EDO's escalares, lineares e de ordem superior

Definição

Uma equação diferencial da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \qquad (1)$$

função dada

onde os coeficientes $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ e $b(t)$ são funções reais contínuas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, dizem-se equações diferenciais lineares de ordem n.

Note-se que a incógnita $y = y(t)$ é uma função, com valores reais, definida no intervalo I, assim como as suas derivadas

$$y' = \frac{dy}{dt}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}}$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}.$$

Exemplo: Equação linear de $2^{\underline{a}}$ ordem

Considere-se como exemplo a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (1+t^2)\frac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t$$

onde $n = 2$ com $a_1(t) = 1 + t^2$, $a_0(t) = 1$ e $b(t) = \operatorname{sen} t$.

Note-se que a equação (1) é equivalente ao sistema de EDO's lineares

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_3 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = -a_0(t)\, y_1 - a_1(t)\, y_2 - \cdots - a_{n-1}(t)\, y_{n-1} + b(t) \end{cases}$$

onde

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Então o teorema de Picard-Lindelof é ainda aplicável

Proposição: Existência e unicidade de solução

Sejam $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ e $b(t)$ funções reais contínuas no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

tem solução única para qualquer $t_0 \in I$ e quaisquer $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1} \in \mathbb{R}$

Considere-se no exemplo anterior a equação com dados iniciais

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (1+t^2)\frac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t, \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$$

Este problema tem solução única $y = y(t)$ definida para t em $\mathbb{R}$.

EDO's de ordem superior homogéneas

Consideremos a equação (1) com $b(t) = 0$. Decorre da equivalência a um sistema:

Proposição

O conjunto das soluções da equação homogénea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0 \qquad (2)$$

é um espaço vectorial de dimensão n.

Para resolver (2) basta encontrar n soluções linearmente independentes.

Duas soluções $y_1 = y_1(t)$ e $y_2 = y_2(t)$ de (2) são linearmente independentes se e só se

$$W[y_1, y_2] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_2 y_1' - y_2 y_1'$$

é não-nulo para qualquer $t \in I$, i. e. $W[y_1, y_2](t) \neq 0, \quad \forall t \in I$.

O determinante $W[y_1, y_2]$ diz-se o Wronskiano de y_1 e y_2.

Equação de 2^{a} ordem linear homogénea

No caso da equação de 2^{a} ordem homogénea

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0, \tag{3}$$

o wronskiano de quaisquer duas soluções $W[y_1, y_2]$ obtém-se do

Lema de Abel

O wronskiano W de quaisquer duas soluções y_1 e y_2 da equação (3) satisfaz

$$W' + a_1(t)W = 0$$

$W' = -a_1(t)\,W + 0$ EDO simples

e é dado por $W(t) = \underline{ce^{-\int a_1(t)dt}}$, para qualquer $t \in I$ e c constante real.

Exemplo

Considere-se a equação

$+0y$ $\quad a_1(t)=0 \quad a_2(t)=-2t^{-2}$

$$y'' - 2t^{-2}\, y = 0. \tag{4}$$

Note-se que $a_1(t) = 0$ pelo que $W(t) = c\, e^{-\int 0 dt} = c$, para algum c constante.

sabemos encontrar para já

Observa-se que

$y(t)=t^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ são possíveis sol

$$y_1(t) = t^{-1}, \qquad y_2(t) = t^2$$

$y_1'' - (2t^{-2}y_1) =$

$(t^{-1})'' - (2t^{-2})t^{-1}$

são duas soluções distintas de (4) com

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{vmatrix} = 3$$

$\neq 0$

Dado que o wronskiano destas duas soluções é não-nulo (vale 3) conclui-se y_1 e y_2 são linearmente independentes e portanto a solução geral de (4) é dada por

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) = c_1\, t^{-1} + c_2\, t^2$$

para qualquer t no intervalo $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.

Equação de 2ª ordem linear homogénea e coeficientes constantes

Proposição

Considere-se a equação

$$y'' + \alpha\, y' + \beta\, y = 0 \qquad \text{com } \alpha \text{ e } \beta \text{ constantes reais} \tag{5}$$

O polinómio $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\,\lambda + \beta$ diz-se o polinómio caracteristico da equação.

Então duas soluções de (5) linearmente independentes são dadas por:

1. $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ se r_1 e r_2 são raizes reais distintas de $p(\lambda)$;
2. $y_1(t) = e^{rt}$ e $y_2(t) = te^{rt}$ se r é raiz dupla de $p(\lambda)$;
3. $y_1(t) = e^{rt}\cos(st)$ e $y_2(t) = e^{rt}\text{sen}(st)$ se $r \pm is$ são raizes complexas de $p(\lambda)$.

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = r_2 e^{(r_1+r_2)t} - r_1 e^{(r_1+r_2)t} = (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)t} \neq 0$$

$r \pm is \Rightarrow e^{(r+is)t} = e^{rt}(\cos(st) + i\,\text{sen}(st))$

Exemplo

Resolva a equação de segunda ordem: $x'' - 8x' + 16x = 0$

Exemplo

Resolva o PVI:

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$$

Notação

É conveniente introduzir o operador de derivação D:

A uma função f define-se $Df = f'$, $D^2f = f''$, etc.

e em geral,

$$D^n f(t) = \frac{d^n f}{dt^n}.$$

Exemplo: $y'' - y = 0$ pode escrever-se $(D^2 - 1)y = 0$

Equações de ordem $\geqslant 2$, lineares, homogéneas e de coeficientes constantes

A equação diferencial da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + a_{n-2}\, y^{(n-2)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \qquad (*)$$

é equivalente a

$$(D^n + a_{n-1}\, D^{(n-1)} + a_{n-2}\, D^{(n-2)} + \cdots + a_1\, D + a_0)\, y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(D)\, y = 0.$$

O polinómio p diz-se o polinómio caracteristico da equação $(*)$.

A seguinte correspondência entre cada polinómio e soluções linearmente independentes de $(*)$ deduz-se do tipo de raiz (real ou complexa) e da sua multiplicidade

Se r é raiz real com multiplicidade $k+1$: $P(D)y=0$ se $P(D)=(D-r)^{k+1}$ raiz real

$$(D-r)^{k+1} \quad \longleftarrow\text{-----}\longrightarrow \quad y_1(t)=t^0e^{rt},\ y_2(t)=te^{rt},\ \dots\ ,y_{k+1}(t)=t^ke^{rt}$$

$y_3(t)=t^2e^{rt}$

Se $r \pm is$ é um par de raizes complexas com multiplicidade $k+1$:

$P(D)y=0$

se $P(D)=[(D-r)^2+s^2]^{k+1}$

tem raiz $r+is$

$$\left((D-r)^2+s^2\right)^{k+1} \quad \longleftarrow\text{-----}\longrightarrow \quad \begin{array}{ll} y_1(t)=e^{rt}\cos(st), & y_{p+2}(t)=e^{rt}\text{sen}(st), \\ y_2(t)=te^{rt}\cos(st), & y_{p+3}(t)=te^{rt}\text{sen}(st), \\ \vdots & \vdots \\ y_{k+1}(t)=t^ke^{rt}\cos(st), & y_{2k+2}(t)=t^ke^{rt}\text{sen}(st) \end{array}$$

Pol. car. é $2(k+1)=2k+2$

Exemplo

Encontre a solução geral de $(D^2+2D+3)^2(D+1)^3y=0.$

Exemplo

Resolva o PVI: $y'''+y''=0, \qquad y(0)=1;\ y'(0)=0,\ y''(0)=1.$

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

aula 7 – problemas

1. Determine a solução geral da seguinte equação de ordem 2:

$$x'' - 8x' + 16x = 0.$$

2. Encontre a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

3. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $(D^2 + 2D + 3)^2(D + 1)^3\, y = 0$;
(b) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0$;
(c) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

4. Resolva os problemas de valores iniciais:

(a) $y''' + y'' = 0$ verificando $y(0) = 1; y'(0) = 0; y''(0) = 1$;
(b) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$;
(c) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$;
(d) $y''' + 5y'' + y' = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Soluções

1. $x(t) = \alpha\, e^{4t} + \beta\, te^{4t}$ com α e β constantes reais.

2. $y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$.

3. (a) $y(t) = e^{-t}\left(c_1 + c_2\, t + c_3\, t^2 + c_4 \cos(t\sqrt{2}) + c_5\, t \cos(t\sqrt{2}) + c_6 \operatorname{sen}(t\sqrt{2}) + c_7\, t \operatorname{sen}(t\sqrt{2})\right)$ com $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{R}$;
(b) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t}$ com $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$;
(c) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \operatorname{sen} t + c_4 t \operatorname{sen} t$ com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

4. (a) $y(t) = e^{-t} + t$;
(b) $y(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$;
(c) $y(t) = 4e^t - 3e^{2t} + 3te^{2t}$;
(d) $y(t) = 0$.