Capítulo 5

Produto interno e ortogonalidade

O conceito de produto interno em $\mathbb{R}^2$ é generalizado neste capítulo a um espaço linear qualquer. Munindo um espaço linear de um produto interno, ficamos habilitados a calcular distâncias entre vectores do espaço bem como a concretizar noções fundamentais como ortogonalidade, projecção ortogonal, bases ortogonais e ortonormadas. Em particular, nas secções 5.3 e 5.5 são discutidos alguns tópicos fundamentais, como sejam a decomposição ortogonal de um espaço linear em subespaços, o Teorema da melhor aproximação e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Na Secção 5.4 estudam-se as propriedades de ortogonalidade dos subespaços fundamentais associados a uma matriz.

O produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ é aplicado para determinar equações de rectas e planos nesse espaço e calcular distâncias de pontos a planos. Na Secção 5.7.2 o Teorema da melhor aproximação e as propriedades de ortogonalidade dos subespaços fundamentais associados a uma matriz, aplicam-se na determinação de soluções de mínimos quadrados de sistemas lineares.

Finalizamos o capítulo tratando, na Secção 5.7.3, a aproximação de funções reais por polinómios trigonométricos. Neste tipo de aproximação, é crucial a propriedade de ortogonalidade (em relação ao produto interno usual em $\mathbb{C}^n$) da base formada pelas colunas da matriz de Fourier. Relaciona-se ainda o denominado algoritmo da transformada de Fourier rápida com uma factorização da matriz de Fourier.

5.1 Produto interno num espaço linear

Muitos dos resultados de álgebra linear são de natureza geométrica, visto terem surgido da necessidade de generalizar propriedades geométricas básicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ a espaços lineares de dimensão superior a 3. Nestes espaços são bem conhecidos os conceitos de comprimento e perpendicularidade. Procura-se nesta secção generalizar estas noções, não só a $\mathbb{R}^n$ mas também a qualquer outro espaço linear. Como veremos, uma vez definido o conceito de produto interno num espaço linear, é fácil efectuar a generalização das noções de comprimento, distância e ortogonalidade.

Comecemos por relembrar que pontos do plano (ou seja, vectores de $\mathbb{R}^2$) podem escrever-se usando coordenadas polares. De acordo com a Figura 5.1, dados os vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ podemos escrever

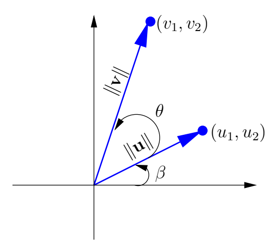


Figura 5.1: Coordenadas polares.

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u_1 = \|\mathbf{u}\| \cos\beta \\ u_2 = \|\mathbf{u}\| \operatorname{sen}\beta \end{cases} \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2) \rightsquigarrow \quad \begin{cases} v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos(\beta+\theta) \\ v_2 = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}(\beta+\theta) \end{cases},$$

onde $\|\mathbf{u}\|$ designa o comprimento do vector $\mathbf{u}$, e β e θ os ângulos indicados nessa figura. Calculemos a quantidade $u_1v_1 + u_2v_2$:

$$\begin{aligned} u_1v_1 + u_2v_2 &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\beta\cos(\beta+\theta) + \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\beta+\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \left[\cos\beta\left(\cos\beta\cos\theta - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta\right) + \operatorname{sen}\beta\left(\operatorname{sen}\beta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\beta\right)\right] \\ &= \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \left(\cos^2\beta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\beta\cos\theta\right) = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta. \end{aligned}$$

O produto interno de dois vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ define-se como

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta. \tag{5.1}$$

onde $\|\mathbf{u}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$ designam respectivamente os comprimentos de $\mathbf{u}$ e de $\mathbf{v}$, e θ é o ângulo que $\mathbf{u}$ faz com $\mathbf{v}$. A fórmula (5.1) ainda é válida em $\mathbb{R}^3$.

É pois natural tomar como definição de produto interno em $\mathbb{R}^n$ uma generalização da expressão obtida em (5.1). Isto é, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos definir um produto interno como

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (u_1, u_2, \ldots, u_n), (v_1, v_2, \ldots, v_n) \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n. \tag{5.2}$$

Se considerarmos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vectores coluna de $\mathbb{R}^n$, a expressão matricial do produto interno em (5.2) tem a forma

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

É fácil verificar que o produto interno definido em (5.2) goza das seguintes propriedades:

i) *Simetria*: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

ii) *Aditividade*: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

iii) *Homogeneidade*: $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, com $k \in \mathbb{R}$.

iv) *Positividade*: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, com $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e só se $\mathbf{u} = 0$.

Relembre-se que o comprimento do vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ é dado por $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$, ou equivalentemente, $\|\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$. Assim, a propriedade iv) acima é essencial se se pretende definir comprimento à custa de um produto interno.

Coloca-se naturalmente a questão de saber se podemos aplicar a expressão (5.2) para definir um produto interno em $\mathbb{C}^n$, de modo que a propriedade iv) de positividade se mantenha. A resposta é negativa já que, por exemplo, para $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, a expressão $\langle (z_1, z_2), (z_1, z_2) \rangle = z_1^2 + z_2^2$ não é em geral um número real não negativo. Vamos portanto adaptar essa definição de modo a que a propriedade iv) se verifique. Considerando, para $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, a expressão $\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = \overline{z}_1 w_1 + \overline{z}_2 w_2$, onde $\overline{z}$ designa o conjugado de z, verificamos que $\langle (z_1, z_2), (z_1, z_2) \rangle = \overline{z}_1 z_1 + \overline{z}_2 z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ é um número não negativo.

Assim, para $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ define-se um produto interno em $\mathbb{C}^n$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle &= \langle (z_1, z_2, \ldots, z_n), (w_1, w_2, \ldots, w_n) \rangle \\ &= \overline{z}_1 w_1 + \overline{z}_2 w_2 + \cdots + \overline{z}_n w_n \\ &= \begin{bmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \cdots & \overline{z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \mathbf{z}^H \mathbf{w}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $\mathbf{z}^H = \overline{\mathbf{z}}^T$ é o *transconjugado* de $\mathbf{z}$, isto é, o vector linha cujas entradas são as conjugadas de $\mathbf{z}$.

Notação:

Para $\mathbf{z} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n) \in \mathbb{C}^n$, o *transconjugado* do vector $\mathbf{z}$ é o vector linha:

$$\mathbf{z}^{\mathrm{H}} = \overline{\mathbf{z}}^T = \begin{bmatrix} a_1 - ib_1 & a_2 - ib_2 & \cdots & a_n - ib_n \end{bmatrix}.$$

Resumindo:

Produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$

Define-se o produto interno usual, respectivamente, em $\mathbb{R}^n$ e em $\mathbb{C}^n$, como

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^H \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i v_i \in \mathbb{C}, \tag{5.4}$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. A *norma* usual de um vector $\mathbf{u}$ é definida como

$$\|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle,$$

onde $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno usual.

É frequente designar-se o produto interno usual (em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) por *produto interno euclidiano*.

Note-se que a norma usual de um vector $\mathbf{u} = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n)$ de $\mathbb{C}^n$ coincide com a norma usual do vector $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Verifica-se facilmente que exceptuando a propriedade de simetria, a definição (5.3) de produto interno usual em $\mathbb{C}^n$ satisfaz todas as propriedades acima enunciadas para o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Em vez da simetria temos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle =$

$\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$, uma vez que para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, se tem

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \overline{u}_1 v_1 + \overline{u}_2 v_2 + \cdots + \overline{u}_n v_n \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle &= \overline{v}_1 u_1 + \overline{v}_2 u_2 + \cdots + \overline{v}_n u_n, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$. Refira-se ainda que o produto interno usual em $\mathbb{C}^n$ se restringe ao produto interno em $\mathbb{R}^n$, já que o conjugado de um vector de $\mathbb{R}^n$ é o próprio vector.

Com base nas propriedades do produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, definimos seguidamente o que se entende por produto interno num qualquer espaço linear real ou complexo.

Definição 5.1. Seja W um espaço linear real (resp. complexo).

Um produto interno em W é uma função que aplica cada par de vectores $u, v \in W$ num escalar real (resp. complexo) $\langle u, v \rangle$, satisfazendo as propriedades:

P1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (resp. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$).

P2. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

P3. $\langle u, kv \rangle = k\langle u, v \rangle$ para $k \in \mathbb{R}$ (resp. para $k \in \mathbb{C}$).

P4. $\langle u, u \rangle \geq 0$, com $\langle u, u \rangle = 0$ se e só se $u = 0$.

Passamos a designar um espaço linear (real ou complexo) munido de um produto interno por *espaço euclidiano*[1].

Nota 27. *1. As propriedades P2 e P3 da definição anterior são equivalentes a dizer que, fixado o vector u, a função $f(v) = \langle u, v \rangle$ é linear (ver Definição 6.1, pág. 319). Dito de outra forma: o produto interno é uma função linear na segunda variável. Se o espaço linear é real, pela propriedade de simetria, resulta*

$$\begin{aligned} \langle v + w, u \rangle &= \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle \\ \langle ku, v \rangle &= \langle v, ku \rangle = k\langle v, u \rangle = k\langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

[1] Na literatura encontram-se várias designações para um espaço linear munido de um produto interno. São frequentes as designações de *espaço euclidiano* se o espaço linear é real, enquanto que espaços lineares complexos munidos de um produto interno são chamados de *espaços hermitianos*. A designação *espaço de Hilbert* é igualmente usada embora se requeira ainda que o espaço seja *completo* (qualquer sucessão de Cauchy de elementos do espaço converge para um elemento do espaço na norma induzida pelo produto interno).

o que significa que o produto interno é também linear na primeira variável. Assim, num espaço linear real o produto interno é uma função linear em ambas as variáveis. Neste caso dizemos que o produto interno é uma função bilinear ou uma forma bilinear.

Quando o espaço linear é complexo, o produto interno é apenas linear na segunda variável (ou seja, verifica P2 e P3), enquanto que na primeira variável se tem

$$\langle v+w,u\rangle \overset{P1}{=} \overline{\langle u,v+w\rangle} \overset{P2}{=} \overline{\langle u,v\rangle} + \overline{\langle u,w\rangle} \overset{P1}{=} \langle v,u\rangle + \langle w,u\rangle,$$
$$\langle ku,v\rangle \overset{P1}{=} \overline{\langle v,ku\rangle} \overset{P3}{=} \overline{k\langle v,u\rangle} = \overline{k}\langle u,v\rangle.$$

Por isso, num espaço linear complexo o produto interno diz-se uma forma sesquilinear.

2. *Noutros textos matemáticos é habitual definir um produto interno num espaço linear complexo como sendo uma função linear na primeira variável (contrariamente ao que definimos). Neste caso a definição de produto interno em* $\mathbb{C}^n$ *seria* $\langle \mathbf{z},\mathbf{w}\rangle = \mathbf{z}^T\overline{\mathbf{w}}$ *em vez da nossa definição* $\langle \mathbf{z},\mathbf{w}\rangle = \overline{\mathbf{z}}^T\mathbf{w} = \mathbf{z}^H\mathbf{w}$. *A definição por nós adoptada é mais conveniente em termos práticos pois facilita a tradução para* $\mathbb{C}^n$ *de resultados válidos em* $\mathbb{R}^n$ *(basta substituir o "*T*" de transposto pelo "*H*" de Hermite).*

3. *Outras notações comuns para o produto interno* $\langle u,v\rangle$ *são:* $\langle u|v\rangle$, $u|v$ *e* $u\cdot v$.

Exemplo 5.1. a) Em $\mathbb{R}^2$, a expressão

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$$

define um produto interno, já que são satisfeitas todas as propriedades da definição de produto interno.

b) Em $\mathbb{R}^2$, a expressão

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 - x_2y_2$$

não define um produto interno, visto que a propriedade P4 da definição não é verificada em geral. Por exemplo, $\langle (0,1),(0,1)\rangle = -1$.

c) Em $\mathbb{R}^2$, a expressão

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2$$

não define um produto interno, uma vez que a propriedade de simetria não se verifica:

$$\langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle = y_1x_1 + y_2x_2 - y_1x_2 \neq \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle.$$

♦

Exercício 5.1. Mostre que no espaço linear real das matrizes reais $n \times n$, a expressão seguinte define um produto interno:

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^T),$$

onde $\operatorname{tr}(A)$ designa o traço da matriz A (soma das entradas da diagonal principal). Sugestão: Para mostrar que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ use o facto do traço de uma matriz ser igual ao da sua transposta.

▲

Matriz de Gram

Comecemos por verificar que qualquer produto interno num espaço linear fica completamente determinado se conhecermos os produtos internos dos vectores de uma base do espaço. Como consequência deste resultado, qualquer produto interno é determinado por uma matriz chamada *matriz de Gram*[2].

Considere-se, por exemplo, um espaço linear real W de dimensão 2, munido de um produto interno, e $B = (v_1, v_2)$ uma base ordenada de W. As propriedades de linearidade de um produto interno permitem escrever um produto interno relativamente à base B usando uma matriz. De facto, se x e y são vectores de W tais que $x = x_1v_1 + x_2v_2$ e $y = y_1v_1 + y_2v_2$, das propriedades P2 e P3 da definição de produto interno resulta

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle x_1v_1 + x_2v_2 \,,\, y_1v_1 + y_2v_2 \rangle \\
&= x_1y_1\langle v_1, v_1 \rangle + x_1y_2\langle v_1, v_2 \rangle + x_2y_1\langle v_2, v_1 \rangle + x_2y_2\langle v_2, v_2 \rangle \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_B^T \mathbf{G}\, \mathbf{y}_B,
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{y}_B$ designam os vectores das coordenadas, respectivamente, de $\mathbf{x}$ e de $\mathbf{y}$ na base B.

[2] Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916), actuário e matemático dinamarquês.

De modo inteiramente análogo, se W é um espaço linear real de dimensão n munido de um produto interno, e $B = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de W, então $\langle x, y\rangle = \mathbf{x}_B^T \mathbf{G}\, \mathbf{y}_B$ onde a matriz $\mathbf{G} = [g_{ij}]_{i,j=1,\ldots n}$ tem entradas $g_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$, e $\mathbf{x}_B$ é o vector das coordenadas de x na base B.

Das propriedades do produto interno podemos concluir:

- Da simetria, temos

$$\langle v_i, v_j\rangle = \langle v_j, v_i\rangle \Longleftrightarrow g_{ij} = g_{ji},$$

  e portanto a matriz $\mathbf{G} = [g_{ij}] = [\langle v_i, v_j\rangle]$ é simétrica ($\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$).

- Da positividade ($\langle x, x\rangle > 0$ para todo $x \neq 0$) a matriz $\mathbf{G}$ terá de verificar

$$\mathbf{x}_B^T \mathbf{G}\, \mathbf{x}_B > 0, \quad \text{para todo } x_B \neq 0. \tag{5.5}$$

  Uma matriz que satisfaz a desigualdade (5.5) diz-se *definida positiva*. Note-se que, sendo a desigualdade (5.5) válida para qualquer vector não nulo, ela é satisfeita em particular por qualquer vector próprio de $\mathbf{G}$. Por conseguinte, se $\mathbf{x}_B$ é um vector próprio de $\mathbf{G}$ associado ao valor próprio λ, tem-se

$$\mathbf{x}_B^T \mathbf{G}\, \mathbf{x}_B = \mathbf{x}_B^T \lambda \mathbf{x}_B = \lambda \|\mathbf{x}_B\|^2 > 0 \Longrightarrow \lambda > 0.$$

  Ou seja, todos os valores próprios de $\mathbf{G}$ são positivos. No Capítulo 7 estabelecem-se critérios que permitem identificar matrizes definidas positivas, em particular estabelece-se que é condição necessária e suficiente para uma matriz ser definida positiva que todos os seus valores próprios sejam positivos.

Exercício 5.2. Repita o procedimento utilizado no caso real para mostrar que num espaço linear complexo munido de um produto interno, a matriz que define o produto interno, relativamente a uma base B, é uma matriz $\mathbf{G}$ tal que:

1. $\mathbf{G} = \mathbf{G}^H$, onde $\mathbf{G}^H = \overline{\mathbf{G}}^T$ designa a matriz transposta da conjugada (também designada por *transconjugada*). Quando $\mathbf{G} = \mathbf{G}^H$ a matriz $\mathbf{G}$ diz-se *hermitiana* (ver Capítulo 7).

2. $\mathbf{x}_B^H \mathbf{G}\, \mathbf{x}_B > 0$, para todo $x \neq 0$ (ou seja, $\mathbf{G}$ é definida positiva).

▲

Nota 28. *A restrição de uma matriz hermitiana aos reais é uma matriz simétrica, uma vez que se* $\mathbf{G}$ *é uma matriz real a igualdade* $\mathbf{G} = \mathbf{G}^H = \overline{\mathbf{G}}^T$ *reduz-se à igualdade* $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$.

Nota 29. *Outras notações frequentes para a trasconjugada* A^H *de uma matriz* A *são:* $A^\dagger$ *e* A^*.

Matriz de Gram

Seja W um espaço linear real (resp. complexo) munido de um produto interno e $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ uma base ordenada de W. A matriz $\mathbf{G} = [\langle v_i, v_j\rangle]_{i,j=1,\ldots,n}$, dos produtos internos dos vectores da base B, é designada por *matriz de Gram* ou *matriz da métrica*, relativa à base B. A matriz $\mathbf{G}$ verifica:

1. $\mathbf{G}$ é simétrica (resp. hermitiana);

2. $\mathbf{G}$ é definida positiva, isto é, $\mathbf{x}_B^T \mathbf{G}\, \mathbf{x}_B > 0$ para todo $x \neq 0$ (resp. $\mathbf{x}_B^H \mathbf{G}\, \mathbf{x}_B > 0$ para todo $x \neq 0$) .

Em relação à base B, o produto interno em W escreve-se na forma

$$\langle x, y\rangle = \mathbf{x}_B^T \mathbf{G}\, \mathbf{y}_B \qquad \big(\text{resp. } \langle x, y\rangle = \mathbf{x}_B^H \mathbf{G}\, \mathbf{y}_B\big)\,,$$

onde $\mathbf{x}_B$ e $\mathbf{y}_B$ são, respectivamente, os vectores das coordenadas de x e de y na base B.

Podemos assim concluir:

Num espaço linear de dimensão n, um produto interno fica completamente determinado se forem conhecidos os produtos internos entre os vectores de uma base do espaço, isto é, se for conhecida a respectiva matriz de Gram $\mathbf{G}$.

Exemplo 5.2.

1. A matriz de Gram relativa à base canónica de $\mathbb{R}^n$ para o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ é a matriz identidade.

2. Se a expressão do Exemplo 5.1-b) definisse um produto interno, então na base canónica de $\mathbb{R}^2$ a matriz de Gram respectiva, $G = [g_{ij}]$, teria de ser simétrica e definida positiva. Ora, calculando $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = g_{ij}$ obtemos a matriz:
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz, apesar de ser simétrica, não é definida positiva pois tem um valor próprio negativo. Logo, a expressão do exemplo referido não define um produto interno.

3. Calculando a expressão do Exemplo 5.1-c) nos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$, obtém-se a matriz

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{G}$ não é simétrica, pelo que a referida expressão não define um produto interno.

♦

Exercício 5.3. Sejam B e B' duas bases ordenadas de um espaço linear W munido de um produto interno e M a matriz de mudança da base B' para a base B. Mostre que para quaisquer $x, y \in W$, se tem

$$\langle x, y \rangle = \mathbf{x}_B^H \mathbf{G} \mathbf{y}_B = \mathbf{x}_{B'}^H \mathbf{S} \mathbf{y}_{B'},$$

com $\mathbf{S} = M^H \mathbf{G} M$. ▲

Norma, distância e ângulo.

A propriedade P4, enunciada na definição de produto interno, permite-nos definir uma norma e uma distância entre vectores de um qualquer espaço linear, desde que este espaço esteja munido de um produto interno.

Definição 5.2. Num espaço linear W munido do produto interno $\langle \, , \, \rangle$ definimos *norma* (ou *comprimento*) de um vector $u \in W$ como sendo

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

A *distância* entre os vectores $u, v \in W$ é definida por

$$\operatorname{dist}(u, v) = \|u - v\|.$$

Em $\mathbb{R}^2$, munido do produto interno usual, tem-se

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \text{com } \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

A norma generaliza pois o conceito de comprimento a um espaço euclidiano.

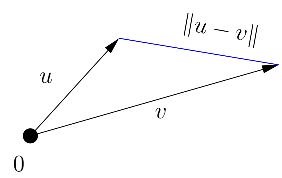


Figura 5.2: Distância entre o vector u e v.

Exercício 5.4. Verifique que num espaço linear W, real ou complexo, se tem

$$\|ku\| = |k|\,\|u\|,$$

para qualquer escalar k e qualquer $u \in W$. ▲

Exemplo 5.3. Considere os vectores $\mathbf{x} = (1, 0, -2, 1)$ e $\mathbf{y} = (i, 1, -2i, 0)$, de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{C}^4$ respectivamente. Para o produto interno usual nestes espaços lineares, a norma destes vectores é

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6},$$

e

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y}^H\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -i & 1 & 2i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -2i \\ 0 \end{bmatrix} = [-i^2 + 1 - 4i^2] = 6,$$

e portanto $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^H\mathbf{y}} = \sqrt{6}$. ♦

Dado um vector não nulo u, podemos sempre obter um vector v proporcional a u que tenha norma unitária. Para tal, basta dividir o vector u pela sua norma:

$$u \rightsquigarrow v = \frac{u}{\|u\|}.$$

Um vector com norma igual a 1 recebe a designação de *versor*.

Exemplo 5.4. Considere-se $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e o subespaço $V = \operatorname{Span}\{(2,5,0),(1,0,2)\}$. Os vectores $\mathbf{u} = (2,5,0)$ e $\mathbf{v} = (1,0,2)$ formam um base de V. Determinemos uma base de V constituída por versores

$$\mathbf{u} = (2,5,0) \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{29} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5,0),$$
$$\mathbf{v} = (1,0,2) \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = \sqrt{5} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2).$$

Assim, $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ é uma base V constituída exclusivamente por vectores de norma unitária. ♦

Exercício 5.5. Mostre as igualdades seguintes.

a) Num espaço linear real:
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right). \tag{5.6}$$

b) Num espaço linear complexo:
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 - i\left(\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2\right)\right). \tag{5.7}$$

▲

Todas as propriedades que a seguir deduzimos são válidas para qualquer espaço linear munido de um produto interno (quer esse espaço seja real ou complexo). Contudo, algumas das provas só serão realizadas para o caso real sendo o caso complexo deixado como exercício.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Num espaço linear W munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, é válida a desigualdade
$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|, \quad \text{para todo } u, v \in W. \tag{5.8}$$
Ocorre a igualdade na expressão anterior se e só se os vectores u e v são linearmente dependentes.

A desigualdade (5.8) é conhecida por *desigualdade de Cauchy-Schwarz*.

Demonstração. Se um dos vectores é o vector nulo a desigualdade é trivialmente satisfeita. Suponhamos que $v \neq 0$ e considere-se o escalar $t = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|^2}$. Calculando $\|tv - u\|^2$, tem-se

$$
\begin{aligned}
0 \leq \langle tv-u, tv-u\rangle &\overset{P2,P3}{=} t\langle tv-u, v\rangle - \langle tv-u, u\rangle \\
&\overset{P1}{=} t\,\overline{\langle v, tv-u\rangle} - \overline{\langle u, tv-u\rangle} \\
&\overset{P2,P3}{=} t\,\bar{t}\,\langle v, v\rangle - t\,\overline{\langle v, u\rangle} - \bar{t}\,\overline{\langle u, v\rangle} + \langle u, u\rangle, \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade aplicámos o facto do conjugado de um número real ser o próprio número (por exemplo, $\overline{\langle u, u\rangle} = \langle u, u\rangle$).

Como o produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao quadrado do módulo do complexo, tem-se

$$
\begin{aligned}
t\,\bar{t} &= |t|^2 = \frac{|\langle v, u\rangle|^2}{\|v\|^4} = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^4} \\
t\,\overline{\langle v, u\rangle} &\overset{P1}{=} \frac{\langle v, u\rangle\overline{\langle v, u\rangle}}{\|v\|^2} = \frac{|\langle v, u\rangle|^2}{\|v\|^2} = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \\
\bar{t}\,\overline{\langle u, v\rangle} &= \frac{\overline{\langle v, u\rangle}\,\overline{\langle u, v\rangle}}{\|v\|^2} \overset{P1}{=} \frac{\langle u, v\rangle\overline{\langle u, v\rangle}}{\|v\|^2} = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2},
\end{aligned}
$$

onde se levou em conta que o módulo de um complexo é igual ao módulo do seu conjugado.

Substituindo as expressões anteriores em (5.9), vem

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|tv-u\|^2 &= \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} - 2\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \|u\|^2 \\
&= \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \iff \|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u, v\rangle|^2 \geq 0. \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

Usando o facto de $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ e $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$ serem quantidades não negativas, da desigualdade anterior obtém-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Verifica-se a igualdade em (5.10) se e só se $\|tv-u\|^2 = 0$, ou seja, se e só se $tv = u$. Como t é um escalar, a igualdade $tv = u$ significa que u e v são linearmente dependentes. □

Se na desigualdade de Cauchy-Schwarz[3] a quantidade $\langle u, v\rangle$ for real (isto acontece necessariamente se o espaço linear é real), para vectores não nulos u

[3] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 23 May 1857), matemático francês, e um dos pioneiros da análise matemática; Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), matemático alemão com inúmeras contribuições em análise complexa.

e v, resulta
$$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\|v\|} \leq 1 \iff -1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$
Se θ é um ângulo cuja medida em radianos varia de 0 a π, então $\cos\theta$ toma valores entre -1 e 1 (uma única vez). Podemos assim definir ângulo entre dois vectores da forma que se segue.

Definição 5.3. Sendo u e v vectores de um espaço linear real munido de um produto interno $\langle\,,\,\rangle$, definimos *ângulo* entre u e v como sendo o único ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisfaz a igualdade
$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Exemplo 5.5. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual. O ângulo entre os vectores $\mathbf{u} = (\sqrt{2},0,0,1)$ e $\mathbf{v} = (0,1,0,\sqrt{3})$ é dado por:
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1+3} = 2, \quad \text{e} \quad \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \sqrt{3}.$$
Logo,
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$
♦

Uma das consequências importantes da desigualdade de Cauchy-Schwarz é a chamada desigualdade triangular da norma.

Desigualdade Triangular

Se u e v são vectores de um espaço euclidiano, então
$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Demonstração. Calcule-se $\|u+v\|^2$ usando as propriedades da definição de produto interno num espaço linear real (o caso complexo é deixado como exercício).

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \overset{P2}{=} \langle u+v, u\rangle + \langle u+v, v\rangle \\
&\overset{P1}{=} \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \\
&\overset{P1,P2}{=} \langle u,u\rangle + 2\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle \\
&\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,|\langle u,v\rangle| && \text{(Propriedade do módulo)} \\
&\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|. && \text{(Des. Cauchy-Schwarz)}
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 .$$

Como as quantidades na desigualdade anterior são todas não negativas, extraindo a raiz quadrada resulta a desigualdade pretendida. □

Exercício 5.6. Faça a demonstração da desigualdade triangular para o caso do espaço linear ser complexo. Para tal necessita de usar alguns resultados sobre números complexos enunciados no Exercício A.1 (pág. 504). ▲

Vectores ortogonais

Em $\mathbb{R}^2$ dois vectores são ortogonais (ou perpendiculares) se o ângulo entre eles é recto. Ou seja, se o produto interno usual $\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$ é igual a zero. É portanto natural generalizar esta noção a um espaço linear qualquer, do seguinte modo:

Definição 5.4. Dois vectores u e v de um espaço euclidiano dizem-se *ortogonais* ou *perpendiculares*), se $\langle u,v\rangle = 0$.

Quando u e v são vectores ortogonais escrevemos $u \perp v$.

Sendo u e v dois vectores ortogonais, tem-se $\|u-v\| = \|u+v\|$ (ver Figura 5.3). De facto, se u e v são dois vectores ortogonais, então

$$
\begin{aligned}
\|u-v\|^2 &= \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \overline{\langle u,v\rangle} + \langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2.
\end{aligned}
$$

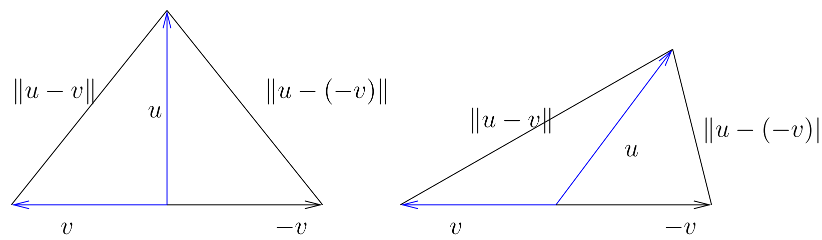


Figura 5.3: Vectores u e v respectivamente ortogonais e não ortogonais.

Acabámos de mostrar que o Teorema de Pitágoras é válido em qualquer espaço linear munido de um produto interno.

Teorema 5.1. Teorema de Pitágoras
Se u e v são vectores ortogonais de um espaço euclidiano, então

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Além disso, também se verifica $\|u-v\|^2 = \|u+v\|^2$.

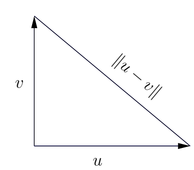


Figura 5.4: Teorema de Pitágoras num espaço euclidiano.

Exercício 5.7. a) Mostre que num espaço linear real a relação de ortogonalidade $u \perp v$ é equivalente a $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

b) Mostre, através de um exemplo, que num espaço linear complexo é falsa uma das implicações da equivalência da alínea anterior.

▲

Exercício 5.8. Mostre que se u é ortogonal aos vectores v e w, então o vector u é ortogonal a qualquer combinação linear de v e w. Isto é,

$$u \perp v \text{ e } u \perp w \Longrightarrow u \perp (\alpha v + \beta w), \text{ com } \alpha, \beta \text{ escalares.}$$

▲

Projecção ortogonal de um vector sobre outro

Em $\mathbb{R}^2$, a projecção ortogonal do vector $\mathbf{u}$ sobre o vector $\mathbf{v}$ é um vector $\mathbf{p}$ com a direcção de $\mathbf{v}$ e tal que $\mathbf{u}-\mathbf{p}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$. Assim, o vector projecção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ é um múltiplo de $\mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{p} = k\mathbf{v}$. Observe a Figura 5.5.

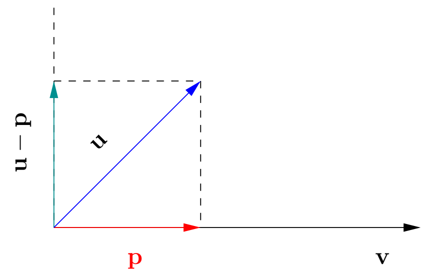


Figura 5.5: O vector $\mathbf{p}$ é a projecção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. O vector $\mathbf{u}-\mathbf{p}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$.

Num espaço linear real ou complexo, definimos projecção ortogonal de um vector u sobre o vector não nulo v como sendo um vector $p = kv$ (k escalar do espaço), tal que $(u-p) \perp v$. Usando a relação de ortogonalidade $(u-p) \perp v$, podemos determinar o escalar k, e consequentemente o vector p. Ou seja, para $v \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle v, u-p\rangle &= \langle v, u-kv\rangle = \langle v,u\rangle - k\langle v,v\rangle \\ &= \langle v,u\rangle - k\|v\|^2 \Longleftrightarrow k = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Logo, $p = kv = \dfrac{\langle v,u\rangle}{\|v\|^2}v$. Passamos a designar o vector p por $\operatorname{proj}_v u$.

Definição 5.5. Num espaço linear W munido de um produto interno $\langle\, , \rangle$ a *projecção ortogonal* do vector $u \in W$ sobre o vector não nulo $v \in W$, é definida por

$$\operatorname{proj}_v u = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|^2}v. \tag{5.11}$$

Nota 30. *Num espaço linear complexo não é indiferente usar $\langle v,u\rangle$ ou $\langle u,v\rangle$ na definição (5.11), de projecção ortogonal. Se tivéssemos definido (como acontece* *em alguns textos), o produto interno como sendo linear na primeira variável, na Definição 5.5 apareceria $\langle u, v\rangle$ em vez de $\langle v, u\rangle$.*

Exemplo 5.6. Consideremos $\mathbb{C}^2$ munido do produto interno usual, e determinemos a projecção ortogonal do vector $\mathbf{x} = (2i, 1)$ sobre $\mathbf{y} = (i, 0)$. Como

$$\langle (i,0)\,,\,(2i,1)\rangle = -2i^2 = 2 \quad \text{e} \quad \|(i,0)\|^2 = -i^2 = 1,$$

tem-se

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \frac{\langle (i,0)\,,\,(2i,1)\rangle}{\|(i,0)\|^2}(i,0) = 2(i,0).$$

♦

Exemplo 5.7. Usemos a expressão (5.11) para confirmar que $(u - \operatorname{proj}_v u\rangle) \perp v$.

$$\begin{aligned}\langle v\,,\,u - \operatorname{proj}_v u\rangle &= \langle v\,,\,u - \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}v\rangle \\ &= \langle v, u\rangle - \underbrace{\frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}}_{\text{escalar}}\|v\|^2 \\ &= \langle v, u\rangle - \langle v, u\rangle = 0.\end{aligned}$$

♦

Exercício 5.9. Considere o subespaço $S = \operatorname{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de um espaço linear W tal que $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ para todo $i \neq j$ e $i, j = 1, \ldots, n$. Seja $x \in W$.

a) Justifique que o vector $w = \operatorname{proj}_{v_1} x + \operatorname{proj}_{v_2} x + \cdots + \operatorname{proj}_{v_n} x$ pertence a S.

b) Sendo w o vector da alínea anterior, mostre que o vector $x - w$ é ortogonal a w.

▲

Consideremos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ munidos do produto interno usual, e sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vectores destes espaços. Calculemos $\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ usando a expressão matricial do produto interno. Nos cálculos que apresentamos a seguir identificamos matrizes 1×1 com escalares.

a) Para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ pertencentes a $\mathbb{R}^n$, tem-se

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y} = \underbrace{\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}\|^2}}_{\text{escalar}} \mathbf{y} = \mathbf{y} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \underbrace{(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)}_{n \times n} \mathbf{x},$$

onde na última igualdade se aplicou a associatividade do produto de matrizes. Assim, a projecção ortogonal de um vector sobre outro pode obter-se por multiplicação por uma matriz. Isto é,

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = P_{\mathbf{y}} \mathbf{x}, \text{ onde } P_{\mathbf{y}} \text{ é a matriz, de ordem } n,\ P_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y}\mathbf{y}^T.$$

b) Para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ pertencentes a $\mathbb{C}^n$, tem-se

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y} = \underbrace{\frac{\mathbf{y}^H \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}\|^2}}_{\text{escalar}} \mathbf{y} = \mathbf{y} \frac{\mathbf{y}^H \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \underbrace{(\mathbf{y}\mathbf{y}^H)}_{n \times n} \mathbf{x}.$$

Portanto,

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = P_{\mathbf{y}} \mathbf{x}, \text{ onde } P_{\mathbf{y}} \text{ é a matriz de ordem } n,\ P_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y}\mathbf{y}^H.$$

Do Exemplo 5.7 sabemos que $(x - \operatorname{proj}_y x)$ é ortogonal a y. Logo, para o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$), tem-se que

$$\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - P_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = (I - P_{\mathbf{y}}) \mathbf{x},$$

é um vector ortogonal a $\mathbf{y}$.

A discussão anterior pode resumir-se da seguinte forma:

Se $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) está munido do produto interno usual, a projecção ortogonal do vector $\mathbf{x}$ sobre $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ é dada por

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = P_{\mathbf{y}} \mathbf{x},$$

onde $P_{\mathbf{y}}$ é a seguinte matriz $n \times n$:

$$P_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y}\mathbf{y}^T \qquad \left(\text{resp. } P_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y}\mathbf{y}^H\right). \tag{5.12}$$

O vector $(I - P_{\mathbf{y}})\mathbf{x}$ é ortogonal a $\mathbf{y}$.

A matriz $P_{\mathbf{y}}$ é designada por *matriz de projecção ortogonal* (sobre $\mathbf{y}$).

5.2 Bases ortogonais

As bases ortogonais permitem uma simplificação computacional considerável. Como veremos adiante, dada uma base ortogonal de um espaço linear, qualquer vector do espaço é igual à soma das projecções ortogonais do vector sobre os vectores da base. Trata-se de uma generalização de um facto bem conhecido em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ onde as coordenadas de um vector relativas à base canónica (que é uma base ortonormada) se obtêm das projecções ortogonais do vector sobre vectores com direcções dos eixos coordenados.

Definição 5.6. Conjuntos ortogonais e ortonormados

Um subconjunto $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ de um espaço euclidiano diz-se um *conjunto ortogonal*, se todos os vectores de U são ortogonais dois a dois. Isto é,

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad \text{para todo } \; i \neq j \text{ e } i, j = 1, \ldots, k.$$

O conjunto U diz-se *ortonormado* se é ortogonal e todos os seus vectores têm norma igual a 1. Ou seja,

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \|u_i\| = 1, \quad \text{para todo } \; i \neq j \text{ e } i, j = 1, \ldots, k.$$

Um conjunto ortogonal (resp. ortonormado) que seja uma base diz-se uma *base ortogonal* (resp. *base ortonormada*).

Exemplo 5.8. Considere-se $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual.

a) A base $\{(1,2), (-2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é uma base ortogonal mas não é ortonormada.
b) A base $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$.

♦

Como vimos, a partir de um qualquer vector não nulo podemos obter um vector de norma unitária. Assim, dado um conjunto ortogonal que não contenha o vector nulo podemos sempre obter um conjunto ortonormado, bastando para tal multiplicar cada vector do conjunto pelo inverso da respectiva norma. Passamos a designar este procedimento por *normalização*.

$$\begin{array}{ccc} U \text{ ortogonal} & & \tilde{U} \text{ ortonormado} \\ & \xrightarrow{\text{normalização}} & \\ U = \{u_1, \ldots, u_k\} & & \tilde{U} = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_k}{\|u_k\|} \right\}. \end{array} \tag{5.13}$$

É óbvio que os conjuntos U e $\tilde{U}$ geram o mesmo espaço linear.

A proposição que se segue garante-nos a independência linear de um conjunto ortogonal.

Proposição 5.1. Qualquer conjunto ortogonal, que não contenha o vector nulo, é linearmente independente.

Demonstração. Seja $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ um conjunto ortogonal (isto é, tal que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, k$ e $i \neq j$) que não contém o vector zero.

Verifiquemos que a única solução da equação $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0$ é $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Seja u_i um qualquer vector de U. São válidas as igualdades

$$\begin{aligned} 0 = \langle u_i, \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \rangle &= \alpha_1 \langle u_i, u_1 \rangle + \cdots + \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle + \cdots + \alpha_k \langle u_i, u_k \rangle \\ &= \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle \quad \text{(os vectores } u_i \text{ são ortogonais dois a dois)} \\ &= \alpha_i \|u_i\|^2 \iff \alpha_i = 0 \text{ (já que } u_i \neq 0\text{).} \end{aligned}$$

Logo, como i é qualquer, obtém-se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. $\square$

Consideremos $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual e o subconjunto $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Seja A a matriz que cujas colunas são os vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Isto é,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

As linhas de A^T são os vectores $\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \ldots, \mathbf{u}_k^T$. O produto $A^T A$ é a matriz (simétrica) de ordem k, dada por

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} — & \mathbf{u}_1^T & — \\ — & \mathbf{u}_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{u}_k^T & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{u}_1\|^2 & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle & \|\mathbf{u}_2\|^2 & \cdots & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_k \rangle & \cdots & \|\mathbf{u}_k\|^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos concluir:

Proposição 5.2. Seja A uma matriz real.

1. As colunas de A formam um conjunto ortogonal (em relação ao produto interno usual em $\mathbb{R}^n$) se e só se a matriz $A^T A$ é diagonal.

2. As colunas de A formam um conjunto ortonormado se e só se a matriz $A^T A$ é igual à matriz identidade (isto é, $A^T A = I$).

Exercício 5.10. Considere o produto interno usual em $\mathbb{C}^n$, e A uma matriz complexa. Mostre que:

- As colunas de A formam um conjunto ortogonal se e só se a matriz $A^H A$ é diagonal.

- As colunas de A formam um conjunto ortonormado se e só se a matriz $A^H A$ é igual à matriz identidade (isto é, $A^H A = I$)[4].

▲

O Teorema 5.2 a seguir estabelece que as coordenadas de um vector relativas a uma base ortogonal podem exprimir-se em termos das projecções ortogonais do vector sobre os vectores da base.

Teorema 5.2. Seja $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ uma base (ordenada) ortogonal de um espaço linear W.

O vector das coordenadas de $x \in W$ na base B, $\mathbf{x}_B = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, tem componentes

$$c_i = \frac{\langle u_i, x\rangle}{\|u_i\|^2}.$$

Em particular,

$$x = \operatorname{proj}_{u_1} x + \cdots + \operatorname{proj}_{u_n} x.$$

Se B é uma base ortonormada, então $c_i = \langle u_i, x\rangle$.

Demonstração. Sendo B uma base de W, o vector x escreve-se de forma única como combinação linear dos vectores da base. Seja $x = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$, onde os c_i são as coordenadas de x na base B. Logo,

$$\begin{aligned}\langle u_i, x\rangle &= \langle u_i, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n\rangle = c_1\langle u_i, u_1\rangle + \cdots + c_n\langle u_i, u_n\rangle\\ &= c_i\langle u_i, u_i\rangle \qquad \text{(a base é ortogonal e portanto } \langle u_i, u_j\rangle = 0 \text{ para } i \neq j).\end{aligned}$$

[4]Uma matriz real A que verifica $A^T A = I$ diz-se uma matriz *ortogonal*, enquanto que se A for complexa e verifica $A^H A = I$, diz-se que A é uma matriz unitária. No Capítulo 7 estudam-se propriedades destas matrizes.

Os vectores u_i são não nulos uma vez que são vectores de uma base, por conseguinte

$$c_i = \frac{\langle u_i, x\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} = \frac{\langle u_i, x\rangle}{\|u_i\|^2}.$$

Da definição de projecção ortogonal de um vector sobre outro (ver (5.11)) tem-se $c_i u_i = \operatorname{proj}_{u_i} x$, e portanto $x = \operatorname{proj}_{u_1} x + \cdots + \operatorname{proj}_{u_n} x$.

No caso da base ser ortonormada, todos os vectores u_i satisfazem $\|u_i\| = 1$, pelo que a afirmação final segue da expressão obtida para os c_i's. □

5.3 Complemento ortogonal de um subespaço

Dois subespaços U e V de um espaço linear W dizem-se subespaços complementares se qualquer vector w de W se escreve na forma $w = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$, e, além disso, a intersecção dos subespaços é $U \cap V = \{0\}$. Ou seja, U e V são *subespaços complementares* em W se $W = U + V$ e $U \cap V = \{0\}$. Quando isto acontece escrevemos $W = U \oplus V$, que se lê "W é a soma directa de U com V".

Subespaços complementares num dado espaço linear W gozam da propriedade da soma das suas dimensões ser igual à dimensão de W. De facto, usando a Proposição 3.10 na página 141, a dimensão do subespaço $U + V$, é dada por

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V), \tag{5.14}$$

e portanto se U e V são subespaços complementares em W, tem-se $\dim(U \cap V) = 0$, pelo que $\dim W = \dim U + \dim V$.

Em $\mathbb{R}^2$ são exemplos de subespaços complementares duas quaisquer rectas distintas concorrentes na origem. Em $\mathbb{R}^3$, qualquer plano que contenha a origem é um subespaço complementar de uma recta que passa pela origem e não esteja contida no plano.

Estamos interessados em estudar subespaços de um espaço euclidiano que para além de serem complementares sejam ortogonais entre si, no sentido em que qualquer vector de um subespaço é ortogonal a qualquer vector do outro subespaço. Quando isto acontece, um subespaço diz-se o *complemento ortogonal* do outro subespaço.

Definição 5.7. Seja W um espaço linear munido de um produto interno $\langle\, ,\, \rangle$ e S um subespaço de W.

O *complemento ortogonal* de S é o conjunto de todos os vectores de W que são ortogonais a qualquer vector de S. Designamos o complemento ortogonal do subespaço S por $S^\perp$. Ou seja,

$$S^\perp = \{x \in W : \langle u, x\rangle = 0, \forall u \in S\}.$$

Vamos verificar que a definição apresentada significa que S e $S^\perp$ são subespaços complementares em W. Comecemos por mostrar que $S^\perp$ é um subespaço.

Proposição 5.3. O complemento ortogonal $S^\perp$ do subespaço S é um subespaço.

Demonstração. Para mostrar que $S^\perp$ é um subespaço, basta mostrar que é fechado para a adição e para a multiplicação por escalares. Como,

$$\begin{aligned} x \in S^\perp &\iff \langle u, x\rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad u \in S \\ y \in S^\perp &\iff \langle u, y\rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad u \in S, \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} \langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle = 0 &\iff \langle u, x + y\rangle = 0 \quad \text{para todo } u \in S \\ k\langle u, x\rangle = 0 &\iff \langle u, kx\rangle = 0 \quad \text{para todo } u \in S \text{ e } k \text{ escalar}. \end{aligned}$$

As equivalências anteriores dizem que os vectores $x + y$ e kx pertencem a $S^\perp$, para quaisquer $x, y \in S$ e k escalar. Ou seja, $S^\perp$ é subespaço. □

Mostremos agora que um subespaço S e o seu complemento ortogonal $S^\perp$ se intersectam apenas no vector zero.

Proposição 5.4. Seja S um subespaço e $S^\perp$ o seu complemento ortogonal. Verifica-se:

$$S \cap S^\perp = \{0\}.$$

Demonstração. Sendo S e $S^\perp$ subespaços, o zero pertence a ambos os conjuntos, isto é, $0 \in S \cap S^\perp$. Tome-se $x \in S \cap S^\perp$.

Como todos os vectores de $S^\perp$ são ortogonais a qualquer vector de S, temos que x é ortogonal a si próprio, ou seja,

$$0 = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \iff x = 0, \qquad \text{(propriedade P4 da Definição 5.1).}$$

□

Exemplo 5.9. Verifiquemos se são ou não complementos ortogonais os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ (munido do produto interno usual).

a) $U = \operatorname{Span}\{(1,2,0),(1,0,1)\}$ e $V = \operatorname{Span}\{(1,0,0)\}$. O subespaço V não é o complemento ortogonal de U já que $\langle(1,0,0),(1,0,1)\rangle = 1$. Ou seja, há vectores de U que não são ortogonais a vectores de V.

b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=2\}$ e $V = \operatorname{Span}\{(1,1,-1)\}$ não são complementos ortogonais, visto que U não é um subespaço (U é um plano que não contém a origem).

c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ e $V = \operatorname{Span}\{(1,1,-1)\}$. Os conjuntos U e V são subespaços e uma base para U é $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$. Como $\langle(-1,1,0),(1,1,-1)\rangle = 0$ e $\langle(1,0,1),(1,1,-1)\rangle = 0$, tem-se que $U = V^{\perp}$. Note-se que dados dois subespaços com bases B e B', para mostrar que os subespaços são ortogonais basta provar que cada vector da base B é ortogonal a todos os vectores da base B' (ver Exercício 5.8).

♦

Teorema da decomposição ortogonal

Já mostrámos que o complemento ortogonal $S^{\perp}$ do subespaço S é um subespaço e que $S^{\perp} \cap S = \{0\}$. Para mostrar que S e $S^{\perp}$ são subespaços complementares em W falta mostrar que qualquer vector de W se escreve como a soma de um vector de S com um vector de $S^{\perp}$. Este é o conteúdo do Teorema da decomposição ortogonal. Antes de enunciarmos esse teorema mostremos o lema seguinte.

Lema 5.1. Seja $\{u_1,\ldots,u_k\}$ uma base ortogonal do subespaço S de W, e x um vector de W. O vector

$$x_S = \operatorname{proj}_S x = \operatorname{proj}_{u_1} x + \cdots + \operatorname{proj}_{u_k} x = \frac{\langle u_1, x\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \cdots + \frac{\langle u_k, x\rangle}{\|u_k\|^2}u_k \tag{5.15}$$

pertence a S, e o vector

$$\begin{aligned} x - x_S &= x - \operatorname{proj}_S x \\ &= x - \left(\tfrac{\langle u_1,x\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \cdots + \tfrac{\langle u_k,x\rangle}{\|u_k\|^2}u_k\right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

é ortogonal a S.

Demonstração. O vector x_S pertence obviamente ao subespaço S, uma vez que é a soma dos vectores $\operatorname{proj}_{u_i} x$, que são vectores de S. Vejamos agora que $x - x_S$ é ortogonal a S. Para tal, basta verificar que $x - x_S$ é ortogonal a qualquer vector de uma base de S. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle u_i, x - x_S \rangle &= \langle u_i, x - \frac{\langle u_1, x\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \cdots - \frac{\langle u_k, x\rangle}{\|u_k\|^2} u_k \rangle \\
&= \langle u_i, x\rangle - \frac{\langle u_1, x\rangle}{\|u_1\|^2}\langle u_i, u_1\rangle - \cdots - \frac{\langle u_k, x\rangle}{\|u_k\|^2}\langle u_i, u_k\rangle \\
&= \langle u_i, x\rangle - \frac{\langle u_i, x\rangle}{\|u_i\|^2}\langle u_i, u_i\rangle \quad \text{(já que a base é ortogonal)} \\
&= \langle u_i, x\rangle - \frac{\langle u_i, x\rangle}{\|u_i\|^2}\|u_i\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $x - x_S$ é ortogonal a S, isto é, $x - x_S$ pertence a $S^\perp$. □

Teorema 5.3. Teorema da decomposição ortogonal

Seja W um espaço euclidiano e S um subespaço de W. Qualquer vector $x \in W$ escreve-se de forma única como a soma de um vector x_S de S com um vector $x_{S^\perp}$ do complemento ortogonal de S. Isto é,

$$x = x_S + x_{S^\perp} \qquad \text{com} \qquad x_S \in S \text{ e } x_{S^\perp} \in S^\perp.$$

Define-se a projecção ortogonal de x sobre S como $\operatorname{proj}_S x = x_S$, e a projecção ortogonal de x sobre o subespaço $S^\perp$ como $\operatorname{proj}_{S^\perp} x = x_{S^\perp}$.

A demonstração deste teorema será realizada supondo que o subespaço S admite uma base ortogonal. A existência de uma base ortogonal é assegurada pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt que será descrito na Secção 5.5.

Demonstração. Suponha-se que S admite uma base ortogonal e seja x um qualquer vector de W. O vector $x_S = \operatorname{proj}_S x$ definido no Lema 5.1 pertence a S, e o vector $x - x_S$ pertence a $S^\perp$. Logo, qualquer vector x de W é igual a $x = x_S + (x - x_S) = x_S + x_{S^\perp}$. Falta mostrar que esta decomposição é única. Para tal, considere-se $x = x_S + x_{S^\perp}$ e $x = \tilde{x}_S + \tilde{x}_{S^\perp}$ com $x_S, \tilde{x}_S \in S$ e $x_{S^\perp}, \tilde{x}_{S^\perp} \in S^\perp$. Subtraindo estas duas expressões de x, tem-se

$$0 = (x_S - \tilde{x}_S) + (x_{S^\perp} - \tilde{x}_{S^\perp}). \tag{5.17}$$

Os vectores $(x_S - \tilde{x}_S)$ e $(x_{S^\perp} - \tilde{x}_{S^\perp})$ pertencem, respectivamente, a S e a $S^\perp$, já que S e $S^\perp$ são subespaços. Mas a igualdade (5.17) diz que os vectores $(x_S - \tilde{x}_S)$ e $(x_{S^\perp} - \tilde{x}_{S^\perp})$ são simétricos, logo pertencem ambos a $S \cap S^\perp$. Isto significa que $(x_S - \tilde{x}_S) = 0 = (x_{S^\perp} - \tilde{x}_{S^\perp})$, já que $S \cap S^\perp = \{0\}$ (cf. Proposição 5.4). □

Na Figura 5.6 ilustramos o Teorema da decomposição ortogonal.

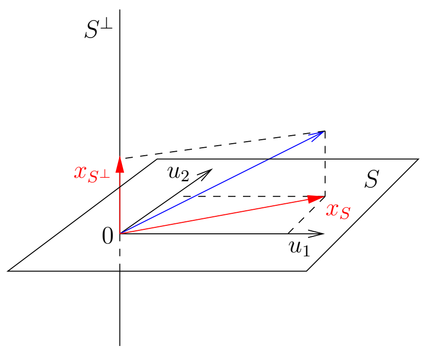


Figura 5.6: Teorema da decomposição ortogonal, onde $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortogonal de S.

As proposições 5.3, 5.4, e o Teorema da decomposição ortogonal permitem concluir que dado um subespaço S de um espaço euclidiano W, se tem $W = S \oplus S^\perp$. Consequentemente,

$$\dim W = \dim(S + S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp - \dim(S \cap S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp.$$

Nota 31. *1. A projecção ortogonal sobre um subespaço S, de um espaço euclidiano W, pode ser vista como uma função (ou operador) $P_S = \mathrm{proj}_S : W \to S$ tal que*

$$P_S(x) = \begin{cases} x & \textit{se } x \in S \\ 0 & \textit{se } x \in S^\perp. \end{cases}$$

Consequentemente

$$P_S^2(x) = P_S(P_S(x)) = P_S(x) \textit{ para todo } x \in W.$$

Um operador P que satisfaz a condição $P^2 = P$ diz-se idempotente, ou operador de projecção.

Exemplo 5.10. 1) Consideremos um plano em $\mathbb{R}^3$ que contém a origem. Este subespaço é definido por uma equação do tipo $ax + by + cz = 0$, em que a, b e c não são simultaneamente nulos.

Qualquer vector (x, y, z) deste plano é ortogonal ao vector (a, b, c), visto que

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by + cz = 0.$$

Uma vez que o plano é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão dois, o seu complemento ortogonal é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão um. Logo, a recta que passa pela origem e tem a direcção do vector (a, b, c) é o complemento ortogonal ao plano.

2) Considere-se $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual, e S a recta de equação $y = x$. Esta recta passa pela origem e tem a direcção do vector $(1, 1)$. Assim, $\{1, 1)\}$ é uma base de S. O complemento ortogonal $S^\perp$ é o conjunto de todos os vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ortogonais a $(1, 1)$, isto é

$$\langle (x, y), (1, 1) \rangle = x + y = 0 \Longleftrightarrow x = -y.$$

Logo

$$S^\perp = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = -y\right\} = \{(-y, y) : \; y \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}\{(-1, 1)\}.$$

Por conseguinte, $S^\perp$ é a recta perpendicular à recta S que passa pela origem.

♦

A expressão (5.15), da projecção ortogonal sobre um subespaço S, pressupõe o conhecimento de uma base ortogonal de S. No caso particular em que a dimensão do subespaço S de W é igual a $\dim S = \dim W - 1$, podemos usar o teorema da decomposição ortogonal para determinar $\operatorname{proj}_S x$ sem termos de determinar uma base ortogonal de S. Neste caso, como a dimensão de $S^\perp$ é $\dim S^\perp = 1$, do Teorema da decomposição ortogonal resulta

$$\operatorname{proj}_S x = x - \operatorname{proj}_{S^\perp} x = x - \operatorname{proj}_v x,$$

onde v é um qualquer vector não nulo de $S^\perp$.

Um subespaço de dimensão $(n - 1)$ de um espaço de dimensão n diz-se um *hiperplano*.

Vejamos agora como se traduz a projecção ortogonal sobre hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ para o produto interno usual. Relembremos que, para este produto interno, a projecção ortogonal de um vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sobre o vector não nulo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tem a expressão matricial $P_\mathbf{u}\mathbf{x}$, onde $P_\mathbf{u}$ é definida em (5.12).

Considere-se o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelo vector não nulo $\mathbf{u}$ e designe-se por $\mathbf{u}^\perp$ o seu complemento ortogonal (usamos a notação $\mathbf{u}^\perp$ em vez da notação habitual $(\mathrm{Span}\{\mathbf{u}\})^\perp$). O subespaço $\mathbf{u}^\perp$ é um hiperplano uma vez que $\dim \mathbf{u}^\perp = n-1$. Para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, o Teorema da decomposição ortogonal garante que

$$\mathbf{x} = \mathrm{proj}_\mathbf{u}\, \mathbf{x} + \mathrm{proj}_{\mathbf{u}^\perp}\, \mathbf{x} = P_\mathbf{u}\mathbf{x} + P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{x} \Longleftrightarrow (I - P_\mathbf{u})\mathbf{x} = P_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{x},$$

significando que a projecção ortogonal sobre o complemento ortogonal ao subespaço gerado por $\mathbf{u}$ é obtida multiplicando pela matriz $(I - P_\mathbf{u})$.

Verifiquemos agora algumas propriedades das matrizes $P_\mathbf{u}$ e $(I - P_\mathbf{u})$:

- Como $P_\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T$, as matrizes $P_\mathbf{u}$ e $(I - P_\mathbf{u})$ são matrizes simétricas.
- $P_\mathbf{u}^2 = P_\mathbf{u}$ e $(I - P_\mathbf{u})^2 = (I - P_\mathbf{u})$, uma vez que

$$P_\mathbf{u}^2 = P_\mathbf{u}\left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\right) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^4}\mathbf{u}\underbrace{\mathbf{u}^T\mathbf{u}}_{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}^T = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T = P_\mathbf{u}.$$

$$(I - P_\mathbf{u})^2 = (I - P_\mathbf{u})(I - P_\mathbf{u}) = I - P_\mathbf{u} - P_\mathbf{u} + P_\mathbf{u}^2 = I - P_\mathbf{u}.$$

Exemplo 5.11. Determinar $\mathrm{proj}_\mathbf{u}\, \mathbf{x}$ e $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}^\perp}\, \mathbf{x}$ para os seguintes vectores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, usando a definição temos

$$\mathrm{proj}_\mathbf{u}\, \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{3+4}{9+1+4}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos confirmar este resultado usando a matriz $P_\mathbf{u}$.

$$\mathrm{proj}_\mathbf{u}\, \mathbf{x} = P_\mathbf{u}\mathbf{x} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{x} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A projecção ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre o complemento ortogonal ao espaço gerado por $\mathbf{u}$ é

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{u}^\perp} \mathbf{x} = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = (I - P_{\mathbf{u}})\mathbf{x}.$$

Note-se que neste caso $\mathbf{u}^\perp$ é um plano perpendicular à recta definida por $\mathbf{u}$. Se para determinar a projecção ortogonal sobre este plano tivéssemos usado a expressão (5.15) necessitaríamos de determinar previamente uma base ortogonal do plano. Sugerimos que confirme o resultado obtido calculando a projecção ortogonal sobre o plano dessa forma. ♦

Teorema da Melhor Aproximação

O Teorema da melhor aproximação está na base de vários resultados usados nas aplicações, com destaque para o problema de mínimos quadrados que abordaremos neste capítulo. Esse teorema afirma que dado um subespaço S de W e um vector $x \in W$, o vector de S mais próximo de x é $\operatorname{proj}_S x = x_S$. Ou seja, que a distância de x a qualquer outro vector u de S é maior ou igual à distância de x a $\operatorname{proj}_S x$:

$$\text{dist}(x, x_S) \leq \text{dist}(x, u) \quad \text{qualquer que seja } u \in S.$$

Usando a definição de distância entre dois vectores (ver Definição 5.2), a desigualdade anterior é equivalente a

$$\|x - x_S\| \leq \|x - u\| \quad \text{para qualquer } u \in S.$$

Teorema 5.4. **Teorema da melhor aproximação**
Seja W um espaço linear munido de um produto interno, S um subespaço de W e x um vector de W. Então,

$$\|x - x_S\| \leq \|x - u\| \quad \text{para qualquer } u \in S,$$

onde $x_S = \operatorname{proj}_S x$ é a projecção ortogonal de x sobre S.

Demonstração. Pelo Teorema da decomposição ortogonal podemos escrever $x = x_S + x_{S^\perp}$. Seja u um qualquer vector de S. Uma vez que os vectores $x - x_S = x_{S^\perp}$ e $x_S - u \in S$ são ortogonais, pelo Teorema de Pitágoras (pág. 248), temos

$$\|x - u\|^2 = \|\underbrace{x - x_S}_{\in S^\perp} + \underbrace{x_S - u}_{\in S}\|^2 = \|x - x_S\|^2 + \|x_S - u\|^2.$$

Da igualdade anterior obtém-se

$$\|x - u\|^2 \geq \|x - x_S\|^2,$$

equivalente à desigualdade do enunciado. $\square$

O Teorema da melhor aproximação permite determinar a distância de vectores de um espaço linear W a um subespaço S de W. A distância de $x \in W$ a um subespaço S, é a menor das distâncias de x aos vectores de S. Ou seja, a distância dist (x, S), de x ao subespaço S, é

$$\text{dist}\,(x, S) = \min_{u \in S} \text{dist}\,(x, u) = \min_{u \in S} \|x - u\| = \|x - x_S\| = \|\operatorname{proj}_{S^\perp} x\|.$$

Distância a um subespaço

Seja W um espaço linear, S um subespaço de W e x um vector de W. A distância de x a S é:

$$\text{dist}\,(x, S) = \|\operatorname{proj}_{S^\perp} x\|.$$

5.4 Ortogonalidade dos quatro subespaços fundamentais

Nesta secção analisamos as relações de ortogonalidade entre os quatro subespaços fundamentais de $\mathbb{R}^n$ associados a uma matriz real A. Relembremos (ver Secção 3.2, pág. 114) que estes subespaços são: o núcleo de A; o espaço das linhas de A; o espaço das colunas de A; e o núcleo de A^T.

Consideremos $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Se A é uma matriz real $p \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} — & \mathbf{l}_1 & — \\ — & \mathbf{l}_2 & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{l}_p & — \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

então:

- As linhas $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_p$ de A são vectores de $\mathbb{R}^n$.
- As colunas $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ de A são vectores de $\mathbb{R}^p$.

Como estamos a considerar o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$, a multiplicação da matriz A por um vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é igual a

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} — & \mathbf{l}_1 & — \\ — & \mathbf{l}_2 & — \\ & \vdots & \\ — & \mathbf{l}_p & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{x} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{l}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{l}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{l}_p, \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto dos vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que são ortogonais a todas as linhas de A é o conjunto de todos os vectores $\mathbf{x}$ que verificam $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou seja, o núcleo de A.

Se $\mathbf{x}$ verifica $\langle \mathbf{x}, \mathbf{l}_i \rangle = 0$ para $i = 1, \ldots, p$, então $\mathbf{x}$ é ortogonal a qualquer combinação linear das linhas $\mathbf{l}_i$, uma vez que

$$\langle \mathbf{x}\,,\, \alpha_1 \mathbf{l}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{l}_p \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{l}_1 \rangle + \cdots + \alpha_p \langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{l}_p \rangle = 0.$$

Assim, qualquer vector do espaço das linhas de A é ortogonal ao núcleo de A, isto é,

$$(EL(A))^\perp = N(A).$$

Como a relação anterior é válida para qualquer matriz, em particular é satisfeita pela matriz transposta A^T. Ou seja, $\big(EL(A^T)\big)^\perp = N(A^T)$. Logo,

$$(EC(A))^\perp = N(A^T).$$

Resumindo:

$$(EL(A))^\perp = N(A) \quad \text{e} \quad (EC(A))^\perp = N(A^T) \tag{5.18}$$

Os espaços $EL(A)$ e $N(A)$ de uma matriz real $p \times n$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$, enquanto que $EC(A)$ e $N(A^T)$ são subespaços de $\mathbb{R}^p$. Por conseguinte, de (5.18), resulta

$$\mathbb{R}^n = EL(A) \oplus N(A) \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^p = EC(A) \oplus N(A^T).$$

Do Teorema da dimensão (Teorema 3.6, pág. 144), tem-se que $\dim EC(A) = \dim EL(A) = \operatorname{car}(A) = k$ enquanto que a dimensão do núcleo de uma matriz é a diferença entre o número de colunas da matriz e a sua característica. Na Figura 5.7 ilustramos estes factos usando um diagrama apresentado por Strang em [11].

A expressão (5.15) para a projecção ortogonal de um vector sobre um subespaço, pressupõe o conhecimento de uma base ortogonal do subespaço. Os resultados do próximo exercício permitem calcular a projecção ortogonal sobre um subespaço de $\mathbb{R}^n$ sem determinar uma base ortogonal desse subespaço.

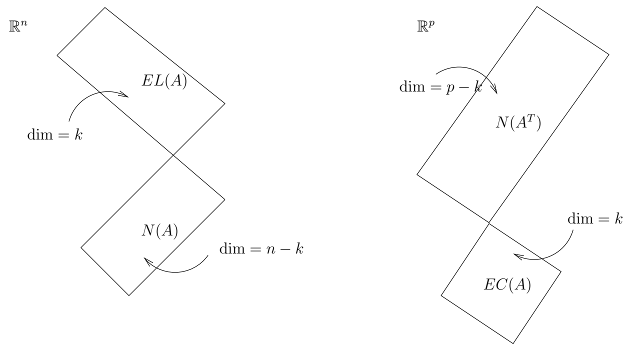


Figura 5.7: Ortogonalidade dos quatro subespaços fundamentais para uma matriz real A do tipo $p \times n$, de característica k.

Exercício 5.11. Considere uma matriz real A do tipo $p \times n$ tal que $A^T A$ é invertível, e a matriz quadrada $P = A(A^T A)^{-1} A^T$. Mostre que:

(a) $P\mathbf{b} = \mathbf{b}$ se $\mathbf{b} \in EC(A)$.

(b) $P\mathbf{b} = \mathbf{0}$ se $\mathbf{b} \in (EC(A))^{\perp}$.

(c) $P^2 = P$.

(d) Justifique que as propriedades das alíneas (a)-(c) equivalem a afirmar que a matriz P fornece a projecção ortogonal sobre o espaço das colunas de A.

(e) Verifique que se A tem uma única coluna não nula $\mathbf{a}$, então $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = P\mathbf{x}$ para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$.

(f) Use a matriz P para determinar a projecção ortogonal de $(1, 2, 0)$ sobre $S = \operatorname{Span}\{(1, 1, 1), (-2, 0, 1)\}$.

▲

Nota 32. *O exercício anterior mostra que a matriz P dá a projecção ortogonal sobre o espaço das colunas de A (desde que $A^T A$ seja invertível). Assim, pode calcular-se a projecção ortogonal sobre um subespaço de $\mathbb{R}^n$ (munido do produto interno usual) tomando para A a matriz que tenha por colunas uma base (não necessariamente ortogonal) do subespaço linear em questão.*

No Teorema 5.8, pág. 295, estabelecem-se condições para invertibilidade da matriz $A^T A$.

Exercício 5.12. Considere o produto interno usual em $\mathbb{C}^n$, S um subespaço de $\mathbb{C}^n$ e $B = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ uma base ortonormada de S. Mostre que a projecção ortogonal sobre S é dada por

$$\operatorname{proj}_S \mathbf{x} = QQ^H\mathbf{x} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \tag{5.19}$$

onde Q é a matriz que tem por colunas os vectores da base B (pela mesma ordem). Sugestão: Use o Exercício 5.11 com as adaptações convenientes ao caso de matrizes complexas (substitua nesse exercício o símbolo 'T' por 'H'). ▲

5.5 Ortogonalização de Gram-Schmidt e decomposição QR

Como se observa na expressão (5.15), a projecção ortogonal sobre um subespaço S tem uma expressão simples, desde que se conheça uma base ortogonal de S. A questão que naturalmente se coloca é a da existência de uma base ortogonal para qualquer subespaço. A resposta a esta questão é fornecida pelo denominado *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*[5] o qual permite obter uma base ortogonal a partir de uma base dada. Par tal considere-se um conjunto de vectores linearmente independentes $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de um espaço euclidiano. O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt constrói a partir de V, de forma recursiva, um conjunto ortogonal $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Os passos deste algoritmo são detalhados a seguir.

Passo 1: Tome-se para u_1 um dos vectores de V:

$$u_1 = v_1.$$

Passo 2: Considere-se outro vector v_2 de V, e construa-se a projecção ortogonal de v_2 sobre u_1. Do Exemplo 5.7, sabemos que o vector $v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2$ é ortogonal a u_1 (observe a ilustração na Figura 5.5 da página 249). Tome-se para u_2 o vector $v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2$, isto é,

$$u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\|u_1\|^2} u_1.$$

[5] Este processo recebeu os nomes dos matemáticos Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) e Erhard Schmidt (1876 – 1959), embora possa ser encontrado em trabalhos anteriores de Laplace e Cauchy.

Passo 3: Considere-se o subespaço S gerado por $\{u_1, u_2\}$. Este subespaço tem dimensão igual a dois já que os vectores u_1, u_2 são ortogonais, e portanto linearmente independentes (cf. Proposição 5.1, pág. 253). Além disso, como u_2 é combinação linear de $u_1 = v_1$ e de v_2, tem-se $\mathrm{Span}\{u_1, u_2\} \subseteq \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$. Como, por hipótese, $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, tem-se $S = \mathrm{Span}\{u_1, u_2\} = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$.

Considere-se v_3 um outro vector de V. O Lema 5.1 garante que o vector $v_3 - \mathrm{proj}_S\, v_3$ é um vector ortogonal a u_1 e u_2. Tome-se para u_3 este vector

$$u_3 = v_3 - \mathrm{proj}_S\, v_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{u_1} v_3 - \mathrm{proj}_{u_2} v_3,$$

onde na segunda igualdade se aplicou o facto de $\{u_1, u_2\}$ ser uma base ortogonal de S.

Passo i+1: Repetir o passo anterior considerando para S o subespaço gerado pelos vectores u_i construídos nos passos anteriores, considerar um vector $v_{i+1} \in V$ ainda não utilizado, e tomar para $u_{i+1} = v_{i+1} - \mathrm{proj}_S\, v_{i+1}$. Repetir este processo até esgotar os vectores de V.

Acabámos de ilustrar o denominado processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Teorema 5.5. Ortogonalização de Gram-Schmidt
Seja $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, com $k > 1$, um conjunto linearmente independente de um espaço linear munido de um produto interno. O conjunto $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, formado pelos vectores

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle u_1, v_2\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle u_1, v_3\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_k &= v_k - \mathrm{proj}_{u_1} v_k - \mathrm{proj}_{u_2} v_k - \cdots - \mathrm{proj}_{u_{k-1}} v_k,
\end{aligned}$$

é ortogonal.
Os conjuntos U e V geram o mesmo espaço.

Demonstração. Para mostrar que o conjunto U é ortogonal vamos usar indução sobre o número j de vectores de U. Para $j = 2$, como o vector $v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2$ é ortogonal a u_1 (ver Exemplo 5.7), os vectores u_1 e u_2 são ortogonais.

Suponha-se que o conjunto $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é ortogonal (hipótese de indução). Mostremos que o conjunto $\{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}\}$ também é ortogonal. Calculando $\langle u_i, u_{p+1}\rangle$, para qualquer $i = 1, \ldots, p$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle u_i, u_{p+1}\rangle &= \left\langle u_i, v_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \frac{\langle u_j, v_{p+1}\rangle}{\|u_j\|^2} u_j \right\rangle \\
&= \langle u_i, u_{p+1}\rangle - \sum_{j=1}^{p} \frac{\langle u_j, v_{p+1}\rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_i, u_j\rangle \\
&= \langle u_i, u_{p+1}\rangle - \frac{\langle u_i, u_{p+1}\rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_i, u_i\rangle \\
&= \langle u_i, u_{p+1}\rangle - \langle u_i, u_{p+1}\rangle = 0,
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade aplicámos a hipótese de indução. Logo, U é ortogonal.

Falta mostrar que U e V geram o mesmo espaço. Os vectores de U, construídos a partir dos vectores de V, são da forma

$$u_i = v_i - \operatorname{proj}_{u_1} v_i - \operatorname{proj}_{u_2} v_i - \cdots - \operatorname{proj}_{u_{i-1}} v_i,$$

isto é, os u_i's são combinações lineares dos vectores de V, e portanto $\operatorname{Span} U \subseteq \operatorname{Span} V$. O conjunto U é ortogonal, e portanto U é linearmente independente pela Proposição 5.1 (pág. 253). Como as dimensões de $\operatorname{Span} U$ e $\operatorname{Span} V$ são iguais e $\operatorname{Span} U \subseteq \operatorname{Span} V$, tem-se necessariamente $\operatorname{Span} U = \operatorname{Span} V$. □

Exercício 5.13. Determinemos uma base ortogonal para o subespaço

$$S = \operatorname{Span}\{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}.$$

É fácil verificar que os vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$ formam uma base para S. Esta base não é ortogonal já que, por exemplo, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 1$.

Apliquemos o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u_2}, \mathbf{u}_3\}$ de S que seja ortogonal.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = (1,1,0) \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2 = (0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,1,0) \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_3 - \operatorname{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}_3 \\
&= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1/2}{1/2}\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (0,0,1).
\end{aligned}$$

▲

Decomposição QR

A factorização de uma matriz A na forma $A = QR$, onde Q é uma matriz cujas colunas formam um conjunto ortonormado e R é uma matriz triangular superior invertível, é conhecida como *decomposição* QR de A. Esta factorização tem variadas aplicações numéricas, nomeadamente no que respeita a algoritmos para determinação de valores próprios de matrizes de grandes dimensões, sendo também frequentemente utilizada na resolução de problemas de mínimos quadrados (ver Secção 5.7.2, pág. 289). A decomposição QR surge naturalmente como consequência do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Considere-se uma matriz A cujos vectores coluna $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ são linearmente independentes

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Podemos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto $V = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ e obter um conjunto ortogonal U. Se a este conjunto aplicarmos a normalização referida em (5.13), obtemos um conjunto ortonormado de vectores:

$$\begin{array}{ccccc}
V = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\} & \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} & U & \xrightarrow{\text{Normalização}} & \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}. \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{Ortogonal} & & \text{Ortonormado}
\end{array}$$

O conjunto V, o conjunto U e o conjunto $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ geram o mesmo subespaço. Assim, cada vector $\mathbf{c}_i \in V$ pode escrever-se como combinação linear dos vectores

$\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$. Como o conjunto formado pelos $\mathbf{q}_i$'s é uma base ortonormada para o subespaço gerado por V, do Teorema 5.2 resulta

$$\mathbf{c}_i = \operatorname{proj}_{\mathbf{q}_1} \mathbf{c}_1 + \cdots + \operatorname{proj}_{\mathbf{q}_n} \mathbf{c}_n.$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1 &= \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_1 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{c}_1 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{c}_1 \rangle \mathbf{q}_n \\
\mathbf{c}_2 &= \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_2, \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{c}_2 \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{c}_2 \rangle \mathbf{q}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{c}_n &= \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_n \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{c}_n \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{c}_n \rangle \mathbf{q}_n.
\end{aligned}$$

Suponha-se que os vectores de $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ respeitam a ordem pela qual foram construídos através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Ou seja, suponha-se que cada vector $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|}$ é ortogonal a cada um dos vectores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{i-1}$ para $1 < i \leq n$. Como $\langle \mathbf{c}_j, \mathbf{q}_i \rangle = 0$ para $j = 1, \ldots, i-1$, as igualdades anteriores reduzem-se a

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1 &= \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_1 \rangle \mathbf{q}_1 \\
\mathbf{c}_2 &= \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_2 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{c}_2 \rangle \mathbf{q}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{c}_n &= \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_n \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{c}_n \rangle \mathbf{q}_2 + \cdots + \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{c}_n \rangle \mathbf{q}_n.
\end{aligned}$$

Exprimindo estas igualdades na forma matricial, e relembrando que a coluna j do produto QR de duas matrizes é a matriz Q multiplicada pela coluna j de R (reveja as definições 1.12 e 1.11, pág. 34), tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_1 \rangle & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_n \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{c}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{c}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{c}_n \rangle \end{bmatrix}}_{R}.$$

Cada vector $\mathbf{q}_i$ é o vector $\mathbf{u}_i$ normalizado, onde $\mathbf{u}_i$ é obtido pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à custa de $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{i-1}\}$. Assim,

$$\mathbf{q}_i = \begin{cases} \frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|} & \text{para } i = 1 \\ \frac{1}{\mu_i}\left(\mathbf{c}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{c}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j\right) & \text{para } 1 < i \leq n, \end{cases}$$

com $\mu_i = \left\| \mathbf{c}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{c}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j \right\|$. Ou seja, para $i > 1$ podemos escrever

$$\mathbf{c}_i = \mu_i \mathbf{q}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{c}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \mathbf{u}_j.$$

Logo, as entradas da diagonal principal da matriz R são dadas por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{c}_1 \rangle &= \langle \frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|}, \mathbf{c}_1 \rangle = \|\mathbf{c}_1\|, \\ \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{c}_i \rangle &= \mu_i \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i \rangle + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{c}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2} \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\ &= \mu_i \|\mathbf{q}_i\|^2 = \mu_i, \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade aplicámos o facto de cada vector $\mathbf{u}_i$ (e portanto $\mathbf{q}_i$) ser ortogonal aos vectores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}$. Ou seja, as entradas da diagonal principal da matriz R são positivas. Enunciamos no teorema seguinte o que acabamos de provar.

Teorema 5.6. Decomposição QR

Se A é uma matriz do tipo $p \times n$ cujas colunas formam um conjunto linearmente independente, então existem matrizes Q e R tais que

$$A = QR,$$

sendo

(i) Q uma matriz cujas colunas formam um conjunto ortonormado, ou seja, $Q^T Q = I$ no caso de A ser real, e $Q^H Q = I$ no caso de A ser complexa.

(ii) R uma matriz triangular superior cujas entradas na diagonal principal são todas positivas.

Além disso, a factorização $A = QR$ é única.

Demonstração. Consideramos o caso em que A é uma matriz real deixando o caso complexo como exercício. Falta mostrar que a factorização $A = QR$ é única. Comecemos por notar que se provarmos que a matriz R na factorização $A = QR$ é única, segue de imediato que a matriz Q é única, uma vez que sendo R invertível, se tem

$$Q_1 R = Q_2 R \iff Q_1 = Q_2.$$

Provemos agora que a matriz R é única. Suponha-se que existem matrizes R_1 e R_2 triangulares superiores com todas as entradas da diagonal principal positivas, e matrizes Q_1 e Q_2 cujas colunas formam conjuntos ortonormados, tais que $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$. Como o conjunto das colunas de Q_1 e Q_2 é ortonormado (isto é, $Q_1^TQ_1 = I = Q_2^TQ_2$), e as matrizes R_1 e R_2 são invertíveis, verifica-se

$$R_1^TQ_1^TQ_1R_1 = A^TA = R_2^TQ_2^TQ_2R_2 \Longleftrightarrow R_1^TR_1 = R_2^TR_2 \Rightarrow R_1R_2^{-1} = (R_1^T)^{-1}R_2^T.$$

O produto de matrizes triangulares superiores (resp. inferiores) é uma matriz triangular superior (resp. inferior), a inversa de uma matriz triangular superior (resp. inferior) é uma matriz triangular superior (resp. inferior), e a transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular inferior. Assim, da igualdade anterior, obtemos

$$\underbrace{R_1R_2^{-1}}_{\text{triangular superior}} = \underbrace{(R_1^T)^{-1}R_2^T}_{\text{triangular inferior}} \Longrightarrow R_1R_2^{-1}\text{é diagonal}.$$

Qualquer matriz triangular superior invertível R pode escrever-se como o produto de uma matriz diagonal cujas entradas na diagonal são as entradas da diagonal principal de R por uma matriz triangular superior com 1's na diagonal principal, ou seja,

$$R_1 = D_1U_1 \quad \text{e} \quad R_2 = D_2U_2,$$

com D_1 e D_2 matrizes diagonais invertíveis, e U_1 e U_2 matrizes triangulares superiores com 1's na diagonal principal. Logo, para a matriz diagonal $R_1R_2^{-1} = D$, tem-se

$$R_1R_2^{-1} = D \Longleftrightarrow D_1U_1U_2^{-1}D_2^{-1} = D \Longrightarrow U_1U_2^{-1} = D_1^{-1}DD_2.$$

Como a matriz $U_1U_2^{-1}$ é triangular superior com 1's na diagonal, e $D_1^{-1}DD_2$ é uma matriz diagonal, a igualdade $U_1U_2^{-1} = D_1^{-1}DD_2$ implica $U_1U_2^{-1} = I$, isto é,

$$U_1U_2^{-1} = I \Longleftrightarrow U_1 = U_2.$$

Além disso, se $U_1 = U_2$, então $R_1^TR_1 = A^TA = R_2^TR_2$ é equivalente a $U_1^TD_1^2U_1 = U_1^TD_2^2U_1$. Como U_1 é invertível, resulta desta igualdade que $D_1^2 = D_2^2$. Como as entradas na diagonal principal de D_1 e de D_2 são positivas por hipótese, e D_1 e D_2 são matrizes diagonais, a igualdade $D_1^2 = D_2^2$ é equivalente a $D_1 = D_2$. Logo, $R_1 = R_2$. □

Exemplo 5.12. Considere-se a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As colunas $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ de A são linearmente independentes, uma vez que a matriz A tem característica 2. Apliquemos o processo de Gram-Schmidt ao conjunto dos vectores coluna de A, e normalizemos os vectores obtidos.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{c_1} = (1,2,0) & &\rightsquigarrow \quad \mathbf{q_1} = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{c_2} - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{c_2}\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}(-2,1,5) & &\rightsquigarrow \quad \mathbf{q_2} = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,1,5). \end{aligned}$$

Como $\langle \mathbf{q_1}, \mathbf{c_1}\rangle = \frac{5}{\sqrt{5}}$, $\langle \mathbf{q_1}, \mathbf{c_2}\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\langle \mathbf{q_2}, \mathbf{c_2}\rangle = \frac{6}{\sqrt{30}}$, a factorização $A = QR$ é

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2/\sqrt{6} \\ 2 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \qquad R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

♦

5.6 Determinantes, produto vectorial e produto misto em $\mathbb{R}^3$

Nesta secção fazemos uma interpretação geométrica do determinante de uma matriz 3×3, e aproveitamos para introduzir alguns conceitos usados com frequência em Cálculo, como seja o produto vectorial e o produto misto.

O produto vectorial de dois vectores de $\mathbb{R}^3$ será definido como sendo um vector de $\mathbb{R}^3$ que goza da propriedade de ser ortogonal ao plano gerado pelos vectores dados (quando esses vectores gerarem um plano).

Definição 5.8. **Produto vectorial**

Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Definimos *produto vectorial*, ou *produto externo*, de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$, como sendo o seguinte vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)\\ &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)\\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3, \qquad (5.20)\end{aligned}$$

onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ designam os três vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Por analogia com o desenvolvimento de Laplace para o cálculo do determinante ao longo da primeira linha, é frequente escrever a igualdade (5.20) na forma:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \qquad (5.21)$$

A expressão (5.21) formalmente não tem sentido (não faz sentido calcular um determinante de uma matriz cujas entradas da primeira linha são vectores e as outras entradas números) mas funciona como uma mnemónica para a expressão que define o produto vectorial.

Relembrando que o determinante de uma matriz muda de sinal quando se trocam duas linhas da matriz, quer usando (5.21) ou (5.20), temos: $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$. Ou seja, o produto vectorial é *anticomutativo*.

Definição 5.9. **Produto misto**

Sendo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$, define-se *produto misto*, ou produto *triplo*, de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ (por esta ordem) por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= \langle \mathbf{x} \,,\, \mathbf{y} \times \mathbf{z} \rangle\\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1).\end{aligned}$$

Como consequência imediata do desenvolvimento de Laplace (ao longo da primeira linha) para o cálculo de um determinante, e da definição de produto vectorial, o produto misto de três vectores é exactamente igual ao determinante de uma matriz cujas linhas são os vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$. Isto é,

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{5.22}$$

Das propriedades do determinante de uma matriz, resultam imediatas as seguintes propriedades do produto misto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) &= \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \\ &= -\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{z}) = -\mathbf{x} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{y}) = -\mathbf{z} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Uma propriedade importante do produto vectorial é a seguinte:

O vector $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ é ortogonal a $\mathbf{x}$ e a $\mathbf{y}$. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes, o vector $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é perpendicular ao plano gerado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Para mostrar a afirmação anterior, basta notar que $\langle \mathbf{x} \, , \mathbf{x} \times \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ corresponde ao determinante de uma matriz com duas linhas iguais, portanto igual a zero. Da mesma forma $\langle \mathbf{y} \, , \mathbf{x} \times \mathbf{y} \rangle = 0$.

Exercício 5.14. Use as propriedades do determinante de uma matriz para mostrar:

a) $(\mathbf{y} + \mathbf{w}) \times \mathbf{x} = (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{x})$.
b) $k(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (k\mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (k\mathbf{y})$, com k escalar.
c) $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

▲

Usemos as propriedades do Exercício 5.14 para mostrar a igualdade

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}) \times \mathbf{y}. \tag{5.23}$$

Da definição de projecção ortogonal, $\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \dfrac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}\mathbf{y}$, e das propriedades a)-c) do exercício anterior, tem-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}) \times \mathbf{y} &\overset{\text{a), b)}}{=} \mathbf{x} \times \mathbf{y} - (\operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}) \times \mathbf{y} \\ &\overset{\text{b)}}{=} \mathbf{x} \times \mathbf{y} - \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}(\mathbf{y} \times \mathbf{y}) \\ &\overset{\text{c)}}{=} \mathbf{x} \times \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Exercício 5.15. Mostre que para os vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ da base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tem:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$$

▲

Exercício 5.16. Mostre as propriedades seguintes e conclua que o produto vectorial não é associativo.

a) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}\,, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}\,, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z}$.
b) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \langle \mathbf{x}\,, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{y}\,, \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}$.

▲

Para além das propriedades que enunciámos nos exercícios anteriores, referimos em seguida uma propriedade essencial na interpretação geométrica do produto vectorial.

Proposição 5.5. Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ verifica-se a *identidade de Lagrange*:

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \left(\langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} \rangle\right)^2.$$

Além disso, a igualdade anterior é equivalente a

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Demonstração. Para mostrar a identidade de Lagrange[6] basta calcular $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2$ e $\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} \rangle)^2$. Para tal, considere-se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

e

$$\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \left(\langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} \rangle\right)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2.$$

Desenvolvendo os membros direitos das duas expressões anteriores e comparando os resultados, confirma-se a igualdade dessas expressões.

[6] Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813), matemático francês.

Da identidade de Lagrange e da definição de ângulo entre os vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, resulta

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle)^2 &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\cos^2\theta = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1-\cos^2\theta)\\ &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta.\end{aligned}$$

$\square$

Nota 33. *A igualdade $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$ diz-nos que se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vectores não nulos, o vector $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ é nulo se e só se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Ou seja, para $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ e $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, o vector $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \mathbf{0}$ se e só se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ têm a mesma direcção (isto é, se e só se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são colineares).*

Exercício 5.17. Mostre que o determinante de uma matriz A cujas linhas são os vectores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$, por esta ordem, é sempre positivo, nomeadamente $\det(A) = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2$. Deduza ainda que se as linhas de A são os vectores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, por esta ordem, então $\det(A)$ é negativo.
Sugestão: Use a expressão (5.22). ▲

Vimos que $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é ortogonal ao plano gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e que o seu comprimento é dado pela identidade de Lagrange. No caso de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ serem linearmente independentes, os três vectores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ são linearmente independentes e podemos usar estes vectores para definir um referencial em $\mathbb{R}^3$. O sentido de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ depende da orientação desse referencial.

A chamada regra da mão direita[7] é um processo prático para decidir a orientação positiva de um referencial em $\mathbb{R}^3$. Um terno ordenado $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ de vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ diz-se um *triedro directo* , ou uma *base positiva* de $\mathbb{R}^3$, se está de acordo com a regra da mão direita, isto é, se se pode dispor os dedos indicador e médio da mão direita por forma a que apontem, respectivamente, no sentido de $\mathbf{u}$ e de $\mathbf{v}$, então o dedo polegar apontará no sentido de $\mathbf{w}$.

Considerando os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$, são exemplos de triedros directos:

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\,,\quad (\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)\,,\quad (\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\,.$$

É fácil verificar que uma base ordenada $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)$, formada por vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$, é um triedro directo se e só se o determinante da matriz cujas colunas são os vectores $\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k$, por esta ordem, tiver o valor 1. Fixada uma

[7] A regra da mão direita foi introduzida pelo engenheiro electrónico e físico inglês, Sir John Ambrose Fleming (1849 – 1945).

base ordenada $B = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ qualquer outra base ordenada $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de $\mathbb{R}^3$ está relacionada com a base B através da matriz de mudança de base M. É natural considerar-se que uma base ordenada $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é positiva se $\det M > 0$, e que é negativa se $\det M < 0$.

Definição 5.10. Triedro directo
Uma base ordenada $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de $\mathbb{R}^3$, diz-se um *triedro directo* ou uma *base positiva*, se o determinante da matriz cujas colunas (ou linhas) são os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, por esta ordem, é positivo.

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$, o vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, pelo que $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Seja A a matriz cujas colunas são os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, por esta ordem. Da expressão (5.22), tem-se que $\det A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2$, e portanto $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ é uma base positiva.

Interpretação geométrica do determinante de matrizes 3×3

Nesta secção relacionamos os conceitos de produto vectorial e produto misto com os conceitos de área e volume da geometria elementar.

Considere-se um paralelogramo definido por dois vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, como se indica na Figura 5.8.

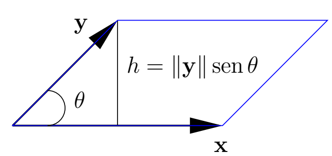


Figura 5.8: Paralelogramo definido por dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ fazendo um ângulo θ entre si.

Tomando como base do paralelogramo o lado definido por $\mathbf{x}$, a altura h do paralelogramo é igual à norma do vector $(\mathbf{y} - \operatorname{proj}_{\mathbf{x}} \mathbf{y})$. Como exercício pode verificar que

$$h = \|\mathbf{y} - \operatorname{proj}_{\mathbf{x}} \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

A área $\mathcal{A}$ do paralelogramo é igual ao comprimento da base vezes a altura. Isto é,

$$\mathcal{A} = \|\mathbf{x}\| h.$$

Logo,

$$\mathcal{A} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \operatorname{sen}\theta. \tag{5.24}$$

Usando a identidade de Lagrange (Proposição 5.5), concluimos que a norma do produto vectorial de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$ é igual à área do paralelogramo definido por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Note-se que o ângulo θ varia entre 0 e π, e portanto $\operatorname{sen}\theta > 0$.

Exercício 5.18. Mostre que o valor dado pela fórmula (5.24) não depende da aresta que se escolhe para base do paralelogramo. ▲

A área $\mathcal{A}$ de um paralelogramo definido por dois vectores não nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^3$ é igual à norma do produto vectorial de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$:

$$\mathcal{A} = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|.$$

A área de um paralelogramo definido por dois vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0)$, do plano xy, de $\mathbb{R}^3$ é

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|(0, 0, x_1y_2 - x_2y_1)\| = \sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} = |x_1y_2 - x_2y_1| \\ = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right)\right|.\end{aligned}$$

Exercício 5.19. Determine a área do triângulo cujos vértices são $V_1 = (1, -1, 2)$, $V_2 = (0, 4, 3)$ e $V_3 = (1, 0, 1)$. ▲

Consideremos agora o paralelipípedo definido pelos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ (Figura 5.9).

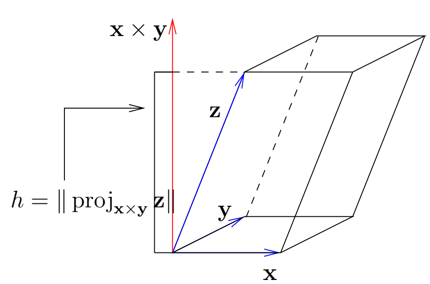


Figura 5.9: Paralelipípedo definido pelos vectores $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

O volume deste paralelipípedo é igual à área da base vezes a altura h. Tomando como base o paralelogramo definido por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, a área da base é igual a $\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|$, enquanto que a altura é igual à norma da projecção ortogonal de $\mathbf{z}$ sobre $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ (o vector $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ é ortogonal ao plano gerado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$). Assim, o volume $\mathcal{V}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} = \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|h &= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|\|\operatorname{proj}_{\mathbf{x}\times\mathbf{y}}\mathbf{z}\| \\
&= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|\left\|\frac{\langle\mathbf{x}\times\mathbf{y}\,,\,\mathbf{z}\rangle}{\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2}(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\right\| \\
&= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|\frac{|\langle\mathbf{x}\times\mathbf{y}\,,\,\mathbf{z}\rangle|}{\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2}\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\| \qquad \text{(ver Exercício 5.4)} \\
&= |\langle\mathbf{x}\times\mathbf{y}\,,\,\mathbf{z}\rangle| = |\mathbf{z}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})|\,.
\end{aligned}$$

Deixamos como exercício verificar que o volume de um paralelipípedo é sempre dado pela expressão acima, independentemente de qual das faces se considera como base.

Conclui-se que o volume de um paralelipípedo gerado por três vectores linearmente independentes $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^3$, é igual ao módulo do determinante da matriz cujas linhas são os vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$. Ou seja,

$$\mathcal{V} = |\mathbf{z}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})| = \left|\det\begin{bmatrix} — & \mathbf{x} & — \\ — & \mathbf{y} & — \\ — & \mathbf{z} & — \end{bmatrix}\right|.$$

Na igualdade anterior usou-se o facto do produto misto de três vectores ser igual ao determinante da matriz 3×3 cujas linhas são esses vectores. Resumindo:

- A área do paralelogramo definido pelos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ é
$$\mathcal{A} = \left|\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right|.$$
- O volume do paralelipípedo definido pelos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ é
$$\mathcal{V} = \left|\det\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}\right|.$$

Para terminar esta secção refira-se que as noções de paralelipípedo e de volume em $\mathbb{R}^3$ podem ser generalizadas a $\mathbb{R}^n$. Um paralelipípedo em $\mathbb{R}^3$ definido pelos vectores linearmente independentes $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ é o conjunto de todas as combinações lineares destes três vectores com coeficientes variando no intervalo $[0, 1]$. Define-se um paralelipípedo em $\mathbb{R}^n$, gerado pelos vectores linearmente independentes $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u}_n$, como sendo o conjunto:

$$\{\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n : \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq \alpha_n \leq 1\}.$$

A noção de volume de um paralelipípedo é generalizada de forma óbvia sob a designação de *medida*. A medida $\mathcal{M}$ de um paralelipípedo de $\mathbb{R}^n$ é o módulo do determinante da matriz cujas linhas (ou colunas) são n vectores $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u}_n$, geradores do paralelipípedo. Isto é,

$$\mathcal{M} = \left| \det \begin{bmatrix} - & \mathbf{u}_1 & - \\ - & \mathbf{u}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{u}_n & - \end{bmatrix} \right|.$$

5.7 Aplicações

Nesta secção abordamos as seguintes aplicações de conceitos estudados neste capítulo: (i) equações de rectas e planos em $\mathbb{R}^3$; (ii) mínimos quadrados; (iii) transformada de Fourier discreta. No cerne destas aplicações estão várias propriedades, anteriormente estudadas, de um espaço linear munido de um produto interno.

5.7.1 Equações de rectas e planos em $\mathbb{R}^3$

Comecemos por relembrar que no Capítulo 1 estabelecemos uma correspondência biunívoca entre pontos e vectores do espaço tridimensional. Esta correspondência associa a um ponto P do espaço o vector de posição $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$, isto é, o vector aplicado na origem O. As coordenadas do ponto P são as coordenadas do respectivo vector de posição $\mathbf{p}$.

No Capítulo 3, vimos que em $\mathbb{R}^3$ uma recta que passe pela origem, ou um plano que contenha a origem, são subespaços de dimensão, respectivamente, 1 e 2. Isto quer dizer que uma recta que passa pela origem é gerada por um vector $\mathbf{u}$ (não nulo), que determina a direcção da recta, enquanto que um plano que passe pela origem é gerado por dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ linearmente independentes. O conjunto gerado por um vector é o conjunto $\{t\mathbf{u} : \ t \in \mathbb{R}\}$, de todos os múltiplos do vector, enquanto o conjunto gerado por dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é o conjunto de todas as combinações lineares desses vectores, ou seja $\{t\mathbf{u} + s\mathbf{v} : \ t, s \in \mathbb{R}\}$. Assim, uma recta que passa pela origem e tem a direcção do vector $\mathbf{u}$ é o conjunto

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{x} = t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}\right\},$$

e um plano que contém a origem e os vectores (não colineares) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é o conjunto

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{x} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}\right\}.$$

As rectas que não passam pela origem (resp. os planos que não contêm a origem) não são subespaços de $\mathbb{R}^3$, no entanto estas rectas (resp. estes planos) podem ser obtidos por translação de uma recta paralela (resp. um plano paralelo) que passa pela origem. De facto, uma recta que passa por um ponto P_0 e tem a direcção do vector $\mathbf{u}$ é o conjunto dos pontos X tais que os vectores $\overrightarrow{P_0X}$ é colinear com $\mathbf{u}$, isto é, $\overrightarrow{P_0X} = t\mathbf{u}$, com $t \in \mathbb{R}$. Como $\overrightarrow{P_0X} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP_0} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_0$ (ver Capítulo 1, pág. 28), tem-se que a recta que passa por P_0 é o conjunto

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u}, \ t \in \mathbb{R}\} = \mathbf{p}_0 + \mathrm{Span}\{\mathbf{u}\}.$$

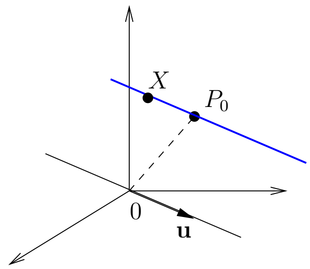
Ou seja, a recta que passa por P_0 e tem a direcção de $\mathbf{u}$ é a translação da recta $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}\}$ pelo vector $\mathbf{p}_0$.

De igual modo, um plano que contém o ponto P_0 pode ser obtido por translação de um plano paralelo que passa na origem, gerado pelos vectores (linearmente independentes) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Ou seja, um plano que contém P_0 e é paralelo ao plano gerado pelos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é o conjunto de pontos

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \ t, s \in \mathbb{R}\} = \mathbf{p}_0 + \mathrm{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}.$$

Na Figura 5.10 ilustram-se as translações de rectas e planos por um vector $\mathbf{p}_0$.

As equações $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ que definem, respectivamente, uma recta e um plano que passam por P_0, são designadas por *equações vectoriais*. Quando nestas equações se explicitam as coordenadas dos vectores envolvidos, essas equações recebem a designação de *equações paramétricas*.



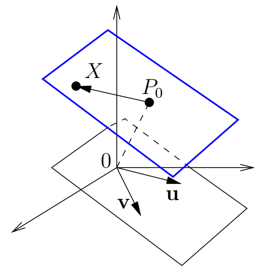


Figura 5.10: Plano e recta que passam por P_0 como translações de um plano e de uma recta que passam pela origem.

- As equações *paramétricas* de uma recta em $\mathbb{R}^3$ que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direcção do vector não nulo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ são:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} \iff \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- As equações *paramétricas* de um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo ao plano gerado pelos vectores linearmente independentes $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ são:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \iff \begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.13.

1. As equações paramétricas de uma recta, com a direcção do vector $\mathbf{u} = (-1, 1, 2)$ e que passa pelo ponto $P_0 = (1, -2, 3)$, são

$$x = 1 - t, \quad y = -2 + t, \quad z = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. As equações paramétricas de um plano que passa pelo ponto $P_0 = (1, -2, 3)$ e é paralelo ao plano gerado pelos vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$, são

$$x = 1 + t + 2s, \quad y = -2 + t, \quad z = 3 + s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

♦

É frequente pretender-se determinar uma equação de um plano conhecendo um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ do plano e uma direcção normal $\mathbf{n} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (observe a Figura 5.11). Dizer que o vector $\mathbf{n}$ é normal ao plano significa que

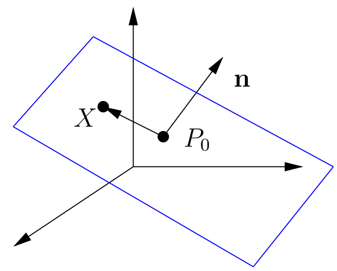


Figura 5.11: O vector $\mathbf{n}$ é normal ao plano que passa por P_0.

qualquer vector do plano é ortogonal a $\mathbf{n}$. A condição do vector genérico $\overrightarrow{P_0X}$ do plano ser ortogonal a $\mathbf{n}$ é traduzida pela equação

$$\langle \overrightarrow{P_0X},\, \mathbf{n} \rangle = 0 \iff \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_0,\, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Em coordenadas, a equação anterior reduz-se a

$$\begin{aligned} \langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\,,\, (a, b, c) \rangle = 0 &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff ax + by + cz = d, \end{aligned}$$

onde $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

Uma *equação cartesiana* de um plano que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular a $\mathbf{n} = (a, b, c)$ é

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$ax + by + cz = d, \qquad \text{com } \; d = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Exemplo 5.14. No Exemplo 5.13 determinámos equações paramétricas de um plano passando pelo ponto $P_0 = (1, -2, 3)$ e contendo os vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$. As equações paramétricas obtidas foram: $x = 1 + t + 2s$, $y = -2 + t$ e $z = 3 + s$.

Eliminando os parâmetros s, t nestas equações (isto é, determinando uma equação que não envolva t e s) podemos determinar uma equação cartesiana do plano. Assim, substituindo os valores $t = y + 2$ e $s = z - 3$ na igualdade para x, obtemos para equação do plano

$$x = 1 + y + 2 + 2z - 6 \Longleftrightarrow x - y - 2z = -3.$$

Esta equação diz-nos que o vector $\mathbf{n} = (1, -1, -2)$ é perpendicular ao plano. Uma vez que são conhecidos dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ geradores do plano, podemos confirmar que $\mathbf{n}$ é normal ao plano calculando o vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ o qual é necessariamente um múltiplo do vector $\mathbf{n}$. Calculando este vector obtemos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, -1, -2)$. ♦

Sabemos que três pontos não colineares, P_0, P_1 e P_2, definem um plano. Para determinar uma equação do plano definido por esses pontos, note-se que os três pontos definem dois vectores (linearmente independentes) do plano, por exemplo, $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$ (veja Figura 5.12). Assim, podemos obter equações paramétricas e cartesianas, para o plano, respectivamente das seguintes equações:

- $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + s(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$.
- $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_0 \,,\, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = 0$.

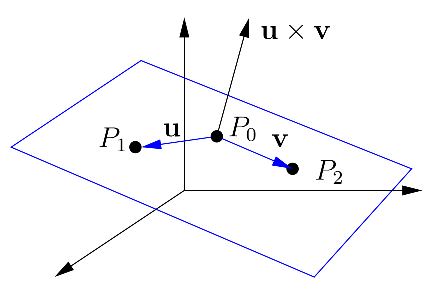


Figura 5.12: o vector $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é normal ao plano que passa por P_0.

Exemplo 5.15. Determinar uma equação cartesiana do plano Π definido pelos pontos $P_0 = (1, -2, 3)$, $P_1 = (0, 3, 0)$ e $P_2 = (-1, 0, 1)$.

Os vectores $\mathbf{u} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (-1, 5, -3)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (-2, 2, -2)$ definem o plano. O vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-4, 4, 8)$ é ortogonal a Π. Logo, sendo $X = (x, y, z)$

um ponto genérico de Π, uma equação cartesiana é

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}-\mathbf{p}_0\,,\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}\rangle = 0 &\iff \langle (x-1, y+2, z-3)\,,\,(-4,4,8)\rangle = 0 \\ &\iff -4x+4y+8z = 12. \end{aligned}$$

A equação obtida é equivalente à equação do plano do Exemplo 5.14 (os três pontos P_0, P_1 e P_2 pertencem a esse plano). ♦

Vejamos agora como obter equações cartesianas da recta que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e possui a direcção do vector $\mathbf{u}$. Esta recta é a translação de uma recta paralela que passa na origem, ou seja, é a soma $\mathbf{p}_0 + \mathrm{Span}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{p}_0 + S$. O complemento ortogonal do subespaço S é um plano, gerado por dois vectores (linearmente independentes) $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, e portanto a recta é o conjunto de pontos $X = (x, y, z)$ tais que $\overrightarrow{P_0X}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{w}$. Assim, a recta é o conjunto de pontos X que satisfazem as equações:

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{P_0X}\,,\,\mathbf{v}\rangle & = \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), \mathbf{v}\rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{P_0X}\,,\,\mathbf{w}\rangle & = \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), \mathbf{w}\rangle = 0. \end{cases}$$

Calculando os produtos internos nas expressões anteriores, temos

Uma recta que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular aos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tem *equações cartesianas*:

$$\begin{cases} v_1(x-x_0) + v_2(y-y_0) + v_3(z-z_0) = 0 \\ w_1(x-x_0) + w_2(y-y_0) + w_3(z-z_0) = 0. \end{cases}$$

Estas equações reescrevem-se na forma

$$\begin{cases} v_1x + v_2y + v_3z = d_1 \\ w_1x + w_2y + w_3z = d_2. \end{cases}$$

Exemplo 5.16. Determinemos equações cartesianas da recta que passa por $P_0 = (1, -2, 3)$ e por $P_1 = (2, -3, 1)$. Esta recta tem a direcção do vector $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (1, -1, -2)$, ou seja, a recta é o conjunto de pontos $\mathbf{p}_0 + \mathrm{Span}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{p}_0 + S$. O complemento ortogonal $S^\perp$ é o conjunto dos vectores (a, b, c) ortogonais a $\mathbf{u}$, isto é,

$$\langle (a,b,c)\,,\,(1,-1,-2)\rangle = 0 \iff a-b-2c = 0 \iff a = b+2c.$$

Assim,

$$S^\perp = \{(b+2c, b, c):\ b, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}\,\{(1,1,0), (2,0,1)\}\,.$$

Logo, tomando $\mathbf{v} = (1,1,0)$ e $\mathbf{w} = (2,0,1)$ obtemos para equações cartesianas da recta:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_0, \mathbf{v} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_0, \mathbf{w} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + z = 5. \end{cases}$$

No Exemplo 5.13 determinámos equações paramétricas da recta que passa pelo ponto P_0 e tem a direcção do vector $\mathbf{u}$. Eliminando o parâmetro t nessas equações ($x = 1 - t, y = -2 + t$ e $z = 3 + 2t$) obtêm-se equações cartesianas para a recta, equivalentes às equações acima. ♦

Vimos que uma recta de $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de pontos $\mathbf{p}_0 + \operatorname{Span}\{\mathbf{u}\}$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$), enquanto que um plano é o conjunto $\mathbf{p}_0 + \operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes. Ou seja, uma recta é a soma de $\mathbf{p}_0$ com um subespaço S de dimensão 1, e um plano é a soma de $\mathbf{p}_0$ com um subespaço S de dimensão 2.

No caso da recta $\mathbf{p}_0 + S$, a dimensão de $S^\perp$ é dois, e portanto número de equações cartesianas necessárias para definir a recta é igual a 2 (estas equações descrevem o conjunto de vectores X tais que $\overrightarrow{P_0X}$ é ortogonal a cada vector de uma base de $S^\perp$). No caso de um plano $\mathbf{p}_0 + S$, a dimensão de $S^\perp$ é 1, e portanto o número de equações (cartesianas) que define o plano é 1.

Estas noções podem ser generalizadas a espaços lineares de dimensão superior a 3 da seguinte forma:

Definição 5.11. Chama-se *plano de dimensão k*, ou *plano-k* de $\mathbb{R}^n$, a qualquer subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ da forma $\mathbf{p}_0 + S$, onde $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^n$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Diz-se que U é obtido de S por translação segundo o vector $\mathbf{p}_0$. O subespaço S é designado por *subespaço director*, ou *subespaço das direcções*, de U, e $\mathbf{p}_0$ é designado por *vector de translação*.

Um plano-1 é habitualmente designado por *recta*, um plano-2 por *plano*, e um plano-$(n-1)$ de $\mathbb{R}^n$ por *hiperplano*.

Da discussão efectuada para o caso de rectas e planos de $\mathbb{R}^3$, podemos facilmente concluir que um plano-k de $\mathbb{R}^n$, $U = \mathbf{p}_0 + S$, é definido por um sistema de $n - k$ equações lineares da forma $\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_0, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, onde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-k}\}$ é uma base para o complemento ortogonal $S^\perp$ do subespaço S.

Distância de um ponto a um plano de $\mathbb{R}^3$

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ um plano $\mathcal{P}$ que passa por P_0, e um ponto Q não pertencente (em geral) ao plano. Pretende-se calcular a distância de Q ao plano $\mathcal{P}$. Geometricamente, esta distância é a medida do segmento de recta de extremos Q

e R, onde R é o ponto do plano que se obtém projectando ortogonalmente Q sobre $\mathcal{P}$ (observe a Figura 5.13).

Se $\mathcal{P} = \mathbf{p}_0 + S$, onde S é um subespaço de dimensão dois de $\mathbb{R}^3$, a distância de Q ao plano $\mathcal{P}$ é a distância $\mathcal{D}$ de $\overrightarrow{P_0Q}$ ao vector de S que lhe está mais próximo, ou seja, a distância de $\overrightarrow{P_0Q}$ ao vector $\operatorname{proj}_S \overrightarrow{P_0Q}$. Usando a Definição 5.2 e o Teorema da decomposição ortogonal, tem-se

$$\mathcal{D} = \operatorname{dist}\left(\overrightarrow{P_0Q}, \operatorname{proj}_S \overrightarrow{P_0Q}\right) = \|\overrightarrow{P_0Q} - \operatorname{proj}_S \overrightarrow{P_0Q}\| = \|\operatorname{proj}_{S^\perp} \overrightarrow{P_0Q}\|.$$

Como a dimensão de $S^\perp$ é igual a 1, a projecção $\operatorname{proj}_{S^\perp} \overrightarrow{P_0Q}$ reduz-se à projecção de $\overrightarrow{P_0Q}$ sobre um vector $\mathbf{n}$ perpendicular ao plano. Isto é, a distância de Q ao plano $\mathcal{P} = \mathbf{p}_0 + S$ é dada por

$$\mathcal{D} = \|\operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_0Q}\|.$$

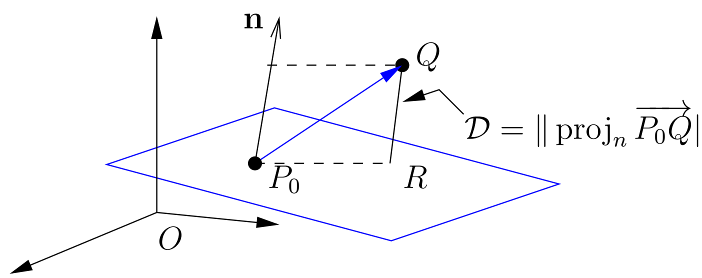


Figura 5.13: Sendo $\mathbf{n}$ um vector normal ao plano, $\mathcal{D}$ designa a distância de Q ao plano.

Suponha-se que é conhecida uma equação cartesiana $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$ de um plano que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, e que se pretende determinar a distância do ponto $Q = (x_1, y_1, z_1)$ a este plano. Da equação cartesiana do plano sabemos que $\mathbf{n} = (a, b, c)$ é normal ao plano. Por conveniência de cálculo, consideremos a normal unitária $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\mathbf{n}$.

A distância do ponto $Q = (x_1, y_1, z_1)$ ao plano é a norma da projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{P_0Q}$ sobre $\hat{\mathbf{n}}$. Ou seja, a distância $\mathcal{D}$ pretendida é

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \| \operatorname{proj}_{\hat{\mathbf{n}}} \overrightarrow{P_0Q} \| = \| \langle \hat{\mathbf{n}}\,,\, \mathbf{q}-\mathbf{p}_0 \rangle \hat{\mathbf{n}} \| = | \langle \hat{\mathbf{n}}\,,\, \mathbf{q}-\mathbf{p}_0 \rangle | \, \|\hat{\mathbf{n}}\| \\ &= | \langle \hat{\mathbf{n}}\,,\, \mathbf{q}-\mathbf{p}_0 \rangle | = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \, | \langle (a,b,c)\,,(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0) \rangle | \\ &= \frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.17. Considere-se o plano $\mathbf{p}_0 + \operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, com $\mathbf{p}_0 = (1,-2,3)$, $\mathbf{u} = (-1,5,-3)$ e $\mathbf{v} = (2,2,-2)$. Determinemos a distância do ponto $Q = (1,0,1)$ a este plano. Esta distância $\mathcal{D}$ é igual à norma da projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{P_0Q} = \mathbf{q} - \mathbf{p}_0 = (0,2,-2)$ sobre um vector $\mathbf{n}$ ortogonal ao plano. Podemos tomar para $\mathbf{n}$ o vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-4,4,8)$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \| \operatorname{proj}_{(-4,4,8)} (0,2,-2) \| &= \left\| \frac{\langle (-4,4,8)\,,\,(0,2,-2) \rangle}{\|(-4,4,8)\|^2} (-4,4,8) \right\| \\ &= \frac{|8-16|}{\|(-4,4,8)\|} = \frac{8}{\sqrt{96}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

Como exercício, confirme o resultado obtido calculando a distância $\mathcal{D}$ da seguinte forma: (i) determine uma recta r que passe por Q e seja perpendicular ao plano; (ii) determine o ponto R de intersecção da recta r com o plano; (iii) determine o comprimento do segmento de recta de extremos Q e R. ♦

5.7.2 Mínimos quadrados

É frequentemente necessário determinar uma curva "bem ajustada" a um conjunto de dados obtidos experimentalmente. Por exemplo, suponha que como resultado de uma certa experiência se obteve a seguinte tabela de dados:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \tag{5.25}$$

Os dados (x_i, y_i) podem representar-se por pontos do plano. Pretende-se encontrar uma curva $y = f(x)$ que "melhor aproxima" os dados (pontos) obtidos. Na Figura 5.14 indicam-se algumas possibilidades.

Comecemos por analisar o caso em que se pretende determinar uma recta de equação $y = ax + b$ que se ajuste bem aos dados da Tabela (5.25). Em Estatística,

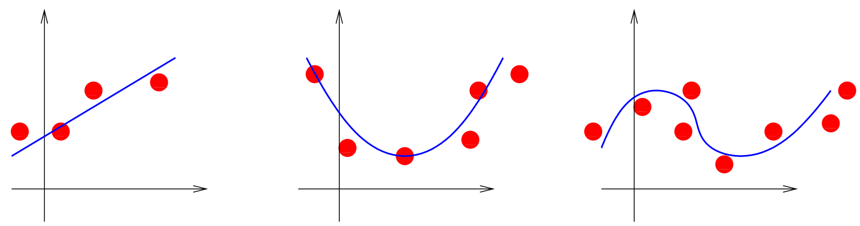


Figura 5.14: Ajuste de curvas a um conjunto de pontos

este problema é conhecido sob a designação de *regressão linear*. Se os pontos (x_i, y_i) forem colineares, os coeficientes a e b de $y = a + bx$ satisfazem o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} y_1 = a + bx_1 \\ y_2 = a + bx_2 \\ \qquad \vdots \\ y_n = a + bx_n \end{cases} \iff \quad \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \tag{5.26}$$

com

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}.$$

Se os pontos (x_i, y_i) não são colineares (como no caso da Figura 5.14-(a)), o sistema (5.26) é impossível. Quando o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ é impossível, podemos procurar um vector $\hat{\mathbf{x}}$ de modo que a distância de $A\hat{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{y}$ seja a menor possível. A distância que aqui consideramos é a distância definida pelo produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ (ver Definição 5.2). Pretendemos pois encontrar um vector $\hat{\mathbf{x}}$ tal que $A\hat{\mathbf{x}}$ seja uma (boa) aproximação do vector $\mathbf{y}$.

Definição 5.12. Seja A uma matriz $n \times p$ e $\mathbf{y}$ um vector (fixo) de $\mathbb{R}^n$. Uma *solução de mínimos quadrados* do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ é um vector $\hat{\mathbf{x}}$ de $\mathbb{R}^p$ tal que

$$\|\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|, \tag{5.27}$$

para todo o $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^p$.

Geometricamente, determinar uma solução de mínimos quadrados $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{a}, \hat{b})$ do sistema (5.26) é obter a recta $y = \hat{a} + \hat{b}x$ que melhor aproxima os dados (ver Figura 5.14-(a)).

A designação "mínimos quadrados" (ou *"least-squares"* em inglês) está relacionada com o facto de $\|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|^2$ ser uma soma de quadrados e de se pretender minimizar esta quantidade (ou, equivalentemente, minimizar $\|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|$).

Para encontrar uma solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ iremos aplicar alguns dos resultados de capítulos anteriores. Relembremos alguns resultados básicos essenciais:

(i) Dado um vector $\mathbf{x}$, a expressão $A\mathbf{x}$ é uma combinação linear das colunas de A, ou equivalentemente $A\mathbf{x}$ pertence ao espaço das colunas de A. Isto é, $A\mathbf{x} \in EC(A)$.

(ii) A inequação (5.27) significa que $A\hat{\mathbf{x}}$ está mais próximo de $\mathbf{y}$ que qualquer outro vector do espaço das colunas de A. Pelo Teorema da melhor aproximação (Teorema 5.4, pág. 262), o vector de $EC(A)$ mais próximo de $\mathbf{y}$ é a projecção ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $EC(A)$. Assim,

$$A\hat{\mathbf{x}} = \text{proj}_{EC(A)}\, \mathbf{y}. \tag{5.28}$$

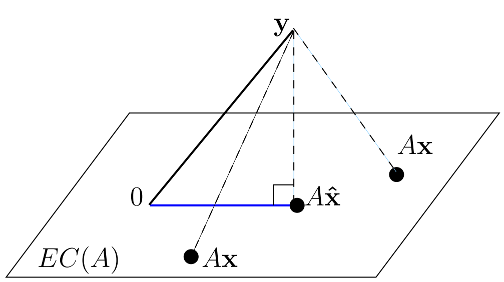


Figura 5.15: O vector $A\hat{\mathbf{x}}$ está mais próximo de $\mathbf{y}$ do que qualquer outro vector $A\mathbf{x} \in EC(A)$.

Nota 34. *A equação* (5.28) *é sempre possível visto que* $A\hat{\mathbf{x}}$ *e* $\text{proj}_{EC(A)}\, \mathbf{y}$ *pertencem ao espaço das colunas de* A.

O Teorema da decomposição ortogonal (pág. 258) diz-nos que qualquer vector de um espaço linear pode escrever-se (de forma única) como a soma da projecção ortogonal desse vector sobre um subespaço com a projecção ortogonal sobre o seu complemento ortogonal. Assim,

$$\mathbf{y} = \mathrm{proj}_{EC(A)}\,\mathbf{y} + \mathrm{proj}_{(EC(A))^\perp}\,\mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{y} - \mathrm{proj}_{EC(A)}\,\mathbf{y} \overset{(5.28)}{=} \mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}} \in EC(A)^\perp.$$

Logo, o vector $(\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}})$ é um vector do complemento ortogonal do espaço das colunas de A. Como o complemento ortogonal do espaço das colunas de uma matriz é o núcleo da sua transposta (relembre a igualdade (5.18)), temos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}) \in (EC(A))^\perp \iff & \quad (\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}) \in N(A^T) \iff A^T(\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \\ \iff & \quad A^T\mathbf{y} - A^TA\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \iff A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Podemos pois concluir que uma solução de mínimos quadrados $\hat{\mathbf{x}}$ satisfaz a seguinte equação.

Equação Normal

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}. \tag{5.30}$$

A equação (5.30) é designada por *equação normal* para o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Acabámos de mostrar que uma solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ satisfaz a equação normal. O resultado recíproco é igualmente válido. De facto, se $\hat{\mathbf{x}}$ é solução da equação normal, tem-se $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y}$. Da equivalência (5.29), resulta que $(\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}) \in (EC(A))^\perp$. Logo, da unicidade da decomposição ortogonal, temos que $A\hat{\mathbf{x}}$ é necessariamente a projecção ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $EC(A)$. Ou seja, que $\hat{\mathbf{x}}$ é uma solução de mínimos quadrados. No teorema seguinte enunciamos o que acabámos de provar.

Teorema 5.7. O conjunto das soluções de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ coincide com o conjunto (não vazio) das soluções da equação normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$.

Exemplo 5.18. Suponhamos que se fizeram as seguintes observações:

x	1	2	3
y	1	2	2

Estas observações correspondem a três pontos no plano, representados na Figura 5.16. Vemos claramente que não existe nenhuma recta $y = a + bx$ que passe

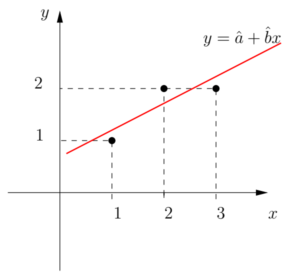


Figura 5.16: Melhor aproximação de mínimos quadrados do Exemplo 5.18.

por estes três pontos. Esta afirmação é equivalente a dizer que é impossível o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{5.31}$$

Pretende-se determinar a recta $y = \hat{a} + \hat{b}x$ que melhor se ajusta aos pontos observados. Isto é, pretende-se determinar um vector $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ que seja uma solução de mínimos quadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Usando o Teorema 5.7, a equação normal é

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y} \iff \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz $A^T A$ é invertível, o sistema de equações normais tem solução única dada por $\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{y}$. Ou seja,

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, a recta de mínimos quadrados $y = \hat{a} + \hat{b}x$ é

$$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x.$$

♦

Sendo $\hat{\mathbf{x}}$ uma solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, o vector $A\hat{\mathbf{x}}$ é uma aproximação de $\mathbf{y}$. Esta aproximação é a melhor aproximação, no sentido em que o *erro de mínimos quadrados*, $\|\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}\|$, é o menor possível. O vector $\mathbf{d} = \mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}$ é denominado por *vector dos desvios*, e portanto o erro de mínimos quadrados é a norma do vector dos desvios.

Para o Exemplo 5.18 calculemos o vector dos desvios, bem como o respectivo erro de mínimos quadrados. Recorde-se que a solução de mínimos quadrados obtida é $\hat{\mathbf{x}} = (2/3, 1/2)$ e que $\mathbf{y} = (1, 2, 2)$. Logo, o vector dos desvios é

$$\mathbf{d} = \mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \\ \frac{5}{3} \\ \\ \frac{13}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \\ \frac{1}{3} \\ \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

O erro de mínimos quadrados é $\|\mathbf{d}\| = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. Na Figura 5.17 encontram-se representados os desvios, d_1, d_2 e d_3, ou seja as componentes do vector $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$.

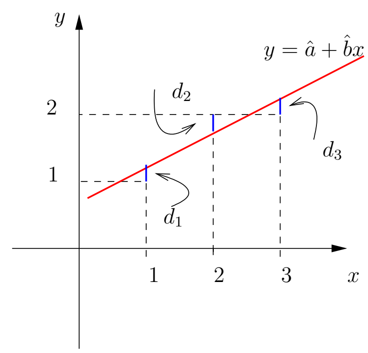


Figura 5.17: Desvios para o Exemplo 5.18.

No Exemplo 5.18 o problema de mínimos quadrados possui solução única, o que nem sempre se verifica. Coloca-se naturalmente a questão de saber em que condições um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ admite uma única solução de mínimos quadrados. A equação normal é um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes $A^T A$ é quadrada, portanto a unicidade de solução de mínimos quadrados é equivalente à existência de inversa da matriz $A^T A$. O resultado que se segue fornece um critério para a unicidade da solução de mínimos quadrados em termos da matriz A.

Teorema 5.8. A matriz $A^T A$ é invertível se e só se as colunas de A são linearmente independentes. Neste caso, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tem solução de mínimos quadrados única, dada por

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y}.$$

Demonstração. Quando a matriz $A^T A$ é invertível, da equação normal segue que a solução de mínimos quadrados é dada pela expressão do enunciado. Falta pois mostrar que a matriz $A^T A$ é invertível se e só se as colunas de A são linearmente independentes. A prova deste resultado será realizada em dois passos: (i) mostrar que o núcleo de A é igual ao núcleo de $A^T A$; (ii) usar (i) para provar o resultado.

(i) Mostrar que $N(A) = N(A^T A)$.

Se $\mathbf{x}$ pertence a $N(A)$, isto é $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o vector $\mathbf{x}$ pertence ao núcleo de $A^T A$, já que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Logo, $N(A) \subset N(A^T A)$.

Para a implicação recíproca, suponha-se agora que $\mathbf{x} \in N(A^T A)$, isto é, $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Multiplicando esta igualdade por $\mathbf{x}^T$, obtém-se

$$A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Porém,

$$\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow (A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \|A\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in N(A).$$

Logo, $N(A^T A) \subset N(A)$. Conclui-se portanto que $N(A) = N(A^T A)$.

(ii) Relembre que é condição necessária e suficiente para que uma matriz A tenha colunas linearmente independentes, que a única solução do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja a solução nula (ver Proposição 3.14, pág. 152). Assim, a matriz A tem colunas linearmente independentes se e só se $N(A) = \{\mathbf{0}\}$. Como $N(A) = N(A^T A)$, as colunas de $A^T A$ são linearmente independentes se e só se as colunas de A são linearmente independentes.

Além disso, como a matriz $A^T A$ é quadrada, a independência linear das suas colunas é equivalente a dizer que $A^T A$ é invertível. A matriz $A^T A$ é a matriz dos coeficientes do sistema de equações normais, logo a equação normal tem solução única se e só se a matriz $A^T A$ é invertível. $\square$

Nota 35. *No caso de A ser uma matriz quadrada invertível, a solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ reduz-se a $\hat{\mathbf{x}} = A^{-1}(A^T)^{-1}A^T\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{y}$ (usando o Teorema 5.8). Neste caso, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ é possível e a solução de mínimos quadrados coincide com a solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.*

A técnica descrita para ajustar uma recta a um conjunto de dados generaliza-se facilmente quando a curva é definida por um polinómio (como nos casos (b) e (c) da Figura 5.14). Por exemplo, suponhamos que se pretende determinar o polinómio $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ que melhor se ajusta aos dados da seguinte tabela:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Substituindo em $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ os n valores de x e de y tabelados, obtemos n equações lineares:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_kx_1^k = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_kx_2^k = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_kx_n^k = y_n \end{cases} \iff A\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \text{com } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}.$$

Resolvendo como anteriormente a equação normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$, determinamos os coeficientes a_i do polinómio de mínimos quadrados.

Exemplo 5.19. Nos primeiros 5 meses do ano, as vendas (em milhares de euros) de uma certa empresa foram: 2, 2.2, 2.6, 3.2 e 4. Marcámos estes dados no gráfico que apresentamos na Figura 5.18. A representação gráfica destes dados sugere que as vendas podem ser bem aproximadas por um polinómio de grau 2.

Assim, pretende-se determinar a parábola $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ que melhor se ajusta aos dados, com a finalidade de usarmos esta função para estimar qual o volume de vendas que a empresa irá realizar no último mês do ano (isto é, determinar o valor de $y(12)$).

Vamos portanto determinar a aproximação de mínimos quadrados do sistema

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 2.2 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 2.6 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 3.2 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

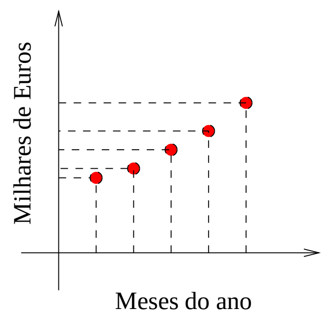


Figura 5.18: Dados do Exemplo 5.19.

com $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & 2.2 & 2.6 & 3.2 & 4 \end{bmatrix}^T$. A equação normal é

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y} \iff \begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 47 \\ 185.4 \end{bmatrix}.$$

A solução de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ é

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

O polinómio procurado é portanto $y(x) = 2 - 0.1x + 0.1x^2$. Assim, prevê-se que as vendas da empresa no último mês do ano sejam de $y(12) = 15.2$ mil euros.

♦

Factorização QR e mínimos quadrados

A decomposição QR de uma matriz é um recurso computacional frequentemente utilizado na resolução de problemas de mínimos quadrados. Esta decomposição apresenta vantagens computacionais, em particular nos casos em que o cálculo de $A^T A$ ou da sua inversa não são aconselháveis, por exemplo devido a propagação de erros de arredondamento. Fazemos por isso uma referência breve à forma como a decomposição QR é utilizada na resolução da equação normal. Relembremos o Teorema 5.6 que diz que uma matriz real A com colunas linearmente independentes admite uma factorização (única) na forma $A = QR$, onde Q é uma matriz que verifica $Q^T Q = I$ e R é uma matriz triangular superior invertível.

Considere-se uma matriz A com colunas linearmente independentes, e o problema de mínimos quadrados modelado pelo sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Como as colunas de A são linearmente independentes, a equação normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$ tem solução única e a matriz A admite uma factorização QR. Aplicando a factorização $A = QR$ à matriz A^TA, temos

$$A^TA = (QR)^T(QR) = R^T \underbrace{Q^TQ}_{I} R = R^TR.$$

Como a matriz R^T é não singular (já que R é não singular), a equação normal pode reescrever-se na forma:

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{y} \Longleftrightarrow R^TR\mathbf{x} = R^TQ^T\mathbf{y} \Longleftrightarrow R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{y}.$$

A equação normal reduz-se portanto ao sistema $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{y}$, cuja matriz dos coeficientes é uma matriz triangular superior. Logo, a solução deste sistema pode obter-se facilmente por substituição regressiva.

5.7.3 Transformada de Fourier discreta

Os métodos matemáticos adequados ao tratamento de sinais (por exemplo, sinais de audio ou imagem) fazem parte da Análise de Fourier[8]. Nesta secção abordamos o assunto de uma forma sumária, e sob o ponto de vista da álgebra linear.

Supõe-se que o sinal é representado por uma função real de que se conhece apenas um conjunto finito de valores. Pretende-se reconstruir o sinal (contínuo) através da sua amostra discreta. Para o efeito iremos aproximar a função que representa o sinal por um polinómio trigonométrico, isto é uma combinação linear de senos e cosenos, sendo os coeficientes desta combinação linear as incógnitas a determinar. Tal processo conduz-nos à resolução de um sistema linear cuja matriz dos coeficientes é conhecida por *matriz de Fourier*. A resolução deste sistema recebe a designação de *transformada de Fourier discreta* (DFT[9]) da amostra do sinal em causa. Como se verá, as colunas da matriz de Fourier (de ordem n) formam uma base ortogonal de $\mathbb{C}^n$. Esta propriedade de ortogonalidade é essencial em todos os modelos matemáticos dedicados ao processamento de sinal.

Nesta secção fazemos uma breve introdução ao assunto e finalizamos com uma referência ao algoritmo conhecido por *transformada de Fourier rápida* (FFT[10]).

[8] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 — 1830), matemático e físico francês.
[9] DFT é a abreviatura de "Discrete Fourier Transform".
[10] FFT é a abreviatura de "Fast Fourier Transform".

Este algorimo permite determinar a transformada de Fourier discreta com grande economia computacional. Mostramos ainda que a FFT se deduz facilmente de uma determinada factorização da matriz de Fourier.

Como se disse anteriormente, um sinal é representado por uma função real de variável real f, definida num intervalo $[a, b]$. Por conveniência de cálculo, consideramos $[a, b] = [0, 2\pi]$. Para além disso, consideramos que a amostragem do sinal é realizada em períodos de tempo igualmente espaçados no intervalo referido, isto é, a amostra é realizada nos instantes $x_k = k\dfrac{2\pi}{n}$, onde $k = 0, \ldots, (n-1)$. Ou seja, os dados da amostra são constituídos pelos n valores

$$f(0), f\left(\frac{2\pi}{n}\right), f\left(\frac{4\pi}{n}\right), \ldots, f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Na prática, o valor de n é bastante grande, pelo que o vector observado,

$$\mathbf{f} = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})),$$

pode ter dimensões consideráveis.

Pretende-se aproximar f por uma função p tal que p e f coincidam nos pontos da amostra, ou seja, $p(x_k) = f(x_k)$, para $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$. Uma função p que verifica esta propriedade diz-se uma *função interpoladora* de f.

As funções interpoladoras que se consideram habitualmente são combinações lineares de senos e cosenos, sendo conhecidas pela designação de polinómios trigonométricos. Para simplificar os cálculos consideramos que a função interpoladora p é uma combinação linear de exponenciais complexas (relembre que $e^{ikx} = \cos(kx) + i\,\mathrm{sen}(kx)$), isto é,

$$p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + \cdots + c_{n-1} e^{(n-1)ix}, \tag{5.32}$$

onde $c_0, \ldots, c_{n-1}$ são n coeficientes a determinar. Estes coeficientes são denominados por *coeficientes de Fourier*. A designação "polinómio trigonométrico" para p, está relacionada com o facto da expressão (5.32) resultar da substituição de z por $e^{ix} = z$ no polinómio $p(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{(n-1)}$. Num polinómio trigonométrico $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}$, designam-se por *frequências* os inteiros k em e^{ikx}.

A função $p(x)$ é uma função real com valores complexos, e a função f que se pretende aproximar toma valores reais. Por isso, uma vez determinado p, tomamos como aproximação de f a parte real de p, ou seja, consideramos a aproximação $f(x) \approx \mathrm{Re}(p(x))$.

Dada a amostra $\mathbf{f} = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}))$, com $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, determinar a sua *Transformada de Fourier discreta* equivale a determinar os *coeficientes de Fourier* $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ que satisfazem as igualdades

$$f(x_0) = p(x_0),\ f(x_1) = p(x_1),\ \ldots,\ f(x_{n-1}) = p(x_{n-1}) \qquad \text{com} \ \ x_k = \frac{2\pi k}{n}. \tag{5.33}$$

Atendendo à expressão de p em (5.32), tem-se

$$\begin{aligned} p(x_k) = p\left(\frac{2\pi k}{n}\right) &= c_0 + c_1 e^{i\frac{2\pi k}{n}} + c_2 e^{i\frac{4\pi k}{n}} + \cdots + c_{n-1} e^{i\frac{2\pi(n-1)k}{n}} \\ &= c_0 + c_1 \xi_n^k + c_2 \xi_n^{2k} + \cdots + c_{n-1} \xi_n^{(n-1)k} \quad \text{com} \ \ \xi_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}. \end{aligned} \tag{5.34}$$

O número complexo ξ_n é uma raiz (índice n) da unidade. De facto, $\xi_n^n = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\,\mathrm{sen}(2\pi) = 1$. As raízes índice n de um número complexo z estão localizadas numa circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$, e dividem esta circunferência em n partes iguais. Assim, existem n raízes distintas $\sqrt[n]{z}$, dadas pela expressão (ver (A.4)).

$$\sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad \text{para } k = 0, \ldots, (n-1),$$

onde θ é o argumento de z. Logo, quando $z = 1$ tem-se $|z| = 1$ e $\theta = 0$, e portanto os n números complexos distintos que representam $\sqrt[n]{1}$ são

$$\xi_n^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1).$$

Usando a expressão (5.34), as condições (5.33) são equivalentes ao seguinte sistema linear, nas incógnitas $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0) && = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1} \\ f(x_1) &= f\left(\frac{2\pi}{n}\right) && = c_0 + c_1\xi_n + c_2\xi_n^2 + \cdots + c_{n-1}\xi_n^{n-1} \\ f(x_2) &= f\left(\frac{4\pi}{n}\right) && = c_0 + c_1\xi_n^2 + c_2\xi_n^4 + \cdots + c_{n-1}\xi_n^{2(n-1)} \\ &\vdots \\ f(x_{n-1}) &= f\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) && = c_0 + c_1\xi_n^{n-1} + c_2\xi_n^{2(n-1)} + \cdots + c_{n-1}\xi_n^{(n-1)^2}. \end{aligned}$$

O sistema anterior pode escrever-se na forma matricial $\mathbf{f} = F_n\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é o vector dos *coeficientes de Fourier* e F_n é a designada *matriz de Fourier* de ordem n. Os vectores coluna da matriz de Fourier, de ordem n, são:

$$F_n = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{w}_0 & \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{w}_{n-1} \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{5.35}$$

com

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_n \\ \vdots \\ \xi_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad , \quad \mathbf{w}_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_n^{n-1} \\ \vdots \\ \xi_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Note-se que os vectores coluna $\mathbf{w}_k$ da matriz de Fourier F_n têm a seguinte forma:

$$\mathbf{w}_k = (1, \xi_n^k, \xi_n^{2k}, \ldots, \xi_n^{(n-1)k}), \qquad \text{com} \quad \xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Por exemplo, a matriz de Fourier de ordem 4 é

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}, \tag{5.36}$$

uma vez que as colunas de F_4 são $\mathbf{w}_k = (1, e^{\frac{k\pi i}{2}}, e^{k\pi i}, e^{\frac{3k\pi i}{2}})$, para $k = 0, 1, 2, 3$.

O sistema linear $\mathbf{f} = F_n\mathbf{c}$ diz-nos que o vector da amostra $\mathbf{f}$ é uma combinação linear das colunas de F_n sendo os coeficientes desta combinação linear as componentes de $\mathbf{c}$. Ou seja, o vector da amostra $\mathbf{f}$ é uma combinação linear dos vectores do conjunto $S = \{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}\}$. Assim, se provarmos que S é um conjunto ortogonal, o Teorema 5.2 (pág. 254) fornece-nos a expressão dos coeficientes de Fourier. Nomeadamente,

$$c_k = \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{f} \rangle}{\|\mathbf{w}_k\|^2}, \tag{5.37}$$

onde $\langle\, , \rangle$ designa o produto interno usual em $\mathbb{C}^n$.

Mostremos agora que o conjunto dos vectores coluna, $\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}\}$, da matriz de Fourier F_n é um conjunto ortogonal.

Proposição 5.6. As colunas da matriz de Fourier de ordem n formam um conjunto ortogonal para o produto interno usual em $\mathbb{C}^n$. Isto é, o conjunto $S = \{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n-1}\}$, com

$$\mathbf{w}_k = (1, \xi_n^k, \xi_n^{2k}, \ldots, \xi_n^{(n-1)k}) \quad \text{e} \quad \xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

é ortogonal. Além disso, $\|\mathbf{w}_k\|^2 = n$ para $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

Demonstração. Qualquer polinómio de grau $n \geq 1$ pode ser factorizado em termos das suas raízes. Como as raízes (distintas) do polinómio $z^n - 1$ são ξ_n^k, com $k = 0, 1, \ldots, n-1$, tem-se

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\xi_n)(z-\xi_n^2)\cdots(z-\xi_n^{n-1}).$$

Além disso, é válida a igualdade

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}),$$

como pode facilmente verificar desenvolvendo o membro direito da equação anterior. Comparando as duas últimas igualdades, obtemos

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = (z-\xi_n)(z-\xi_n^2)\cdots(z-\xi_n^{n-1}). \tag{5.38}$$

Substituindo z por ξ_n^k em (5.38), tem-se

$$1 + \xi_n^k + \xi_n^{2k} + \cdots + \xi_n^{(n-1)k} = \begin{cases} n, & \text{se} \quad k = 0 \\ 0, & \text{se} \quad 0 < k < n, \end{cases} \tag{5.39}$$

uma vez que $\xi_n^0 = 1$, e para $z = \xi_n^k$, com $0 < k < n$, o membro direito de (5.38) é sempre nulo. Calculemos agora $\langle \mathbf{w}_k\,,\,\mathbf{w}_l \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{w}_k\,,\,\mathbf{w}_l \rangle &= \mathbf{w}_k^H \mathbf{w}_l = \overline{\mathbf{w}}_k^T \mathbf{w}_l \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \overline{\xi_n^k} & \overline{\xi_n^{2k}} & \cdots & \overline{\xi_n^{(n-1)k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_n^l \\ \xi_n^{2l} \\ \vdots \\ \xi_n^{(n-1)l} \end{bmatrix} \\
&= 1 + \xi_n^{-k}\xi_n^l + \xi_n^{-2k}\xi_n^{2l} + \cdots + \xi_n^{-(n-1)k}\xi_n^{(n-1)l} \qquad (\text{visto que } \overline{\xi_n^s} = \xi_n^{-s}) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{-jk}\xi_n^{jl} = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_n^{j(l-k)} = \begin{cases} n, & \text{se} \quad k = l \\ 0, & \text{se} \quad k \neq l, \end{cases}
\end{aligned}$$

onde na última igualdade aplicámos (5.39). □

A proposição anterior diz-nos que S é um conjunto ortogonal que não é ortonormado. Porém, como todos os vectores de S têm norma igual a $\sqrt{n}$, resulta da equação (5.37) que os coeficientes de Fourier são

$$c_k = \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{f} \rangle}{\|\mathbf{w}_k\|^2} = \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{f} \rangle}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{5.40}$$

Exemplo 5.20. Consideremos a amostra da função $f(x) = 2\pi x - x^2$ em 4 pontos, e calculemos o respectivo polinómio interpolador de Fourier. O vector $\mathbf{f}$ correspondente à amostra é

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3) = (f(0), f(\pi/2), f(\pi), f(3\pi/2)) = (0, 3\pi^2/4, \pi^2, 3\pi^2/4).$$

Os vectores coluna $\mathbf{w}_k$ da matriz de Fourier F_4 são dados por (5.36). Calculando os coeficientes de Fourier obtemos os seguintes valores (arredondados para 4 casas decimais)

$$\begin{aligned} c_0 &= \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{f} \rangle = 6.1685 & \qquad c_2 &= \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{f} \rangle = -1.2337 \\ c_1 &= \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{f} \rangle = -2.4674 & \qquad c_3 &= \langle \mathbf{w}_3, \mathbf{f} \rangle = -2.4674. \end{aligned}$$

Assim, o polinómio interpolador (com valores complexos) é

$$p(x) = 6.1685 - 2.4674e^{ix} - 1.2337e^{2ix} - 2.4674e^{3ix}.$$

Consequentemente, a parte real de p é dada por

$$\mathrm{Re}(p(x)) = 6.1685 - 2.4674\cos x - 1.2337\cos(2x) - 2.4674\cos(3x).$$

Na Figura 5.19 é ilustrado o gráfico de f, os pontos de amostragem, e a parte real do polinómio interpolador. ♦

Nos gráficos da Figura 5.19 observa-se que embora a aproximação $\mathrm{Re}(p(x))$ coincida com a função f nos pontos de amostragem, fora desses pontos $\mathrm{Re}(p(x))$ toma valores bastante diferentes dos da função f, ou seja, $\mathrm{Re}(p(x))$ não é uma boa aproximação de f. É no entanto possível obter uma aproximação melhor de f substituindo no polinómio trigonométrico p as exponenciais complexas de frequências mais elevadas por exponenciais de frequências mais baixas tomando os mesmos valores nos pontos da amostra. As observações que se seguem justificam a razão de ser desta substituição.

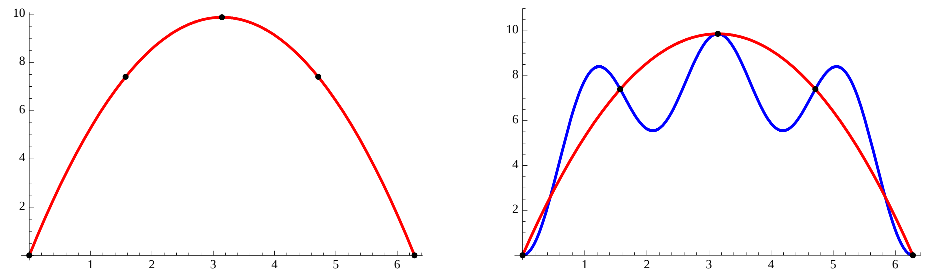


Figura 5.19: O gráfico de $f(x) = 2\pi x - x^2$ está representado a vermelho, e o gráfico da parte real do polinómio interpolador da amostra de f em 4 pontos a cor azul.

Considerem-se as exponenciais $e^{3ix} = \cos(3x) + i\,\mathrm{sen}(3x)$ e $e^{-ix} = \cos x - i\,\mathrm{sen}\, x$, e uma amostra em 4 pontos $x_k = \frac{2\pi k}{n}$. Como se observa na Figura 5.20, os gráficos de $\mathrm{Re}(e^{3ix}) = \cos(3x)$ e $\mathrm{Re}(e^{-ix}) = \cos x$ são bem diferentes no intervalo $[0, 2\pi]$ embora coincidam nos pontos x_k. A parte real (ou a parte imaginária) da exponencial e^{i3x} tem uma frequência de oscilação maior que a exponencial e^{-ix}. É portanto natural que a exponencial e^{-ix} seja mais conveniente em termos de aproximação que e^{3ix}. Este fenómeno é designado por *distorção* ("aliasing" em inglês).

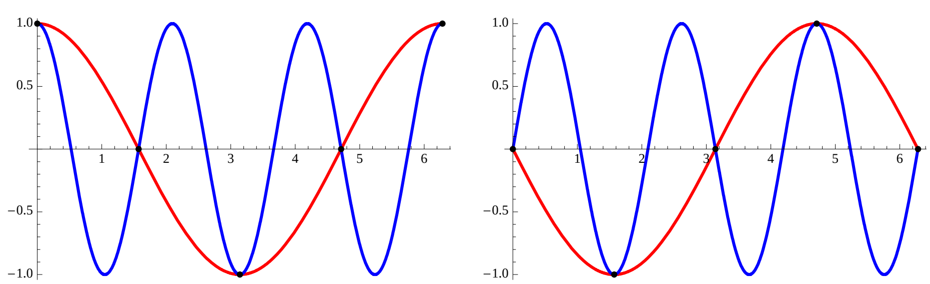


Figura 5.20: A parte real (à esquerda) e a parte imaginária (à direita) de e^{3ix} representada a cor azul, e a cor vermelha as respectivas partes real e imaginária de e^{-ix}. Nos pontos da amostra os valores de e^{3ix} e de e^{-ix} coincidem.

Note-se ainda que as raízes de $z^n - 1$ ocorrerem em pares de conjugados. Por exemplo, para as raízes quartas da unidade $\xi_4^k = e^{\frac{ik\pi}{2}}$, temos

$$\xi_4^0 = 1, \quad \xi_4^1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad \xi_4^2 = e^{i\pi} = -1 = \overline{\xi_4^2}, \quad \xi_4^3 = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i = \overline{\xi_4^1}.$$

Na Figura 5.21 ilustramos este facto para as raízes quartas e cúbicas da unidade.

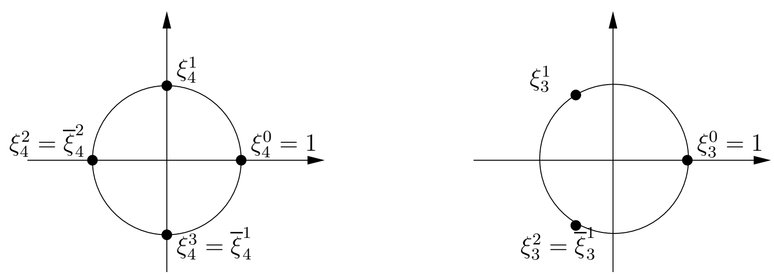


Figura 5.21: As raízes quartas e cúbicas da unidade.

Assim, podemos substituir em $p(x) = c_0 + e^{ix} + \cdots + c_{n-1}e^{i(n-1)x}$ metade das exponenciais por exponenciais de frequências mais baixas, sem alterar os valores de p nos pontos da amostra.

Podemos pois considerar uma versão alternativa ao polinómio p, que envolva frequências mais baixas. Nomeadamente, conforme o número de pontos n de amostragem é par ou ímpar, toma-se para polinómio interpolador:

$$\hat{p}(x) = c_{-m}e^{-imx} + \cdots + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + \cdots + c_me^{imx} \quad \text{se } n = 2m+1$$

ou

$$\hat{p}(x) = c_{-m}e^{-imx} + \cdots + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + \cdots + c_{m-1}e^{i(m-1)x} \quad \text{se } n = 2m.$$

Em ambos os casos os coeficientes de Fourier de índices negativos são iguais aos coeficientes de Fourier dos seus "alternativos" de frequências mais elevadas, isto é,

$$c_{-k} = c_{n-k} = \frac{\langle \mathbf{w}_{n-k}, \mathbf{f} \rangle}{\|\mathbf{w}_{n-k}\|} = \frac{\langle \mathbf{w}_{-k}, \mathbf{f} \rangle}{\|\mathbf{w}_{-k}\|},$$

uma vez que $\xi_n^{-k} = \xi_n^{n-k}$, e portanto $\mathbf{w}_{n-k} = \mathbf{w}_{-k}$.

Exemplo 5.21. No Exemplo 5.20 determinámos o polinómio interpolador $p(x)$ para a função $f(x) = 2\pi x - x^2$ para 4 pontos de amostragem. Determinemos agora o polinómio $\hat{p}(x)$.

$$\hat{p}(x) = c_{-2}e^{-2ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix}.$$

Os coeficientes de Fourier, calculados no exemplo referido, são os seguintes:

$$c_0 = 6.1685 \qquad c_2 = c_{-2} = -1.2337$$
$$c_1 = -2.4674 \qquad c_{-1} = c_3 = -2.4674.$$

Logo,

$$\hat{p}(x) = -1.2337e^{-2ix} - 2.4674e^{-ix} + 6.1685 - 2.4674e^{ix}. \tag{5.41}$$

A parte real deste polinómio é

$$\mathrm{Re}(\hat{p}(x)) = 6.1685 - 4.9348\cos x - 1.2337\cos(2x).$$

Na Figura 5.22 encontra-se representada a função f e as partes reais dos polinómios interpoladores $p(x)$ e $\hat{p}(x)$, respectivamente a azul e a verde. Podemos verificar que $\mathrm{Re}(\hat{p}(x))$ aproxima melhor a função f do que $\mathrm{Re}(p(x))$. ♦

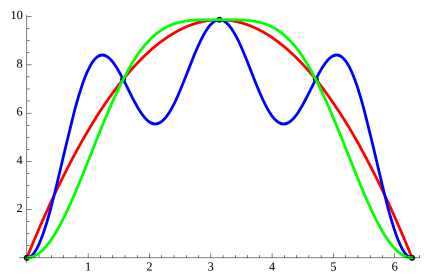


Figura 5.22: O gráfico de $f(x) = 2\pi x - x^2$ está representado a cor vermelha, e nas cores azul e verde, respectivamente, os gráficos das partes reais dos polinómios interpoladores $p(x)$ e $\hat{p}(x)$.

Observamos a seguir algumas propriedades interessantes da representação de Fourier $\hat{p}(x)$ da função real f.

- Como a função f é real e os vectores $\mathbf{w}_{-k}$ verificam $\mathbf{w}_{-k} = \overline{\mathbf{w}}_k$, os coeficientes de Fourier satisfazem a igualdade $c_{-k} = \overline{c}_k$, já que

$$\langle \mathbf{w}_{-k}, \mathbf{f} \rangle = \langle \overline{\mathbf{w}}_k, \mathbf{f} \rangle = \mathbf{w}_k^T \mathbf{f} = \overline{\overline{\mathbf{w}}_k^T \overline{\mathbf{f}}} = \overline{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{f} \rangle},$$

e portanto

$$c_{-k} = \frac{\langle \mathbf{w}_{-k}, \mathbf{f} \rangle}{\|\mathbf{w}_{-k}\|^2} = \frac{\overline{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{f} \rangle}}{\|\mathbf{w}_k\|^2} = \overline{c}_k.$$

- As parcelas de $\hat{p}(x)$ da forma $c_{-k}e^{-ikx}+c_ke^{ikx}$ são reais. De facto, tomando $c_k = a_k + ib_k$, tem-se

  $$\begin{aligned} c_{-k}e^{-ikx} + c_ke^{ikx} &= \overline{c}_ke^{-ikx} + c_ke^{ikx} = \overline{c_ke^{ikx}} + c_ke^{ikx} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(c_ke^{ikx}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left((a_k+ib_k)(\cos(kx)+i\,\mathrm{sen}(kx))\right) \\ &= 2\left(a_k\cos(kx) - b_k\,\mathrm{sen}(kx)\right), \end{aligned}$$

  onde aplicámos a igualdade $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$, válida para qualquer número complexo z.

  Assim, se o número de pontos n da amostra for ímpar, o polinómio interpolador $\hat{p}$ é um polinómio real, e no caso em que $m = 2n$ somente o termo $c_{-m}e^{-imx}$ pode produzir um número complexo não real, conforme pode verificar através do polinómio (5.41).

Transformada de Fourier rápida (FFT)

Como vimos, a determinação da transformada de Fourier discreta consiste em resolver (em ordem a $\mathbf{c}$) o sistema linear $\mathbf{f} = F_n\mathbf{c}$. A matriz de Fourier F_n é invertível e a sua inversa é $F_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{F}_n$. Assim, a transformada de Fourier discreta pode obter-se multiplicando o vector de amostragem $\mathbf{f}$ por uma matriz de ordem n, isto é, $\mathbf{c} = (1/n)\overline{F}_n\mathbf{f}$. Esta abordagem para o cálculo dos coeficientes de Fourier é apenas satisfatória quando n é relativamente pequeno. Para grandes amostras, como é o caso do processamento de imagens de vídeo ou imagens de vários meios de diagnóstico médico, esta via não é conveniente já que requer n^2 multiplicações ($\overline{F}_n$ tem n^2 entradas).

Em 1965, J. Cooley e J. Tukey[11] introduziram um algoritmo que reduz para $\frac{n}{2}\log_2 n$ o número de multiplicações necessárias para o cálculo da Transformada de Fourier discreta. Este algoritmo é conhecido pela designação de *Transformada de Fourier rápida*[12] (FFT).

Quando n é par, o algoritmo FFT pode descrever-se usando uma factorização da matriz de Fourier de ordem n envolvendo matrizes de Fourier de ordem $n/2$. Não pretendemos aqui descrever completamente este algoritmo mas apenas ilustrar os seus passos essenciais. O leitor interessado em aprofundar este assunto pode consultar, por exemplo, Olver & Shakiban [10].

[11] James Cooley, matemático americano nascido em 1926, e John Wilder Tukey (1915 – 2000) estatístico americano.

[12] A Transformada de Fourier rápida é o nome genérico atribuído a uma classe de algoritmos que inclui o algoritmo de Cooley e Tukey.

Comecemos por observar que quando n é par, o conjunto das raízes n-ésimas da unidade contém o conjunto das raízes $(n/2)$-ésimas da unidade. Por exemplo, $\{1, i, -1, -i\}$ são as raízes quartas da unidade e $\{1, -1\}$ o conjunto das raízes quadradas da unidade. Este facto é essencial para entender a factorização de F_n em termos da matriz $F_{n/2}$ que passamos a enunciar.

Factorização da matriz de Fourier

Se $n = 2^r$, a matriz de Fourier de ordem n pode escrever-se na forma

$$F_n = \begin{bmatrix} I & D_{\frac{n}{2}} \\ I & -D_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\frac{n}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} P_n, \tag{5.42}$$

onde I é a matriz identidade, $\mathbf{0}$ a matriz nula, $D_{\frac{n}{2}} = \operatorname{diag}\left(1, \xi_n, \xi_n^2, \ldots, \xi_n^{n/2-1}\right)$, com $\xi_n^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, e P_n a seguinte matriz de permutação:

$$P_n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

A matriz $D_{n/2}$ tem na diagonal principal metade das raízes n-ésimas da unidade, e o produto $P_n\mathbf{x}$ é o vector cujas primeiras $\frac{n}{2}$ componentes são as componentes de $\mathbf{x}$ com índices pares e as últimas $\frac{n}{2}$ componentes são as componentes com índices ímpares.

Por exemplo, vejamos qual é a factorização da matriz de Fourier F_4. As matrizes de Fourier F_4 e F_2 são

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.43}$$

A matriz diagonal D_2 tem na diagonal principal as primeiras duas raízes quartas da unidade (começando em 1 e percorrendo a circunferência unitária no sentido anti-horário), isto é, $D_2 = \operatorname{diag}(1, i)$. Além disso, uma vez que para $\mathbf{x}_4 =$

(x_0, x_1, x_2, x_3) se tem $P_4\mathbf{x}_4 = (x_0, x_2, x_1, x_3)$, a matriz de permutação P_4 é a matriz que se obtém da identidade de quarta ordem trocando a segunda linha com a terceira linha. Isto é,

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando estas matrizes, é fácil verificar a validade da factorização (5.42) para F_4. Nomeadamente,

$$F_4 = \begin{bmatrix} I & D_2 \\ I & -D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} P_4 = \begin{bmatrix} F_2 & D_2F_2 \\ F_2 & -D_2F_2 \end{bmatrix} P_4.$$

Ilustremos agora, através de um exemplo, como se utiliza a factorização (5.42) para implementar o algoritmo FFT. Consideremos, por exemplo, a determinação de $F_8\mathbf{x}_8$.

$$\text{Para} \quad \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \quad \text{tem-se} \quad P_8\mathbf{x}_8 = \left[\begin{array}{c} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ \hline x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_4^{(0)} \\ \hline \mathbf{x}_4^{(1)} \end{array}\right].$$

Assim,

$$F_8\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} F_4 & D_4F_4 \\ F_4 & -D_4F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_4^{(0)} \\ \mathbf{x}_4^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4\mathbf{x}_4^{(0)} + D_4F_4\mathbf{x}_4^{(1)} \\ F_4\mathbf{x}_4^{(0)} - D_4F_4\mathbf{x}_4^{(1)} \end{bmatrix}.$$

A matriz F_4 pode ainda ser factorizada na forma (5.42), obtendo-se:

$$P_4\mathbf{x}_4^{(0)} = \left[\begin{array}{c} x_0 \\ x_4 \\ \hline x_2 \\ x_6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_2^{(0)} \\ \hline \mathbf{x}_2^{(1)} \end{array}\right] \quad \text{e} \quad P_4\mathbf{x}_4^{(1)} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_5 \\ \hline x_3 \\ x_7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_2^{(2)} \\ \hline \mathbf{x}_2^{(3)} \end{array}\right]. \tag{5.44}$$

Logo,

$$F_4\mathbf{x}_4^{(0)} = \begin{bmatrix} F_2 & D_2F_2 \\ F_2 & -D_2F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^{(0)} \\ \mathbf{x}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2\mathbf{x}_2^{(0)} + D_2F_2\mathbf{x}_2^{(1)} \\ F_2\mathbf{x}_2^{(0)} - D_2F_2\mathbf{x}_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

e

$$F_4\mathbf{x}_4^{(1)} = \begin{bmatrix} F_2 & D_2F_2 \\ F_2 & -D_2F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2^{(2)} \\ \mathbf{x}_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2\mathbf{x}_2^{(2)} + D_2F_2\mathbf{x}_2^{(3)} \\ F_2\mathbf{x}_2^{(2)} - D_2F_2\mathbf{x}_2^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Como F_2 tem a forma $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, é agora trivial calcular os vectores $F_2\mathbf{x}_2^{(i)}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. O algoritmo FFT para calcular $F_8\mathbf{x}_8$ começa por determinar os vectores $F_2\mathbf{x}_2^{(i)}$ para $i = 0, 1, 2, 3$, a partir destes calcula $F_4\mathbf{x}_4^{(0)}$ e $F_4\mathbf{x}_4^{(1)}$, e finalmente $F_8\mathbf{x}_8$, conforme está representado no diagrama seguinte.

$$\begin{tikzcd}
F_2\mathbf{x}_2^{(0)} \arrow[dr] & & F_2\mathbf{x}_2^{(1)} \arrow[dl] & & F_2\mathbf{x}_2^{(2)} \arrow[dr] & & F_2\mathbf{x}_2^{(3)} \arrow[dl] \\
& F_4\mathbf{x}_4^{(0)} \arrow[drr] & & & & F_4\mathbf{x}_4^{(1)} \arrow[dll] & \\
& & & F_8\mathbf{x}_8 & & &
\end{tikzcd}$$

É evidente que para iniciar o algoritmo é necessário conhecer os vectores $\mathbf{x}_2^{(0)}, \mathbf{x}_2^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(2)}$ e $\mathbf{x}_2^{(3)}$, ou seja, obter o agrupamento correcto das componentes de $\mathbf{x}_8$ separando em cada grupo as componentes nas posições pares das componentes nas posições ímpares. Por exemplo, no caso apresentado de $n = 8$, efectuaram-se os agrupamentos

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$(0, 2, 4, 6) \qquad\qquad (1, 3, 5, 7)$$

$$(0, 4) \quad (2, 6) \qquad (1, 5) \quad (3, 7).$$

Este processo de separação em par/ímpar, necessário para se iniciar o algoritmo, é por vezes designado por *"baralhar perfeito"*. O agrupamento dos índices das componentes de $\mathbf{x}$ tem uma interpretação simples se for usada a representação binária dos índices das componentes de $\mathbf{x}$. Deixa-se como exercício verificar qual é a interpretação correspondente ao agrupamento par/ímpar efectuado para o vector $\mathbf{x}_8$. Para tal, escreva os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ na base 2 e proceda aos agrupamentos anteriormente efectuados. Compare a disposição dos dígitos na representação binária final com a disposição inicial.

Para finalizar, ilustramos agora os diversos passos do algoritmo FFT no cálculo dos coeficientes de Fourier para uma amostragem em quatro pontos. Isto é, pretendemos calcular $\mathbf{c} = \frac{1}{4}\overline{F}_4\mathbf{f}$, onde $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ e $f_k = f(x_k) = f(\frac{2\pi k}{n})$.

Em primeiro lugar, faz-se a reordenação correcta das componentes do vector da amostra $\mathbf{f}$. Neste caso, como a amostra apenas foi realizada em 4 pontos, obtém-se $\tilde{\mathbf{f}} = (f_0, f_2, f_1, f_3)$. O algoritmo decorre em dois passos, que passamos a descrever no pseudocódigo seguinte (onde o símbolo "$\leftarrow$" significa uma atribuição).

Passo 1: (Cálculo de $\overline{F}_2\mathbf{f}$)

Dados: $\tilde{\mathbf{f}} = (f_0, f_2, f_1, f_3)$
$\mathbf{f} \longleftarrow P_4\tilde{\mathbf{f}} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$
$D \longleftarrow \overline{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{f}^{(0)} \longleftarrow (f_0, f_1)$
$\mathbf{f}^{(1)} \longleftarrow (f_2, f_3)$
Calcular:
$D\,\mathbf{f}^{(1)} = (f_2, f_3)$
$\overline{F}_2\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(0)} + D\,\mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(0)} - D\,\mathbf{f}^{(1)} \end{bmatrix} = (f_0 + f_2, f_1 + f_3, f_0 - f_2, f_1 - f_3)$

Passo 2: (Cálculo de $\overline{F}_4\mathbf{f}$)

$\mathbf{f} \longleftarrow P_4\overline{F}_2\mathbf{f} = (f_0 + f_2, f_0 - f_2, f_1 + f_3, f_1 - f_3)$
$D \longleftarrow \overline{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
$\mathbf{f}^{(0)} \longleftarrow (f_0 + f_2, f_0 - f_2)$
$\mathbf{f}^{(1)} \longleftarrow (f_1 + f_3, f_1 - f_3)$
Calcular:
$D\,\mathbf{f}^{(1)} = (f_1 + f_3, -if_1 + if_3)$
$\overline{F}_4\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(0)} + D\,\mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(0)} - D\,\mathbf{f}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 + f_2 + f_1 + f_3 \\ f_0 - f_2 - if_1 + if_3 \\ f_0 + f_2 - f_1 - f_3 \\ f_0 - f_2 + if_1 - if_3 \end{bmatrix}.$

Usando a expressão de F_4 dada em (5.43) confirma-se que o vector obtido é de facto $\overline{F}_4\mathbf{f}$, sendo o vector dos coeficientes de Fourier:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{4}\overline{F}_4\mathbf{f} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} f_0 + f_2 + f_1 + f_3 \\ f_0 - f_2 - if_1 + if_3 \\ f_0 + f_2 - f_1 - f_3 \\ f_0 - f_2 + if_1 - if_3 \end{bmatrix}.$$

Para uma amostra em $n = 2^r$ pontos, o número de multiplicações efectuadas por este algoritmo é estimado do seguinte modo. O algoritmo tem r passos e em cada passo realizam-se (no máximo) $n/2$ multiplicações (correspondentes à multiplicação pela matriz diagonal D). Logo, para $n = 2^r$ efectuam-se 2^{r-1} multiplicações. Assim, o número total de multiplicações é $r2^{r-1}$ (uma vez o algoritmo tem r passos). Como $n = 2^r$ (ou seja, $r = \log_2 n$) e $2^{r-1} = n/2$, o número total de multiplicações é (no máximo) $r2^{r-1} = \frac{n}{2}(\log_2 n)$.

Comparando as n^2 multiplicações necessárias para efectuar o produto $\frac{1}{n}\overline{F}_n\mathbf{f}$ com o número de multiplicações usando o algoritmo FFT, nota-se uma economia de operações considerável. Por exemplo, para $n = 2^9 = 512$, temos $n^2 = 262144$ e $\frac{n}{2}\log_2 n = 2304$.