AULA 04

Os números reais

4.1 A incompletude da recta racional

Os números racionais constituem um sistema numérico mais completo que o dos números naturais. Uma variedade mais geral de situações pode ser descrita com recurso a estes números. Ainda assim, os racionais são muito incompletos. Consideremos, por exemplo, o processo de aritmetização da geometria. Os objectos geométricos podem ser descritos através de equações, essencialmente porque é possível descrever os pontos da recta, do plano ou do espaço, através de números. À primeira vista, os racionais são suficientes para este processo de «codificação». Marcando dois pontos O e A (*ver* Fig. 4.1 (A)) numa recta determinamos um segmento de recta que, convencionalmente consideramos unitário. Considerando múltiplos inteiros deste segmento, é fácil descrever pontos da recta que, diremos, possuem coordenadas inteiras. Mas, podemos ir mais longe. Como é claro muitos pontos da recta não ficam associados a coordenadas pelo procedimento anterior. Mas dado um segmento de recta, é possível dividi-lo em n partes iguais, usando um procedimento geométrico simples (*ver* Fig. 4.1 (B)). Não é

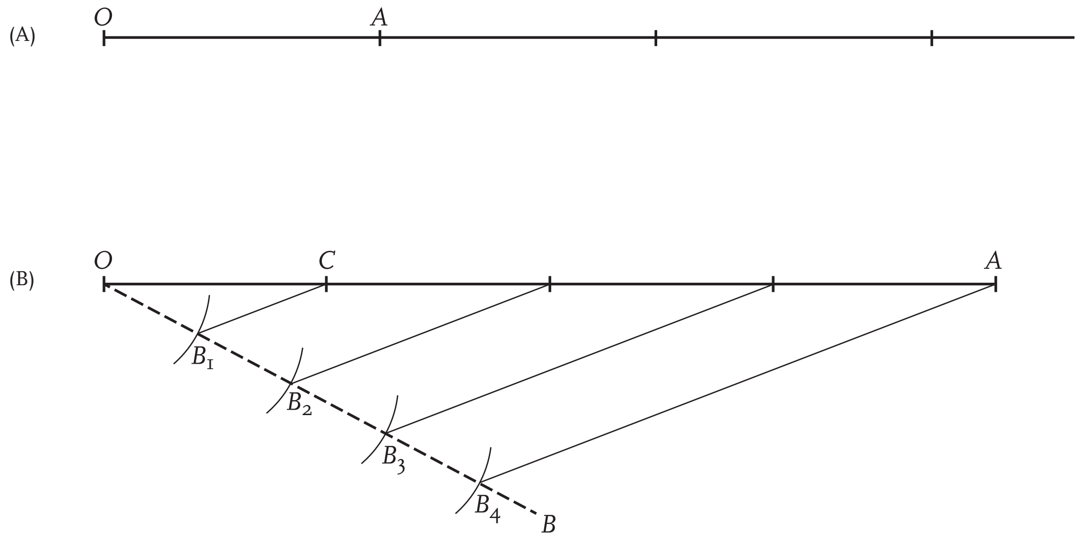

Figura 4.1: A recta racional

difícil perceber que combinando estes dois factos é possível associar a cada número racional um ponto da recta. (Os pontos da recta que ficam, por este processo, associados a

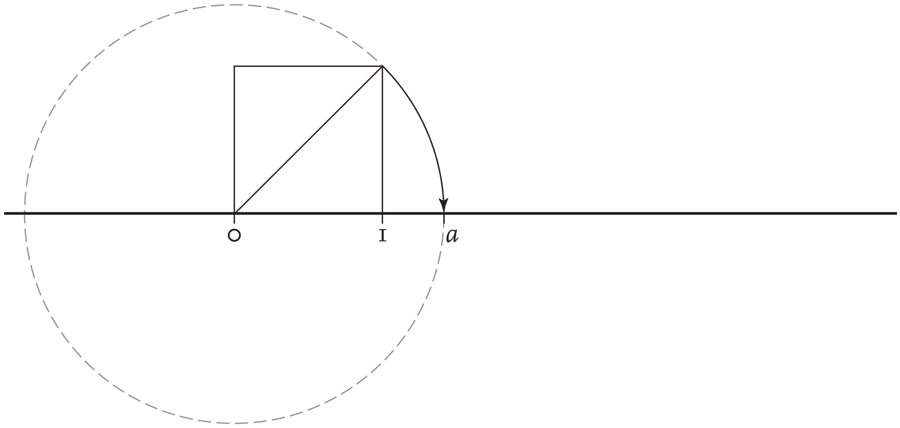

Figura 4.2: Um ponto da recta que não é um ponto da recta racional

números racionais, constituem aquilo que se designa de *recta racional*.) A questão importante é: haverá uma coincidência entre a recta e a recta racional?, i.e., serão os racionais suficientes para que possamos associar a cada ponto da recta uma «coordenada»?

À primeira vista a resposta parece ser positiva, afinal de contas os pontos de uma recta e os números racionais partilham uma mesma propriedade, que parece essencial—a *densidade*. Com efeito, do mesmo modo que entre dois pontos de uma recta existe sempre um terceiro, o mesmo sucede com os racionais: entre dois racionais p e q existe sempre um terceiro, por exemplo $(p+q)/2$.

A resposta é negativa. O facto era já essencialmente conhecido por Pitágoras (c. 570 a.C.–c. 495 a.C.). A diagonal de um quadrado unitário tem comprimento $\sqrt{2}$. Se marcarmos na recta o ponto correspondente a este comprimento (*ver* Fig. 4.2) este não pode estar associado a uma coordenada racional porque, devido a um resultado obtido, se não pelo próprio Pitágoras, por um membro da escola pitagórica, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Lema 4.1 (Pitágoras).— *A diagonal e o lado de um quadrado não são comensuráveis, i.e. (em linguagem numérica)* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dem.— Suponhamos que $\sqrt{2} = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade podemos supor que m, n são primos relativos ou seja, 1 é o único divisor comum entre m e n (isto é equivalente a dizer que a fracção m/n é irredutível). Suponhamos então, tendo em vista obter um absurdo que $\sqrt{2} = m/n$. Tem-se então,

$$2 = m^2/n^2 \equiv 2n^2 = m^2. \tag{4.1}$$

Daqui resulta que m^2 é par e, como o quadrado de um número é par sse o número for par, resulta também que m é par, ou seja, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2r$. Substituindo em (4.1), obtem-se:

$$2n^2 = 4r^2 \equiv n^2 = 2r^2, \tag{4.2}$$

e como anteriormente concluímos que n é par. Nestas condições, tanto m como n são divisíveis por 2, contradizendo o facto de serem primos relativos.

Concluímos então, usando o método de redução ao absurdo, que $\sqrt{2}$ não pode ser um racional. ■

Foi apenas cerca de 1870 que Richard Dedekind (1831–1916) conseguiu isolar a característica essencial que caracteriza o *continuum* dos pontos de uma recta: sempre que cortamos uma recta em duas semi-rectas, existe um ponto da recta que determina esse corte. Essa característica não é verificada nos números racionais. Em primeiro lugar importa considerar a noção correspondente a este conceito de corte da recta.

Definição 4.1.— *Um corte nos números racionais é um conjunto não vazio de racionais, digamos $\alpha \subset \mathbb{Q}$ verificando as seguintes condições:*

(1) *se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$ é menor que p então, $q \in \alpha$;*

(2) *se $p \in \alpha$ então existe $q \in \alpha$ tal que $q > p$.*

(3) $\alpha \neq \mathbb{Q}$

Um corte α diz-se determinado por um racional p se $\alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < p\}$. (Por exemplo o corte $\{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\}$ é determinado pelo racional 0.) No entanto, existem outros cortes α que não são determinados por racionais. Basta considerar o corte α onde $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \mid p^2 < 2\}$ (estamos perante um corte porque a possibilidade $p^2 \neq 2$, para $p \in \mathbb{Q}$.

Tem-se agora que nem A tem máximo nem B tem mínimo, pelo que este corte não é determinado por um racional.

Lema 4.2.— *Consideremos o conjunto $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \mid (\exists q \in \mathbb{Q}^+)[q^2 < 2 \wedge p < q]\}$. Tem-se que α é um corte e não é determinado por nenhum racional.*

Dem.— Comecemos por verificar que α é um corte. Tem-se que α não é vazio, poi por exemplo $1 \in \alpha$. Por outro lado também se tem $\alpha \neq \mathbb{Q}$ pois, por exemplo $2 \notin \mathbb{Q}$. Também é fácil mostrar que se $p \in \alpha$ e $q \leq p$ então $q \in \alpha$. Finalmente se $p \in \alpha$ temos que demonstrar que existe $q \in \alpha$ tal que $q > p$. Basta fazer esta verificação para $p > 0$.

Consideremos então $p > 0$. Associemos-lhe o número,

$$q = \frac{2p+2}{p+2}. \tag{4.3}$$

É fácil verficar que $q > p$. Por outro lado

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2} < 0,$$

ou seja $q^2 < 2$ e $q > p$.

O corte α não é determinado por nenhum racional. Supondo o contrário, ou seja que existe um racional p tal que $\alpha = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < p\}$ ter-se-ia $p^2 > 2$ (já que $p^2 = 2$ é impossível). Considerando q dado pela equação (4.3), tem-se nestas circunstâncias que $q < p$ e $q^2 > 2$, contradizendo o facto de α ser determinado por p. ■

Usando este conceito de «corte de racionais» Dedekind foi bem sucedido descrevendo um conjunto de números—os números reais que possuem um maior «grau de completude» que os números racionais. Basicamente Dedekind demonstrou a existência de um *corpo ordenado completo*. Como iremos ver, a estrutura de um corpo ordenado completo é única, i.e., dois corpos ordenados completos são estruturalmente equivalentes. Deste modo o que faremos de seguida é fixar uma destas estruturas e designar os seus elementos por *números reais*. O conjunto dos números reais (que é uma extensão de $\mathbb{Q}$) denota-se por $\mathbb{R}$.

Consideremos algumas definições.

DEFINIÇÃO 4.2.— *Um corpo é uma estrutura do tipo* $\mathbb{K} = (K, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ *onde* $\mathbb{0}, \mathbb{1} \in K$ *e* $+, \cdot$ *são operações binárias em* K*, denominadas de* adição *e* produto*. A estrutura* $\mathbb{K}$ *deve satisfazer o seguinte:*

1. $(\forall x, y)[x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x]$ *(comutatividade);*
2. $(\forall x, y, z)[(x + y) + z = x + (y + z) \wedge (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$ *(associatividade);*
3. $(\forall x) x + \mathbb{0} = x$*; (elemento neutro de +);*
4. $(\forall x)(\exists y) x + y = \mathbb{0}$ *(existência de simétrico);*
5. $(\forall x \neq \mathbb{0}) x \cdot \mathbb{1} = x$ *(elemento neutro de ·);*
6. $(\forall x \neq \mathbb{0})(\exists y) x \cdot y = \mathbb{1}$ *(existência de inverso);*
7. $(\forall x, y, z) x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ *(distributividade de · relativamente a +).*

Algumas observações.

OBSERVAÇÃO 1.— O simétrico de qualquer elemento x de um corpo $\mathbb{K}$ é único. Assim sendo, denotamo-lo por $-x$.

OBSERVAÇÃO 2.— O inverso de qualquer $x \neq 0$ é único. Por isso denotamo-lo por $1/x$ ou por x^{-1}.

Estaremos interessados nos denominados *corpos de característica 0* (zero). Tratam-se dos corpos onde a sequência:

$$\mathbb{1}, \quad \mathbb{1} + \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} + \mathbb{1} + \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} + \mathbb{1} + \mathbb{1} + \mathbb{1}, \quad \ldots \textit{ ad infinitum},$$

não contém nenhum zero. Pode mostrar-se que os elementos da sequência acima são do ponto de vista estrutural uma cópia dos naturais positivos. Denotando $\mathbb{1} + \mathbb{1}$ por $\mathbb{2}$, $\mathbb{1} + \mathbb{1} + \mathbb{1}$ por $\mathbb{3}$, etc. podemos identificar o racional m/n com o elemento $\mathbb{m} \cdot \mathbb{n}^{-1} \in \mathbb{K}$. Embora não o façamos pode demonstrar-se que:

LEMA 4.3.— *Sendo* $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} = (\{\mathbb{m} \cdot \mathbb{n}^{-1} \mid m, n \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ *tem-se que* $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}$ *e a estrutura* $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ *é equivalente à estrutura dos números racionais.*

Em virtude do lema anterior, qualquer corpo de característica zero contém os números racionais. De facto $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ é o menor corpo de característica zero.

Definição 4.3.— *Uma ordem total num conjunto A é uma relação binária* $<$ *em A que satisfaz:*

1. $(\forall x, y)[x < y \Rightarrow \neg y < x]$
2. $(\forall x, y, z)[x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z]$;
3. $(\forall x, y)[x < y \vee y < x \vee x = y]$

Uma ordem total é um par $(A, <)$ *onde A é um conjunto não vazio e* $<$ *é uma ordem total em A.*

Se $(A <)$ é uma ordem total também escrevemos $x \leq y$ para abreviar $x < y \vee x = y$.

Definição 4.4.— *Suponhamos que* $(A, <)$ *é uma ordem total e* $X \subseteq A$. *Um* majorante *de X é um elemento* $m \in A$ *tal que* $(\forall x \in X)x \leq m$. *O conjunto dos majorantes de X denota-se por* $\mathrm{Maj}(X)$. *De modo análogo, um minorante de X é um elemento* $a \in A$ *tal que* $(\forall x \in X)a \leq x$. *O conjunto dos minorantes de X denota-se por* $\mathrm{Min}(X)$. *Se existir o menor elemento de* $\mathrm{Maj}(X)$ *ele designa-se de supremo de X e denota-se por* $\sup(X)$. *Se existir o maior elemento de* $\mathrm{Min}(X)$ *ele designa-se de ínfimo de X e denota-se por* $\inf(X)$. *Se* $\sup(X) \in X$ *diz-se que é o máximo de X, que se denota por* $\max(X)$. *De modo análogo, se* $\inf(X) \in X$ *diz-se o mínimo de X e denota-se por* $\min(X)$.

Definição 4.5 (Axioma do supremo).— *Suponhamos que* $(A, <)$ *é uma ordem total. Dizemos que* $(A, <)$ *satisfaz o axioma do supremo se, dado um qualquer* $X \subseteq A$ *tal que* $X \neq \emptyset$, *se* $\mathrm{Maj}(X) \neq \emptyset$ *então existe o* $\sup(X)$, *i.e.,*

$$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \wedge \mathrm{Maj}(X) \neq \emptyset \Rightarrow (\exists a \in A)a = \sup(X)].$$

Definição 4.6 (Corpo ordenado).— *Por* corpo ordenado *entende-se uma estrutura do tipo* $\mathbb{K} = (K, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1}, <)$ *onde* $(K, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ *é um corpo de característica zero e* $(K, <)$ *é uma ordem total satisfazendo:*

1. $(\forall x, y, z)[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$;
2. $(\forall x, y, z)[x < y \wedge \mathbb{0} < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z]$.

Num corpo ordenado, os elementos $x \in K$ tais que $\mathbb{0} < x$ dizem-se *positivos*. Os elementos que não são positivos nem nulos dizem-se *negativos*. Denotamos por $\mathbb{K}^+$ o conjunto dos elementos positivos em $\mathbb{K}$ e por $\mathbb{K}^-$ o conjunto dos elementos negativos.

Definição 4.7 (Corpo ordenado completo).— *Um corpo ordenado completo é um corpo ordenado* $\mathbb{K}$ *que satisfaz o axioma do supremo.*

Teorema 4.1.— *Os números racionais constituem, juntamente com as operações e a relação de ordem usuais, um corpo ordenado* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$. *Este corpo ordenado não é completo.*

Dem.— A verificação de que se trata de um corpo ordenado é deixada como exercício. Este corpo não satisfaz o axioma do supremo na medida em que considerando o conjunto não vazio $X \subseteq \mathbb{Q}$ definido por $X = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ este conjunto não é vazio e é majorado, de facto, como nenhum racional satisfaz a condição $q^2 = 2$, tem-se que $\mathrm{Maj}(X) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 > 2\}$. Mas este conjunto não tem elemento mínimo, logo não existe supremo. ■

Os racionais possuem uma propriedade adicional, constituem o que se denomina um corpo arquimediano.

Definição 4.8.— *Um copo ordenado* $\mathbb{K} = (K, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1}, <)$ *diz-se arquimediano se satisfaz a seguinte propriedade: dados* $x, y \in \mathbb{K}^+$ *com* $x < y$ *então existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $y < \mathbb{n} \cdot x$. *(Oberve-se que* $\mathbb{n} \cdot x = (\mathbb{1} + \mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1}) \cdot x$ *(com n* $\mathbb{1}$*'s) e este último é* $x + x + \cdots + x$ *(com n x's).) Um elemento de K da forma* $\mathbb{n} \cdot x$ *também se diz um múltiplo de x.*

Lema 4.4.— *O corpo* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *é arquimediano.*

Dem.— Considerando $0 < m/n < r/s$ é fácil verificar que $(nr)(m/n) = rm > r/s$.■

Teorema 4.2 (Dedekind).— *Existe um corpo ordenado completo. Dois corpos ordenados completos têm estruturas equivalente pelo que,* existe essencialmente um único corpo ordenado completo, *corpo esse que se denota por* $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ *e cujos elementos se designam de* números reais.

A demonstração deste resultado é relegada para a secção final que não se considera, apesar de tudo essencial.

Lema 4.5.— *O corpo* $\mathbb{R}$ *é arquimediano.*

Dem.— Consideremos dois reais positivos $x < y$. Se nenhum número da forma nx com $n \in \mathbb{N}$ excede y então o conjunto $X = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ é majorado e, como $\mathbb{R}$ satisfaz o axioma do supremo tem-se que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(X)$. Neste caso $\alpha - x$ não é um majorante de X, pelo que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > \alpha - x$. Neste caso tem-se $nx + x = (n + 1)x > \alpha$, contradizendo o facto de α ser o supremo de X. ■

Teorema 4.3.— *Os números racionais são densos em* $\mathbb{R}$, *i.e., dados quaisquer dois números reais* $x < y$ *existe um racional p tal que* $x < p < y$.

Dem.— Consideremos dois números reais $x < y$.

Seja n o maior natural que não excede x. Se $y - x > 1$ então, $x < n + 1 < y$. Se $y = x+1$ e $n < x$ o argumento anterior aplica-se, caso contrário tem-se $x = n$ e $y = n+1$ pelo que neste caso se tem $n < (n + n + 1)/2 < n + 1$.

Considerando agora que $0 < y - x < 1$ podemos, usando o facto de $\mathbb{R}$ ser arquimediano, encontrar um natural k tal que $k(y < x) > 1$ ou seja $ky - kx > 1$. Aplicando o argumento da primeira parte a kx, ky podemos concluir que existe um natural r tal que $kx < r < ky$. Dividindo por k obtemos: $x < r/k < y$. Concluindo assim a demonstração. ■

Corolário 4.3.1.— *Se* $x \in \mathbb{R}$ *então* $x = \sup\{p \in \mathbb{Q} \mid p < x\}$.

Existem elementos de $\mathbb{R}$ que não são racionais (de facto a maior parte dos elementos de $\mathbb{R}$ não é racional). Os elementos do conjunto $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ designam-se de *números irracionais*.

TEOREMA 4.4.— *Os irracionais são densos em $\mathbb{R}$, i.e., dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, existe $a \in \mathbb{I}$ tal que $x < a < y$.*

Já vimos atrás que equações da forma $x^2 = k$ podem não ser resolúveis em $\mathbb{Q}$, por exemplo, nenhum racional pode satisfazer a equação $x^2 = 2$, como vimos antes. Isto não acontece nos reais.

TEOREMA 4.5.— *Consideremos um número real $k \geq 0$. A equação $x^n = k$ tem uma única solução positiva em $\mathbb{R}$, para qualquer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Essa solução denota-se por $\sqrt[n]{k}$ ou $k^{1/n}$.*

DEM.— É claro que só pode haver uma única solução positiva possível pois se $0 < a < b$ então $a^n < b^n$. Mostremos então que existe uma solução. Consideremos o conjunto $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^n < k\}$. Em primeiro lugar $A \neq \emptyset$ pois, considerando $\alpha = k/(1 + k)$, tem-se $0 < \alpha < 1$ e, consequentemente, $\alpha^n < \alpha < k$. Além disso A é majorado porque se $1 + k$ é majorante de A (verifique!). Nestas condições A é não vazio e majora e, pelo axioma do supremo, conclui-se que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta = \sup A$.

Vamos agora mostrar que $\beta^n > k$ e $\beta^n < k$ são hipóteses que conduzem a contradições, pelo que só se pode ter $\beta^n = k$, permitindo concluir a demonstração.

Tem-se que $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1})$ (o leitor pode estabelecer esta relação por indução). Asim, se $0 < a < b$ tem-se que

$$b^n - a^n < (b - a)nb^{n-1}. \tag{4.4}$$

Consideremos então a possibilidade $\beta^n < k$. Consideremos $0 < \epsilon < 1$ tal que

$$0 < \epsilon < \frac{k - \beta^n}{n(\beta + 1)^n}. \tag{4.5}$$

Usando (4.3) obtemos,

$$(\beta + \epsilon)^n - \beta^n < \epsilon n(\beta + \epsilon)^{n-1} < \epsilon n(\beta + 1)^{n-1} < k - \beta^n$$

obtendo-se a última desigualdade, usando (4.4).

Podemos então concluir de $(\beta + \epsilon)^n - \beta^n < k - \beta^n$ que $(\beta + \epsilon)^n < k$, mas isto contradiz o facto de β ser o supremo do conjunto $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha^n < k\}$.

Consideremos agora uma segunda possibilidade: $\beta^n > k$. Neste caso, seja

$$\epsilon = \frac{\beta^n - k}{n\beta^{n-1}}. \tag{4.6}$$

Cálculos simples mostrarão que $0 < \epsilon < \beta$. Considerando agora $t > \beta - \epsilon$, tem-se:

$$\beta^n - t^n < \beta^n - (\beta - \epsilon)^n < n\epsilon\beta^{n-1} = \beta^n - k \tag{4.7}$$

obtendo-se a última igualdade usando (4.5). De (4.6) resulta que $-t^n < -k$ ou seja que $t^n > k$. Assim nenhum $t > \beta - \epsilon$ é membro de A. Dito isto por outras palavras, β_ϵ é um majorante de A, originando uma contradição pois, como $\beta - \epsilon < \beta$ seria um majorante menor que o supremo.

As hipóteses $\beta^n > k$ e $\beta^n < k$ conduzem a contradições e assim, somos forçados a concluir que $\beta^n = k$. ■

Apresenta-se a seguir uma enumeração de propriedades básicas dos reais (de facto, de qualquer corpo ordenado).

1. Se $x + y = x + z$ então $y = z$.
2. Se $x + y = x$ então $y = 0$.
3. Se $x + y = 0$ então $y = -x$.
4. Tem-se $-(-x) = x$.
5. Se $x \neq 0$ e $xy = xz$ então $y = z$.
6. Se $x \neq 0$ e $xy = x$ então $y = 1$.
7. Se $xy = 1$ então $y = x^{-1}$.
8. Se $x \neq 0$ então $(x^{-1})^{-1} = x$.
9. Tem-se $0 \cdot x = 0$.
10. Se $x, y \neq 0$ então $xy \neq 0$.
11. Tem-se $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.
12. Tem-se $(-x)(-y) = xy$.
13. Se $y < z$ então $x + y < x + z$.
14. Se $x, y > 0$ então $xy > 0$.
15. Se $x > 0$ então $-x < 0$ e vice-versa.
16. Se $x > 0$ e $y < z$ então $xy < xz$.
17. Se $x < 0$ e $y < z$ então $xy > xz$.
18. Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$.
19. Se $0 < x < y$ então $0 < 1/y < 1/x$.

4.1.1 Existência e unicidade de um corpo ordenado completo*

Esta secção é uma extensão da aula no sentido em que o seu conteúdo não será abordado na aula. Não sendo essenciais, os resultados desta secção são disponibilizados para que o leitor mais interessado possa familiarizar-se com alguns factos que anteriormente foi convidado a aceitar. Apesar disso não se encontrará aqui uma demonstração plena desses mesmos resultados. Apenas daqueles pontos mais importantes. Como regra geral, verificações mais ou menos mecânicas serão deixadas de lado. Seremos fieis ao pensamento de Riemmann: «as demonstrações fazem-se através de ideias e não através de cálculos fastidiosos».

Comecemos pela questão da existência.

O corpo ordenado completo que vamos descrever resulta dos esforços de Richard Dedekind para obter uma analogia aritmética dos pontos de uma recta. O *Cálculo* desenvolveu-se à custa de fortes intuições geométricas. Quando chegamos a NEWTON e LEIBNIZ, a dependência dessa intuição atinge o seu auge, chegando-se a um ponto em que já ninguém duvidava que todo o *Cálculo* necessitava de fundações mais sólidas. Inicia-se um período designado de *aritmetização da Análise*.[1]

Vária tentativas precederam aquela levada a cabo por Dedekind. Todas elas (exepto provavelmente uma da autoria de Bolzano que pretendia ampliar os racionais através da consideração de operações infinitárias) tentaram explorar a noção de *densidade* dos pontos de uma recta. Ou seja a característica de *continuidade* dos pontos de uma recta, parecia residir no facto de entre dois pontos existir sempre um terceiro. A ideia é tentadora mas inútil em si mesma, pois os números racionais já são densos, i.e., entre quaisquer dois deles existe sempre um terceiro e, como vimos atrás, não podem representar os pontos de uma recta.

Dedekind teve uma ideia absolutamente decisiva que haveria de o conduzir à solução do problema de representar os pontos da recta aritmeticamente. De acordo com Dedekind aquilo que caracteriza o *continuum* da recta é o facto de, sempre que se divide a recta em duas semi-rectas, essa divisão ser sempre determinada por um ponto. Transpondo a noção de *semi-recta* para os números racionais chegamos à noção de *corte nos racionais*.

O que é afinal um corte nos racionais?

Trata-se de um conjunto de racionais $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$, possuindo as seguintes propriedades:

1. $\alpha \neq \emptyset$;

2. $(\forall p \in A\alpha)(\forall q \in \mathbb{Q})[q < p \Rightarrow q \in \alpha]$;

3. $(\forall p \in \alpha)(\exists q \in \alpha) q > p$.

(Seguiremos aqui a convenção de denotar por letras como $p, q, r, s, \ldots$ os números racionais e por letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ os cortes de racionais.)

Um corte α é determinado por um racional p se $\alpha = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < p\}$. Assim sendo qualquer racional determina um corte, mais precisamente, o corte $\alpha_p = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < p\}$. O ponto crucial é que nem todos os cortes são determinados por racionais. Já vimos um exemplo: $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \mid p^2 < 2\}$.[2] Designemos por $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os cortes de racionais. É fácil definir uma ordenação em $\mathbb{R}$, através de

$$\alpha <_{\mathbb{R}} \beta \quad \text{sse} \quad \alpha \subsetneq \beta.$$

LEMA 4.6.— *A relação $\leq_{\mathbb{R}}$ acima definida é uma relação de ordem total.*

DEM.— Exercício.■

LEMA 4.7.— *A estrutura $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ satisfaz o axioma do supremo.*

1. O *Cálculo* também é designado de *Análise*.

2. De facto a maioria dos cortes racionais não é determinada por um racional, mas a demonstração deste facto transcende o âmbito destas notas.

DEM.— Consideremos $X \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X \neq \emptyset$ e $\mathrm{Maj}(X) \neq \emptyset$. Pode demonstrar-se que $\gamma = \bigcup\{\alpha \mid \alpha \in X\}$ é um corte. Por outro lado se para cada $\alpha \in X$ se tem $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta$, ou seja, se β é majorante de X então tem-se que $\alpha \subseteq \beta$ para qualquer $\alpha \in X$. Daqui decorre que $\gamma = \bigcup\{\alpha \mid \alpha \in X\} \subseteq \beta$, ou seja, $\gamma \leq_{\mathbb{R}} \beta$, confirmando que $\gamma = \sup X$. ■

Resta-nos definir uma estrutura de corpo nos cortes racionais, definindo $+_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}$ e $1_{\mathbb{R}}$ de modo que $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$ seja um corpo ordenado completo.

Começamos por definir as constantes $1_{\mathbb{R}}$ e 0_R é o corte determinado pelo racional 0 e $1_{\mathbb{R}}$, o corte determinado pelo racional 1. Quanto às operações considera-se a seguinte definição para $+_{\mathbb{R}}$:

$$\alpha +_{\mathbb{R}} \beta := \{p + q \mid p \in \alpha \wedge q \in \beta\}.$$

LEMA 4.8.— *A estrutura* $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ *satisfaz os axiomas de corpo ordenado que envolvem apenas a operação* + *e a constante* 0.

DEM.— Deixa-se ao cuidado do leitor completar os detalhes aqui omitidos. É fácil verificar as propriedades de associatividade e comutatividade. Igualmente fácil é a constatação de que $0_{\mathbb{R}}$ é o elemento neutro para $+_{\mathbb{R}}$. Resta-nos a verificação de que todo o corte possui um «simétrico».

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ consideremos

$$-\alpha := \{p \in \mathbb{Q} \mid (\exists r > 0) - p - r \notin \alpha\}.$$

É possível mostrar que $-\alpha$ é um corte. Vamos agora verificar que $\alpha +_{\mathbb{R}} (-\alpha) = 0_{\mathbb{R}}$. Em primeiro lugar qualquer elemento de $\alpha +_{\mathbb{R}} (-\alpha)$ é da forma $r+s$ com $r \in \alpha$ e $s \in -\alpha$. Por definição, existe $t > 0$ tal que $-s-t \notin \alpha$. Assim, tem-se $r \leq -s-t$, ou seja $r+s+t \leq 0$, pelo que $r+s < 0$ concluindo-se assim que $\alpha +_{\mathbb{R}} (-\alpha) \subseteq 0_{\mathbb{R}}$. Para verificar que $0_{\mathbb{R}} \subseteq \alpha +_{\mathbb{R}} (-\alpha)$ considere-se $r \in 0_{\mathbb{R}}$. Tem-se que $r < 0$

■

Quando a $\cdot_{\mathbb{R}}$ a definição é um pouco mais delicada. Consideramos primeiro o «produto» de dois cortes positivos. Assim se α e β são ambos positivos, define-se:

$$\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta = \{p \in \mathbb{Q} \mid (\exists r \in \alpha)(\exists s \in \beta) q < rs\}$$

A definição pode agora estender-se aos restantes casos:

$$\alpha \cdot_{\mathbb{R}} \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot_{\mathbb{R}} (-\beta) & (\text{se } \alpha, \beta <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}) \\ -((-\alpha) \cdot_{\mathbb{R}} \beta) & (\text{se } \alpha <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} \wedge 0_{\mathbb{R}} <_{\mathbb{R}} \beta) \\ -(\alpha \cdot_{\mathbb{R}} (-\beta)) & (\text{se } 0_{\mathbb{R}} <_{\mathbb{R}} \alpha \wedge \beta <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}) \end{cases}$$

Pode finalmente demonstrar-se o seguinte,

TEOREMA 4.6.— *A estrutura* $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$ *é um corpo ordenado completo.*

Não demonstraremos o resultado. Já ilustrámos a técnica de demonstração nos resultados precedentes. Neste caso trata-se de repetir argumentos do mesmo tipo e, além do mais, o nosso propósito não é o de estabelecer rigorosamente o resultado mas, tão somente o de indicar a forma como um corpo ordenado completo se pode obter.

Consideremos agora a a questão da unicidade.

Suponhamos que $\mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}_1, +_1, \cdot_1, 0_1, 1_1, <_1)$ e $\mathbb{R}_1 = (\mathbb{R}_2, +_2, \cdot_2, 0_2, 1_2, <_2)$ são corpos ordenados completos. Como já foi referido, ambos contém os racionais, i.e., $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_1$ e $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_2$. Quando falamos de unicidade, falamos evidentemente de unicidade estrtutural que pode ser testemunhada recorrendo de novo à noção de isomorfismo que já considerámos quando estabelecemos a unicidade estrutural determinada pelos axiomas de Dedekind -Peano.

No caso de dois corpos ordenados, um isomorfismo é uma bijecção que preserva as operações e a relação de ordem. Ou seja,

Definição 4.9.— *Consideremos dois corpos ordenados* $\mathbb{K}_1 = (\mathbb{K}_1, +_1, \cdot_1, 0_1, 1_1, <_1)$ *e* $\mathbb{K}_2 = (\mathbb{K}_2, +_2, \cdot_2, 0_2, 1_2, <_2)$. *Um isomorfismo entre* $\mathbb{K}_1$ *e* $\mathbb{K}_2$ *é uma bijecção* $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ *que satisfaz:*

(1) $(\forall x, y \in \mathbb{K}_1)[f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)]$;

(2) $(\forall x, y \in \mathbb{K}_1)[f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)]$;

(3) $f(0_1) = 0_2$

(4) $f(1_1) = 1_2$

(5) $(\forall x, y \in \mathbb{K}_1)[x <_1 y \equiv f(x) <_2 f(y)]$;

O facto de um isomorfismo capturar o conceito de equivalência estrutural é espelhado no resultado seguinte que não demonstraremos.

Lema 4.9.— *Suponhamos que* $\mathbb{K}_1 = (\mathbb{K}_1, +_1, \cdot_1, 0_1, 1_1, <_1)$ *e* $\mathbb{K}_2 = (\mathbb{K}_2, +_2, \cdot_2, 0_2, 1_2, <_2)$ *são dois corpos ordenados e* $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ *é um isomorfismo. Nestas condições se* σ *é uma sentença da linguagem* $L = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ *tem-se,*

$$\mathbb{K}_1 \vDash \sigma \quad sse \quad \mathbb{K}_2 \vDash \sigma.$$

Vamos então mostrar que qualquer corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Teorema 4.7.— *Se* $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, <_{\mathbb{K}})$ *é um corpo ordenado completo então, é isomorfo a* $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$.

Dem.— Já observámos que tanto $\mathbb{K}$ como $\mathbb{R}$ contém uma «cópia» dos números racionais. Como os números racionais são densos tanto em $\mathbb{K}$ como em $\mathbb{R}$ utilizaremos esse facto para construir o isomorfismo. O nosso isomorfismo irá satisfazer a seguinte condição $f(q) = q$ se $q \in \mathbb{Q}$.

Em qualquer corpo ordenado completo $\mathbb{K}$ tem-se $x = \sup_{\mathbb{K}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq x\}$, para qualquer $x \in \mathbb{K}$. Assim podemos definir:

$$f(\sup_{\mathbb{K}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq x\}) = \sup_{\mathbb{R}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq x\}.$$

A função f preserva claramente a ordem. Além disso é bijectiva. Por um lado é injectiva pois se $x \neq y$ então podemos supor sem perda de generalidade que $x < y$ e, neste caso existe um racional r tal que $x < r < y$ então, também se tem $f(x) < r < f(y)$ pelo que $f(x) \neq f(y)$. Por outro lado é sobrejectiva, pois se $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha\}$ então considerando $x = \sup_{\mathbb{K}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha\}$ tem-se, por definição que $f(x) = \alpha$.

Sendo imediato verificar que f preserva as constantes resta mostrar que preserva igualmente as operações. A título de exemplo consideramos apenas o caso da soma. Suponhamos então que $x, y \in \mathbb{K}$. Verifica-se que

$$x +_{\mathbb{K}} y = \sup_{\mathbb{K}}\{r + s \mid r < x \wedge s < y \wedge r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Como $x +_{\mathbb{K}} y$ é claramente um majorante do conjunto daquelas somas, se não fosse o seu supremo, então existiria um $z \in \mathbb{K}$ nas seguintes condições:

$$(\forall r < x)(\forall s < y) r + s <_{\mathbb{K}} z <_{\mathbb{K}} x + y.$$

Como $x = \sup_{\mathbb{K}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$ e $y = \sup_{\mathbb{K}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q < y\}$ podemos considerar racionais r e s tais que $x - r < (x + y - z)/4$ e $y - s < (x + y - z)/4$ mas nestas circunstâncias $x + y - (r + s)$ é menor que $(x + y - z)/2$ donde se conclui que $r + s >_{\mathbb{K}} z$ o que constitui uma contradição.

Tem-se então que

$$f(x +_{\mathbb{K}} y) = \sup_{\mathbb{R}}\{r + s \mid r < x \wedge s < y\} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\} +_{\mathbb{R}} \{s \in \mathbb{Q} \mid s < y\} = f(x) +_{\mathbb{R}} f(y).$$

No caso do produto usam-se argumentos do mesmo tipo. ■