$$\phi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Calcule a série de Fourier de ϕ.

(b) Através da série obtida na alínea anterior, determine a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

2. Seja $g(x) = 1 - |x|$, no intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine a série de Fourier de g.

(b) Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$$

3. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = x$ numa série de Fourier de cosenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

4. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de Fourier de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

RESPOSTAS

1. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)\,\pi} \operatorname{sen}((2k-1)\,\pi x).$

   (b) $\pi/4.$

2. **(a)** $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\,\pi^2} \cos((2k-1)\,\pi x).$

   (b) $\pi^2/8.$

3. $\displaystyle\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\,\pi^2} \cos((2k-1)\,\pi x).$

   Esta série tem soma igual a x em cada $x \in [0,\, 1]$.

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)\,\pi} \operatorname{sen}((2k-1)\,\pi x).$

   Esta série tem soma igual a 1 se $x \in]0,\, 1[$, e soma igual a 0 se $x = 0$ ou $x = 1$.