CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
$2^{\underline{0}}$ TESTE / $1^{\underline{0}}$ EXAME (Versão A)

11/Janeiro/2010 Duração: 1h30m / 3h

Para o 2^oTeste responda apenas às seguintes questões:

I.3., II.1.c), II.2.b), II.3., III. e IV.

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x} \geq 2 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - e| \geq \frac{e}{2} \right\}$$

a) Mostre que $A \cap B = \left]0, \frac{e}{2}\right]$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$,
$\max A, \quad \inf(A \cap B), \quad \max(A \cap B \cap \mathbb{Q}), \quad \min(A \cap \mathbb{Z}), \quad \sup B.$

2. Por indução, mostre que

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

3. [2^o **Teste**] Determine a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{1+3^n}$.

II

1. [2^o **Teste**: resolva apenas a alínea **c)**]
Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x}\right)^{\log x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \arctan 2x}{1 + 3x^2}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\int_{x^2}^{x} \sqrt{t}e^t dt}{x-1}$

2. [**2^o Teste**: resolva apenas a alínea **b)**]
Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\cos x(1+\sin x)^4$ **b)** xe^{2x} **c)** $\dfrac{2x+1}{(x-2)(1+x^2)}$

3. [**2^o Teste**]
Calcule a área do subconjunto do plano delimitado pelas linhas de equação

$$x = \frac{1}{2}, x = 2, y = \frac{1}{x} \text{ e } y = x.$$

III [2^o Teste]

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f não é contínua no ponto zero.
b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada f'.
c) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
d) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais e absolutos .

IV [2^o Teste]

Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e considere a função dada por

$$\phi(x) = \int_x^{2x} \frac{g(t)}{t} dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

a) Se g é uma função par, mostre que ϕ é função par.
b) Supondo que $g(0) = 1$ e que g é diferenciável na origem, mostre que existe $\lim_{x\to0^+} \phi(x)$ e indique o seu valor.
[Sugestão: Atenda a que se tem $g(t) = (g(t) - g(0)) + g(0)$ e utilize o Teorema da média.]

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEEC, LEGI, LEIC (Tagus) e LERC
2º TESTE / 1º EXAME (Versão B)

11/Janeiro/2010 Duração: 1h30m / 3h

Para o 2ºTeste responda apenas às seguintes questões:

I.3., II.1.c), II.2.b), II.3., III. e IV.

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-6}{x} \geq 4 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x+e| \geq \frac{e}{2} \right\}$$

a) Mostre que $A \cap B = \left[-\frac{e}{2}, 0 \right[$.

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$,
$\min A, \quad \inf(A \cap B), \quad \min(A \cap B \cap \mathbb{Q}), \quad \max(A \cap \mathbb{Z}), \quad \sup B.$

2. Por indução, mostre que

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \qquad \sum_{k=1}^{n} k 2^{k-1} = 1 + (n-1)2^n$$

3. [**2º Teste**] Determine a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{1+4^n}$.

II

1. [**2º Teste**: resolva apenas a alínea **c)**]
Calcule (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

a) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{2x} \right)^{\log x}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x^2+1)\arctan x}{2+x^2}$ **c)** $\lim_{x \to -1} \frac{\int_{-x}^{x^2} \frac{e^t}{t} dt}{x+1}$

2. [**2^o Teste**: resolva apenas a alínea **b)**]
Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\sin x(1+\cos x)^3$ **b)** xe^{3x} **c)** $\dfrac{1-2x}{(x+2)(1+x^2)}$

3. [**2^o Teste**]
Calcule a área do subconjunto do plano delimitado pelas linhas de equação

$$x=\frac{1}{2}, x=2, y=\frac{2}{x} \text{ e } y=2x.$$

III [2^o Teste]

Considere a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x} & \text{se } x<0\\ xe^{-x} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

a) Mostre que f não é contínua no ponto zero.
b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada f'.
c) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
d) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais e absolutos .

IV [2^o Teste]

Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e considere a função dada por

$$\phi(x)=\int_x^{2x}\frac{g(t)}{t}dt \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

a) Se g é uma função par, mostre que ϕ é função par.
b) Supondo que $g(0)=1$ e que g é diferenciável na origem, mostre que existe $\lim\limits_{x\to 0^+}\phi(x)$ e indique o seu valor.
[Sugestão: Atenda a que se tem $g(t)=(g(t)-g(0))+g(0)$ e utilize o Teorema da média.]