<u>Ficha 9</u>
<u>Resolução dos exercícios de auto-avaliação</u>

III.1 Discuta a existência dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

<u>Resolução:</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{4\cdot 0\cdot 0^3}{\left(0^2+0^2\right)^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da linha $y = mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{4x(mx)^3}{\left(x^2+(mx)^2\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4xm^3x^3}{\left(x^2+m^2x^2\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4m^3x^4}{\left(x^2\left(1+m^2\right)\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4m^3x^4}{\left(x^2\right)^2\left(1+m^2\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4m^3x^4}{x^4\left(1+m^2\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4m^3}{\left(1+m^2\right)^2} = \frac{4m^3}{\left(1+m^2\right)^2}$$

Para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite.
Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y = mx$ são diferentes.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y}{2x^3+5y}$

<u>Resolução:</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2y}{2x^3+5y} = \frac{0^3-2\cdot 0}{2\cdot 0^3+5\cdot 0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2y}{2x^3+5y} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3-2y}{2x^3+5y}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da linha $y = mx^3$ com $m \neq -\frac{2}{5}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^3\\ m\neq -\frac{2}{5}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx^3) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2mx^3}{2x^3+5mx^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3(1-2m)}{x^3(2+5m)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2m}{2+5m} = \frac{1-2m}{2+5m}.$$

Para cada valor de $m \neq -\frac{2}{5}$, vem um valor diferente para o limite.

Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das linhas $y = mx^3$ com $m \neq -\frac{2}{5}$ são diferentes.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2y}{2x^3+5y}$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2-1+(x-1)^2}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2-1+(x-1)^2} = \frac{0^2}{0^2+0^2-1+(0-1)^2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2-1+(x-1)^2} = \frac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Temos, $\frac{x^2}{x^2+y^2-1+(x-1)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2-1+x^2-2x+1} = \frac{x^2}{2x^2+y^2-2x}$.

Seja $f(x,y) = \frac{x^2}{2x^2+y^2-2x}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$:

- segundo a direcção da recta $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2+(mx)^2-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2+m^2x^2-2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(2x+m^2x-2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x+m^2x-2} = \frac{0}{2\cdot 0+m^2\cdot 0-2} = 0$$

Como o limite direccional na vizinhança do ponto (0,0), ao longo da recta $y = mx$, existe e é igual a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2-1+(x-1)^2}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

- segundo a direcção da linha $y=\sqrt{2x}$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{2x}}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f\left(x,\sqrt{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2+\left(\sqrt{2x}\right)^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2+2x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Logo, como os limites direccionais segundo as rectas $y=mx$ são diferentes dos limites direccionais segundo a linha $y=\sqrt{2x}$, então não existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2-1+(x-1)^2}$.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}=\frac{1-\cos\left(0^2+0^2\right)}{\left(0^2+0^2\right)0^20^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\text{ (Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}=\dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$.

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $y=mx$ com $m\neq 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx\\ \text{com } m\neq 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2+(mx)^2\right)}{\left(x^2+(mx)^2\right)x^2(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2+m^2x^2\right)}{\left(x^2+m^2x^2\right)x^2m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2+m^2x^2\right)}{\left(x^2+m^2x^2\right)x^4m^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2+m^2x^2\right)}{x^6m^2+m^4x^6}\underset{\substack{\text{Regra de}\\ \text{Cauchy}}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(x^2+m^2x^2\right)\right)'}{\left(x^6m^2+m^4x^6\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+m^2x^2\right)'\operatorname{sen}\left(x^2+m^2x^2\right)}{6x^5m^2+6m^4x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x+m^2 2x\right)\operatorname{sen}\left(x^2+m^2x^2\right)}{6x^5m^2+6m^4x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(1+m^2\right)\operatorname{sen}\left(x^2+m^2x^2\right)}{6x^5m^2\left(1+m^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+m^2x^2\right)}{3x^4m^2}$$

$$\underset{\substack{\text{Regra de}\\ \text{Cauchy}}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\operatorname{sen}\left(x^2+m^2x^2\right)\right)'}{\left(3x^4m^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x+m^2 2x\right)\cos\left(x^2+m^2x^2\right)}{12x^3m^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(1+m^2\right)\cos\left(x^2+m^2x^2\right)}{12x^3m^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+m^2\right)\cos\left(x^2+m^2x^2\right)}{6x^2m^2}=\frac{\left(1+m^2\right)\cos\left(0^2+m^20^2\right)}{6\cdot 0^2m^2}=\frac{\left(1+m^2\right)\cos 0}{0^+}=\frac{\left(1+m^2\right)1}{0^+}=\frac{1+m^2}{0^+}=+\infty$$

Assim, o limite direccional na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y=mx$ com $m\neq 0$ não existe.

Logo, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{-\frac{1}{x^2(y-1)^2}}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{-\frac{1}{x^2(y-1)^2}} = e^{-\frac{1}{0^2(1-1)^2}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

Resolução:

$$\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2} \underset{\substack{\text{Fazendo mudança de variável} \\ x=\frac{1}{u} \text{ e } y=\frac{1}{v}. \\ \text{Como } x\to+\infty, \text{ isto é, } \frac{1}{u}\to+\infty \\ \text{então } u\to 0^+. \\ \text{Como } y\to+\infty, \text{ isto é, } \frac{1}{v}\to+\infty. \\ \text{então } v\to 0^+.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{(u,v)\to(0^+,0^+)} \frac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\left(\frac{1}{u}\right)^2+\left(\frac{1}{v}\right)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Como o $\lim\limits_{(u,v)\to(0^+,0^+)} \frac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\left(\frac{1}{u}\right)^2+\left(\frac{1}{v}\right)^2} = \frac{\infty}{\infty}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto $(0^+,0^+)$.

Seja $f(u,v) = \frac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\left(\frac{1}{u}\right)^2+\left(\frac{1}{v}\right)^2} = \frac{\frac{u+v}{uv}}{\frac{v^2+u^2}{u^2v^2}} = \frac{u^2v+uv^2}{u^2+v^2}$.

Calculemos o limite quando (u,v) se aproxima de$(0^+,0^+)$ segundo os eixos coordenados:

- eixo dos uu:

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(0^+,0^+) \\ v=0}} f(u,v) = \lim_{u\to 0^+} f(u,0) = \lim_{u\to 0^+} \frac{u^2 0+u0^2}{u^2+0^2} = \lim_{u\to 0^+} 0 = 0$$

O limite quando (u,v) se aproxima de $(0^+,0^+)$ segundo a direcção da recta $v = 0$ é zero.

- eixo dos vv:

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(0^+,0^+) \\ u=0}} f(u,v) = \lim_{v\to 0^+} f(0,v) = \lim_{v\to 0^+} \frac{0^2 v+v0^2}{0^2+v^2} = \lim_{v\to 0^+} 0 = 0$$

O limite quando (u,v) se aproxima de $(0^+,0^+)$ segundo a direcção da recta $u = 0$ é zero.

Como os limites na vizinhança do ponto (0,0), ao longo dos eixos coordenados, existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim\limits_{(u,v)\to(0^+,0^+)} f(u,v)=0$, isto é,

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0:(u,v)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\wedge\left\|(u,v)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}<\varepsilon\Rightarrow\left|f(u,v)-0\right|<\delta.$$

Fixemos $\delta>0$ qualquer.

Queremos encontrar $\varepsilon>0$, tal que, se

$$\left\|(u,v)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}=\left\|(u-0,v-0)\right\|_{\mathbb{R}^2}=\left\|(u,v)\right\|_{\mathbb{R}^2}\underset{\substack{\text{Usando a norma}\\ \text{Euclideana}}}{=}\sqrt{u^2+v^2}<\varepsilon$$

então $\left|f(u,v)-0\right|<\delta$.

Temos,

$$\left|f(u,v)-0\right|=\left|\frac{u^2v+uv^2}{u^2+v^2}-0\right|=\left|\frac{u^2v+uv^2}{u^2+v^2}\right|=\frac{\left|u^2v+uv^2\right|}{\left|u^2+v^2\right|}\underset{\substack{\uparrow\\ u^2+v^2>0,\ \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}}{=}\frac{\left|u^2v+uv^2\right|}{u^2+v^2}\underset{\substack{\text{Desigualdade}\\ \text{Triangular}}}{\leq}\frac{\left|u^2v\right|+\left|uv^2\right|}{u^2+v^2}$$

$$\underset{(*)}{\leq}\frac{u^2\sqrt{u^2+v^2}+v^2\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2}=\frac{\sqrt{u^2+v^2}\left(u^2+v^2\right)}{u^2+v^2}=\sqrt{u^2+v^2}\underset{\substack{\text{Por}\\ \text{hipótese}}}{<}\varepsilon<\delta$$

Logo, basta tomar $\varepsilon<\delta$ para que

$$\forall\delta>0\ \exists 0<\varepsilon<\delta:(u,v)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\wedge\left\|(u,v)-(0,0)\right\|_{\mathbb{R}^2}<\varepsilon\Rightarrow\left|f(u,v)-0\right|<\delta.$$

Observação** $(*)$ **:

Atendendo a que

- $|u|=\sqrt{u^2}\leq\sqrt{u^2+v^2},\forall u,v\in\mathbb{R}\quad(1)$
- $|v|=\sqrt{v^2}\leq\sqrt{u^2+v^2},\forall u,v\in\mathbb{R}\quad(2)$

vem

- $\left|u^2v\right|=u^2\left|v\right|\underset{\text{Por }2}{\leq}u^2\sqrt{u^2+v^2},\forall u,v\in\mathbb{R}$
- $\left|uv^2\right|=v^2\left|u\right|\underset{\text{Por }1}{\leq}v^2\sqrt{u^2+v^2},\forall u,v\in\mathbb{R}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\dfrac{(x+y-4)^2}{x^2+y^2-2x-6y+10}$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)}\frac{(x+y-4)^2}{x^2+y^2-2x-6y+10}=\lim_{(x,y)\to(1,3)}\frac{(x-1+1+y-3+3-4)^2}{x^2-2x+1-1+y^2-6y+9-9+10}=\lim_{(x,y)\to(1,3)}\frac{\left((x-1)+(y-3)\right)^2}{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

$$\underset{\substack{\text{Fazendo mudança de variável}\\ u=x-1\text{ e }v=y-3.\\ \text{Como }x\to1\text{ então }x-1\to0.\\ \text{Assim, }u\to0.\\ \text{Como }y\to3\text{ então }y-3\to0.\\ \text{Assim, }v\to0.}}{=}\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{(u+v)^2}{u^2+v^2}=\frac{(0+0)^2}{0^2+0^2}=\frac{0}{0}\ \text{(Indeterminação).}$$

Como o $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\dfrac{(u+v)^2}{u^2+v^2}=\dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Seja $f(x,y)=\dfrac{(u+v)^2}{u^2+v^2}$.

Calculemos o limite quando (u,v) se aproxima de $(0,0)$ segundo a direcção da recta $v = mu$:

$$\lim_{\substack{(u,v)\to(0,0)\\ v=mu}} f(x,y) = \lim_{u\to 0} f(u,mu) = \lim_{u\to 0}\frac{(u+mu)^2}{u^2+(mu)^2} = \lim_{u\to 0}\frac{(u(1+m))^2}{u^2+m^2u^2} = \lim_{u\to 0}\frac{u^2(1+m)^2}{u^2(1+m^2)} = \lim_{u\to 0}\frac{(1+m)^2}{1+m^2} = \frac{(1+m)^2}{1+m^2}.$$

Para cada valor de m, vem um valor diferente para o limite.
Assim, os limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $v = mu$ são diferentes.

Logo, atendendo a que o limite de uma função quando existe é único, podemos concluir que não existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{(x+y-4)^2}{x^2+y^2-2x-6y+10}$.

III 2. Considere a função real definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\frac{1}{y}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{, se } y = 0 \end{cases}$$

Prove que f é contínua na origem.

Resolução:

Provemos que a função f é contínua no ponto $(0,0)$.

Para isso, vamos ter que mostrar que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Como $f(0,0) = 0,$ e uma vez que no enunciado é dito para provar que a função é contínua, então é porque o limite existe e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Assim, mostremos por definição que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$ isto é,

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \wedge \|(x,y)-(0,0)\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y)-0| < \delta.$$

Fixemos $\delta > 0$ qualquer.
Queremos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que se

$$\|(x,y)-(0,0)\|_{\mathbb{R}^2} = \|(x-0,y-0)\|_{\mathbb{R}^2} = \|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2} \underset{\substack{\text{Usando a norma}\\ \text{Euclideana}}}{=} \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \underset{\substack{\text{ambos os membros}\\ \text{são positivos}}}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 < \varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+y^2)^2} < \varepsilon^2 \underset{\substack{\uparrow\\ x^2+y^2\geq 0,\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2}}{\Leftrightarrow} x^2+y^2 < \varepsilon^2 \text{ então } |f(x,y)-0| < \delta.$$

Temos,

$$|f(x,y)-0| = \left|xy^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y} - 0\right| = \left|xy^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| = |xy^2|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| = y^2|x|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{A função seno}\\ \text{é limitada, isto é,}\\ \left|\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right|\leq 1, \forall y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}}{\leq} y^2|x|$$

$$\underset{(*)}{\leq} (y^2+x^2)\sqrt{x^2+y^2} \underset{\substack{\text{Por}\\ \text{hipótese}}}{<} \varepsilon^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon^3 < \delta \Leftrightarrow \varepsilon^3 < \delta \Leftrightarrow \varepsilon < \sqrt[3]{\delta}$$

Logo, basta tomar $\varepsilon < \sqrt[3]{\delta}$ para que

$$\forall \delta > 0\ \exists 0 < \varepsilon < \sqrt[3]{\delta} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \wedge \|(x,y)-(0,0)\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon \Rightarrow |f(x,y)-0| < \delta.$$

Observação $(*)$ ***:***

Atendendo a que $\bullet |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\bullet\ y^2 \le x^2 + y^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$

vem

$$y^2|x| \le \left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}$$

III.3 Considere a função:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2} & \text{, se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Estude $f(x,y)$ quanto à continuidade.

Resolução:

Estudemos a continuidade de f em todos os pontos do seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}^2$.
Pela forma como f está definida, por ramos, iremos estudar a continuidade em duas partes:

Num ponto $(x,y)\neq(0,0)$

A função é contínua, porque é a soma, o produto e o quociente de funções contínuas em pontos onde o denominador não se anula.

No ponto $(x,y)=(0,0)$

A função f é contínua no ponto $(0,0)$ se, e só se,

existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Comecemos por verifiquemos se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Temos que, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2} = \dfrac{7\cdot 0\cdot 0^2+2\cdot 0^2|0|}{0^2+0^2} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminação).

Como o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$:

- segundo a direcção da recta $y = mx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{7x(mx)^2+2x^2|x|}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{7xm^2x^2+2x^2|x|}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(7m^2x+2|x|\right)}{x^2\left(1+m^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{7m^2x+2|x|}{1+m^2} = \frac{7m^2\cdot 0+2|0|}{1+m^2} = 0$$

- segundo a direcção da recta $y=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{7x\cdot 0^2+2x^2|x|}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2|x|}{x^2}=\lim_{x\to 0}2|x|=2|0|=0$$

Como os limites na vizinhança do ponto (0,0), ao longo das rectas $y=mx$ e da recta $y=0$ existem e são iguais a zero, nada podemos concluir em relação ao $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2}$, apenas que se o seu limite existir é zero.

Verifiquemos, então, recorrendo à definição se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,$ isto é,

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0:(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\wedge\|(x,y)-(0,0)\|<\varepsilon\Rightarrow|f(x,y)-0|<\delta.$$

Fixemos $\delta>0$ qualquer.
Queremos encontrar $\varepsilon>0$ tal que se

$$\|(x,y)-(0,0)\|=\|(x-0,y-0)\|=\|(x,y)\|\underset{\substack{\text{Usando a norma}\\ \text{Euclideana}}}{=}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

então $|f(x,y)-0|<\delta$.
Temos,

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{7xy^2+2x^2|x|}{x^2+y^2}\right|=\frac{|7xy^2+2x^2|x||}{|x^2+y^2|}\underset{\substack{\text{Desigualdade}\\ \text{triangular}}}{\le}\frac{|7xy^2|+|2x^2|x||}{|x^2+y^2|}=\frac{7|xy^2|+2|x^2|x||}{x^2+y^2}$$

$$\underset{(*)}{\le}\frac{7(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}+2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\frac{9(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=9\sqrt{x^2+y^2}\underset{\substack{\text{Por}\\ \text{hipótese}}}{<}9\varepsilon<\delta\Leftrightarrow\varepsilon<\frac{\delta}{9}$$

Logo, basta tomar $\varepsilon<\dfrac{\delta}{9}$ para que

$$\forall\delta>0\ \exists 0<\varepsilon<\frac{\delta}{9}:(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\wedge\|(x,y)-(0,0)\|<\varepsilon\Rightarrow|f(x,y)-0|<\delta.$$

Observação $(*)$ ***:***

Atendendo a que

- $|x|=\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+y^2},\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(1)$
- $x^2\le x^2+y^2,\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(2)$
- $y^2\le x^2+y^2,\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(3)$

vem

- $|x^2|x||\underset{|x|\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}}{=}|x||x^2|=|x|x^2\underset{\text{Por 1 e 2}}{\le}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2},\forall x,y\in\mathbb{R}$
- $|xy^2|=|x\cdot y^2|=y^2|x|\underset{\text{Por 3 e 1}}{\le}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2},\forall x,y\in\mathbb{R}$

Por outro lado, como $f(0,0)=0$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0).$
Assim, a função f é contínua no ponto (0,0).

<u>Conclusão final:</u>
A função f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

III.4 Verifique se a função $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^3+y+\operatorname{tg} x}$ é prolongável por continuidade à origem.

Resolução:

A função f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$ sse o limite existe e é finito nesse ponto.

Temos, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^3+y+\operatorname{tg} x}=\frac{0}{0^3+0+\operatorname{tg} 0}=\frac{0}{0}$ (indeterminação).

Como o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^3+y+\operatorname{tg} x}=\frac{0}{0}$, temos de recorrer aos limites direccionais na vizinhança do ponto (0,0).

Calculemos o limite quando (x,y) se aproxima de $(0,0)$

- segundo a direcção da parábola $y=x^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to0} f\left(x,x^2\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^3+x^2+\operatorname{tg} x}\underset{\substack{\text{Regra}\\ \text{de}\\ \text{Cauchy}}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x^2+2x+\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$=\frac{2\cdot0}{3\cdot0^2+2\cdot0+\dfrac{1}{\cos^2 0}}=\frac{0}{0+0+\dfrac{1}{1}}=\frac{0}{1}=0.$$

- segundo a direcção da recta $y=-\operatorname{tg} x$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-\operatorname{tg} x}} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^3+(-\operatorname{tg} x)+\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

Calculemos os limites laterais no ponto x=0:

- $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

Como os limites laterais no ponto x=0 são diferentes, então não existe $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-\operatorname{tg} x}} f(x,y)$.

Deste modo, podemos concluir que não existe o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{4x^2y^2+(y-x)^2}$, e portanto a função f não é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.