Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias
Faculdade de Engenharia e Ciências Naturais

Cálculo I

Licenciaturas em
Ciências do Mar, Engenharia do Ambiente, Engenharia Biotecnológica,
Engenharia Electrotécnica, Engenharia e Gestão Industrial e Química
1º Semestre 2008/2009

Folhas de apoio

VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

➢ *Valor absoluto ou módulo*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } \quad \begin{array}{l} |x| = x \quad \text{se } x \geq 0 \\ |x| = -x \quad \text{se } x < 0 \end{array}.$$

➢ *Propriedades*
Sejam $x, y \in \mathbb{R}$

Gerais	Operações	Condições
• $\lvert x\rvert \geq 0$	• $\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ (Desigualdade Triangular)	• $\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$
• $-\lvert x\rvert \leq x \leq \lvert x\rvert$	• $\lvert x \pm y\rvert \geq \big\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \big\rvert$	• $\lvert x\rvert = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a,\ a > 0$
• $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$	• $\lvert x-y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	• $\lvert x\rvert < a \Leftrightarrow x < a \wedge x > -a,\ a > 0$
	• $\lvert x \times y\rvert = \lvert x\rvert \times \lvert y\rvert$	• $\lvert x\rvert > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$
	• $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert},\ y \neq 0$	• $\lvert x\rvert = \lvert y\rvert \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$
	• n par : $\lvert x^n\rvert = x^n$ n ímpar : $\lvert x^n\rvert = \lvert x\rvert^n$	• $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$
		• $\lvert x\rvert < \lvert y\rvert \Leftrightarrow x^2 < y^2$
		• $\lvert x\rvert < \lvert y\rvert \wedge y \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert} < 1$

- *Casos particulares*

  Seja $x \in \mathbb{R}$

  - $|x| < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$
  - $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\}$
  - $|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
  - $|x| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

MAJORANTE, MINORANTE, SUPREMO, ÍNFIMO, MÁXIMO DE UM CONJUNTO. CONJUNTO LIMITADO

Seja $A \neq \varnothing$ e $A \subseteq \mathbb{R}$.

- a é *majorante* de A $\Leftrightarrow \forall x \in A,\ a \geq x$
- b é *supremo* de A $\Leftrightarrow$ b é o menor dos majorantes de A
- b é *máximo* de A $\Leftrightarrow b = \sup(A)$ e $b \in A$
- c é *minorante* de A $\Leftrightarrow \forall x \in A,\ c \leq x$
- d é *ínfimo* de A $\Leftrightarrow$ d é o maior dos minorantes de A
- d é *mínimo* de A $\Leftrightarrow d = \inf(A)$ e $d \in A$
- A é *limitado* sse é majorado e minorado, isto é, limitado superiormente e inferiormente.

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

➢ *Sucessão de números reais*

$$\begin{aligned} u:\mathbb{N} &\to \mathbb{R} & \quad n &- \text{Ordem} \\ n &\mapsto u_n & \quad u_n &- \text{Termo geral} \end{aligned}$$

➢ *Sucessão crescente, sucessão decrescente e sucessão monótona*

- (u_n) é <u>*crescente*</u> $\left\langle \begin{array}{l} \underline{\textit{em sentido estrito}} - \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n \\ \underline{\textit{em sentido lato}} - \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n \end{array} \right.$

- (u_n) é <u>*decrescente*</u> $\left\langle \begin{array}{l} \underline{\textit{em sentido estrito}} - \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n \\ \underline{\textit{em sentido lato}} - \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n \end{array} \right.$

- (u_n) é <u>*monótona*</u> $\Leftrightarrow$ (u_n) é crescente ou decrescente.

<u>*Propriedades*</u>

- Se (u_n) é crescente então $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_1$, ou seja, u_1 é o mínimo do conjunto dos termos de (u_n).
- Se (u_n) é decrescente então $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_1$, ou seja, u_1 é o máximo do conjunto dos termos de (u_n).

➢ *Sucessão limitada*

(u_n) é <u>*limitada*</u> $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ a \leq u_n \leq b$

ou equivalentemente

(u_n) é <u>*limitada*</u> $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq L$

➢ *Sucessão convergente*

(u_n) é <u>*convergente*</u> para $a \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Neste caso escrevemos $\lim u_n = a$.

<u>*Propriedades*</u>

- O limite de uma sucessão quando existe, é único.
- Toda a sucessão constante é convergente e tem por limite a constante dos seus termos.
- Se uma sucessão é convergente para a, então qualquer sua subsucessão é também convergente para a.
- Se uma sucessão é monótona e limitada é convergente.

Casos particulares:

— Se for crescente e majorada é convergente.

— Se for decrescente e minorada é convergente.

- Se (u_n) é convergente, então (u_n) é limitada.
- Se a sucessão convergente (u_n) é, a partir de certa ordem, $u_n \geq 0$, então $\lim u_n \geq 0$.
- Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, e, a partir de certa ordem, se tem $u_n \geq v_n$, então, $\lim u_n \geq \lim v_n$.

➢ *Sucessão divergente*

(u_n) é *divergente* se:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n - a| \geq \varepsilon$$

Infinitamente grande positivo

- (u_n) diverge para $+\infty$ se:

  $$\forall L > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow u_n > L.$$

  Neste caso escrevemos $\lim u_n = +\infty$.

Infinitamente grande negativo

- (u_n) diverge para $-\infty$ se:

  $$\forall L > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow -u_n > L.$$

  Neste caso escrevemos $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.

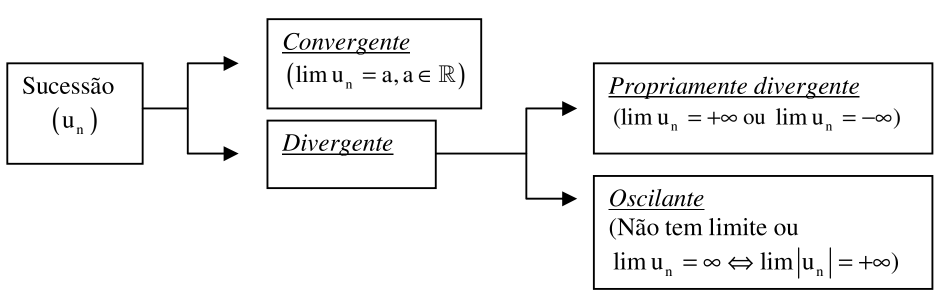
Infinitamente grande

- (u_n) é um infinitamente grande se:

  $$\forall L > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |u_n| > L.$$

  Neste caso escrevemos $\lim u_n = \infty \Leftrightarrow \lim |u_n| = +\infty$.

➢ *Classificação da sucessão quanto à existência e natureza do limite*



➢ *Propriedades dos limites*

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes, respectivamente, para a e b.

— $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a + b$

— $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = a - b$

— $\lim(u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n = a \times b$

— $\lim(\alpha \times u_n) = \alpha \times \lim u_n = \alpha \times a,\ \alpha \in \mathbb{R}$

— $\lim(u_n)^p = (\lim u_n)^p = (a)^p,\ p \in \mathbb{N}$

— $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n} = \dfrac{a}{b},\ \lim v_n \neq 0$ e $v_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

— $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n} = \sqrt[p]{a},\ \forall p \in \mathbb{N}$ (se p for par, terá de ser $u_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$)

— $\lim|u_n| = |\lim u_n| = |a|$

— $\lim\left(a^{u_n}\right) = a^{\lim u_n},\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

— $\lim\left({u_n}^{v_n}\right) = (\lim u_n)^{\lim v_n},\ u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

— $\lim \log_a(u_n) = \log_a(\lim u_n),\ u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

— Se $\lim|u_n| = +\infty$, então $\lim\left(1 + \dfrac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k,\ \forall k \in \mathbb{R}$

— Se $\lim u_n = a$, então $\lim \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} = a$

— Se $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim u_n = a$, então $\lim \sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n} = a$

— Se $\lim(u_n - u_{n-1}) = a$, então $\lim \dfrac{u_n}{n} = a$

— Se (v_n) é estritamente crescente e não limitada, e $\lim\left(\dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}\right) = a$, então $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = a$

— Se $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$, então $\lim \sqrt[n]{u_n} = a$

— Se $v_n \leq u_n$ para $n > p\ (p \in \mathbb{N})$ e $\lim v_n = +\infty$, então $\lim u_n = +\infty$

— Se $u_n \leq v_n$ para $n > p\ (p \in \mathbb{N})$ e $\lim v_n = -\infty$, então $\lim u_n = -\infty$

Teorema

O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.

Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} \lim u_n = 0 \\ v_n \text{ é uma sucessão limitada} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(u_n \times v_n) = 0$$

Teorema das sucessões enquadradas

Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes para o mesmo limite a e se, a partir de certa ordem, a sucessão (w_n) é tal que $u_n \leq w_n \leq v_n$, então, $\lim w_n = a$.

Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \leq w_n \leq v_n, \text{ para } n \geq p\ (p \in \mathbb{N}) \\ \lim u_n = a \text{ e } \lim v_n = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim w_n = a$$

➢ *Limites notáveis*

No cálculo de alguns limites utiliza-se muitas vezes os conhecimentos seguintes:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to -\frac{\beta}{\alpha}}\dfrac{\text{sen}(\alpha x+\beta)}{\alpha x+\beta}=1,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}(x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^p}=+\infty,\ p\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\log(x)}{x^p}=0,\ p\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{x+1}=0$

➢ *Operações com limites*

$\lim u_n = a\in\mathbb{R}$ $\lim v_n = b\in\mathbb{R}$	$\lim(u_n+v_n)=a+b$
	$\lim(u_n\times v_n)=a\times b$
	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{a}{b},\ v_n\neq 0 \text{ e } b\neq 0$

$\lim u_n = a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\lim v_n = +\infty$	$\lim(u_n+v_n)=a+(+\infty)=+\infty$
	$\lim(u_n\times v_n)=a\times(+\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{se } a>0\\ -\infty & \text{se } a<0\end{cases}$
	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{a}{+\infty}=0$
	$\lim\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{+\infty}{a}=\begin{cases}+\infty & \text{se } a>0\\ -\infty & \text{se } a<0\end{cases}$

$\lim u_n = a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\lim v_n = -\infty$	$\lim(u_n+v_n)=a+(-\infty)=-\infty$
	$\lim(u_n\times v_n)=a\times(-\infty)=\begin{cases}-\infty & \text{se } a>0\\ +\infty & \text{se } a<0\end{cases}$
	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{a}{-\infty}=0$
	$\lim\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{-\infty}{a}=\begin{cases}-\infty & \text{se } a>0\\ +\infty & \text{se } a<0\end{cases}$

$\lim u_n = +\infty$ $\lim v_n = +\infty$	$\lim(u_n+v_n)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
	$\lim(u_n\times v_n)=(+\infty)\times(+\infty)=(+\infty)$
	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação)

$\lim u_n = -\infty$ $\lim v_n = -\infty$	$\lim(u_n + v_n) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ $\lim(u_n \times v_n) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{-\infty}{-\infty}$ (Indeterminação)

$\lim u_n = +\infty$ $\lim v_n = -\infty$	$\lim(u_n + v_n) = (+\infty) + (-\infty) = \infty - \infty$ (Indeterminação) $\lim(u_n \times v_n) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{+\infty}{-\infty}$ (Indeterminação)

$\lim u_n = 0$ $\lim v_n = +\infty$	$\lim(u_n + v_n) = 0 + (+\infty) = +\infty$ $\lim(u_n \times v_n) = 0 \times (+\infty)$ (Indeterminação) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{0}{+\infty} = 0$ $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{+\infty}{0} = \left\langle \begin{array}{l} +\infty \text{ se } \lim u_n = 0^+ \\ -\infty \text{ se } \lim u_n = 0^- \end{array} \right.$

$\lim u_n = 0$ $\lim v_n = -\infty$	$\lim(u_n + v_n) = 0 + (-\infty) = -\infty$ $\lim(u_n \times v_n) = 0 \times (-\infty)$ (Indeterminação) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{0}{-\infty} = 0$ $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{-\infty}{0} = \left\langle \begin{array}{l} -\infty \text{ se } \lim u_n = 0^+ \\ +\infty \text{ se } \lim u_n = 0^- \end{array} \right.$

$\lim u_n = +\infty$	$\lim u_n{}^p = +\infty$ $p \in \mathbb{N}$

$\lim u_n = -\infty$	$\lim u_n{}^p = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \text{ e par} \\ -\infty & \text{se } p \text{ e ímpar} \end{cases}$

$\lim u_n = +\infty$	$\lim \sqrt[p]{u_n} = +\infty$ se $u_n \geq 0$, no caso de p ser par

$\lim u_n = -\infty$	$\lim \sqrt[p]{u_n} = -\infty$ p é um n.º natural ímpar

$\lim u_n = 0$ $\lim v_n = 0$	$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

➢ *Como levantar indeterminações*

Indeterminações	Casos	Como levantar a indeterminação	Exemplo
$\frac{\infty}{\infty}$	O numerador e o denominador são polinómios em n.	Dividem-se ambos os termos da fracção pela maior potência em n.	$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+3n}{5n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}+\frac{3n}{n^3}}{\frac{5n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}$
	Um só dos termos da fracção é uma expressão irracional ($\sqrt{\ }$) em n.	Dividem-se ambos os termos da fracção pela maior potência de n situada fora do radical	$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n}}{\frac{n+3}{n}}$
	Ambos os termos da fracção são expressões irracionais ($\sqrt{\ }$) em n.	Dividem-se ambos os termos da fracção pela maior potência em n.	$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}$ Repare que : $\sqrt{n}=n^{1/2}$, $\sqrt[3]{n}=n^{1/3}$, $\sqrt[3]{n^2}=n^{2/3}$ sendo $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$
	Ambos os termos da fracção apresentam potência de expoente variável	Divide-se ambos os termos da fracção pela potência de expoente variável cuja base tem maior valor absoluto	$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+3^n}{1+2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3^n}+\frac{3^n}{3^n}}{\frac{1}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}$
$0\times\infty$	A sucessão é um produto entre uma: -Sucessão racional em que o grau do numerador é inferior ao grau do denominador e -Sucessão polinomial em n	Multiplicam-se as duas sucessões.	$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3}{n^2+1}\,(2n+3)\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{6n+9}{n^2+1}$
$\frac{0}{0}$	A sucessão é uma divisão entre duas sucessões racionais, em que o grau do numerador de cada uma delas é inferior ao grau do denominador	Dividem-se as duas sucessões.	$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{5}{2n+1}}{\frac{3}{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2n+1}\times\frac{n^2+1}{3}\right)$
$\infty-\infty$	A sucessão é um polinómio em n	Põe-se em evidência a maior potência de n	$\lim_{n\to+\infty}(n^2-n)=\lim_{n\to+\infty}\left[n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$
	A sucessão é uma diferença entre: -radical e uma expressão em n, -uma diferença entre dois radicais	Multiplica-se e divide-se a sucessão pelo conjugado	$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+5}-n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+5}-n\right)\left(\sqrt{n+5}+n\right)}{\sqrt{n+5}+n}$ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+5}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}$

➢ *Progressões*

	Definição	Termo geral	Soma dos n primeiros termos
Aritmética	$u_{n+1} - u_n = r,\ \forall n \in \mathbb{N}$	$u_n = u_1 + (n-1) \times r,\ \forall n \in \mathbb{N}$	$S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$
Geométrica	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r,\ \forall n \in \mathbb{N}$	$u_n = u_1 \times r^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}$	$r \neq 1 \Rightarrow S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ $r = 1 \Rightarrow S_n = \underbrace{u_1 + u_1 + \ldots + u_1}_{n \text{ parcelas}} = n \times u_1$

➢ *Estudo da sucessão:* (a^n), $a \in \mathbb{R}$

VALORES DE a	MONOTONIA	LIMITE	CLASSIFICAÇÃO
$a > 1$	Estritamente crescente	$+\infty$	Propriamente divergente
$a = 1$	Constante	1	Convergente
$0 < a < 1$	Estritamente decrescente	0	Convergente
$a = 0$	Constante	0	Convergente
$-1 < a < 0$	Não monótona	0	Convergente
$a = -1$	Não monótona	Não existe	Divergente oscilante
$a < -1$	Não monótona	∞	Divergente oscilante

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$.
Seja a função

$$\begin{aligned} f:A &\to B \\ x &\mapsto y=f(x) \end{aligned}$$

➢ *Caracterização de uma função*

Uma função fica *caracterizada ou definida* quando se indica:

— o domínio
— o contradomínio
— a lei que permite associar a cada elemento do domínio (A) um único valor do conjunto de chegada (B).

➢ *Domínio, contradomínio, zeros, classificação, simetrias, monotonia e período*

Domínio	O *domínio* da função é o conjunto dos valores da variável independente (x) para os quais a expressão $y=f(x)$ tem significado	*Geometricamente:* O domínio de uma função pode ser identificado pela projecção ortogonal do gráfico da função sobre o eixo das abcissas
Contradomínio	$D'_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D_f\}$	*Geometricamente:* O contradomínio de uma função pode ser identificado pela projecção ortogonal do gráfico de f sobre o eixo das ordenadas
Zeros	$a \in D_f$ é *zero da função f* $\Leftrightarrow f(a) = 0$	*Geometricamente:* O gráfico da função intersecta o eixo das abcissas nos pontos de coordenadas (a,0)
Classificação	• f é *sobrejectiva* $\Leftrightarrow D'_f = B \Leftrightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A : y = f(x)$ • f é *injectiva* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_f,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ • f é *bijectiva* se é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.	
Simetrias	f é uma *função par* $\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$	*Geometricamente:* O gráfico da função é simétrico em relação ao eixo das ordenadas
	f é uma *função ímpar* $\Leftrightarrow \forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$	*Geometricamente:* O gráfico da função é simétrico em relação à origem do referencial
Monotonia	• f é *crescente* em $I \subset D_f$ $\begin{cases} \underline{\textit{em sentido estrito}} - \forall x_1, x_2 \in I : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \underline{\textit{em sentido lato}} - \forall x_1, x_2 \in I : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases}$ • f é *decrescente* em $I \subset D_f$ $\begin{cases} \underline{\textit{em sentido estrito}} - \forall x_1, x_2 \in I : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \underline{\textit{em sentido lato}} - \forall x_1, x_2 \in I : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{cases}$	
Período	f tem período p $\Leftrightarrow f(x+p) = f(x),\ \forall x \in D_f$	

FUNÇÃO				DOMÍNIO
Função Algébrica	**Racional**	**Inteira** $y = A(x)$		$\mathbb{R}$
		Fraccionária $y = \frac{A(x)}{B(x)}$		$\{x \in \mathbb{R} : B(x) \neq 0\}$
	Irracional	**De índice par** $y = \sqrt[n]{A(x)}$		$\{x \in \mathbb{R} : A(x) \geq 0\}$
		De índice ímpar	**Radicando inteiro** $y = \sqrt[n]{A(x)}$	$\mathbb{R}$
			Radicando fraccionário $y = \sqrt[n]{\frac{A(x)}{B(x)}}$	$\{x \in \mathbb{R} : B(x) \neq 0\}$
Função Transcendente	**Função exponencial**			Sendo o expoente uma função algébrica o domínio determina-se aplicando ao expoente as regras das funções algébricas.
	Função logarítmica $y = \ln[A(x)]$			$\{x \in \mathbb{R} : A(x) > 0\}$
	Função circulares	**Directas**	$y = \text{sen}[A(x)]$ $y = \cos[A(x)]$	$\mathbb{R}$
			$y = \text{tg}[A(x)] = \frac{\text{sen}[A(x)]}{\cos[A(x)]}$	$\{x \in \mathbb{R} : \cos[A(x)] \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ Limitando ao intervalo $[0, 2\pi]$: $\left\{x \in \mathbb{R} : A(x) \neq \frac{\pi}{2} \vee A(x) \neq \frac{3}{2}\pi\right\}$ $= \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < A(x) < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < A(x) < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{3}{2}\pi < A(x) < 2\pi\right\}$
			$y = \text{cotg}[A(x)] = \frac{\cos[A(x)]}{\text{sen}[A(x)]}$	$\{x \in \mathbb{R} : \text{sen}[A(x)] \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : A(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Limitando ao intervalo $[0, 2\pi]$: $\{x \in \mathbb{R} : A(x) \neq 0 \vee A(x) \neq \pi \vee A(x) \neq 2\pi\}$ $= \{x \in \mathbb{R} : 0 < A(x) < \pi \vee \pi < A(x) < 2\pi\}$
		Inversas	$y = \text{arc sen}[A(x)]$ $y = \text{arc cos}[A(x)]$	$\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq A(x) \leq 1\}$
			$y = \text{arc tg}[A(x)]$ $y = \text{arc cotg}[A(x)]$	$\mathbb{R}$

Nota: A(x) e B(x) são polinómios

➢ *Função inversa*

Se $\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto y \end{array}$ é uma função bijectiva, então a *função inversa* de f é a função $$\begin{array}{l} f^{-1}: B \to A \\ y \mapsto x \end{array}$$ tal que: $\boxed{x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x),\ \forall x \in A,\ \forall y \in B}$	Se $\begin{array}{l} f: A \to B \\ x \mapsto y \end{array}$ é uma função injectiva mas não sobrejectiva, então a *função inversa* de f é a função $$\begin{array}{l} f^{-1}: f(A) \to A \\ y \mapsto x \end{array}$$ tal que: $\boxed{x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x),\ \forall x \in A,\ \forall y \in f(A)}$

Definição

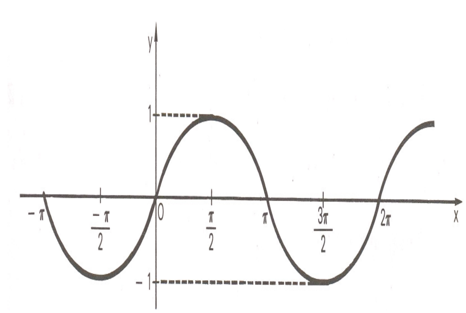
Uma função diz-se *invertível* se admite função inversa.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E TRIGONOMETRIA

➢ *Função seno*

Chama-se *função seno* à função:

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to [-1,1] \\ x \mapsto \operatorname{sen}(x) \end{array}$$

Propriedades		Representação gráfica
Domínio	$D_f = \mathbb{R}$	
Contradomínio	$D'_f = \left\{ y \in \mathbb{R} : -1 \leq \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{y} \leq 1 \right\} = [-1,1]$	
Paridade	A função $y = \operatorname{sen} x$ é uma função ímpar, isto é, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x), \forall x \in D_f$	
Período (positivo mínimo)	A função $y = \operatorname{sen} x$ tem período 2π, isto é, $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen}(x), \forall x \in D_f, \forall k \in \mathbb{Z}$	
Zeros	$\operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	
Monotonia (no intervalo $[0, 2\pi]$)	A função $y = \operatorname{sen} x$ nos intervalos: • $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ é crescente • $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ é decrescente	

➢ *Função arco seno*

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa.
Consideremos uma restrição g de f que seja injectiva (restrição principal):

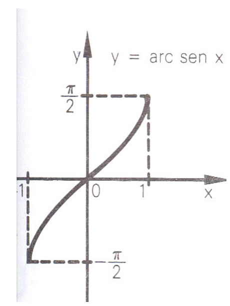
$$g:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$
$$x\mapsto \operatorname{sen}(x)$$

A função inversa de g será:

$$g^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x\mapsto \operatorname{arc\,sen}(x)$$

a que se dá o nome de <u>*função arco seno*</u>.
Então:

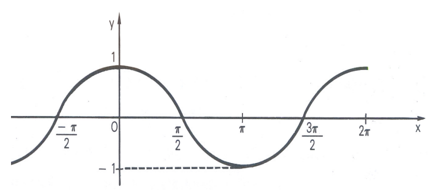
$$\boxed{y=\operatorname{sen}(x)\Leftrightarrow x=\operatorname{arc\,sen}(y)}$$

Propriedades		Representação gráfica
Domínio	$D_{g^{-1}}=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\le 1\}=[-1,1]$	
Contradomínio	$D'_{g^{-1}}=\left\{y\in\mathbb{R}:-\frac{\pi}{2}\le\underbrace{\operatorname{arc\,sen}(x)}_{y}\le\frac{\pi}{2}\right\}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	
Paridade	A função $y=\operatorname{arc\,sen}(x)$ é uma função ímpar, isto é, $\operatorname{arc\,sen}(-x)=-\operatorname{arc\,sen}(x),\forall x\in D_{g^{-1}}$	
Zeros	$\operatorname{arc\,sen}(x)=0\Leftrightarrow x=\operatorname{sen}(0)\Leftrightarrow x=0$	
Monotonia	A função $y=\operatorname{arc\,sen}(x)$ é crescente em $D_{g^{-1}}$	

➢ *Função coseno*

Chama-se <u>*função coseno*</u> à função:

$$f:\mathbb{R}\to[-1,1]$$
$$x\mapsto\cos(x)$$

Propriedades		Representação gráfica
Domínio	$D_f=\mathbb{R}$	
Contradomínio	$D'_f=\left\{y\in\mathbb{R}:-1\le\underbrace{\cos(x)}_{y}\le 1\right\}=[-1,1]$	
Paridade	A função $y=\cos(x)$ é uma função par, isto é, $\cos(-x)=\cos(x),\forall x\in D_f$	
Período (positivo mínimo)	A função $y=\cos(x)$ tem período 2π, isto é, $\cos(x+2k\pi)=\cos(x),\ \forall x\in D_f,\forall k\in\mathbb{Z}$	
Zeros	$\cos(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$	
Monotonia (no intervalo $[0,2\pi]$)	A função $y=\cos(x)$ nos intervalos: • $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ é decrescente • $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ é crescente	

➢ *Função arco coseno*

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa.
Consideremos uma restrição g de f que seja injectiva (restrição principal):

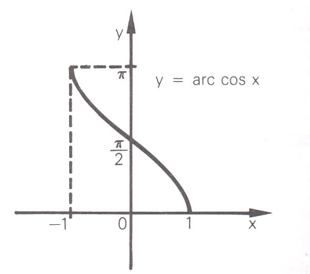
$$\begin{aligned} g : [0,\pi] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

A função inversa de g será:

$$\begin{aligned} g^{-1} : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

a que se dá o nome de <u>*função arco coseno*</u>.
Então:

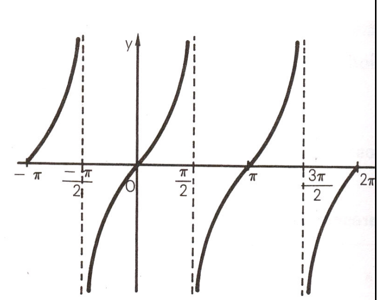
$$\boxed{y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \arccos(y)}$$

Propriedades		**Representação gráfica**
Domínio	$D_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1\} = [-1,1]$	
Contradomínio	$D'_{g^{-1}} = \left\{ y \in \mathbb{R} : 0 \le \underbrace{\arccos(x)}_{y} \le \pi \right\} = [0,\pi]$	
Zeros	$\arccos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \cos(0) \Leftrightarrow x = 1$	
Monotonia	A função $y = \arccos(x)$ é decrescente em $D_{g^{-1}}$	

➢ *Função tangente*

Chama-se <u>*função tangente*</u> à função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{tg}(x) \end{aligned}$$

Propriedades		**Representação gráfica**
Domínio	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \ne 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ $= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	
Contradomínio	$D'_f = \mathbb{R}$	
Paridade	A função $y = \operatorname{tg}(x)$ é uma função ímpar, isto é, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x), \forall x \in D_f$	
Período (positivo mínimo)	A função $y = \operatorname{tg}(x)$ tem período π, isto é, $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg}(x), \forall x \in D_f, \forall k \in \mathbb{Z}$	
Zeros	$\operatorname{tg}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 0 \wedge \cos(x) \ne 0$ $\Leftrightarrow x = k\pi \wedge x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	
Monotonia	A função $y = \operatorname{tg} x$ é crescente em D_f	

➢ *Função arco tangente*

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa.
Consideremos uma restrição g de f que seja injectiva (restrição principal):

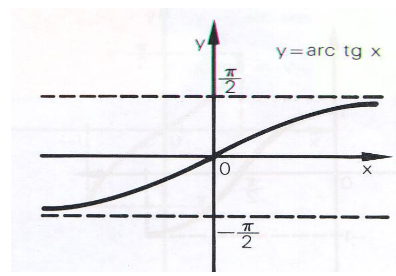
$$g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{tg}(x)$$

A função inversa de g será:

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto \operatorname{arc\,tg}(x)$$

a que se dá o nome de <u>*função arco tangente*</u>.
Então:

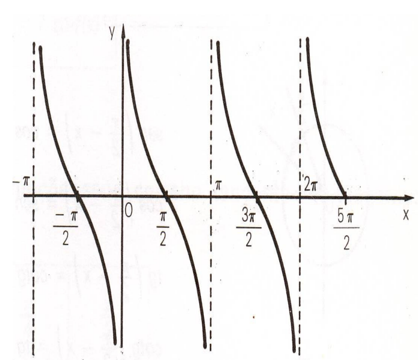
$$\boxed{y = \operatorname{tg}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,tg}(y)}$$

Propriedades		Representação gráfica
Domínio	$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$	
Contradomínio	$D'_{g^{-1}} = \left\{ y \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} < \underbrace{\operatorname{arc\,tg}(x)}_{y} < \frac{\pi}{2} \right\} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	
Paridade	A função $y = \operatorname{arc\,tg} x$ é uma função ímpar, isto é, $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg}(x), \forall x \in D_{g^{-1}}$	
Zeros	$\operatorname{arc\,tg}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(0) \Leftrightarrow x = 0$	
Monotonia	A função $y = \operatorname{arc\,tg}(x)$ é crescente em $D_{g^{-1}}$	

➢ *Função cotangente*

Chama-se <u>*função cotangente*</u> à função:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{cotg}(x)$$

Propriedades		Representação gráfica
Domínio	$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ $= \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	
Contradomínio	$D'_f = \mathbb{R}$	
Paridade	A função $y = \operatorname{cotg}(x)$ é uma função ímpar, isto é, $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x), \forall x \in D_f$	
Período (positivo mínimo)	A função $y = \operatorname{cotg}(x)$ tem período π, isto é, $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg}(x), \forall x \in D_f$	
Zeros	$\operatorname{cotg}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \wedge \operatorname{sen}(x) \neq 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	
Monotonia	A função $y = \operatorname{cotg} x$ é decrescente em D_f	

➢ *Função arco cotangente*

A função f não é injectiva; logo, não admite inversa.
Consideremos uma restrição g de f que seja injectiva (restrição principal):

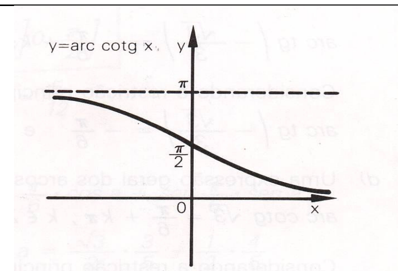
$$\begin{aligned} g : \left]0,\pi\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{cotg}(x) \end{aligned}$$

A função inversa de g será:

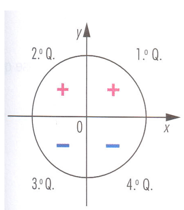
$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R} &\to \left]0,\pi\right[\\ x &\mapsto \operatorname{arc\,cotg}(x) \end{aligned}$$

a que se dá o nome de *<u>função arco cotangente</u>*.
Então:

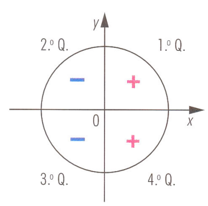
$$\boxed{y = \operatorname{cotg}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,cotg}(y)}$$

Propriedades		**Representação gráfica**
Domínio	$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$	
Contradomínio	$D'_{g^{-1}} = \left\{ y \in \mathbb{R} : 0 < \underbrace{\operatorname{arc\,cotg}(x)}_{y} < \pi \right\} = \left]0,\pi\right[$	
Zeros	Não tem zeros	
Monotonia	A função $y = \operatorname{arc\,cotg}(x)$ é decrescente em $D_{g^{-1}}$	

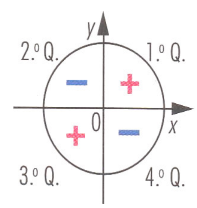
➢ *Sinais das funções trigonométricas*



Sinal do seno

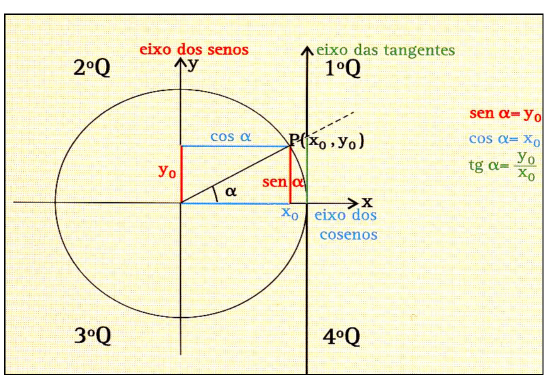


Sinal do coseno



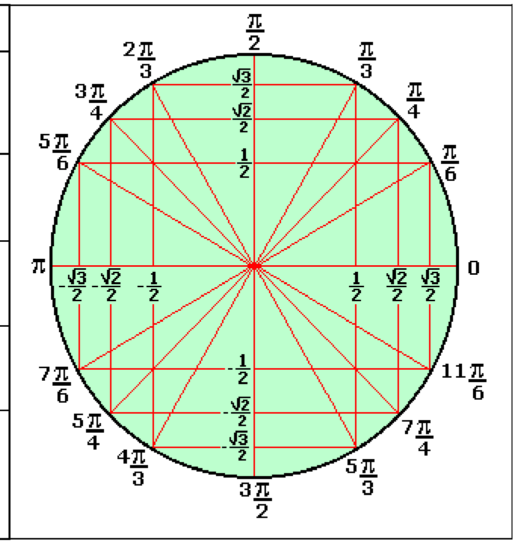
Sinal da tangente e da cotangente

➢ *Seno, coseno e tangente de um ângulo no círculo trigonométrico*



➢ *Valores das funções trigonométricas*

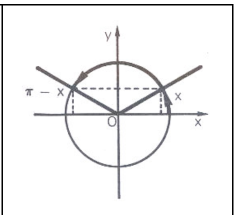
Função \ Ângulo	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nd	0	nd	0
cotangente	nd	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nd	0	nd



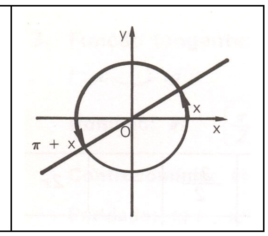
Notação: nd - não definido

➢ *Redução ao primeiro quadrante*

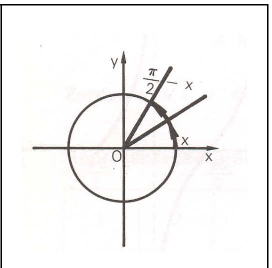
- $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg}(x)$
- $\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg}(x)$



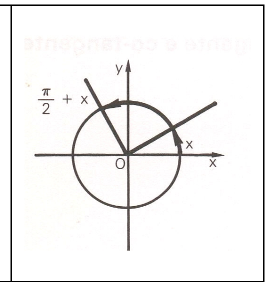
- $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen}(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg}(x)$
- $\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg}(x)$



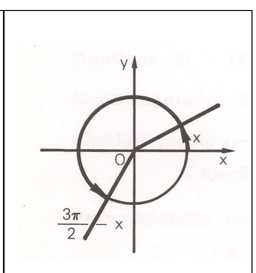
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x)$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg}(x)$
- $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}(x)$



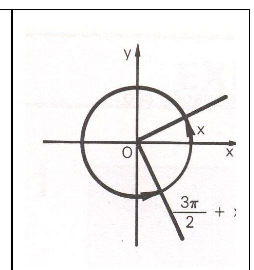
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen}(x)$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotg}(x)$
- $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg}(x)$



- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}(x)$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg}(x)$
- $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}(x)$



- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}(x)$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotg}(x)$
- $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg}(x)$



➢ Relações fundamentais

• $\operatorname{tg}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$	• $\operatorname{cotg}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$
• $\sec(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$	• $\operatorname{cosec}(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$
• $1+\operatorname{tg}^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}=\sec^2(x)$	• $1+\operatorname{cotg}^2(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}=\operatorname{cosec}^2(x)$
• $\operatorname{cotg}(x)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$	• $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$

➢ Equações trigonométricas

Supondo α uma das soluções:

• $\operatorname{sen}(x)=a \wedge a\in[-1,1] \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x)=\operatorname{sen}(\alpha)$

$\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \vee x=(\pi-\alpha)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

• $\cos(x)=a \wedge a\in[-1,1] \Leftrightarrow \cos(x)=\cos(\alpha)$

$\Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \vee x=-\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

• $\operatorname{tg}(x)=a \wedge a\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x)=\operatorname{tg}(\alpha)$

$\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

• $\operatorname{cotg}(x)=a \wedge a\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{cotg}(x)=\operatorname{cotg}(\alpha)$

$\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

➢ Fórmulas trigonométricas

Fórmulas da soma e da diferença de ângulos

• $\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}(a)\times\cos(b)\pm\cos(a)\times\operatorname{sen}(b)$

• $\cos(a\pm b)=\cos a\times\cos(b)\mp\operatorname{sen}(a)\times\operatorname{sen}(b)$

• $\operatorname{tg}(a\pm b)=\dfrac{\operatorname{tg}(a)\pm\operatorname{tg}(b)}{1\mp\operatorname{tg}(a)\times\operatorname{tg}(b)}$

• $\operatorname{cotg}(a\pm b)=\dfrac{\operatorname{cotg}(a)\times\operatorname{cotg}(b)\mp1}{\operatorname{cotg}(a)\pm\operatorname{cotg}(b)}$

Fórmulas de duplicação

• $\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}(a)\cos(a)=\dfrac{2\operatorname{tg}(a)}{1+\operatorname{tg}^2(a)}$

• $\cos(2a)=\cos^2(a)-\operatorname{sen}^2(a)=1-2\operatorname{sen}^2(a)$

$=2\cos^2(a)-1=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(a)}{1+\operatorname{tg}^2(a)}$

• $\operatorname{tg}(2a)=\dfrac{2\operatorname{tg}(a)}{1-\operatorname{tg}^2(a)}$

• $\operatorname{cotg}(2a)=\dfrac{\operatorname{cotg}^2(a)-1}{2\operatorname{cotg}(a)}$

Fórmulas de bissecção

- $\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$
- $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$
- $\operatorname{cotg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{1-\cos(a)}}$

Fórmulas de transformação logarítmica

- $\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\frac{(a-b)}{2}$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Potências de funções

$$\operatorname{sen}^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

➢ *Trigonometria hiperbólica*

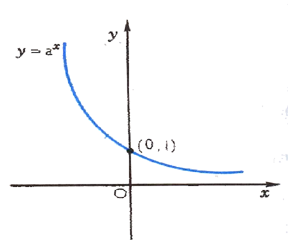
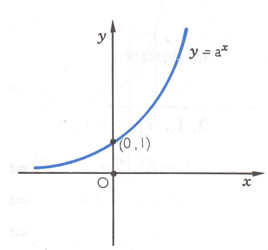
- $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *(seno hiperbólico de x)*
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *(coseno hiperbólico de x)*
- $\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *(tangente hiperbólica de x)*
- $\operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *(cotangente hiperbólica de x)*
- $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$ *(Relação fundamental da trigonometria hiperbólica)*

FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

➢ *Função exponencial*

Chama-se <u>função exponencial de base a</u> à função:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

	$0 < a < 1$	$a > 1$
Representação gráfica		
Propriedades	• $D = \mathbb{R},\ D' = \mathbb{R}^+$ • f é uma função estritamente decrescente • f não tem zeros • $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+$	• $D = \mathbb{R},\ D' = \mathbb{R}^+$ • f é uma função estritamente crescente • f não tem zeros • $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

➢ *Função logarítmica*

Com $a \neq 1$, função exponencial de base a é uma bijecção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$, logo admite inversa. À inversa da aplicação

$$\begin{aligned} g:&\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ &x \mapsto a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{aligned}$$

dá-se o nome de *função logarítmica de base a*:

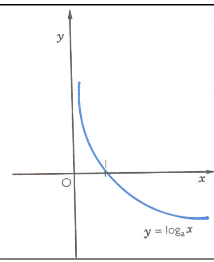
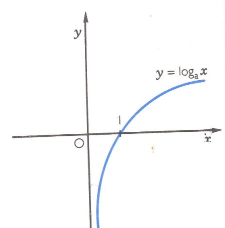
$$\begin{aligned} g^{-1}:&\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ &x \mapsto \log_a(x), a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \end{aligned}$$

Então

$$\boxed{y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y.}$$

Notação

Quando a=e tem-se que $\boxed{\log_e(x) = \ln(x)}$.

	$0<a<1$	$a>1$
Representação gráfica		
Propriedades	• $D=\mathbb{R}^+,\ D'=\mathbb{R}$ • f é uma função decrescente • f tem um zero para $x=1$ • $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a(x)=-\infty$	• $D=\mathbb{R}^+,\ D'=\mathbb{R}$ • f é uma função crescente • f tem um zero para $x=1$ • $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a(x)=+\infty$

Propriedades dos logaritmos

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

- $\log_a(a)=1$
- $\log_a(1)=0$
- $a^{\log_a(x)}=x$
- $\log_a(a^y)=y$
- $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$
- $\log_a(x)^{-1}=-\log_a(x)=\operatorname{co}\log_a(x)$
- $\log_a(x^r)=r\times\log_a(x),\ r\in\mathbb{R}$
- $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right)=\frac{\log_a(x)}{n},\ n\in\mathbb{N}$
- $\left.\begin{aligned} &\log_b x=\log_a(x)\times\log_b a \\ &\log_b x=\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \end{aligned}\right\}$ Fórmulas da mudança de base

LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

➢ *Ponto de acumulação*

Definição

Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$, diz-se que a (pertencente ou não a C) é *ponto de acumulação* de C sse em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um elemento de C, diferente de a.

Simbolicamente:

$$\boxed{\text{a é ponto de acumulação de C} \Leftrightarrow \forall\delta > 0 \exists b \in C : b \neq a \wedge b \in V_\delta(a)}$$

Nota

$$b \in V(a) \Leftrightarrow |b-a| < \delta \Leftrightarrow b \in \left]a-\delta, a+\delta\right[$$

➢ *Limite de uma função real de variável real*

Definição *(Segundo Heine)*

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do seu domínio. Diz-se que f tem por *limite b quando x tende para a* se e só se a toda a sucessão (x_n) de valores de x, diferentes de a e pertencentes ao domínio de f, que tenda para a, corresponde uma sucessão $(f(x_n))$ convergente para b.

Simbolicamente:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \to a \wedge (x_n \neq a \wedge x_n \in D, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f(x_n) \to b}$$

Nota:

Nesta definição a e b tanto podem ser números reais como qualquer dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$.

Definição *(Segundo Cauchy)*

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do seu domínio. Diz-se que f tem *limite b quando x tende para a* se e só se a toda a vizinhança $V_\varepsilon(b)$ for possível associar uma vizinhança $V_\delta(a)$ de tal modo que, para todo o x pertencente a $V_\delta(a)\backslash\{a\}$, o correspondente valor de $f(x)$ pertence a $V_\varepsilon(b)$.

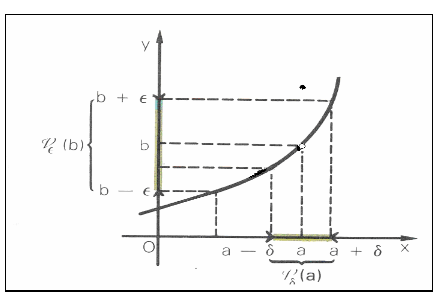
Simbolicamente:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in V_\delta(a)\backslash\{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b) \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \underbrace{|x-a| < \delta}_{x\in]a-\delta,a+\delta[} \wedge\, x \neq a \Rightarrow \underbrace{|f(x)-b| < \varepsilon}_{f(x)\in]b-\varepsilon,b+\varepsilon[} \end{aligned}}$$

Nota:

Nesta definição a e b são números reais.

Graficamente:



Observação:

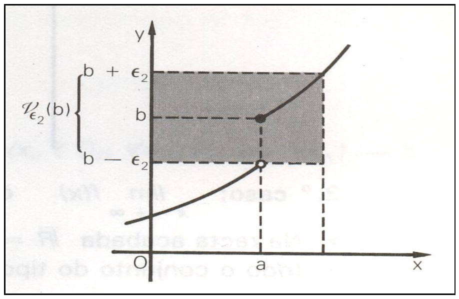


Fig.1

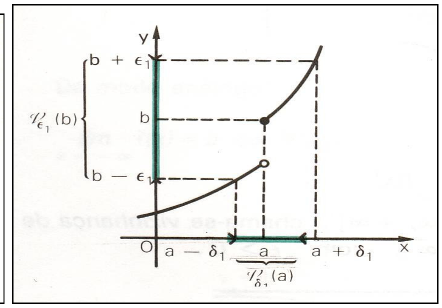


Fig.2

Na fig.1 não é possível associar à vizinhança ε_2 de b uma vizinhança de a nas condições requeridas pela definição, embora seja possível fazê-lo para outros valores de ε , tais como ε_1 (fig.2).

➢ *Limites laterais*

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do seu domínio.

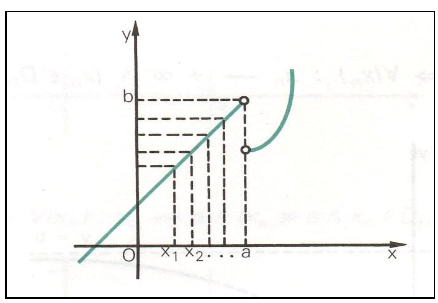
Definição

Diz-se que *b é limite de f, à esquerda*, no ponto a, sse a toda a sucessão (x_n) de valores de x menores que a e pertencentes ao domínio de f que tenda para a corresponde uma sucessão $(f(x_n))$ convergente para b.

Simbolicamente:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \to a \wedge (x_n < a \wedge x_n \in D, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f(x_n) \to b}$$

Graficamente:



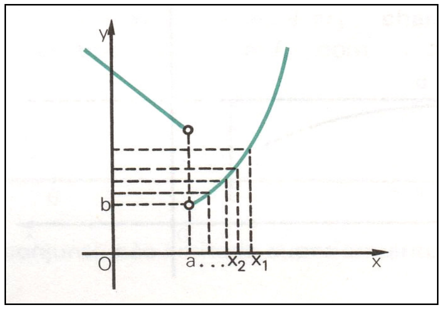
Definição

Diz-se que *b é limite de f, à direita,* no ponto a, sse a toda a sucessão (x_n) de valores de x maiores que a e pertencentes ao domínio de f que tenda para a corresponde uma sucessão $(f(x_n))$ convergente para b.

Simbolicamente:

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \to a \wedge (x_n > a \wedge x_n \in D, \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f(x_n) \to b}$$

Graficamente:



Propriedades

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$
- Se a função f está definida apenas à direita (ou à esquerda) de a, então o valor do limite da função no ponto a coincide com o limite à direita (ou à esquerda) de a.

➢ *Propriedades dos limites de funções*

- O limite de uma função num ponto, caso exista, é único.
- O limite de uma função constante é a própria constante.
- Se f e g têm limites finitos no ponto a, então:
  i. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
  ii. $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
  iii. $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
  iv. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, com $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$;
- Se a função f tem limite finito no ponto a e p é um número natural, então:
  i. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^p = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^p$;
  ii. $\lim\limits_{x\to a}\left[\sqrt[p]{f(x)}\right] = \sqrt[p]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, supondo $f(x) \geq 0$ quando p é par;

➢ *Limites notáveis*

Ver página 6.

➢ *Operações com limites*

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = b+(+\infty) = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = b\times(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ se } b>0 \\ -\infty \text{ se } b<0 \end{cases}$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{+\infty} = 0$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{+\infty}{b} = \begin{cases} +\infty \text{ se } b>0 \\ -\infty \text{ se } b<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = b+(-\infty) = -\infty$
	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right] = b\times(-\infty) = \begin{cases} -\infty \text{ se } b>0 \\ +\infty \text{ se } b<0 \end{cases}$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{-\infty} = 0$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{-\infty}{b} = \begin{cases} -\infty \text{ se } b>0 \\ +\infty \text{ se } b<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right] = (+\infty)\times(+\infty) = (+\infty)$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = (-\infty)+(-\infty) = -\infty$
	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right] = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$ (Indeterminação)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = (+\infty)+(-\infty) = \infty-\infty$ (Indeterminação)
	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right] = (+\infty)\times(-\infty) = -\infty$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$ (Indeterminação)

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = 0+(+\infty) = +\infty$
	$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right] = 0\times(+\infty)$ (Indeterminação)
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$
	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{+\infty}{0} = \begin{cases} +\infty \text{ se } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+ \\ -\infty \text{ se } \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^- \end{cases}$

$\lim_{x\to a} f(x)=0$ $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$	$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=0+(-\infty)=-\infty$
	$\lim_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right]=0\times(-\infty)$ (Indeterminação)
	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{-\infty}=0$
	$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{-\infty}{0}=\begin{cases}-\infty \text{ se } \lim_{x\to a} f(x)=0^+\\ +\infty \text{ se } \lim_{x\to a} f(x)=0^-\end{cases}$

$\lim_{x\to a} f(x)=0$ $\lim_{x\to a} g(x)=0$	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ (Indeterminação)

CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

➢ *Continuidade de uma função num ponto do seu domínio*

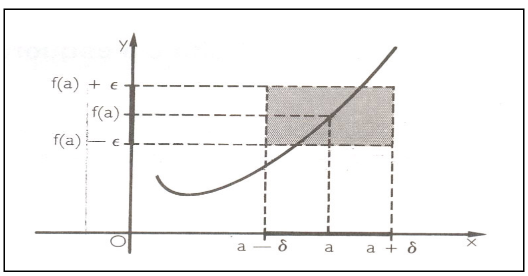
Seja a um ponto de acumulação do domínio.

Definição (Cauchy)

Diz-se que f é *contínua no ponto a* $(a\in D)$ sse

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in D: |x-a|<\delta\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon}$$

Geometricamente: significa que o gráfico da restrição de f ao intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ está contido no rectângulo a tracejado.



Definição

$$\boxed{f \text{ é } \textit{contínua em a}, \ (a\in D) \Leftrightarrow \begin{cases}\exists \lim_{x\to a} f(x)\\ \lim_{x\to a} f(x)=f(a)\end{cases}}$$

➢ *Descontinuidade de uma função num ponto do seu domínio*

Seja a um ponto de acumulação do domínio.

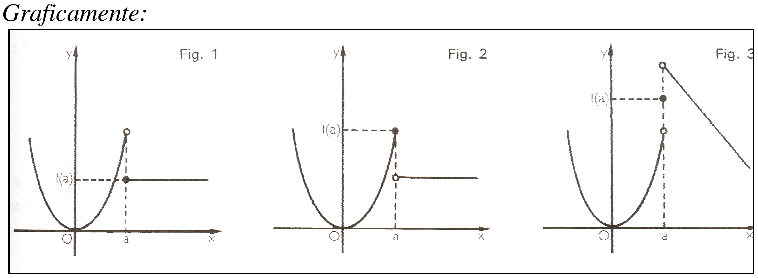
<u>Definição</u>

Diz-se que f é <u>*descontínua no ponto a*</u> $(a \in D)$ sse não é contínua nesse ponto, isto é, não existe limite da função quando x tende para a ou esse limite é diferente do valor da função para $x = a$.

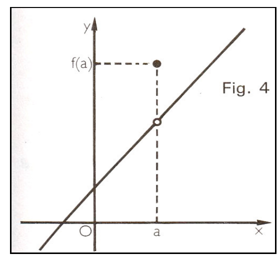
Simbolicamente:

$$\text{f é } \underline{\textit{descontínua em a}}, \ (a \in D) \ \Leftrightarrow \ \left| \begin{array}{l} \nexists \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a) \end{array} \right.$$

Graficamente:



$\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

➢ *Continuidade de uma função à direita e à esquerda num ponto do seu domínio*

Seja a um ponto de acumulação do domínio.

<u>Definições</u>

- A função f diz-se <u>*contínua à direita de a*</u> $(a \in D)$ sse $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$;
  Fig.1

- A função f diz-se <u>*contínua à esquerda de a*</u> $(a \in D)$ sse $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$;
  Fig.2

<u>Propriedade</u>

f é contínua à esquerda e à direita de a $\Leftrightarrow$ f é contínua no ponto a

➢ *Propriedades das funções contínuas*

- Toda a função constante é contínua em qualquer ponto do domínio.
- A função identidade é contínua em $\mathbb{R}$

- Toda a função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$

- A soma de duas funções contínuas é contínua no seu domínio

- O produto de duas funções contínuas é contínuo no seu domínio

- O quociente de duas funções contínuas é contínuo no seu domínio

- Uma função racional (quociente de funções polinomiais) é contínua no seu domínio

- As funções seno, coseno, arco tangente e arco cotangente são funções contínuas em todos os pontos do seu domínio, ou seja, $\mathbb{R}$

- As funções tangente e cotangente são funções contínuas em todos os pontos do seu domínio, ou seja,

  - a função tangente é contínua em: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

  - a função cotangente é contínua em: $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$

- As funções arco seno e arco coseno são funções contínuas em todos os pontos do seu domínio, ou seja, $[-1, 1]$

- Continuidade da função composta
  Se a função f for contínua em a e a função g for contínua em b=f (a), então a função composta $g \circ f$ é contínua em a.

➢ *Continuidade de uma função num subconjunto do domínio*

- Uma função f diz-se <u>*contínua num intervalo*</u> $]a, b[$ (subconjunto do domínio) sse for contínua em todos os pontos desse intervalo.

- Uma função f diz-se <u>*contínua num intervalo*</u> $[a, b]$ (subconjunto do domínio) sse
  - f é contínua em $]a, b[$
  - f é contínua à direita de a
  - f é contínua à esquerda de b.

- Uma função f diz-se contínua sse é contínua em todos os pontos do seu domínio.

➢ *Propriedades das funções contínuas num intervalo fechado*

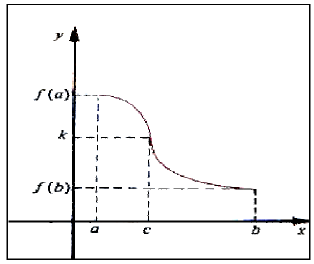
<u>*Teorema de Bolzano ou Teorema dos Valores Intermédios*</u>

Se a função f é contínua no intervalo $[a, b]$ e k é um número real compreendido entre $f(b)$ e $f(a)$, então existe pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.

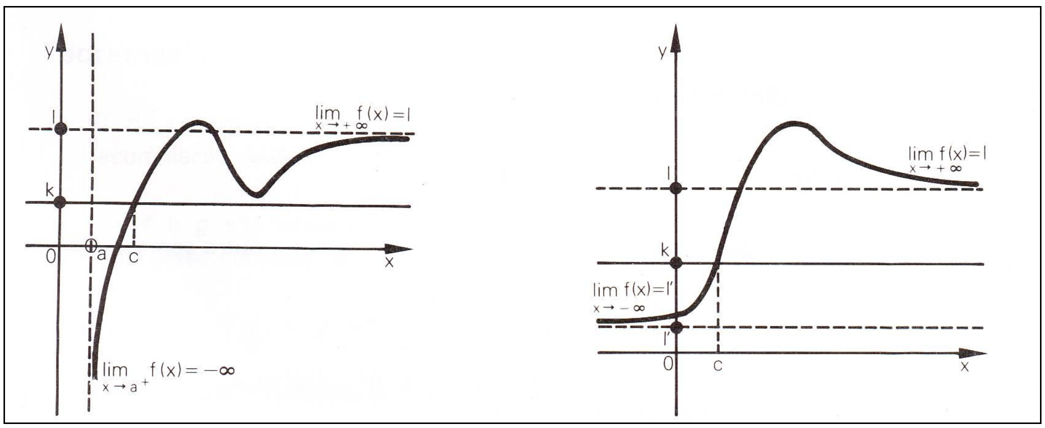
Simbolicamente:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ é contínua em } [a, b] \\ k \in \mathbb{R} : f(b) < k < f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = k}$$

Interpretação:
Toda a função contínua num intervalo fechado não pode ir de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.



Nota:
O teorema de Bolzano estende-se aos intervalos $]a,b[$, limitados ou não, se $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existem ou são infinitos.



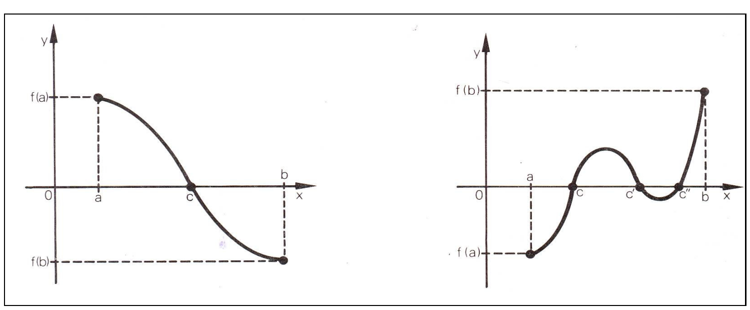
Corolário do Teorema de Bolzano

Se a função f é contínua no intervalo $[a,b]$ e $f(a)\times f(b)<0$, então a função admite pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$, isto é, existe pelo menos um $c\in\,]a,b[$ tal que $f(c)=0$.

Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l}\text{f é contínua em}[a,b]\\ f(a)\times f(b)<0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in\,]a,b[\,:f(c)=0$$

Graficamente:



Observação:
Este corolário permite-nos localizar um intervalo onde a função se anula.

DERIVADAS DE FUNÇÕES

➢ *Derivada de uma função num ponto*

Definição

Chama-se *derivada de f no ponto a* $(a \in D)$, a

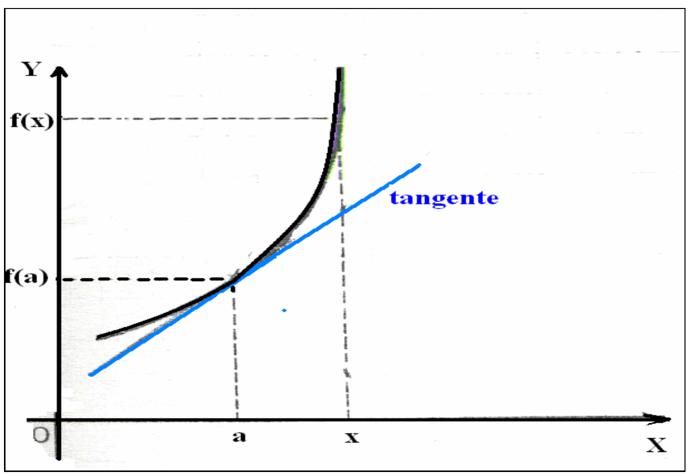
$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$, equivalentemente, $\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Este número $f'(a)$ pode também ser representado por:

$$\boxed{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a} \text{ ou } \underset{x\to a}{Df}}$$

Geometricamente

$f'(a)$ - Representa o declive da recta tangente ao gráfico da função no ponto x=a



Observação

A *equação da recta tangente* ao gráfico de f no ponto x=a é:

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a) \Leftrightarrow y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Nota

A derivada de uma função num ponto pode ser finita ou infinita

Definição

Se a derivada de f num ponto existe e é finita, f diz-se *diferenciável ou derivável* nesse ponto.

➢ *Derivadas laterais*

Pode não existir derivada num ponto mas existirem derivadas laterais.

Definições

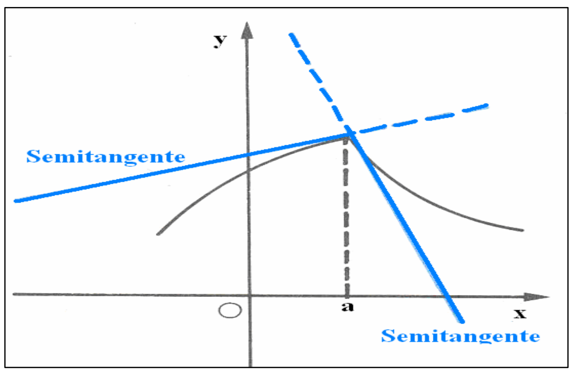
- f é diferenciável ou derivável à esquerda de $a\,(a \in D)$ se existe e é finito o $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, a que se chama-se *derivada lateral à esquerda de a* e se representa por $f'(a^-)$.

- f é diferenciável ou derivável à direita de $a\,(a \in D)$ se existe e é finito o $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, a que se chama *derivada lateral à direita de a* e se representa por $f'(a^+)$.

Geometricamente

$f'(a^-)$ - Representa o declive da semitangente á esquerda ao gráfico de f ponto $x=a$

$f'(a^+)$ - Representa o declive da semitangente á direita ao gráfico de f ponto $x=a$



Propriedade

- f é derivável para $x=a$ sse $f'(a^-)=f'(a^+)$ e são ambas finitas.

➢ *Diferenciabilidade num intervalo*

Definições

- Uma função diz-se *diferenciável num intervalo* $]a,b[$ quando admite derivada finita em todos os pontos do intervalo.

- Uma função diz-se *diferenciável num intervalo* $[a,b]$ quando é diferenciável em $]a,b[$ e diferenciável à esquerda de b $\left(f'(b)=f'(b^-)\right)$ e à direita de a $\left(f'(a)=f'(a^+)\right)$.

➢ Função derivada

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e E o conjunto dos números reais para os quais a função f é diferenciável.
$x \mapsto f(x)$

Chama-se *função derivada de f* a:

$$f' : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Observação

Não confundir "derivada de uma função num ponto" que se existir, é um número real, com "função derivada", que é uma nova função $f'(x)$, cujo domínio é constituído por todos os números reais x para os quais $f(x)$ admite derivada

➢ Continuidade e derivabilidade

Teorema

Toda a função que admite derivada finita num ponto é contínua nesse ponto.

Nota

O recíproco deste teorema não é verdadeiro; há funções contínuas num ponto que não têm derivada finita nesse ponto.

➢ Regras de derivação

Sejam $u = g(x)$, $v = h(x)$, $k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

- $(k)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$
- $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- $(k \times u)' = k \times u'$
- $(u^k)' = k \times u^{k-1} \times u'$, $k \neq 1$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$, com $v \neq 0$
- $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$, $n \in \mathbb{N}$, com $u > 0$, se n é par

Derivadas das funções circulares

- $(\operatorname{sen}(u))' = u'\cos(u)$
- $(\cos(u))' = -u'\operatorname{sen}(u)$
- $(\operatorname{tg}(u))' = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$
- $(\operatorname{cotg}(u))' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2(u)}$
- $(\sec(u))' = u'\operatorname{tg}(u)\sec(u)$
- $(\operatorname{cosec}(u))' = -u'\operatorname{cotg}(u)\operatorname{cosec}(u)$

Derivadas das funções circulares inversas

- $(\operatorname{arc\,sen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\operatorname{arc\,cos}(u))' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\operatorname{arc\,tg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
- $(\operatorname{arc\,cotg}(u))' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Derivadas das funções circulares hiperbólicas

- $(\operatorname{senh}(u))' = u'\cosh(u)$
- $(\cosh(u))' = u'\operatorname{senh}(u)$
- $(\operatorname{tgh}(u))' = \dfrac{u'}{\cosh^2(u)}$
- $(\operatorname{cotgh}(u))' = -\dfrac{u'}{\operatorname{senh}^2(u)}$

Derivadas das funções: exponencial e logarítmica

- $(e^u)' = u' \times e^u$
- $(a^u)' = u' \times a^u \times \ln(a)$
- $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
- $(\log_a(u))' = \dfrac{u'}{u \times \ln(a)}$
- $(u^v)' = v \times u^{v-1}u' + u^v \times v' \times \ln(u), (u > 0)$

Derivada da função inversa de uma função

Se f é uma função invertível que admite derivada finita, não nula, num ponto a, então a função inversa f^{-1} é derivável em $f(a)$ e

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}}.$$

De um modo geral em pontos correspondentes, tem-se:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}} \text{ com } y = f(x).$$

Derivada da função composta

Se g tem derivada finita num ponto a e se f é diferenciável no ponto $g(a)$, então $f \circ g$ é derivável em a e

$$\boxed{(f \circ g)'(a) = g'(a) \times f'[g(a)]}.$$

De um modo geral em pontos correspondentes, tem-se:

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'[g(x)]}.$$

➢ Derivadas sucessivas

Definição

Dada a função f, chama-se *derivada de ordem (n+1) de f* e representa-se por $f^{(n+1)}$, à derivada da derivada de ordem (n) de f, ou seja:

$$\boxed{f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x),\ n \in \mathbb{N}}$$

TEOREMAS DE ROLLE, LAGRANGE E CAUCHY

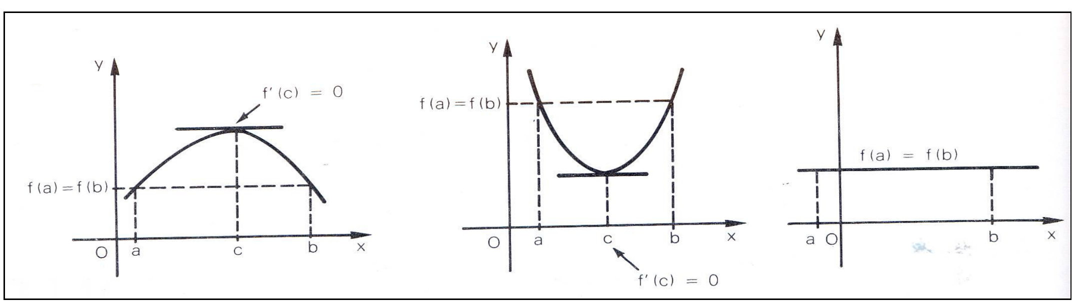
Teorema de Rolle

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto c pertencente ao intervalo $]a,b[$, tal que $f'(c) = 0$.

Simbolicamente:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ é contínua em } [a,b] \\ f \text{ é diferenciável em }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = 0}$$

Interpretação geométrica:



Geometricamente, o teorema de Rolle afirma que o gráfico de f admite pelo menos uma tangente horizontal num ponto interior de $]a,b[$.

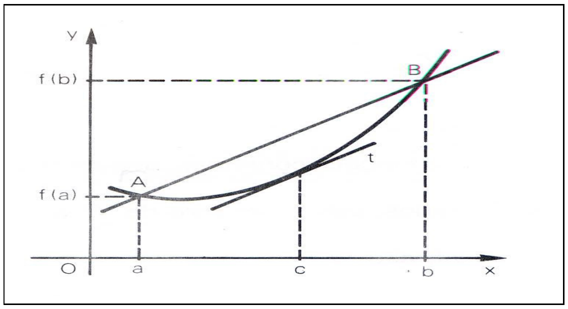
Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Intermédio

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ então existe pelo menos um ponto c pertencente ao intervalo $]a,b[$, tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ é contínua em } [a,b] \\ f \text{ é diferenciável em }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in\,]a,b[: f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interpretação geométrica:



A $(a,f(a))$ B $(b,f(b))$

Declive de AB = $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e Declive de t = $f'(c)$

Existe pelo menos um ponto do gráfico no qual a tangente é paralela à secante, isto é,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \text{Declive de t = Declive de AB}$$

$$\Leftrightarrow AB \,//\, t$$

Geometricamente, o teorema de Lagrange garante que, entre os pontos do gráfico de abcissas a e b, há pelo menos um ponto desse gráfico onde a tangente é paralela à secante definida pelos pontos A $(a,f(a))$ e B $(b,f(b))$.

Teorema de Cauchy ou Teorema do Valor médio de Cauchy

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ são duas funções contínuas em $[a,b]$ e diferenciáveis em $]a,b[$ e $g'(x)\neq 0, \forall x\in\,]a,b[$, então existe pelo menos um ponto c pertencente ao intervalo $]a,b[$, tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ são contínuas em } [a,b] \\ f \text{ é são diferenciáveis em }]a,b[\\ g'(x)\neq 0,\ \forall x\in\,]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in\,]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Regra de Cauchy (*Utilizada no levantamento de indeterminações dos tipos* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *ou* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$)

Sejam f e g duas funções diferenciáveis num intervalo aberto I, tal que $g'(x)\neq 0, \forall x\in I$ e seja a um dos extremos de I. Se, quando x tende para a, $f(x)$ e $g(x)$ tendem para 0, ou para $+\infty$ ou para $-\infty$, e se existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, então existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e tem-se $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Simbolicamente:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ e } g \text{ são diferenciáveis em I} \\ g'(x)\neq 0,\ \forall x\in I \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \text{ ou } +\infty \text{ ou } -\infty \\ \exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota:

- A regra de Cauchy é ainda aplicável quando $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.

<u>Se a indeterminação não for do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ou do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, é possível transformá-la numa indeterminação de um daqueles tipos:</u>

- *<u>Indeterminação do tipo</u>* $(0\times\infty)$

  Transforma-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ou do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, usando uma relação do tipo:

$$\boxed{f(x)\times g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\text{ou }\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right)}$$

- *<u>Indeterminação do tipo</u>* $(\infty\times\infty)$

  Transforma-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ou do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, usando uma relação do tipo:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)-g(x)=f(x)\times g(x)\times\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\times g(x)}} \\ \text{ou do tipo} \\ f(x)-g(x)=\log\left(e^{f(x)-g(x)}\right)=\log\left(\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}\right) \end{array}}$$

- *<u>Indeterminações dos tipos</u>* $\left(1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}\right)$

  Transforma-se numa indeterminação do tipo $(0\times\infty)$, usando uma relação do tipo:

$$\boxed{f(x)^{g(x)}=e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}=e^{g(x)\ln(f(x))}}$$

  e posteriormente numa indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ou do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Regra de L´Hôpital (*Utilizada no levantamento de indeterminações do tipo* $\left(\frac{0}{0}\right)$)

Sejam f e g duas funções que se anulam num ponto a de um intervalo I, em que estão definidas. Se $g(x) \neq 0,\ \forall x \in I \backslash \{a\}$ e f e g tiverem derivadas não conjuntamente infinitas no ponto a e se for $g'(a) \neq 0$, então existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Simbolicamente:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \in I \\ f(a) = g(a) = 0 \\ g(x) \neq 0,\ \forall x \in I \backslash \{a\} \\ g'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

Notas:

- Para se aplicar a regra de Cauchy, não se torna necessário que f(x) ou g(x) tenham derivada no ponto a mas apenas na vizinhança de a.

- Para aplicar a regra de L´Hôpital não é necessário que f (x) ou g (x) tenham derivada em pontos vizinhos de a.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

O estudo das funções resume-se geralmente em determinar:

1. O domínio;
2. Os pontos de intersecção com os eixos coordenados;
3. Os pontos de descontinuidade;
4. As simetrias do gráfico (em relação à origem e ao eixo dos yy);
5. As assíntotas do gráfico;
6. Os intervalos de crescimento e decrescimento; os máximos e os mínimos relativos;
7. O sentido da concavidade do gráfico; os pontos de inflexão.

➢ *1. Domínio*

Ver página 10 e 11.

➢ *2. Pontos de intersecção com os eixos coordenados*

Pontos de intersecção do gráfico com os eixos	
Eixo dos xx	**Eixo dos yy**
$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$	$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$

➢ 3. Pontos de descontinuidade

Ver página 26.

➢ 4. Simetrias

Ver página 10.

➢ 5. Assíntotas

Assíntotas		
Verticais (paralelas ao eixo yy)	**Horizontais (paralelas ao eixo xx)**	**Oblíquas**
Diz-se que a recta de equação x=a, $a \notin D_f$, é uma *assíntota vertical do gráfico da função f* se: $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty}$	Diz-se que a recta de equação y=b, $b \in \mathbb{R}$, é uma *assíntota horizontal do gráfico da função f* se: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b}$	Diz-se que a recta de equação $y=mx+b\,(m \neq 0)$ é uma *assíntota oblíqua do gráfico da função f* se: $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx - b\right] = 0}$ Os valores de m e b são determinados a partir de: $\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right]}$

Posição da curva que representa a função f, em relação às assíntotas (oblíqua e horizontal (m=0))

- Se $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx - b\right] = 0^+$ a curva que representa a função situa-se acima da assíntota.
- Se $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx - b\right] = 0^-$ a curva que representa a função situa-se abaixo da assíntota.

➢ 6. Monotonia; extremos relativos

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e diferenciável no int(I). Então

- $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in \text{int}(I) \Leftrightarrow$ f é *crescente* em I;
- $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in \text{int}(I) \Leftrightarrow$ f é *decrescente* em I.

Tem-se ainda

- $f'(x) > 0,\ \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow$ f é *estritamente crescente* em I;
- $f'(x) < 0,\ \forall x \in \text{int}(I) \Rightarrow$ f é *estritamente decrescente* em I.

Considerando $I = I_1 \cup I_2$

- $f'(x) > 0,\ \forall x \in I_1 \Rightarrow$ f é estritamente crescente em I_1
- $f'(x) < 0,\ \forall x \in I_2 \Rightarrow$ f é estritamente decrescente em I_2

	I_1	I_2
f'	+	-
f	↗	↘

Definição

Chamam-se *pontos críticos ou de estacionariedade* de uma função f às raízes da sua derivada, isto é, aos pontos x tais que $f'(x) = 0$.

Definição

$a \in D_f$ é *extremo relativo (máximo relativo ou mínimo relativo)* para a função f, num intervalo I, se f' muda de sinal em $V_\delta(a)$, $\forall\delta$

Sinal de f' em $V_\delta(a)$			**Natureza do ponto a**
$x<a$	**$x=a$**	**$x>a$**	
+	$f'(a)=0$ ou $a \notin D_{f'}$	-	Máximo relativo
-	$f'(a)=0$ ou $a \notin D_{f'}$	+	Mínimo relativo
+	$f'(a)=0$ ou $a \notin D_{f'}$	+	Nem máximo relativo Nem mínimo relativo
-	$f'(a)=0$ ou $a \notin D_{f'}$	-	Nem máximo relativo Nem mínimo relativo

➢ *7. Concavidades e pontos de inflexão*

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em I.

Se $f''(x)>0,\ \forall x \in \text{int}(I)$ então *f tem concavidade voltada para cima (convexa)* em I.
Se $f''(x)<0,\ \forall x \in \text{int}(I)$ então *f tem concavidade voltada para baixo (côncava)* em I.

Considerando $I = I_1 \cup I_2$.

$f''(x)>0,\ \forall x \in I_1 \Rightarrow$ f tem concavidade voltada para cima em I_1 .

Se $f''(x)<0,\ \forall x \in I_2 \Rightarrow$ f tem concavidade voltada para baixo em I_2 .

	I_1	I_2
f''	**+**	**-**
f	$\cup$	$\cap$

Definição

$a \in D_f$ é *ponto de inflexão* para a função f, num intervalo I, se f'' muda de sinal em $V_\delta(a)$, $\forall\delta$

Sinal de f'' em $V_\delta(a)$			**Natureza do ponto a**
$x<a$	**$x=a$**	**$x>a$**	
+	$f''(a)=0$ ou $a \notin D_{f''}$	-	Ponto de inflexão
-	$f''(a)=0$ ou $a \notin D_{f''}$	+	Ponto de inflexão
+	$f''(a)=0$ ou $a \notin D_{f''}$	+	Não é ponto de inflexão
-	$f''(a)=0$ ou $a \notin D_{f''}$	-	Não é ponto de inflexão