Exercícios de Análise Matemática I/II

Departamento de Matemática do
Instituto Superior Técnico

2 de Setembro de 2002

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

Índice

Capítulo 1

Números Reais. Sucessões.

1.1 Indique, se existirem, os majorantes, os minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos conjuntos:

a) $V_\epsilon(a)$ (onde a é um real e ϵ um real positivo).

b) $\{x : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x^4 - 3x^3 + 2x^2 \leq 0\}$.

(Grupo I do 1º Teste de 24/2/79)

1.2 Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2\right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.

b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

(Pergunta 1 do Grupo I do Exame de 1ª Época de 8/1/97)

1.3 Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}, \qquad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq 0\}.$$

Indique, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, o $\inf A$, $\min(A \cup C)$, $\sup(A \cup C)$, $\inf(A \cap C)$, $\min(B \cap C)$ e o $\sup(A \cap B)$.

(Pergunta 1 do Grupo I do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

1.4 Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \wedge \ x > 0\}, \qquad B = \left\{x : \frac{x-1}{2x+3} \leq 0\right\}, \qquad C = A \cap B.$$

Para cada um dos conjuntos A, B e C:

a) Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes.

b) Indique o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, no caso de existirem.

(Grupo I do 1º Teste de 7/4/79)

1.5 Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x^2} \geq 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log \frac{1}{x} \geq 1 \right\}.$$

Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

(Pergunta 1 do Grupo I do 2º Exame de 6/2/95)

1.6 Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{e^x(x+1)} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^x \geq e^{-x} \right\}.$$

Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

(Grupo I da 2ª Época de 24/2/95)

1.7 Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{e^x}{|x|} \geq 0 \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |\lim x^n| \leq 1\}, \qquad C = A \cap B.$$

Para cada um dos conjuntos A e C, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

(Pergunta 1 do Grupo I do 1º Exame de 23/1/95)

1.8 Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\log x} \geq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

(Pergunta 1 do Grupo I do 2º Exame de 9/2/94)

1.9 Indique se são majorados, minorados, limitados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x : |x-3| = 2|x|\}, \qquad B = \left\{ y : \frac{y}{y-1} < \frac{y-1}{y} \right\}.$$

Indique ainda (se existirem, em $\mathbb{R}$) o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um desses conjuntos.

(Grupo Ia da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

Resolução:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : |x-3| = 2|x|\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| = |2x|\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x - 3 = 2x \text{ ou } x - 3 = -2x\} = \{-3, 1\}, \\
B &= \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{y}{y-1} < \frac{y-1}{y} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{y}{y-1} - \frac{y-1}{y} < 0 \right\} \\
&= \left\{ y \in \mathbb{R} : 2\frac{y - \frac{1}{2}}{y(y-1)} < 0 \right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : y < 1/2, y < 0, y < 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : y < 1/2, y > 0, y > 1\} \\
&\qquad \cup \{y \in \mathbb{R} : y > 1/2, y < 0, y > 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} : y > 1/2, y > 0, y < 1\} \\
&= \,]-\infty, 0[\, \cup \,]1/2, 1[\,.
\end{aligned}$$

Como $A = \{-3, 1\}$ e $B =]-\infty, 0[\cup]1/2, 1[$ conclui-se que A é limitado e B é apenas majorado. Portanto $\sup A = 1$, $\inf A = -3$, $\sup B = 1$, B não tem ínfimo em $\mathbb{R}$, $\max A = 1$, $\min A = -3$ e B não tem máximo nem mínimo em $\mathbb{R}$.

1.10 Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio e seja m um majorante de A, distinto do supremo deste conjunto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

(Grupo Ib do Exame Final de 30/4/80)

1.11 Sendo A um subconjunto majorado e não vazio de $\mathbb{R}$ e $\alpha = \sup A$, prove que, para qualquer $\epsilon > 0$, o conjunto $V_\epsilon(\alpha) \cap A$ é não vazio. Na hipótese de α não pertencer a A, o conjunto $V_\epsilon(\alpha) \cap A$ pode ser finito? Justifique a resposta.

(Grupo IVa do Exame Final de 10/5/79)

1.12 Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

1. Se $x \in U$, então $x < \sup V$.
2. Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

(Grupo Ib da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

1.13 Prove que, se X e Y são dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $\sup X > \inf Y$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $y < x$.

(Grupo IVa da Prova de 26/7/78)

1.14 Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

1. Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos;
2. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não ser disjuntos.

(Pergunta 1b do Ponto nº 2, Exame Final de 17/7/71)

1.15 Sejam A e B dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$ e sejam $\alpha = \sup A$, $\beta = \sup B$. Justifique que o conjunto $C = A \cup B$ tem supremo e, designando-o por γ, prove que $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

(Grupo IVa do Exame Final de 4/5/79)

1.16 Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x : \operatorname{sen} x \geq 0\}, \qquad B = \{x : |x| < 2\pi\}, \qquad C = A \cap B.$$

1. Para cada um dos conjuntos A, B e C:
   (a) Indique se o conjunto tem ou não majorantes e minorantes (em $\mathbb{R}$) e, se existirem, quais são.
   (b) Indique o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos mesmos conjuntos, no caso de existirem.
2. Apenas para o conjunto C:

(a) Indique o *menor* intervalo que contém esse conjunto (de forma mais precisa: indique um intervalo I que contenha o conjunto C e esteja contido em qualquer intervalo que contenha C).

(b) Dê um exemplo de uma sucessão convergente, cujos termos pertençam a C e cujo limite não pertença ao mesmo conjunto.

(Grupo I do 1º Teste de 11/3/78)

1.17 Prove que, para todo o número natural $n \geq 4$, se tem

$$(n!)^2 > 2^n n^2.$$

(Pergunta 2 do Grupo I do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

1.18 Demonstre pelo princípio da indução matemática as seguintes identidades:

a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}_1$.

b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}_1$.

1.19 Demonstre que

a) $n! \geq 2^{(n-1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}_1$.

b) $\frac{3^{n-1}}{n!} < \frac{19}{n^2}$ para qualquer número natural $n \geq 4$.

1.20 Demonstre a *desigualdade de Bernoulli*: Sendo $a > -1, \ n \in \mathbb{N}, \ (1 + a)^n \geq 1 + na$.

1.21 Demonstre, pelo princípio da indução matemática, o *binómio de Newton*:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Recorde que $\binom{n}{p}$ designa, em análise combinatória, as combinações de n elementos p a p, e tem-se

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{1.1}$$

$(n! = n(n-1)(n-2)\cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$. Uma propriedade importante é a seguinte,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},$$

cuja demonstração se reduz ao cálculo destes valores por aplicação da expressão (1.1).

1.22 Calcule os limites das sucessões de termos gerais

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \qquad v_n = \frac{[(-1)^n + 3]^n}{(2n)!}.$$

(Pergunta 2 do Grupo I do 2º Exame de 9/2/94)

1.23 Calcule, se existir, o limite de cada uma das sucessões definidas como se segue:

a) $v_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$,

b) $w_n = \frac{a^n}{n}$, onde $a \in \mathbb{R}$.

(Perguntas 1bc do Grupo I do Exame A da Época Especial de 17/11/95)

1.24 Indique, justificando abreviadamente, o conjunto dos sublimites de cada uma das sucessões de termo geral

$$a_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2}, \qquad b_n = e^{(1-\frac{1}{n})^n}.$$

(Pergunta 3 do Grupo I do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

1.25 Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes:

a) Qualquer sucessão crescente de termos em $]-1,1[$ converge.

b) Se (u_n) e (v_n) são sucessões limitadas, o conjunto dos sublimites da sucessão $(u_n + v_n)$ é não vazio.

c) Se (u_n) é uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in]1,2[$, então (u_n) é divergente.

(Pergunta 2 do Grupo I do 1º Exame de 26/1/94)

1.26 Sejam (x_n) e (y_n) sucessões tais que (x_n) é crescente e, para todo o $n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n$. Mostre que, se (y_n) é convergente, o mesmo acontece com (x_n) e estabeleça, nesse caso, uma relação entre $\lim x_n$ e $\lim y_n$.

(Pergunta 2 do Grupo I do Exame de Época Especial de 17/11/95)

1.27 Sejam (x_n) e (y_n) duas sucessões reais tais que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$, $x_n \leq y_n$. Mostre que se $\lim x_n = +\infty$ então também $\lim y_n = +\infty$.

(Pergunta 3 do Grupo I do 2º Exame de 9/2/94)

1.28 Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x^2} \geq 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log \frac{1}{x} \geq 1 \right\}.$$

1º Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

2º Indique, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

a) Toda a sucessão monótona de termos em B é convergente.

b) O conjunto dos sublimites de uma sucessão de termos em A é não vazio.

c) Se (x_n) é sucessão de termos em A, $\frac{x_n}{n}$ é divergente.

d) Se $a \in B$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ é convergente.

(Grupo I do 2º Exame de 6/2/95)

1.29 Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \frac{2x-2}{x-2} \leq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x : \exists_{n \in \mathbb{N}} \, |x-n| < \frac{1}{10} \right\}.$$

1. Indique, justificando, se A e B são majorados, minorados, limitados e se têm máximo, mínimo, supremo ou ínfimo.

2. Dê um exemplo de uma sucessão cujos termos pertençam ao conjunto B e que não seja limitada. Seria possível dar o exemplo pedido se, em vez de B, se considerasse o conjunto A? Justifique.

(Grupo I do 1º Teste de 6/3/80)

1.30 Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, com supremo s. Prove que existe uma sucessão x_n, de termos em A, convergente para s. Prove ainda que, se A não tem máximo, a sucessão x_n pode ser escolhida por forma que seja estritamente crescente.

(Grupo IVa do Exame Final de 21/9/79)

1.31 Considere $u_n = \operatorname{sen}[(-1)^n(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1})]$. Determine o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão. Diga se tem ínfimo, supremo, mínimo ou máximo o conjunto dos termos da sucessão.

(Grupo Ib do Exame O.S. de 11/2/80)

1.32 Considere as sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad v_n = [1 + (-1)^n]n, \qquad w_n = \frac{2^{n+1}}{2^n + 1}$$

e indique, justificando abreviadamente as respostas:

1. as que são monótonas, as que são limitadas e as que são convergentes;

2. o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (se existirem) do conjunto dos termos de cada uma das sucessões consideradas.

(Grupo Ia do Exame Final de 30/4/80)

Resolução: Quanto a (u_n), $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < 2$ para qualquer n, logo (u_n) é limitada. (u_n) não é crescente, pois, por exemplo, $u_3 < u_2$; nem é decrescente pois, por exemplo, $u_2 > u_1$. (u_n) é convergente para 0 pois $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n^2}$ tende para 0.
Quanto a (v_n), $|v_n| = |(1 + (-1)^n)n| = |1 + (-1)^n|n$, logo (v_n) não é limitada pois dado M é sempre possível encontrar n_0 tal que $|v_{n_0}| > M$; com efeito, escolhendo n_0 par tal que $n_0 > \frac{M}{2}$ virá $|v_{n_0}| = 2n_0 > M$. (v_n) não é decrescente, pois, por exemplo $v_1 < v_2$, nem crescente pois $v_2 > v_3$. (v_n) não é convergente pois se o fosse seria limitada e não o é.
Quanto a (w_n), $w_n = \frac{2}{1+2^{-n}}$ o que permite reconhecer que (w_n) é uma sucessão de termos crescente e com todos os termos menores que o seu limite que é 2 e todos os termos maiores ou iguais ao primeiro que vale 4/3.

1.33 Das sucessões de termos gerais

$$a_n = (-1)^n, \qquad b_n = \frac{3n^3 + 3n^2 + 1}{2n^3 - 3}, \qquad c_n = a_n b_n, \qquad d_n = \frac{2^n + 4^n}{3^{n+1}}$$

indique, justificando as respostas, as que são limitadas e as que são convergentes (indicando neste caso os respectivos limites).

(Grupo IIa do 1º Teste de 7/4/79)

1.34 Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n+1}, \qquad w_n = u_n v_n$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, as que são limitadas e as que são convergentes.

(Grupo IIa do 1º Teste de 11/3/78)

1.35 Calcule (se existirem) os limites das sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{\cos(n\pi)+\cos(2n\pi)}{n}, \qquad v_n = \frac{(n+1)!-n!}{n!(n+2)}, \qquad w_n = \frac{n^2}{1+2^n}.$$

(Grupo IIa da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

Resolução: u_n é da forma $a_n b_n$ onde $a_n = \cos(n\pi)+\cos(2n\pi)$ é limitada (pois $|a_n| = |\cos(n\pi)+\cos(2n\pi)| \leq |\cos(n\pi)|+|\cos(2n\pi)| \leq 1+1 = 2$) e $b_n = \frac{1}{n} \to 0$. Logo $u_n \to 0$.

$v_n = \dfrac{(n+1)!-n!}{n!(n+2)} = \dfrac{n!((n+1)-1)}{n!(n+2)} = \dfrac{n}{n+2}$. Logo $v_n \to 1$.

Como $0 \leq w_n = \dfrac{n^2}{1+2^n} < \dfrac{n^2}{2^n}$ e, como $\dfrac{n^2}{2^n} \to 0$, também $w_n \to 0$.

1.36 Indique, justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n = \dfrac{a^n}{2^{1+2n}}$ é:

i) convergente;

ii) divergente, mas limitada.

(Grupo IIb da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

1.37 Para cada $a \in \mathbb{R}$ determine, quando existam, os limites das sucessões de termos gerais:

$$\text{a)} \quad \frac{an-1}{an^2+1}, \qquad \text{b)} \quad \frac{a^n-2}{a^{2n}+1}.$$

(Grupo II do 1º Teste de 24/2/79)

Resolução:

a) Se $a = 0$ vem $u_n = \dfrac{an-1}{an^2+1} = -1$ e $\lim u_n = -1$.

Se $a \neq 0$ tem-se[1] $u_n = \dfrac{an-1}{an^2+1} \sim \dfrac{an}{an^2} = \dfrac{1}{n} \to 0$. Logo $u_n \to 0$.

b) Se $|a| > 1$ tem-se $u_n = \dfrac{a^n-2}{a^{2n}+1} \sim \dfrac{a^n}{a^{2n}} = a^{-n} \to 0$ e $\lim u_n = 0$.

Se $|a| < 1$ tem-se $u_n = \dfrac{a^n-2}{a^{2n}+1} \sim -2$ e $\lim u_n = -2$.

Se $a = 1$ vem $u_n = -\dfrac{1}{2}$ e $\lim u_n = -\dfrac{1}{2}$.

Se $a = -1$ vem $u_{2n} = -\dfrac{1}{2}$ e $u_{2n+1} = -\dfrac{3}{2}$. Logo u_n não tem limite.

1.38 Estude, do ponto de vista da convergência, as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{an^2 - n}{n^2 + 1}, \qquad v_n = \frac{b^{2n}}{n^2}, \qquad w_n = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(cn)$$

onde a, b e c são constantes; em caso de convergência, determine o limite.

(Grupo Ia do Exame Final de 4/5/79)

1.39 Considere as sucessões seguintes:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{an^2 + n + 1}{(a+1)n^2 + 3} \text{ com } a \in \mathbb{R}, \\ v_n &= \frac{a^n + 1}{b^{2n} + 3} \text{ com } a \in \mathbb{R}, \\ w_n &= \frac{(\operatorname{sen} n)^n}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Estude-as quanto à existência de limite, obtendo os respectivos limites quando existirem. Indique quais são as limitadas.

1.40 Estude, quanto à convergência, as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \qquad v_n = \frac{n \cos(n\pi)}{2n+1}, \qquad w_n = \frac{1 + a^n}{1 + a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

(Grupo Ia do Exame Final de 21/9/79)

1.41 Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{n(2 + \cos(n\pi))}{1 + n(1 - \cos(n\pi))} \qquad \text{e} \qquad v_n = \left(\frac{a+1}{a}\right)^n$$

indique, justificando, as que são limitadas e as que são convergentes (no caso de v_n a resposta dependerá naturalmente do valor de a, que deve supor-se real e diferente de 0).

(Grupo Ia da Prova de 26/7/78)

1.42 Determine os limites das sucessões de termos gerais:

$$\text{a)} \quad u_n = \left(\frac{a}{1 + |a|}\right)^n, \qquad \text{b)} \quad v_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}},$$

onde a é um número real.

(1971)

Resolução:

a) De

$$\left|\frac{a}{1+|a|}\right| = \frac{|a|}{1+|a|} < 1$$

conclui-se imediatamente que $\lim u_n = 0$.

b) Sabe-se que se $a_n \geq 0$ para todo n e $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ então $\lim \sqrt[n]{a_n} = \alpha$. Com $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$ tem-se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \sim \frac{27n^3}{n^3} = 27\,.$$

Logo $\lim \sqrt[n]{a_n} = 27$.

[1]Sendo u_n e v_n duas sucessões de termos não nulos, escreveremos $u_n \sim v_n$ sse $\lim(u_n/v_n) = 1$; é claro que sendo $u_n \sim v_n$, se uma das sucessões tiver o limite $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, a outra tenderá também para α.

1.43 Prove que a soma de duas sucessões limitadas é uma sucessão limitada.

(Grupo IIb do 1º Teste de 6/3/80)

1.44 Seja a_n o termo geral de uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1.$$

1. Justifique que a sucessão é convergente e indique um intervalo (de comprimento tão pequeno quanto possível) que contenha o limite de qualquer sucessão que satisfaça as condições impostas a a_n.
2. Indique o supremo e o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão; este conjunto terá máximo? E mínimo? Justifique abreviadamente as respostas.

(Grupo Ia do Exame de 2ª época de 8/9/80)

1.45 Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, u_n é convergente. Mostre ainda, recorrendo directamente à definição de limite, que o limite de u_n não pode ser um número negativo.

(Grupo IIb do 1º Teste de 11/3/78)

1.46 Supondo $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < \cdots$ e $b_n = 1/a_n$, justifique que b_n é convergente; indique ainda, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto de todos os termos b_n $(n \in \mathbb{N}_1)$. Justifique as respostas.

(Grupo IIb da Prova de 26/7/78)

1.47 Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_1} \qquad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove em primeiro lugar que x_n é limitada e depois que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

(Pergunta 2b do Exame Final (Ponto nº 2) de 17/7/71)

1.48
1. Prove que se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e se A é não vazio e B majorado, então $\sup A \leq \sup B$.
2. Suponha que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, X_n designa um subconjunto majorado e não vazio de $\mathbb{R}$, tal que $X_n \subset X_{n+1}$. Mostre que, para que a sucessão de termo geral $s_n = \sup X_n$ seja convergente é necessário e suficiente que exista um conjunto X, majorado em $\mathbb{R}$, tal que

$$X_n \subset X, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

3. Dê exemplos de conjuntos X_n nas condições indicadas no primeiro período da alínea b) e tais que
   (a) todos os conjuntos X_n sejam infinitos e a sucessão de termo geral $s_n = \sup X_n$ seja convergente;

(b) todos os subconjuntos X_n sejam finitos e a sucessão dos respectivos supremos seja divergente.

(Pergunta 4 da Prova de 19/9/72)

1.49 Supondo que, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, X_n é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e ainda que:

(i) $\forall_{n\in\mathbb{N}_1}\ X_{n+1} \subset X_n$;

(ii) X_1 é um conjunto limitado.

a) Justifique que existem o supremo e o ínfimo de cada um dos conjuntos X_n.

b) Pondo $a_n = \inf X_n$, $b_n = \sup X_n$, mostre que as sucessões a_n e b_n são convergentes e que $\lim a_n \leq \lim b_n$.

(Grupo IV do 1º Teste de 24/2/79)

1.50 Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada; para cada $n \in \mathbb{N}$, designe-se por U_n o conjunto formado pelos termos da sucessão cuja ordem é maior do que n: $U_n = \{u_p : p > n\}$.

1. Justifique que U_n tem supremo e ínfimo.
2. Sendo $\alpha_n = \inf U_n$, $\beta_n = \sup U_n$, prove que as sucessões α_n e β_n convergem e que, designando por α e β os seus limites, se tem $\alpha \leq \beta$.
3. Prove que u_n tem subsucessões convergentes para β e que nenhuma subsucessão de u_n converge para um número maior do que β (portanto, β é o limite máximo de u_n).

(Grupo IV do 1º Teste de 6/3/80)

Resolução:

1. Se (u_n) é limitada, o conjunto U dos seus termos é limitado e $U_n \subset U$ também o será; o conjunto U_n é não vazio por definição de sucessão; U_n, limitado e não vazio tem pois um supremo e um ínfimo, como consequência do axioma do supremo.

2. Como $U_{n+1} \subset U_n$ resulta que a sucessão de termo geral $\alpha_n = \inf U_n$ é crescente e a sucessão de termo geral $\beta_n = \sup U_n$ é decrescente; mostremos que a primeira sucessão é majorada e a segunda minorada; com efeito, de $U_n \subset U$ e de U ser limitado sai que $\alpha_n = \inf U_n \leq \sup U_n \leq \sup U$ e $\beta_n = \sup U_n \geq \inf U_n \geq \inf U$; como (α_n) é crescente e limitada superiormente, então (α_n) converge e como β_n é decrescente e limitada inferiormente, (β_n) converge; da relação $\alpha_n \leq \beta_n$ sai $\alpha = \lim \alpha_n \leq \lim \beta_n = \beta$.

3. Começamos por provar que existem subsucessões de (u_n) convergentes para β. Façamo-lo definindo uma subsucessão (u_{k_n}) de (u_n) por indução. Consideramos $u_{k_0} = u_0$ e supostos definidos $u_{k_0}, \ldots, u_{k_n}$ escolhemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \beta_m - \beta < 1/n$ (graças a $\lim \beta_m = \beta$) e $m > k_n$ (esta última condição destina-se a garantir que estamos de facto a construir uma subsucessão). Por definição de supremo existe u_q com $q > m$ tal que $0 < \beta_m - u_q = \sup U_m - u_q < 1/n$. Tomamos $u_{k_{n+1}} = u_q$. Assim

$$|u_{k_{n+1}} - \beta| \leq |u_{k_{n+1}} - \beta_m| + |\beta_m - \beta| = (\beta_m - u_q) + (\beta_m - \beta) < 2/n.$$

A sucessão (u_{k_n}) é de facto uma subsucessão de (u_n) e para $n \in \mathbb{N}_1$ temos $|u_{k_n} - \beta| < 2/n$ o que garante que o seu limite é β.

Para provar que nenhuma subsucessão de u_n converge para um número maior do que β suponhamos, por absurdo, que existe um sublimite de u_n, β', tal que $\beta' > \beta$. Tomando $0 < \epsilon < \beta' - \beta$, tem-se

$$\forall_{p\in\mathbb{N}}\exists_{n>p} \qquad |u_n - \beta'| < \epsilon.$$

Portanto para todo o $p \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in U_p$ tal que $u_n > \beta' - \epsilon$. Desta forma, para todo o $p \in \mathbb{N}$, $\beta_p = \sup U_p > \beta' - \epsilon$. Mas então devíamos ter $\lim \beta_n \geq \beta' - \epsilon > \beta$.

1.51 Justifique as afirmações seguintes:

1. Se u_n é uma sucessão limitada, qualquer subsucessão de u_n tem subsucessões convergentes.
2. Se u_n não é limitada, existem subsucessões de u_n sem qualquer subsucessão convergente.

(Grupo IVa da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

Resolução:

1. Sendo u_n limitada, qualquer subsucessão de u_n sê-lo-á também e terá, portanto, subsucessões convergentes (teorema de Bolzano-Weierstrass).
2. A sucessão u_n, sendo ilimitada, terá uma subsucessão u_{p_n} tal que $|u_{p_n}| \to +\infty$ (para obter uma tal subsucessão bastará escolher p_1 tal que $|u_{p_1}| > 1$, depois $p_2 > p_1$ tal que $|u_{p_2}| > 2$, etc). Qualquer subsucessão de u_{p_n} será ilimitada (visto que em valor absoluto tenderá também para $+\infty$) e não poderá portanto ser convergente.

1.52 Seja

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x^2 - 1} > 0 \right\}.$$

1. Diga se o conjunto A é majorado ou minorado e indique (caso existam) o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A.
2. Justifique que o conjunto dos sublimites de uma qualquer sucessão de termos em $\mathbb{R}^- \cap A$ é não vazio.
3. Mostre, por meio de exemplos, que o conjunto dos sublimites de uma sucessão de termos em $\mathbb{R}^+ \cap A$ pode ser ou não ser vazio.

($\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$.)

Capítulo 2

Séries

2.1 Séries numéricas. Séries elementarmente somáveis e séries de termos com sinal fixo

2.1 Calcule (se existirem) os limites das sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{2^n+1}, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Nos casos em que conclua que não existe limite (finito ou infinito), justifique essa conclusão.

(Grupo IIa do 1º Teste de 6/3/80)

2.2 Sendo $a, r \in \mathbb{R}$ considere a sucessão definida por:

$$\begin{cases} x_0 &= a, \\ x_n &= x_{n-1} + r^n. \end{cases}$$

a) Indique o conjunto dos valores de r para os quais a sucessão é convergente, e, para cada r pertencente a esse conjunto, determine o $\lim x_n$. [**Sugestão**: pode ser-lhe útil determinar uma outra expressão para o termo geral x_n da sucessão].

b) Justifique que para todo o $r \geq 0$ a sucessão x_n é monótona e, considerando separadamente os casos $0 \leq r < 1$ e $r \geq 1$, calcule $\lim \arctan x_n$.

(Grupo II1 do Exame de 2ª época de 24/9/80)

2.3 Calcule a soma da série $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

(Pergunta 2 do Grupo II do 1º Exame de 26/1/94)

2.4 Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ com $u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ é convergente e calcule a sua soma.

(Pergunta 2 da Prova de 12/3/74)

Resolução: A série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ estuda-se a partir de

$$S_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1.$$

No nosso caso

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[k+1]{k+1} - \sqrt[k]{k} = \sqrt[n+1]{n+1} - 1$$

e

$$\lim S_n = \lim(\sqrt[n+1]{n+1} - 1) = \lim(\sqrt[m]{m} - 1) = 0.$$

Este último resultado deve-se a que se $\lim(v_{n+1}/v_n) = \alpha$ (e $v_n > 0$) então $\lim \sqrt[n]{v_n} = \alpha$. Quer dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge e tem soma nula.

2.5 Determine a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

(Pergunta 1 da Prova de 22/3/74)

2.6 Estude, quanto à convergência, as séries de termos gerais

$$\text{a) } \frac{n^2}{2^n} \qquad \text{e} \qquad \text{b) } \frac{1}{1+a^{2n}} \quad (a > 0).$$

(Grupo Ib do Exame de 2ª época de 8/9/80)

Resolução:

a) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n} > 0$ e como

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

resulta do critério de d'Alembert que $\sum u_n$ é convergente.

b) Se $|a| \leq 1$ a série diverge, visto que então u_n não tende para 0 ($u_n \to 1$ se $|a| < 1$, $u_n \to \frac{1}{2}$ se $|a| = 1$).

Se $|a| > 1$ a série converge, visto que se tem nesse caso $u_n \sim \frac{1}{a^{2n}}$, sendo $\sum \frac{1}{a^{2n}}$ uma série geométrica (de razão $\frac{1}{a^2} < 1$) convergente.

2.7 Estude, quanto à convergência, as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{1+n!} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^n.$$

Para esta última, depois de determinar o conjunto dos valores de x para os quais a série converge, calcule a respectiva soma num ponto x desse conjunto.

(Pergunta 2a da Prova de 8/1/73)

2.8 Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-e}{e^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+n^2}$$

e calcule a soma de uma delas.

(Pergunta 1 do Grupo II do 2º Exame de 6/2/95)

2.9 Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) cada uma das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^3}.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do Exame de 1ª Época de 8/1/97)

2.10 Estude a natureza de cada uma das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n^3)}{\sqrt{n}+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n^2\pi), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(2n)!}.$$

Determine a soma de uma destas séries.

(Grupo II do Exame de 1ª Época de 26/1/96)

2.11 Determine a natureza de cada uma das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[1+(-1)^n], \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3+1000}{\log 2^n+n^4}, \qquad \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(n-2)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n(2n)!}{3^n(2n+1)!}.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do Exame de 2ª Época de 28/2/96)

2.12 Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{1+\operatorname{arctg} n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{3^n(2n)!}.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do 1º Exame de 23/1/95)

2.13 Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+n!}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do Exame de 2ª Época de 24/2/95)

2.14 Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n}\log n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do 2º Exame de 9/2/94)

2.15 Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries:

$$\sum(1+a_n) \qquad \text{e} \qquad \sum\frac{1}{n^2+a_n}.$$

(Grupo IIIb do 1º Teste de 6/3/80)

2.16 Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos, a primeira convergente e a segunda divergente, indique, justificando, a natureza das séries:

$$\sum(a_n + b_n), \qquad \sum \frac{a_n}{1+b_n}.$$

(Pergunta 2b da Prova de 1/8/72)

2.17 Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos e (b_n) uma sucessão limitada.

a) Mostre que a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ implica a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

b) Use o resultado da alínea anterior para provar que se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge então também converge $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

c) Mostre, por meio de um exemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

(Pergunta 3 do Grupo II do 1º Exame de 26/1/94)

2.18 Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, com limite $+\infty$, indique qual é a natureza das séries:

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{3^n + a_n}.$$

Justifique.

(Grupo IIIb da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

2.19 Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ é uma série convergente.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ é uma série divergente.

c) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ é convergente.

(Pergunta 2 do Grupo II do 2º Exame de 9/2/94)

2.20 Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes de termos positivos, indique, justificando, quais das séries:

$$\text{a)} \sum\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right), \qquad \text{b)} \sum\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right), \qquad \text{c)} \sum a_n b_n.$$

são necessariamente convergentes ou necessariamente divergentes e quais podem ser convergentes ou divergentes consoante as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ consideradas.

(Pergunta 3b da Prova de 4/9/72)

Resolução:

a) A série diverge pois se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem tem-se $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$ e como $a_n > 0$ e $b_n > 0$ tem-se $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ e $\frac{1}{b_n} \to +\infty$ e portanto $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \to +\infty$. Ora se a série fosse convergente o seu termo geral teria de tender para 0.

b) A série pode ser convergente ou divergente: por exemplo, se for $a_n = b_n$ é claro que $\sum\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right)$ converge, mas se for $\frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}$, ou seja, se for $2a_n \leq b_n$ virá $\sum\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right)$ divergente, pois a série de termos positivos $\frac{1}{b_n}$ o é, já que $\frac{1}{b_n} \not\to 0$.

c) $\sum a_n b_n$ é necessariamente convergente. Com efeito, convergindo $\sum b_n$ deverá ter-se $b_n \to 0$ e portanto, a partir de certa ordem n_0, $b_n \leq 1$; multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a_n (positivo por hipótese) conclui-se que, para $n > n_0$, se terá $a_n b_n \leq a_n$. A convergência de $\sum a_n b_n$ resulta então da de a_n, pelo critério de comparação.

2.21 Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes, de termos positivos, indique quais das séries:

$$\sum a_n^2, \qquad \sum \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right), \qquad \sum \frac{a_n}{1+b_n}$$

são necessariamente convergentes ou necessariamente divergentes e quais podem ser convergentes ou divergentes consoante as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ consideradas.

(Pergunta 3b do Ponto nº 6 de 25/10/71)

2.22 Seja u_n o termo geral da sucessão de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ definida por $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ para $n \geq 2$, e $u_1 = u_2 = 1$. Estude a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

(Grupo IIa da Prova de 7/74)

2.23 Estude a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \arctan v_n$$

sendo $v_2 = K > 0$ e $v_{n+1} = v_n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ para $n \geq 2$.

(Pergunta nº 5 da Prova de 12/3/74)

2.2 Séries numéricas. Convergência absoluta e critério de Leibniz

2.24 Dê exemplos de sucessões a_n de termos não nulos e para as quais a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{1 + n a_n}$$

a) converge simplesmente;

b) converge absolutamente.

(Pergunta 2 do Grupo II do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

2.25 Prove que são necessariamente verdadeiras ou mostre, por meio de exemplos, que podem ser falsas, as afirmações correspondentes às alíneas a), b) e c) seguintes.

Sendo $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos, a série

$$\text{a)} \sum (-1)^n a_n, \qquad \text{b)} \sum \sqrt[n]{a_n}, \qquad \text{c)} \sum a_{2n+1}.$$

é necessariamente convergente.

(Pergunta 3b do Ponto nº 3 de 1/10/71)

2.26 Seja u_n o termo geral de uma sucessão convergente e tal que

$$u_n u_{n+1} < 0 \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

a) Indique, justificando, qual é o limite de u_n.

b) Prove que, se for ainda verificada a condição

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq 1 \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será convergente, estando a sua soma compreendida entre u_1 e $u_1 + u_2$.

(Pergunta 1 do Exame Final de 20/2/71)

Resolução:

a) Sendo (u_n) convergente, seja u o seu limite. De $u_n u_{n+1} < 0$ sai $u^2 \leq 0$; ora como um quadrado é sempre maior ou igual a 0, só pode ser $u = 0$.

b) A condição $u_n u_{n+1} < 0$ implica que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é alternada e, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

com $a_n > 0$ (isto é, que $u_1 > 0$). Ora sabe-se que

$$a_{n+1} = |u_{n+1}| \leq |u_n| = a_n,$$

por hipótese. Logo (a_n) é decrescente. Como se viu que $u_n \to 0$, também $a_n \to 0$; logo, pelo critério de Leibniz, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

É fácil ver que serão também convergentes — e com a mesma soma, s — as séries: $(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots$ e $a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots$. Assim, se designarmos por s' e s'', respectivamente, as somas das séries $(a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots$ e $(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots$ cujos termos são todos não negativos (por a_n ser decrescente), ter-se-á evidentemente $s' \geq 0$, $s'' \geq 0$ e também

$$\begin{aligned} s &= (a_1 - a_2) + s' = u_1 + u_2 + s' \geq u_1 + u_2, \\ s &= a_1 - s'' = u_1 - s'' \leq u_1, \end{aligned}$$

isto é, $u_1 + u_2 \leq s \leq u_1$.

É claro que, se em lugar de $u_1 > 0$ tivéssemos suposto $u_1 < 0$, concluiríamos de modo análogo, não só a convergência da série, como a relação $u_1 \leq s \leq u_1 + u_2$.

2.27 Indique, justificando, se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+a^2)^n} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Calcule a soma das que forem convergentes.

(Pergunta 3a da Prova de 1/8/72)

2.28 Diga, justificando, se é simplesmente convergente, absolutamente convergente ou divergente, cada uma das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\pi)^{-n}}{n}.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do 1º Exame de 26/1/94)

2.29 Indique o limite de cada uma das seguintes sucessões

$$u_n = (-1)^n\frac{n}{n^2+1}, \qquad v_n = \frac{3^n}{n!}, \qquad w_n = \cos\frac{1}{n}.$$

e estude, quanto à convergência, as séries de termos gerais u_n, v_n e w_n.

(Grupo I2 do Exame de 2ª época de 24/9/80)

2.30 Analise a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do Exame de Época Especial de 17/11/95)

2.31 Determine a natureza das séries

$$\sum\frac{\log n}{n}, \quad \sum(-1)^n\frac{n}{n^2+1}, \quad \sum\frac{n^3}{e^n};$$

nos casos de convergência, indique se é simples ou absoluta.

(Grupo IIa do Exame Final de 30/4/80)

2.32 Determine para que valores de α são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries de termos gerais

$$(1+\operatorname{sen}\alpha)^n, \quad (-1)^n\frac{n^2}{n^\alpha+1}.$$

(Pergunta 3a da Prova de 4/9/72)

Resolução:

a) Trata-se de uma série geométrica de razão $1+\operatorname{sen}\alpha$ logo haverá convergência sse $|1+\operatorname{sen}\alpha| < 1$, isto é, sse $-2 < \operatorname{sen}\alpha < 0$ ou ainda sse $\operatorname{sen}\alpha < 0$, ou enfim, sse $\alpha \in \,](2k-1)\pi, 2k\pi[$ com $k \in \mathbb{Z}$.

É claro que para esses valores de α a série será absolutamente convergente.

b) Ponha-se

$$u_n = (-1)^n\frac{n^2}{n^\alpha+1}.$$

Se $\alpha \leq 2$, u_n não tende para 0 e portanto, $\sum u_n$ é divergente.

Se $\alpha > 2$, consideremos a sucessão (v_n) definida por

$$v_n = |u_n| = \frac{n^2}{n^\alpha+1} \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}}.$$

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

Como a série $\sum \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ é convergente sse $\alpha > 3$, pode concluir-se que u_n é absolutamente convergente sse $\alpha > 3$.

Para estudar se a série é simplesmente convergente para $\alpha \in]2,3]$ notamos que $v_n \to 0$ e, excluídos termos iniciais em número finito dependente de α, a sucessão (v_n) é decrescente (para o reconhecer pode observar-se que, sendo $\alpha > 2$, a derivada da função definida em $]0,+\infty[$ pela fórmula $\varphi(x) = \frac{x^2}{x^\alpha+1}$,

$$\varphi'(x) = \frac{x}{(x^\alpha+1)^2}[2+(2-\alpha)x^\alpha],$$

é negativa para $x > (2/(2-\alpha))^{1/\alpha}$).

O critério de Leibniz permite então concluir que $\sum u_n$ converge simplesmente para $\alpha \in]2,3]$.

2.33 Seja I o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-4x)^n}{n(n+2)}$$

é convergente. Mostre que I é um intervalo. Indique, justificando, a natureza da série em cada um dos extremos daquele intervalo e, em caso de convergência, calcule a soma da série correspondente.

(Grupo IIIa da Prova de 28/2/74)

Resolução: A série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+2)} y^n$$

é absolutamente convergente para $|y| < R$ onde

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+2)}}} = \lim \sqrt[n]{n(n+2)} = \lim \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = 1.$$

A série obtida é ainda absolutamente convergente para $|y| = 1$. Logo, os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série do enunciado é convergente, são os pontos tais que $|1-4x| \leq 1$, ou seja, $-1 \leq 1-4x \leq 1$, isto é, $\frac{1}{2} \geq x \geq 0$. Tem-se pois $I = [0, 1/2]$.
Já vimos que a série dada converge se $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. No primeiro caso a série é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Designando por $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de somas parciais da série podemos repetir o raciocínio para obter a soma de uma série de Mengoli:

$$\begin{aligned} 2S_n = &-\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) - \cdots \\ &\cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + (-1)^n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ = &-1 + \frac{1}{2} + (-1)^{n-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right) + (-1)^n\left(-\frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Assim $\lim S_n = -\frac{1}{4}$; logo $-\frac{1}{4}$ é a soma da série dada quando $x = 0$.

Se $x = \frac{1}{2}$ a série é procedemos de forma análoga para obter

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-1)^n}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right),$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

e $\lim S_n = \frac{3}{4}$; logo $\frac{3}{4}$ é a soma da série dada quando $x = \frac{1}{2}$.

2.34 Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}.$$

(Pergunta 3a da Prova de 2ª época de 18/12/72)

2.35 Determine o conjunto dos pontos em que é absolutamente convergente e o conjunto dos pontos em que é simplesmente convergente a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n.$$

(Pergunta 3a do Ponto nº3 de 1/10/71)

2.36 Determine o conjunto dos pontos em que é absolutamente convergente e o conjunto dos pontos em que é simplesmente convergente a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(\frac{x-2}{x+4}\right)^n.$$

(Pergunta 3a do Ponto nº4 de 1/10/71)

2.37 Seja I o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série

$$\sum \frac{1}{n}\left(\frac{-6x+4}{3x+5}\right)^n$$

é convergente. Mostre que I é um intervalo e determine os seus extremos.

(Pergunta 4 da Prova de 21/10/74)

2.38 Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}(x^2-x)^n$$

converge em todos os pontos x de um intervalo e determine os extremos desse intervalo (não se preocupe em verificar se a série converge ou não nos referidos extremos).

(Pergunta 3a do Ponto nº6 de 25/10/71)

2.39 a) Determine o conjunto dos valores reais de k para os quais são convergentes e o conjunto dos valores de k para os quais são limitadas as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{k^{2n}}{2+k^n}, \qquad v_n = (-1)^n \frac{n^{2k}}{1+n^k}.$$

b) Quais são os valores de k que tornam absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente cada uma das séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$?

(Pergunta 3 do Ponto nº 5, Exame integrado de 25/10/71)

2.40

Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos reais e, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $b_{2n-1} = a_n$, $b_{2n} = -a_n$, considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Prove que $\sum b_n$ é convergente se e só se $\lim a_n = 0$ e que $\sum b_n$ é absolutamente convergente se e só se $\sum a_n$ o for.

(Pergunta 4 de uma Prova de Análise Matemática II)

2.41 Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ séries numéricas absolutamente convergentes.

a) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

é convergente.

b) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

mostre que

i) f é periódica.

ii) Se f for par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ e se f for ímpar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$.

(Grupo III1 do Exame de 2ª época de 24/9/80)

Resolução:

a) Tem-se

$$|a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)| \le |a_n \cos(nx)| + |b_n \operatorname{sen}(nx)| \le |a_n| + |b_n|.$$

Ora, $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n|$ convergem, logo $\sum (|a_n| + |b_n|)$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ é absolutamente convergente e portanto, convergente.

b) i) Como $\cos(nx) = \cos(nx + n2\pi) = \cos(n(x+2\pi))$ e $\operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}(nx + n2\pi) = \operatorname{sen}(n(x+2\pi))$ resulta que $f(x)$ é periódica.

ii)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(-nx) + b_n \operatorname{sen}(-nx)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

Se f é par de $f(x) = f(-x)$ sai $2\sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) = 0$. Logo $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) = 0$ e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$.
Se f é ímpar de $f(x) = -f(-x)$ sai $2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = 0$. Logo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) = 0$ e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$.

2.42 Seja f uma aplicação de $\mathbb{R}$ em si mesmo e g a função definida pela igualdade:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f(nx)$$

no conjunto de todos os pontos x para os quais é convergente a série que figura no 2º membro.

a) Indique (referindo-se ao valor de f num ponto conveniente) uma condição necessária e suficiente para que 0 pertença ao domínio de g.

b) Prove que, se f for diferenciável em $\mathbb{R}$ e verificar as condições

$$f'(x) < 0 \quad \forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

o domínio de g é um intervalo. Indique esse intervalo.

c) Prove que, na hipóteses da alínea b), as relações

$$f(x) - f(2x) < g(x) < f(x)$$

são verificadas em todos os pontos do domínio de g.

(Pergunta 4 da Prova de 20/7/71)

2.3 Séries de potências

2.43 Determine o raio de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}$$

e indique, justificando, os valores reais de x para os quais a série é absolutamente convergente e aqueles para que é simplesmente convergente.

(Grupo IIIa do 1º Teste de 6/3/80)

2.44 Determine todos os valores de x para os quais é convergente a série

$$\sum \frac{2^n}{1+8^n}(x-1)^n$$

Para quais desses valores pode garantir que a convergência é absoluta? Porquê?

(Pergunta 3a de uma Prova de Análise Matemática II)

2.45 Sendo k um número natural, determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n+k)}$$

e calcule a soma da série no extremo superior do seu intervalo de convergência.

(Grupo Ic do Exame de 2ª época de 8/9/80)

2.46 Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) cada uma das séries seguintes, onde x designa um parâmetro real:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/n}(x^2+1)^n.$$

(Pergunta 1 do Grupo II do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

2.47 Considere a série de potências de x:

$$\sum \frac{c^{n+1}}{n+1} x^n$$

onde c é um número real positivo.

1. Determine o raio de convergência da série.
2. Estude a natureza da série nos extremos do seu intervalo de convergência.
3. Justifique que existe um único valor de c para o qual a série é simplesmente convergente no ponto $x = -3$ e determine-o.

(Grupo IIIa da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

2.48 Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

Estude a natureza da série nos extremos desse intervalo.

(Grupo IIb da Prova de 7/74)

2.49 Suponha que a série $\sum a_n x^n$ é simplesmente convergente em certo ponto $c < 0$. Indique, justificando, o raio de convergência da série e esclareça, para os valores reais de K para os quais seja possível fazê-lo com a informação de que dispõe, a natureza da série $\sum a_n K^n$, indicando, nos casos de convergência, se é simples ou absoluta.

(Pergunta 4a da Prova de 8/1/73)

2.50 Suponha que a série de potências de x

$$\sum a_n x^n$$

é convergente no ponto -3 e divergente no ponto 3:

1. indique, justificando, se a convergência da série no ponto -3 é simples ou absoluta.
2. indique o conjunto dos valores de x para os quais a série é absolutamente convergente e o conjunto dos valores de x para os quais é divergente.
3. dê um exemplo de uma série que verifique as condições requeridas no enunciado.

(Grupo IIIa do Exame de 2ª época de 8/9/80)

2.51 Prove que, se o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é maior do que 1, então $\lim a_n = 0$. Mostre que, se o raio de convergência da série for igual a 1, a sucessão a_n pode tender para qualquer limite (finito ou infinito) ou não ter limite. Prove ainda que, na hipótese de o raio de convergência ser menor do que 1, a sucessão a_n não é limitada.

(Grupo IVb da Repetição do 1º Teste de 19/4/80)

2.52 a) Prove que, sendo $P(x)$ um polinómio em x (de qualquer grau, mas não identicamente nulo):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x+1)}{P(x)} = 1.$$

b) Supondo que $P(x)$ é um polinómio nas condições da alínea a) e que $Q(x)$ é também um polinómio tal que

$$\forall_{x\in\mathbb{N}} \qquad Q(x) \neq 0$$

utilize o resultado da alínea a) para determinar o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} x^n.$$

c) Obtenha uma condição (fazendo intervir os graus dos polinómios P e Q) necessária e suficiente para que a série seja absolutamente convergente nos extremos do seu intervalo de convergência. Justifique.

(Pergunta 4 da Prova de 19/7/71)

2.53 Designando por r e r' os raios de convergência das séries

$$\sum a_n x^n \qquad \text{e} \qquad \sum b_n x^n$$

indique, justificando, o raio de convergência da série $\sum (a_n + b_n) x^n$ em cada uma das hipóteses seguintes:

1. $r = r' = +\infty$;
2. $r \in \mathbb{R}$, $r' = +\infty$;
3. $r, r' \in \mathbb{R}$ e $r < r'$.

O que pode afirmar sobre o raio de convergência de $\sum (a_n + b_n) x^n$ se for $r = r' \in \mathbb{R}$? Justifique e dê exemplos que ilustrem as hipóteses que podem verificar-se.

(Pergunta 4b da Prova de 23/1/73)

Capítulo 3

Funções Reais de Variável Real. Continuidade e Limites.

3.1 Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x}{e^x(x+1)} \leq 0 \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : e^x \geq e^{-x}\}.$$

1º Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

2º Indique, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

a) Se f é uma função definida e limitada em B e (x_n) é sucessão de termos em B, $(f(x_n))$ tem subsucessões convergentes.

Nas alíneas seguintes, suponha que (a_n) é uma sucessão decrescente de termos em A.

b) A sucessão $(-1)^n a_n$ é convergente.

c) A sucessão $\frac{a_{2n}}{a_n}$ é convergente.

d) A série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ é convergente.

(Grupo I da 2ª Época de 24/2/95)

3.2 Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\log x} \geq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

a) Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

b) Indique, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras e quais são falsas:

i) Toda a sucessão de termos em A tem subsucessões convergentes.

ii) Toda a sucessão monótona de termos em B é convergente e o seu limite está em B.

iii) Toda a função contínua em A tem máximo (em A).

(Pergunta 1 do Grupo I do 2º Exame de 9/2/94)

3.3 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e designe por K o conjunto dos zeros de f. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes*:

a) Se K$=\emptyset$ então $f > 0$ ou $f < 0$.

b) Se K$=\mathbb{Z}$ então f é limitada.

c) Se $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\} \subset$ K então $0 \in$ K.

d) Se $\mathbb{Q} \subset$ K então K $= \mathbb{R}$.

***Nota**: Sempre que afirme que uma proposição é falsa dê um exemplo que o comprove. Sempre que afirme que uma proposição é verdadeira justifique, *abreviadamente*, porque chegou a tal conclusão.

(Pergunta 2 do Grupo I do Exame de 1ª Época de 8/1/97)

3.4 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Indique, justificando, a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(\cos n)}{n^2}.$$

(Pergunta 1 do Grupo IV do 2º Exame de 6/2/95)

3.5 Seja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ uma função contínua e suponha que existe uma sucessão (x_n), de termos em $[a, b]$, tal que $\lim \phi(x_n) = 0$. Prove que ϕ tem, pelo menos, um zero em $[a, b]$.

(Pergunta 1 do Grupo IV do Exame de 2ª Época de 28/2/96)

3.6 Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e sejam, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = \max\{f(x) : x \in [n, n+1]\}, \qquad m_n = \min\{f(x) : x \in [n, n+1]\}.$$

Suponha ainda que

$$M_n - m_n \le \frac{1}{n}, \qquad 0 \le M_n - M_{n-1} \le \frac{1}{n^2} \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}_1.$$

a) Prove que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, se tem

$$M_n \le M_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

b) Prove que existe, em $\mathbb{R}$, $\lim M_n$.

c) Sendo $b = \lim M_n$, prove que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$.

(Grupo IV do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

3.7 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ para a qual existem (em $\mathbb{R}$) os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Seja ainda A o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $A = \{x : x = f(x)\}$. Nestas condições, prove que:

a) A é não vazio. [Pode ser-lhe útil considerar a função $g(x) = x - f(x)$ com $x \in \mathbb{R}$.]

b) A é limitado.

c) A tem máximo e mínimo.

(Grupo IV do 1º Exame de 23/1/95)

3.8 Justifique que, se f é uma função limitada em $\mathbb{R}$, para qualquer sucessão de termos reais, x_n, a sucessão $f(x_n)$ tem subsucessões convergentes.

(Grupo Ib do Exame final de 4/5/79)

3.9 Considere os subconjuntos A e B de $\mathbb{R}$, definidos pelas fórmulas:

$$A = \{x : |x^2 - 1| < 1\}, \qquad B = \{x : 2x^2 - 1 > 0\}.$$

1. Determine a reunião e a intersecção dos conjuntos A e B.
2. Sendo f a aplicação de A em B definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, indique, justificando, se f é bijectiva.

(Pergunta 1a e c da Prova de 1/9/72)

3.10 Seja g a função definida no intervalo $]-\infty, e-1]$ pela fórmula

$$g(x) = \log\left(1 + \frac{x + |x|}{2}\right).$$

1. Esboce o gráfico de g.
2. Mostre que g é crescente mas não estritamente crescente no seu domínio e indique o "maior" intervalo em que g é estritamente crescente (isto é, um intervalo I no qual g seja estritamente crescente sem que o mesmo se passe em qualquer intervalo J que contenha I e seja distinto de I).
3. Indique, justificando, se g é ou não limitada e se tem máximo e mínimo.

(Grupo Ib do 2º Teste de 12/4/80)

Resolução:

1. O gráfico de g está representado[1] na figura 3.1.

   Para esboçar o gráfico basta observar que

   $$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ \log(1+x), & \text{se } 0 \leq x \leq e-1. \end{cases}$$

   e que portanto a função é constante se $x \leq 0$ e se $0 \leq x \leq e-1$ o gráfico é uma translação de 1 para a esquerda do gráfico do logaritmo.

2. Relembrando que o logaritmo é uma função estritamente crescente e a expressão que obtivemos para g na alínea anterior facilmente se conclui que g é crescente, não é estritamente crescente pois é constante em $]-\infty, 0]$ e o maior intervalo onde é estritamente crescente é $[0, e-1]$.

3. Sendo g constante em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, e-1]$ temos $0 = g(0) \leq g(x) \leq g(e-1) = 1$ para todo o x no seu domínio. Portanto a função é g limitada, o seu máximo é 1 e o seu mínimo 0 ocorrendo respectivamente em $e-1$ e em $]-\infty, 0]$.

[1] O gráfico que se apresenta foi gerado numericamente. Obviamente o que se pretende neste e noutros gráficos é uma representação aproximada das características mais importantes que se esboçam com facilidade. Por vezes, como neste caso, a escala dos dois eixos não é a mesma.

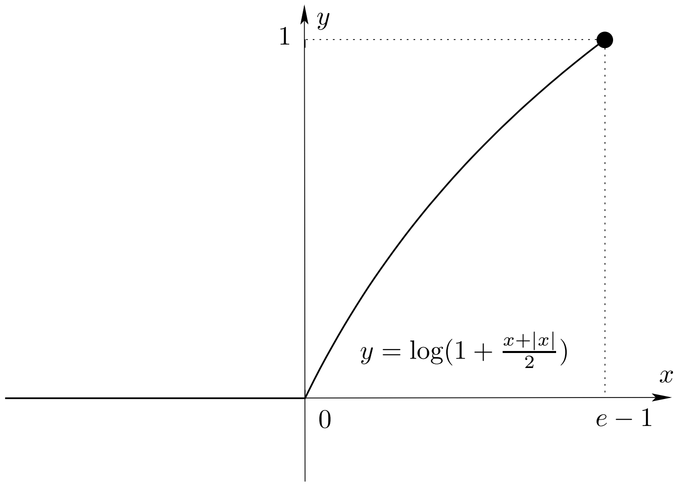

Figura 3.1: O gráfico de $g(x) = \log(1 + \frac{x+|x|}{2})$ no exercício 3.10.

3.11 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e tal que $f \circ f = I_{\mathbb{R}}$ onde $I_{\mathbb{R}}$ designa a aplicação idêntica de $\mathbb{R}$ em si mesmo ($I_{\mathbb{R}}(x) = x, \forall_{x \in \mathbb{R}}$).

1. Recorrendo directamente às definições de aplicação injectiva e sobrejectiva, prove que f é necessariamente bijectiva.

2. Mostre, por meio de exemplos, que uma função f nas condições acima indicadas pode ser:

   (a) contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$;

   (b) contínua num único ponto de $\mathbb{R}$;

   (c) descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

(Pergunta 4 do Exame Final (Ponto nº2) de 17/7/71)

3.12 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0 e x_n o termo geral de uma sucessão convergente; indique (expresso em função de um dos valores assumidos por f) o limite da sucessão $f(x_{3n} - x_{2n})$. Justifique abreviadamente a resposta.

(Grupo IIa do Exame de 2ª época de 8/9/80)

3.13 Sendo a_n o termo geral de uma sucessão convergente tal que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{2n} > 2 \qquad \text{e} \qquad a_{2n+1} < 2,$$

indique, justificando, qual é o limite de a_n.

Existirá alguma função f, contínua no ponto 0 e tal que, para todo o n, verifique a igualdade:

$$f(\tfrac{1}{n}) = (-1)^n a_n?$$

Justifique a resposta.

(Grupo Ib do Exame Final de 21/9/79)

Resolução: O limite de a_n tem de ser 2 pois se (a_n) converge para um certo $\alpha \in \mathbb{R}$, qualquer sua subsucessão tem o mesmo limite e a partir de $a_{2n} > 2$ e $a_{2n+1} < 2$ obtém-se $\alpha = \lim a_{2n} \geq 2$ e $\alpha = \lim a_{2n+1} \leq 2$ ou seja $\alpha = 2$.
Se f é contínua em 0 tem-se para qualquer sucessão $x_n \to 0$, que $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(0)$. Em particular ter-se-ia

$$f(0) = \lim f\left(\frac{1}{2n}\right) = \lim(-1)^{2n} a_{2n} = \lim a_{2n} = 2$$

e também

$$f(0) = \lim f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \lim(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim(-a_{2n+1}) = -2$$

e viria $2 = -2$, o que é absurdo. Logo não pode existir uma tal função.

3.14 Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, justifique que:

1. não existe qualquer sucessão x_n (de termos em $[0,1]$) tal que $g(x_n) = n$ $(\forall_{n \in \mathbb{N}_1})$
2. se existe uma sucessão x_n (de termos em $[0,1]$) tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ $(\forall_{n \in \mathbb{N}})$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

(Grupo IIb da Repetição do 2º Teste de 19/4/80)

3.15 Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$? Justifique.

(Grupo Ic da Repetição do 2º Teste de 19/4/80)

3.16 Seja φ uma função definida em $\mathbb{R}$ e verificando as condições seguintes:

1. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$ é um número inteiro.
2. $\varphi(x)$ tende para um limite finito, c, quando $x \to +\infty$.

Recorrendo directamente à definição de limite, justifique que c é um número inteiro e que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = c$ sempre que $x > \alpha$.

(Grupo Ib do Exame Final de 10/5/79)

3.17 Mostre que se u_n é uma sucessão monótona, $\operatorname{arctg} u_n$ é uma sucessão convergente.

(Grupo IIb do 1º Teste de 7/4/79)

3.18 Suponha que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, a função f verifica a condição

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique abreviadamente as respostas.

(Grupo IVa do Exame Final de 30/4/80)

3.19 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com limite finito quando $x \to 0$ e tal que

$$\frac{f(x)}{x} > 0 \qquad \forall_{x \neq 0}.$$

Indique, justificando, o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(Grupo Ic do 2º Teste de 12/4/80))

Resolução: Tem de ter-se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ pois se fosse $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha \neq 0$ com, por exemplo, $\alpha > 0$, resultaria que, para x suficientemente próximo de 0 mas menor que 0, $f(x)/x < 0$. Caso fosse $\alpha < 0$, ter-se-ia para x suficientemente próximo de 0 mas maior que 0, $f(x)/x < 0$.
Concretamente, no caso $\alpha > 0$, escolha-se $\epsilon > 0$ tal que $0 < \alpha - \epsilon$; como $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$ existirá $\delta > 0$ tal que se $x \in]-\delta, \delta[$ então $f(x) \in]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$. Logo para $x \in]-\delta, \delta[$ virá $f(x) > 0$ e em particular se $-\delta < x < 0$ virá $f(x)/x < 0$.

3.20 Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}.$$

(Grupo I3 do Exame de 2ª época de 24/9/80)

3.21 Calcule os limites

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x \cos e^x}{x^2 + 1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x \operatorname{sen} 3x}.$$

(Grupo IIb do Exame de 2ª época de 8/9/80)

Resolução: O primeiro dos limites pedidos é 0. De facto, tem-se

$$0 \leq \left| \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1} \ ;$$

como $\frac{|x|}{x^2+1}$ tende para 0 quando $x \to +\infty$, também $\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$ tende para 0 quando $x \to +\infty$.
Quanto ao segundo limite, quando $x \to 0$, quer o numerador quer o denominador da fracção tendem para 0. No entanto:

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x \operatorname{sen}(3x)} = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \frac{x}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)}$$

e como $\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$ resulta que a expressão do lado direito tende para $\frac{1}{3}$.

3.22 Considere a função f, definida no intervalo $]-1, 1[$ pela fórmula

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}.$$

1. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e $\lim_{x\to -1} f(x)$.
2. Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada ou minorada e se tem máximo ou mínimo (em $]-1, 1[$).
3. Se x_n for uma sucessão convergente para 1, com termos em $]-1, 1[$, qual será o limite de $f(x_n)$? Justifique.
4. Dê um exemplo de uma sucessão y_n, de termos em $]-1, 1[$, tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

(Grupo Ia do 2ª Teste de 12/4/80)

3.23 Considere as funções

$$\varphi(x) = \log(1 + e^x), \qquad \psi(x) = \operatorname{arctg}(x) \operatorname{sen}(x^2).$$

1. Indique, justificando, se φ e ψ são majoradas, minoradas, limitadas (em $\mathbb{R}$).

2. A função ψ tem máximo (em $\mathbb{R}$)? Qual é o seu supremo? Justifique.

3. Existe o $\lim_{x\to-\infty}(\varphi(x)\psi(x))$? E o $\lim_{x\to+\infty}(\varphi(x)\psi(x))$? Justifique.

(Grupo III do Exame Final de 21/9/79)

Resolução:

1. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se $e^x > 0$, logo $1 + e^x > 1$ e portanto, $\varphi(x) = \log(1 + e^x) > 0$ é minorada; como $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\varphi(x)$ não é majorada e portanto não é limitada.

   Quanto a $\psi(x)$ tem-se $|\psi(x)| = |\operatorname{arctg} x| \cdot |\operatorname{sen} x^2| < \dfrac{\pi}{2} \cdot 1 = \dfrac{\pi}{2}$. Logo $\psi(x)$ é limitada.

2. ψ não tem máximo embora o supremo de ψ seja $\frac{\pi}{2}$. Para ver que $\frac{\pi}{2} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x)$ basta observar que $\frac{\pi}{2}$ é um majorante de $\psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como se viu e que dado $\epsilon > 0$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que: $\frac{\pi}{2} - \epsilon < \psi(x)$. Para este efeito observe-se que, pondo $x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, se tem $\psi(x_n) = \operatorname{arctg} x_n \to \frac{\pi}{2}$; assim, escolhendo n suficientemente grande, ter-se-á decerto $\psi(x_n) > \frac{\pi}{2} - \epsilon$.

   Mostrámos que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x) = \frac{\pi}{2}$ e como não existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(\xi) = \frac{\pi}{2}$ conclui-se que ψ não tem máximo.

3. Tem-se $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \log(1 + e^x) = \log\left(\lim_{x\to-\infty}(1 + e^x)\right) = \log 1 = 0$. Viu-se que $\psi(x)$ é limitada pois $|\psi(x)| < \frac{\pi}{2}$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$. Logo $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)\psi(x) = 0$. Mas

   $$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(1 + e^x) = +\infty.$$

   Mostremos que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\psi(x)$ não existe. Basta encontrar duas sucessões (x_n) e (y_n) tais que

   $$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)\psi(x_n) = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n)\psi(y_n) = \beta \qquad \text{e} \qquad \alpha \neq \beta.$$

   Por exemplo, com

   $$x_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \qquad y_n = \sqrt{2n\pi}$$

   tem-se

   $$\begin{aligned} \lim \varphi(x_n)\psi(x_n) &= \lim\left(\varphi(x_n)\operatorname{arctg} x_n \operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \lim(\varphi(x_n)\operatorname{arctg} x_n) = +\infty, \\ \lim \varphi(y_n)\psi(y_n) &= \lim(\varphi(y_n)\operatorname{arctg} y_n \operatorname{sen}(2n\pi)) = 0. \end{aligned}$$

3.24 1. Para cada $x \in \mathbb{R}$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}.$$

(Considere separadamente os casos $|x| < 1$, $|x| = 1$ e $|x| > 1$.)

2. Estude do ponto de vista da continuidade *uma* das funções seguintes (à sua escolha):

$$\varphi(x) = (x^2 - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{1 - |x|^n}{1 + |x|^n}$$

ou

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } |x| \leq 1, \\ 1 - x^2, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Esboce o gráfico da função escolhida e indique, justificando, os seus extremos absolutos e locais (se existirem) e o seu contradomínio.

(Pergunta 1 do Exame Final de 6/5/78)

3.25 a) Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+x^{2n}}{1-x^{2n-1}}.$$

(Considere separadamente os casos: $|x| < 1$, $x = -1$ e $|x| > 1$).

b) Esboce o gráfico da função f, definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ pela fórmula

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+x^{2n}}{1-x^{2n-1}}.$$

Nota: se não resolver a alínea a), considere a função f definida, não pela fórmula anterior, mas por:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1, \\ 1, & \text{se } -1 \le x < 1. \end{cases}$$

c) Esboce ainda o gráfico da função g, definida no mesmo conjunto pela igualdade:

$$g(x) = |f(x)|.$$

d) Estude as funções f e g, do ponto de vista da continuidade, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$. Indique ainda se algumas destas funções tem máximo ou mínimo (em todo o seu domínio) e, no caso de existir máximo ou mínimo, indique o seu valor e os pontos do domínio da função em que é atingido.

(Grupo III do 1º Teste de 11/3/78)

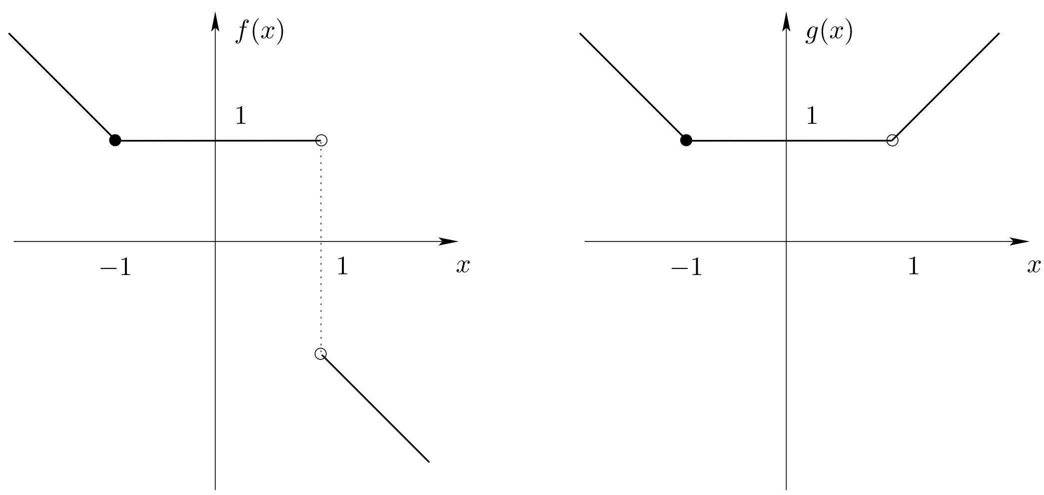

Figura 3.2: Os gráficos das funções f e $g = |f|$ no exercício 3.25.

Resolução:

a) Se $|x| < 1$: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+x^{2n}}{1-x^{2n-1}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Se $x = -1$: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+(-1)^{2n}}{1-(-1)^{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+1}{1+1} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$

Se $|x| > 1$: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+x^{2n}}{1-x^{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n}}{-x^{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} -x = -x.$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \text{ ou } x = -1, \\ -x, & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

c)

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \text{ ou } x = -1, \\ |x|, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

d) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mas é prolongável por continuidade ao ponto 1, bastando pôr $g(1) = 1$. f não tem máximo nem mínimo em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. g tem mínimo em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, em todos os pontos de $[-1, 1[$.

3.26 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \varphi(x),$$

onde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Indique o contradomínio de f. A função é majorada (em $\mathbb{R}$)? E minorada?
2. Quais dos limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existem?
3. Em que pontos é que f é contínua?

Justifique as respostas.

(Grupo II do 1º Teste de 24/2/79)

3.27 Sendo f a função definida em $\mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right), & \text{se } x \geq 1, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

1. Determine K.
2. Estude a função f do ponto de vista da continuidade, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$. Indique o contradomínio da função f; indique ainda se a função tem máximo, mínimo, supremo ou ínfimo (em todo o seu domínio) e, no caso de existência, indique o seu valor.
3. Diga se existem e, no caso de existência, calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Justifique as respostas.

(Grupo III do 1º Teste de 7/4/79)

3.28 Considere a função ψ definida em $\mathbb{R}$ pela forma seguinte:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x \geq 0, \\ K - \operatorname{arctg} x, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde K é um número real.

Determine K por forma que ψ seja contínua em $\mathbb{R}$ e, fixando K no valor determinado (para o qual a função fica estritamente monótona em $\mathbb{R}$) calcule

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \psi(x) \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} \psi(x).$$

(Grupo IIIa do Exame Final de 30/4/80)

3.29

1. Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$
$$\psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

2. Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

3. Mostre que as funcões φ e ψ são limitadas.

(Grupo IIa do 2º Teste de 12/4/80)

3.30 Seja φ uma função majorada no intervalo $[a, b]$ e, para cada $x \in [a, b]$, designe-se por $\psi(x)$ o supremo da função no intervalo $[a, x]$:

$$\psi(x) = \sup_{t\in[a,x]} \varphi(t).$$

Nestas condições, prove que a função ψ é crescente e limitada em $[a, b]$ e que ψ é contínua em qualquer ponto $c \in [a, b]$ no qual φ seja contínua; mostre que ψ pode ser contínua em $[a, b]$ sendo φ descontínua em todos os pontos deste intervalo.

(Grupo IIIb do 2º Teste de 12/4/80)

3.31 Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada e se $P(x)$ é um polinómio em x de grau ímpar, a equação:

$$f(x) = P(x)$$

tem pelo menos uma raíz real. Dê exemplos de funções f e polinómios P, nas condições referidas no enunciado, para os quais a equação indicada:

1. Tenha apenas uma raíz real.

2. Tenha infinitas raízes reais.

(Grupo IVb da Prova de 26/7/78)

3.32 Considere a função f definida (no conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

1. Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.
2. Calcule
$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$
3. Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.
4. Dê exemplos de sucessões u_n e v_n, de termos no domínio de f e tais que u_n e $f(v_n)$ sejam convergentes e v_n e $f(u_n)$ sejam divergentes.

(Grupo Ia da Repetição do 2º Teste de 19/4/80)

3.33 Considere as funções f e g definidas em $]0,+\infty[$ pelas fórmulas

$$f(x) = \log\log(1+x),$$
$$g(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2}.$$

1. Estude f e g quanto à continuidade, em cada ponto do seu domínio.
2. Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Indique, justificando, se f ou g são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.
4. Indique, justificando, o contradomínio de f.

(Grupo IIIb do Exame Final de 30/4/80)

3.34 Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da forma seguinte:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ 1 + e^{1-x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Justifique que φ é contínua para qualquer ponto $x \neq 0$.
2. Calcule os limites laterais de φ no ponto 0 e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto.
3. Justifique que φ é monótona em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$ e $[0,+\infty[$. Sê-lo-á também na reunião desses dois intervalos? Justifique a resposta.
4. Calcule $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e indique, justificando, o contradomínio de φ.

(Grupo Ic do Exame de 2ª época de 8/9/80)

3.35 Considere a função g, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pela fórmula

$$g(x) = \frac{1}{x}e^{1/x}.$$

1. Usando a notação usual para representar intervalos, represente os conjuntos:

$$\{x : g(x) > 0\} \qquad \text{e} \qquad \{x : g(x) < 0\}$$

como uma união de intervalos disjuntos.

2. Observe que g assume valores positivos e valores negativos, mas não assume o valor 0; explique porque é que este facto não está em contradição com o teorema do valor intermédio.

3. Calcule $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e indique, justificando sinteticamente a resposta, o transformado pela função g do intervalo $]0, +\infty[$.

4. Calcule $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ e justifique que g não tem máximo no intervalo $]-\infty, 0[$; indique ainda um subconjunto deste intervalo no qual g tenha máximo.

(Grupo Ib da Repetição do 2º Teste de 19/4/80)

3.36 Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ \log \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

1. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

3. Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

4. Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$ com $\epsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\displaystyle\max_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} g(x)$.

(Grupo II2 do Exame de 2ª época de 24/9/80)

3.37 Sendo K um número real diferente de zero, considere a função f, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{Kx}, & \text{se } x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

1. Estude a função, do ponto de vista da continuidade, em cada ponto do seu domínio.

2. Calcule os limites laterais de f no ponto 0 e indique, justificando, os valores de K para os quais f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

3. Calcule os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ e indique, justificando, se a função é limitada (em todo o seu domínio).

(Grupo IIa da Repetição do 2º Teste de 19/4/80)

Resolução:

1. Para $x \neq 0$ a função é contínua pois $\frac{1}{x}$, $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{arctg} x$ o são e compondo funções contínuas obtém-se funções contínuas.

2. Para que f seja prolongável por continuidade em 0 basta que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{Kx} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

   Ora:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{Kx} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\pi}{K}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \frac{\pi}{K}\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \frac{\pi}{K}\cdot 1 = \frac{\pi}{K}.$$

   Logo, terá de ser $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{K}$ ou seja $K = 2$.

3.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{Kx} = 0$$

   pois $\frac{1}{Kx} \to 0$ e $\operatorname{sen}(\pi x)$ é limitada.
   Se $x > 0$ tem-se $0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$.
   Se $x < 0$ viu-se que $\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{Kx} = \frac{\pi}{K}$, logo $\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{Kx}$ é limitada nalgum intervalo $]-\epsilon, 0[$ (com $\epsilon > 0$). Fora desse intervalo, isto é, se $x \in]-\infty, -\epsilon]$ tem-se

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{Kx}\right| \le \frac{1}{|Kx|} = \frac{1}{|K||x|} < \frac{1}{|K|\epsilon},$$

   pois então $|x| > \epsilon$. Logo $f(x)$ é limitada para $x < 0$ e para $x > 0$, ou seja, é limitada no seu domínio.

3.38 Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b \in [a, +\infty[$ tal que, para qualquer $x > b$, se tem $f(x) < f(a)$. Prove que f tem máximo em $[a, +\infty[$.

(Grupo IIb do 2º Teste de 12/4/80)

Resolução: Se for $b = a$ então para todo $x > a$ tem-se $f(x) < f(a)$ o que significa que f atinge um valor máximo em a. Se for $b \neq a$ e portanto, $b > a$, $f(x)$ se tiver máximo há-de tê-lo em $[a, b]$ pois para $x > b$, $f(x) < f(a)$. Ora sendo f contínua em $[a, +\infty[$ a sua restrição f_1 ao intervalo limitado e fechado $[a, b]$ é contínua e pelo teorema de Weierstrass f_1 tem máximo em $[a, b]$ que é portanto máximo de f.

3.39 Seja f uma função contínua em $[a, b]$, tal que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Prove que existem números positivos α e β tais que, quaisquer que sejam x e y pertencentes a $[a, b]$, $\alpha \le f(x)f(y) \le \beta$.

(Grupo IIIa do 2º Teste de 12/4/80)

Resolução: Sendo f contínua em $I = [a, b]$ e $f(x) \neq 0$ para cada $x \in I$, todos os valores assumidos por f em I serão do mesmo sinal (como resulta do teorema do valor intermédio). Designando por m o mínimo e por M o máximo de f em I (que existem, pelo teorema de Weierstrass) e supondo $x, y \in I$, ter-se-á então, na hipótese de serem positivos os valores de f em I

$$0 < m \leq f(x) \leq M, \qquad 0 < m \leq f(y) \leq M$$

e, no caso de esses valores serem negativos,

$$m \leq f(x) \leq M < 0, \qquad m \leq f(y) \leq M < 0.$$

Tomando $\alpha = m^2$, $\beta = M^2$ no primeiro caso e $\alpha = M^2$, $\beta = m^2$ no segundo ter-se-á portanto em qualquer dos casos

$$0 < \alpha \leq f(x)f(y) \leq \beta.$$

3.40 a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função

$$\varphi(x) = g(1 - x^2)$$

tem máximo e mínimo.

b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existência de máximo e mínimo? Justifique.

(Grupo IV do 1º Teste de 7/4/79)

3.41 Sejam f e g funções contínuas no intervalo $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

a) Justifique que existem números reais α e β tais que, para todo o $x \in [a, b]$,

$$\alpha \leq (f(x) + g(x))^2 \leq \beta.$$

b) Prove que, se existirem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $f(x_1) > g(x_1)$ e $f(x_2) < g(x_2)$, a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução em $[a, b]$.

c) Quais das proposições expressas nas alíneas a) e b) continuariam a ser verdadeiras se, em vez do intervalo fechado $[a, b]$ considerássemos o intervalo aberto $]a, b[$ (no qual f e g continuariam a supor-se contínuas)? Justifique cuidadosamente a resposta.

(Grupo V do 1º Teste de 24/2/79)

3.42 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ e tal que $f(0) < 0$. Nestas condições prove que:

1º A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas raízes reais.

2º Existe um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $f(c) \leq f(x)$.

Dê ainda um exemplo de uma função que verifique todas as condições exigidas no enunciado — excepto a continuidade em $\mathbb{R}$, que deve ser substituída pela continuidade em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ — e para a qual as afirmações expressas em 1º e 2º sejam ambas falsas.

(Grupo IIIb do Exame de 2ª época de 8/9/80)

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

Resolução:

1. Sendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha > 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \beta > 0$ seja $\epsilon > 0$ tal que $0 < \alpha - \epsilon$ e $0 < \beta - \epsilon$. Existem $x_0 < 0$ e $x_1 > 0$ tais que, se $x \leq x_0$, se tem $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ e, em particular, $0 < \alpha - \epsilon < f(x)$ e, se $x \geq x_1$, se tem $|f(x) - \beta| < \epsilon$ e em particular $0 < \beta - \epsilon < f(x)$. Quer dizer $f(x_0) > 0$ e $f(x_1) > 0$; porém $f(0) < 0$ pelo que, como f é contínua, existem c_0 e c_1 tais que:

$$x_0 < c_0 < 0, \quad 0 < c_1 < x_1, \quad f(c_0) = 0 \quad \text{e} \quad f(c_1) = 0$$

pelo teorema do valor intermédio.

2. Com as notações anteriores, f tem um valor mínimo em $[x_0, x_1]$ atingido em certo $c \in [x_0, x_1]$, de acordo com o teorema de Weierstrass, e $f(c) < 0$ pois $f(0) < 0$ e $0 \in [x_0, x_1]$. Ora, fora de $[x_0, x_1]$, $f(x)$ é sempre positiva como se viu, logo o valor mínimo de $f(x)$ em $\mathbb{R}$ é de facto $f(c)$. Quanto ao contra-exemplo basta considerar

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } x = 0, \\ \operatorname{arctg}(x-1), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

3.43 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$, tal que

$$\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty.$$

Mostre que existe uma e uma só função contínua h definida em $[a, b]$ tal que

$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)]^2 \qquad \forall_{x\in\,]a,b[}$$

e determine o seu contradomínio. Justifique cuidadosamente a resposta.

(Grupo III2 do Exame de 2ª época de 24/9/80)

3.44 Suponha que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

1. Recorrendo directamente à definição de continuidade prove que, se $f(a) > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) > 0$.

2. Designando por g a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$

   prove que g é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

   [**Sugestão:** considere separadamente as hipóteses $f(a) > 0$, $f(a) < 0$ e $f(a) = 0$; na primeira pode ser-lhe útil o resultado da alínea a); a segunda pode tratar-se analogamente; na terceira recorra directamente à definição de continuidade].

3. Prove que, se a equação $g(x) = 0$ tem pelo menos uma raíz real e se g não é a função nula, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raíz real.

4. Prove que, se os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ existem e são ambos negativos, a função g tem máximo e mínimo absolutos.

(Grupo IV da Prova de 2/12/76)

3.45 Sejam a e b dois números reais tais que $a < b$, f uma função contínua em $[a, b]$ e admita-se que qualquer dos conjuntos:

$$A = \{x : x \in [a, b] \ \wedge \ f(x) > 0\}, \qquad B = \{x : x \in [a, b] \ \wedge \ f(x) < 0\}$$

é não vazio.

Justifique as proposições seguintes:

1. $A \cup B \neq [a, b]$.
2. Se x_n é o termo geral de uma sucessão convergente tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} \in A$ e $x_{2n+1} \in B$, então $f(x_n)$ converge e o seu limite é zero.
3. O conjunto $f(A)$ tem máximo e não tem mínimo; o conjunto $f(B)$ tem mínimo e não tem máximo.

Dê ainda um exemplo de uma função f (contínua em $[a, b]$), para a qual seja igual a a o ínfimo de qualquer dos conjuntos A e B.

(Grupo IV do 1º Teste de 11/3/78)

3.46 Sendo f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, considere os conjuntos:

$$U = \{x : f(x) > g(x)\}, \qquad V = \{x : f(x) < g(x)\}, \qquad W = \{x : f(x) = g(x)\}.$$

1. Prove que, se U e V são não vazios, W é não vazio.
2. Prove que, se x_n é uma sucessão convergente e se $x_{2n} \in U$ e $x_{2n+1} \in V$ $(\forall_{n \in \mathbb{N}})$, então $\lim x_n \in W$.
3. Prove que, se $a \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que a vizinhança ϵ de a está contida em U; esta afirmação ficaria ainda verdadeira se substituíssemos U por W? Justifique.
4. Se existirem os limites $f(+\infty)$ e $g(+\infty)$ e se for verificada a desigualdade $f(+\infty) > g(+\infty)$, quais dos conjuntos U, V, W serão necessariamente majorados? Justifique.
5. Em cada um dos casos seguintes dê um exemplo – ou prove que não é possível fazê-lo – de funções f, g contínuas em $\mathbb{R}$, tais que $f(+\infty) = g(+\infty)$ e para as quais, dos três conjuntos U, V, W:
   a) Só U e V sejam majorados.
   b) Só U e W sejam majorados.
   c) Só W seja majorado.
   d) Só U seja majorado.
   e) Nenhum seja majorado.

(Grupo III da Repetição do 2º Teste de 19/4/80)

3.47 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$, verificando a condição

$$\exists_{K \in \mathbb{R}} \forall_{x, y \in \mathbb{R}} \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \tag{3.1}$$

1. Prove que f é contínua em $\mathbb{R}$.
2. Prove que, qualquer que seja $a > 0$, a função $|f|$ tem máximo no intervalo $[-a, a]$ e que esse máximo não excede o número $|f(0)| + Ka$.
3. Prove que, sendo $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$.

4. Indique, justificando, quais são as funções polinomiais que verificam a condição (3.1).

(Grupo IVb do Exame Final de 30/4/80)

Resolução:

1. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ e prove-se que f é contínua em x_0. Dado $\epsilon > 0$ ter-se-á com efeito $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ desde que $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{K}$, pois então

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| < K\frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

2. Dados dois reais u, v tem-se sempre $||u| - |v|| \leq |u - v|$ daí que para qualquer $x \in [-a, a]$

$$||f(x)| - |f(0)|| \leq |f(x) - f(0)| \leq K|x| \leq Ka$$

e portanto, $|f(x)| \leq |f(0)|+Ka$ e daí que o máximo de f em $[-a, a]$ (que existe pelo teorema de Weierstrass) seja inferior a $|f(0)| + Ka$.

3. Tem-se

$$\left|\frac{f(x)}{x^\alpha}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} \leq \frac{|f(0)| + K|x|}{|x|^\alpha} = \frac{|f(0)|}{|x|^\alpha} + K\frac{1}{|x|^{\alpha-1}}.$$

Como $\alpha > 1$ o lado direito tende para 0 quando $x \to +\infty$.

4. Se $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} a_0x^{n-\alpha}.$$

Se f verifica a condição este limite terá de ser nulo para qualquer $\alpha > 1$ e ele só é nulo se $n - \alpha < 0$. Logo tem de ser $n \leq 1$ e f tem de ter grau menor ou igual a um.

Capítulo 4

Cálculo Diferencial.

4.1 Noção de derivada. Primeiras propriedades.

4.1 Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{-1/x}} \qquad \forall_{x\neq 0}.$$

Calcule as derivadas laterais de f no ponto 0.

(Grupo IIa do Teste de 7/4/79)

4.2 Determine as derivadas laterais, no ponto 0, da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos os valores para $x \neq 0$ são determinados pela igualdade:

$$f(x) = x\frac{1 + e^{1/x}}{2 + e^{1/x}}.$$

[**Sugestão**: estude primeiramente os limites laterais, no ponto 0, da função $e^{1/x}$.]

(Pergunta 2a do Ponto nº6 de 25/10/71)

4.3 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ pela forma seguinte:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } |x| \leq 1, \\ 1 - x^2, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

a) Sendo $|a| < 1$ e $|b| > 1$, calcule $g'(a)$ e $g'(b)$ (num dos casos, recorra directamente à definição de derivada; no outro, use as regras de derivação adequadas).

b) Calcule as derivadas laterais de g nos pontos em que a função não é diferenciável.

c) Esboce o gráfico de g' e justifique que não há, no gráfico de g, dois pontos (distintos) nos quais as tangentes a este último gráfico sejam paralelas.

(Pergunta 1∗ do Exame Final de 6/5/78)

Resolução:

a) Vamos calcular $g'(a)$ recorrendo à definição:

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{((a+h)^2 - 1) - (a^2 - 1)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a + h) = 2a.$$

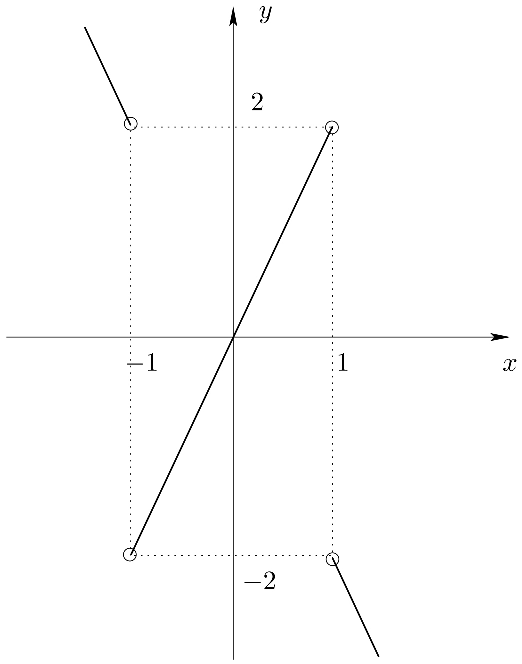

Figura 4.1: O gráfico da função g' no exercício 4.2.

Vamos calcular $g'(b)$ usando as regras de derivação: sendo $|x| > 1$ tem-se $g'(x) = (1 - x^2)' = -2x$. Logo $g'(b) = -2b$.

b) Nos pontos 1 e -1 a função não é diferenciável. As derivadas laterais existem e são:

$$\begin{aligned}
g'_d(1) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-(1+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h - h^2}{h} = -2,\\
g'_e(1) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = 2,\\
g'_d(-1) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{g(-1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(-1+h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h + h^2}{h} = -2,\\
g'_e(-1) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{g(-1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-(-1+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h - h^2}{h} = 2.
\end{aligned}$$

c) Dois pontos distintos x_1, x_2 teriam tangentes paralelas ao gráfico de g se as derivadas $g'(x_1)$ e $g'(x_2)$ tivessem um valor comum α. Isso implicaria que a recta paralela ao eixo dos x com pontos de ordenada α cortasse o gráfico de g' em dois pontos. Mas não há nenhum α nessas condições.

4.4 Sendo C a curva plana de equação $y = x^2 - 5x + 6$.

1º Determine o ponto de C no qual a tangente à curva é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares;

2º Justifique que, dada arbitrariamente uma recta do plano não paralela ao eixo das ordenadas, existe um e um só ponto de C no qual a tangente é paralela à recta dada.

(Grupo Ib do 1º Teste de 21/6/80)

4.5 Seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que $g(0) = 3$ e seja f a função definida pela igualdade

$$f(x) = 1 + xg(x) \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

Prove que f é diferenciável no ponto 0 (note que não se supõe que g o seja) e determine uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de intersecção com o eixo das ordenadas. Mostre ainda que, se g for estritamente monótona, o gráfico de f e a tangente cuja equação determinou só se intersectam no ponto de tangência.

(Pergunta 1b da Prova de 20/7/71)

Resolução:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + xg(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0).$$

O último passo decorre de g ser contínua em 0. A equação pedida é $y = f'(0)x + f(0)$ ou seja $y = g(0)x + 1$. Um ponto de intersecção da tangente com o gráfico de f deverá ter uma abcissa x verificando:

$$f(x) = f'(0)x + f(0)$$

ou seja, $1 + xg(x) = g(0)x + 1$ ou ainda $xg(x) = g(0)x$. Se for $x \neq 0$ ter-se-á $g(x) = g(0)$ e sendo g estritamente monótona viria por outro lado $g(x) \neq g(0)$ pois g seria injectiva. Ora isto é absurdo, pelo que tem de ser $x = 0$.

4.6 Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e sejam φ e ψ as funções reais definidas em $\mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f(e^x), \qquad \psi(x) = f(\operatorname{sen} x).$$

Mostre que

$$\varphi''(0) + \psi''\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''(1).$$

(Pergunta 1 do Grupo III do Exame de 1ª Época de 8/1/97)

4.7 Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & \text{se } x > 0, \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Sendo $a < 0$ e $b > 0$, justifique que f é diferenciável nos pontos a e b e determine uma equação da recta tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a))$.

b) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0 e, designando por $\tilde{f}$ a função que se obtém prolongando f por continuidade ao ponto 0, indique, justificando, o domínio de diferenciabilidade de $\tilde{f}$.

(Grupo I1 da Repetição do 1º Teste de 18/9/80)

4.8 Seja

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

1º Calcule $g'(x)$, para $x \neq 0$.

2º Calcule $g'(0)$ (recorra à definição de derivada).

3º Escreva uma equação da tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

(Grupo I do Exame de 2/10/80)

4.9 Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguintes funções:

$$\text{a)}\quad \log(x \operatorname{sh} x), \qquad \text{b)}\quad \operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x), \qquad \text{c)}\quad \frac{e^x}{1+x}.$$

(Grupo I1 do Exame de 23/3/77)

4.10 Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguintes funções:

$$\text{a)}\quad f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad \text{b)}\quad g(x) = \log|\log x|.$$

(Grupo I do Exame de 2ª época de 19/7/77)

4.11 Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a derivada de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\quad f(x) = \sqrt{4-x^2}, \qquad \text{b)}\quad g(x) = \operatorname{sen}\log(x^3-1), \qquad \text{c)}\quad h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(Grupo I1 da Prova de 25/7/77)

4.12 1º Seja f a função definida por $f(x) = \log \operatorname{arcsen} \frac{x+1}{x-1}$; determine o domínio de f, o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

2º Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada da função definida por $y = \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$. Calcule as suas derivadas laterais no ponto $x = 0$.

3º Determine uma equação da recta tangente ao gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ por $y = e^{\operatorname{arctg} x}$, no ponto de abcissa nula.

(Grupo I da Prova de 18/7/77)

4.13 Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela fórmula

$$f(x) = x^4 e^{-x}$$

e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$.

(Grupo IIb do Exame de 26/7/78)

4.14 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx, & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

b) Determine a e b por forma que f seja diferenciável no ponto 0 e verifique se (com esses valores de a e b) a função f' fica contínua em $\mathbb{R}$.

(Grupo II do Teste de 10/4/79)

4.15 Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função contínua no ponto 0 e tal que, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g(x) = x\left(2 + x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\right).$$

a) Determine uma equação da tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0 e mostre que nenhum ponto do gráfico da função está situado "abaixo" dessa tangente.

b) Estude, do ponto de vista da continuidade, a função g' (primeira derivada de g).

(Grupo III do Exame Final de 4/5/79)

4.16 Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e supondo que f' é contínua (mas possivelmente não diferenciável) no ponto $a \in \mathbb{R}$, prove que a função

$$g(x) = (x - a)f(x)$$

é duas vezes diferenciável no ponto a e exprima $g''(a)$ em função de $f'(a)$.

(Grupo IIIb do Exame de 26/7/78))

4.17 Sendo f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e designando por $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $g(x) = f(e^x)$, mostre que

$$g''(0) - g'(0) = f''(1).$$

(Grupo I2 da Repetição do 1º Teste de 18/9/80)

Resolução: Temos

$$g'(x) = f'(e^x)e^x,$$
$$g''(x) = f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x.$$

Logo

$$g''(0) - g'(0) = f''(1) + f'(1) - f'(1) = f''(1).$$

4.18 Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = e^{g(\log x)}$$

e (supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes) determine:

1º Uma equação da tangente ao gráfico de φ no ponto de abcissa 1.

2º $\varphi''(e)$.

(Grupo IVa do Teste de 24/4/79)

4.19 Determine para que valores $k \in \mathbb{R}_+$ a função

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$, mas a derivada não é contínua em $x = 0$. Justifique.

(Grupo IV do Exame de Época Especial de 17/11/95)

4.2 Teoremas de Rolle e Lagrange. Corolários.

4.20 Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 5|x+1| \geq 11 + 3x\}, \qquad B_n = \left[0, \frac{1}{n}\right[\quad (n \in \mathbb{N}_1),$$
$$C = \{x \in \mathbb{R}^+ : \log x \leq 1\}, \qquad D = \cap_{n \in \mathbb{N}_1} B_n.$$

(Note que D é o conjunto dos números reais que pertencem a todos os B_n.)

1. Mostre que $A = \,]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.
2. Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo, o mínimo, o supremo e o ínfimo dos conjuntos A, C e D.
3. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas cada uma das proposições seguintes dando um exemplo sempre que afirmar que a proposição é falsa e jutificando *abreviadamente* sempre que afirmar que a proposição é verdadeira:

   a) Toda a sucessão crescente de termos em $A \cap \mathbb{R}^-$ é convergente (em $\mathbb{R}$).

   b) Toda a sucessão (x_n) tal que $x_n \in B_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$, é convergente (em $\mathbb{R}$).

   c) Sejam $x_0 \in A \cap \mathbb{R}^-$ e $y_0 \in A \cap \mathbb{R}^+$. Toda a função contínua em A tal que $f(x_0) < 0$ e $f(y_0) > 0$, tem pelo menos um zero.

   d) Toda a função contínua em $C \cup D$ tem máximo.

   e) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$. Então f' tem, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, pelo menos um zero em B_n.

(Grupo I do Exame de 1ª Época de 26/1/96)

4.21 Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ da forma seguinte:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{se } x < 0, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Sendo $a < 0$ e $b > 0$, calcule $F'(a)$ e $F'(b)$ e escreva equações das tangentes ao gráfico de F nos pontos de abcissas a e b.

b) Justifique que $F'(0) = 1$.

c) Utilize os resultados de a) e b) para justificar que F não tem extremos locais.

(Pergunta 1 do Teste de 22/4/78)

4.22 Sendo f uma função real definida em $\mathbb{R}$, designe-se por Γ o gráfico de f num dado referencial (ortonormado) e por φ a função definida pela forma seguinte: para cada $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$ é igual à distância da origem ao ponto de Γ cuja abcissa é x.

1. Exprima $\varphi(x)$ (em função de $f(x)$ e x) por meio de uma fórmula e aproveite-a para justificar que φ é contínua em qualquer ponto em que f o seja; mostre, por meio de um exemplo, que φ pode ser contínua num ponto de descontinuidade de f.

2. Reconhece-se facilmente que, se f for contínua em $\mathbb{R}$, φ tem mínimo (absoluto); sem demonstrar este resultado, aproveite-o para provar que, qualquer que seja a função f diferenciável em $\mathbb{R}$, a equação
$$x + f(x)f'(x) = 0$$
tem pelo menos uma raíz real. [**Sugestão**: Considere a função $(\varphi(x))^2$.]

(Grupo IVb do Exame Final de 10/5/79)

4.23 Sendo f uma função diferenciável num intervalo I que contenha os pontos -1 e 1, considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(\cos x) f(\operatorname{sen} x).$$

Calcule $\varphi'(x)$ e mostre que, em qualquer ponto (a, b) do gráfico de φ tal que $\operatorname{tg} a = 1$, a tangente a esse gráfico é horizontal. Admitindo que f era duas vezes diferenciável em I, o que poderíamos dizer sobre o número de raízes da equação $\varphi''(x) = 0$?

(Grupo IVa do Teste de 7/4/79)

Resolução:
$$\varphi'(x) = f'(\cos x)(-\operatorname{sen} x)f(\operatorname{sen} x) + f(\cos x)f'(\operatorname{sen} x)\cos x$$
A condição $\operatorname{tg} a = 1$ significa $\operatorname{sen} a = \cos a$ e portanto

$$\varphi'(a) = f'(\operatorname{sen} a)(-\operatorname{sen} a)f(\operatorname{sen} a) + f(\operatorname{sen} a)f'(\operatorname{sen} a)\operatorname{sen} a = 0,$$

ou seja, a tangente ao gráfico de φ no ponto de abcissa a é horizontal. A função φ' anula-se nos pontos a tais que $\operatorname{tg} a = 1$ ou seja, nos pontos da forma $\frac{\pi}{4} + k\pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ temos então que φ'' terá que se anular em $]\pi/4 + k\pi, 5\pi/4 + k\pi[$. Logo, a equação $\varphi''(x) = 0$ tem infinitas raízes.

4.24 Seja g uma função três vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, a, b e c três números reais tais que $a < b < c$. Prove que, se g tem extremos locais (máximos ou mínimos) em cada um dos pontos a, b e c, a equação $g'''(x) = 0$ tem pelo menos uma raíz real. Indique um intervalo que contenha essa raíz.

(Pergunta 1b da Prova de 19/7/71)

Resolução: Se x_0 é um extremo local de g é porque $g'(x_0) = 0$. Logo $g'(a) = g'(b) = g'(c) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existem $\alpha \in]a, b[$ e $\beta \in]b, c[$ tais que $g''(\alpha) = 0$ e $g''(\beta) = 0$; de novo pelo teorema de Rolle existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tal que $g'''(\gamma) = 0$. A maior precisão para γ é: $\gamma \in]a, c[$.

4.25 Sendo $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função indefinidamente diferenciável verificando a condição

$$\forall_{r,s \in \mathbb{N}_1} \quad \varphi(r) = \varphi(s),$$

prove que, para todo o natural n, a equação $\varphi^{(n)}(x) = 0$ tem infinitas raízes. Para cada $k \in \mathbb{N}_1$ indique um natural p tal que possa garantir-se a existência de uma raíz da equação $\varphi^{(k)}(x) = 0$ no intervalo $]1, p[$; justifique a resposta.

(Pergunta 4a do Teste de 22/4/78)

4.26 Mostre que, se a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2$ tem um zero positivo, isto é, se existe $b > 0$ tal que $f(b) = 0$, então a segunda derivada de f terá pelo menos um zero no intervalo $]0, b[$. Justifique cuidadosamente a resposta.

(Pergunta 1b do Exame Final (Ponto nº 1) de 5/7/71))

4.27 Seja g uma função contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e tal que

$$g(a) = g(b) = 0 \quad \text{e} \quad g(x) \neq 0, \qquad \forall_{x \in \,]a,b[}.$$

Seja ainda $h(x) = g'(x)/g(x)$, para todo o $x \in]a,b[$. Mostre que $h(]a,b[) = \mathbb{R}$.

[**Sugestão**: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, para provar que existe $c \in]a,b[$ tal que $h(c) = \alpha$, aplique (justificando que pode fazê-lo) o Teorema de Rolle à função $g(x)e^{-\alpha x}$, no intervalo $[a,b]$.]

(Pergunta 4a∗ do Exame Final de 6/5/78)

Resolução: Há que provar que $h :]a,b[\to \mathbb{R}$ é sobrejectiva, ou seja, que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in]a,b[$ tal que $h(c) = \alpha$, ou ainda, $g'(c)/g(c) = \alpha$. Ora $G(x) = g(x)e^{-\alpha x}$ é contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e anula-se em a e em b, logo existe $c \in]a,b[$ tal que $G'(c) = 0$. Como $G'(x) = (g'(x) - \alpha g(x))e^{-\alpha x}$ isso significa que $g'(c) - \alpha g(c) = 0$ ou $g'(c)/g(c) = \alpha$.

4.28 Seja f uma função diferenciável em $]0,1[$ e tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_1}$$

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes [1]:

a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem máximo no intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

b) A função f é limitada em $]0,1[$.

c) A função f' tem infinitos zeros em $]0,1[$.

(Pergunta 4 do Grupo I do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

4.29 Sendo f uma função indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$, suponha que existe uma sucessão x_n, estritamente decrescente e tal que:

$$\lim x_n = 0 \quad \text{e} \quad f(x_n) = 0, \qquad \forall_{n \in \mathbb{N}}.$$

1. Prove que, qualquer que seja o inteiro $k \geq 0$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. Dê um exemplo de uma função, distinta da função nula, que verifique todas as condições referidas no enunciado.

(Grupo IIIc do 1º Teste de 21/6/80)

4.30 Seja ϕ uma função diferenciável no intervalo $]0,1[$, verificando a condição

$$\phi\left(\frac{1}{n+1}\right) = \phi\left(\frac{1}{n+2}\right), \text{ para todo o inteiro } n > 0.$$

Supondo que existe o $\lim_{x\to 0} \phi'(x)$, indique, justificando, o valor deste limite.

(Pergunta 1 do Grupo IV do Exame de 2ª Época de 24/2/95)

4.31 Seja f uma função contínua num intervalo aberto que contenha os pontos 0 e 1 e tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$,

$$f(1/n) = 3 - \frac{1}{n^2}.$$

Justificando cuidadosamente todas as respostas:

[1] *Nota*: Sempre que afirme que uma proposição é falsa dê um exemplo que o comprove. Sempre que afirme que uma proposição é verdadeira justifique, *abreviadamente*, porque chegou a tal conclusão.

1. Calcule $f(0)$.
2. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $[2, 3]$.
3. Supondo agora, suplementarmente, que f é indefinidamente diferenciável nalguma vizinhança da origem, determine $f^{(k)}(0)$ para todo o $k \in \mathbb{N}$ e indique se o ponto 0 é ou não ponto de extremo de f.

[*Sugestão*: poderá ser-lhe útil considerar a função $\varphi(x) = f(x) + x^2 - 3$]

(Grupo IVb do Exame Final de 4/5/79)

4.32 Seja ϕ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que

$$\phi(n) = (-1)^n n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prove que não existe o limite $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$.

[**Sugestão**: Pode ser-lhe útil aplicar o teorema de Lagrange.]

(Pergunta 2 do Grupo IV do 2º Exame de 6/2/95)

4.33 Seja (x_n) uma sucessão estritamente crescente, de termos positivos, e

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}.$$

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas cada uma das proposições seguintes:

a) Se A é um conjunto majorado, toda a subsucessão de (x_n) é convergente (em $\mathbb{R}$).

b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$ é convergente.

c) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e suponha que A é um conjunto majorado. Então existe (em $\mathbb{R}$) $\lim f(x_n)$.

d) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f(x_n) = (-1)^n$. Então a equação $f(x) = 0$ tem infinitas soluções.

e) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f(x_n) = f(x_m)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}_1$. Então a equacão $f'(x) = 0$ tem infinitas soluções.

(Grupo I do Exame de 2ª Época de 28/2/96)

4.34 Prove que, se g é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e se a função g' é injectiva (isto é $\forall_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g'(x_1) \neq g'(x_2)$) então nenhuma tangente ao gráfico de g tem mais de um ponto comum com esse gráfico [**Sugestão**: use o teorema de Lagrange]. Mostre ainda que se alguma tangente ao gráfico de uma função ψ com 2ª derivada contínua em $\mathbb{R}$ intersecta o gráfico de ψ em dois pontos distintos, então a equação $\psi''(x) = 0$ tem pelo menos uma raíz real.

(Grupo IVb do Teste de 10/4/79)

4.35 Sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$, diz-se que $x_0 \in I$ é um ponto fixo de f sse $f(x_0) = x_0$. Supondo que f é indefinidamente diferenciável em I mostre que:

a) Se f tem dois pontos fixos distintos, existe $c_1 \in I$ tal que $f'(c_1) = 1$.

b) Se f tem n pontos fixos distintos $(n > 2)$, existe $c_2 \in I$ tal que $f^{(n-1)}(c_2) = 0$.

(Grupo III3 da Repetição do 1º Teste de 21/6/80)

4.36 Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, cujo contradomínio está contido em $[0, 1]$.

a) Mostre que existe um $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

b) Supondo agora adicionalmente que f é diferenciável em $]0,1[$ com $f'(x) \neq 1$ para qualquer $x \in]0,1[$, prove que a equação anterior tem uma só raíz naquele intervalo.

(Grupo IV do 2º Exame de 9/2/94)

4.37 Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Demonstre que a função $g(x) = f(x)/x$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

[**Sugestão**: Aplique o teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.]

(Grupo IV do 1º Exame de 26/1/94)

4.38 Use o *teorema de Lagrange* para mostrar que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(Pergunta 2 do Grupo III do 2º Exame de 9/2/94)

4.39 Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *lipschitziana* se e só se verifica a condição:

$$\exists_{c \in \mathbb{R}} \forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

Utilize o teorema de Lagrange para provar que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável e f' é limitada em $\mathbb{R}$, f é lipschitziana. Dê exemplos que mostrem que a diferenciabilidade de f em todos os pontos de $\mathbb{R}$ não é condição necessária, nem suficiente, para que f seja lipschitziana.

(Pergunta 4b do Teste de 22/4/78)

4.40 Supondo que f é uma função com derivada contínua em todos os pontos do intervalo $[a,b]$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$), prove que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

(Grupo IIIa do Exame Final de 18/9/80)

4.41 Seja f uma função contínua e positiva no intervalo $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Mostre que existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

(Pergunta 1b do Exame Final (Ponto nº 2) de 6/7/71)

Resolução: Como f é positiva, $h(x) = \log(f(x))$ está definida em $[a,b]$; como f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, o mesmo se passa com $\log(f(x))$, pois $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$. Pelo teorema de Lagrange:

$$h(b) - h(a) = h'(c)(b - a), \quad \text{para algum } c \in]a,b[.$$

Ora como $h'(x) = f'(x)/f(x)$ isto significa

$$\log(f(b)) - \log(f(a)) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b - a)$$

ou ainda

$$\log \frac{f(b)}{f(a)} = \log\left(e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}\right).$$

Como $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é injectiva conclui-se que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

4.42 Seja f uma função diferenciável no intervalo $[1,+\infty[$. Prove que, se $f'(x)$ é limitada no mesmo intervalo, $f(x)/x$ também o é. [**Sugestão**: aplique o teorema de Lagrange, no intervalo $[1,x]$].

(Pergunta 4b do Exame Integrado (Ponto nº5) de 25/10/71)

4.43 Sejam f e g duas funções diferenciáveis no intervalo $]a,+\infty[$, contínuas no ponto a e verificando as condições:

i) $f(a) < g(a)$.

ii) g é majorada em $]a,+\infty[$.

iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Prove que são verdadeiras as proposições:

1. Existe um α tal que $f(\alpha) = g(\alpha)$;
2. Qualquer que seja β existe um $\gamma > \beta$ tal que $f'(\gamma) > g'(\gamma)$.

Mostre ainda, por meio de um exemplo adequado, que não pode garantir-se a existência de um δ tal que $f'(x) > g'(x)$ para todo o $x > \delta$.

(Grupo IVb do Exame Final de 21/9/79)

4.44 Seja f uma função definida no intervalo $]a,+\infty[$, diferenciável em todos os pontos desse intervalo e tal que

$$f(x)f'(x) < 0 \quad \forall_{x>a}.$$

Prove que existem $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ sendo o segundo limite necessariamente finito. Sê-lo-á também o primeiro?

(Pergunta 4b do Exame Final (Ponto nº1) de 1/10/71)

Resolução: A condição $f(x)f'(x) < 0$ significa que $f(x)$ e $f'(x)$ têm sinais contrários. Suponhamos por exemplo que $f(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ para todo o $x > a$. A função f seria decrescente e minorada em $]a,+\infty[$; o $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ seria então

$$\alpha = \inf_{x>a} f(x) = \inf f(]a,+\infty[)$$

e α seria um real pois o conjunto $f(]a,+\infty[) \subset]0,+\infty[$ sendo minorado tem o seu ínfimo em $\mathbb{R}$. Mostremos então que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ ou seja, que dado $\varepsilon > 0$ existe x_0 tal que se $x > x_0$ se tem $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$. Como $f(x) > \alpha = \inf_{x>a} f(x)$ pode suprimir-se o valor absoluto. Por definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ existe $x_0 > a$ tal que $\alpha \le f(x_0) < \alpha+\varepsilon$ e em particular $f(x_0) < \alpha+\varepsilon$; como f é decrescente, se $x > x_0$ vem $f(x) \le f(x_0) < \alpha+\varepsilon$ e portanto, para $x > x_0$ ter-se-á: $f(x)-\alpha < \varepsilon$. Ainda na hipótese de ser $f(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ para $x > a$, vamos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe[2]em $\overline{\mathbb{R}}$. Seja $\beta = \sup_{x>a} f(x)$, podendo ser $\beta = +\infty$ se f não for majorada. Se $\beta \in \mathbb{R}$ mostra-se que $\lim_{x\to a} f(x) = \beta$ como anteriormente, utilizando a noção de supremo: dado $\varepsilon > 0$ existe x_0 tal que $\beta-\varepsilon < f(x_0) \le \beta$. Logo $\beta-\varepsilon < f(x_0)$ e para x tal que $a < x < x_0$ virá $\beta-\varepsilon < f(x)$ pois f é decrescente; quer dizer que dado $\varepsilon > 0$ se terá $\beta - f(x) < \varepsilon$ desde que $x-a < x_0$ o que significa que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \beta$. Como f só está definida para $x > a$,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Se $\beta = \sup_{x>a} f(x) = +\infty$ também $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ pois dado M existe $x_0 > a$ tal que $f(x_0) > M$ já que f não é majorada e portanto para x tal que $a < x < x_0$ virá $f(x) > M$ pois f é decrescente.
O caso $f(x) < 0$ e $f'(x) > 0$ tratava-se de maneira análoga.

4.45 Sejam φ e ψ duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, verificando as condições:

$$x(\varphi'(x) - \psi'(x)) > 0 \quad \forall_{x \neq 0} \quad \text{e} \quad \varphi(0) > \psi(0).$$

Prove que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > \psi(x)$. Mostre ainda, por meio de um exemplo que retirando apenas a hipótese $\varphi(0) > \psi(0)$, poderia ter-se $\varphi(x) < \psi(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(Pergunta 4b do Ponto nº3 de 1/10/71)

4.46 Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad x < y \Longrightarrow f'(x) > f'(y). \tag{4.1}$$

a) Dê um exemplo de uma função $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo a (4.1) e tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

b) Prove que não existe nenhuma função $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo a (4.1) e tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

c) Prove que não existe nenhuma função $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo a (4.1) e tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

onde a e b designam dois números reais.

(Grupo IV do Exame de 1ª Época de 8/1/97)

4.47 Sendo f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, verificando as condições:

$$f(0) = g(0) \quad \text{e} \quad f'(x) > g'(x) \quad \forall_{x \in \mathbb{R}},$$

prove que $x(f(x) - g(x)) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(Grupo IIc do 1º Teste de 21/6/80)

4.48 Seja f uma função definida numa vizinhança de 0, $V_\varepsilon(0)$, diferenciável em todos os pontos dessa vizinhança excepto possivelmente no ponto 0 e tal que $xf'(x) > 0$, $\forall x \in V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.

1. Prove que, se f é contínua no ponto 0, $f(0)$ é um extremo de f e indique, justificando, se é um máximo ou um mínimo; no caso de f ser diferenciável no ponto 0, qual será o valor de $f'(0)$? Porquê?

2. Mostre por meio de um exemplo que, sem a hipótese de continuidade de f no ponto 0, não pode garantir-se que $f(0)$ seja um extremo de f.

(Grupo IVb do Teste de 24/4/79)

4.49 Seja φ a função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + |x|}.$$

a) Indique o domínio de diferenciabilidade de φ e faça um esboço do seu gráfico.

[2] É claro que este limite pode ser finito (ex: e^{-x}) ou infinito (ex: $1/(x-a)$).

b) Para todo o $a > 0$ seja U_a o quadrilátero de vértices $(a, 0)$, $(a, \varphi(a))$, $(-a, 0)$, $(-a, \varphi(-a))$: mostre que se trata de um rectângulo. De todos os rectângulos U_a (com $a > 0$) determine aquele que tem área máxima ou, caso não exista tal rectângulo, o supremo das áreas dos rectângulos U_a.

(Grupo IVa e b do Exame de 23/3/77)

Resolução:

a) φ é claramente diferenciável para $x > 0$ sendo então:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Para $x < 0$ tem-se:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Para $x = 0$ tem-se

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+|x|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{|x|}{x(1+|x|)} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{|x|}{x(1+|x|)} = 1.$$

Logo $\varphi'(0)$ não existe. O domínio de diferenciabilidade é pois $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para esboçar o gráfico[3] usamos os seguintes factos: φ é uma função par, contínua em $\mathbb{R}$, decrescente e com derivada crescente em $[0, +\infty[$; $\varphi(0) = 1$, $\varphi'_d(0) = -1$, $\varphi'_e(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$.

b) Basta observar que sendo P_1, P_2, P_3, P_4 os pontos $(a, 0)$, $(a, \varphi(a))$, $(-a, 0)$ e $(-a, \varphi(-a))$ se tem: o segmento P_1P_2 é paralelo a P_3P_4 (pois são paralelos ao eixo dos yy já que P_1, P_2 têm a mesma abcissa a e P_3, P_4 têm a mesma abcissa $-a$), o segmento P_1P_3 é paralelo a P_2P_4 (pois são paralelos ao eixo dos xx já que P_1, P_3 têm a mesma ordenada 0 e P_2, P_4 a ordenada $\varphi(a) = \varphi(-a)$) e por serem os eixos dos xx e dos yy escolhidos perpendiculares (por hipótese). A área do rectângulo U_a é

$$A(a) = 2a\varphi(a) = 2a\frac{1}{1+a}.$$

Se existisse um a_0 tal que $A(a_0)$ fosse máxima deveria ter-se $A'(a_0) = 0$, pois A é diferenciável em $\mathbb{R}^+$. Ora

$$A'(a) = \left(\frac{2a}{1+a}\right)' = \frac{2(1+a) - 2a}{(1+a)^2} = \frac{2}{(1+a)^2}$$

e portanto nunca se anula. Não há pois nenhum U_a com área máxima. Por outro lado vê-se que, por ser $A' > 0$, A é crescente e

$$\lim_{a\to+\infty} A(a) = \lim_{a\to+\infty} \frac{2a}{1+a} = 2.$$

Logo o supremo das áreas dos rectângulos U_a é 2.

[3] O gráfico que se apresenta foi, em parte, gerado numericamente. As escalas dos dois eixos são distintas.

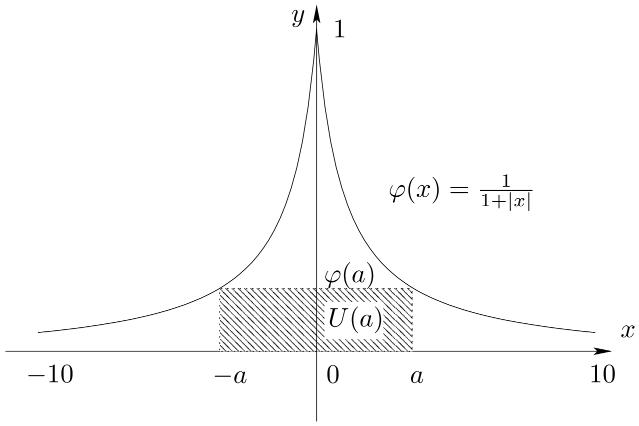

Figura 4.2: O gráfico de φ no exercício 4.49.

4.50 Obtenha uma equação da recta que passa pelo ponto $(3, 1)$ e determine, com os eixos coordenados, um triângulo contido no 1^o quadrante e de área mínima.

(Pergunta 3b do Exame Final de 6/5/78)

4.51 Seja P o ponto de coordenadas $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$ num certo referencial cartesiano ortogonal. Para cada recta r que contém P e não é paralela a *nenhum* dos eixos coordenados designem A_r e B_r os pontos de intersecção de r com $\overline{OX}$ e com $\overline{OY}$ respectivamente. Seja d_r a distância de A_r a B_r. Quais os extremos locais de d_r?

[**Sugestão**: Se tiver dificuldade em resolver uma equação cujas raízes são os pontos de estacionaridade, utilize o facto de um deles se obter imediatamente a partir do enunciado.]

(Pergunta 4 da Prova de 22/3/74)

4.52 De entre todos os rectângulos de área S, determine as dimensões daquele que admite o menor círculo circunscrito.

(Grupo III2 da Prova de 19/9/77)

4.53 Mostre que o menor valor que pode ter o raio de uma esfera circunscrita a um cilindro com uma dada área lateral, S, é o produto de $\sqrt{2}$ pelo raio da base do cilindro.

(Grupo IV do Exame de 2^a época de 25/7/77)

Resolução: A área lateral de um cilindro de altura a e raio da base r é dada por $2\pi ra$. Por hipótese $2\pi ra = S$. Sendo R o raio da esfera tem-se, em razão da esfera circunscrever o cilindro: $(\frac{a}{2})^2 + r^2 = R^2$. Quer dizer:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{2\pi r}\frac{1}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{r^2} + r^2}.$$

Vamos pôr $K = (\frac{S}{4\pi})^2$. R é pois função de r e só poderá ser mínima no ponto r_0 se $R'(r_0) = 0$. Ora:

$$R'(r) = \left(\left(K\frac{1}{r^2} + r^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(K\frac{1}{r^2} + r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-K\frac{2}{r^3} + 2r\right)$$

e $R'(r) = 0$ só é possível se $-K\frac{2}{r^3} + 2r = 0$ ou seja se $r^4 = K$ ou $r^2 = \frac{S}{4\pi}$ ou $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Para este valor r_0 de r, $R(r)$, teremos:

$$\frac{R(r_0)}{r_0} = \frac{\sqrt{(\frac{S}{4\pi})^2 4\frac{\pi}{S} + \frac{1}{4}\frac{S}{\pi}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{S}{\pi} + \frac{1}{4}\frac{S}{\pi}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}.$$

Quer dizer que, para a esfera de raio mínimo (que é $R(r_0)$), se terá $R(r_0) = \sqrt{2}r_0$.

4.54 Sendo $g(x) = xe^x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, determine o conjunto dos valores reais de x que verificam a condição

$$g^{(n)}(x) > 0.$$

Indique um intervalo no qual todas as derivadas $g^{(n)}$ sejam crescentes. Existirá algum intervalo no qual todas essas derivadas sejam decrescentes? Justifique a resposta.

(Pergunta 3b do Teste de 22/4/78)

4.3 Regras de Cauchy. Indeterminações.

Em geral, nas soluções dos exercícios desta secção apresentam-se duas maneiras de resolver os problemas relativos ao cálculo de limites: usando as regras de Cauchy e usando alguns desenvolvimentos de Taylor notáveis.

4.55 Seja f uma função contínua no intervalo $I =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ e diferenciável em todos os pontos de $I \setminus \{a\}$.

Prove que, se existe e é finito $\lim_{x \to a} f'(x)$, f é diferenciável no ponto a e f' é contínua no mesmo ponto. Mostre ainda, por meio de um exemplo, que uma função pode ser diferenciável em todos os pontos de $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ sem que a sua derivada seja contínua no ponto a.

(Pergunta 4a do Exame Final de 6/5/78)

4.56 Calcule os limites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x - \operatorname{tg} x}, \qquad \lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(Grupo Ia do Exame Final de 10/5/79)

Resolução:

a) Como $\lim_{x \to 0}(\operatorname{sen} x - x) = 0$ e $\lim_{x \to 0}(x - \operatorname{tg} x) = 0$ vamos aplicar a *regra de Cauchy* e tentar calcular $\lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - x)'}{(x - \operatorname{tg} x)'}$. Temos para as derivadas

$$(\operatorname{sen} x - x)' = \cos x - 1, \qquad (x - \operatorname{tg} x)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Mas, de novo,

$$\lim_{x \to 0} (\cos x - 1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 0.$$

No entanto, simplificando[4] o limite a que fomos conduzidos, obtemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)}{(1 - \frac{1}{\cos^2 x})} = \lim_{x \to 0} \cos^2 x \frac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1} = 1 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}.$$

b) Para calcular $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ encontramos uma *indeterminação do tipo* $1^{+\infty}$. Vamos calcular $\lim_{x\to 0}\log(\cos x)^{1/x^2}$.

$$\log\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{x^2}\log(\cos x).$$

A indeterminação é agora do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos tentar calcular $\lim_{x\to 0}(\log(\cos x))'/(x^2)'$.

$$\frac{(\log\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

Logo $\lim_{x\to 0}\left(\log(\cos x)^{1/x^2}\right) = -\frac{1}{2}$ e portanto $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$.

Resolução alternativa:

a) Como[5] $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (x\to 0)$, e $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (x \to 0)$ vem

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x - \operatorname{tg} x} \sim \frac{-\frac{x^3}{3!}}{-\frac{x^3}{3}} = \frac{1}{2} \qquad (x\to 0).$$

Logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}.$$

b) Como

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \qquad (x\to 0)$$

tem-se

$$\log\cos x = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Logo

$$(\log\cos x)\frac{1}{x^2} \sim -\frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

e portanto

$$\lim_{x\to 0}\log\left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

e daí $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$.

4.57 Calcule, justificando, o valor de

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$$

(Pergunta 2 do Grupo III do 1º Exame de 26/1/94)

[4] Era também possível aplicar de novo a regra de Cauchy. Em geral, entre aplicações sucessivas da regra de Cauchy, convém tentar simplificar as expressões, isolar factores com limite finito e não nulo,...

[5] Na sequência, deverá entender-se que uma expressão da forma $f(x) \sim g(x) \quad (x\to a)$, tem o sentido de $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$ e que uma expressão do tipo $\varphi(x) = \psi(x) + o(x^\alpha) \quad (x \to a)$ equivale a $\lim_{x\to a}(\varphi(x) - \psi(x))/x^\alpha = 0$.

4.58 Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{\log(1+x^2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$$

(onde a e b são reais positivos).

(Grupo 3a do Exame Final de 6/5/78)

Resolução:

a) É uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Ponha-se $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x - e^x$ e $g(x) = \log(1+x^2)$.

$$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x - e^x \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = (\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)\frac{1+x^2}{2x} = \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)(1+x^2)}{2x}$$

Para calcular $\lim_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ caímos em nova indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos pôr $h(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)(1+x^2)$ e $k(x) = 2x$. Temos:

$$\frac{h'(x)}{k'(x)} = \frac{(-\operatorname{sen} x - \cos x - e^x)(1+x^2) + (\cos x - \operatorname{sen} x - e^x)2x}{2} \to \frac{-2+0}{2} = -1.$$

b) É uma indeterminação do tipo $1^{+\infty}$. Vamos calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\log\left(a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}\right) - \log 2\right)$$

recaindo numa indeterminação do tipo $+\infty \cdot 0$. Vamos fazer $f(x) = \log(a^{1/x} + b^{1/x}) - \log 2$ e $g(x) = 1/x$. Logo

$$f'(x) = \frac{a^{\frac{1}{x}} \log a(-\frac{1}{x^2}) + b^{\frac{1}{x}} \log b(-\frac{1}{x^2})}{a^{1/x} + b^{1/x}}$$

e $g'(x) = -1/x^2$, pelo que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a^{\frac{1}{x}} \log a + b^{\frac{1}{x}} \log b}{a^{1/x} + b^{1/x}} \to \frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2}\log(ab) \quad \text{quando } x \to +\infty.$$

Logo

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2}\right)^x = \frac{1}{2}\log(ab)$$

e portanto

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2}\right)^x = (ab)^{\frac{1}{2}}.$$

Resolução alternativa:

a)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x + \cos x - e^x &= (x + o(x^2)) + (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= -x^2 + o(x^2) \qquad (x \to 0).\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\operatorname{sen} x + \cos x - e^x}{\log(1+x^2)} \sim \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

e o limite é -1.

b) Como atrás, o que importa é conhecer

$$\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right).$$

Ora

$$\begin{aligned}
a^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{1}{x}\log a} = 1 + \frac{1}{x}\log a + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+\infty)\\
b^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{1}{x}\log b} = 1 + \frac{1}{x}\log b + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+\infty)\\
a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} &= 2 + \frac{1}{x}\log(ab) + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+\infty)\\
x\log\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right) &= x\log\left(1 + \frac{1}{x}\frac{\log(ab)}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =\\
&= x\left(\frac{1}{x}\frac{\log(ab)}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\log(ab)}{2} + o(1) \sim \frac{\log(ab)}{2}.
\end{aligned}$$

Como atrás, daqui resulta que o limite pedido é $(ab)^{1/2}$.

4.59 Determine os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{10^x - 5^x}{x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

(Grupo II1 da Prova de 2/12/76)

4.60 Calcule

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

sendo $a, b > 0$.

(Grupo I2c do Exame Final de 23/3/77)

4.61 Calcule

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a>0) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0^+} x^{\operatorname{sen} x}.$$

(Pergunta 3a do Teste de 22/4/78)

4.62 Calcule os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to1^+} x^{\log\log x}.$$

(Grupo IIIa do Exame de 26/7/78)

4.63 Calcule

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to1^+} x^{\log(x-1)}, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos x)^2}{\operatorname{tg} x - x}.$$

(Grupo II1 do Exame O.S. de 11/2/80)

4.64 Calcule

$$\lim_{x\to0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}.$$

(Grupo I3 da Repetição do 1º Teste de 18/9/80)

4.65 Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} x \log \frac{x+1}{x-1}.$$

(Grupo I2b da Prova de 25/7/77)

4.66 Calcule

$$\lim_{x\to0^+} \left(\log \frac{1}{x}\right)^x.$$

(Grupo I2b da Prova de 19/9/77)

4.67 Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

(Grupo Ia do Exame Final de 18/9/80)

4.68 Calcule os limites

$$\lim_{x\to0} \frac{b^{\operatorname{arctg} x} - c^{\operatorname{arctg} x}}{x} \quad (b, c > 0), \qquad \lim_{x\to0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(Grupo I do Teste de 24/4/79)

4.69 Calcule os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^{3x})}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}.$$

(Grupo IIa do 1º Teste de 21/6/80)

4.70 Calcule os limites

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

(Grupo I do Teste de 10/4/79)

Resolução:

a) É uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pondo $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)$ e $g(x)=\operatorname{sen}^2 x$ vem $f'(x) = -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cos x)\frac{\pi}{2}(-\operatorname{sen} x)$ e $g'(x)=2\operatorname{sen} x\cos x$. Logo

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cos x)\frac{\pi}{2}}{2\cos x} \to \frac{(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2})\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{quando } x\to 0$$

e portanto o limite pedido é $\pi/4$.

b) É uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$. Temos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{sen} x}$$

transformando-a numa indeterminação do tipo $0/0$. Com $f(x)=x-\operatorname{sen} x$ e $g(x)=x^2\operatorname{sen} x$ vem $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-\cos x}{2x\operatorname{sen} x+x^2\cos x}$ e

$$\begin{aligned}\frac{f''(x)}{g''(x)} &= \frac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\operatorname{sen} x}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x+4x\cos x-x^2\operatorname{sen} x}.\end{aligned}$$

Para calcular o limite deste quociente recaímos numa indeterminação

$$\begin{aligned}\frac{f'''(x)}{g'''(x)} &= \frac{\cos x}{2\cos x+4\cos x-4x\operatorname{sen} x-2x\operatorname{sen} x-x^2\cos x}\\ &= \frac{\cos x}{6\cos x-6x\operatorname{sen} x-x^2\cos x} \to \frac{1}{6} \qquad \text{quando } x\to 0.\end{aligned}$$

Logo o limite pedido é $1/6$.

Resolução alternativa:

a)

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot x^2+o(x^2)\right)\\ &= -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\cdot x^2+o(x^2)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2+o(x^2)\right) \sim \frac{\pi}{4}x^2.\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} \sim \frac{\frac{\pi}{4}\cdot x^2}{x^2} = \frac{\pi}{4}$$

e daí que o limite seja $\pi/4$.

b) Como

$$\frac{1}{x\operatorname{sen} x} = \frac{1}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)} = \frac{1}{x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)} = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) \qquad (x\to 0)$$

$$\frac{1}{x\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{6}+o(1)\to\frac{1}{6} \qquad (x\to 0).$$

Logo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{6}.$$

4.71 Calcule

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \operatorname{tg}(ax)}{\log \operatorname{tg}(bx)} \quad (a, b > 0).$$

(Grupo I do Teste de 7/4/79)

4.72 Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{arcsen} x - x}.$$

(Grupo Ia da Prova de 7/74)

4.73 Calcule

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{\coth x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^2 e^{\log^2 x}}.$$

[**Sugestão**: para o segundo caso $x^2 = e^{2\log x}$.]

(Pergunta 1a do Exame Final (Ponto nº 1) de 5/7/71)

4.74 Calcule

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\log x \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right].$$

(Pergunta 1a da Prova de 20/7/71)

4.75 Calcule

$$\lim_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$$

onde a é um número real diferente de zero.

(Pergunta 2b do Ponto nº 6 de 25/10/71)

Resolução: É uma indeterminação do tipo 1^∞. Vamos calcular

$$\lim_{x\to a} \log\left(\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}\right) = \lim_{x\to a} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} \log\left(2 - \frac{x}{a}\right)$$

recaindo numa indeterminação do tipo $\infty 0$. Vamos fazer

$$f(x) = \log\left(2 - \frac{x}{a}\right) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$$

de forma que o limite pedido é $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$. Ora

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{a}}{2 - \frac{x}{a}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = -\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2a}}\frac{\pi}{2a}}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right)^2}.$$

Logo

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{-\frac{1}{a}}{2-\frac{x}{a}}}{-\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2a}}\frac{\pi}{2a}}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right)^2}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{-\frac{1}{a}}{2-\frac{x}{a}}}{-\frac{\pi}{2a}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2a}}} = \frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{\pi}{2a}} = \frac{2}{\pi}.$$

Conclui-se que

$$\lim_{x\to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

Resolução alternativa: Vamos calcular

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\log\left(\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}\right) &= \lim_{x\to a}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\log\left(2-\frac{x}{a}\right) = \lim_{y\to 0}\operatorname{tg}\frac{\pi(a+y)}{2a}\log\left(2-\frac{a+y}{a}\right)\\ &= \lim_{y\to 0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}y\right)\log\left(1-\frac{1}{a}y\right) = \lim_{y\to 0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}y\right)\left(-\frac{1}{a}y\right).\end{aligned}$$

Fizemos a mudança de variável $x = a + y$ para reduzir o problema a uma vizinhança de 0, onde, em geral, é mais cómodo trabalhar. Há que determinar uma função equivalente a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}y\right)$ quando $y \to 0$. Ora

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}y\right) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}y\right)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2a}y\right)+\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2a}y\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2a}y\right)-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2a}y\right)}\\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2a}y\right)}{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2a}y\right)} \sim \frac{1}{-\frac{\pi}{2a}y} \qquad \text{quando} \qquad y \to 0.\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{y\to 0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2a}y\right)\left(-\frac{1}{a}y\right) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{-\frac{\pi}{2a}y}\left(-\frac{1}{a}y\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Conclui-se que o limite pedido é $e^{2/\pi}$.

4.76 Calcule

$$\lim_{x\to 1}\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{1-x}}\right].$$

(Grupo Ia da Prova de 28/2/74)

4.77 Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

(Pergunta 1 da Prova de 12/3/74)

4.78 Calcule

$$\lim n^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}.$$

[**Sugestão**: determine em primeiro lugar, $\lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}$.]

(Pergunta 3a do Exame Integrado (Ponto nº2) de 1/10/71)

4.79 Calcule

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}.$$

[**Sugestão**: determine em primeiro lugar, $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$.]

(Pergunta 3a do Exame Integrado (Ponto nº1) de 1/10/71)

4.80 Sendo f uma função contínua no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$ e tal que, para todo o $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$, calcule $f(0)$.

(Pergunta 1a da Prova de 19/7/71)

4.81 Calcule, em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^{1/x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} (\log x)^{1/x}.$$

(Pergunta 1 do Grupo III do Exame de 2ª Época de 7/2/97)

4.82 Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ pela forma seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x^2, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}.$$

a) Estude f e g do ponto de vista da continuidade.

b) Justifique que, qualquer que seja $a > 0$, ambas as funções f e g têm máximo e mínimo no intervalo $[-a, a]$.

(Grupo III do Exame de 10/5/79)

4.83 Considere a função seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen} x + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 \log x + b & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

a) Determine a e b tais que $f(x)$ seja diferenciável no ponto $x = 0$.

b) Para $b = 1$ diga quais os valores de a para os quais $f(x)$ não tem extremo no ponto 0. Justifique a resposta. [**Sugestão**: estude o crescimento da restrição de f a $]0, +\infty[$.]

(Grupo II2 do Exame O.S. de 11/2/80)

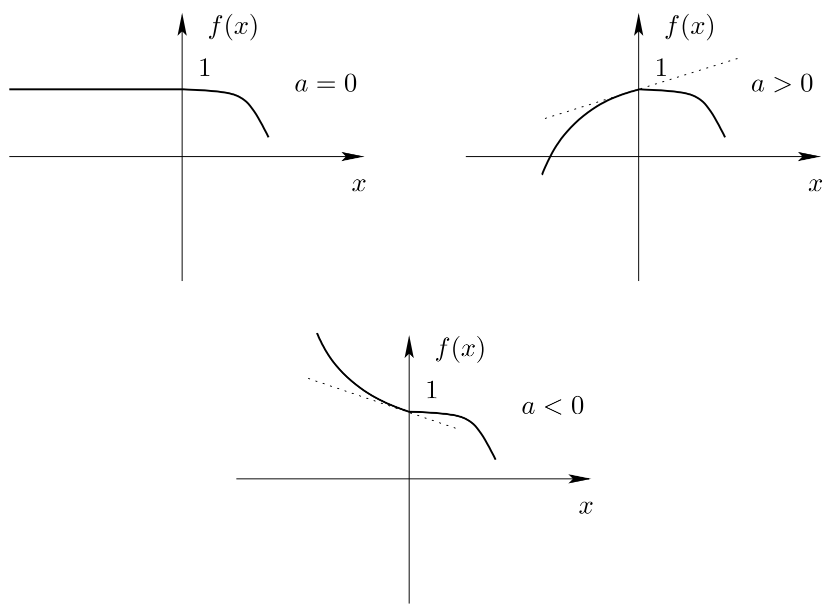

Figura 4.3: Os casos $a = 0$, $a > 0$ e $a < 0$.

Resolução:

a) Se f for diferenciável em 0, as derivadas laterais em 0 existem e têm de ser iguais:

$$f'_d(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2\log h + b - 1}{h}.$$

Para que exista este limite terá de ser $b = 1$ e então $f'_d(0) = 0$

$$f'_e(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a\operatorname{sen} h + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} a\frac{\operatorname{sen} h}{h} = a.$$

Terá pois de ter-se $a = 0$ e $b = 1$.

b) Supondo $b = 1$ e $a = 0$ vimos que $f'(0) = 0$ e portanto pode haver um extremo em 0. Vamos estudar o crescimento de f na vizinhança de 0. Fá-lo-emos através do estudo do sinal de f'. Se $x > 0$ tem-se:

$$f'(x) = (x^2\log x)' = 2x\log x + x = x(2\log x + 1).$$

Se $x < 0$ tem-se $f'(x) = 0$. Quer dizer que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $f'(\varepsilon) = \varepsilon(2\log\varepsilon + 1) < 0$ e f é decrescente do lado direito de 0 e constante do lado esquerdo. Se $b = 1$ e $a = 0$ o gráfico de $f(x)$ é do tipo representado na figura 4.3.

Se $b = 1$ e $a \neq 0$ teremos consoante $a > 0$ ou $a < 0$: $f'_e(0) > 0$ ou $f'_e(0) < 0$. Tem-se sempre por outro lado $f'_d(0) = 0$ e para ε suficientemente pequeno, $f'(\varepsilon) = \varepsilon(2\log\varepsilon + 1) < 0$.

Logo, se $a > 0$ haverá um máximo em 0 e se $a < 0$ não haverá extremo em 0. Se $a = 0$ há um máximo em 0, como se viu.

4.4 Teorema de Taylor. Extremos, concavidades e inflexões. Assímptotas. Estudo de funções.

4.84 Prove, usando a *fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange*, que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{6}$$

para qualquer $x \in [0,1]$.

(Pergunta 3 do Grupo III do 2º Exame de 9/2/94)

4.85 Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ não vazio nem reduzido a um ponto e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com segunda derivada finita e maior do que zero em todos os pontos de I.

a) Sendo $a \in I$ e $y = g(x)$ a equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, determine $g(x)$.

b) Mostre que $\forall_{x\in I\setminus\{a\}}, f(x) > g(x)$.

(Grupo IV do Exame O.S. de 11/2/80)

Resolução:

a) A equação da tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ pelo que $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

b) Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange, dado $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2$$

com ξ entre x e a, ou seja,

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2.$$

Se $f''(\xi) > 0$ vem $f(x) > g(x) \quad (x \in I \setminus \{a\})$.

4.86 Prove que, se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}},$$

então $f(x)$ é um polinómio em x de grau menor do que n.

[**Sugestão**: recorra à fórmula de Mac-Laurin.]

(Grupo IIIb do 1º Teste de 21/6/80)

4.87 Suponhamos que f e g são aplicações do intervalo $I =]a, b[$ em $\mathbb{R}$ que admitem derivadas contínuas de todas as ordens nesse intervalo. Diz-se que f e g têm um contacto de ordem $n \in \mathbb{N}_1$ no ponto $c \in I$ se $f(c) = g(c)$, $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ e $f^{(n+1)}(c) \neq g^{(n+1)}(c)$.

a) De que ordem é o contacto das funções definidas por

$$f(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

no ponto 0?

b) Mostre que se f e g têm um contacto de ordem par no ponto c então os gráficos destas funções "cruzam-se" no ponto de abcissa c e que se o contacto é de ordem ímpar não há "cruzamento".

(Pergunta 5 da Prova de 22/3/74)

4.88 Sendo φ e ψ duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e $f = \varphi \circ \psi$, calcule $f'(x)$ e $f''(x)$ (expressos em valores de derivadas de φ e ψ em pontos convenientes). Supondo agora $\varphi(x) = \log\sqrt{1+x^2}$ e $\psi(x) = x(1+\cos(2x))$, aproveite o resultado precedente para indicar, justificando, se a função $f = \varphi \circ \psi$ tem um máximo ou um mínimo (local) na origem.

(Grupo IIb do 1º Teste de 21/6/80)

4.89 Seja $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função com segunda derivada contínua em $\mathbb{R}^+$ e suponha que $f'(1) = 0$, $f''(1) = -2$. Nestas condições, sendo $\varphi(x) = f(e^x)$, calcule $\varphi'(0)$ e $\varphi''(0)$. Poderá garantir-se que φ tem um extremo local no ponto 0? Máximo ou mínimo? Justifique.

Escreva a fórmula de Mac-Laurin para a função φ (com resto de 1ª ordem) e aproveite-a para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}.$$

(Grupo IV do 2º Teste de 10/4/79)

Resolução: $\varphi'(x) = f'(e^x)e^x$ e $\varphi''(x) = f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x$. Logo

$$\varphi'(0) = f'(1) = 0 \qquad \text{e} \qquad \varphi''(0) = f''(1) + f'(1) = -2 + 0 = -2.$$

Para que 0 seja um ponto de extremo local de φ (duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$) basta que $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) \neq 0$. É o caso. Como $\varphi''(0) < 0$ pode concluir-se que 0 é um ponto de máximo.
Tem-se a seguinte fórmula de Mac-Laurin (com resto de 1ª ordem):

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)x^2 \qquad (\xi \text{ entre } 0 \text{ e } x),$$

ou seja:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{2}\left(f''(e^\xi)e^{2\xi} + f'(e^\xi)e^\xi\right)x^2.$$

Logo:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(f''(e^\xi)e^{2\xi} + f'(e^\xi)\right)e^\xi.$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}\left(f''(e^\xi)e^{2\xi} + f'(e^\xi)\right)e^\xi = \frac{1}{2}(f''(1) + f'(1)) = -1.$$

Como ξ está entre 0 e x usámos o facto de que se $x \to 0$ também $\xi \to 0$.

4.90 Prove que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então g não pode ter mais de dois pontos de extremo local. Admitindo agora que g tem de facto extremos locais nos pontos α e β, com $\alpha < \beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.

Escreva a fórmula de Taylor para g em relação ao ponto β e com resto (de Lagrange) de 2ª ordem e aproveite-a para mostrar que $g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$.

(Grupo IVb do 2º Teste de 7/4/79)

4.91 Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ e considere a função g, definida por $g(x) = xf(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se g'' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $g''(0) = 0$, prove que $f(0)$ é mínimo absoluto de f.

[**Sugestão**: Pode ser-lhe útil considerar a fórmula de Mac-Laurin.]

(Pergunta 2 do Grupo IV do Exame de 2ª Época de 24/2/95)

4.92 Seja $\psi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $]-1, 1[$. Suponha ainda que:

i) Existe uma sucessão (x_n), de termos em $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, tal que $\psi'(x_n) = \frac{1}{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

ii) $\psi''(x) > 0, \quad \forall_{x\in\,]-1,1[}$.

Prove que ψ tem, pelo menos, um mínimo local.

(Pergunta 2 do Grupo IV do Exame de 2ª Época de 28/2/96)

4.93 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$f(x) = ae^x + be^{-x}$$

onde a e b são constantes reais não conjuntamente nulas.

a) Mostre que, para que f tenha um extremo local, é necessário e suficiente que se verifique a condição $ab > 0$.

b) Supondo esta condição verificada, determine o extremo de f e indique, justificando, em que condições esse extremo é um máximo e em que condições é um mínimo.

c) Em cada um desses dois casos indique, justificando, o contradomínio da função e estude o sentido da concavidade do seu gráfico.

(Pergunta 2 da Prova de 2ª época de 18/12/72)

4.94 Determine o conjunto dos pontos $x \in]0, 2\pi[$ onde a concavidade do gráfico de f definida por

$$f(x) = x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} - \cos x$$

está "voltada para cima".

(Pergunta 3 da Prova de 22/3/74)

4.95 Sendo g a função definida no intervalo $]1, +\infty[$ pela igualdade

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

determine as assímptotas do gráfico de g.

(Pergunta 1b da Prova de 11/10/72)

Resolução: A função g tem uma assímptota vertical para $x = 1$ pois $\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$. Não há assímptotas horizontais pois $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (não há lugar a considerar $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ pois g só está definida em $]1, +\infty[$). Para determinar assímptotas oblíquas, se as houver, vamos calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x}} = 1.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo, $y = x + \frac{1}{2}$ é uma assímptota oblíqua à direita.

4.96 Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$, contínua no ponto no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{-1/x}} \qquad \forall_{x\neq 0}.$$

Verifique se o gráfico de f tem assímptotas verticais ou não verticais e, se existirem, determine-as.

(Grupo IIb do Teste de 7/4/79))

4.97 Considere a função F, definida pela fórmula $F(x) = \sqrt{x(x-2)}$.

a) Calcule $F'_d(2)$.

b) O gráfico de F admite duas assímptotas, ambas não verticais. Determine uma delas.

c) Justifique que o gráfico de F é simétrico em relação à recta de equação $x = 1$; aproveite esta simetria (mesmo que a não tenha justificado) para indicar o valor $F'_e(0)$ e para escrever uma equação da assímptota ao gráfico de F que não determinou na alínea (b).

(Grupo II do Teste de 24/4/79)

4.98 É dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Estude-a quanto à existência de assímptotas.

b) Mostre que existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $g(x) = ax^2 + b$ com a e b constantes, verificando a condição $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$.

(Grupo II da Prova de 28/2/74)

Resolução:

a) Não há assímptotas verticais, pois f é contínua em $\mathbb{R}$. Como a função é par o estudo das assímptotas horizontais e oblíquas pode reduzir-se às assímptotas "à direita". Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

não há assímptotas horizontais. Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \left(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

tampouco há assímptotas oblíquas.

b) Como

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

resulta que:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} = 1$$

e portanto $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x^2 + 1)) = 0$. Assim $g(x) = x^2 + 1$ é uma solução (que facilmente se reconhece ser única).

4.99 O gráfico da função f, definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

tem uma inflexão no ponto de abcissa -1.

a) Determine os outros pontos de inflexão e indique os intervalos em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;

b) O gráfico de f tem alguma assímptota vertical? Porquê?

Determine uma equação da única assímptota não vertical do mesmo gráfico e estude a localização deste em relação àquela assímptota, determinando os intervalos em que está "por baixo" ou "por cima" da mesma.

(Pergunta 2 da Prova de 1/8/72)

4.100 Considere a função f, definida em $]0,+\infty[$ pela fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{x^x}.$$

Obtenha uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 e indique, no caso de existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo da função (em todo o domínio). Indique ainda o contradomínio da função.

(Pergunta 1 do Exame Integrado (Ponto nº 5) de 25/10/71)

4.101 a) Determine a constante K por forma a que a função f definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pela fórmula $f(x) = (x+K)e^{1/x}$ tenha um extremo no ponto 2. Indique, justificando, se se trata de um máximo ou de um mínimo e se a função tem algum outro extremo local.

b) Depois de substituir K pelo valor calculado na alínea (a) – ou, se não resolver essa alínea, por um número positivo à sua escolha – estude ainda a função sob os aspectos seguintes: sentido da concavidade do seu gráfico, pontos de inflexão, assímptotas oblíquas e assímptotas verticais.

(Pergunta 1 de uma Prova de Análise II)

4.102 a) Determine a derivada de ordem n da função $f(x) = xe^{-x}$.

b) Mostre que, qualquer que seja n, $f^{(n)}$ tem um só extremo local e verifique se esse extremo é um máximo ou um mínimo.

c) Indique justificando se esse extremo é absoluto.

d) Determine os pontos de inflexão do gráfico de $f^{(n)}$.

Nota: Para algumas das respostas, poderá convir-lhe considerar separadamente as hipóteses "n par" e "n ímpar".

(Pergunta 1 da Prova de 2ª época de 8/1/73)

4.103 a) Estude a função f definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$$

considerando em particular os aspectos seguintes: continuidade, diferenciabilidade, intervalos de monotonia, extremos, contradomínio. Escreva uma equação da tangente ao gráfico de f num ponto (à sua escolha) onde esse gráfico tenha tangente.

b) Verifica a função f considerada na alínea a) as condições expressas na hipótese do Teorema de Rolle, em relação ao intervalo $[-3,3]$? E as da hipótese do Teorema de Lagrange, relativamente ao intervalo $[0,3]$? Justifique as respostas.

(Pergunta 2 da Prova de 1/9/72)

4.104 a) Estude a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ pela fórmula:

$$f(x) = \frac{|x|}{1 - |x|}$$

considerando em especial os aspectos seguintes: continuidade, diferenciabilidade, crescimento, máximos e mínimos, concavidades, assímptotas.

b) Esboce o gráfico da função.

(Pergunta 1 do Exame Integrado (Ponto nº2) de 1/10/71)

4.105 a) Estude a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$f(x) = \frac{1 - |x|}{1 + |x|}$$

considerando em especial os aspectos seguintes: continuidade, diferenciabilidade, crescimento, máximos e mínimos, concavidades, assímptotas.

b) Esboce o gráfico da função.

(Pergunta 1 do Exame Integrado (Ponto nº1) de 1/10/71)

Resolução:

a) A função é par, isto é, $f(x) = f(-x)$. Vamos tirar partido deste facto notando, por exemplo, que a derivada será ímpar no seu domínio, isto é, $f'(x) = -f'(-x)$ se f for diferenciável em x, a segunda derivada será par,...

A função é contínua em $\mathbb{R}$. Para $x > 0$ é diferenciável (logo também para $x < 0$) com

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} < 0 \qquad (\text{se } x > 0).$$

Do facto da derivada ser ímpar concluímos que se a derivada existir em 0 terá de ser nula. No entanto

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{1+x} - 1\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2}{1+x} = -2$$

pelo que f não é diferenciável em 0.

A função será então decrescente em $[0, +\infty[$ (e crescente em $]-\infty, 0]$). Nos pontos em que é diferenciável não há extremos pois aí a derivada é não nula. A continuidade em 0 e o sinal da derivada para $x \neq 0$ implicam que 0 é um ponto de máximo.

A concavidade será estudada a partir do sinal de $f''(x)$. Ora

$$f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3} \qquad \text{se } x > 0$$

pelo que a concavidade estará voltada para cima em $[0, +\infty[$ (e portanto também em $]-\infty, 0]$).

Não há assímptotas verticais. Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ (e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$) a recta $y = -1$ é assímptota horizontal à esquerda e à direita.

b) O esboço do gráfico de f está representado na figura 4.4. A paridade de f implica a simetria em relação ao eixo dos y.

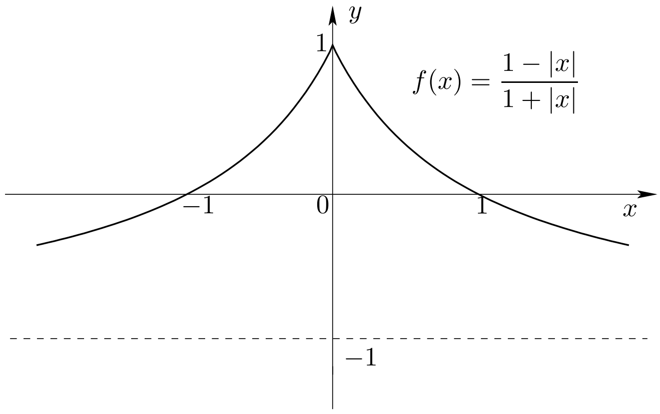

Figura 4.4: Gráfico de f.

4.106 Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

a) Seja (x_n) uma sucessão de termos em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, convergente para $\alpha \in \mathbb{R}$. Justifique que se $\alpha \neq 1$ a sucessão $f(x_n)$ converge para $f(\alpha)$.

b) Será f prolongável por continuidade ao ponto $x = 1$? Justifique.

c) Calcule a função derivada de f e determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

d) Escreva a equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -1$.

e) Indique, justificando, o contradomínio de f.

(Pergunta 1 do Grupo III do 1º Exame de 26/1/94)

4.107 Estude a função definida por $y = xe^x$ e esboce o seu gráfico.

(Pergunta 3 da Prova de 21/10/74)

4.108 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$f(x) = (x - 1)e^x.$$

a) Estude a função f, considerando especialmente os aspectos seguintes: intervalos de monotonia, extremos locais e absolutos, convexidade, inflexões, contradomínio, assímptotas.

b) Prove que, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$, se verifica a relação:

$$f^{(n)}(x) = f(x + n)e^{-n}.$$

(Pergunta 1 de uma Prova de Análise II)

4.109 Estude a função f definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

e esboce o respectivo gráfico (não se preocupe com a determinação da direcção das tangentes nos pontos de inflexão).

(Grupo Ia do 1º Teste de 21/6/80)

4.110 Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela fórmula:

$$f(x) = x^4 e^{-x}$$

e esboce o respectivo gráfico.

(Grupo IIa do Exame de 26/7/78)

4.111 Faça o estudo da função definida por $y = xe^{1/x}$.

(Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade, intervalos de monotonia, extremos, concavidades, assímptotas e faça um esboço do respectivo gráfico).

(Grupo III da Prova de 18/7/77)

Resolução: À medida que avançamos no estudo da função inscrevemos num quadro as informações obtidas.

x	$-\infty$			0			1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\mid$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$		$\mid$		$-$	0	$+$	
y''		$-$		$\mid$				$+$	

O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sendo a função aí contínua. O domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sendo $y' = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. A derivada anula-se para $x = 1$; é positiva para $x > 1$ ou $x < 0$ e negativa para $0 < x < 1$. Logo há crescimento da função para $x > 1$ ou $x < 0$ e decrescimento para $0 < x < 1$. Em $x = 1$ há pois um máximo, sendo o valor correspondente $y = e$. Para estudar a concavidade determina-se $y'' = e^{1/x}\frac{1}{x^3}$ e vem $y'' > 0$ se $x > 0$ e $y'' < 0$ se $x < 0$; logo para $x < 0$ a concavidade está voltada para baixo e para $x > 0$ voltada para cima. Não há pontos de inflexão. Para $x = 0$ há uma assímptota, tendo-se como limites laterais à esquerda e à direita:

$$\lim_{x \to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Como

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{1/x} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} xe^{1/x} = -\infty$$

não há assímptotas horizontais. Como

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} (y - x) = \lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} (y - x) = \lim_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$$

resulta que $y = x + 1$ é assímptota oblíqua à esquerda e à direita.
O gráfico está esboçado na figura 4.5.

4.112 Estude a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

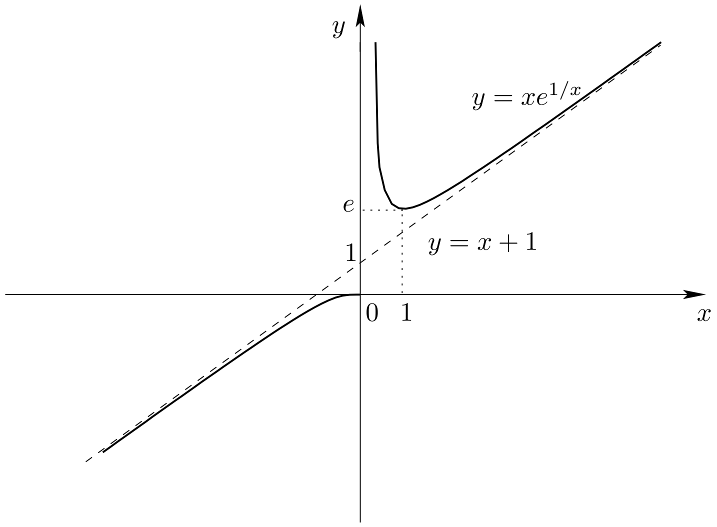

Figura 4.5: O gráfico de $y = xe^{1/x}$ no problema 4.111.

considerando em especial os aspectos seguintes: intervalos de monotonia, máximos e mínimos, concavidade, inflexões. Esboce o gráfico da função.

(Pergunta 1a da Prova de 11/10/72)

4.113 Faça um estudo tão completo quanto possível da função F definida pela fórmula

$$F(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

e esboce o gráfico da função.

(Grupo II do Exame Final de 10/5/79)

4.114 Faça um estudo tão completo quanto possível da função f definida pela fórmula

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$$

e esboce o gráfico da função.

(Grupo II da Repetição do 1º Teste de 18/9/80)

4.115 Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$f(x) = |x|e^{1-x^2}.$$

a) Estude a função do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade. Em cada ponto em que f não seja diferenciável, calcule as derivadas laterais.

b) Complete o estudo da função, considerando em particular os aspectos seguintes: crescimento, extremos, concavidade, inflexões, assímptotas. Esboce o gráfico da função.

(Grupo II do Exame de 21/9/79)

4.116 a) Faça um estudo analítico, tão completo quanto possível, da função f definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$f(x) = xe^{-|1-x^2|}$$

(em particular, determine os eventuais máximos e mínimos, inflexões e pontos em que a função não seja diferenciável).

b) Esboce o gráfico da função.

(Pergunta 2 da Prova de 19/7/71)

4.117 a) Estude a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$f(x) = xe^{-|4-x^2|}$$

considerando especialmente os aspectos seguintes: continuidade, diferenciabilidade, crescimento, máximos e mínimos, concavidades, inflexões e assímptotas.

b) Esboce o gráfico da função.

(Pergunta 2 do Ponto nº4 de 1/10/71)

4.118 Faça um estudo tão completo quanto possível da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua no ponto 0 e tal que, para todo o $x \neq 0$, $g(x) = xe^{-1/x^2}$. Esboce o gráfico da função.

(Grupo IV do Teste de 10/4/79)

4.119 Faça o estudo da função definida por: $f(x) = e^{-\log^2 x}$. (Determine o domínio, domínio de diferenciabilidade, intervalos de monotonia, extremos, concavidades, pontos de inflexão, assímptotas e faça um esboço do respectivo gráfico).

(Grupo II do Exame de 23/3/77)

4.120 a) Estude a função f, definida pela fórmula:

$$f(x) = \frac{x}{1 + \log x}$$

no conjunto de todos os valores reais x tais que $f(x) \in \mathbb{R}$. Considere especialmente os aspectos seguintes: intervalos de monotonia, máximos e mínimos, convexidade, inflexões, assímptotas.

b) Sendo g a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\}$ e verificando as condições:

i) g é ímpar e é contínua em todo o seu domínio;

ii) em todo o ponto x positivo e distinto de $1/e$, $g(x) = f(x)$.

Esboce o gráfico de g e determine equações das tangentes a esse gráfico em cada um dos seus pontos de inflexão.

(Pergunta 1 da Prova de 4/11/72)

4.121 Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{e}, 0, \frac{1}{e}\} \to \mathbb{R}$ definida pela fórmula:

$$f(x) = \frac{x^2}{2 + \log x^2}$$

e esboce o gráfico da função.

(Grupo Ib do Exame de 2/10/80)

4.122 a) Faça um estudo tão completo quanto possível da função f, definida pela fórmula

$$f(x) = \frac{x}{\log |x|}$$

b) Esboce o gráfico da mesma função.

(Pergunta 2 do Exame Final de 6/5/78)

4.123 Faça um estudo tão completo quanto possível da função g definida pela fórmula:

$$g(x) = \frac{x}{1 + \log|x|}$$

e esboce o respectivo gráfico.

(Grupo III do Teste de 7/4/79)

4.124 Estude a função f, definida pela fórmula

$$f(x) = \frac{x}{1 - \log|x|}$$

(no conjunto dos pontos x tais que $f(x) \in \mathbb{R}$) e esboce o respectivo gráfico.

(Pergunta 2 do Exame Final de 20/2/71)

4.125 Faça o estudo da função definida por

$$y = \frac{1 - \log|x|}{1 + \log|x|}.$$

(Determine o domínio, domínio de diferenciabilidade, intervalos de monotonia, extremos, concavidades, pontos de inflexão, assímptotas e faça um esboço do respectivo gráfico).

(Grupo II da Prova de 25/7/77)

4.126 a) Faça um estudo tão completo quanto possível da função f, definida em $\mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que, em qualquer ponto $x \neq 0$, se verifica a igualdade:

$$f(x) = x^2 \log x^2.$$

b) Esboce o gráfico da função.

(Pergunta 2 do Teste de 22/4/78)

4.127 Faça um estudo tão completo quanto possível da função f, definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}.$$

Esboce o gráfico da restrição de f ao intervalo $[0, 2\pi]$.

(Grupo III do Teste de 24/4/79)

4.128 Estude do modo mais completo que lhe seja possível a função definida pela fórmula:

$$y = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1 + x^2}.$$

Esboce o gráfico da função.

(Grupo III do Exame OS de 11/2/80)

4.129 Considere a função f definida pela fórmula

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

no conjunto de todos os pontos x tais que $f(x) \in \mathbb{R}$.

a) Estude a função, determinando em especial os pontos de descontinuidade, os intervalos de monotonia, os máximos e os mínimos locais e o sentido da concavidade do gráfico de f. Verifique se existem pontos de inflexão.

b) O gráfico de f admite alguma assímptota vertical? Justifique.

Obtenha uma equação da única assímptota não vertical do mesmo gráfico e determine os intervalos em que este está situado "por cima" e por "por baixo" dessa assímptota.

(Pergunta 2 da Prova de 4/9/72)

4.130 Faça um estudo tão completo quanto possível da função F definida em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ pela fórmula:

$$F(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}.$$

Esboce o gráfico da função.

(Grupo II do Exame Final de 10/5/79)

4.131 Estude analiticamente a função real definida pela expressão

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

e represente a sua imagem geométrica aproximada.

(Pergunta 3 do Exame Final (Ponto n^{o}2) de 6/7/71)

4.132 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 - x).$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e indique os zeros da função f.

b) Estude f quanto à diferenciabilidade e calcule a sua derivada.

c) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia de f.

d) Determine o contradomínio de f.

(Pergunta 2 do Grupo III do Exame de 2^a Época de 7/2/97)

4.133 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função *diferenciável em* 0, dada por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{se } x \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(\alpha x), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calcule α.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (se não conseguiu calcular α, suponha doravante que $\alpha = 1$).

c) Estude f quanto à diferenciabilidade e calcule a sua derivada.

d) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia de f.

e) Determine o contradomínio de f.

(Pergunta 2 do Grupo III do Exame de 1ª Época de 8/1/97)

4.134 Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} k_1 \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1-x}\right), & \text{se } x < 0, \\ k_2 + \operatorname{arctg} x, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

onde k_1 e k_2 são números reais.

a) Justifique que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Determine k_1 e k_2 de modo a que a função f fique contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

c) Mostre que, para os valores de k_1 e k_2 calculados na alínea anterior, a função f não tem extremos locais.

(Pergunta 1 do Grupo III do 2º Exame de 9/2/94)

4.135 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e definida por

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{x}\right), \qquad \text{se } x \neq 0.$$

a) Estude f quanto à continuidade e à existência dos limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

b) Estude a função f quanto a monotonia e extremos.

c) Indique, justificando, o contradomínio da restrição de f ao intervalo $[0, +\infty[$.

d) Determine o sentido da concavidade e as inflexões do gráfico de f.

e) Esboce o gráfico de f.

(Grupo III do 1º Exame de 23/1/95)

4.136 a) Faça um estudo analítico, tão completo quanto possível, da função definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pela fórmula:

$$f(x) = \frac{\log |x|}{x^n}$$

onde n é um número natural.

b) Esboce o gráfico de f, na hipótese de ser $n = 1$.

(Pergunta 2 da Prova de 20/7/71)

4.137 Considere a função f definida em $]-1, +\infty[$ por

$$f(x) = \begin{cases} \log\sqrt{1-x^2}, & \text{se } x \in\,]-1, 0], \\ x^2 e^{1-x^2}, & \text{se } x \in\,]0, +\infty[. \end{cases}$$

a) Estude quanto à continuidade a função f. Determine $\lim_{x\to-1} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f. Calcule a função derivada f'.

c) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia da função f.

d) Calcule a segunda derivada de f.

e) Justifique que existem exactamente três pontos de inflexão e determine o sentido das concavidades do gráfico de f. (Caso não saiba determinar os pontos de inflexão , pode utilizar, na sequência do raciocínio, que $\frac{1}{2}\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}$ são zeros de f'').

f) Esboce o gráfico de f.

(Grupo III do Exame de 1ª Época de 26/1/96)

4.138 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x \log x, & \text{se } x > 0, \\ \frac{e^x - 1}{e}, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Estude, do ponto de vista de continuidade e diferenciabilidade, a função f. Calcule $f'(x)$ nos pontos x em que f seja diferenciável e, em cada ponto que o não seja, calcule (se existirem) as derivadas laterais.

b) Determine os intervalos de monotonia f e os seus extremos locais.

Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Qual é o contradomínio de f? Justifique cuidadosamente a resposta.

(Pergunta 1 do Grupo III do Exame de Época Especial de 17/11/95)

4.139 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$ e tal que

$$f(x) = x \log \frac{1}{x^2}, \quad \text{se } x \neq 0.$$

a) Indique, justificando o valor de $f(0)$. Verifique se o gráfico da função apresenta alguma simetria, estude o sinal de f e os limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

b) Estude a função f quanto à diferenciabilidade e determine os intervalos de monotonia e extremos.

c) Determine o sentido da concavidade e as inflexões do gráfico de f.

d) Indique uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = e$.

e) Esboce o gráfico de f.

(Grupo III do 2º Exame de 6/2/95)

4.140 Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |1 - x|e^{1-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Estude a função f quanto à continuidade e à existência dos limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

b) Estude a função f quanto à diferenciabilidade, monotonia e extremos.

c) Determine o sentido da concavidade e as inflexões do gráfico de f.

d) Indique uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 3$.

e) Esboce o gráfico de f.

(Grupo III do Exame de 2ª Época de 24/2/95)

4.141 Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ por

$$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{|x+2|}}.$$

a) Estude a função f quanto à continuidade. Determine $\lim_{x\to-2} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f. Calcule a função derivada f'.

c) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia da função f.

d) Calcule a segunda derivada de f.

e) Determine o sentido das concavidades do gráfico de f.

f) Esboce o gráfico de f.

(Grupo III do Exame de 2ª Época de 28/2/96)

4.5 Série de Taylor. Desenvolvimentos em séries de potências.

4.142 a) Determine o raio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

b) Estude a natureza da série nos extremos do seu intervalo de convergência. Em caso de convergência, verifique se é simples ou absoluta.

c) Designando por f a função definida pela fórmula:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(2n-1)(2n+2)},$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente, calcule $f(1)$ e indique, justificando, o valor de $f''(0)$.

(Pergunta 3 da Prova de 11/10/72)

4.143 Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(n+2)}$$

e, em cada ponto x em que a série convirga, designe por $\varphi(x)$ a sua soma. Nestas condições:

1. Justifique que o domínio de φ é um intervalo I, e indique os extremos desse intervalo.

2. Justifique que, em qualquer ponto $x \in I$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$; mostre ainda que a restrição de φ ao conjunto $I \cap [0, +\infty[$ é uma função crescente.

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

3. Calcule o máximo da função φ.

(Grupo IIb do Exame Final de 30/4/80)

Resolução:

1. Uma série de potências de x converge absolutamente no intervalo $]-R, R[$, onde

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}} = \lim \sqrt[n]{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Nos pontos 1 e -1 a série toma a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

e como

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$$

a série converge. Logo o domínio de φ é $[-1, 1]$.

2. $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{(n+1)(n+2)} = \varphi(-x)$. Para ver que $\varphi(x)$ restrita a $[0, 1]$ é crescente basta notar que se $0 \leq x < y \leq 1$ então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $x^{2n} \leq y^{2n}$ pelo que φ é crescente em $[0, 1]$.

3. Acabámos de ver que φ é uma função par — donde decorre que o seu contradomínio, $\varphi([-1, 1])$, coincide com $\varphi([0, 1])$ — e também que φ é crescente em $[0, 1]$. Deve ter-se portanto:

$$\max \varphi = \varphi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Designando por S_n a soma dos n primeiros termos desta série, tem-se:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

e portanto, $\max \varphi = \lim S_n = 1$.

4.144 Indique, sob a forma de um intervalo, o conjunto dos ponto de $\mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{n^2 - n}$$

é absolutamente convergente, e determine, se possível, a soma da série nos extremos do intervalo.

Esta série define uma função no mesmo intervalo; determine uma expressão da derivada dessa função.

(Pergunta 1a do Exame Final (Ponto nº2) de 6/7/71)

4.145 a) Determine o raio de convergência da série que figura no segundo membro da igualdade:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

b) Estude a natureza da série nos extremos do seu intervalo de convergência e calcule a soma num desses extremos.

c) Mostre que, em qualquer ponto x interior ao intervalo de convergência da série se verifica a igualdade:

$$f(x) = (x+1)\log(x+1) - x$$

e aproveite esta igualdade para verificar se f é contínua naquele extremo do intervalo de convergência em que calculou a soma da série.

[**Sugestão:** pode derivar a série termo a termo duas vezes]

4.146 Supondo igual a 2 o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

1. Indique, justificando, a natureza da série $\sum |a_n|$.

2. Definindo uma função φ, no intervalo de convergência da série de potências, pela fórmula

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

justifique que φ é integrável no intervalo $[-1, 1]$ e prove que se verifica necessariamente a desigualdade

$$\left| \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx \right| \le 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

(Grupo IIIb do Exame de 2/10/80)

Resolução:

1. Se 2 é o raio de convergência de $\sum a_n x^n$, há convergência absoluta em $]-2, 2[$ e em particular para $x = 1$ e portanto, $\sum |a_n|$ converge.

2. φ é integrável em $[-1, 1]$ pois é aí contínua.

   Para cada $x \in [-1, 1]$ tem-se:

$$|\varphi(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

   donde

$$\left| \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx \right| \le \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|\, dx \le \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

4.147 a) Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

e indique, justificando, em que pontos a série converge absolutamente e em que pontos converge simplesmente.

b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor, no ponto 1, da função $x + g'(x)$.

(Pergunta 3 da Prova de 23/1/73)

4.148 Considere as funções g que podem ser desenvolvidas em série de potências de x com raio de convergência infinito. Quais dessas funções satisfazem à relação

$$xg'(x) = g(x) \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}?$$

(Pergunta 4b da Prova de 5/7/71)

4.149 Justificando cuidadosamente a resposta, mostre que e^x é a única função que satisfaz às condições seguintes:

$$f^{(n)}(x) = f(x) \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{R}}, \qquad f(0) = 1.$$

[**Sugestão:** Pode-lhe ser útil recorrer a um desenvolvimento em série de Mac-Laurin].

(Grupo III2 da Repetição do 1º Teste de 18/9/80)

4.150 Sendo f uma função analítica na origem e verificando as condições

$$f(0) = 3 \quad \text{e} \quad f'(x) = f(x) + x \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

Determine o desenvolvimento de Mac-Laurin de f e indique, justificando, para que valores de x é que esse desenvolvimento representa a função.

(Pergunta 3b duma Prova de Análise II)

4.151 Sejam f e g duas funções com derivadas f' e g' satisfazendo as seguintes condições:

$$f'(x) = g(x), g'(x) = -f(x) \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

e tais que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$.

1. Prove que
   a) f e g são indefinidamente diferenciáveis.
   b) Qualquer das funções f e g é desenvolvível em série de Mac-Laurin, série essa que representa a função considerada para todo o ponto $x \in \mathbb{R}$.
2. Utilize o método dos coeficientes indeterminados para obter os desenvolvimentos de Mac-Laurin de f e g.
3. Prove que $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1 \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

4.152 1. Prove que qualquer solução (definida em $\mathbb{R}$) da equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad \text{com } k \text{ constante}$$

a) é indefinidamente diferenciável,

b) é desenvolvível em série de Mac-Laurin, série essa que representa a função para todo o t pertencente a $\mathbb{R}$.

Aproveite os resultados para verificar (recorrendo a série de Mac-Laurin com "coeficientes indeterminados") que a expressão geral das referidas soluções é $x = a_0 e^{kt}$.

2. Com base nas conclusões obtidas em 1) resolva a seguinte questão: Uma substância radioactiva desintegra-se a um ritmo que, em cada instante, é proporcional à quantidade de substância existente nesse instante (tendo todos os átomos a mesma probabilidade de desintegrar-se, a desintegração total é proporcional ao números de átomos remanescente). Se $x(t)$ designa a quantidade de subtância existente no instante t, ter-se-á portanto

$$x'(t) = kx(t)$$

com k constante. Sendo x_0 a quantidade de substância existente no instante $t = 0$, determine $x(t)$ e prove que existe um número τ (a vida média do elemento radioactivo) tal que

$$x(t+\tau) = \frac{1}{2}x(t)$$

para todo o $t > 0$.

(Problema 3 do Grupo IV do Trabalho de 1974)

Resolução:

1. a) Para provar que qualquer função que seja solução da equação

$$x'(t) = kx(t)$$

é indefinidamente diferenciável - isto é, n vezes diferenciável, qualquer $n \in \mathbb{N}$ - pode usar-se o método de indução.

Sendo solução da equação considerada, é claro que x terá que ser diferenciável (isto é, n vezes diferenciável, para $n = 1$); por outro lado, admitindo (como hipótese de indução) que $x(t)$ - e portanto também o segundo membro da equção $x'(t) = kx(t)$ - é n vezes diferenciável, logo se conclui que o primeiro membro, $x'(t)$, é também n vezes diferenciável e portanto, que $x(t)$ é $n+1$ vezes diferenciável.

b) A equação implica por indução que para todo o $n \in \mathbb{N}$ tenhamos $x^{(n)}(t) = k^n x(t)$ e em particular $x^{(n)}(0) = k^n x(0)$. Assim se uma solução da equação for representável pala sua série de Mac-Laurin numa vizinhança de 0 então essa solução será nessa vizinhança

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x(0) t^n}{n!} = x(0)e^{kt}. \tag{4.2}$$

Reciprocamente qualquer função deste tipo é solução da equação.

Resta provar que as únicas soluções são definidas em $\mathbb{R}$ por $x(t) = x(0)e^{kt}$. Para isso vamos provar que o resto de ordem n da fórmula de Taylor de uma solução (não necessariamente da forma (4.2)) num ponto t tende para 0 quando $n \to \infty$ qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. Com efeito a equação implica

$$x(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x(0)k^m t^m}{m!} + R_n(t)$$

em que

$$R_n(t) = \frac{x^{(n)}(\tau)t^n}{n!} = \frac{k^n x(\tau) t^n}{n!}$$

para algum $\tau \in]0,1[$ dependente de n e t. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{k^n x(\tau)t^n}{n!} = 0$ concluimos que $R_n(t) \to 0$ quando $n \to \infty$ e qualquer solução é representada pela série de Mac-Laurin respectiva. Como já vimos terá de ter a forma (4.2).

2. Queremos provar que existe τ tal que

$$x(t+\tau) = x(0)e^{k(t+\tau)} = \frac{1}{2}x(0)e^{kt} = \frac{1}{2}x(t).$$

Quer dizer que $e^{k(t+\tau)} = e^{\log\frac{1}{2}}e^{kt}$, isto é, $k(t+\tau) = \log\frac{1}{2} + kt$ ou ainda $\tau = \frac{1}{k}\log\frac{1}{2}$.

4.153 Desenvolva em série de Mac-Laurin a função

$$2^x + \frac{1}{2+x}$$

e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.

(Pergunta 3b da Prova de 2ª época de 18/12/72)

Resolução:

$$2^x = e^{(\log 2)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\log 2)^n x^n \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (|x| < 2).$$

Logo:

$$\begin{aligned} 2^x + \frac{1}{2+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\log 2)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}(\log 2)^n + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n. \end{aligned}$$

Esta série converge (e representa a função considerada) no intervalo $]-2,2[$, visto que em qualquer ponto x tal que $|x| < 2$ convergem as séries de Mac-Laurin das funções 2^x e $\frac{1}{2+x}$. Para qualquer x tal que $|x| \geq 2$ converge apenas uma destas séries, divergindo portanto a série obtida por adição das duas.

4.154 Desenvolva em série de Mac-Laurin a função

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)$$

e indique o maior intervalo aberto em que a série representa a função.

(Pergunta 2b da Prova de 1/10/71)

4.155 Desenvolva em série de Mac-Laurin a função

$$\varphi(x) = x\log(1 + x^3)$$

e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto 0 (mostre que $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$ e observe o sinal de $\varphi^{(4)}$).

(Pergunta 2b da Prova de 8/1/73)

4.156 Desenvolva em série de Mac-Laurin a função

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{9}$$

e indique o maior intervalo aberto em que a série representa a função.

(Pergunta 2b da Prova (Ponto nº2) de 1/10/71)

4.157 Desenvolva a função $\log x$ em série de potências de $x-2$ e indique um intervalo aberto no qual a função coincida com a soma da série obtida.

(Grupo Ic do Exame Final de 18/9/80)

Resolução:

$$\log x = \log(2+(x-2)) = \log\left(2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right) = \log 2 + \log\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$$
$$= \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n n}(x-2)^n.$$

Usámos $\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n$ para $|x|<1$ o que implica que a série obtida converge e representa a função para $|\frac{x-2}{2}|<1$, isto é, para $0<x<4$.

4.158 Desenvolva em série de potências de $x-1$ as funções $\log(3-x)$ e $\frac{1}{x^2}$. Em cada um dos casos, indique o "maior" intervalo aberto em que o desenvolvimento representa a função considerada.

(Grupo IIIa do 1º Teste de 21/6/80)

4.159 Desenvolva em série de potências de $x-1$ a função $\varphi(x) = (x-1)e^x$ e indique os pontos em que a soma da série obtida é igual ao valor da função. Aproveitando o desenvolvimento — ou independentemente — calcule $\varphi^{(n)}(1)$ (n natural arbitrário).

(Grupo Ic do Exame de 2/10/80)

4.160 Obtenha os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin e em série de Taylor relativa ao ponto 1, da função

$$g(x) = e^{5x} + \frac{3}{3+5x}$$

e indique, para cada um desses desenvolvimentos, o "maior" intervalo aberto onde cada uma das séries representa a função. Aproveite um dos desenvolvimentos obtidos para indicar uma expressão para $g^{(n)}(0)$.

(Grupo III1 da Repetição do 1º Teste de 18/9/80)

4.161 Seja f a função definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $f(x) = x^2\log x^2$. Desenvolva f em série de potências de $x-1$ e indique o "maior" intervalo aberto onde esse desenvolvimento representa a função.

(Grupo IV da Prova de 2/12/76)

Capítulo 5

Primitivação

5.1 Determine uma expressão geral de todas as primitivas das seguintes funções.

$$\text{a)}\quad (1-x)^5, \qquad \text{b)}\quad |x|.$$

(Grupo III2 da Prova de 25/7/77)

5.2 Para cada uma das funções definidas em $\mathbb{R}$ pelas expressões

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \frac{x}{1+x^4}, \qquad xe^{-x^2}$$

(todas elas imediatamente primitiváveis) obtenha, se possível:

a) A primitiva que se anula no ponto $x = 0$.

b) A primitiva que tende para 1 quando $x \to +\infty$.

Se nalgum caso for impossível obter uma primitiva que verifique a condição requerida explique a razão dessa impossibilidade.

(Pergunta 1 da Prova de 20/7/78)

Resolução:
Designando por F uma primitiva de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ temos:

$$F(x) \equiv \int \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\int \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) 2\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + K.$$

a) Se $F(0) = 0$ é porque $K = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; a primitiva que se anula para $x = 0$ é pois:

$$F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

b) Para nenhum valor de K existe o limite $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pelo que não existe nenhuma primitiva tal que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Designando por G uma primitiva de $\frac{x}{1+x^4}$ temos:

$$G(x) \equiv \int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + K.$$

a) Se $G(0) = 0$ é porque $K = 0$; a primitiva que se anula em 0 é pois:

$$G(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2}.$$

b)
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2} + K = \frac{\pi}{4} + K.$$

Se $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ é porque $K = 1 - \frac{\pi}{4}$, logo a primitiva pedida é:

$$G(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Designando por H uma primitiva de xe^{-x^2}

$$H(x) \equiv \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + K.$$

a) Se $H(0) = 0$ é porque $K = \frac{1}{2}$. Logo, a primitiva pedida é:

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

b) $\lim_{x\to+\infty} H(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + K\right) = K$. Logo a primitiva que verifica $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$ é:

$$H(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + 1.$$

5.3 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$x^2\cos(x^3+1), \qquad \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad e^x \operatorname{sen} x.$$

b) Determine a função F definida em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ que obedece às seguintes condições:

$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad F(2) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 10.$$

(Grupo I da Prova de 11/9/78)

5.4 Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções (todas elas elementarmente primitiváveis).

$$\operatorname{sen}(2x)\cos(2x), \qquad \frac{1}{x(2-3\log x)^{\frac{2}{3}}}, \qquad e^{x+e^x}.$$

(Grupo Ia da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

Resolução: Notando que a derivada de $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(2x)) = 2\cos(2x)$:

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)2\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x).$$

Notando que $\frac{1}{x}$ é a derivada de $\log x$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x(2-3\log x)^{\frac{2}{3}}}\,dx = \int \frac{1}{(2-3\log x)^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{x}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\int (2-3\log x)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{x}\right)dx = -\frac{1}{3}3(2-3\log x)^{\frac{1}{3}} \\
&= -(2-3\log x)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Finalmente
$$H(x) = \int e^{x+e^x}\,dx = \int e^x e^{e^x}\,dx = e^{e^x}.$$

5.5 Para cada umas das funções (todas elas imediatamente primitiváveis) definidas pelas expressões:
$$x \operatorname{sen} x^2, \qquad \frac{e^x}{2+e^x}, \qquad \frac{1}{(1+x^2)[1+(\operatorname{arctg} x)^2]}$$
determine, se possível:

1. Uma primitiva que se anule no ponto $x = 0$;
2. Uma primitiva que tenda para 0 quando $x \to +\infty$.

Nos casos em que não seja possível obter uma primitiva nas condições requeridas explique sucintamente a razão dessa impossibilidade.

(Grupo Ib do 2º Teste de 28/7/80)

5.6 Determine uma primitiva de
$$\frac{\log x}{x(\log^2 x + 1)}$$
no intervalo $]0, +\infty[$.

(Pergunta 1b da Prova de 7/74)

5.7 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:
$$\operatorname{tg} x \sec^2 x; \qquad \operatorname{sen} x\ 2^{\cos x}; \qquad \frac{1}{x + x\log^2 x}.$$

b) Determine a função f, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que verifica as seguintes condições:
$$\begin{cases} f'(x) = 4x \log|x|, \\ f(-1) = 1, \\ f(1) = -1. \end{cases}$$

(Grupo Ia e b do Exame de 2ª época de 11/2/80)

Resolução:

a) Designamos por $F(x)$ uma primitiva de $\operatorname{tg} x \sec^2 x$.
$$F(x) = \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x.$$

Designemos por $G(x)$ uma primitiva de $\operatorname{sen} x 2^{\cos x}$.
$$\begin{aligned} G(x) &= \int \operatorname{sen} x 2^{\cos x}\,dx = \int 2^{\cos x} \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \frac{-1}{\log 2}\int e^{(\log 2)\cos x}(-\log 2 \operatorname{sen} x)\,dx = -\frac{e^{(\log 2)\cos x}}{\log 2} = -\frac{2^{\cos x}}{\log 2}. \end{aligned}$$

Designemos por $H(x)$ uma primitiva de $\frac{1}{x+x\log^2 x}$

$$H(x) = \int \frac{1}{x + x\log^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1+\log^2 x}\frac{1}{x}\, dx.$$

Usando primitivação por substituição com $y = \log x$ e portanto $\frac{dy}{dx} = 1/x$ consideramos

$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \operatorname{arctg} y$$

donde

$$H(x) = \operatorname{arctg}(\log x).$$

b) Trata-se de determinar em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ uma primitiva $J(x)$ de $4x\log|x|$ de forma que:

$$\begin{cases} f(-1) = 1, \\ f(1) = -1. \end{cases}$$

Se $x > 0$ devemos ter para alguma constante K_1:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int 4x\log x\, dx = 4\int x\log x\, dx = 4\left(\frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\, dx\right) \\ &= 2x^2\log x - 2\int x\, dx = 2x^2\log x - x^2 + K_1 = x^2(2\log x - 1) + K_1 \end{aligned}$$

Se $x < 0$ devemos ter para alguma constante K_2:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int 4x\log(-x)\, dx = 4\left(\frac{1}{2}x^2\log(-x) - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{-x}(-1)\, dx\right) \\ &= x^2(2\log(-x) - 1) + K_2. \end{aligned}$$

Assim $J(x)$ terá de ser da forma:

$$J(x) = \begin{cases} x^2(2\log x - 1) + K_1, & \text{se } x > 0, \\ x^2(2\log(-x) - 1) + K_2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Para obter $f(1) = -1$ e $f(-1) = 1$ as constantes K_1 e K_2 têm de escolher-se assim:

$$K_1 = 0, \qquad K_2 = 2.$$

5.8 Determine a função f, definida no intervalo $]0, +\infty[$ e que satisfaz as condições:

$$f'(x) = x^5\log x - \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \quad \forall_{x>0} \qquad \text{e} \qquad f(1) = 0.$$

(Pergunta 1a da Prova de 18/12/72)

5.9 Estabeleça uma fórmula de recorrência para o cálculo de

$$P\operatorname{tg}^n x, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

(Pergunta 3 da Prova de 12/3/74)

Resolução: Ponha-se $J_n(x) = \int \operatorname{tg}^n x\,dx$. Se $n = 1$:

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \\
&= -\int \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x)\,dx = -\log|\cos x|
\end{aligned}$$

Se $n = 2$:

$$J_2(x) = \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \operatorname{tg} x - x.$$

Se $n > 2$:

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \\
&= \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x\,dx - J_{n-2}(x) = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - J_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Temos pois:

$$\begin{aligned}
&J_n(x) = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - J_{n-2}(x), \qquad \text{se } n > 2,\\
&J_1(x) = -\log|\cos x|,\\
&J_2(x) = \operatorname{tg} x - x.
\end{aligned}$$

5.10 Primitive

$$x\log x + \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x\log x} + \frac{1}{x\log x\log(\log x)}.$$

(Pergunta 2 da Prova de 21/10/74)

5.11 Determine a função f que verifica:

$$\begin{cases} f''(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x, & \text{para todo o } x \in \mathbb{R},\\ f(0) = f'(0) = 1. \end{cases}$$

(Pergunta 3a da Prova de 19/7/71)

5.12 Determine a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que verifica:

$$\begin{cases} f''(x) = \frac{1}{1+x}, & \text{qualquer que seja } x > -1,\\ f(0) = f'(0) = 1. \end{cases}$$

(Grupo IIa da Prova de 18/9/79)

5.13 Determine a função φ, definida em $\mathbb{R}$ e que verifica as condições seguintes:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \frac{x+1}{x^2+1} & \text{qualquer que seja } x \in \mathbb{R},\\ \varphi(0) = 1,\\ \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

(Pergunta 2b de uma Prova de Análise II)

5.14 Calcule

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx.$$

(Grupo Ia da Prova de 23/2/79)

Resolução: Escrevamos $\frac{x^4}{x^4-1}$ como soma de fracções simples:

$$\frac{x^4}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}.$$

Determinemos A, B, C e D:

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax+B)(x^2-1) + C(x^2+1)(x+1) + D(x^2+1)(x-1) \\ 1 &= (A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 + (-A+C+D)x + (-B+C-D) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+C-D=0 \\ -A+C+D=0 \\ -B+C-D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{4} \\ D=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Quer dizer que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx &= \int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| \\ &= x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|. \end{aligned}$$

5.15 Obtenha a primitiva da função

$$\frac{12x+8}{x^4-4x^2}$$

definida no intervalo $]2,+\infty[$ e que tende para 1 quando x tende para $+\infty$.

(Grupo Ib da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

5.16 Determine:

a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}.$$

b) A primitiva G, da função

$$g(x) = \frac{x+3}{x^4-x^2}$$

definida no intervalo $]1,+\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.

(Grupo I da Prova de 28/6/79)

5.17 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$f(x) = \cos(2x)\cos x, \qquad g(x) = \frac{\log \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(x) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^4-1)^3}}.$$

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

b) Considere a função:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 7}{(x^2 + 4)(x^2 - 1)}$$

definida em $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Obtenha uma primitiva F de f que satisfaça as três condições seguintes:

i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$,

ii) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$,

iii) $F(0) = 1$.

(Grupo I da Prova de 11/9/79)

5.18 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$e^{x^2 + 2\operatorname{sen} x}(x + \cos x), \qquad \frac{(1 + 2\operatorname{arctg} x)^3}{1 + x^2}, \qquad x^2 \operatorname{sh} x.$$

b) Calcule:

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 5}{(x - 1)^2 (x + 2)}\, dx.$$

(Grupo I da Prova de 22/9/78)

5.19 Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\frac{\operatorname{arcotg} x}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{3x + 4}{(x - 5)^2 + 3}.$$

(Pergunta 2a da Prova de 6/7/71)

5.20 Calcule

$$\int \frac{x^4}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx.$$

(Grupo II1a da Prova de 18/7/77)

5.21 Determine:

a) Uma função f, definida em $\mathbb{R}$, e verificando as condições:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

b) Uma função g, definida no intervalo $I =]16, +\infty[$ e tal que:

$$g'(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{x(4 - \sqrt{x})} \quad \forall_{x \in I} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 1.$$

(Pergunta 3 da Prova de 20/2/71)

5.22 Calcule uma primitiva de cada uma das funções

$$\frac{\log x}{\sqrt{1 + x}} \qquad \text{e} \qquad \frac{5x - 6}{x[(x - 1)^2 + 2]}.$$

(Pergunta 2a da Prova de 5/7/71)

Resolução:

a) Primitivando por partes de $\frac{\log x}{\sqrt{1+x}}$ para $x > 0$:

$$I(x) = \int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\, dx = \int (1+x)^{-\frac{1}{2}} \log x\, dx = 2(1+x)^{\frac{1}{2}} \log x - 2\int (1+x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\, dx.$$

Para calcular $J(x) = \int (1+x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\, dx$ poderia parecer razoável tentar de novo uma primitivação por partes. No entanto tal conduz sempre a primitivas envolvendo potências fraccionárias de $1+x$ a multiplicar por uma potência inteira e não nula de x ou conduz-nos de novo à primitiva com que tínhamos começado.

Como as potências fraccionárias de $1+x$ são um problema tentamos uma mudança de variável para eliminá-las. Para tal consideramos a substituição $y = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, onde $x > 0$ e portanto $y > 1$, cuja inversa é $x = y^2 - 1$ que por sua vez tem derivada $\frac{dx}{dy} = 2y$, conduzindo ao cálculo de:

$$\int y \frac{1}{y^2-1} 2y\, dy = 2\int \frac{y^2}{y^2-1}\, dy = 2\int (1 + \frac{1}{y^2-1})\, dy = 2y + 2\int \frac{1}{y^2-1}\, dy. \tag{5.1}$$

Decompondo $\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$ e determinando as constantes A e B através de $1 = A(y-1) + B(y+1)$ obtém-se $A = -\frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{2}$, quer dizer

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right),$$

pelo que

$$\int \frac{1}{y^2-1} dy = \frac{1}{2} \log \frac{y-1}{y+1} \qquad (\text{se } y > 1).$$

Substituindo em (5.1)

$$\int \frac{y^2}{y^2-1}\, dy = y + \frac{1}{2} \log \frac{y-1}{y+1}.$$

Daí que:

$$J(x) = 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + \log \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{2}} + 1}.$$

Voltando a $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= 2(1+x)^{\frac{1}{2}} \log x - 4(1+x)^{\frac{1}{2}} - 2\log \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{2}} + 1} \\ &= 2(1+x)^{\frac{1}{2}} (\log x - 2) - 2\log \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{2}} + 1}. \end{aligned}$$

Em conclusão:

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\, dx = 2\left(\sqrt{1+x}(\log x - 2) - \log \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1}\right) + K.$$

b) A primitiva $\int \frac{5x-6}{x[(x-1)^2+2]}\, dx$ calcula-se mais comodamente efectuando a mudança de variável $y = x - 1$ o que conduz a:

$$\int \frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)}\, dy.$$

Decompondo a fracção racional:

$$\frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2+2}$$

obtém-se calculando A, B e C,

$$\frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)} = \frac{-2}{y+1} + \frac{2y+3}{y^2+2}$$

e daí:

$$\begin{aligned}\int \frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)}\,dy &= -2\log|y+1| + \int \frac{2y+3}{y^2+2}\,dy\\ &= -2\log|y+1| + \int \frac{2y}{y^2+2}\,dy + 3\int \frac{1}{y^2+2}\,dy\\ &= -2\log|y+1| + \log(y^2+2) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dy\\ &= -2\log|y+1| + \log(y^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Invertendo a mudança de variável:

$$\int \frac{5x-6}{x[(x-1)^2+2]}\,dx = -2\log|x| + \log((x-1)^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}.$$

5.23 Calcule

$$\int \frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\,dx$$

(Grupo III da Prova de 19/9/77)

5.24 Determine as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$ e que verificam as condições:

$$f''(x) = (1+\operatorname{sen} x)\cos x, \quad f'(0)=1, \quad f(0)=3;$$
$$g'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

(Pergunta 2a do Ponto nº 5 de 25/10/71)

5.25 Obtenha uma primitiva ϕ da função

$$\varphi(x) = \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}},$$

definida no intervalo $]0,+\infty[$ e tal que $\varphi(+\infty)=1$. Seria possível obter uma primitiva Ψ de φ definida em $]-\infty,0[$ e com limite finito quando $x\to-\infty$? Justifique abreviadamente a resposta.

(Grupo IIc do Exame de 2/10/80)

Resolução: Vamos fazer a mudança de variável $y=e^x$ em $\int \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}\,dx$. Notando que $x=\log y$ e $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$ obtemos[1]

$$\int \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}\,dx = \int \frac{2y^{-1}}{1-y^2}\frac{1}{y}\,dy = 2\int \frac{1}{y^2(1-y^2)}\,dy.$$

Tem-se:

$$\frac{1}{y^2(1-y^2)} = \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} + \frac{C}{1-y} + \frac{D}{1+y};$$

A, B, C e D calculam-se a partir de:

$$1 = A(1-y^2) + By(1-y^2) + Cy^2(1+y) + Dy^2(1-y)$$

atribuindo por exemplo a y os valores 0, 1, -1 e 2:

$$\begin{cases} 1 = A \\ 1 = 2C \\ 1 = 2D \\ 1 = -3A - 6B + 12C - 4D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C = \frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Vem, desta forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2(1-y^2)}\,dy &= \int \frac{1}{y^2}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,dy \\ &= -y^{-1} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\phi(x) = \int \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}\,dx = -\frac{2}{y} + \log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + K = -\frac{2}{e^x} + \log\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right| + K.$$

Se $\lim_{x\to+\infty}\phi(x) = 1$ é porque $K = 1$. Assim $-\frac{2}{e^x} + \log\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right| + K$ é ainda a forma geral das primitivas de φ para $x < 0$. Porém, seja qual fôr o valor da constante K, tem-se sempre $\lim_{x\to-\infty}\phi(x) = -\infty$ pelo que é impossível encontrar uma primitiva Ψ de φ em $]-\infty, 0[$ verificando $\lim_{x\to-\infty}\Psi(x) = \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.26 Calcule

$$\int \frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-2)^2}\,dx.$$

(Grupo Ia do Exame de 2ª época de 7/2/79)

5.27 Calcule

$$\int \frac{e^{3t}+3e^{2t}+6}{e^{3t}+3e^t}\,dt.$$

(Grupo II da Prova de 9/10/78)

5.28 Calcule a primitiva G da função

$$g(x) = \frac{2\log x - 1}{x\log x(\log x - 1)^2}$$

definida no intervalo $]e, +\infty[$ e que verifica a condição:

[1] Nesta solução e nalgumas outras deste capítulo uma igualdade entre primitivas $\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$ significa de facto que considerámos uma mudança de variável $y = \theta(x)$ com inversa $x = \theta^{-1}(y)$ e que a função de y do lado direito da igualdade composta com θ iguala o lado esquerdo da igualdade como função de x. Este pequeno abuso de notação revelar-se-á prático ao nível do cálculo.

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 7.$$

(Grupo Ib da Prova de 25/9/79)

5.29 a) Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$y = \frac{1}{x\log x^2}, \qquad y = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}, \qquad y = 3^x \cos x$$

b) Calcule uma primitiva $F(x)$ de

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2+\operatorname{sen} x)^2}$$

tal que $F(0) = 0$. Haverá outra primitiva de $f(x)$ que se anule para $x = 0$? Justifique.

(Grupo Ia e b do Exame de 2ª época de 4/2/80)

5.30 Primitive as funções

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}, \qquad \operatorname{arcsen}\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} x\cos^2 x}.$$

(Pergunta 1a do Ponto nº3 de 1/10/71)

5.31 Primitive as funções:

$$\frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}.$$

(Pergunta 1a do Ponto nº4 de 1/10/71)

5.32 Determine o conjunto de todas as primitivas da função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sen} x - \cos x} \quad \text{no intervalo }]0,\pi/2[.$$

(Pergunta 2 da Prova de 22/3/74)

Resolução: Vamos considerar a mudança de variável $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ que conduz a:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Note-se que ao variar x em $]0,\frac{\pi}{2}[$ a variável t percorre $]0,1[$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt\\
&= \int \frac{1}{t(t-1)}\,dt = \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t}\,dt\\
&= \log|t-1| - \log|t| = \log(1-t) - \log t\\
&= \log\frac{1-t}{t} \qquad \text{(por ser sempre } 0<t<1\text{).}
\end{aligned}$$

Quer dizer:

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx = \log\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + K.$$

Capítulo 6

Integral de Riemann

6.1 Definição e primeiras propriedades

6.1 Recorde que se chama *oscilação* de uma função f num subconjunto (não vazio) A do seu domínio à diferença entre o supremo e o ínfimo da função no conjunto A (onde f se supõe limitada). Nestas condições, sendo f uma função limitada no intervalo $[a, b]$, prove que f é integrável em $I = [a, b]$ se for verificada a condição seguinte:

> *Qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe uma decomposição de I tal que a oscilação de f em cada um dos subintervalos de I determinados por essa decomposição é menor que ε.*

Mostre ainda que a verificação da condição referida não é necessária para que f seja integrável.

(Grupo V do 1º Teste de 20/7/78)

Resolução: Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $d = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ uma decomposição de $[a, b]$ define-se $S_d = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$, $s_d = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ (com $x_0 = a$ e $x_n = b$) onde $M_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f$, $m_i = \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f$ e portanto: $S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$.
Sendo verificada a condição do enunciado, dado $\delta > 0$, escolha-se uma decomposição d de $I = [a, b]$ tal que a oscilação $M_i - m_i$ de f em cada um dos subintervalos de I determinados por $d = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ seja menor que $\varepsilon = \frac{\delta}{b-a}$. Virá então:

$$\begin{aligned} S_d - s_d &= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(x_{i+1} - x_i) \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\delta}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{\delta}{b-a}(b-a) = \delta. \end{aligned}$$

Quer dizer que dado $\delta > 0$ é possível encontrar uma decomposição d de $[a, b]$ tal que $S_d - s_d < \delta$, o que equivale a dizer que f é integrável em $[a, b]$.
Para ver que a condição do enunciado não é necessária para que f seja integrável, basta considerar a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq x_0, \\ 1, & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

onde $x_0 \in [a, b]$. A função f é integrável mas não existe uma decomposição d de $[a, b]$ tal que a oscilação de f em cada um dos subintervalos de $[a, b]$ determinados por d seja menor do que 1 pois em qualquer subintervalo que contenha x_0 a oscilação de f será igual a 1.

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

6.2 A cada aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos associar as aplicações f^+ e f^- (designadas por *parte positiva* e *parte negativa* de f, respectivamente) pelas seguintes definições:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

a) Indique uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f^+ seja integrável em $[0, 1]$ e f^- não o seja.

b) Indique uma aplicação $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g^+ + g^-$ seja integrável em $[0, 1]$ e g não o seja.

6.3 Mostre que a integrabilidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $[a, b]$ implica a integrabilidade de f^2 em $[a, b]$.
Observação: Prove-o directamente, isto é, não utilize o conhecimento de que o produto de duas funções integráveis num intervalo é integrável nesse intervalo.

(Pergunta 6 da Prova de 12/3/74)

6.4 Seja φ uma função integrável em $[0, 1]$ e $\phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$ com $a \in [0, 1]$. Justifique que ϕ é integrável em $[0, 1]$ e mostre que existe $b \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 \phi(t)\, dt = \int_a^b \varphi(t)\, dt.$$

(Na resolução desta alínea poderá ser-lhe útil recorrer ao teorema da média).

(Grupo IVb do 1º Teste de 11/9/78)

Resolução: Sendo φ integrável em $[0, 1]$, a função ϕ é contínua em $[0, 1]$ e portanto integrável em $[0, 1]$. Existe por isso $b \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 \phi(t)\, dt = \phi(b)(1 - 0) = \phi(b) = \int_a^b \varphi(t)\, dt.$$

6.5 Sejam f e φ definidas em $[a, b]$ maiores ou iguais a 0 e integráveis em $[a, b]$. Suponha-se que φ é crescente e designe-se por $\varphi(b^-)$ o $\lim_{x \to b^-} \varphi(x)$.

1) Mostre que: $\exists_{c \in [a,b]} : \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(b^-) \int_c^b f(x)\, dx$.

2) A igualdade seria válida se substituissemos $\varphi(b^-)$ por $\varphi(b)$?

3) Mostre que se φ é estritamente crescente em $]a, b[$ e $\int_a^b f(x)\, dx \neq 0$ então c deverá ser diferente de a e de b.

(Grupo IV do 1º Teste de 11/9/79)

6.2 Teorema fundamental. Regra de Barrow

6.6 Seja f uma função duas vezes diferenciável e tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ são positivas em todo o ponto $x \in \mathbb{R}$; seja ainda

$$g(x) = \int_0^x f(t^2)\, dt, \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}.$$

Justifique que g é três vezes diferenciável, calcule $g''(x)$ e $g'''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ e aproveite o resultado para estudar, quanto à concavidade e inflexões, o gráfico de g.

(Pergunta 4a do Ponto nº5 de 25/10/71)

Resolução: Como f é contínua em $\mathbb{R}$ tem-se em $\mathbb{R}$, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*, $g'(x) = f(x^2)$. Como f é duas vezes diferenciável segue do *Teorema de Derivação da Função Composta* que:

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2f'(x^2)x, \\ g'''(x) &= f''(x^2)(2x)^2 + f'(x^2)2 = 4f''(x^2)x^2 + 2f'(x^2). \end{aligned}$$

O estudo da concavidade e inflexão de g pode fazer-se através do sinal de $g''(x)$: como $f'(x)$ e $f''(x)$ são positivas: $g''(x) > 0$ se $x > 0$, $g''(x) < 0$ se $x < 0$. Para $x > 0$, a concavidade está voltada para cima, para $x < 0$, voltada para baixo. Em $x = 0$ há pois um ponto de inflexão ($g''(0) = 0$ e $g'''(0) > 0$).

6.7 Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável no ponto 0,

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

e $h = g \circ g$, calcule $h'(0)$, expresso em $f(0)$ e $f'(0)$.

(Pergunta 3b do Ponto nº 1 de 1/10/71)

6.8 Sendo f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$,

a) Justifique que a igualdade:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

define uma função F, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

b) Sendo $\varphi = F \circ F$ (isto é, $\varphi(x) = F[F(x)], \forall_{x\in\mathbb{R}}$), prove que, se $f(x) < 0, \forall_{x\in\mathbb{R}}$, φ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

c) Calcule $\varphi'(0)$ e $\varphi''(0)$, em função de $f(0)$ e $f'(0)$.

(Pergunta 4 da Prova de 20/2/71)

6.9 Prove que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, verificando a condição

$$\int_0^x f(u)\,du = xf(x), \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

então f é constante. [**Sugestão**: derive ambos os membros da igualdade anterior.)

(Pergunta 4a da Prova de 23/1/73)

6.10 Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ prove que, se é nulo o integral de f em *qualquer* intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Mostre, por meio de exemplos, que a conclusão precedente poderia ser falsa em qualquer das duas hipóteses seguintes:

1. Se, em lugar de supor f contínua em $\mathbb{R}$, se suposesse apenas que f era integrável em qualquer intervalo limitado;

2. Se, em vez de supor que é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, se admitisse que era nulo o integral de f em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ com comprimento igual a 1.

(Pergunta 4b da Prova de 2ª época de 8/1/73)

6.11 Sendo φ uma função contínua em $\mathbb{R}$, e para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt,$$

calcule $\phi'(x)$ e $\phi''(x)$. Justifique todos os passos dos cálculos efectuados.

(Pergunta 4a da Prova de 4/11/72)

6.12 Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ tal que $g(1) = 5$ e $\int_0^1 g(t)\,dt = 2$.
Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,dt.$$

Mostre que f admite derivadas contínuas em $\mathbb{R}$ até à 3ª ordem e calcule $f''(1)$ e $f'''(1)$.

(Grupo III da Prova de 23/3/77)

Resolução:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x^2 - 2xt + t^2) g(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 \int_0^x g(t)\,dt - x\int_0^x tg(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)\,dt. \end{aligned}$$

As funções $g(t), tg(t), t^2g(t)$ são contínuas em $\mathbb{R}$ pelo que, pelo *teorema fundamental do Cálculo*:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x\int_0^x g(t)\,dt + \frac{1}{2}x^2 g(x)\right) - \left(\int_0^x tg(t)\,dt + x^2 g(x)\right) + \frac{1}{2}x^2 g(x) \\ &= x\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x tg(t)\,dt, \\ f''(x) &= \int_0^x g(t)\,dt + xg(x) - xg(x) = \int_0^x g(t)\,dt \\ f'''(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Tem-se pois $f''(1) = \int_0^1 g(t)\,dt = 2$ e $f'''(1) = g(1) = 5$.

6.13 Calcule $\varphi'(x)$ sendo $\varphi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$.

(Grupo II1c da Prova de 18/7/77)

6.14 Seja φ a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula $\varphi(x) = \int_{\cos x}^{x^3+1} e^{-t^2}\,dt$. Indique, justificando, os valores de $\varphi(0)$ e $\varphi'(0)$.

(Grupo IIa da Prova de 25/9/79)

6.15 Demonstre que, se f é contínua em $\mathbb{R}$ e se

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = 0, \text{ para todo o } x \in \mathbb{R},$$

então f é uma função ímpar. Dê um exemplo de uma função g definida em $\mathbb{R}$, verificando a condição $\int_{-x}^x g(t)\,dt = 0, \forall_{x\in\mathbb{R}}$, e que não seja ímpar.

6.16 Calcule
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}.$$

(Grupo Ib da Prova de 28/2/74)

6.17 Determine o seguinte limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{-t^2}\, dt}{1-e^{-x^2}}.$$

(Grupo II1c da Prova de 2/12/76)

Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando sucessivamente a regra de Cauchy:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{-t^2}\, dt}{1-e^{-x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-t^2}\, dt + xe^{-x^2}}{e^{-x^2}2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+\left(e^{-x^2}-xe^{-x^2}2x\right)}{-e^{-x^2}4x^2+e^{-x^2}2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}(1-x^2)}{e^{-x^2}(2-4x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2)}{2-4x^2} = 1.\end{aligned}$$

6.18 Calcule
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^5\, dt}{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2\, dt}.$$

(Grupo IIc do 2º Teste de 28/7/80)

6.19 a) Determine o valor da constante real K, por forma a que $f'(1)=0$, sendo
$$f(x)=\int_{x^2}^{K\log x} e^{-t^2}\, dt.$$

b) Determine uma função g de classe C^2 que satisfaça as seguintes condições:
$$\int_0^x g''(t)\, dt = x^3+x \quad\wedge\quad g'(0)=g(0)=1.$$

(Grupo III da Prova de 22/9/78)

Resolução:

a) Para derivar f fazemos a seguinte observação: sendo $f(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(t)\, dt$ com g contínua num intervalo, φ_1, φ_2 funções com valores nesse intervalo e a um qualquer ponto desse intervalo, tem-se $f(x)=\int_a^{\varphi_2(x)} g(t)\, dt - \int_a^{\varphi_1(x)} g(t)\, dt$. Daí resulta que, sendo φ_1 e φ_2 funções diferenciáveis, e usando o *Teorema Fundamental do Cálculo* e o *Teorema de derivação da Função Composta*:
$$f'(x)=g(\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-g(\varphi_1(x))\varphi_1'(x).$$
Logo, no caso $f(x)=\int_{x^2}^{K\log x} e^{-t^2}\, dt$ vem:
$$f'(x)=e^{-(k\log x)^2}\frac{K}{x}-e^{-x^4}2x$$
e portanto $f'(1)=K-2e^{-1}$. Ter-se-à $f'(1)=0$ se $K=\frac{2}{e}$.

b) Temos $\int_0^x g''(t)\, dt = g'(x)-g'(0)$, isto é, $g'(x)=x^3+x+1$ e portanto $g(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+x+K$ sendo $K=g(0)=1$. Portanto $g(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+x+1$.

6.20 Indique onde está o erro no cálculo seguinte:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}.$$

(Grupo Ic da Prova de 7/74)

Resolução: A regra de Barrow, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ aplica-se a uma função f integrável em $[a,b]$ e com uma primitiva F em $[a,b]$. Ora, embora $F(x) = -\frac{1}{x}$ seja uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto em $[-1,2] \setminus \{0\}$, não é verdade que $F(x)$ seja primitiva de $f(x)$ em $[-1,2]$, logo a fórmula de Barrow não é aplicável pelo que é ilegítimo escrever $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{2}$. Pode de resto observar-se que o integral em causa não existe; visto que a função integranda $\frac{1}{x^2}$, não é limitada no intervalo de integração.

6.21 Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x \cos 2x \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 e^{t+e^t}\, dt.$$

(Note que ambas as funções integrandas são facilmente primitiváveis.)

(Grupo IIa do Exame Final de 18/9/80)

6.22 Estude quanto à existência de assimptotas a função f definida por

$$f(x) = \log x \int_x^{2x} \frac{ds}{s \log s}, \qquad \text{para } x > 1.$$

(Pergunta 4 da Prova de 12/3/74)

6.23 Calcule

$$\int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

(Grupo I2a da Prova de 19/9/77)

6.24 Calcule

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u \, du.$$

(Grupo IIa do Exame de 2/10/80)

6.25 Seja f uma função definida no intervalo $[a,b]$ e que admite segunda derivada contínua nesse intervalo. Exprima $\int_a^b x f''(x)\, dx$ como função dos valores de f e f' nos pontos a e b.

(Grupo IV2 do Exame de 18/7/1977)

6.26 Calcule

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-3}, \qquad \int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx.$$

(Grupo II2 da Prova de 2/12/76)

6.27 Calcule

$$\int_1^e \log x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\, dx.$$

(Pergunta 2a e b da Prova de 23/3/77)

6.28 Calcule

$$\int_2^3 \frac{1}{x^3+x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx.$$

(Grupo Ia do 2º Teste de 28/7/80)

6.29 Calcule

$$\int_1^2 \frac{4x-4}{x^4+4x^2}\,dx.$$

(Grupo IIa da Prova de 11/9/78)

6.30 Calcule

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx.$$

(Grupo Ic da Prova de 28/2/74)

6.31 Sendo $f'(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ e $f(0) = 1$, calcule:

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

(Pergunta 3a da Prova de 20/7/71)

6.32 Calcule o integral

$$\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\,dt.$$

(Grupo II da Prova de 20/7/78)

6.33 Calcule

$$\int_0^1 \frac{e^t+4}{e^{2t}+4}\,dt.$$

(Grupo Ic do Exame de 2ª época de 11/2/80)

6.34 Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8\operatorname{tg} x}{3+\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$$

(Grupo Ib da Prova de 18/9/79)

6.35 Calcule

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$$

(Grupo 1a da Prova de 18/12/72)

Resolução: Uma maneira de calcular o integral é observar que $x \mapsto \cos x$ é uma bijecção de $[0, \pi]$ em $[-1, 1]$ e usar a mudança de variável $y = \cos x$.
Tem-se então, designando o integral que pretendemos calcular por I:

$$\begin{aligned} I \equiv \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2 - \operatorname{sen}^2 x}\,dx &= \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 - \operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \operatorname{sen} x\,dx \\ &= -\int_1^{-1} \frac{1 - y^2}{1 + y^2}\,dy = \int_{-1}^1 \frac{1 - y^2}{1 + y^2}\,dy. \end{aligned}$$

Ora $\frac{1-y^2}{1+y^2} = -1 + \frac{2}{1+y^2}$ e daí $\int \frac{1-y^2}{1+y^2}\,dy = -y + 2 \operatorname{arctg} y$. Quer dizer:

$$\begin{aligned} I &= [-y + 2 \operatorname{arctg} y]_{-1}^1 = (-1 + 2 \operatorname{arctg} 1) - (1 + 2 \operatorname{arctg}(-1)) \\ &= \left(-1 + 2\frac{\pi}{4}\right) - \left(1 - 2\frac{\pi}{4}\right) = -2 + \pi = \pi - 2. \end{aligned}$$

6.36 Aplicando a regra de Barrow prove que, sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c - x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Pergunta 4a da Prova de 5/7/71)

6.37 Seja F uma função contínua em $\mathbb{R}$ e sejam a, b, c números reais com $c \neq 0$. Mostre que

$$\int_a^b F(x)\,dx = c \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} F(cx)\,dx.$$

(Grupo IV da Repetição do 1º Teste de 22/9/78)

6.38 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a um ponto de $\mathbb{R}$. Mostre que:

a) Se f é par, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2 \int_0^a f(x)\,dx$.

b) Se f é ímpar, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

(Grupo IV1 do Exame de 18/7/1977)

6.39 Sendo φ diferenciável em $\mathbb{R}$, f contínua em $\mathbb{R}$ e h definida pela fórmula seguinte

$$h(x) = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2 f(t)\,dt,$$

calcule $h'(x)$. Supondo agora que φ e f são ímpares, mostre que h é par.

(Grupo IIb da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

Resolução:

$$\begin{aligned} h'(x) =& \frac{d}{dx} \left(x^2 \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} f(t)\,dt \right) \\ =& 2x \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} f(t)\,dt + x^2 (f(\varphi(x^3))\varphi'(x^3) 3x^2 - f(\varphi(x))\varphi'(x)). \end{aligned}$$

Ora se φ e f são ímpares, tem-se, usando a mudança de variável $t = -u$:

$$\begin{aligned} h(-x) &= \int_{\varphi(-x)}^{\varphi(-x^3)} x^2 f(t)\, dt = \int_{-\varphi(x)}^{-\varphi(x^3)} x^2 f(t)\, dt \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2 f(-u)(-1)\, du = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2\, f(u)\, du = h(x), \end{aligned}$$

pelo que h é par.

6.40 Considere a função φ definida no intervalo $]0, +\infty[$ pela fórmula

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t\, dt.$$

a) Calcule $\varphi(2)$.

b) Mostre que φ é diferenciável (em todo o seu domínio) e, supondo $x > 0$, indique, justificando, o valor de $\varphi'(x)$.

c) Estude a função φ sob o ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto c do domínio de φ satisfazendo a condição $\varphi(c) = 0$.

(Pergunta 2 da Prova de 23/1/72)

6.41 Considere a função F definida pela igualdade

$$F(x) = \int_1^x \frac{1 + \sqrt[3]{u^2}}{3u(1 + \sqrt[3]{u})^2}\, du$$

no conjunto dos valores reais de x para os quais tem sentido o integral do segundo membro.

a) Calcule $F'(3)$ e $F''(3)$.

b) Calcule $F(3)$.

c) Indique o domínio de F, sob a forma de intervalo, e justifique que é efectivamente esse o domínio.

(Pergunta 3 da Prova de 8/1/73)

6.42 a) Seja g a função definida pela fórmula $g(x) = \int_0^{\log x} x\, e^{t^2}\, dt$. Mostre que $g''(1) = 1$.

b) Seja h uma função definida em $\mathbb{R}$, contínua, ímpar e estritamente crescente e seja H a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$H(x) = \int_0^x h(t)\, dt.$$

Justifique que H é diferenciável em $\mathbb{R}$, que é função par, que tem um mínimo absoluto no ponto zero, e determine os intervalos de monotonia de H.

(Grupo III da Prova de 11/9/78)

6.43 a) Justifique que a igualdade (onde surge um integral que *não* deverá calcular)

$$\varphi(x) = \int_0^x (2 + \operatorname{sen} t^2)\, dt$$

define uma função φ indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$.
Mostre que φ é estritamente crescente e estude o sinal de $\varphi(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$.
Será φ par? E ímpar? Justifique.

b) Considere a função ϕ definida em $\mathbb{R}$ pela equação seguinte

$$\phi(x) = \int_x^{x^2-1} e^{\operatorname{sen} t}\, dt.$$

Determine a função derivada.

(Grupo IV de 20/7/78)

6.44 Seja f uma função diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Considere, para cada $h \neq 0$, uma nova função F_h definida por

$$F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\, du.$$

Como sabe, $F_h(x)$ representa o valor médio de f no intervalo $[x, x+h]$.

a) Em que pontos do seu domínio é F_h diferenciável?
Justifique a resposta e determine a derivada $F_h'(x) = \frac{d}{dx}(F_h(x))$.

b) Para cada valor de x, $F_h(x)$ e $F_h'(x)$ dependem de h. Considere então, para um dado $x = a$, duas outras funções, φ e ψ, definidas respectivamente pelas igualdades $\varphi(h) = F_h'(a)$ e $\psi(h) = F_h(a)$, $\forall_{h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Determine

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h) \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0}\psi(h).$$

(Pergunta 4 da Prova de 6/7/71)

6.45 Como sabe, diz-se que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem período a sse $f(x+a) = f(x)$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$.
Supondo que a função contínua f tem período a e que g é uma primitiva de f (em $\mathbb{R}$), mostre que a função $g(x+a)-g(x)$ é constante; aproveite o resultado para provar que, sendo f uma função contínua que tenha período a, as primitivas de f terão também esse período sse $\int_0^a f(x)\, dx = 0$.

(Grupo IIIa do 2º Teste de 28/7/80)

6.46 a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \log(1+t^2)\, dt$. Sem efectuar qualquer integração prove que $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$ (qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$) e determine os valores de x, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$ e tais que a tangente ao gráfico de φ no ponto $(x, \varphi(x))$ seja horizontal; indique ainda, justificando, quais desses valores são pontos de máximo ou de mínimo para a função φ.

b) Sejam u e v funções contínuas em $\mathbb{R}$, tais que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^x u(t)\, dt = \int_b^x v(t)\, dt,$$

onde a e b são números reais. Prove que $u = v$ e que $\int_a^b u(x)\, dx = 0$.

c) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, & \text{se } x \neq 0, \\ f(0), & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Prove que F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável na origem.

(Grupo III da Prova de 28/6/79)

6.47 Sejam f e φ duas funções que admitam segundas derivadas contínuas em $\mathbb{R}$ e seja

$$F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)\, dt.$$

a) Exprima $F'(x)$ e $F''(x)$ em termos das derivadas de f e φ.

b) Supondo que $f(x) > 0$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ e $\varphi''(x) \neq 0$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$, mostre que os pontos de máximo de F coincidem com os de φ e os pontos de mínimo de F coincidem com os pontos de mínimo de φ.

c) Mostre por meio de um exemplo que, omitindo a hipótese $f(x) > 0$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$, F pode admitir máximos e mínimos em pontos onde φ não admita extremos.

(Grupo II do Exame de 2ª época de 7/2/79)

6.48 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e ϕ o seu integral indefinido com origem no ponto 0.

a) Se ϕ tem máximo no ponto a, qual é o valor de $f(a)$? Justifique cuidadosamente a resposta.

b) Prove que, se $\phi(c) = 0$, sendo $c \neq 0$, f tem pelo menos uma raíz real, com o mesmo sinal de c.

c) Mostre que, sendo $a > 0$ e $I = [0, a]$,

$$\max_{x\in I} |\phi(x)| \leq a \max_{x\in I} |f(x)|$$

e dê um exemplo de uma função f para a qual se verifique a igualdade, qualquer que seja o ponto $a > 0$.

(Pergunta 4 da Prova de 2ª época de 18/12/72)

Resolução:

a) Sendo f contínua em $\mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, sendo $\phi'(x) = f(x)$. Ora se uma função ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem um máximo em a então necessáriamente $\phi'(a) = 0$, pelo que $f(a) = 0$.

b) O teorema do valor médio e a continuidade de f garantem que existe um α no intervalo de extremos 0 e c tal que $\int_0^c f(t)\, dt = f(\alpha)(c - 0)$. Ora, se $\phi(c) = 0$, então $f(\alpha)c = 0$ e, como $c \neq 0$, tem-se $f(\alpha) = 0$. Como α está no intervalo entre 0 e c, tem o sinal de c.

c) Para todo o $x \in I$ tem-se $|\phi(x)| = \left|\int_0^x f(t)\, dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|\, dt \leq \int_0^a |f(t)|\, dt \leq a \max_{t\in I} |f(t)|$. Logo $\max_{t\in I} |\phi(x)| \leq a \max_{t\in I} |f(t)|$. Qualquer função constante verifica a igualdade.

6.49 Supondo que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, os valores $f(x)$ e $f'(x)$ são ambos negativos, considere a função g definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\, dt.$$

1. Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raízes da equação $g(x) = 0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g.

2. A função g é majorada? E minorada? Justifique.

(Grupo IIIa do Exame de 2/10/80)

6.50 Sendo φ uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ e

$$\Psi(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\, dt, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

1. Estude o sinal de $\Psi(x)$.
2. Justifique que Ψ é diferenciável e calcule Ψ'.
3. Prove que Ψ é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$.
4. Justifique que Ψ tem mínimo (absoluto) e, designando esse mínimo por m, prove que se verifica necessáriamente a relação:

$$|m| \leq \frac{1}{4} \max_{x\in[0,1]} \varphi(x).$$

(Grupo IIIb do 2º Teste de 28/7/80)

6.51 Sendo $\varphi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ se $x \neq 0$ e $\varphi(0) = 0$, considere a função g, definida pela fórmula: $g(x) = \int_0^x \varphi(u)\, du \quad (x \in \mathbb{R})$. Nestas condições:

1. Justifique que a função g é ímpar.
2. Determine $g'(x)$ para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$; justifique as respostas.
3. Indique as abcissas dos pontos em que o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.
4. Justifique que g é limitada.

(Grupo IIIb do Exame Final de 18/9/80)

6.52 Justifique que a fórmula

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}}\, dt$$

define uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que φ é uma função par. Calcule a derivada de φ nos seus pontos de diferenciabilidade, e estude φ quanto ao crescimento e convexidade.

Sendo a um número positivo tal que $e^x > x^4$ para todo o $x > a$, determine em função de a, um majorante do $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

(Grupo IVb da Prova de 18/9/79)

6.53 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x) > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ e seja

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}$. Qual é o valor da derivada de g num ponto $a \in \mathbb{R}$?

b) Mostre que g é estritamente crescente e que, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xg(x) > 0$.

c) Prove que, se $f(x)$ tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e mostre, por meio de exemplos, que, se $f(x)$ tender para zero quando $x \to +\infty$, o limite de $g(x)$ quando $x \to +\infty$ pode ser finito ou $+\infty$.

(Pergunta 4 da Prova de 1/8/72)

6.54 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e seja g a função definida pela fórmula

$$g(x) = \int_0^{x+1} f(t)\,dt, \qquad \forall_{x \in \mathbb{R}}.$$

a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e indique, justificando, o valor de $g'(x)$.

b) Prove que, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então também $\lim_{x\to+\infty}[g(x) - g(x-1)] = 0$.

c) Mostre, por meio de um exemplo, que pode verificar-se a igualdade

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x) - g(x-1)] = 0$$

sem que $f(x)$ tenha limite quando $x \to +\infty$.

(Pergunta 4 da Prova de 4/9/72)

6.55 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e g a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pela igualdade

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)\,dt.$$

a) Indique o valor de $\lim_{x\to 0} g(x)$. Justifique cuidadosamente a resposta.

b) Prove que g é uma função constante (em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) se e só se f também o é (em $\mathbb{R}$).

c) Prove que o contradomínio de g está contido no de f.

d) Sendo α um dado número real, dê um exemplo de uma função f (contínua em $\mathbb{R}$) sem limite quando $x \to +\infty$ e tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \alpha$.

(Pergunta 4 da Prova de 11/10/72)

Resolução:

a) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, o seu integral indefinido é diferenciável usando o *Teorema Fundamental do Cálculo*, permitindo usar a *regra de Cauchy* para obter:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0).$$

b) Se g for constante e igual a k vem: $\int_0^x f(t)\,dt = kx$ e por derivação $f(x) = k$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se f for constante o cálculo do integral permite obter que g toma o mesmo valor constante.

c) Se α pertence ao contradomínio de g 3ntão existe $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $\alpha = g(\beta)$ e portanto, usando o *teorema do valor médio* e a continuidade de f vem $\alpha = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta f(t)\,dt = \frac{1}{\beta}(\beta - 0)f(\xi) = f(\xi)$; logo α pertence ao contradomínio de f.

d) Seja $f(t) = \alpha + \cos t$. Então não existe $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ e, no entanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (\alpha + \cos\, t)\,dt = \alpha + \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \alpha.$$

6.56 Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

a) Determine o seu domínio e mostre que é par.

b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.

c) Mostre que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f|_{]0,\varepsilon[}$ é monótona e limitada.

d) Que pode concluir quanto à existência de limite da função f na origem?

(Grupo III da Prova de 4/2/80)

6.57 Seja f uma função real definida e diferenciável no intervalo $[0, +\infty[$ e tal que:

$$f(0) = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \qquad f'(x) > 0 \quad \forall_{x\in[0,+\infty[}.$$

1. Mostre que f^{-1} é integrável no intervalo $[0, b]$, $\forall_{b>0}$.
2. Prove (analiticamente) que, qualquer que seja $t \in [0, +\infty[$

$$tf(t) = \int_0^t f + \int_0^{f(t)} f^{-1}$$

e aproveite o resultado para mostrar que, quaisquer que sejam $a, b \in [0, +\infty[$

$$ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}.$$

(Grupo IVb do Exame Final de 25/9/78)

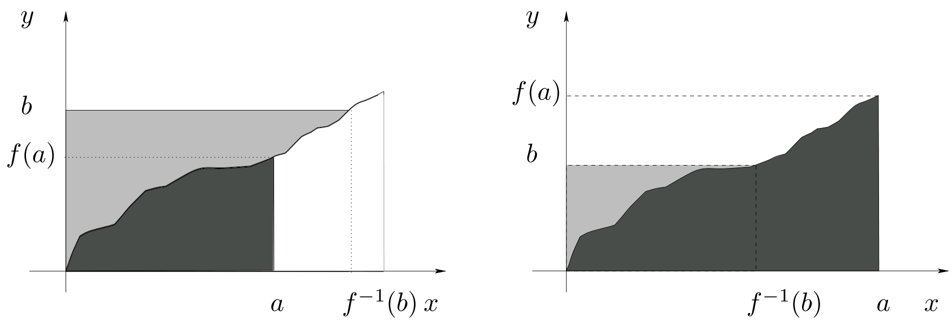

Figura 6.1: Os casos $b > f(a)$ e $b < f(a)$.

Resolução:

1. Nas condições do enunciado, f é uma função estritamente crescente e contínua em $[0, +\infty[$. Além disso, como $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ e $f(0) = 0$, o *teorema do valor intermédio* garante que o seu contradomínio é $[0, +\infty[$. Assim, existe $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Pelo teorema de continuidade da inversa, f^{-1} também é contínua e portanto integrável em qualquer intervalo $[0, b]$ com $b > 0$.

2. Considere-se $\int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\, du$ e façamos neste integral a mudança de variável $u = f(v)$. Obtemos:

$$\int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\, du = \int_0^t f^{-1}(f(v))f'(v)\, dv = \int_0^t vf'(v)\, dv$$
$$= vf(v)|_0^t - \int_0^t f(v)\, dv = tf(t) - \int_0^t f(v)\, dv.$$

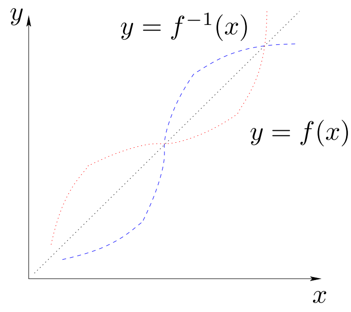

Figura 6.2: Simetria do gráfico de uma função f e da sua inversa f^{-1} relativamente à bissectriz do 1º quadrante.

Então $tf(t) = \int_0^t f(v)dv + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du$. Se interpretarmos graficamente os números $\int_0^a f$ e $\int_0^b f^{-1}$ veremos que eles correspondem às medidas das áreas a diferentes tons de cinzento na figura 6.1.

Esta interpretação geométrica resulta do facto dos gráficos de f e f^{-1} se relacionarem (uma vez escolhidas as mesmas unidades de medida nos dois eixos), através de uma simetria em relação à bissectriz do primeiro quadrante como se ilustra na figura 6.2.

No caso de ser $b = f(a)$ é claro que:

$$ab = af(a) = \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} = \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}.$$

Se $b > f(a)$:

$$\begin{aligned}
ab &= a(f(a) + b - f(a)) = af(a) + a(b - f(a)) \\
&= \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} + \int_{f(a)}^b f^{-1}(f(a))\,dt \\
&\le \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} + \int_{f(a)}^b f^{-1} \\
&= \int_0^a f + \int_0^b f^{-1},
\end{aligned}$$

em que no penúltimo passo usámos o facto de f^{-1} ser crescente.

Se $b < f(a)$ (e portanto $f^{-1}(b) < a$):

$$\begin{aligned}
ab &= (f^{-1}(b) + a - f^{-1}(b))b = f^{-1}(b)b + (a - f^{-1}(b))b \\
&= \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_0^{f(f^{-1}(b))} f^{-1} + (a - f^{-1}(b))b \\
&= \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_0^b f^{-1} + (a - f^{-1}(b))b \\
&\le \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_0^b f^{-1} + \int_{f^{-1}(b)}^a f \\
&= \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_{f^{-1}(b)}^a f + \int_0^b f^{-1} \\
&= \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}.
\end{aligned}$$

onde também utilizámos o teorema do valor médio, o facto de f ser crescente e a desigualdade:

$$\int_{f^{-1}(b)}^{a} f \geq (a - f^{-1}(b)) \min_{[f^{-1}(b),a]} f = (a - f^{-1}(b)) f(f^{-1}(b)) = (a - f^{-1}(b))b.$$

Se $b > f(a)$ podemos usar o caso anterior aplicado a f^{-1}.

6.58 a) Para cada $\alpha > 0$ e cada $x \geq 0$ existe $\int_0^\alpha t^x e^{-t}\,dt$. Porquê?

b) Mostra-se que existe $\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^\alpha t^{x-1}e^{-t}\,dt$ (para $x \geq 1$) e representa-se por $\Gamma(x)$. Mostre que tem lugar a relação $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x \geq 1$. Calcule $\Gamma(1)$. O que pode dizer de $\Gamma(n)$ com $n \in \mathbb{N}_1$?

(Grupo IVb da Prova de 7/74)

6.59 Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, designa-se por $I_a f$ o integral indefinido de f com origem no ponto a.

a) Utilizando o método de integração por partes, mostre que $I_a(I_a f)$ (que designaremos por $I_a^2 f$) é dado pela seguinte expressão:

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t)\, f(t)\,dt.$$

b) Sendo D o operador de derivação, mostre que

$$D(I_a f) = f \quad \text{e} \quad D^2(I_a^2 f) = f.$$

c) Supondo agora f com segunda derivada contínua em $\mathbb{R}$, mostre que $I_a^2(D^2 f)$ é o resto da fórmula de Taylor resultante da aproximação de f pelo seu polinómio de Taylor de grau ≤ 1 no ponto a. [**Sugestão**: pode ser-lhe útil o resultado obtido na alínea a) e uma nova utilização da integração por partes].

(Grupo III da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

Resolução:

a) Como $(I_a f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ vem

$$\begin{aligned}(I_a(I_a f))(x) &= \int_a^x \left(\int_a^t f(u)\,du\right) dt = \int_a^x (1 \int_a^t f(u)\,du)\,dt \\ &= t\int_a^t f(u)\,du|_a^x - \int_a^x t f(t)\,dt = x\int_a^x f(u)\,du - \int_a^x t f(t)\,dt \\ &= \int_a^x x f(t)\,dt - \int_a^x t f(t)\,dt = \int_a^x (x-t) f(t)\,dt.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(D(I_a f))(x) &= D\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \\ (D^2(I_a^2 f))(x) &= D^2\left(\int_a^x (x-t) f(t)\,dt\right) = \\ &= D^2\left(x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x t f(t)\,dt\right) = \\ &= D\left(\int_a^x f(t)\,dt + x f(x) - x\, f(x)\right) = f(x)\end{aligned}$$

c) Da alínea (a) temos:

$$\begin{aligned}(I_a^2 f'')(x) &= \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = (x-t)f'(t)]_a^x - \int_a^x (-1)f'(t)\,dt\\ &= -(x-a)f'(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = -(x-a)f'(a) + f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Então $f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+(I_a^2 f'')(x)$, o que permite concluir imediatamente que $I_a^2 D^2 f$ é o resto da fórmula de Taylor referida no enunciado.

6.3 Cálculo de áreas, comprimentos de linha e volumes de sólidos de revolução

6.60 Calcule a área da região plana definida pelas seguintes condições:

$$\begin{cases} y < e^x, \\ y > \log x, \\ 1 \le x \le e. \end{cases}$$

(Grupo I1 da Prova de 2/12/76)

Resolução: Como temos $e^x > \log x$ para todo o $x > 0$ a área é dada por

$$\int_1^e (e^x - \log x)\,dx = [e^x - x(\log x - 1)]\,|_1^e = e^e - e - 1.$$

6.61 Calcule a área da região plana definida pelas condições $x^2 + y^2 \le 4$ e $y \ge \sqrt{3}x^2$.

(Grupo IIb da Prova de 11/9/78)

6.62 Calcule a área da região do plano XOY limitada pelo gráfico da função $y = \operatorname{arctg} x$ e pelas rectas de equação $x = 1$ e $y = 0$.

(Pergunta 4a da Prova de 7/74)

6.63 Determine a área da região plana constituída pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \le y \le \frac{\pi}{4}, \quad y \ge \frac{\pi}{16}x^2, \quad y \le \operatorname{arctg} x.$$

(Grupo Ic da Prova de 4/2/80)

6.64 Calcule a área da região contida no semiplano $x \ge 0$ e limitada pelas linhas de equações $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = \frac{\pi}{4}x$.

(Pergunta 2b do Ponto nº 5 de 25/10/71)

6.65 Calcule a área do conjunto $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ x \operatorname{arctg} x \le y \le \frac{\pi}{4}x\}$.

(Grupo IIc do Exame Final de 18/9/80)

6.66 Calcule a área da região plana limitada pelas linhas de equações $x = 0$, $x = 2y$ e $y = \frac{1}{1+x^2}$.

(Grupo Ia da Prova de 18/9/79)

6.67 Determine a área do conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições: $0 \leq x \leq 1$ e $\operatorname{arcsen} x \leq y \leq 2 \operatorname{arctg} x$.

(Grupo IIa do 2º Teste de 28/7/80)

6.68 Calcule a área do conjunto limitado pelos arcos das curvas de equações $y = x^2$ e $y = x^2 \cos x$ compreendidos entre a origem e o ponto de menor abcissa positiva em que as duas curvas se intersectam.

(Pergunta 2b do Ponto nº 2 de 1/10/71)

Resolução: Os pontos de intersecção dos dois gráficos têm por abcissas as soluções da equação $x^2 = x^2 \cos x$ que são $x = 0$ e $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. O ponto de intersecção de menor abcissa positiva é pois $x = 2\pi$. A área pedida é então:

$$A = \int_0^{2\pi} (x^2 - x^2 \cos x)\, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx = \frac{8\pi^3}{3} - \int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx.$$

Ora

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x\, dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx \\ &= x^2 \operatorname{sen} x - 2 \left(x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \right) = \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

pelo que $A = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi$.

6.69 Calcule a área do conjunto dos pontos $P(x, y)$, cujas coordenadas verificam as condições $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq \cos(\log x)$. (Na primitivação pode utilizar de início a substituição $x = e^t$).

(Pergunta 2b da Prova de 11/10/72)

6.70 Calcule a área da região do plano limitada pelos arcos das curvas de equações:

$$y = \log x \text{ e } y = \log^2 x$$

compreendidos entre os pontos de intersecção das duas curvas.

(Grupo IIb do Exame de 2/10/80)

6.71 Calcule o valor de $a \in [1, +\infty[$ por forma a que a área da parte colorida na figura 6.3 seja igual a π.

(Grupo Ib do Exame de 2ª época de 7/2/79)

Resolução: Designando a área pretendida por A temos

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^{1} \left(a\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - x^2} \right) dx = \int_{-1}^{1} (a - 1)\sqrt{1 - x^2}\, dx \\ &= (a - 1) \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = (a - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t\, dt \\ &= (a - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt.\end{aligned}$$

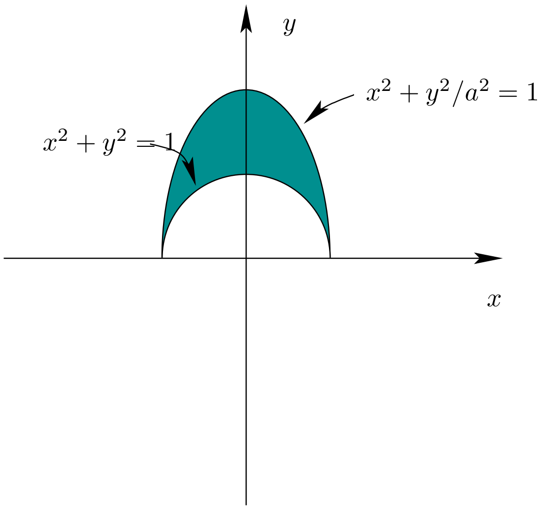

Figura 6.3: A figura do exercício 6.71.

Ora $\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t)$ pelo que:

$$\begin{aligned} A &= (a-1)\left[\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (a-1)\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\,\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(-\pi)\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{2}(a-1). \end{aligned}$$

Querendo que $\frac{\pi}{2}(a-1) = \pi$ terá de ser $a = 3$.

6.72 Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições:

$$|x| \le 1 \qquad \wedge \qquad 0 \le y \le \sqrt{x^2 - x^4}.$$

(Pergunta 2b da Prova de 4/11/72)

6.73 Considere duas circunferências de raio igual a 1, com centro nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$, que limitam dois círculos no plano.

Determine a área do conjunto reunião desses círculos.

(Pergunta 2b da Prova de 5/7/71)

6.74 Calcule a área do conjunto limitado pelos arcos das curvas de equações $y = x \operatorname{sen} x$ e $y = x \cos x$, compreendidos entre a origem e o ponto de menor abcissa positiva em que as duas curvas se intersectam.

(Pergunta 2a do Ponto nº 1 de 1/10/71)

6.75 Determine a área da "região" do plano definida pelas condições:

$$-\sqrt{x^2+x} \le y \le \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \qquad \text{e} \qquad 0 \le x \le 1.$$

(Grupo IIb do 1º Teste de 11/9/79)

6.76 Determine a área do conjunto de menor área limitado pela elipse de equação:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

e pela parábola $x^2 = 2y$.

(Pergunta 2b da Prova de 6/7/71)

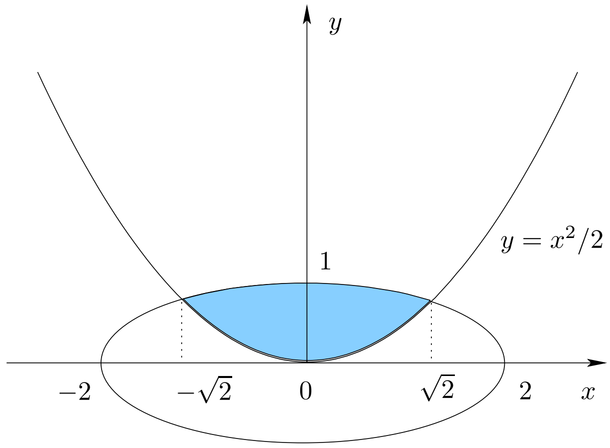

Figura 6.4: O conjunto no exercício 6.76.

Resolução: O conjunto referido é o que está colorido na figura 6.4. Os pontos de intersecção da parábola e da elipse têm por abcissa as soluções da equação $\frac{x^2}{2} = \sqrt{2(1-\frac{x^2}{4})}$ que são $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$.
A área pedida é pois

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Ora

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx = 2 \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - y^2}\, dy = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Logo

$$A = \sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{2}.$$

6.77 Determine a área do conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições: $y^2 - x^2 \geq a^2$ e $|y| \leq a\sqrt{2}$ com $a > 0$.

(Pergunta 3b da Prova de 19/7/71)

6.78 Determine a área do conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições: $x^2 + y^2 \leq 10$ e $|x| + |y| \geq 4$.

(Pergunta 3b da Prova de 20/7/71)

6.79 Seja A o conjunto dos pontos $P(x, y)$ cujas coordenadas verificam as condições:

$$0 \leq y \leq \log x \quad \text{e} \quad x \leq a$$

(onde a designa um número real maior do que 1).

a) Calcule a área de A.

b) Calcule o comprimento da linha (formada por um arco de curva e dois segmentos de recta) que "limita" o conjunto A.

(Pergunta 1 da Prova de 4/9/72)

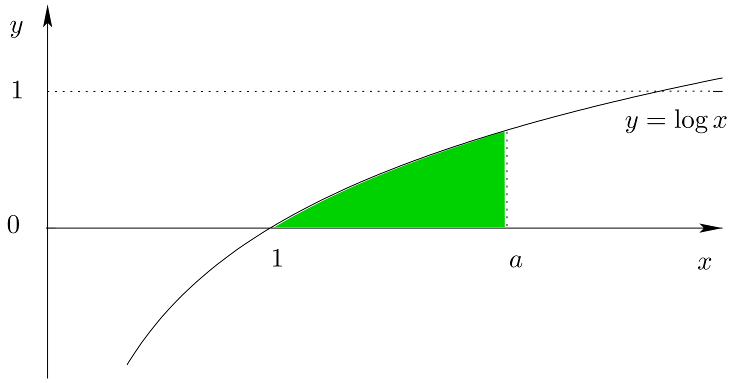

Figura 6.5: A região A no exercício 6.79.

Resolução:

a) A área de A é dada por $\int_1^a \log x\, dx = [x \log x]|_1^a = a \log a$.

b) O comprimento do arco de curva é:

$$C = \int_1^a \sqrt{1 + ((\log x)')^2}\, dx = \int_1^a \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx =$$
$$= \int_1^a \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\, dx = \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\, dx.$$

A substituição $x = \sqrt{t^2-1}$ (que define uma aplicação bijectiva e diferenciável do intervalo $[\sqrt{2}, \sqrt{1+a^2}]$ no intervalo $[1, a]$) conduz a

$$\sqrt{1+x^2} = t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

e portanto

$$C = \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \frac{t^2}{t^2-1}\, dt$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right] dt = \left[t + \frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}}$$
$$= \sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

Os dois segmentos têm comprimentos $a-1$ e $\log a$ pelo que o comprimento total da linha é:

$$(a-1)+\log a+C.$$

6.80 a) Calcule a área da região plana "limitada" pela curva de equação $y=\log x$ e pela recta que intersecta aquela curva nos pontos de abcissa 1 e e.

b) Calcule o comprimento da linha que "limita" essa região.

(Grupo III do 1º Teste de 20/7/78)

6.81 Seja A o conjunto dos pontos $P(x,y)$ cujas coordenadas verificam a condição:

$$x^2 \leq y \leq x+2.$$

a) Calcule a área de A.

b) Calcule o comprimento da linha (formada por um segmento de recta e um arco de parábola) que "limita" o conjunto A.

(Pergunta 1 da Prova de 1/8/72)

6.82 Considere a região plana limitada pelas linhas de equação $y=x+1$ e $y=(x-1)^2$. Calcule:

a) a sua área;

b) o comprimento da linha que limita essa região.

(Pergunta 1b da Prova de 23/2/79)

6.83 Faça um esboço da região plana A definida por:

$$A=\left\{(x,y): -1\leq x\leq 1 \ \wedge \ x^2-1\leq y\leq \arccos x\right\}$$

e determine a sua área. Calcule o comprimento da linha que limita a região

$$B=A\cap\{(x,y): y\leq 0\}.$$

(Grupo II da Prova de 22/9/78)

6.84 Faça um esboço da região plana definida por:

$$A=\left\{(x,y): |\operatorname{sen} x|\leq y\leq \operatorname{ch}^2 x \ \wedge \ 0\leq x\leq 2\pi\right\}$$

e determine a sua área. Calcule o comprimento da linha que "limita superiormente" a região A (de uma forma mais precisa, a linha definida pela equação $y=\operatorname{ch}^2 x$ com $x\in[0,2\pi]$).

Nota — Na resolução desta questão poderão ser-lhe úteis as seguintes igualdades:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sh}(2x)=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x.$$

(Grupo I da Prova de 9/10/78)

6.85 Determine o comprimento do gráfico das seguintes funções, entre os pontos considerados:

a) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{8x^3}$ entre os pontos $x=1$ e $x=2$.

b) $y = \operatorname{ch} x$ entre os pontos de abcissas 0 e x.

(Grupo I2 da Prova de 2/12/76)

6.86 Calcule o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \frac{x-3}{3}\sqrt{x}$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e 1.

(Pergunta 1b do Ponto nº3 de 1/10/71)

6.87 Calcule o comprimento do arco de curva de equação

$$y = \frac{x-6}{3}\sqrt{\frac{x}{2}}$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e 2.

(Pergunta 1b do Ponto nº4 de 1/10/71)

6.88 Calcule o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \log(\cos x)$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e $\frac{\pi}{3}$.

(Pergunta 2a da Prova de 11/10/72)

6.89 Calcule o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e a.

(Pergunta 2c de uma Prova de Análise Matemática II)

6.90 Determine o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \log\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

compreendido entre os pontos de abcissas a e b com $0 < a < b$.

(Grupo IIb do 2º Teste de 28/7/80)

Resolução: O comprimento é dado por:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1 + \left(\left(\log\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'\right)^2}\,dx &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\,\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}\right)^2}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\,dx \\
&= \int_a^b \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx = \int_a^b \frac{2e^{2x}-(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1}\,dx \\
&= \int_a^b -1 + \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = a - b + \log\left(\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}\right).
\end{aligned}$$

6.91 Seja g a função definida em $[0,1]$ por $g(x) = x^2$. Calcule:

a) A área limitada pelo gráfico de g, pelo eixo dos xx e pelas rectas de equações $x = 0$ e $x = 1$.

b) O comprimento do gráfico de g.

c) O volume do sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de g em torno do eixo dos xx.

(Grupo II2 do Exame de 18/7/77)

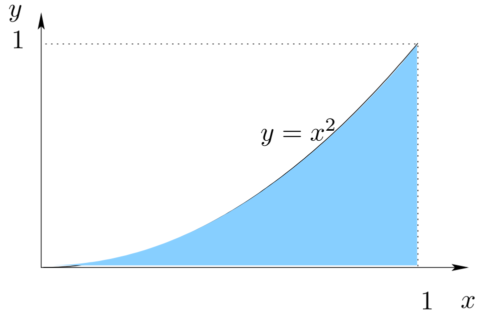

Figura 6.6: A região no exercício 6.91

Resolução:

a) Como $x^2 \geq 0$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

b) O comprimento será dado por (note a mudança de variável $2x = \operatorname{sh} y$):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx \\ &= \int_0^{\operatorname{argsh} 2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}\,\frac{1}{2}\operatorname{ch} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh} 2} \operatorname{ch}^2 y\,dy \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{argsh} 2} (1 + \operatorname{ch} 2y)\,dy = \frac{1}{8}\,(2y + \operatorname{sh} 2y)\Big|_{y=0}^{y=\operatorname{argsh} 2} \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{argsh} 2 + \frac{1}{8} 2 \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} 2)\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} 2) = \frac{1}{4}\operatorname{argsh} 2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

c) O volume será $\pi \int_0^1 g(x)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^4\,dx = \pi\,\frac{1}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{5}$.

6.92 Seja φ a função definida em $\mathbb{R}$ por: $\varphi(x) = \frac{1}{1+|x|}$.

a) Indique o domínio de diferenciabilidade de φ e faça um esboço do seu gráfico.

b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx do gráfico da restrição da função φ ao intervalo $[-1,1]$.

(Grupo IVa e c do Exame de 23/3/1977)

Capítulo 7

Introdução à Análise em $\mathbb{R}^n$

7.1 Topologia e sucessões

7.1 Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x, y) : xy > 1\}$.

1. Indique um ponto interior, um ponto fronteiro e um ponto exterior ao conjunto D e diga se D é aberto, fechado, limitado, conexo. Justifique abreviadamente as respostas.

2. Dê um exemplo de uma sucessão de termos em D que convirja para um ponto não pertencente a D. Seria possível dar um exemplo de uma sucessão cujos termos não pertencessem a D e que convergisse para um ponto deste conjunto? Porquê?

(Grupo Ia do 2º Teste de 30/7/79)

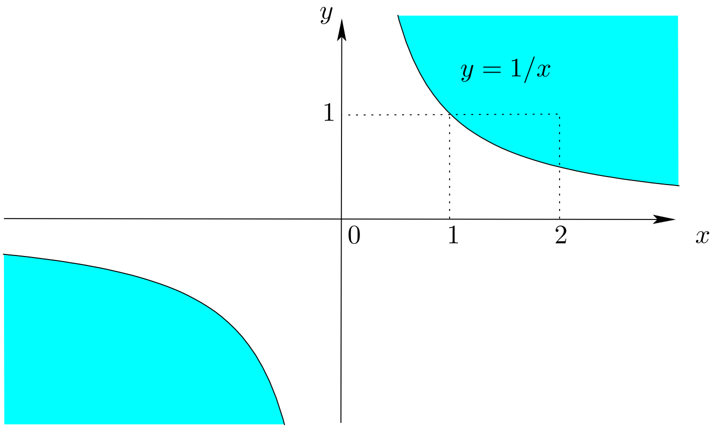

Figura 7.1: O conjunto D no exercício 7.1.

Resolução:

1. O conjunto D é fácil de conceber graficamente: é a região colorida na figura 7.1, não incluindo os ramos de hipérbole. Um ponto interior: $(2,1)$; um ponto fronteiro: $(1,1)$; um ponto exterior: $(0,0)$. D é aberto, pois dado $a \in D$ sempre existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset D$. D não é fechado pois $(1,1) \in \overline{D} \setminus D$. D não é limitado pois não existe nenhuma bola que contenha D, pois, por exemplo, $(\lambda,\lambda) \in D$ para qualquer $\lambda \geq 1$. D não é conexo pois pode exprimir-se como a união de dois conjuntos separados, concretamente $D = D_+ \cup D_-$ com
$$D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, x > 0\},$$
$$D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, x < 0\},$$
$$\overline{D_+} \cap D_- = \emptyset, \qquad \overline{D_-} \cap D_+ = \emptyset.$$

2. $(x_n) = ((1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}))$ é uma sucessão de elementos de D que converge para $(1,1) \notin D$.
Não é possível obter uma sucessão de termos em $\mathbb{R}^2 \setminus D$ que convirja para um ponto de D, pois $\mathbb{R}^2 \setminus D$ é fechado, logo o limite de qualquer sucessão convergente de termos em $\mathbb{R}^2 \setminus D$ estará necessariamente em $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

7.2 Sejam u_n e v_n os termos gerais de duas sucessões de termos em $\mathbb{R}^p$ e suponha que u_n converge para o vector nulo e que v_n é limitada. Nestas condições, prove que a sucessão real $u_n \cdot v_n$ (produto interno de u_n por v_n) converge para 0.

(Grupo IV do 2º Teste de 11/9/79)

7.3 Sendo A o conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$
$$A = \big\{(x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\big\}$$
mostre que qualquer sucessão convergente a_n de termos em A tem como limite um elemento de A.

(Grupo IIIb do Exame de 2ª época de 11/2/80)

7.4 Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$ e suponha-se que A é fechado.

1. Mostre que, se existir $x \in \mathbb{R}^n$, uma sucessão x_m de termos de A e uma sucessão y_m de termos de B tais que $x_m \to x$ e $y_m \to x$, então A e B não são separados.
2. Mostre por meio de um exemplo que a proposição anterior seria falsa se omitissemos a hipótese de A ser fechado.

(Grupo IVa do Exame Final de 25/9/79)

Resolução:

1. Com efeito, tem-se $x \in \overline{A} = A$ (A é fechado) e, por outro lado, $x \in \overline{B}$, logo $x \in A \cap \overline{B}$ donde A e B não são separados.
2. Basta considerar $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ e $x_m = (-\frac{1}{m}, 0)$, $y_m = (\frac{1}{m}, 0)$ pois $x_m \to (0,0)$ e $y_m \to (0,0)$. A e B são porém separados.

7.5 Sejam x_n e v_n os termos gerais de duas sucessões em $\mathbb{R}^p$ e admita que x_n converge para z e que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$. Nestas condições:

1. Justifique que y_n converge para z.
2. Supondo que $A \subset \mathbb{R}^p$ é tal que $x_n \in A$ e $y_n \notin A$ (qualquer que seja n), justifique que z é um ponto fronteiro do conjunto A.

(Grupo IVa do Exame Final de 18/9/79)

7.6 1. Sejam A e B dois subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ verificando a condição seguinte: *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_1$ existem pontos $x_n \in A$ e $y_n \in B$ tais que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$*. Prove que se um dos conjuntos A ou B for limitado, então $A \cap B \neq \emptyset$.

2. Dê um exemplo (em $\mathbb{R}^2$, se preferir) de conjuntos A, B fechados, disjuntos e tais que para todo o $\varepsilon > 0$ existam pontos $x \in A$ e $y \in B$ verificando a condição $\|x - y\| < \varepsilon$.

(Grupo IIIb do 2º Teste de 30/7/79)

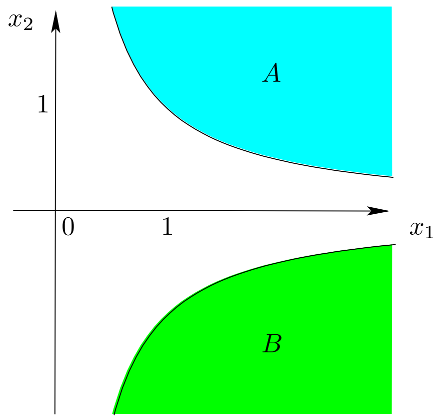

Figura 7.2: Possíveis conjuntos A e B na solução da alínea (b) do exercício 7.6.

Resolução:

1. Suponhamos que A é limitado; então A é um conjunto limitado e fechado pelo que é possível extrair de (x_n) uma subsucessão convergente para certo $x \in A$. Seja (x_{n_r}) uma tal subsucessão e provemos que (y_n) também admite uma subsucessão convergente para x. Com efeito, estimando a distância de y_{n_r} a x:

$$\begin{aligned}\|y_{n_r} - x\| &= \|y_{n_r} - x_{n_r} + x_{n_r} - x\| \leq \|y_{n_r} - x_{n_r}\| + \|x_{n_r} - x\| \\ &\leq \frac{1}{n_r} + \|x_{n_r} - x\| \longrightarrow 0, \qquad \text{logo } y_{n_r} \to x.\end{aligned}$$

Como A e B são fechados, tem-se $x \in A \cap B$.

2. Basta considerar

$$\begin{aligned}A &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_1 x_2 \geq 1\}, \\ B &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_1 x_2 \leq -1\}.\end{aligned}$$

Com efeito, como $\lim_{x_1 \to +\infty} \frac{1}{x_1} = 0$, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $x_1 > \frac{1}{\varepsilon}$ para que se tenha:

$$\|(x_1, 1/x_1) - (x_1, -1/x_1)\| = \|(0, 2/x_1)\| = \frac{2}{|x_1|} < 2\varepsilon$$

e $(x_1, 1/x_1) \in A$, $(x_1, -1/x_1) \in B$.

7.2 Continuidade e limites

7.7 Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujas funções coordenadas, g_1 e g_2, são definidas pelo sistema:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \sqrt{1-x^2-y^2} \\ g_2(x,y) &= \log|y-x^2| \end{aligned}$$

e designe por D o seu domínio. Represente geometricamente o conjunto D, determine o seu interior e a sua fronteira e indique, justificando, se D é aberto, fechado, limitado, conexo.

(Grupo IIb do Exame Final de 18/9/79)

7.8 Sendo g uma aplicação de A em B e C um subconjunto de B; designa-se correntemente por $g^{-1}(C)$ o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tais que $g(x) \in C$.

Considere uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um conjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ e prove que:

1. Se C é aberto, $f^{-1}(C)$ é aberto.
2. Se C é fechado, $f^{-1}(C)$ é fechado.

Mostre ainda que, sendo C conexo e limitado, $f^{-1}(C)$ pode ser desconexo e ilimitado.

(Grupo IVb do 2º Teste de 11/9/79)

7.9 Considere a função f definida pela fórmula

$$f(x,y) = \sqrt{-y^2 + \operatorname{sen}^2 x}$$

e designe por D o seu domínio.

a) Interprete geometricamente o conjunto D e determine a sua fronteira e o seu interior.

b) Justificando abreviadamente as respostas, indique se D é aberto, fechado, limitado. O interior de D é conexo? Porquê?

c) Estude a função f, do ponto de vista da continuidade. Justifique que, em qualquer ponto $(x,y) \in D$, se verificam as desigualdades: $0 \le f(x,y) \le 1$ e ainda que, qualquer que seja a sucessão (x_n, y_n) de pontos de D, a sucessão real $f(x_n, y_n)$ tem subsucessões convergentes.

(Grupo III do 2º Teste de 11/9/79)

Resolução:

a) A função está definida se e só se o argumento da raiz quadrada for não negativo, isto é,

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y^2 + \operatorname{sen}^2 x \ge 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le \operatorname{sen}^2 x\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le |\operatorname{sen} x|\right\}. \end{aligned}$$

O conjunto D corresponde à região colorida na figura 7.3. Designando por ∂D a sua fronteira e $\operatorname{int} D$ o seu interior temos:

$$\begin{aligned} \partial D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen} x \text{ ou } y = -\operatorname{sen} x\right\}, \\ \operatorname{int} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |\operatorname{sen} x|\right\}. \end{aligned}$$

b) D não é aberto pois contém pontos, por exemplo $(0,0)$, que não são centro de nenhuma bola contida em D; D é fechado pois contém todos os seus pontos fronteiros; D não é limitado pois não existe $r > 0$ tal que $B_r(0)$ tal que $D \subset B_r(0)$; $\operatorname{int} D$ não é conexo pois, por exemplo, $\operatorname{int} D = A \cup B$ com $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } |y| < |\operatorname{sen} x|\right\}$ e $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ e } |y| < |\operatorname{sen} x|\right\}$ que são dois conjuntos separados.

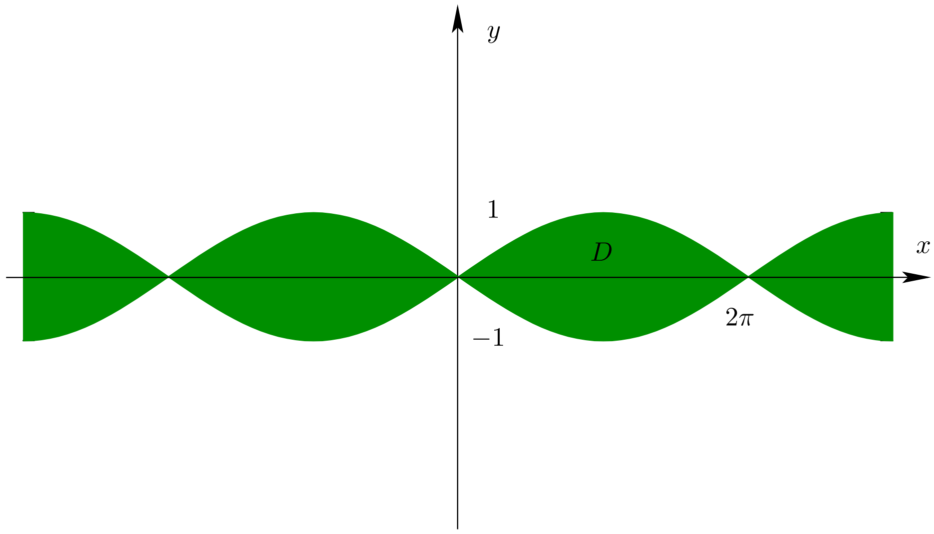

Figura 7.3: O domínio D da função f no exercício 7.9.

c) f é contínua em D pois é uma composição de funções contínuas:

$$D \xrightarrow[(x,y)\mapsto -y^2+\operatorname{sen}^2 x]{g} \mathbb{R}^+ \xrightarrow[u\mapsto\sqrt{u}]{\varphi} \mathbb{R}, \quad f=\varphi\circ g.$$

Se $(x,y)\in D$ tem-se $\operatorname{sen}^2 x \geq y^2$ e como $1\geq \operatorname{sen}^2 x\geq y^2$ vem $1\geq \operatorname{sen}^2 x\geq \operatorname{sen}^2 x - y^2 \geq 0$; como $0\leq -y^2+\operatorname{sen}^2 x\leq 1$, também $f(x,y)=\sqrt{-y^2+\operatorname{sen}^2 x}$ verifica $0\leq f(x,y)\leq 1$ pelo que a sucessão $(f(x_n,y_n))$ tem termos em $[0,1]$, logo, do *teorema de Bolzano-Weierstrass* tem uma subsucessão convergente.

7.10 Prove que :

a) Se K é um conjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}^n$, para cada função f, contínua em K e tal que $f>0$, existe $\alpha>0$ tal que $f(x)>\alpha$, $\forall_{x\in K}$.

b) Se $K\subset\mathbb{R}^n$ não for limitado ou não for fechado, existem funções contínuas e positivas em K, para as quais a propriedade anterior não é válida.

(Grupo III do 2º Teste de 15/9/78)

Resolução:

a) Se K é compacto e a função real f é contínua em K segue do *teorema de Weierstrass* que o conjunto $f(K)$ é compacto. Em particular, $f(K)\neq\emptyset$ é limitado logo tem ínfimo finito e, como é fechado, esse ínfimo é o mínimo. Se o designarmos por β e escolhermos α com $\beta>\alpha>0$ obtemos o resultado.

b) Seja $K_1=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leq 1, x_1>0\}$ e $f(x)=\|x\|$, $\forall x\in K_1$. A função f é contínua e positiva. O conjunto K_1 é limitado mas não é fechado e $f(\epsilon,0,\ldots,0)=|\epsilon|\to 0$ quando $\epsilon\to 0$.

Seja agora $K_2=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1\geq 1\}$ e $g(x)=\frac{1}{\|x\|}$, $\forall x\in K_2$. A função g também é contínua e positiva. O conjunto K_2 não é limitado mas é fechado e $g(1/\epsilon,0,\ldots,0)=|\epsilon|\to 0$ quando $\epsilon\to 0$.

7.11 Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$; chama-se *distância do ponto* b *ao conjunto* A — designada por $d(b, A)$ — ao ínfimo do conjunto formado pelas distâncias de b a todos os pontos de A:

$$d(b, A) = \inf \{\|x - b\| : x \in A\} .$$

Tendo em conta esta definição:

a) Justifique que, se $b \in A$, $d(b, A) = 0$ e mostre por meio de um exemplo (que poderá ser dado em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, se o preferir) que pode ter-se $d(b, A) = 0$ sem que seja $b \in A$.

b) Prove que se A é fechado e se $d(b, A) = 0$ então $b \in A$.

c) Justifique que, se A é não vazio, limitado e fechado existe um ponto $a \in A$ tal que $d(b, A) = \|a - b\|$. [**Sugestão**: tenha em conta a continuidade da aplicação $x \to \|x - b\|$].

d) Prove que o resultado da alínea anterior é ainda verdadeiro, supondo apenas que A é fechado e não vazio.

7.12 Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela fórmula

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ a + e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-1|}}, & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Determine o número real a por forma a que f fique contínua em $\mathbb{R}^2$.

(Grupo IIIa do Exame Final de 25/9/79)

Resolução: Seja $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ um ponto verificando $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1$. Como se tem imediatamente

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y}) \\ x^2+y^2 \leq 1}} f(x, y) = 3$$

há que determinar a por forma a que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y}) \\ x^2+y^2 > 1}} f(x, y)$$

também seja igual a 3. Ora

$$\lim_{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})} x^2 + y^2 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})} e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-1|}} = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y}) \\ x^2+y^2 > 1}} f(x, y) = a + \lim_{\substack{u\to 0 \\ u>0}} e^{-\frac{1}{u}} = a,$$

pelo que deve ser $a = 3$.

7.13 Seja f a função definida pela fórmula:

$$f(x, y) = x \log(xy)$$

a) Indique o domínio D de f, interprete-o geometricamente e determine o seu interior, o seu exterior e a sua fronteira; indique, justificando se D é

1º) aberto 2º) fechado 3º) limitado 4º) conexo.

b) A função f é contínua em todo o seu domínio? Justifique.

c) Mostre que, sendo S uma semirecta com origem no ponto $(0,0)$ e contida no domínio D de f, o limite de f na origem relativo ao conjunto S,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$$

toma o mesmo valor para toda a semirecta nas condições indicadas.

d) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. [**Sugestão**: pesquise o limite relativo ao subconjunto de D formado pelos pontos que pertencem à linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$].

7.14 Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2}$.

(Grupo I2 da Prova de 17/10/77)

Resolução: Basta encontrar duas curvas Γ_1, Γ_2 passando por $(0,0)$ de forma a que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_1}} \frac{xy}{x^3+y^2} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_2}} \frac{xy}{x^3+y^2}.$$

Com $\Gamma_1 = \{(x,y) : y = x\}$ e $\Gamma_2 = \{(x,y) : y = -x\}$ obtém-se:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_1}} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x^2} = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_2}} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^3+x^2} = -1.$$

7.15 Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1/\sqrt{xy-1}$ onde $D = \{(x,y) : xy > 1\}$.

1. Indique, justificando, os pontos em que f é contínua.
2. Existirá algum ponto fronteiro ao conjunto D ao qual f possa prolongar-se por continuidade? Porquê?
3. Indique, justificando, o contradomínio de f.

(Grupo Ib do 2º Teste de 30/7/79)

7.16 Considere uma aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mostre que se existirem números reais positivos c, p, ε tais que:

$$x \in B_\varepsilon(a) \cap D \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq c\|x-a\|^p$$

então a aplicação f é contínua em a.

7.17 Considerando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (\log|x|)^{-1}, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

prove que a condição do problema anterior não é necessária para continuidade num ponto.

7.18 Estude quanto a continuidade a função f de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2+y^2 < 2y, \\ |x|, & \text{se } x^2+y^2 = 2y, \\ y^2, & \text{se } x^2+y^2 > 2y. \end{cases}$$

(Prova de Análise Matemática III de 27/4/81)

7.19 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(0,0) = 0$$
$$f(x,y) = \frac{y-2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0)$$

a) Prove que esta função não é contínua em $(0,0)$.

b) Considere a restrição desta função ao conjunto $D = \{(x,y) : \ |y| \leq x^2\}$. Prove que esta restrição de f é contínua em $(0,0)$.

c) Verifique que a conclusão da alínea anterior não seria válida se, em vez da restrição a D, considerássemos a restrição a $D_k = \{(x,y) : |y| \leq \frac{x}{k}\} \quad (k \in \mathbb{R}^+)$.

7.3 Diferenciabilidade

7.20 Seja f a função definida pela expressão $f(x,y) = \sqrt{x/(x+y)}$.

a) Determine o domínio D de f e interprete-o geometricamente.

b) Indique o interior, exterior e fronteira de D. Será D aberto? E fechado?

c) Justifique que D não é limitado nem conexo.

d) Dê um exemplo de uma sucessão de elementos de D que convirja para um ponto não pertencente a D.

e) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,0)$ sendo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(Grupo I1 da Prova de 15/9/78)

7.21 Considere uma função real f, definida em $\mathbb{R}^2$ e tal que, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = 1 + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

1. Se f for contínua na origem, qual será o valor de $f(0,0)$? Justifique.
2. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$, onde a é um número real (para o caso $a=0$, suponha $f(0,0)=1$).

(Grupo IIIa do Exame Final de 18/9/79)

7.22 Determine o domínio e calcule as derivadas parciais de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)} \quad f(x,y) = \frac{x \operatorname{sh} y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \text{b)} \quad g(x,y) = \int_1^{x^2 y} e^{-t^2}\, dt.$$

(Grupo I1 da Prova de 17/10/77)

7.23 Seja g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e $G(x,y) = \int_0^{xy^2} g(t)\,dt$. Calcule

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \text{ e } \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}.$$

(Grupo IIIb do Exame de 23/2/79)

7.24 Seja f a função definida pela expressão

$$f(x,y,z) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) Determine o domínio D de f e interprete-o geometricamente.

b) Indique o interior, exterior e fronteira de D. Será D aberto? E fechado?

c) Dê um exemplo de uma sucessão de elementos de D que não tenha subsucessões convergentes.

d) Estude a função f quanto a diferenciabilidade, calcule as funções derivadas parciais e calcule ainda $f'_{(1,-1,e)}(0,0,1)$.

(Grupo I da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.25 Seja $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ um vector unitário de $\mathbb{R}^n$ e $F(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}$ para todo o $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e calcule as (primeiras) derivadas parciais de F no ponto $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0)$.

b) Justifique que a derivada $F'(\mathbf{0})$ é a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$, para todo o $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

c) Quanto vale o limite $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}} - 1 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$? Porquê?

d) Verifique que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} = F$.

(Grupo II duma Prova de Análise II)

Resolução:

a) F é uma função composta de duas funções diferenciáveis, logo é diferenciável: $F = f \circ \varphi$ com $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ e $u \mapsto f(u) = e^u$. Como $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{df}{du}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}a_i \qquad \text{para } i = 1,\dots,n.$$

No ponto $\mathbf{0}$ vem: $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = a_i$.

b) Sendo $\boldsymbol{h} = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$ a a derivada de F em $\mathbf{0}$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$DF(\mathbf{0})\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}.$$

c) Como F é diferenciável em $\mathbf{0}$, da definição de diferenciabilidade vem

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{F(\boldsymbol{x}) - F(\mathbf{0}) - DF(\mathbf{0})\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}} - 1 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0.$$

d) Como, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\, a_i\right) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\, a_i^2$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\,\|\boldsymbol{a}\|^2 = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}).$$

7.26 Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos racionais. Uma aplicação f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ x^2 + y^2, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}, \\ -(x^2 + y^2), & \text{se } x \neq 0 \text{ e } \frac{y}{x} \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

a) Esta função é diferenciável na origem? Justifique.

b) Indique o conjunto dos pontos onde f é diferenciável.

c) Dado um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ indique quais são os vectores $\boldsymbol{h} \neq (0,0)$ para os quais existe $f'_{\boldsymbol{h}}(a,b)$.

(Prova de Análise Matemática III de 1978)

7.27 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{se } x + y > 0, \\ x + y, & \text{se } x + y \leq 0, \end{cases}$$

a) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

b) Determine, caso existam, as derivadas segundo o vector $(1,1)$ nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$.

(Prova de Análise Matemática III de 20/3/82)

7.28 Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão:

$$g(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } xy > 0, \\ 0, & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

b) Calcule $g'_{(1,1)}(0,0)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$?

(Grupo II1 da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

Resolução:

a) Não podemos usar as regras de derivação usuais para calcular as derivadas parciais na origem mas, notando que a função é identicamente nula sobre os eixos coordenados, concluímos, usando a definição de derivada parcial, que as derivadas parciais de g são nulas em $(0,0)$.

b) Por definição,

$$g'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{g(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - g(\boldsymbol{a})}{t},$$

logo

$$g'_{(1,1)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g((0,0)+t(1,1)) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = 2.$$

Pode concluir-se que g não é diferenciável em $(0,0)$ pois, se o fosse, ter-se-ia:

$$g'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \nabla g(0,0)\cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)v_2$$

para qualquer $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Ora $g'_{(1,1)}(0,0) = 2$ mas $\nabla g(0,0) = 0$.

7.29 Considere a função de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^k\, y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0),\end{cases}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Estude f quanto à sua diferenciabilidade em $(0,0)$ em função do parametro k.

(Prova de Análise Matemática III de 14/3/81)

7.30 Seja φ uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que:

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \qquad \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

1. Prove que, em qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, se verifica a igualdade

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(b,a).$$

2. Calcule $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(c,c)$ com $c \in \mathbb{R}$ e $v = (1,-1)$.

(Grupo IIIa do 2º Teste de 30/7/79)

7.31 Considere a função $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

1. Determine o seu domínio, D, e mostre que f é diferenciável em todos os pontos de D.
2. Calcule $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$.
3. Determine $f'_{(h,h)}(1,1)$ com $h \neq 0$.
4. Mostre que f não é prolongável por continuidade a nenhum ponto da fronteira de D.

(Grupo IIa do Exame de 2ª época de 11/2/80)

7.32 Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

b) Verifique se f é ou não diferenciável no ponto $(0,0)$.

c) Indique, justificando, qual o domínio de diferenciabilidade de f.

d) Verifique se existe derivada de f segundo o vector $(1,1)$ nos seguintes pontos: $(0,0)$ e $(3,5)$. No caso de existir alguma delas indique o seu valor.

(Grupo II da Prova de 17/10/77)

7.33 Considere as funções f, g, u, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x,y) = \sqrt{x} + \log(\cos y)$, $g(x,y) = \sqrt{\operatorname{sen} x} + \log(y^2 - 1)$, $u(x,y) = \log(y/x) + \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2)$, $v(x,y) = \log(x^2 - y^2)$.

a) Determine o domínio de cada uma destas funções. Indique o interior, fronteira, exterior de cada um daqueles conjuntos e classifique-os quanto a serem abertos ou fechados.

b) Estude cada uma das funções quanto a diferenciabilidade.

c) Calcule, caso existam:

$$D_{(h_1,h_2)} f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \qquad D_{(2,-1)} g\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$
$$D_{(1,1/2)} u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad D_{(1,3)} v(1,0).$$

(Provas de Análise Matemática III de 17/12/80, 5/1/81, 27/2/81 e 7/81)

7.34 Sendo n um número natural maior do que 2, considere a função φ, definida em $\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ pela fórmula:

$$\varphi(x) = \|x\|^{2-n} \qquad \left(\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right).$$

a) Justifique que φ é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

b) Calcule as primeiras derivadas parciais de φ no ponto $(1,0,\ldots,0)$ e a derivada de φ no mesmo ponto segundo o vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

c) Verifique que, em qualquer ponto do domínio de φ,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = 0.$$

(Grupo II do 2º Teste de 11/9/79)

Resolução:

a) As derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = (2-n)\|x\|^{1-n}\|x\|^{-1}x_j = (2-n)\|x\|^{-n}x_j$ existem e são contínuas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, logo φ é aí diferenciável.

b)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(1,0,\ldots,0) = (2-n)\delta_j^1, \qquad \text{onde } \delta_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 1, \\ 0, & \text{se } j \neq 1. \end{cases}$$

$$\varphi_v'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) v_j = (2-n)\|x\|^{-n} \sum_{j=1}^{n} x_j v_j.$$

Logo $\varphi_v'(1,0,\ldots,0) = (2-n)v_1$.

Versão para 2002/2003 (igual a 2001/2002 excepto pequenas correcções) – 2 de Setembro de 2002

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left((2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}x_j\right)\\
&= (2-n)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\|x\|^{-n}\right)x_j + \|\boldsymbol{x}\|^{-n}\right]\\
&= (2-n)\left(-n\|\boldsymbol{x}\|^{-n-1}\|x\|^{-1}x_jx_j + \|\boldsymbol{x}\|^{-n}\right)\\
&= (2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}\left(-n\|\boldsymbol{x}\|^{-2}x_j^2+1\right).
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= (2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}\left(-n\|\boldsymbol{x}\|^{-2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2+n\right)\\
&= (2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}(-n+n) = 0.
\end{aligned}$$

7.35 Seja F a função definida por $F(x,y) = \int_y^{x^2y}\frac{dt}{\log t}$.

a) Determine o domínio de F e diga, justificando, se ele é aberto, fechado, compacto ou conexo.

b) Justifique que F é diferenciável em todo o seu domínio e calcule as funções derivadas parciais.

(Grupo IV do Exame Final de 9/10/78)

7.36 Considere a função

$$g(x,y) = \int_{y+2}^{xy^2-x}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

em que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$.

1. Represente geometricamente o seu domínio D. Determine o seu interior e a sua fronteira e indique, justificando, se D é aberto, fechado, limitado, conexo.

2. Indique, justificando, o domínio de diferenciabilidade de g e calcule as suas derivadas parciais.

(Grupo IIIa do Exame de 2ª época de 11/2/80)

7.37 Seja G uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e sejam a e b números reais, com $a<b$.

a) Mostre que, se $G(a,a) = G(b,b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $G'_{(h,h)}(c,c) = 0$, qualquer que seja $h\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$. [**Sugestão**: Na resolução desta alínea poderá ser-lhe útil aplicar o *Teorema de Rolle*].

b) Mostre por meio de um exemplo que a proposição enunciada na alínea (a) seria falsa se se omitisse a hipótese de diferenciabilidade de G.

(Grupo IV da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.38 Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x,y) = \left(\frac{x\,y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{\sqrt{y^2 - x}}{x} \right)$$

a) Determine o domínio de diferenciabilidade de F. Justifique.

b) Calcule a derivada dirigida $D_{(1,1)}F(1,2)$. Justifique o seu processo de cálculo.

7.39 Considere as funções definidas em $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ por:

$$f_p(x,y) = y^{p-1}D(x), \quad p \in \{1,2,3\},$$

em que

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Estude quanto a continuidade f_1, f_2, f_3.

b) Calcule as derivadas parciais de f_3 e indique o seu domínio.

c) Mostre que $\frac{\partial f_3}{\partial y}$ é contínua na origem e existe em $\mathbb{R}^2$.

d) Usando o resultado anterior e a existência de $\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)$ mostre que f_3 é diferenciável em $(0,0)$.

e) Considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x,y,z) = f_3(x,y)D(z)$. Pode usar o resultado utilizado em (d) para provar que g é diferenciável em $(0,0)$?

f) Prove que g é diferenciável em $(0,0)$.

7.40 Seja f uma função real definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em todo o seu domínio.

b) Estude f quanto a diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.

c) Indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde existem e são iguais as derivadas parciais de segunda ordem f''_{xy} e f''_{yx}. Justifique.

(Prova de Análise Matemática III de 27/2/81)

7.41 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

calcule, quando existirem, as derivadas parciais $D_{1,2}f(0,0)$ e $D_{2,1}f(0,0)$. Depois de efectuados os cálculos conclua justificadamente sobre a continuidade de $D_{1,2}f$ em $(0,0)$.

(Prova de Análise Matemática III)

Resolução: Começamos por calcular $D_1 f(x,y)$ e $D_2 f(x,y)$. Se $(x,y) \neq (0,0)$ tem-se:

$$D_1 f(x,y) = y \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\frac{-2y\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

No ponto $(0,0)$:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0$$

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h \frac{-h^2}{h^2} = -1$$

Daqui sai:

$$D_{1,2} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(-1)}{h} = \infty,$$

$$D_{2,1} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(D_1 f\right)(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

É evidente que $D_{1,2} f$ não é contínua em $(0,0)$. Pode observar-se que também não é contínua na origem a derivada $D_{2,1} f$; com efeito, existindo $D_1 f(x,y)$, $D_2 f(x,y)$ e $D_{2,1} f(x,y)$ em todos os pontos de uma vizinhança da origem, se $D_{2,1} f$ fosse contínua em $(0,0)$ deveria ter-se $D_{1,2} f(0,0) = D_{2,1} f(0,0)$.

7.42 Seja $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear, i.e., para todos os $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \mathbb{R}^p$, $(i = 1, 2)$:

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1) = \alpha_1 T(x_1, y_1) + \alpha_2 T(x_2, y_1)$$

$$T(x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T(x_1, y_1) + \alpha_2 T(x_1, y_2).$$

a) Mostre que existe $M > 0$ tal que:

$$\|T(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\| \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}^n}\ \forall_{y\in\mathbb{R}^m}.$$

b) Considerando no espaço produto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ uma norma definida por $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ mostre que T é diferenciável.

(Prova de Análise Matemática III de 27/11/82)

7.4 Teorema da derivação da função composta

7.43

a) Sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função cujas funções coordenadas g_1 e g_2 são definidas pelo sistema:

$$g_1(x,y) = x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha$$

$$g_2(x,y) = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$$

onde α é uma constante real, determine a matriz jacobiana de g num ponto arbitrário de $\mathbb{R}^2$ e calcule a derivada direccional da função na direcção e sentido do vector $\boldsymbol{h} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

b) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que:

$$\begin{aligned} f(u,0) &= 0 \qquad \forall_{u\in\mathbb{R}} \\ f(0,v) &= v \qquad \forall_{v\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

calcule $f'_{\boldsymbol{h}}(0,0)$, onde $\boldsymbol{h}$ é o vector referido em a). Justifique a resposta.

c) Sendo $\varphi = f \circ g$, calcule:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)\right]^2$$

(Grupo III duma Prova de Análise II)

Resolução:

a) A derivada de g é [1]

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Como g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ temos:

$$\begin{aligned} g'_{\boldsymbol{h}}(x,y) = Dg(x,y)\boldsymbol{h} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\theta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Começamos por calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$; como f é diferenciável virá então: $f'_{\boldsymbol{h}}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\boldsymbol{h}$. Ora

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1, \end{aligned}$$

e

$$f'_{\boldsymbol{h}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta.$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(0,0))\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(0,0))\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) \\ &= 0\cos\alpha + 1\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(0,0))\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(0,0))\frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0) = \cos\alpha. \end{aligned}$$

Temos portanto:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)\right)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

7.44 a) Determine a matriz jacobiana, no ponto $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujas funções coordenadas são definidas pelo sistema:

$$g_1(u, v, w) = e^u \cos v \cos w,$$
$$g_2(u, v, w) = e^u \cos v \operatorname{sen} w,$$
$$g_3(u, v, w) = e^u \operatorname{sen} v.$$

b) Se for

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

a matriz jacobiana de uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ no ponto $(1, 0, 0)$, (onde f se supõe diferenciável), qual será a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(0, 0, 0)$? Porquê?

(Grupo Ib do 2º Teste 11/9/79)

7.45 Seja φ uma aplicação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$; sejam L_1 e L_2 as funções coordenadas da sua derivada no ponto $(0, 0, 0)$:

$$L_1(x, y, z) = 2x + 3y + z$$
$$L_2(x, y, z) = x - y + z$$

Seja ψ a seguinte aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$:

$$\psi(u, v) = \operatorname{arctg}(u^2 + v).$$

Sabendo que $\varphi(0, 0, 0) = (1, 2)$, calcule $(\psi \circ \varphi)'(0, 0, 0)$.

(Grupo II2 da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.46 Sejam ρ e μ aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definidas por:

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1),$$
$$\mu(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 \cos x_3, x_2 \operatorname{sen} x_3).$$

e define-se $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por:

$$\psi = \mu \circ \rho \circ \mu.$$

a) Justificando a diferenciabilidade de ρ e μ em $\mathbb{R}^3$, determine as derivadas e os determinantes das matrizes jacobianas que as representam num ponto (x_1, x_2, x_3).

b) Justificando a diferenciabilidade de ψ determine (sem obter explicitamente uma expressão para ψ) o determinante da matriz jacobiana de ψ num ponto (x_1, x_2, x_3).

7.47 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função que transforma cada vector (x, y) no vector (u, v) tal que:

$$u = e^x \cos y$$
$$v = e^x \operatorname{sen} y$$

1. Verifique que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

[1] Nesta e noutras soluções identificamos a aplicação linear derivada com a matriz que a representa.

2. Sendo $g = f \circ f$, mostre que a aplicação linear $g'(0,0)$ é uma homotetia, isto é, da forma $g'(0,0)\,w = \alpha\,w$ para cada $w \in \mathbb{R}^2$ e com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Grupo IIb do 2º Teste de 30/7/79)

Resolução:

1. A conclusão segue dos cálculos seguintes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \operatorname{sen} y,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \operatorname{sen} y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x \cos y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x \cos y,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= e^x \operatorname{sen} y, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -e^x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$

2. Designando por I a matriz identidade

$$\begin{aligned}
g'(0,0) &= f'(f(0,0))f'(0,0) = f'(1,0)f'(0,0)\\
&= \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y\\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}_{(1,0)} \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y\\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}_{(0,0)}\\
&= eI^2 = eI.
\end{aligned}$$

Tem-se portanto $g'(0,0)\boldsymbol{w} = e\boldsymbol{w}$, para qualquer $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$.

7.48 Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ duas funções diferenciáveis e seja $F = f \circ \varphi$. Designando por φ_1, φ_2 e φ_3 as funções coordenadas de φ, mostre que, se forem verificadas as igualdades:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}(u_0, v_0), \qquad i = 1, 2, 3,$$

sê-lo-á também a igualdade $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$.

(Grupo IIIb do Exame Final de 18/9/74)

7.49 Sejam $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ duas funções diferenciáveis e $G = g \circ h$. Sendo $z_0 \in \mathbb{R}$, designe-se por L_1 e L_2 as funções coordenadas da aplicação linear $g'[h(z_0)]$. Mostre que, se $L_1(x,y) = L_2(x,y), \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$, então

$$\frac{\partial G_1}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial G_2}{\partial z}(z_0),$$

onde G_1 e G_2 são as funções coordenadas da função G.

(Grupo IIIb do Exame Final de 25/9/79)

7.50 Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}^2$ pelas expressões:

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2), \qquad g(x,y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2}$$

e seja φ a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida pela igualdade:

$$\varphi(x,y) = (f(x,y), g(x,y)).$$

a) Estude as funções f e g quanto a continuidade e diferenciabilidade.

b) Calcule as funções derivadas parciais de f e g, indicando os respectivos domínios.

c) Sendo (h, k) um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$, diga se existem, e calcule em caso afirmativo, $f'_{(h,k)}(0, 0)$ e $g'_{(h,k)}(0, 0)$.

d) Estude φ quanto a continuidade e diferenciabilidade, e calcule a sua derivada em todos os pontos do seu domínio de diferenciabilidade.

e) Calcule $(f \circ \varphi)'(1, 0)$.

(Grupo III do Exame Final de 9/10/78)

7.51 Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim definidas:

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \qquad g(t) = e^t.$$

a) Estude f e g quanto a continuidade. Verifique que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 0)$.

b) Designando por F o prolongamento por continuidade de f, calcule $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(0, 0)$ e $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(0, 0)$.

c) Verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio.

d) Sendo $\boldsymbol{h}$ um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$ indique, justificando, o valor de $F'_{\boldsymbol{h}}(0, 0)$.

e) Estude a função $\varphi = g \circ F$ quanto a continuidade e diferenciabilidade.

f) Calcule $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(0, 0)$ e $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)(0, 0)$.

g) Sendo ψ a aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $\psi(x, y) = (\varphi(x, y), e^{x^2+y^2})$ calcule a derivada de ψ no ponto $(0, 0)$.

(Grupo II do 2º Teste de 15/9/78)

7.52 Seja g a função definida por $g(x, y) = \sqrt{x^2 y}$.

a) Determine o domínio D de g. Determine o exterior, o interior, a fronteira e o derivado de D. Será D aberto? E fechado?

b) Seja

$$G(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{se } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

Estude G quanto a continuidade.

c) Calcule $\frac{\partial G}{\partial x}$ e $\frac{\partial G}{\partial y}$, indicando os respectivos domínios.

d) Mostre que G é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

e) Sendo $\boldsymbol{h}$ um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$, indique, justificando, o valor de $G'_{\boldsymbol{h}}(0, 0)$.

f) Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função assim definida:

$$\psi(t) = (t + 1, 2t + 2).$$

Calcule $\left(\frac{d(G \circ \psi)}{dt}\right)_{t=0}$ e $\left(\frac{d(G \circ \psi)}{dt}\right)_{t=-1}$.

7.53 Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}^2$ pelas expressões:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2 \operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) = e^{x^2y}.$$

a) Estude f e g quanto a continuidade.

b) Calcule as derivadas parciais de f e g.

c) Estude f e g quanto a diferenciabilidade.

d) Sendo $\psi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ estude ψ quanto a continuidade e diferenciabilidade; calcule na origem a derivada segundo um vector $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ não nulo.

e) Calcule a derivada de $g \circ \psi$ na origem.

(Grupo II do Exame de 23/2/79)

7.54 Considere a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{(x^2+y^2)-1}, & \text{para } \|(x,y)\| > 1, \\ \frac{\pi}{2}(x^2+y^2), & \text{para } \|(x,y)\| \leq 1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto a continuidade.

b) Sendo (a,b) tal que $\|(a,b)\| = 1$, mostre que não existe $f'_{(a,b)}(a,b)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de f nos pontos da circunferência de equação $\|(x,y)\| = 1$? Justifique.

c) Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ com norma diferente de 1.

d) Determine $f'_x(0,1)$.

e) Indique, justificando, qual o contradomínio de f.

f) Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$x \mapsto (e^x, \operatorname{arctg} x)$$

mostre que $g \circ f$ é diferenciável no ponto $(1/2, 1/2)$ e determine a derivada nesse ponto. Aproveite o resultado para calcular $(g \circ f)'_{(0,1)}(1/2, 1/2)$.

(Grupo II do Exame de 2ª época de 4/2/80)

7.55 Seja φ uma função real diferenciável definida em $\mathbb{R}^3$ e $\psi(x,y,z) = \varphi(x-y, y-z, z-x)$. Mostre que, em qualquer ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se verifica a igualdade:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

(Grupo Ia do 2º Teste de 11/9/79)

7.56 Dada a função f de $\mathbb{R}^3$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por $z = f(x,u,v)$, diferenciável no seu domínio, considere a função $F(x,y) = f(x, x+y, xy)$.

a) Exprima $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$ nas derivadas parciais de f.

b) Aproveite este resultado para verificar a igualdade

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(2,1)} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(2,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2,3,2)} - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{(2,3,2)}$$

(Prova de Análise Matemática III de 5/2/79)

7.57 Sabendo que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no ponto $(0, e, 0)$ e que a sua matriz jacobiana nesse ponto é $\begin{bmatrix} e & -1 & e \end{bmatrix}$, mostre que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(0,1)} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(0,1)} = 0,$$

onde $g(x, y) = f((\mathrm{sen}(xy^2), e^y, \log(1 + x^2)), \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$.

(Grupo IIb do Exame de 2ª Época de 11/2/80)

7.58 Seja F uma função que admite derivada contínua em $\mathbb{R}$ e $z = xy + xF(y/x)$. Mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z, \qquad \forall_{x\neq 0}.$$

(Grupo IIIa do Exame de 23/2/79)

7.59 Sendo G uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e

$$F(x, y, z) = G(x^2 - y^2, y^2 - z^2), \quad \forall_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3}.$$

1. Indique, justificando, os pontos em que F é diferenciável.

2. Mostre que, em qualquer ponto (x, y, z), se verifica a igualdade

$$yzF'_x(x, y, z) + xzF'_y(x, y, z) + xyF'_z(x, y, z) = 0.$$

(Grupo IIa do 2º Teste de 30/7/79)

7.60 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Considere a função G definida por $G(u, v) = f(u^2 + v^2, u/v)$. Mostre que, para todo o $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v \neq 0$, existe a derivada dirigida $G'_{(u,v)}(u, v)$, tendo-se:

$$G'_{(u,v)}(u, v) = 2(u^2 + v^2)D_1 f(u^2 + v^2, u/v).$$

(Prova de Análise Matemática III de 12/12/81)

7.61 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Seja G uma função definida por $G(x, y, z) = F[(x - y)z, (z - x)y]$.

a) Será G diferenciável em $\mathbb{R}^3$? Justifique a sua resposta e na afirmativa calcule $G'(1, 1, 1)$ em termos das derivadas parciais de F.

b) Determine em que condições a derivada dirigida de G segundo o vector $(1, 1, 1)$ é identicamente nula sobre a recta $x = -y = -z$.

(Prova de Análise Matemática III de 17/12/80)

7.62 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $f(-1, 1) = -1$. Considere uma função G definida por

$$G(x, y) = f[f(x, y), f^2(x, y)].$$

Mostre que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(-1, 1) + 2\frac{\partial G}{\partial y}(-1, 1) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)\right]^2 - 4\left[\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)\right]^2.$$

(Prova de Análise Matemática III de 5/1/81)

7.63 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e tal que: $F(0, 1) = 0, F(1, 0) = 1$. Seja $H(x, y) = F(F(x, y), F(y, x))$. Calcule $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{(0,1)}$ em função de derivadas parciais de F.

(Prova de Análise Matemática III de 7/81)

7.64 Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Defina-se uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ através de

$$F(x, y, z) = g(g(x, y), g(y, z)).$$

a) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de F em função de derivadas parciais de g. Justifique ser $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

b) Suponha que para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos $D_{(1,1)}g(x, y) = 0$. Mostre que então

$$D_{(1,1,1)}F(x, y, z) = 0$$

para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

7.65 Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$; seja $u(x, t) = af(x+ct)+bf(x-ct)$ sendo a, b, c constantes reais e $c \neq 0$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

(Grupo I2 da Prova de 15/9/78)

7.66 Sejam F e g duas funções de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e $u(x, y) = F[x + g(y)]$. Verifique que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Grupo III1 da Prova de 17/10/77)

Resolução: Do *teorema de derivação da função composta* obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= F'(x + g(y))1 = F'(x + g(y)),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= F'(x + g(y))g'(y),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(F'(x + g(y))\right) = F''(x + g(y))g'(y),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F''(x + g(y)).
\end{aligned}$$

donde segue o resultado.

7.67 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x, y) = xf(y/x) + g(y/x)$$

sempre que $x \neq 0$. Mostre que $\forall_{(x,y)\neq(0,y)}$ temos:

$$x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

(Prova de Análise Matemática III de 24/11/79)

7.68 Seja $u(x, y) = F(x^2 - y^2, y^2)$. Sabendo que as derivadas cruzadas de segunda ordem da função F são nulas, mostre que:

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \forall_{x,y\neq 0}.$$

(Na resolução deste exercício admita que pode utilizar o teorema da derivada da função composta sempre que dele necessitar).

(Grupo III da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.69 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $D_1F(x, y)D_2F(x, y) \neq 0$, $\forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ outra função tal que:

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$;

ii) em $\mathbb{R}^2$ tem-se $F(u'_x, u'_y) = k$ com k uma constante real.

Mostre que, nestas condições, é válida a igualdade:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 24/11/79)

7.5 Teoremas do valor médio e de Taylor

7.70 Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y$ e os pontos $(0, 0)$ e $(\pi/6, \pi/6)$. Mostre que existe $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$\cos\left(\frac{\theta\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 9/2/81)

7.71 Considere uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, satisfazendo, para todo o $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, as condições seguintes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = xu(t, x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = tu(t, x).$$

Prove que existe, para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, um real $\theta \in]0, 1[$ que verifica:

$$u(t,x) = u(0,0) + 2\theta t x u(\theta t, \theta x).$$

(Prova de Análise Matemática III de 3/2/81)

Resolução: Pelo *teorema do valor médio*, relativo a funções escalares, se $a \in \mathbb{R}^n$ e a derivada direccional $u'_v(a + \alpha\, v)$ existe para cada $0 \leq \alpha \leq 1$, tem-se

$$u(a+v) - u(a) = u'_v(a + \theta\, v)$$

para algum $\theta \in]0,1[$.
No nosso caso, $u'_v(t_0, x_0)$ existe para qualquer (t_0, x_0) e qualquer v, pois u é diferenciável em $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n$, já que as derivadas parciais existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Logo tem-se em particular, no ponto $(t_0, x_0) = (0,0)$ e com $v = (t,x)$:

$$u((0,0) + (t,x)) - u(0,0) = u'_{(t,x)}((0,0) + \theta(t,x)) \text{ com } \theta \in]0,1[,$$

ou seja,

$$u(t,x) - u(0,0) = u'_{(t,x)}(\theta t, \theta x).$$

Ora

$$\begin{aligned} u'_{(t,x)}(\theta t, \theta x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(\theta t, \theta x) t + \frac{\partial u}{\partial x}(\theta t, \theta x) x \\ &= \theta x u(\theta t, \theta x) t + \theta t u(\theta t, \theta x) x \\ &= 2\theta t x u(\theta t, \theta x). \end{aligned}$$

Assim:

$$u(t,x) = u(0,0) + 2\theta t x u(\theta t, \theta x) \text{ com } \theta \in]0,1[.$$

7.72 Considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = x^2 - y^4$.

a) Mostre que existe $k > 0$ tal que para todo o $1 > \varepsilon > 0$:

$$(x,y), (x_0, y_0) \in B_\varepsilon(0,0) \Longrightarrow \|g(x,y) - g(x_0,y_0)\| < k\varepsilon \|(x - x_0, y - y_0)\|$$

b) Seja $\varphi :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x,y) = (x^2 - y^4, y^2 - x^4)$. Mostre, utilizando o resultado da alínea anterior, que existe $\varepsilon > 0$ tal que a restrição de φ a $B_\varepsilon(0,0)$ é uma contracção.

(Prova de Análise Matemática III de 19/2/83)

7.73 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x.$$

a) Determine o desenvolvimento de Taylor de 2ª ordem daquela função relativamente ao ponto $(0,0)$.

b) Aproveite o resultado anterior para mostrar que existe uma e uma só constante real a tal que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-axy}{x^2+y^2}=0$$

Determine a.

(Prova de Análise Matemática III de 14/3/81)

Resolução:

a) A fórmula de Taylor de 2ª ordem relativa a f em $(0,0)$ é em geral:

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\,xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2\right) \\ &+o\left(\|(x,y)\|^2\right) \qquad ((x,y)\to(0,0)). \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\operatorname{sen} y+y\cos x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cos y+\operatorname{sen} x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-y\operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-x\operatorname{sen} y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\cos y+\cos x.$$

Particularizando para $(x,y)=(0,0)$ obtém-se:

$$f(0,0)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=2.$$

Assim a expressão da fórmula de Taylor de segunda ordem vai ser:

$$f(x,y)=2xy+o(\|(x,y)\|^2) \qquad ((x,y)\to(0,0)).$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-axy}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2xy+o(\|(x,y)\|^2))-axy}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2-a)\,xy+o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{(2-a)xy}{x^2+y^2}+\frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2-a)xy}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Este limite será nulo se $a=2$ e não existe se $a\neq 2$ pois então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{(2-a)xy}{x^2+y^2}=\frac{2-a}{2}\neq\frac{a-2}{2}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{(2-a)xy}{x^2+y^2}.$$

7.6 Teoremas da função inversa e da função implícita

7.74 Mostre que a função definida por $(u, v) = \varphi(x, y)$ com

$$u = e^{xy} + 1,$$
$$v = e^{xy} + y^2,$$

possui uma inversa local de classe C^1, que a cada $(u', v') \in B_\varepsilon(2, 2)$ faz corresponder um e um só $(x', y') \in B_\delta(0, 1)$, para certos $\varepsilon, \delta > 0$. Designando por ψ a inversa de φ calcule $D_1\psi(2, 2)$.

(Prova de Análise Matemática III de 3/2/81)

Resolução: Sendo φ de classe C^1, uma condição suficiente para a existência da inversa local (também de classe C^1), é $\det(D\varphi(0, 1)) \neq 0$. Ora

$$D\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ ye^{xy} & xe^{xy} + 2y \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$D\varphi(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e portanto $\det(D\varphi)(0, 1) = 2$. Para calcular $D_1\psi(2, 2)$ observamos que $D\psi(u, v) = [D\varphi(x, y)]^{-1}$ onde $(u, v) = \varphi(x, y)$ e $(x, y) = \psi(u, v)$. Logo:

$$D\psi(2, 2) = [D\varphi(0, 1)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1}_{(0,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A derivada parcial $D_1\psi(2, 2)$ corresponde ao vector coluna correpondente à primeira coluna desta matriz. Logo $D_1\psi(2, 2) = (1, -1/2)$.

Resolução alternativa: Justificando da mesma maneira a existência de inversa local poderíamos efectuar o cálculo de $D_1\psi$ por derivação em ordem a u de ambos os membros de cada uma das equações do sistema dado (considerando agora x e y como função de u e v) o que conduziria a

$$\begin{cases} 1 = ye^{xy}\frac{\partial x}{\partial u} + xe^{xy}\frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = ye^{xy}\frac{\partial x}{\partial u} + (xe^{xy} + 2y)\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

ou, no ponto $(x, y) = (0, 1)$:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial u} \\ 0 = \frac{\partial x}{\partial u} + 2\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

donde se obtem imediatamente: $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}$.

7.75 Mostre que a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = ((x + y)^3, (x - y)^3)$ não satisfaz a hipótese do teorema da função inversa "relativamente" à origem e, no entanto, φ é invertível em $\mathbb{R}^2$.

(Prova de Análise Matemática III de 1982)

Resolução: Tem-se com efeito:

$$D\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 3(x + y)^2 & 3(x + y)^2 \\ 3(x - y)^2 & -3(x - y)^2 \end{bmatrix}.$$

Logo $\det(D\varphi(0,0)) = 0$. No entanto pondo $u = (x+y)^3$, $v = (x-y)^3$ vem $x = \frac{1}{2}(u^{1/3} + v^{1/3})$, $y = \frac{1}{2}(u^{1/3} - v^{1/3})$ pelo que φ é uma bijecção de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

7.76 Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Verifique que:

i) $F \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

ii) $\forall_{(x,y)\neq(0,0)}$, $\det \left[\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right](x,y) \neq 0$,

iii) F não é invertível em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

iv) Dado $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ existe uma vizinhança U de (x_0,y_0) tal que $F|_U$ é invertível.

(Prova de Análise Matemática III de 5/2/83)

Resolução:

i) Como $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (2x, 2y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (-2y, 2x)$ é claro que as derivadas parcias $\frac{\partial F_i}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F_i}{\partial y}(x,y)$ existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$ (e portanto em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

ii) Como
$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$
vem $\det \left[\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(x,y)\right] = 4(x^2+y^2)$; se $(x,y) \neq 0$ é claro que $4(x^2+y^2) \neq 0$.

iii) Basta ver que há dois pontos, por exemplo $(1,1)$ e $(-1,-1)$ com a mesma imagem (neste caso, $(0,2)$).

iv) Para $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ tem-se $\det(DF(x,y)) = (x_0^2 + y_0^2) \neq 0$ pelo que, pelo teorema da função inversa, F é invertível numa vizinhança de (x_0,y_0).

7.77 Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Define-se $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ através de:
$$\varphi(x,y) = (xg(y), yg(x)).$$

a) Indique condições suficientes relativas a g que garantam que φ é localmente invertível numa vizinhança do ponto $(1,1)$. Justifique.

b) Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e uma função H definida por $H = F \circ \psi$ (com ψ a inversa local de φ nas condições de (a)). Justifique ser H diferenciável e calcule $D_1 H(g(1), g(1))$ em termos de F e g.

(Prova de Análise Matemática III de 20/3/82)

7.78 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0) = 0$. Define-se $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ através de:
$$\varphi(x,y,z) = (f(x,-y), f(y,-z), f(z,-x)).$$

a) Prove que se $D_1 f(0,0) \neq D_2 f(0,0)$ existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que φ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0,0,0)$ sobre um aberto $T \supset B_\delta(0,0,0)$.

b) Calcule $D_1\psi(0,0,0)$ com $\psi = \left[\varphi|_{B_\varepsilon(0,0,0)}\right]^{-1}$.

7.79 É dada a equação
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

a) Mostre que não existem pares (x, y) com $|x| > |a|$ que satisfaçam esta equação. E com $|x| = |a|$?

b) Calcule as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ da função implícita $y = \varphi(x)$ definida por aquela equação e indique os domínios correspondentes.

c) Atendendo ao significado destas derivadas, represente geometricamente o conjunto dos pontos que satisfazem a equação dada.

(Prova de Análise Matemática III de 23/7/80)

7.80 Sejam f e g duas funções reais com domínio contido em $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 e (a, b) um ponto interior aos seus domínios. Suponha-se que

$$f(a, b) = c_1, \quad g(a, b) = c_2, \quad D_2f(a, b) \cdot D_2g(a, b) \neq 0$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Mostre que as funções $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$ definidas implicitamente pelas equações $f(x, y) = c_1, g(x, y) = c_2$, respectivamente, têm as tangentes aos seus gráficos perpendiculares no ponto (a, b) se e só se:
$$\nabla f(a, b) \cdot \nabla g(a, b) = 0.$$

(Prova de Análise Matemática III de 12/12/81)

Resolução: As rectas tangentes aos gráficos de φ e ψ no ponto (a, b) têm por equações:

$$y - b = \varphi'(a)(x - a) \quad \text{e} \quad y - b = \psi'(a)(x - a).$$

Por outro lado:
$$\varphi'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}, \qquad \psi'(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}.$$

Enfim, as rectas $y - b = \alpha(x - a)$ e $y - b = \beta(x - a)$ são perpendiculares se e só se $\alpha = -\frac{1}{\beta}$. As tangentes sê-lo-ão portanto se e só se:

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}$$

ou seja $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0$, ou ainda $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, , \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\right) = 0$, que é o mesmo que $\nabla f(a, b) \cdot \nabla g(a, b) = 0$.

7.81 Mostre que, numa vizinhança do ponto $(1, -1, 2)$ o sistema de equações:

$$x^2(y^2 + z^2) = 5$$
$$(x - z)^2 + y^2 = 2$$

define y e z como funções de x, continuamente diferenciáveis. Calcule

$$\frac{dy}{dx}(1) \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dx}(1).$$

(Prova de Análise Matemática III de 7/81)

7.82 Considere a equação $z^3 + z - 2e^{x^2+y^2} = 0$ e o ponto $(0,0,1)$. Mostre que aquela equação define localmente uma função implícita $z = \varphi(x,y)$ com $\varphi(0,0) = 1$ e calcule

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0).$$

(Prova de Análise Matemática III de 5/2/79)

7.83 Mostre que o sistema

$$\begin{cases} e^{xy} - u + \log(v+x) - 1 = 0 \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0 \end{cases}$$

define implicitamente uma função ϕ que a cada $(x,y) \in B_\varepsilon(0,1)$ faz corresponder um e um só $(u,v) \in B_\delta(0,1)$, para certos $\varepsilon, \delta > 0$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)$.

(Prova de Análise Matemática III de 14/3/81)

7.84 Seja F uma função de classe C^2 definida em $\mathbb{R}^2$ e com valores em $\mathbb{R}$ e a equação

$$F(F(x,y),y) = 0.$$

a) Indique, justificando a sua resposta, condições suficientes para que aquela equação possa definir, numa vizinhança de 0, uma função $y(x)$. Suponha que $F(0,0) = 0$.

b) Aproveite a alínea anterior para calcular $\frac{dy}{dx}(0)$.

(Prova de Análise Matemática III de 9/2/81)

Resolução:

a) Definindo $\phi(x,y) = F(F(x,y),y)$ o *teorema da função implícita* fornece uma tal condição sufuciente que é $\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) \neq 0$. Ora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(F(x,y),y)\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(F(x,y),y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) &= \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \\ &= \left(1 + \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\right)\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \end{aligned}$$

Logo $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq -1$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$ são as condições pedidas.

b)

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0) = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\left(1 + \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)\right)\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)}.$$

7.85 As funções $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são definidas por:

$$f : \begin{cases} u = x + y + z + \operatorname{sen}(xyz) \\ v = xyz + \operatorname{sen}(x+y+z) \end{cases} \qquad g : w = 1 - e^{u-2v}$$

a) Mostre que a equação $(g \circ f)(x,y,z) = 0$ define implicitamente numa vizinhança de $(0, -\pi/2, \pi/2)$ uma função $y = \alpha(x,z)$ tal que $\alpha(0,\pi/2) = -\pi/2$ que é diferenciável naquele ponto.

b) Calcule $\frac{\partial \alpha}{\partial z}(0, \pi/2)$.

(Prova de Análise Matemática III de 13/7/79)

7.86 Sendo φ a função definida implicitamente pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x + y^2 - u^3 + v = 0 \\ x^2 - y + u - v^2 = 0 \end{cases}$$

de uma bola centrada em $(x_0, y_0) = (0, 0)$ para uma bola centrada em $(u_0, v_0) = (0, 0)$ e sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $(u, v) \mapsto (z, w) = (v \cos u, u \operatorname{sen} v)$, calcule $\frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial x}(0, 0)$.

(Prova de Análise Matemática III de 8/3/79)

Resolução:

$$\varphi : (x, y) \longmapsto (u, v), \quad g : (u, v) \longmapsto (z, w)$$

$$g \circ \varphi : (x, y) \longmapsto (z(u(x, y), v(x, y)), w(u(x, y), v(x, y)))$$

$$\frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{\partial (g \circ \varphi)_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial (g \circ \varphi)_2}{\partial x}(x, y) \right),$$

onde $(g \circ \varphi)_i$ é a i-ésima função coordenada de $g \circ \varphi$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ \varphi)_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= -v \operatorname{sen} u \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \cos u \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial (g \circ \varphi)_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, v)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial w}{\partial v}(u, v)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= \operatorname{sen} v \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u \cos v \frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{aligned}$$

Tendo em conta que $\varphi(0, 0) = (0, 0)$ obtem-se então:

$$\frac{\partial (g \circ \varphi)_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0),$$

$$\frac{\partial (g \circ \varphi)_2}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Para calcular $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0)$, pode começar-se por derivar em ordem a x ambos os membros de cada uma das equações do sistema dado — considerando u e v como funções das “variáveis independentes” x e y — o que conduz a

$$1 - 3u^2(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0,$$

$$2x + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - 2v(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0,$$

e, particularizando para $x = y = 0$ (e portanto também $u = v = 0$),

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = -1$$

(e $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 0$, resultado que não era necessário calcular). Portanto:

$$\frac{\partial (g \circ \varphi)}{\partial x}(0, 0) = \left(\frac{\partial (g \circ \varphi)_1}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial (g \circ \varphi)_2}{\partial x}(0, 0) \right) = (-1, 0).$$

7.87 Volte a considerar o exercício 7.64. Suponha adicionalmente que $g(0,0) = 0$.

a) Indique condições suficientes relativas a g que garantam a definição duma função implícita $(x,z) \mapsto y = \varphi(x,z)$ numa vizinhança da origem através de $F(x,y,z) = 0$ com $\varphi(0,0) = 0$.

b) Justifique que naquelas condições φ é diferenciável em $(0,0)$ e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = -\frac{D_1 g(0,0)}{2D_2 g(0,0)}.$$

7.7 Estudo de extremos

7.88 Determine os extremos relativos da função $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = xye^{x-y}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 3/7/79)

7.89 a) Determine os extremos relativos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

b) O que pode afirmar sobre os extremos absolutos daquela função?

(Prova de Análise Matemática III de 29/1/79)

Resolução:

a) Tratando-se de uma função diferenciável os únicos candidatos a pontos de extremo são pontos onde o gradiente se anula. Ora $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (3x^2 - 3y, -3x + 3y^2)$ logo consideramos o sistema de estacionaridade $\nabla f(x,y) = (0,0)$ que toma a forma:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Portanto os candidatos a pontos de extremo são $(0,0)$ e $(1,1)$. Estudemos o sinal da forma quadrática definida por:

$$(h_1,h_2) = \boldsymbol{h} \mapsto D^2_{\boldsymbol{h}} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2^2$$

em $(0,0)$ e $(1,1)$. Temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$.

A forma quadrática reduz-se a $(h_1,h_2) \mapsto -6h_1h_2$ em $(0,0)$ que reconhece-se imediatamente como uma forma quadrática indefinida e portanto $(0,0)$ não é um ponto de extremo.

Em $(1,1)$ a forma quadrática[2] reduz-se a $(h_1,h_2) \mapsto 6h_1^2 - 6h_1h_2 + 6h_2^2 = 6\left((h_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}h_2)^2 + \frac{h_2^2}{2}\right)$ que se reconhece como definida positiva e portanto $(1,1)$ é um ponto de mínimo relativo.

b) Como $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ reconhecemos imediatamente que esta função não possui extremos absolutos.

[2] A classificação de formas quadráticas em $\mathbb{R}^2$ pode ser feita por diversos processos equivalentes. No texto desta solução optou-se por "completar o quadrado" o que não pressupôs conhecimentos especiais de Álgebra Linear. Alternativas equivalentes são, por exemplo, a determinação do sinal dos valores próprios da matriz hessiana, etc.

7.90 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$. Determine os extremos locais de f, indicando se são ou não extremos absolutos.

(Prova de Análise Matemática III de 27/4/81)

7.91 Idem, para $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

(Prova de Análise Matemática III de 14/3/81)

7.92 Considere uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, satisfazendo para todo o $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, as condições seguintes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = xu(x, t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = tu(x, t)$$

e $u(0, 0) = 1$. Mostre que u não admite um extremo local na origem.

(Prova de Análise Matemática III de 3/2/81)

Resolução: Vamos tentar usar um critério baseado na fórmula de Taylor para provar que uma tal função, se existir, não pode ter um extremo na origem. Uma condição necessária para existência de um extremo na origem é o gradiente da função em $(0, 0)$ ser $\mathbf{0}$. Ora

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = 0\, u(0, 0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0\, u(0, 0) = 0$$

pelo que aquele critério é inconclusivo. Consideramos então derivadas parciais de segunda ordem de u que se podem obter por derivação de ambos os membros das igualdades no enunciado.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\,\frac{\partial u}{\partial x} = t^2\, u(x, t),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\,(tu(x, t)) = u(x, t) + t\,\frac{\partial u}{\partial t} = u(x, t) + xt\, u(x, t),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\,\frac{\partial u}{\partial x} = x^2\, u(x, t).$$

pelo que particularizando em $(0, 0)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, 0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, 0) = 0.$$

A matriz hessiana de u em $(0, 0)$ é então

$$Hu(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

que define uma forma quadrática indefinida $(h, k) \mapsto 2hk$ pelo que $(0, 0)$ não é um ponto de extremo.

Resolução alternativa:
Sabendo que o gradiente de uma função é ortogonal às suas linhas de nível vamos tentar identificar as linhas de nível de u. Isto permitirá identificar u e resolver a questão posta.
Como

$$\nabla u(x, t) = u(x, t)(t, x)$$

e como qualquer função do produto xt, digamos $v(x,t) = f(xt)$, satisfaz $\nabla v(x,t) = f'(xt)(t,x)$ procuramos um tal f que deverá então satisfazer $f' = f$ e $f(0) = 1$. Sabemos que uma tal função é a exponencial e com efeito se considerarmos $u(x,t) = e^{xt}$ esta função satisfaz todas as condições do enunciado.
Poderiam no entanto existir outras funções satisfazendo as condições do enunciado. Se v fosse uma tal função facilmente verificamos que o gradiente de $e^{-xt}v(x,t)$ é $\mathbf{0}$ e portanto o produto $e^{-xt}v(x,t)$ é constante, constante essa que só poderá ser 1 devido ao valor em $(0,0)$ imposto.
Decorre então da identificação de u a não existência de extremo na origem, visto que a função $(x,t) \mapsto tx$ o não tem e que a função exponencial é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

7.93 Para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ considere a função definida por $f(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + xy$. Determine os seus pontos de estacionaridade consoante seja: 1) $ab > 0$; 2) $ab < 0$; 3) $ab = 0$ com $a^2 + b^2 \neq 0$; 4) $a^2 + b^2 = 0$. Em cada caso determine os extremos da função.

(Prova de Análise Matemática III de 23/7/80)

Resolução: Consideremos em primeiro lugar os casos 1) e 2). Os pontos de estacionaridade são os pontos (x,y) tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{a}{x^2} + y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{b}{y^2} + x = 0, \end{cases} \qquad \text{ou seja, tais que } x = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}},\ y = b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{3}}$$

(com $a \neq 0$ e $b \neq 0$).
Estudemos a natureza da forma quadrática

$$(h,k) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\, k^2$$

com $(x_0,y_0) = (a^{2/3}b^{-1/3}, a^{-1/3}b^{2/3})$. As derivadas parciais de segunda ordem de f em (x_0,y_0) tomam os valores:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 2b/a, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = 2a/b.$$

pelo que a matriz hessiana de f em (x_0,y_0) é:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 2b/a & 1 \\ 1 & 2a/b \end{bmatrix}.$$

Como o determinante desta matriz é 3 o ponto (x_0,y_0) será sempre um ponto de extremo. A classificação do extremo dependerá do sinal de $2b/a$ que é igual ao sinal de ab; ou seja, se $ab > 0$ trata-se de um ponto de mínimo e se $ab < 0$ trata-se de um ponto de máximo.
No caso 3) tem-se $a = 0$ e $b \neq 0$ ou $a \neq 0$ e $b = 0$. Na primeira destas suituações os pontos de estacionaridade obtêm-se a partir de:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \equiv y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{b}{y^2} + x = 0 \end{cases} \qquad \text{um sistema impossível!}$$

e analogamente se $b = 0$. No caso 3) não há portanto pontos de estacionaridade.
No caso 4) tem-se $a = 0$ e $b = 0$ pelo que o sistema de estacionaridade reduz-se a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv x = 0 \end{cases}$$

só tem uma solução que é $(0,0)$. A função $f(x,y)$ é nesse caso $f(x,y) = xy$ e $(0,0)$ é um ponto de sela.

7.94 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + (1 - \delta)x^2 y^2$$

em que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes reais. Mostre que não existem constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que, simultâneamente:

i) $(0, 0)$ seja um ponto mínimo de f;

ii) $(1, 1)$ seja um ponto de estacionaridade de f.

[**Sugestão**: Comece por mostrar que: (i) $\Longrightarrow \beta\gamma \geq 0$; (ii) $\Longrightarrow \beta + \gamma + 2 = 0$].

(Prova de Análise Matemática III de 19/2/83)

7.95 Considere a função definida por $f(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 1$.

a) Mostre que f possui um mínimo absoluto.

b) Mostre que o estudo baseado na fórmula de Taylor não permite classificar os pontos de estacionaridade.

(Prova de Análise Matemática III de 5/2/79)

7.96 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas nos seus domínios e defina-se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ através de $F = f \circ g$. Se φ for uma função real diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^p$, designa-se neste exercício o conjunto dos pontos de estacionaridade de φ por $E(\varphi)$.

a) Mostre que se f tem um máximo (resp. mínimo) num ponto $\boldsymbol{y}$ do contradomínio de g, então F tem um máximo (mínimo) nos pontos de $g^{-1}(\{\boldsymbol{y}\})$.

b) Suponha adicionalmente que f e g são funções diferenciáveis. Mostre que então: $E(F) = E(g) \cup g^{-1}(E(f))$.

c) Suponha adicionalmente que $n = 2$ e que f e g são funções de classe C^2. Mostre que se $(x_0, y_0) \in g^{-1}(E(f))$ o critério de classificação dos pontos de estacionaridade baseado no estudo do termo de 2ª ordem da fórmula de Taylor é inconclusivo.

d) Classifique os pontos de estacionaridade da função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 - y^2).$$

7.97 Estude a natureza dos pontos de estacionaridade da função definida por:

$$f(x, y) = (x - y)^3(3x - 3y - 4).$$

(Prova de Análise Matemática III de 20/2/79)

7.98 Idem, para $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y$.

(Prova de Análise Matemática III de 13/7/79)

7.99 Sejam f e g funções reais de variável real e defina-se no produto cartesiano dos seus domínios uma função real φ através de $\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$. Mostre que:

a) Se x_0 é um ponto de mínimo de f, y_0 um ponto de máximo de g e (x_0, y_0) um ponto de extremo de φ então ou f é constante numa vizinhança de x_0 ou g é constante numa vizinhança de y_0.

b) Se x_0 não é ponto de extremo de f então (x_0, y_0) não é ponto de extremo de φ, qualquer que seja y_0 no domínio de g.

c) Se x_0 é um ponto de mínimo de f e y_0 um ponto de mínimo de g então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo de φ.

7.100 Determine os extremos locais da função $f(x,y) = y^4 + x^2 - x^3$, indicando quais desses extremos são absolutos.

(Prova de Análise Matemática III de 8/3/79)

7.101 Determine o máximo (absoluto) da função definida no 1º quadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) por $f(x,y) = x^2y^3(1 - x - y)$.

(Prova de Análise Matemática III de 26/1/89)

7.102 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4.$$

a) Determine os extremos relativos de f.

b) Determine os extremos absolutos da restrição de f ao quadrado Q definido por:

$$Q = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 27/2/81)

7.103 a) Determine as seis rectas constituídas por pontos de estacionaridade da função definida por $g(x,y,z) = xyz(x + y + z - 1)$.

b) Mostre, sem recurso a derivadas de ordem superior à primeira, que a função não tem extremo em qualquer dos pontos daquelas rectas.

c) Diga se a função tem um máximo ou mínimo relativo nos restantes pontos de estacionaridade.

(Prova de Análise Matemática III de 12/7/80)

7.104 a) Entre os pontos que verificam a equação $x^2 + y^2 = 16$, determine pelo método dos multiplicadores de Lagrange, aquele que está mais próximo do ponto $A = (2,1)$ e determine a distância do ponto A àquela circunferência.

b) Confirme o valor da distância obtida, determinando-a por um processo elementar.

(Prova de Análise Matemática III de 29/1/79)

7.105 a) Determine os extremos e os extremos absolutos da restrição da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ ao conjunto $\{(x,y) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

b) Justifique o facto dos pontos obtidos serem efectivamente extremos absolutos.

(Prova de Análise Matemática III de 29/2/80)

7.106 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2x$.

a) Determine os extremos locais de f.

b) Que pode afirmar quanto à existência de extremos absolutos de f em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$?

(Prova de Análise Matemática III de 9/2/81)