Electromagnetismo e Óptica

MEBiom + LMAC

Prof. Gonçalo Figueira

AULA 3 – Electrostática III

Campo eléctrico no vácuo e conceitos fundamentais da electrostática

- Fluxo de um campo vectorial
- Lei de Gauss
- Exemplos de aplicação

Popovic & Popovic Cap. 5

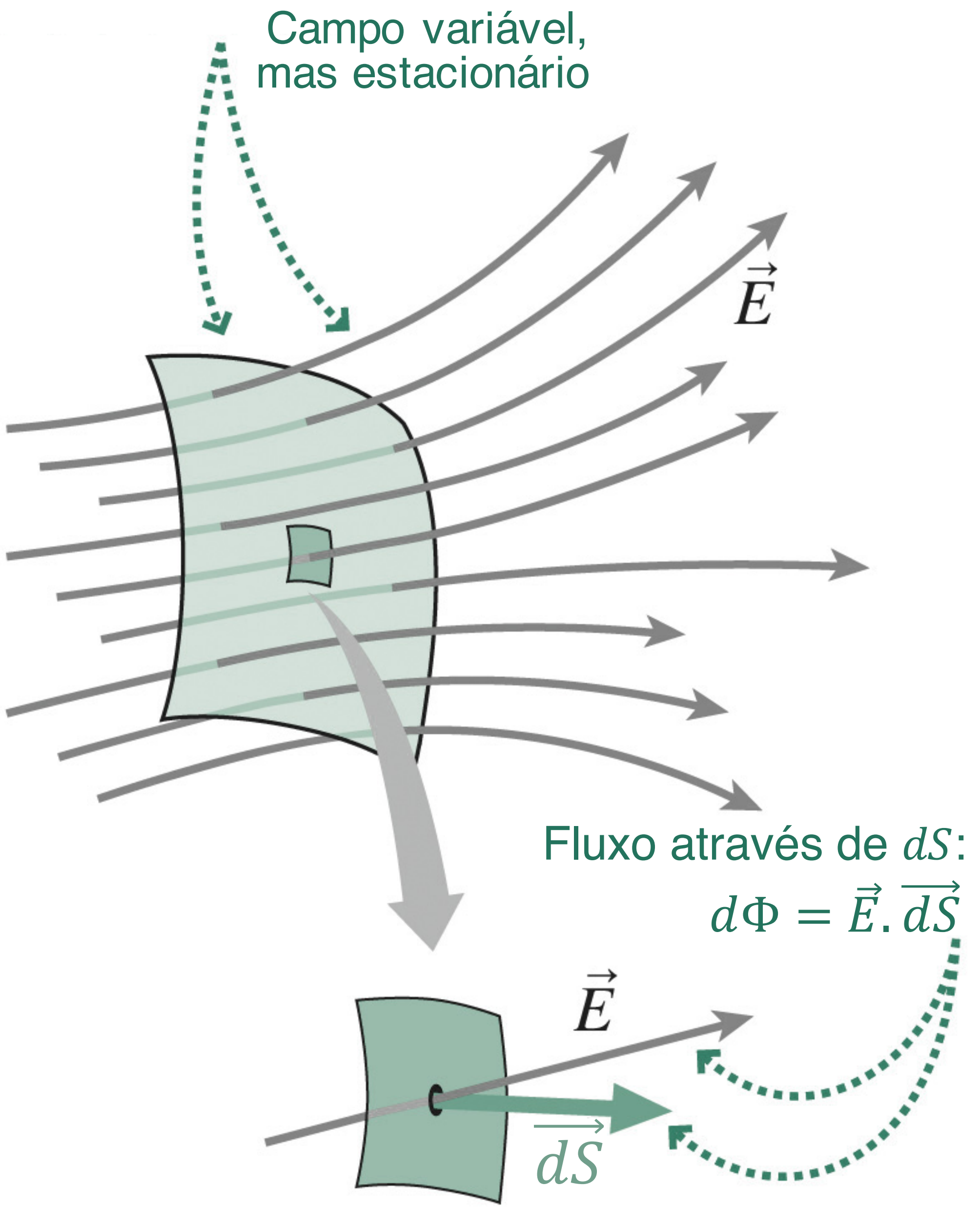
Lei de Gauss: conceitos preliminares

A Lei de Gauss é consequência da Lei de Coulomb. São expressões diferentes do mesmo conceito físico.

Fluxo de um campo vectorial através de uma superfície:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

em que $\overrightarrow{dS} = \vec{n}.dS$ é um vector perpendicular à superfície e de módulo dS.
O fluxo é proporcional ao "número" de linhas de campo.



Fluxo através de uma superfície fechada

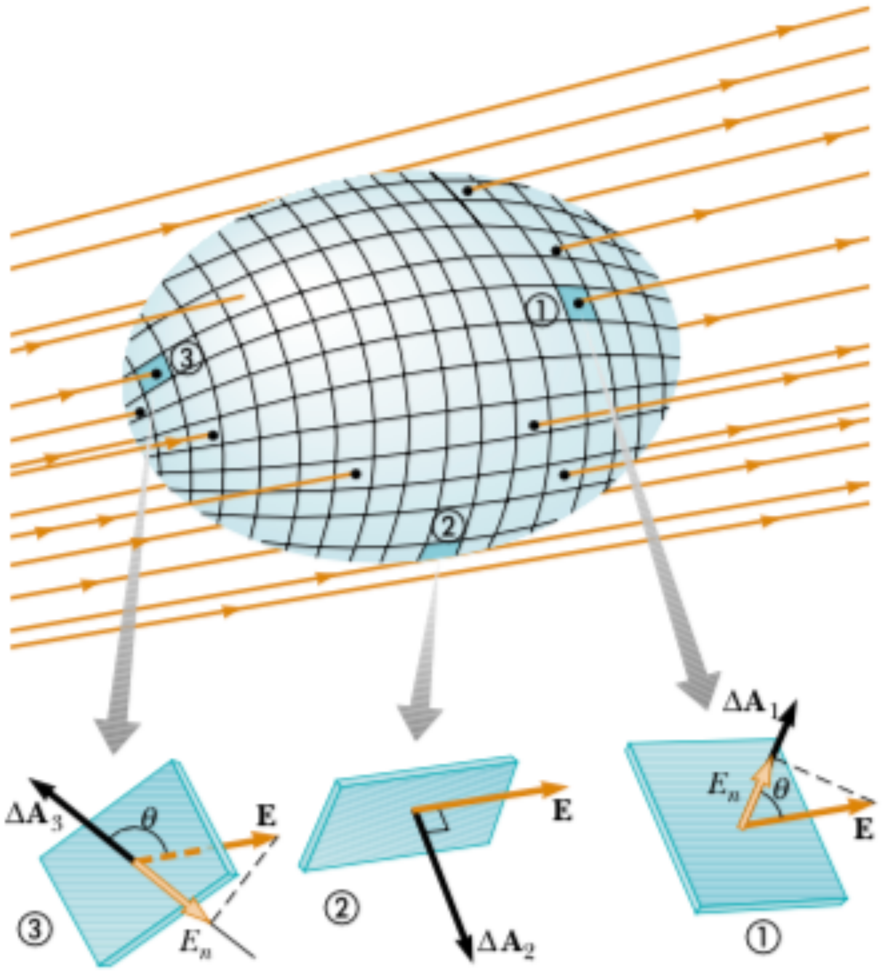
O fluxo resultante através duma superfície fechada pode ser visto como

$$\Phi = \oint_S d\Phi = \boxed{\int_S \vec{E}_{sai} \cdot \overrightarrow{dS}} + \boxed{\int_S \vec{E}_{entra} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

fluxo positivo **fluxo negativo**

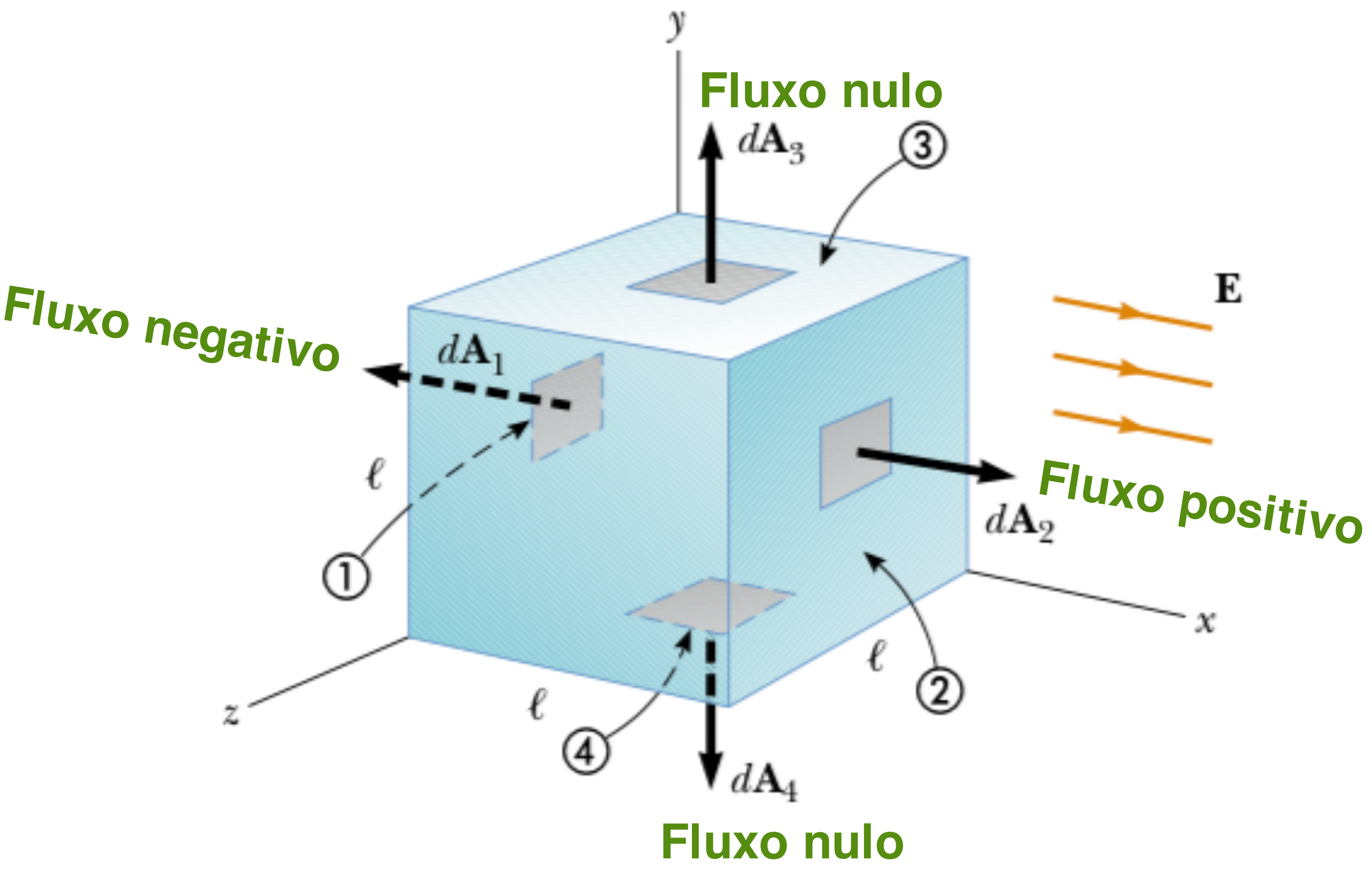
Outra forma de imaginar o fluxo é com o número N de linhas de campo:

$$\Phi \propto N_{saem} - N_{entram}$$



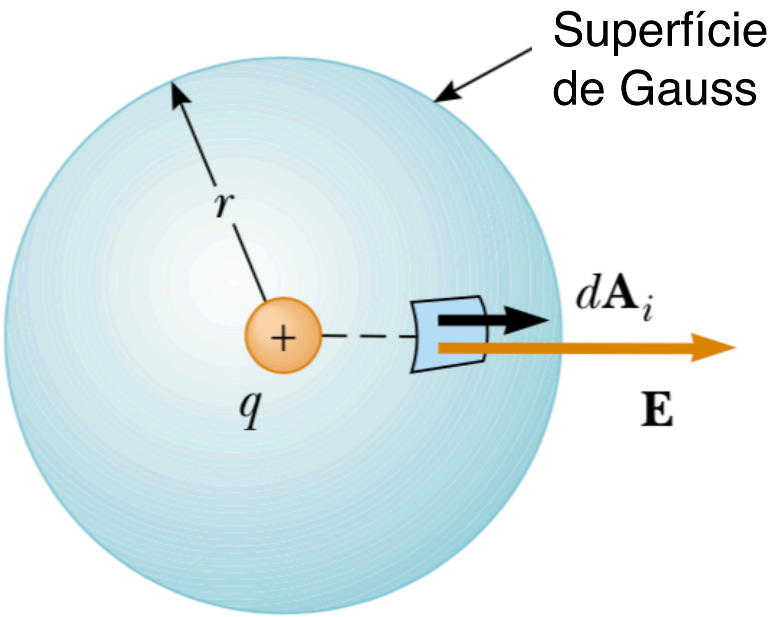
Qual o fluxo através desta superfície?

Exemplo: fluxo através da superfície de um cubo



Fluxo do campo eléctrico de uma carga pontual

Numa superfície esférica de raio r centrada numa carga pontual q, temos o campo eléctrico:



$$\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS} \rightarrow \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E\,dS \qquad\qquad |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

O fluxo correspondente é:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Fluxo do campo eléctrico de uma carga pontual

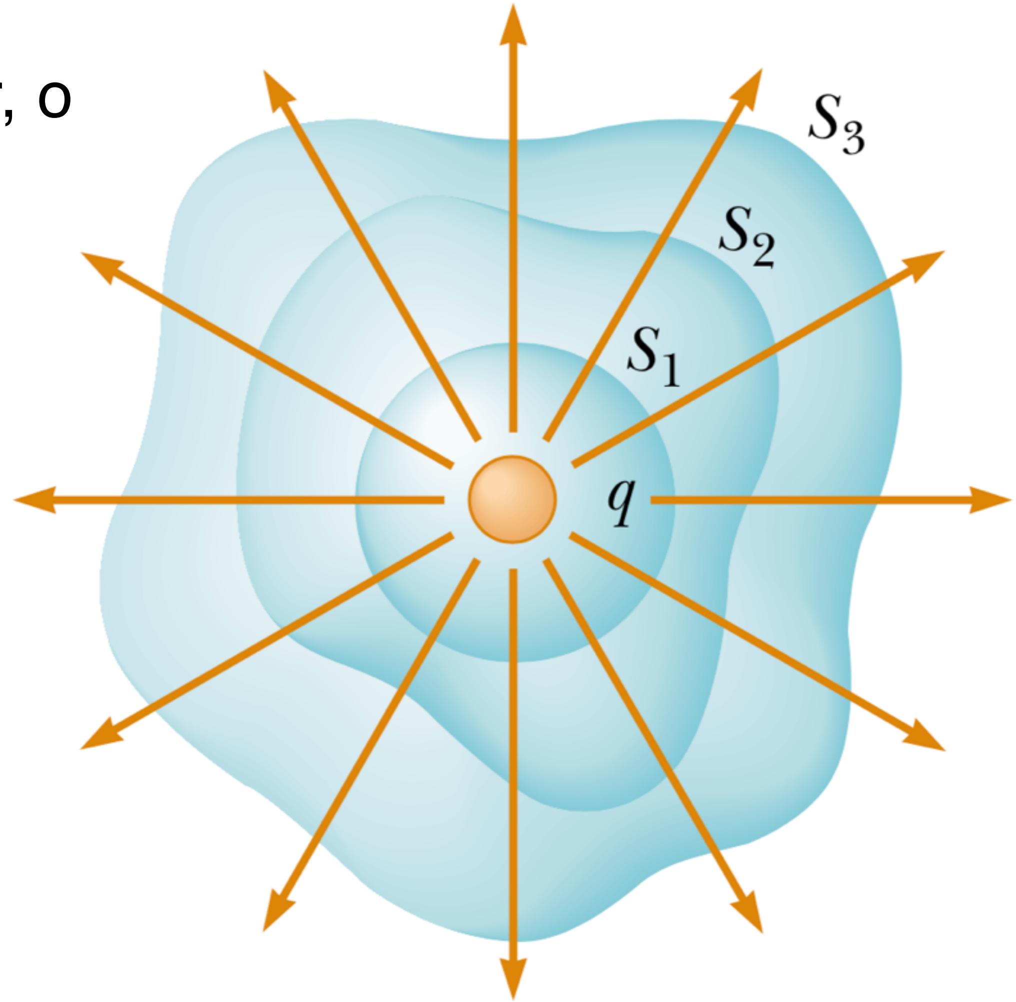
O fluxo é o mesmo para S_1, S_2, S_3

Desde que a carga pontual q esteja no interior, o fluxo é igual através de *qualquer superfície fechada*:

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{S_3} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

S_1: simetria **esférica**



Demonstração: o fluxo não depende da distância ou da forma da superfície

Distância da superfície à carga

Consideremos que a superfície S_2 está a uma distância r_2 da carga. O fluxo através de uma superfície equivalente dS_1 e dS_2 é

$$d\Phi_1 = \overrightarrow{E_1} \cdot \overrightarrow{dS_1} = E_1 dS_1 = E_1 r_1^2 d\Omega$$

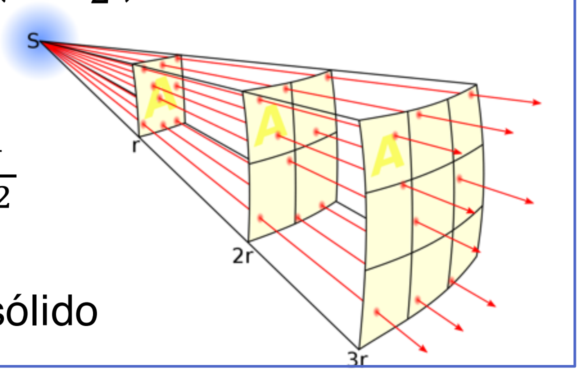
$$d\Phi_2 = E_2 dS_2 = \left(E_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) r_2^2 d\Omega = d\Phi_1$$

QED

$$E_1 \propto \frac{1}{r^2}$$

$$S \propto r^2$$

$d\Omega$ = âng. sólido



Orientação da superfície

O fluxo através de uma superfície dS_1 é $d\Phi_1 = E_1 dS_1$. Consideremos que dS_2 está inclinada de um ângulo θ em relação ao campo $\vec{E}$. O fluxo através de dS_2 é

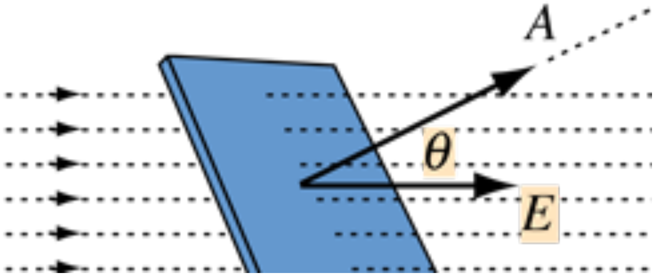
$$d\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dS_2} = E_2 \left(\frac{dS_2}{\cos\theta}\right) \cos\theta = E_2 dS_2$$

Ou seja $d\Phi_2 = d\Phi_1$

QED

$$\Phi \propto \cos\theta$$

$$A \propto 1/\cos\theta$$



Lei de Gauss

O fluxo do campo eléctrico através de uma qualquer superfície fechada no campo electrostático é igual à carga no interior dividida por ϵ_0:

$$\boxed{\oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}} \qquad [\mathrm{V.m}]$$

($\overrightarrow{dS}$ aponta para fora da superfície fechada)

Também se pode exprimir localmente usando o **teorema da divergência**,

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dv = \oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

O que é a *divergência*?

A divergência de um campo vectorial num ponto é o fluxo resultante que sai de uma superfície por unidade de volume, à medida que esse volume tende para zero:

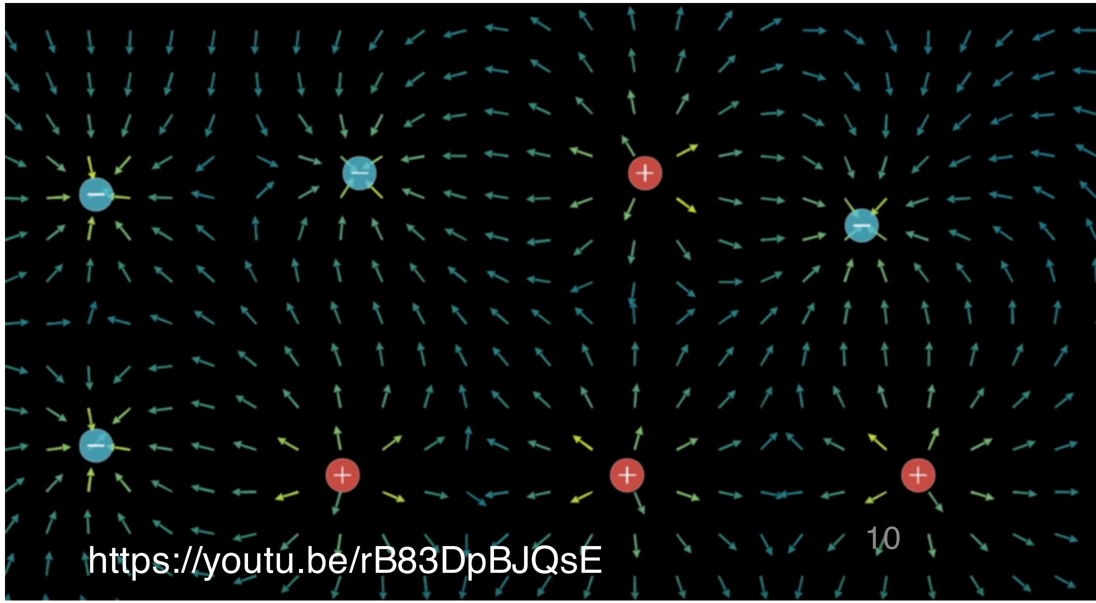
$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dv \rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\Delta v \approx \Phi_{in} - \Phi_{out}$$

divergência fluxo

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dv = \oint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

A divergência é:

- **positiva** se houver mais linhas de campo a sair do volume do que a entrar
- **negativa** no caso contrário
- **nula** se o número for igual



Lei de Gauss: aplicação

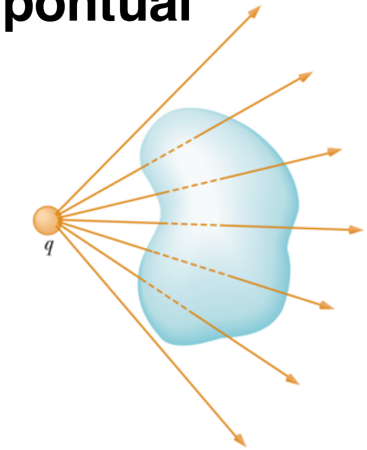
Esta lei permite:

- determinar a **carga eléctrica** contida numa superfície fechada, se conhecermos o fluxo do campo eléctrico que a atravessa (não interessa a posição da carga)
- determinar o **módulo do campo eléctrico** para distribuições de carga com **simetria espacial**, usando uma superfície fechada conveniente

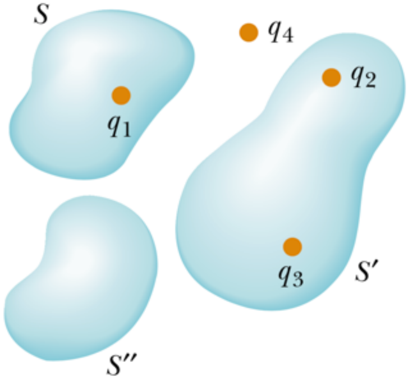
simetria esférica:	usar uma esfera concêntrica
simetria cilíndrica:	usar um cilindro coaxial
plano infinito:	usar um cilindro de bases paralelas

Exemplos de aplicação da Lei de Gauss

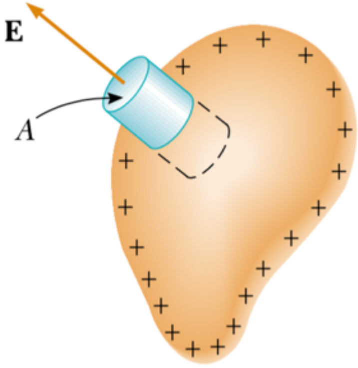
Carga pontual



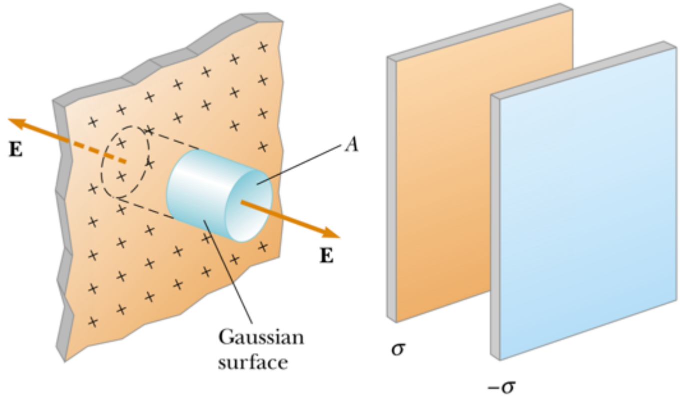
Múltiplas cargas



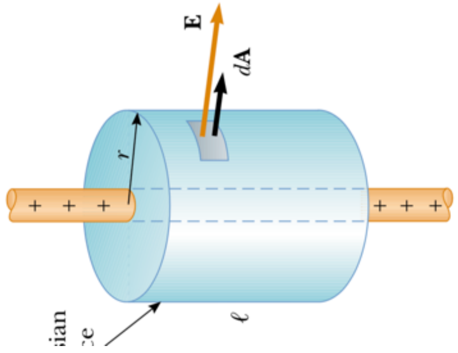
Condutor em equilíbrio



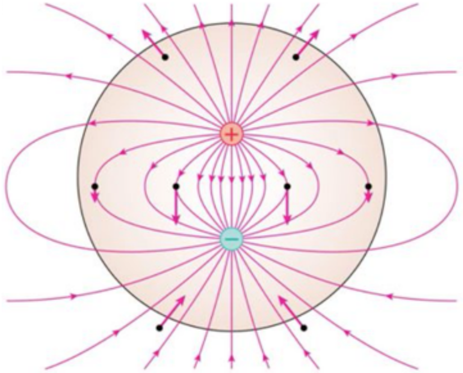
Placa simples e dupla



Fio com densidade linear



Dipolo eléctrico

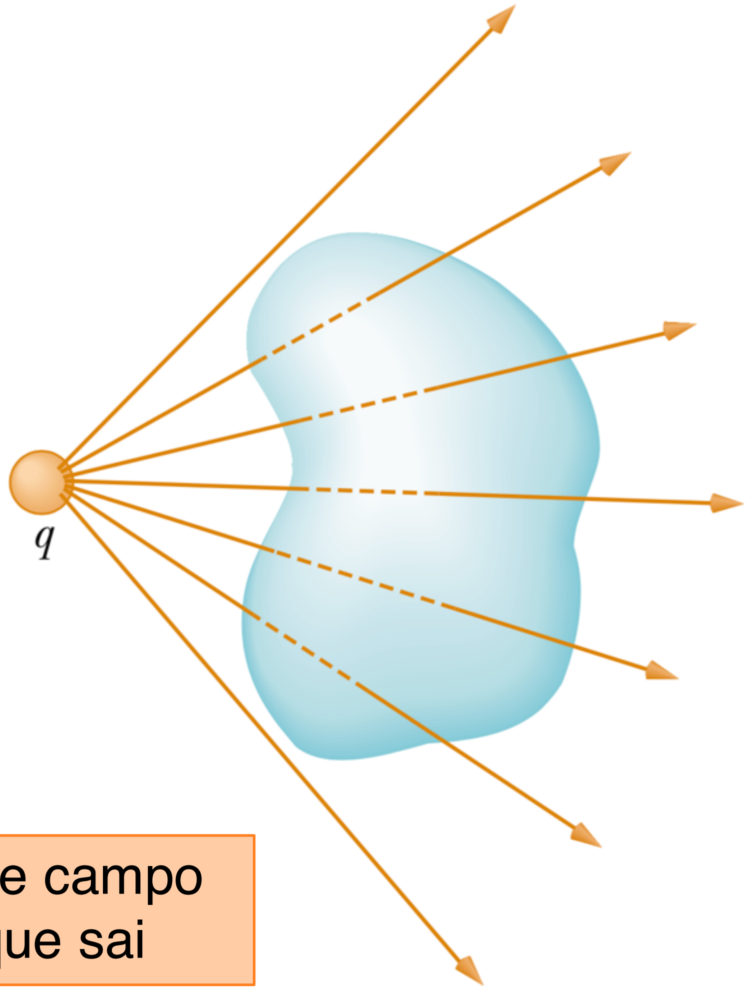


Exemplo: aplicação a uma carga pontual

Caso não exista qualquer carga *no interior*,
o fluxo que "entra" é igual ao que "sai"

$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0}$$



O número de linhas de campo que entra é igual ao que sai

Exemplo: múltiplas cargas pontuais

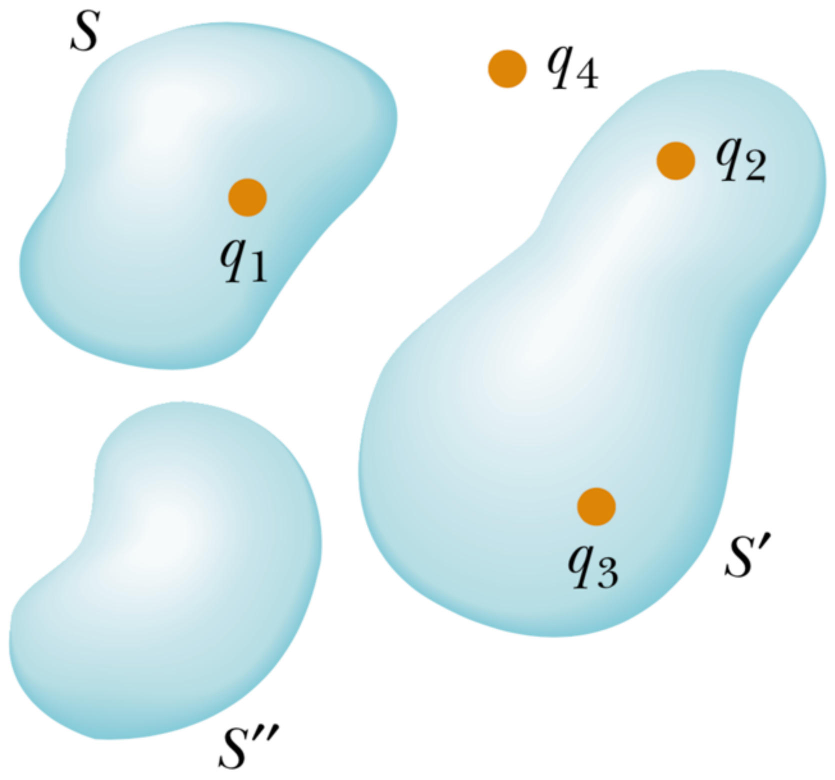
Aplicando a lei de Gauss às cargas q_1, q_2, q_3 e q_4 e superfícies S, S' e S'':

$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{S'} (\vec{E}_2 + \vec{E}_3) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$

Princípio da sobreposição

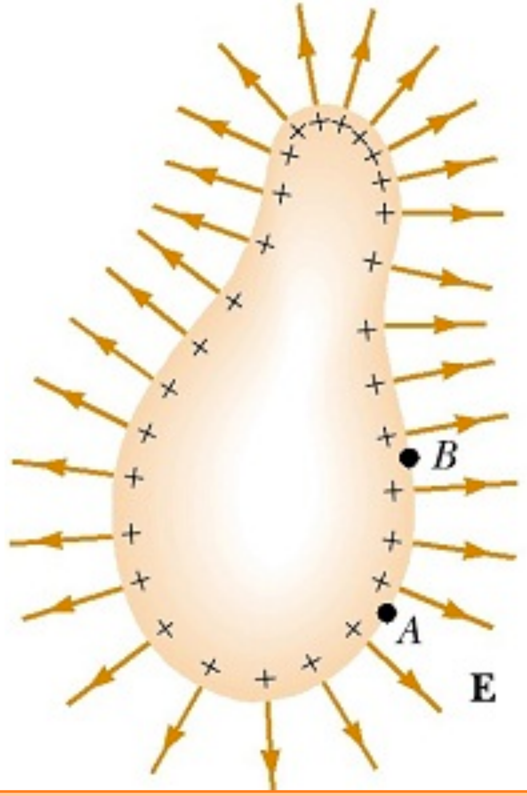
$$\oint_{S''} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$



Exemplo: condutor em equilíbrio electrostático

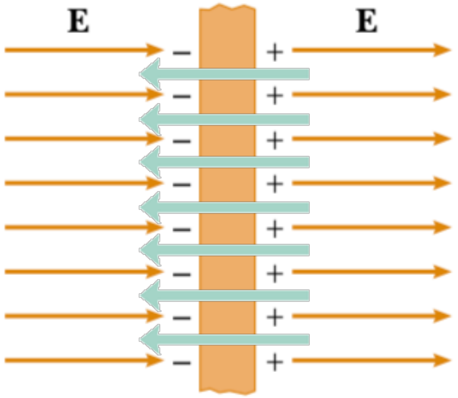
Num condutor de forma arbitrária:

1. O campo eléctrico no interior é **nulo**
2. Caso tenha carga, esta distribui-se pela superfície (distribuição superficial de carga σ)
3. O campo eléctrico no exterior é **perpendicular** à superfície e tem o valor σ/ϵ_0
4. Num condutor de forma irregular, a densidade de carga é maior nas regiões em que a superfície é mais curva
5. Todo o condutor é uma **equipotencial**



O resultado $E = \sigma/\epsilon_0$ só e válido na vizinhança do condutor!

Exemplo: condutor em equilíbrio electrostático

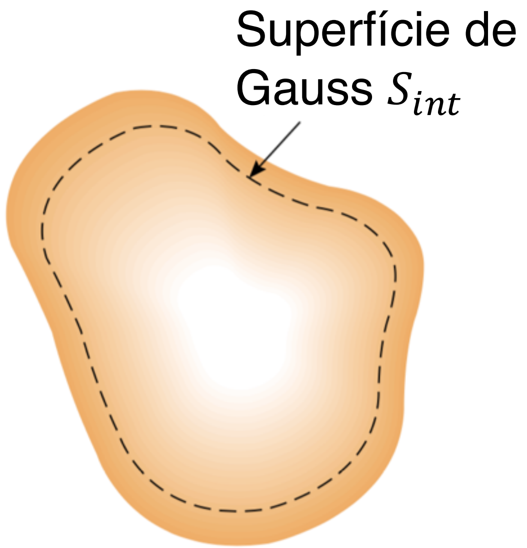


1. **O campo eléctrico no interior é nulo**
   No interior do condutor, as cargas move-se até criarem uma distribuição de campo $\vec{E}'$ que anula o campo exterior $\vec{E}$.

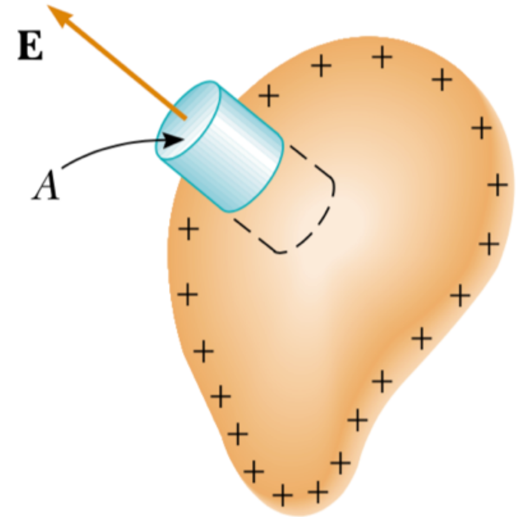
2. **Caso tenha carga, esta distribui-se pela superfície**
   A carga é empurrada para a superfície, criando uma distribuição superficial σ estacionária.

$$\vec{E} = 0 \text{ no interior} \rightarrow \oint_{S_{int}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Quaisquer cargas só podem existir à superfície.



Exemplo: condutor em equilíbrio electrostático



3. O campo eléctrico no exterior é perpendicular à superfície e tem o valor $\boldsymbol{\sigma/\epsilon_0}$

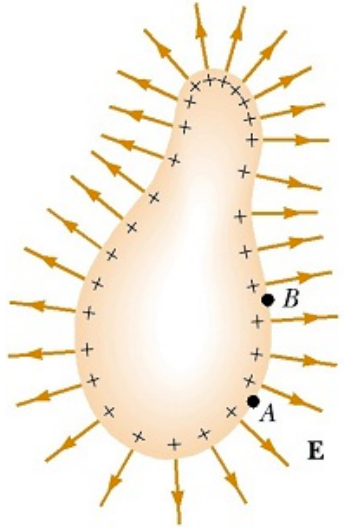
5. Todo o condutor é uma equipotencial

Na superfície do condutor:

- Só pode existir campo com componente **perpendicular** à superfície (senão as cargas moviam-se)
- Considerando uma **superfície de Gauss** de forma cilíndrica e paralela à superfície do condutor:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{\text{int}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} + \iint_{\text{ext}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}}$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = 0 \qquad\qquad = EA$$

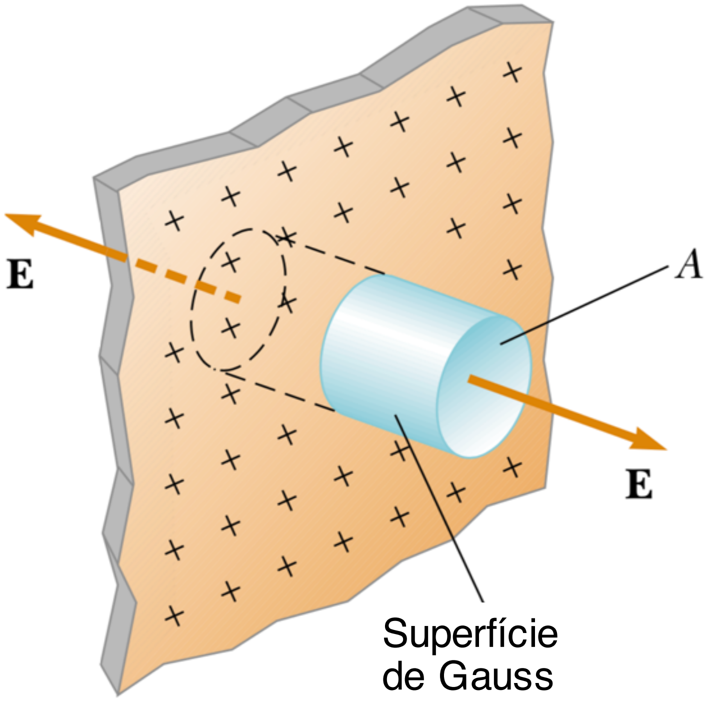


O resultado $E = \sigma/\epsilon_0$ só e válido na superfície do condutor!

Exemplo: placa com densidade de carga em superfície σ

Para uma placa infinita, por uma questão de simetria o campo eléctrico é *perpendicular* à placa.

Escolhemos como superfície de Gauss um cilindro com as bases paralelas à placa:



$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{\mathrm{esq}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \iint_{\mathrm{dir}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}}$$

O **campo eléctrico é uniforme** em todo o espaço.

Exemplo: duas placas com densidades de carga em superfície σ e $-\sigma$

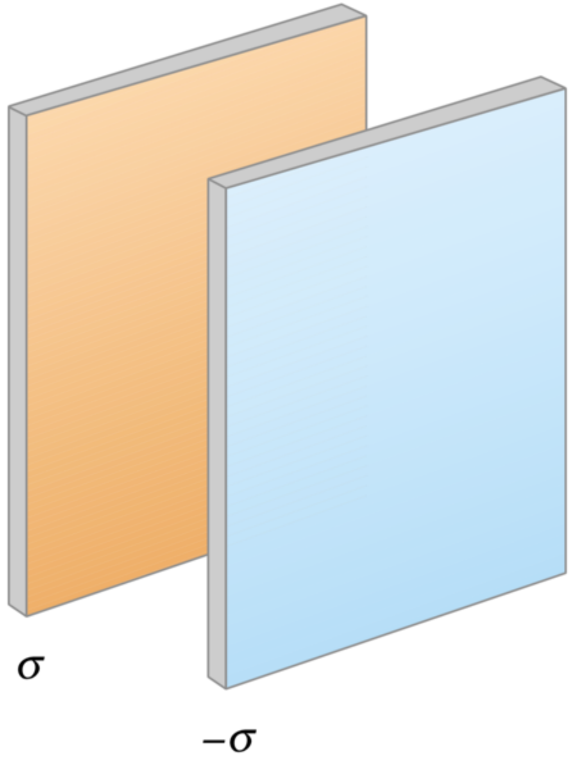
Pelo princípio da sobreposição:

- o campo eléctrico no exterior das placas é

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n} = 0$$

- o campo eléctrico no interior das placas é

$$\vec{E}_{int} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}(-\vec{n}) = \boxed{\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}}$$



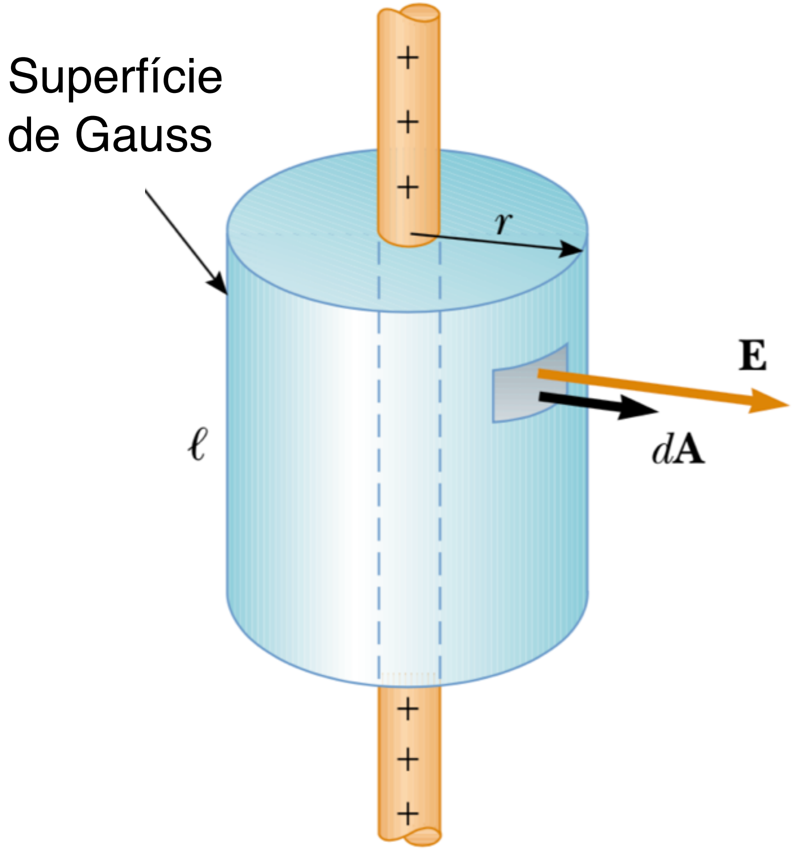
Exemplo: fio com densidade de carga linear λ

Para um fio infinito, por uma questão de simetria o campo eléctrico é *perpendicular* ao eixo do fio. Escolhemos como superfície de Gauss um cilindro coaxial com o fio:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \underbrace{\iint_{\text{bases}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}}_{=0} + \underbrace{\iint_{\text{lado}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}}_{=E2\pi rl} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\vec{u}_r}$$

O campo eléctrico **varia com** $\mathbf{1/r}$.



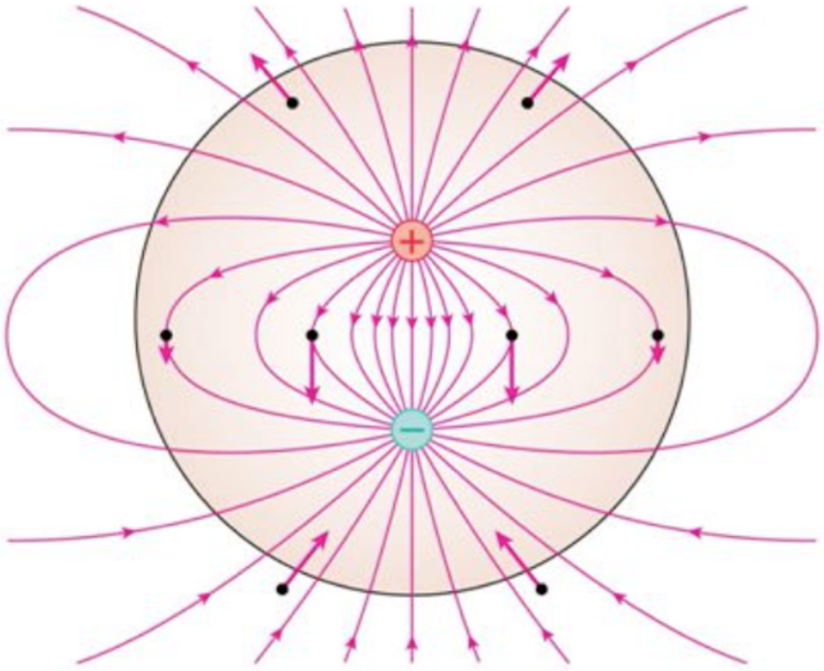
Exemplo: dipolo eléctrico

Escolhendo uma qualquer superfície de Gauss S que englobe as duas cargas, temos:

- A carga total no interior é nula, $q = q_+ + q_\downarrow = 0$
- O número de linhas de campo que entram na superfície é idêntico ao das que saem

$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

O fluxo através de S é nulo, apesar do campo não ser nulo em nenhum ponto de S!



A Lei de Gauss não funciona neste caso?

Como escolher uma superfície de Gauss adequada?

Possíveis simplificações do integral do fluxo para certas condições:

- Quando o valor do campo elétrico é constante numa parte da superfície, $\vec{E}$ pode "sair" do integral.

- O produto interno $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$ pode ser substituído por EdA se $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dA}$.

- O produto interno $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$ é nulo se $\vec{E} \perp \overrightarrow{dA}$.

- O campo eléctrico é zero numa parte da superfície.

Sumário

- O **fluxo do campo eléctrico** é proporcional ao número de linhas de campo que passam pela superfície
- Para uma **superfície fechada**, o fluxo é proporcional à diferença entre as linhas que entram e as que saem
- A **Lei de Gauss** relaciona o fluxo através de uma superfície fechada e a carga no interior da superfície
- Para aplicar a Lei de Gauss correctamente devemos explorar simetrias e escolher uma **superfície de Gauss** adequada, que permita simplificar o cálculo do fluxo