Aplicação: Resolução de problemas de valores iniciais

Considere-se o PVI

$$y'' - y' - 2y = 10\,\mathrm{sen}\,t, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Admita-se que a solução é tal que $y \in \mathcal{E}$ e ainda que $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$.
(note-se que a solução existe e é única!)
Em conta da transformada de Laplace e das suas propriedades tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y'' - y' - 2y\right](s) &= \mathcal{L}[10\,\mathrm{sen}\,t](s) \\
Y(s)\left(s^2 - s - 2\right) - sy(0) - y'(0) + y(0) &= \frac{10}{s^2+1} \\
Y(s)\,(s-2)(s+1) &= s - 1 + \frac{10}{s^2+1} \\
Y(s) &= \frac{s^3 - s^2 + s + 9}{(s-2)(s+1)(s^2+1)}
\end{aligned}$$

Reduziu-se a EDO, com incógnita $y(t)$, a uma equação algébrica, para $Y(s)$, de resolução imediata.

Sabe-se, usando métodos estudados anteriormente, que a solução deste PVI é

$$y(t) = e^{2t} - e^{-t} + \cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t. \tag{1}$$

Como usar a transformada de Laplace para obter a solução do PVI em análise:

Decompôr $Y(s)$ em fracções simples

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

onde A, B, C, D são coeficientes reais a determinar;

Reconhecer

$$\begin{aligned} Y(s) &= A\,\mathcal{L}[e^{2t}](s) + B\,\mathcal{L}[e^{-t}](s) + C\,\mathcal{L}[\cos t](s) + D\,\mathcal{L}[\mathrm{sen}\, t](s) \\ &= \mathcal{L}[A\,e^{2t} + B\,e^{-t} + C\cos t + D\,\mathrm{sen}\, t](s). \end{aligned}$$

Resolver o PVI com

$$y(t) = A\,e^{2t} + B\,e^{-t} + C\cos t + D\,\mathrm{sen}\, t$$

A decomposição em fracções simples de

$$Y(s) = \frac{s^3 - s^2 + s + 9}{(s-2)(s+1)(s^2+1)}$$

é

$$\frac{s^3 - s^2 + s + 9}{(s-2)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} =$$

$$= \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s-2)(s^2+1) + (Cs+D)(s+1)(s-2)}{(s-2)(s+1)(s^2+1)}$$

iguala-se os numeradores e tem-se

$$s^3 - s^2 + s + 9 = A(s+1)(s^2+1) + B(s-2)(s^2+1) + (Cs+D)(s+1)(s-2), \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

Em particular para os valores $s = 2$ e $s = -1$ obtém-se $A = 1$ e $B = -1$, respectivamente. A identidade anterior reduz-se a

$$s^3 - 4s^2 + s + 6 = Cs^3 + (D-C)s^2 - (2C+D)s - 2D, \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

pelo que $C = 1$ e $D = -3$.

Conclusão: Obteve-se a solução do PVI, dada em (1), usando apenas a transformada de Laplace $Y(s)$.

Observação: Assumir-se-á nas aplicações seguintes que a transformada de Laplace é injectiva, i. e.

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \qquad \forall s > a \quad \Rightarrow \quad f = g$$

e usar-se-á a notação $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$.

Do exemplo anterior:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^3 - s^2 + s + 9}{(s-2)(s+1)(s^2+1)}\right](t) = e^{2t} - e^{-t} + \cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t.$$

Mais propriedades da transformada de Laplace

6. (Translação) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{E}_a$ com $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Então

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t} f(t)\right](s) = F(s-\alpha), \qquad \text{para } s > \alpha + a.$$

7. Seja $f \in \mathcal{E}_a$ com $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Então

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right](s) = \frac{F(s)}{s}, \qquad \text{para } s > 0.$$

8. Seja $f \in \mathcal{E}_a$ com $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Então

$$\mathcal{L}[-tf(t)](s) = F'(s), \qquad \text{para } s > a$$

e em geral

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)](s) = F^{(n)}(s), \qquad \text{para } s > a$$

e $n = 1, 2, \ldots$

Exemplos

Supondo $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que:

- $\mathcal{L}[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ para $s > 0$
- $\mathcal{L}[e^{at}\,\text{sen}\,(bt)](s) = \dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}$ para $s > a$
- $\mathcal{L}[t^n e^{at}](s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ para $s > a$

Obtenha as seguintes transformadas inversas:

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^4}\right](t)$;
- Resposta: $\frac{t^3}{6}e^{-t}$.

- $\mathcal{L}^{-1}[6(s^4 + 10s^2 + 9)^{-1}](t)$;
- Resposta: $\frac{3}{4}\text{sen}\,t - \frac{1}{4}\text{sen}\,(3t)$.

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+s-6}\right](t)$;
- Resposta: $\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}$.

- $\mathcal{L}^{-1}[(s^2-1)^{-2}](t)$;
- Resposta: $\frac{t}{2}\cosh t - \frac{1}{2}\operatorname{senh} t$.