AULA 02

Lógica proposicional e lógica de primeira ordem

Demonstrações formais*

Descrevemos atrás um processo algorítmico de determinar a relação $\vDash \sigma$ ou $\Gamma \vDash \sigma$ (no caso de Γ ser finito). Esse processo é o conhecido método das tabelas de verdade. Estas relações podem contudo decidir-se num sistema de axiomas e regras dedutivas. Mais precisamente, consideremos como *axiomas proposicionais* as seguintes tautologias:

(A1) $\sigma \Rightarrow (\tau \Rightarrow \sigma)$

(A2) $[\sigma \Rightarrow (\tau \Rightarrow \theta)] \Rightarrow [(\sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \theta)]$

(A3) $[(\neg\tau) \Rightarrow (\neg\sigma)] \Rightarrow [((\neg\tau) \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \tau]$

Consideramos ainda uma única *regra de inferência* (que se denomina de regra de *modus ponens*): de σ e $\sigma \Rightarrow \tau$ podemos inferir τ.

Definição 2.1 (Demonstração).— *Por* demonstração *entendemos uma sequência finita de sentenças $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ em que cada σ_i ou é um axioma (A1)–(A3) ou se obtém de σ_l, σ_k, com $l, k < i$ usando a regra de* modus ponens.

Uma demonstração da sentença σ é uma demonstração $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ em que $\sigma = \sigma_n$. Se existe uma demonstração de σ escrevemos $\vDash \sigma$. O conceito de «demonstração» pode generalizar-se um pouco mais. Se Γ é um conjunto de sentenças, uma demonstração de σ com hipóteses em Γ, é uma sequência $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ em que $\sigma_n = \sigma$ e cada σ_i ou é uma axioma (A1)–(A3), ou se obtém de sentenças anteriores por modus ponens*, ou é uma sentença em Γ. Se existe uma demonstração com hipóteses em Γ da sentença σ escrevemos $\Gamma \vDash \sigma$.*

Tem-se o seguinte resultado,

Teorema 2.1.— *Sejam Γ um conjunto de sentenças e σ uma sentença. Tem-se: $\Gamma \vDash \sigma$ se e só se $\Gamma \vDash \sigma$. Em particular (tomando $\Gamma = \varnothing$) tem-se $\vDash \sigma$ se e só se $\vDash \sigma$, ou seja, uma sentença é uma tautologia se e só se é demonstrável.*

Lógica de primeira ordem

Muitos dos juízos formulados em matemática são acerca de objectos, das suas propriedades e de relações entre essas propriedades e esses objectos. Precisamente, esta noção de «propriedade» pode ser problemática se não impusermos certas restrições à linguagem na qual ela se exprime. O desenvolvimento da lógica, já em pleno século XX, fez emergir a noção de «linguagem de primeira ordem» como sendo adequada para lidar com as questões que acabámos de introduzir.

As linguagens de primeira ordem são assim concebidas como um formalismo sintáctico que permite descrever propriedades de certos objectos que «habitam» as estruturas matemáticas, num sentido preciso da noção de «estrutura» que definiremos rigorosamente a seguir.

Todas as linguagens de primeira ordem consistem de dois tipos de símbolos: os *símbolos lógicos* e os *símbolos não-lógicos*. Os primeiros são comuns a todas as linguagens de primeira ordem que, assim, se distinguem umas das outras através dos símbolos não lógicos, que diferem de caso para caso.

Os símbolos lógicos são então o símbolo de igualdade $=$; as variáveis: $v_0, v_1, v_2, \ldots$ (compondo uma lista infinita); os conectivos booleanos $\neg$ (negação), $\vee$ (disjunção), $\wedge$ (conjunção), $\Rightarrow$ (implicação) e $\equiv$ (equivalência); finalmente dois quantificadores: $\forall$ (quantificador universal) e $\exists$ (quantificador existencial). Os símbolos não lógicos são de dois tipos, os *símbolos funcionais* e os *símbolos relacionais*. A cada símbolo funcional F encontra-se associado um número natural $|F|$ que se designa de *aridade* de F. (Se $|F| = 0$ F diz-se uma *constante individual* (i.e., denominamos de constantes individuais os símbolos funcionais 0-ários). Se $|F| = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ então F diz-se unário, binário, ternáro,...,n-ário,..., respectivamente.

O mesmo sucede com os símbolos relacionais, excepto que neste caso, se R é um símbolo relacional então, $|R| > 0$. De resto, aplica-se a mesma terminologia que no caso dos símbolos funcionais.

Estaremos fundamentalmente interessados em certas palavras que se podem escrever usando estes símbolos como um alfabeto. Essas palavras designar-se-ão de *termos* e *fórmulas*. Os termos obtém-se de acordo com o seguinte esquema:

1. as variáveis e as constantes individuais são termos;

2. Se F é um símbolo funcional n-ário e se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $Ft_1t_2 \cdots t_n$ é um termo. (De uma maneira geral, iremos escrever $F(t_1, \ldots, t_n)$ em vez de escrever $Ft_1t_2 \cdots t_n$, uma vez que esta prática simplifica a leitura das expressões.)

Denotamos por $\mathrm{Term}(\mathscr{L})$ o conjunto dos termos de $\mathscr{L}$ ou, como também se diz, dos $\mathscr{L}$-termos. Podemos agora descrever as fórmulas de $\mathscr{L}$ ou, $\mathscr{L}$-fórmulas, cujo conjunto denotamos por $\mathrm{Form}(\mathscr{L})$

1. Se t_1, t_2 são termos então $t_1 = t_2$ é uma fórmula;

2. Se R é um símbolo relacional n-ário e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos então $Rt_1t_2 \cdots t_n$ é uma fórmula. (Escrevemos $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ em lugar de $Rt_1t_2 \cdots t_n$.)

As fórmulas descritas por 1 e 2 acima são designadas de *fórmulas atómicas*. O resto das fórmulas pode agora ser descrito.

3. Se ϕ e ψ são fórmulas então, $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \Rightarrow \psi$ e $\phi \equiv \psi$ são fórmulas.

4. Se x é uma variável e ϕ é uma fórmula então $(\forall x)\phi$ e $(\exists x)\phi$ são fórmulas.

Uma linguagem $\mathscr{L}$ é um meio de descrever propriedades acerca de estruturas matemáticas. De certa forma os símbolos da linguagem devem descrever aspectos dessa estrutura. Iremos precisamente começar por descrever o que são as estruturas adequadas para uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$ ou, como também dizemos uma $\mathscr{L}$-estrutura.

Definição 2.2 ($\mathscr{L}$-estrutura).— *Fixemos uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$, cujos símbolos funcionais são $F_0, F_1, \dots$ e os símbolos relacionais são: $R_0, R_1, \dots$. Uma $\mathscr{L}$-estrutura é uma sequência $\mathfrak{A} = \langle A, F_0^{\mathfrak{A}}, F_1^{\mathfrak{A}}, \dots, R_0^{\mathfrak{A}}, R_1^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$ onde A é um conjunto não vazio e para cada n, $F_n^{\mathfrak{A}} : A^{|F_n|} \to A$ e $R_n^{\mathfrak{A}} \subset A^{|F|}$.*

O conjunto não vazio A é o universo da estrutura. As funções $F_n^{\mathfrak{A}}$ interpretam os símbolos funcionais e designam-se de *operações* (se $|F| = 0$, ou seja, se F é um símbolo funcional 0-ário ou, como dissemos antes, uma constante, então $F^{\mathfrak{A}}$ é um elemento de A.

Fórmulas e termos são objectos puramente sintácticos, uma combinação pura de símbolos. Contudo, as $\mathscr{L}$-fórmulas e os $\mathscr{L}$-termos podem descrever aspectos das $\mathscr{L}$-estruturas, como iremos ver. Comecemos com os $\mathscr{L}$-termos. Consideremos um exemplo, seja $\mathscr{L} = \{+.\cdot, 0, 1, <\}$ (adoptamos a convenção d descrever apenas os símbolos não lóficos, quando pretendemos identificar uma linguagem), onde $+$ e $\cdot$ são símbolos funcionais binários, $0, 1$ são constantes individuais e $<$ é um símbolo relacional binário. A título de exemplo consideramos a $\mathscr{L}$-estrutura $\mathbb{N}$ cujo universo consiste no conjunto dos números naturais, onde $+$ é interpretado pela adição de números naturais, $\cdot$ é interpretado pelo produto de números naturais, $0, 1$ são interpretadas pelos números naturais zero e um, respectivamente e $<$ é interpretada pela relação de ordem usual entre os números naturais. (Em rigor deveríamos estar a denotar as interpretações dos símbolos de $\mathscr{L}$ por $+^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}$ e $<^{\mathbb{N}}$ mas, aqui e em outros casos em que não haja perigo de confusão, omitiremos a referência à $\mathscr{L}$-estrutura.)

Consideremos então os $\mathscr{L}$-termos. Exemplos são $v_0 + 0$ ou $(1 + 1) + 1$. Desde logo estes termos apresentam uma diferença: no primeiro ocorrem variáveis enquanto que no segundo não. Os termos que não contém variáveis dizem-se *termos fechados*. Constata-se facilmente que só existem termos fechados se a linguagem contiver constantes individuais, de outro modo qualquer termo tem que conter pelo menos uma variável. Muito naturalmente, se pensarmos no modo como as operações e constantes são interpretadas em $\mathbb{N}$, constatamos que o segundo termo descreve um elemento do universo de $\mathbb{N}$, ou seja um número natural. Neste caso, o número 3. Já no primeiro exemplo, que não é um termo fechado, não é possível associar-lhe directamente um número natural,mesmo tendo em conta a interpretação dos símbolos. Na verdade, a presença da variável, que representa um indivíduo genérico de $\mathbb{N}$, impede-nos para já, de fixar um valor determinado para este termo. No entanto, interpretando as variáveis que nele ocorrem (neste caso apenas a variável v_0) já é possível, em função dessa interpretação, fixar um valor para o termo.

Estas considerações motivam a seguinte definição.

Definição 2.3 (valuação).— *Fixemos uma $\mathscr{L}$-estrutura $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$. Uma valuação na estrutura $\mathfrak{A}$ é uma função $\bar{a} : \mathrm{Var}(\mathscr{L}) \to A$, que associa a cada variável v_n um elemento $a_n \in A$. Dizemos que a variável v_n é interpretada pelo objecto a_n na valuação $\bar{a}$.*

Considerando de novo o $\mathscr{L}$-termo $v_0 + 0$, temos que relativamente à valuação $\bar{a} = \langle 1, 0, 0, 0, \dots \rangle$, o valor do termo é 1. O mesmo acontece relativamente à valuação $\bar{b} = \langle 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$. De facto, não é difícil constatar que o valor do termo relativamente a uma valuação $\bar{a}$ só depende de $\bar{a}(v_0)$. De facto, dado um $\mathscr{L}$-termo t, o seu valor relativamente a uma interpretação $\bar{a}$ só depende do modo como são interpretadas as variáveis que ocorrem em t. No entanto, antes de estabelecer rigorosamente este facto, temos que descrever o que se entende por *interpretação de um termo* numa estrutura, relativamente a uma valuação.

DEFINIÇÃO 2.4.— *Fixemos uma $\mathscr{L}$-estrutura. A interpretação de um $\mathscr{L}$-termo t em $\mathfrak{A}$, relativamente a uma valuação $\bar{a}$, que se denota por $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$, define-se por recursão na complexidade dos termos de acordo com:*

1. *Se t é uma constante individual c então, $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = c^{\mathfrak{A}}$.*

2. *Se $t = F(t_1, \dots, t_n)$, onde F é um símbolo funcional n-ário e $t_1, \dots, t_n$ são termos então, $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = F^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\bar{a}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\bar{a}])$.*

Podemos agora demonstrar o seguinte,

LEMA 2.1.— *Seja $\mathfrak{A}$ uma $\mathscr{L}$-estrutura. Suponhamos que $t(x_1, \dots, x_n)$ é um $\mathscr{L}$-termo e que $x_1, \dots, x_n$ são exactamente as variáveis que ocorrem em t. Nestas condições se $\bar{a}, \bar{b}$ são duas valuações que coincidem na interpretação das variáveis $x_1, \dots, x_n$ então $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}] = t^{\mathfrak{A}}[\bar{b}]$.*

Em face do resultado anterior fica claro que apenas o modo como se interpretam as variáveis que ocorrem num termo determinam a interpretação desse mesmo termo. Assim e muito embora a noção de valuação seja inestimável do ponto de vista teórico, fixaremos a interpretação de um termo relativamente a uma interpretação das variáveis que nele ocorrem, considerando que, se $t(x_1, \dots, x_n)$ é um $\mathscr{L}$-termo tal que as variáveis que nele ocorrem se encontram entre as variáveis $x_1, \dots, x_n$ então $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]$ é $t^{\mathfrak{A}}[\bar{a}]$ onde $\bar{a}$ é uma qualquer valução tal que $\bar{a}(x_i) = a_i$, para qualquer $1 \leq i \leq n$.

Movemos agora a nossa atenção para as fórmulas. O propósito destas não é o de descrever elementos do universo de uma $\mathscr{L}$-estrutura, mas sim o de descrever juízos acerca estrutura. O que nos interessa é determinar se esses juízos são verdadeiros ou falsos. Consideremos uma vez mais dois exemplos: $(\forall v_0)[v_0 + 1 \neq 0]$ e $v_0 < v_1$. Ambas são $\mathscr{L}$-fórmulas (aqui $x \neq y$ abrevia $\neg(x = y)$), mas do ponto de vista da atribuição de um valor de verdade elas são muito diferentes como iremos ver. Na primeira fórmula, as variáveis que nela ocorrem(neste caso apenas v_0) aparecem quantificadas. As fórmulas deste tipo, em que todas as variáveis que nela ocorrem surgem quantificadas, dizem-se sentenças. No caso das sentenças, não é necessária nenhuma informação adicional, para além da sua própria estrutura sintáctica, para lhe atribuir um valor de verdade. No caso concreto que estamos a considerar, na estrutura $\mathbb{N}$ a fórmula $(\forall v_0)[v_0 + 1 \neq 0]$ é verdadeira, na medida em que, em $\mathbb{N}$, dado um qualquer número natural n, tem-se que $n + 1$ não é zero. Dizemos que $\mathbb{N}$ *satisfaz* a sentença $(\forall v_0)[v_0 + 1 \neq 0]$ e escrevemos

$$\mathbb{N} \vDash (\forall v_0)[v_0 + 1 \neq 0],$$

para indicar esse facto.

Considerando agora o segundo exemplo: $v_0 < v_1$ ao tentar atribuir-lhe um valor de verdade somos confrontados com o mesmo tipo de dificuldades que já enfrentámos aquando da interpretação de termos. Efectivamente, a menos que seja fornecida uma interpretação das variáveis v_0, v_1, não é possível fixar um valor de verdade para a fórmula em consideração e, enfrentaremos este tipo de problema sempre que numa fórmula existam variáveis não quantificadas, ou como também se diz, *variáveis livres*. Por exemplo, interpretando v_0, v_1 como $0, 1$, respectivamente então a fórmula é verdadeira, *relativamente a esta interpretação*. Se a interpretação for $1, 0$, i.e., v_0 interpretada como 1 e v_1 interpretada como 0 então, *relativamente a esta interpretação* é falsa em $\mathbb{N}$.

Estas considerações motivam a definição seguinte.

DEFINIÇÃO 2.5.— *Fixemos uma linguagem de primeira ordem $\mathscr{L}$ e uma $\mathscr{L}$-estrutura $\mathfrak{A}$. Definimos a relação ϕ é verdadeira em $\mathfrak{A}$ relativamente à valuação $\overline{a}$ (que denotamos por $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}]$), por recursão na complexidade das fórmulas:*

1. *Se ϕ é atómica da forma $t_1 = t_2$ onde t_1, t_2 são termos, então $\mathfrak{A} \models (t_1 = t_2)[\overline{a}]$ se $t_1^{\mathfrak{A}}[\overline{a}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\overline{a}]$. Se ϕ é da forma $R(t_1, \dots, t_n)$ onde R é um símbolo relacional n-ário e $t_1, \dots, t_n$ são termos então $\mathfrak{A} \models (R(t_1, \dots, t_n))[\overline{a}]$ se $\langle t_1^{\mathfrak{A}}[\overline{a}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\overline{a}]\rangle \in R^{\mathfrak{A}}$.*

2. *$\mathfrak{A} \models \phi \wedge \psi[\overline{a}]$ sse $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}]$ e $\mathfrak{A} \models \psi[\overline{a}]$.*

3. *$\mathfrak{A} \models \phi \vee \psi[\overline{a}]$ se $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}]$ ou $\mathfrak{A} \models \psi[\overline{a}]$.*

4. *$\mathfrak{A} \models \phi \Rightarrow \psi[\overline{a}]$ se $\mathfrak{A} \models \psi[\overline{a}]$ sempre que $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}]$.*

5. *$\mathfrak{A} \models \phi \equiv \psi[\overline{a}]$ se $\mathfrak{A} \models \psi[\overline{a}]$ sse $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}]$.*

6. *$\mathfrak{A} \models \neg\phi[\overline{a}]$ se $\mathfrak{A} \not\models \phi[\overline{a}]$.*

7. *$\mathfrak{A} \models (\forall x)\phi[\overline{a}]$ se $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}_u^x]$, para qualquer $u \in |\mathfrak{A}|$, onde $\overline{a}_u^x$ é a valuação que coincide com $\overline{a}$ em todas as variáveis, excepto eventualmente na variável x, onde se tem $\overline{a}_u^x(x) = u$.*

8. *$\mathfrak{A} \models (\exists x)\phi[\overline{a}]$ se $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}_u^x]$, para algum $u \in |\mathfrak{A}|$.*

OBSERVAÇÃO 1.—Se ϕ é uma sentença, ou seja, não possui variáveis livres, então tem-se que o facto de ϕ ser satisfeita ou não em $\mathfrak{A}$ não depende de nenhuma valuação ou seja, dito de outro modo, se ϕ é uma sentença e se $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são valuações então, tem-se que

$$\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}] \quad \text{sse} \quad \mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}].$$

Por este facto, escrevemos $\mathfrak{A} \models \phi$ ou $\mathfrak{A} \not\models \phi$ não mencionando nenhuma valuação.

OBSERVAÇÃO 2.—Tal como no caso dos termos, o valor lógico de uma fórmula relativamente a uma valuação, só depende do modo como essa valuação interpreta as variáveis que ocorrem livres na fórmula. Assim, adoptaremos terminologia idêntica à adoptada para os termos e escrevemos

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_n]$$

quando as variáveis livres de ϕ estão entre $x_1, \dots, x_n$ e a fórmula ϕ é verdadeira em $\mathfrak{A}$ quando aquelas variáveis são interpretadas por $a_1, \dots, a_n$ respectivamente.

Pode verificar-se que se ϕ, τ são sentenças (i. e., não têm variáveis livres) então as fórmulas $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$, $\sigma \Rightarrow \tau$, $\sigma \equiv \tau$ e $\neg\sigma$ são igualmente sentenças. O valor de verdade de uma senteça, recorde-se, pode decidir-se em qualquer estrutura de modo absoluto, sem ser necessário considerar qualquer valuação (interpretação particular das variáveis).

À semelhança do que se passa com a lógica proposicional, a lógica de primeira ordem também pode ser axiomatizada e uma noção de demonstração formal, pode ser descrita. Os axiomas são os seguintes:

A1. $\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$;

A2. $[\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)] \Rightarrow [(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi \Rightarrow \chi)]$;

A3. $(\neg\phi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$;

A4. $(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$;

A5. $(\phi \wedge \psi) \Rightarrow \phi$;

A6. $(\chi \Rightarrow \phi) \Rightarrow [(\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow [\phi \wedge \psi])]$;

A7. $\phi \Rightarrow (\phi \vee \psi)$;

A8. $\psi \Rightarrow (\phi \vee \psi)$;

A9. $(\phi \Rightarrow \chi) \Rightarrow [(\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ([\phi \vee \psi] \rightarrow \chi)]$

Eestes axiomas não envolvem ainda os quantificadores, que são considerados nos dois axiomas seguintes,

A10. $(\forall x)\phi(x) \Rightarrow \phi(y)$;

A11. $(\forall x)[\phi \Rightarrow \psi] \Rightarrow [\phi \Rightarrow (\forall x)\psi]$.

E, finalmente, consideramos os axiomas que envolvem o símbolo de igualdade,

A12. $(\forall x)x = x$;

A13. $(\forall x, y)[x = y \Rightarrow (\phi(x) \Rightarrow \phi(y))]$

O sistema fica completo com duas regras de inferência: a regra de *modus ponens* (MP) e a regra de *generalização* (Gen):

$$\frac{\phi, \phi \Rightarrow \psi}{\psi}(\text{MP}) \qquad \frac{\phi}{(\forall x)\phi}(\text{Gen}).$$

Definição 2.6 (Demonstração).— *Suponhamos que Γ é um conjunto de $\mathscr{L}$-sentenças. Uma demonstração com hipóteses em Γ é uma sequência finita de $\mathscr{L}$-fórmulas $s = \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ em que cada ϕ ou é um axioma lógico, ou uma sentença de Γ, ou então provém da aplicação de uma das regras de inferência a fórmulas que a precedem na sequência. Se $s = \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ é uma demonstração diz-se que é uma demonstração de ϕ_n.*

Se existe uma demonstração com hipóteses em Γ de ϕ escrevemos $\Gamma \vDash \phi$ e dizemos que ϕ é um *teorema* de Γ.

Definição 2.7.— *Um conjunto de sentenças Γ diz-se* consistente *se $\Gamma \nvdash \bot$.*

Teorema 2.2.— *A lógica de primeira ordem é consistente, ou seja $\nvdash \bot$.*

Tipicamente um conjunto consistente de fórmulas é utilizado como um sistema de axiomas para uma determinada teoria. Frequentemente este conjunto é infinito mas, a consistência pode ser verificada localmente, conforme o seguinte resultado conhecido como metateorema da compacidade.

TEOREMA 2.3 (COMPACIDADE). — *Um conjunto de sentenças* Γ *é consistente se e só se qualquer das suas partes finitas é consistente.*

Já introduzimos, no caso da lógica proposiciona,l a noção de consequência semântica que, no presente caso, também possui significado. Deste modo dados, um conjunto de sentenças Γ e uma sentença ϕ dizemos que ϕ é *consequência semântica* de Γ e escrevemos $\Gamma \vDash \phi$ se dada uma qualquer $\mathscr{L}$-estrutura $\mathfrak{M}$ se tem que quando $\mathfrak{M} \vDash \phi$ também $\mathfrak{M} \vDash \phi$.

Tem-se então,

TEOREMA 2.4 (COMPLETUDE). — *Sejam* Γ, ϕ *um conjunto de sentenças e uma sentença, respectivamente. Tem-se:*

$$\Gamma \vDash \phi \quad \textit{se e só se} \quad \Gamma \vDash \phi.$$

Lista de tautologias

Apresentamos de seguida uma lista contendo algumas das tautologias mais conhecidas. Usando o método do exercício anterior, o leitor deverá verificar nuns quantos casos, que se trata realmente de tautologias.

Lei do terceiro excluído	$p \vee (\neg p)$
	$\neg(p \wedge (\neg p))$
	$p \Rightarrow p$
Leis de idempotência	$p \equiv (p \wedge p)$
	$p \equiv (p \vee p)$
Lei da dupla negação	$(\neg\neg p) \equiv p$
Leis comutativas	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
	$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$
Leis associativas	$[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$
	$[p \vee (q \vee r)] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
Leis distributivas	$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
	$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
Leis de identidade	$(p \vee \bot) \equiv p$
	$(p \wedge \bot) \equiv \bot$
	$(p \vee \top) \equiv \top$
	$(p \wedge \top) \equiv p$
Leis de De Morgan	$[\neg(p \wedge q)] \equiv [(\neg p) \vee (\neg q)]$
	$[\neg(p \vee q)] \equiv [(\neg p) \wedge (\neg q)]$
Leis da equivalência	$(p \equiv q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
	$(p \equiv q) \equiv [(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))]$
	$(p \equiv q) \equiv [(\neg p) \equiv (\neg q)]$
Leis da implicação	$(p \Rightarrow q) \equiv [(\neg p) \vee q]$
	$[\neg(p \Rightarrow q)] \equiv [p \wedge (\neg q)]$
Lei da contraposição	$(p \Rightarrow q) \equiv [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$
Redução ao absurdo	$(p \Rightarrow q) \equiv ([p \wedge (\neg q)] \Rightarrow \bot)$
	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \vee q) \Rightarrow r]$
	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \equiv [p \Rightarrow (q \wedge r)]$
	$[(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \equiv [p \Rightarrow (q \vee r)]$
Lei de exportação	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
Lei de adição	$p \Rightarrow (p \vee q)$
Lei de simplificação	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
Modus ponens	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
Modus tollens	$[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow (\neg p)$
Silogismo hipotético	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
Silogismo disjuntivo	$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$
Lei do absurdo	$(p \Rightarrow \bot) \Rightarrow (\neg p)$
	$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$
	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)]$