CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LCEEC, LCEGI, LCEIC (Tagus) e LCERC
$2^{\underline{o}}$ TESTE/ $1^{\underline{o}}$EXAME (Versão A)

22/Junho/2009 Duração: 1h30m / 3h

Para o 2^{o}Teste responda apenas às questões III e IV

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq \frac{x+2}{2} \right\}, \qquad B = \{ x \in \mathbb{R} : \log(x-2) \leq 0 \}$$

a) Mostre que $A \cap B =]2,3]$.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min B$, $\inf(A \cap B)$ e $\max(A \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

2. Calcule (caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \sqrt[n]{e^n + n^2}$$

3. Por indução, mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

II

1. Calcule os limites

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_x^{x^2} \cos t^2 dt}{\sin x}$

2. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$\phi(x) = \log x + f(\cos x)$$

Determine as funções ϕ' e ϕ''.

Para o 2^o Teste, responda apenas às questões desta página

III

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\dfrac{\arctan^3 x}{1+x^2}$ b) $\dfrac{1}{(x+1)\log(x+1)}$

2. Calcule a área do subconjunto do plano delimitado pelas linhas de equação $x = 1$, $x = -1$, $y = x+1$ e $y = e^{-x}$.

3. Considere a função f dada por

$$f(x) = \int_1^{x^2-x} te^{t^3}dt$$

a) Justificando, determine o domínio de f e o domínio de diferenciabilidade de f. Determine a função f'.

b) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais, se os houver.

c) Justificando, mostre que se tem $f([0,1]) = [f(a), f(b)]$,determinando a e b.

IV

1. a) Determine a natureza de cada uma das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{3n+2n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+1}{\pi^{n+2}}.$$

b) Calcule a soma de uma das séries anteriores.

2. Determine o conjunto de pontos em que é convergente (especificando o tipo de convergência) a seguinte série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n+1} \;.$$

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LCEEC, LCEGI, LCEIC (Tagus) e LCERC
$2^{\underline{o}}$ TESTE/ 1^{o}EXAME (Versão B)

22/Junho/2009 Duração: 1h30m / 3h

Para o 2^oTeste responda apenas às questões III e IV

I

1.Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-2| \le \frac{x+1}{2}\right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \log(x-1) \le 0\}$$

a) Mostre que $A \cap B =]1, 2]$.
b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min B$, $\inf(A \cap B)$ e $\max(A \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

2. Calcule (caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \sqrt[n]{\pi^n + n^3}$$

3. Por indução, mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = 1 - \frac{1}{2n+3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

II

1. Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_x^{x^3} \cos\sqrt{t}\,dt}{\sin x}$

2. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$\psi(x) = \log x + f(\sin x)$$

Determine as funções ψ' e ψ''.

Para o 2^o Teste, responda apenas às questões desta página

III

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\dfrac{\log^3 x}{x}$ b) $\dfrac{1}{(x^2+1)\arctan x}$

2. Calcule a área do subconjunto do plano delimitado pelas linhas de equação $x = 1$, $x = -1$, $y = 2x+1$ e $y = e^{-x}$.

3. Considere a função f dada por

$$f(x) = \int_1^{x^4-2x^2} e^{t^2}\,dt$$

a) Justificando, determine o domínio de f e o domínio de diferenciabilidade de f. Determine a função f'.

b) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais, se os houver.

c) Justificando, mostre que se tem $f([-1,1]) = [f(a), f(b)]$,determinando a e b.

IV

1.a) Determine a natureza de cada uma das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{3n^2+1} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n+1}{4^{n+1}}.$$

b). Calcule a soma de uma das séries anteriores.

2. Determine o conjunto de pontos em que é convergente (especificando o tipo de convergência) a seguinte série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n}{3^n+1}\ .$$