Correcção do teste 1B

1.1—A inequação $x^4 + 5x^3 + 6x^2 \leq 0$ é equivalente a

$$x^2(x^2 + 5x + 6) \leq 0 \equiv x = 0 \vee -3 \leq x \leq -2.$$

1.2—

Maj$(A) = [0, +\infty[$; Min$(A) =]-\infty, -3]$;

$\sup(A) = \max(A) = 0$;

$\inf(A) = \min(A) = -3$.

2.—Atenção: devido a um erro no enunciado desta questão, foi atribuída a cotação máxima (1 val.) a todos os alunos (mesmo aqueles que responderam ao enunciado A). *A resolução que se apresenta aqui é relativa ao enunciado correcto*, i.e., "estabeleça por indução que para todo o $n \geq 1$ se tem $\sum_{k=1}^{n} k/2^k = 2 - (n+2)/2^n$."
A verificação para $n = 1$ é simples. Admitamos que $\sum_{k=1}^{n} k/2^k = 2 - (n+2)/2^n$ para demonstrar que $\sum_{k=1}^{n+1} k/2^k = 2 - (n+3)/2^{n+1}$. Tem-se que,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =_{\text{H.I.}} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

como se pretendia.

3.1—Falsa
3.2—Verdadeira.

4.1—Mostramos por indução que $(\forall n \geq 1) a_{n+1} \geq a_n$. A verificação para $n = 1$ é simples, admitindo que $a_{n+1} \geq a_n$ para demonstrar que $a_{n+2} \geq a_{n+1}$, obtemos:

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow 2a_n \geq 2a_{n+1} \Rightarrow 2a_{n+1} + 3 \geq 2a_n + 3 \Rightarrow \frac{2a_{n+1}+3}{4} \geq \frac{2a_n+3}{4} \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1},$$

como se pretendia demonstrar.
4.2—Nas condições indicadas (a_n) é monótona e limitada, logo é necessariamente convergente. Suponhamos então que α é o limite de (a_n). Usando o facto de (a_{n+1}) também convergir para α e passando a relação de recorrência ao limite, obtemos a sequinte equação que α deve satisfazer:

$$\alpha = \frac{2\alpha+3}{4} \equiv 2\alpha = 3 \equiv \alpha = \frac{3}{2}.$$

5.— (a) ; (b) ; (c) ;

6.— (a) ; (b) ; (c) ;

7.1—No conjunto dado a função obtém-se de funções contínuas usando operações algébricas e composição de funções, logo é contínua.
7.2.—Se f é contínua em $x = 1$ então tem-se $f(1) = \lim_{x\to1} f(x)$. Calculando,

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}(x+1) = 1 \times 2 = 2,$$

Assim, $f(1) = 2$.

8.—A função é contínua em $a = 1$ pois como se tem $\lim_{x1} x = 1$ e $\lim_{x\to1} x^2 = 1$. dado $\epsilon > 0$ podemos fixar $\delta > 0$ tal que $x \in]1-\delta, 1]$ implica $|x-1|, |x^2-1| < \epsilon$, ou seja, implica que $|f(x)-1| < \epsilon$. Isto mostra que $\lim_{x\to1} f(x) = 1 = f(1)$. A função não é contínua em $b = 1/2$, por exemplo pois, considerando uma sucessão (α_n) de irracionais, tal que $(\alpha_n) \to 1/2$ tem-se $(f(\alpha_n)) \to 1/4$, já se considerarmos uma sucessão (β_n) de racionais a tender para $1/2$ tem-se $(f(\beta_n)) \to 1/2$, pelo que nem sequer existe $\lim_{x\to1/2} f(x)$.