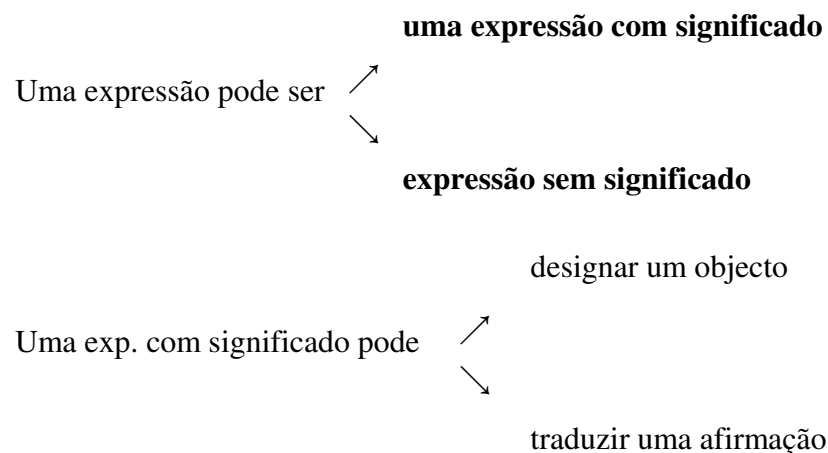


Noções básicas de Lógica

Consideremos uma linguagem, com certos símbolos.

Chamamos **expressão** a uma sequência de símbolos.



Termo ou **designação** é uma expressão com significado que designa um objecto.

Exemplo:

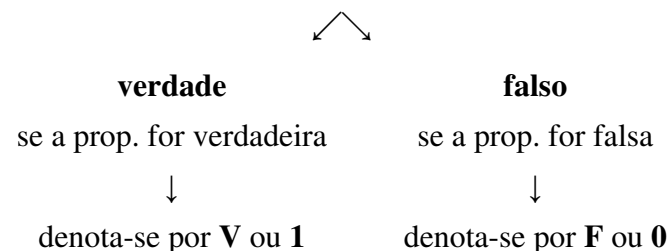
1. Em português, “Ana” e “gato” são termos ou designações; “Setúbal é uma cidade” é uma afirmação.

2. Na linguagem dos reais, “0” e “ $3 \times (2 - 5)$ ” são termos ou designações e “ $3 \geq 5 + 2$ ” uma afirmação.

Nota: As aspas permitem distinguir a designação do ente designado; quando não há risco de confusão, dispensamos o seu uso.

Na Lógica consideramos apenas afirmações sobre as quais se possa decidir se são verdadeiras ou falsas - a que chamamos **proposições**.

O **valor lógico** de uma proposição é



Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V ou F.

Duas **proposições** dizem-se **equivalentes** quando têm o mesmo valor lógico.

Cálculo Proposicional

Podemos obter novas proposições a partir doutras, por meio das operações lógicas:

negação, conjunção, disjunção, implicação e equivalência,

associadas aos símbolos $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

chamados **conectivos lógicos**.

No Cálculo Proposicional estudam-se estas operações e as suas propriedades.

A **tabela de verdade de uma operação lógica** (ou de uma **proposição**) dá-nos o valor de verdade da nova proposição, em função do valor de verdade das proposições de que foi obtida.

Sejam p e q proposições:

- a **negação de p** representa-se por $\sim p$ e lê-se “não p ”.

$\sim p$ é verdadeira se e só se p é falsa

A sua tabela de verdade é

p	$\sim p$
V	F
F	V

- a **conjunção de p e q** representa-se por $p \wedge q$ e lê-se “ p e q ”.

$p \wedge q$ é verdadeira caso p e q sejam ambas verdadeiras e é falsa se pelo menos uma delas for falsa.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- a **disjunção p e q** representa-se por $p \vee q$ e lê-se “ p ou q ”.

$p \vee q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições iniciais for verdadeira e falsa se ambas são falsas.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- a **implicação de p por q** representa-se por $p \Rightarrow q$ e lê-se “ p implica q ” ou “se p então q ”.
 - p é o **antecedente** e q é o **consequente**
 - p é **uma condição suficiente para q**
 - q é **uma condição necessária para p** .

O único caso em que a implicação é falsa é quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- a **equivalência entre p e q** representa-se por $p \Leftrightarrow q$ e lê-se “ p equivale a q ” ou “ p se e só se q ”.

$p \Leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor lógico e é falsa caso contrário.

A sua tabela de verdade é

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: Podemos definir outras operações lógicas.

O símbolo $\dot{\vee}$ lê-se “**ou exclusivo**” e representa a **disjunção exclusiva**:

a sua tabela de verdade é

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Usam-se parêntesis para indicar a ordem pela qual se realizam as operações lógicas, sobrepondo-se à seguinte **convencão de prioridade das operações**:

- primeiro a negação;
- depois a conjunção e disjunção;
- por último a implicação e a equivalência.

Uma proposição diz-se uma **tautologia** se o seu valor lógico for sempre V .

Propriedades das operações lógicas

Sejam p, q e r proposições.

Propriedades da negação

Ver se benta

Propriedades da conjunção e da disjunção

A conjunção e a disjunção:

- são comutativas;
- são associativas;
- têm elemento neutro;
- têm elemento absorvente.

★ A conjunção é distributiva relativamente à disjunção

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

★ A disjunção é distributiva relativamente à conjunção

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Primeiras Leis de De Morgan

São tautologias:

- $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$;
- $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

Propriedades da implicação

São tautologias:

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$;
- $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$;
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

(uma implicação e sua **contra-recíproca** têm o mesmo valor de verdade);

- $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Propriedades da equivalência

Ver se benta

Expressões com variáveis

Para estudar uma certa teoria temos que:

1º - definir uma **linguagem adequada** → (que inclui os símbolos fundamentais da teoria);

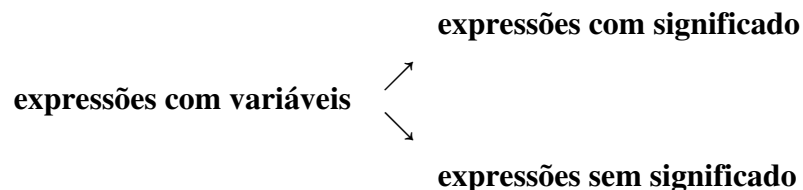
2º - considerar um **universo** → conjunto em que os símbolos fundamentais são interpretados;

3º - interpretar nesse **universo** os símbolos fundamentais da teoria.

Em geral necessitamos de:

variáveis → símbolos (ou agrupamento de símbolos) que podem ser substituído por elementos do universo.

obtendo-se assim



As **expressões** (com variáveis) **com significado**, dividem-se em:

- **expressões designatórias** → originam designações quando se substituem as variáveis por valores concretos.
- **expressões proposicionais (condições ou propriedades)** → originam proposições (verdadeiras ou falsas) quando se substituem as variáveis por valores concretos.

Temos:

- o **Universo** (o "mundo" em que estamos a trabalhar);

- o **domínio de uma expressão** → valores (desse universo) por que podemos substituir as variáveis que nela ocorrem;

- o **conjunto solução da expressão proposicional** → valores do seu domínio que a transformam numa proposição verdadeira.

Num Universo, uma expressão proposicional pode ser:



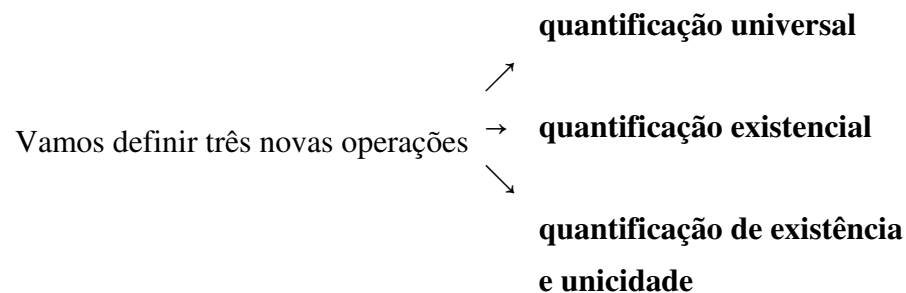
- é **possível** se existem valores que substituídos nas variáveis a transformam numa proposição verdadeira e **impossível** caso contrário.
- é **universal** se, ao substituírmos as suas variáveis por quaisquer valores dos respectivos domínios, obtemos sempre proposições verdadeiras.

Cálculo proposicional com variáveis

As operações lógicas associadas a \sim , \wedge , \vee , \Rightarrow e \Leftrightarrow permitem obter novas condições a partir de condições mais simples.

Num certo Universo, duas **condições** dizem-se:

- **incompatíveis**, se a sua conjunção é uma cond. impossível;
- **compatíveis**, caso contrário.



Seja $p(x)$ uma expressão proposicional na variável x .

Quantificador universal $\rightarrow \forall$

- $\forall x, p(x)$ é uma proposição, que se lê “qualquer que seja x , $p(x)$ ”.

Num certo universo,

$\forall x, p(x)$ é verdadeira sse a condição $p(x)$ é universal.

Quantificador existencial $\rightarrow \exists$

- $\exists x, p(x)$ é uma proposição, que se lê “existe pelo menos um x tal que $p(x)$ ”.

Num certo universo,

$\exists x, p(x)$ é verdadeira sse a condição $p(x)$ é possível.

Quantificador de existência e unicidade $\rightarrow \exists^1$

- $\exists^1 x, p(x)$ é uma proposição, que se lê “existe um e um só x tal que $p(x)$ ”.

Num certo universo,

$\exists^1 x, p(x)$ é verdadeira sse a condição $p(x)$ tem uma única solução.

Notação: $\forall x \in D, p(x)$, $\exists x \in D, p(x)$, $\exists^1 x \in D, p(x)$ indicam que a variável x varia em D (subconjunto do universo).

Convenção: o quantificador abrange a mais pequena expressão proposicional que o segue.

Quantificação múltipla

- A troca de ordem de dois quantificadores consecutivos do mesmo tipo transforma uma condição (ou proposição) numa equivalente.
- Pelo contrário, a troca de ordem de quantificadores que não são do mesmo tipo, origina condições (ou proposições) que, em geral, não são equivalentes às iniciais.

Segundas leis de De Morgan

Sendo p uma condição tem-se:

- $\sim (\forall x, p) \Leftrightarrow \exists x, \sim p$;
- $\sim (\exists x, p) \Leftrightarrow \forall x, \sim p$.