CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

EXERCÍCIOS

Equações de Primeira Ordem

1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $y' = \dfrac{1}{1+t^2}$.

(b) $y' + y\cos t = 0$.

(c) $y' - y^2 = 1 + t + ty^2$.

(d) $(1+t^2)\,y' = 1 + y^2$, $\left(\text{sugestão: } \operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \ \operatorname{tg} b}\right)$.

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial, indicando o maior intervalo onde se encontram definidas:

(a) $y' + y\sqrt{1-t^2} = 0, \ \ y(0) = e^5$.

(b) $(\cos y)\,y' = \dfrac{-t\,\operatorname{sen} y}{1+t^2}, \ \ y(1) = \pi/4$.

(c) $y' = \dfrac{2t}{y - yt^2}, \ \ y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

3. Resolva a seguinte equação diferencial:

$$y\operatorname{senh}(ty) + \operatorname{senh} y + t\,(\operatorname{senh}(ty) + \cosh y)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

4. Determine a constante α para a qual a equação diferencial seguinte é exacta e resolva-a.

$$\underbrace{ty(y + \alpha e^{\alpha t^2 y})}_{M} + \underbrace{t^2(y + e^{\alpha t^2 y})}_{N}\,\frac{dy}{dt} = 0$$

$\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \alpha = 2$

5. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 4yt + 2t + 2t^3 + 2t\operatorname{sen} y + (2 + \cos y)\,\frac{dy}{dt} = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Determine uma solução que defina implicitamente a solução $y(t)$ e mostre que o intervalo de definição da solução é $\mathbb{R}$.

6. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares, indicando os intervalos onde essas soluções se encontram definidas.

(a) $y' - y\,\mathrm{sen}t = e^{-\cos t}$.

(b) $(1+t)\,y' + \frac{y}{2} = (1+t)^{1/2}$.

7. Resolva os seguintes problemas de valor inicial e determine os intervalos de definição das respectivas soluções:

(a) $L\frac{di}{dt} + Ri = V\mathrm{sen}\,t,\ \ i(0) = 0$.

(b) $(1+t)\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1+t)^{5/2},\ \ y(0) = -1$.

(c) $\frac{dy}{dt} + y = g(t),\ \ y(0) = 0,$ onde

$$g(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)} & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

8. Para que valores de α é que a solução do seguinte problema de valor inicial está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$?

$$\begin{cases} y(t)\,y'(t) = t \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Indique a solução correspondente.

9. Procedendo à mudança de variável $y = tu$, determine, sempre que possível, soluções das seguintes equações:

(a) $t\,y' = (1+t)\,y + y^2$.

(b) $y' = 2\dfrac{y}{t} + \big(\dfrac{y}{t}\big)^2$. Qual a solução da equação que satisfaz $y(1) = 2$?

(c) $2tyy' = 3y^2 - t^2$.

(d) $y' = \dfrac{t+y}{t-y}$.

10. Procedendo à mudança de variável $u = t + y$, determine a solução geral de:

$$\frac{dy}{dt} = -((t+y)^2 + 1)\,\mathrm{arctg}\,(t+y) - 1$$

11. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial, indicando o maior intervalo onde a solução está definida.

(a) $ty^2 + 1 + 2t^2yy' = 0, \quad y(1) = 2.$

(b) $y - 2t^2 + (2ty + t\log t)\, y' = 0, \quad y(1) = 2.$

(c) $y\cos t + 2\,(y^2 + \operatorname{sen} t)\, y' = 0, \quad y(0) = \sqrt[4]{2}.$

12. Determine a solução geral da equação $y' + y = e^t y^2$. (Sugestão: faça a mudança de variável $y = 1/u$.)

13. Mostre que qualquer solução da equação

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-ct}$$

$(a > 0,\ \ c > 0\ \text{ e }\ b \in \mathbb{R})$ tem limite zero quando $t \to +\infty$.

14. Dada uma equação diferencial linear

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

com $a(t)$ e $b(t)$ contínuas em $\mathbb{R}$, $a(t) \geq c > 0$ e $\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0$, mostre que todas as soluções tendem para zero quando $t \to +\infty$.

15. Numa substância radioactiva, o fenómeno de decaimento é aleatório: todos os núcleos atómicos têm a mesma probabilidade P de decaimento por unidade de tempo, e núcleos distintos têm comportamentos independentes. Suponha que para $t = 0$ existem N_0 núcleos dessa substância. Determine quantos núcleos $N(t)$ existirão no instante t. (Sugestão: a probabilidade é, neste caso, o mesmo que a frequência relativa).

16. O modelo mais simples para evaporação de uma gota de água esférica consiste em supor que a diminuição de volume da gota se processa a uma taxa proporcional à sua superfície.

(a) Qual o tempo necessário para que uma gota de raio R_0 se evapore completamente?

(b) Se supusermos que a taxa de diminuição de volume da gota é proporcional ao *quadrado* da sua superfície, quanto tempo demora uma gota de raio R_0 a evaporar-se completamente?

Existência e Unicidade de Solução

1. Considere os problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2\,(\cos t)\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que cada um dos problemas indicados tem uma solução não nula de classe C^1.

(b) Sendo $y(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$, uma solução de cada um dos problemas de valor inicial indicados, explique porque é que tal facto não contradiz o teorema de Picard.

2. Justifique que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução.

3. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções.

(a) $y' = t^2 - y^2$

(b) $y' = \dfrac{ty}{1+t^2}$

(c) $y' = (2-y)(y-1)$

(d) $y' = y\,(1-y^2)$

(e) $y' = \operatorname{sen}(y-t)$

(f) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$

RESPOSTAS

Equações de Primeira Ordem

1. **(a)** $y(t) = \operatorname{arctg} t + k, \quad k \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = c\, e^{-\operatorname{sen} t}, \quad c \in \mathbb{R}.$

(c) $y(t) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{t^2}{2} + t + k\right), \quad k \in \mathbb{R}..$

(d) $y(t) = \dfrac{c+t}{1-ct}, \quad c \in \mathbb{R}.$

2. **(a)** $e^{5-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} t - \frac{1}{2}\, t\sqrt{1-t^2}}, \ t \in]-1, 1[.$

(b) $y(t) = \operatorname{arcsen}\Big((1+t^2)^{-1/2}\Big), \ t \in]-\infty, +\infty[.$

(c) $y(t) = \sqrt{2 - 2\log(t^2-1)}, \ t \in]1, \sqrt{1+e}[.$

3. $\cosh(t\, y(t)) + t \operatorname{senh} y(t) = c, \ c \in \mathbb{R}.$

4. $\alpha = 2; \ t^2 y(t)^2 + e^{2t^2 y(t)} = c, \ c \in \mathbb{R}.$

5. $2y + \operatorname{sen} y + t^2 = 0.$

6. **(a)** $y(t) = (t+c)\, e^{-\cos t}, \ t \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = (t+c)\,(1+t)^{-1/2}, \ t \in]-1, +\infty[.$

7. **(a)** $i(t) = \dfrac{VL}{R^2+L^2}\left(e^{-\frac{R}{L}\, t} + \dfrac{R}{L}\operatorname{sen} t - \cos t\right), \ t \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = \frac{1}{3}\,(1+t)^{5/2} - \frac{4}{3}\,(1+t)^{-1/2}, \ t \in]-1, +\infty[.$

(c) $y(t) = e^{-(t-1)}\, t$ se $0 \le t \le 1, \ y(t) = 1$ se $t > 1.$

8. $|\alpha| \ge 1; \ y(t) = \sqrt{t^2+\alpha^2-1}$ se $\alpha \ge 1, \ y(t) = -\sqrt{t^2+\alpha^2-1}$ se $\alpha \le -1.$

9. **(a)** $y(t) = \dfrac{cte^t}{1-ce^t}, \ c \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = \dfrac{ct^2}{1-ct}, \ c \in \mathbb{R}; \quad y(t) = \dfrac{2t^2}{3-2t}.$

(c) $y(t) = \pm\, t\sqrt{ct+1}, \ c \in \mathbb{R}.$

(d) $y(t) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y(t)}{t}\right) - \log(t^2 + y(t)^2)^{1/2} = c, \ c \in \mathbb{R}.$

10. $y(t) = \operatorname{tg}(c\, e^{-t}) - t, \ (0 < c < \pi/2).$

11. **(a)** $y(t) = \sqrt{\dfrac{4 - \log t}{t}}, \;\; t \in]0,\, e^4[.$

(b) $y(t) = \dfrac{-\log t + \sqrt{\log^2 t + 4\,(t^2+3)}}{2}, \;\; t \in]0,\, +\infty[.$

(c) $\sqrt{\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2} - \operatorname{sen} t}\,, \;\; t \in \mathbb{R}.$

12. $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{k - t}, \;\; k \in \mathbb{R}.$

15. $N(t) = N_0\, e^{-Pt}.$

16. **(a)** R_0/k, onde k é a constante de proporcionalidade.

(b) A gota de água nunca se evaporará completamente em tempo finito.

Existência e Unicidade de Solução

1. **(a)** $y(t) = t^6$; $\;y(t) = \operatorname{sen}^2 t, \;\; (t \in [0,\, \pi]).$

(b) Com $f(t,y) = 6t\sqrt[3]{y^2}$, $\;\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = 4ty^{-1/3}$ é descontínua em $(0,0)$.

Com $f(t,y) = 2\cos t\,\sqrt{y}$, $\;\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \dfrac{\cos t}{\sqrt{y}}$ é descontínua em $(0,0)$.

2. Com $f(t,y) = \dfrac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}}$, são satisfeitas todas as condições do teorema de Picard numa vizinhança de $(0,1)$.