

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LCEEC, LCEGI, LCEIC (Tagus) e LCERC
2^o EXAME (Versão A)

9/Julho/2009

Duração: 3h

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x - e}{e^x} \geq 0 \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2\}$$

- a) Mostre que $A \cap B = [e, 5[$.
b) Indique, caso existam em \mathbb{R} , $\sup A$, $\inf B$, $\sup(A \cap B)$ e $\min(A \cap B \cap \mathbb{Q})$.

2. Por indução, mostre que

$$\sum_{k=0}^n \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

II

1. Calcule os limites

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \arctan x}{x+1} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{2x}$$

2. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)} \quad e^x \log(x + e^x) \qquad \text{b)} \quad \sin(\arctan x)$$

III

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\text{a)} \quad \frac{x}{4+x^2} \qquad \text{b)} \quad x \sin x$$

2. Calcule a área do subconjunto B do plano definido por

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| - 2 \wedge y \leq 1 - |x|\}.$$

3. Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx.$$

4. Considere a função f dada por

$$f(x) = -2e^{1/x} + \int_1^{1/x} \frac{e^t}{t} dt$$

(Não deve tentar calcular o integral)

- a) Justificando, determine o domínio de f e o domínio de diferenciabilidade de f . Determine a função f' .
- b) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais e absolutos, se os houver.
- c) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$.

IV

1. Determine a natureza de cada uma das seguintes séries

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2}{5^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3 + 2}.$

2. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)2^n}.$$

- a) Determine o conjunto de pontos para os quais a série acima é absolutamente convergente, simplesmente convergente, divergente.
- b) Designando por g a função definida pela série anterior, determine a série de potências que define a função g' . Calcule a soma da série obtida.
- c) Utilizando o resultado obtido na alínea anterior, identifique a função g .

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LCEEC, LCEGI, LCEIC (Tagus) e LCERC
2^o EXAME (Versão B)

9/Julho/2009

Duração: 3h

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x - \pi}{e^x} \leq 0 \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 4\}$$

- a) Mostre que $A \cap B =]-2, \pi]$.
b) Indique, caso existam em \mathbb{R} , $\inf A$, $\sup B$, $\sup(A \cap B)$ e $\max(A \cap B \cap \mathbb{Q})$.

2. Por indução, mostre que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

II

1. Calcule os limites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x \arctan x}{x+1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{3x}$$

2. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } e^x \arctan e^x \quad \text{b) } \sin(\log x)$$

III

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\text{a) } \frac{x}{3+x^2} \quad \text{b) } x \cos x$$

2. Calcule a área do subconjunto A do plano definido por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| - 1 \wedge y \leq 2 - |x|\}$$

3. Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx$$

4. Considere a função f dada por

$$f(x) = 2e^{-1/x} + \int_1^{1/x} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

(Não deve tentar calcular o integral)

- a) Justificando, determine o domínio de f e o domínio de diferenciabilidade de f . Determine a função f' .
- b) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais e absolutos, se os houver.
- c) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 1$.

IV

1. Determine a natureza de cada uma das seguintes séries

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{4^n} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4 + 3}.$$

2. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)3^n}.$$

- a) Determine o conjunto de pontos para os quais a série acima é absolutamente convergente, simplesmente convergente, divergente.
- b) Designando por f a função definida pela série anterior, determine a série de potências que define a função f' . Calcule a soma da série obtida.
- c) Utilizando o resultado obtido na alínea anterior, identifique a função f .