Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

Ficha extra: Exercícios Teóricos de Números Reais, Sucessões e Séries

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que:

   (i) Se $a + b = 0$, então $b = -a$; (ii) $-(-a) = a$; (iii) $(-1)\,a = -a$; (iv) $(-1)\,(-1) = 1$;

   (v) $-(a+b) = (-a) + (-b)$; (vi) $(-a)\,(-b) = ab$; (vii) $\dfrac{1}{-a} = -\dfrac{1}{a}$, se $a \neq 0$;

   (viii) $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$, se $b \neq 0$; (ix) Se $a^2 = a$, então ou $a = 0$ ou $a = 1$;

   (x) Se $a \neq 0$, então $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}} = a$; (xi) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{b}$;

   (xii) $|a| = \sqrt{a^2}$; (xiii) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ se $b \neq 0$.

2. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Mostre que:

   (i) Se $a < b$ e $c \leq d$ então $a + c < b + d$; (ii) Se $0 < a < b$ e $0 \leq c \leq d$ então $0 \leq ac \leq bd$;

   (iii) Se $a > 0$ então $\dfrac{1}{a} > 0$; (iv) Se $a < b$ então $a < \dfrac{1}{2}\,(a+b) < b$;

   (v) Se $0 < a < b$ então $a \leq \sqrt{ab} < b$; (vi) Se $0 \leq a < b$ então $a^2 \leq ab < b^2$;

   (vii) Se $a < b < 0$ então $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$; (viii) Se $0 < a < b$ então $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$;

3. Mostre que $\dfrac{1}{a} + a \geq 2$ para qualquer $a > 0$.

4. Mostre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$, se tem $xy \leq \dfrac{1}{\alpha}x^2 + \dfrac{\alpha}{4}y^2$.

5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que: (i) $\left[\dfrac{1}{2}\,(a+b)\right]^2 \leq \dfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2)$.

   Verifique ainda que $\left[\dfrac{1}{2}\,(a+b)\right]^2 = \dfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a = b$.

   (ii) $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \;\text{ e }\; b = 0)$.

6. Mostre que, para todos os reais a e b que satisfazem $a^2 + b^2 = 1$, se tem $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

7. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, com $x \leq z$. Mostre que: $x \leq y \leq z \Leftrightarrow |x - y| + |y - z| = |x - z|$.

8. Sejam $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que se $a < x < b$ e $a < y < b$ então $|x - y| < b - a$.

9. Sejam $A \subset B \subset \mathbb{R}$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios. Suponha que B é majorado e que, para cada $x \in B$, existe um $y \in A$ tal que $x \leq y$. Mostre que $\sup A = \sup B$.

10. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

11. Sejam A um subconjunto majorado e não vazio de $\mathbb{R}$ e $\alpha = \sup A$. Mostre que, para qualquer $\delta > 0$, tem-se $V_\delta(\alpha) \cap A \neq \emptyset$. No caso de se ter $\alpha \notin A$, o conjunto $V_\delta(\alpha) \cap A \neq \emptyset$ pode ser finito? Justifique.

12. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$, com $A \neq \emptyset$ e B majorado. Justifique a existência de $\sup A$ e de $\sup B$. Verifique que se tem $\sup A \leq \sup B$.

13. Sejam A e B dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $\sup A < \sup B$. Justifique as seguintes afirmações:

    (a) Se $x \in A$ então $x < \sup B$;

    (b) Existe pelo menos um $y \in B$ tal que $y > \sup A$.

14. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    (a) Mostre que, se $\sup A < \inf B$ então A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$;

    (b) Mostre, por meio de exemplos, que se $\sup A > \inf B$ e $\sup B > \inf A$ então A e B poderão ser ou não disjuntos.

15. Mostre que se X e Y são dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $\sup X > \inf Y$, então existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y < x$.

16. Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $a \leq b$, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$. Mostre que existem $\sup A$ e $\inf B$, com $\sup A \leq \inf B$.

17. Seja (u_n) uma sucessão de números reais tal que $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $u_n \to 0$. Diga, justificando, se (u_n) é decrescente.

18. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $a < b$. Considere as sucessões (x_n) e (y_n) definidas por

    $$x_1 = \sqrt{ab}, \quad y_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

    Mostre que (x_n) e (y_n) são convergentes e têm o mesmo limite.

19. Seja (t_n) uma sucessão de números reais tal que $0 \leq t_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões de números reais tais que $\lim x_n = \lim y_n = a \in \mathbb{R}$. Mostre que

    $$\lim \left[t_n x_n + (1 - t_n) y_n\right] = a.$$

20. Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões de números reais tais que $x_n > 0$, $y_n > 0$ e

    $$1 \leq \frac{x_n}{y_n} \leq 1 + \frac{1}{n},$$

    para todo o $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) converge se e só se (y_n) fôr convergente, tendo-se $\lim x_n = \lim y_n$ quando ambos os limites existirem.

21. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ converge. Mostre que $a_n \to 0$.

22. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, a sucessão (na_n) é limitada e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ diverge.

23. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $na_n \to +\infty$. Mostre que as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ são divergentes.

24. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, (a_n) é decrescente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Mostre que $\lim (na_n) = 0$.

25. Dê um exemplo de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente, com (a_n) decrescente e tal que $\lim (na_n) = 0$.

26. Dê um exemplo de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ não seja convergente. E se a sucessão (a_n) fôr tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, continuará a ser possível dar um exemplo de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ não seja convergente?

27. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Mostre que as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ têm a mesma natureza.

28. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1+a_n)$ **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a_n}$

29. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n \to +\infty$. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n+a_n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

30. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries convergentes, de termos positivos. Diga, justificando, se cada uma das seguintes séries é convergente, divergente ou se a sua natureza depende das sucessões (a_n) e (b_n).

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ **(f)** $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/n}a_n$ **(g)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}a_n$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)$ **(i)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+b_n}$ **(j)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ **(k)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+2}-a_n)$

31. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série convergente, de termos positivos. Seja (b_n) uma sucessão de números reais tal que $b_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\lim b_n = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$. Diga, justificando,

se cada uma das seguintes séries é convergente, divergente ou se a sua natureza depende das sucessões (a_n) e (b_n).

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ **(c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+b_n}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{1+a_n}$ **(e)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_{2n+6} - b_{2n})$ **(f)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{a_n}$

32. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$.

33. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 1$. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$

34. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_n \geq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.

35. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $\frac{1}{2} < a_n < \frac{3}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{2}\right)^n$ **(c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \quad (x \in \mathbb{R})$

36. Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões de números reais tais que $x_n \geq 0$ e $y_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de números reais tais que

$$a_n = \min\{x_n, y_n\} \qquad \text{e} \qquad b_n = \max\{x_n, y_n\}.$$

Indique, justificando, a natureza das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ em cada um dos seguintes casos.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente; **(b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são convergentes;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são divergentes.

37. Seja (x_n) uma sucessão de números reais tal que $x_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\lim \frac{n a_{n+1}}{a_n} = 1$. Justifique a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

38. Seja (x_n) uma sucessão de números reais tal que $x_n < 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\lim \frac{a_{n+1}}{n a_n} = 1$. Justifique a divergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

39. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine os valores de α para os quais a série $\sum_{n=2}^{+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ é convergente.