Transformada de Laplace

Definição (Transformada de Laplace)

A uma função real f definida no intervalo $[0, +\infty[$ e $s \in \mathbb{R}$ associa-se o integral

$$\mathcal{L}[f](s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

A função $s \mapsto \mathcal{L}[f](s)$ designa-se por $\mathcal{L}[f]$ e diz-se que é a transformada de Laplace de f.

Observações:

- É usual escrever-se $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$;
- O integral (1) é impróprio pelo que fica bem definido apenas se o correspondente limite exitir;
- Mostra-se que (ver bibliografia), se o limite em (1) existir para algum valor $s = \alpha$ então existe para qualquer $s > \alpha$.

É desejável encontrar uma classe de funções f (com interesse em problemas de engenharia) na qual a transformada de Laplace esteja bem definida.

Definição (funções seccionalmente contínuas)

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se seccionalmente contínua se existe uma partição finita

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

do intervalo $[a, b]$ tal que

- A restrição de f a cada subintervalo aberto $t_i < t < t_{i+1}$ é contínua;
- Existem os limites laterais de f nos extremos de cada subintervalo.

Exemplo

A função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -1 & \text{se } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{se } t \geqslant 2 \end{cases}$$

é seccionalmente contínua em $[0, 2]$.

No caso da função neste exemplo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-st}\,f(t)dt = \int_0^1 e^{-st}\,e^t\,dt + \int_1^2 e^{-st}\,(-1)dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-(s-1)t}}{s-1}\right]_{t=0}^{t=1} - \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=1}^{t=2}$$

pelo que a transformada de Laplace de f é

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,f(t)dt = -\frac{e^{-(s-1)}-1}{s-1} + \frac{e^{-s}-1}{s}\,e^{-s}.$$

Note-se que no exemplo anterior a função f é seccionalmente contínua e de suporte compacto, i. e. $f(t) = 0$ para $t > 2$.

Em geral, para funções seccionalmente contínuas e de suporte compacto a transformada de Laplace está definida para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

Para incluir outras funções, como exponencial, trigonométricas, etc.

Consideremos a classe das funções $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfazem as condições:

1. f é seccionalmente contínua no intervalo $[0, R]$ para qualquer $R > 0$;
(estas funções dizem-se seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$)
2. Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-at} f(t)$ é uma função limitada em $[0, +\infty[$.
(as funções com esta propriedade dizem-se de ordem exponencial)

Designa-se esta classe por $\mathcal{E}_a$ e nas condições indicadas escreve-se $f \in \mathcal{E}_a$.

Teorema

Seja $a \in \mathbb{R}$ e uma função $f \in \mathcal{E}_a$. Então a transformada de Laplace $\mathcal{L}[f](s)$ está definida para qualquer $s > a$.

Exemplos:

Seja $f(t)=1$, para $t \geqslant 0$. Então $f \in \mathcal{E}_0$, pois é contínua e limitada em $[0,+\infty[$, e

$$\mathcal{L}[1](s) = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-st}\,dt = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=r} = \lim_{r\to+\infty} \left(\frac{e^{-rs}-1}{-s}\right)$$

$$= \frac{1}{s} \qquad \text{para } s>0.$$

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f(t)=e^{at}$, para $t \geqslant 0$. É claro que $f \in \mathcal{E}_a$ donde

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-(s-a)t}\,dt = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_{t=0}^{t=r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{e^{-(s-a)r}-1}{-(s-a)}$$

$$= \frac{1}{s-a} \qquad \text{para } s>a.$$

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f(t) = \text{sen}\,(at)$, para $t \geqslant 0$. Então $f \in \mathcal{E}_0$ e

$$\mathcal{L}[\text{sen}\,(at)](s) = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-st}\text{sen}\,(at)\,dt$$

O integral calcula-se por partes

$$\int_0^r e^{-st}\text{sen}\,(at)\,dt = \left[e^{-st}\,\frac{-\cos(at)}{a}\right]_{t=0}^{t=r} - \int_0^r (-s)e^{-st}\,\frac{-\cos(at)}{a}\,dt$$

$$= \frac{1 - e^{-sr}\cos(ar)}{a} - \frac{s}{a^2}\,e^{-sr}\,\text{sen}\,(ar) - \frac{s^2}{a^2}\int_0^r e^{-st}\,\text{sen}\,(at)\,dt$$

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)\int_0^r e^{-st}\text{sen}\,(at)\,dt = \frac{1 - e^{-sr}\cos(ar)}{a} - \frac{s}{a^2}\,e^{-sr}\,\text{sen}\,(ar)$$

$$\int_0^r e^{-st}\text{sen}\,(at)\,dt = \frac{a^2}{s^2 + a^2}\left(\frac{1 - e^{-sr}\cos(ar)}{a} - \frac{s}{a^2}\,e^{-sr}\,\text{sen}\,(ar)\right)$$

Conclui-se que

$$\mathcal{L}[\text{sen}\,(at)](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \text{para } s > 0.$$

Escrever-se-á $f \in \mathcal{E}$ se a função f está na classe $\mathcal{E}_a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, i. e. $\mathcal{E} = \displaystyle\bigcup_{a\in\mathbb{R}} \mathcal{E}_a$.

Proposição: Propriedades da transformada de Laplace

1. (Linearidade) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{E}$, então

$$\mathcal{L}[\alpha f + g](s) = \alpha\mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s)$$

definida na intersecção dos domínios de $\mathcal{L}[f](s)$ e $\mathcal{L}[g](s)$.

2. Seja F uma primitiva em $[0, +\infty[$ da função $f \in \mathcal{E}_a$. Então $F \in \mathcal{E}_a$.

3. Seja $f \in \mathcal{E}_a$ contínua e f' seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ então

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0), \qquad \text{para } s > a$$

4. Sejam f uma função na classe C^1 em $[0, +\infty[$, $f' \in \mathcal{E}_a$ e f'' seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$. Então

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\,\mathcal{L}[f](s) - f(0)s - f'(0)$$

para $s > a$.

5. Sejam f uma função na classe $C^{(n-1)}$ em $[0,+\infty[$, $f^{(n-1)} \in \mathcal{E}_a$ e $f^{(n)}$ seccionalmente contínua em $[0,+\infty[$. Então

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

para $s > a$.

Do exemplo anterior e das propriedades acima obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos(at)](s) &= s\,\mathcal{L}\left[\frac{\operatorname{sen}(at)}{a}\right](s) - \frac{\operatorname{sen}(0)}{a} = \frac{s}{a}\,\frac{a}{s^2+a^2} \\ &= \frac{s}{s^2+a^2} \qquad \text{para } s > 0.\end{aligned}$$

e (exercício!)

$$\mathcal{L}[\cosh(at)](s) = \frac{s}{s^2-a^2} \qquad \text{para } s > |a|.$$

Aplicação: Resolução de problemas de valores iniciais

Considere-se o PVI

$$y'' - y' - 2y = 10\,\mathrm{sen}\,t, \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

Admita-se que a solução é tal que $y \in \mathcal{E}$ e ainda que $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$.
(note-se que a solução existe e é única!)
Em conta da transformada de Laplace e das suas propriedades tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y'' - y' - 2y\right](s) &= \mathcal{L}[10\,\mathrm{sen}\,t](s) \\
Y(s)\left(s^2 - s - 2\right) - sy(0) - y'(0) + y(0) &= \frac{10}{s^2+1} \\
Y(s)\,(s-2)(s+1) &= s - 1 + \frac{10}{s^2+1} \\
Y(s) &= \frac{s^3 - s^2 + s + 9}{(s-2)(s+1)(s^2+1)}
\end{aligned}$$

Reduziu-se a EDO, com incógnita $y(t)$, a uma equação algébrica, para $Y(s)$, de resolução imediata.