LÓGICA E TEORIA DE CONJUNTOS

A noção matemática mais fundamental é certamente a noção de *conjunto*. Adoptaremos a concepção cantoriana,[1] segundo a qual um conjunto é uma colecção X de objectos, produto da nossa imaginação ou pensamento, que se designam de *elementos de* X. Um conjunto fica completamente determinado pelos seus elementos (uma propriedade designada de *extensionalidade*).

Conjunto
Elemento

Extensionalidade

A expressão simbólica «$x \in A$» significa «x é elemento de A». Se todo o elemento de A é igualmente elemento de B, dizemos que A *está contido* em B ou que A é um *subconjunto* de B e, simbolicamente escrevemos: $A \subseteq B$. A relação «$\in$» diz-se a relação de *pertença* e a relação «$\subseteq$» a relação de *inclusão*.

Relação de pertença
Relação de inclusão

As duas formas mais importantes de descrição de conjuntos são as definições em *extensão* e em *compreensão*. No primeiro caso o conjunto é definido, descriminando todos os seus elementos, por exemplo, se o conjunto é constituído pelos objectos $a_1, a_n, \dots, a_n$ então usamos a notação $\{a_1, \dots, a_n\}$ para o descrever. Este processo só é utilizável quando o conjunto tem poucos elementos, em particular, se o conjunto for finito. Mas, muitos conjuntos importantes em matemática são infinitos, pelo que este processo não se pode aplicar. Nesses casos, em geral, recorre-se à definição em compreensão que, consiste em isolar um determinado predicado (ou propriedade) que caracteriza exactamente os elementos do conjunto. Por exemplo, podemos descrever um conjunto através da propriedade «n é um número natural par», o respectivo conjunto, i.e., o conjunto dos números naturais pares denota-se: $\{n \mid n \text{ é um número natural par}\}$. De um modo geral, abreviando por $A(x)$ a frase «x é um objecto com o predicado A», o conjunto dos indivíduos que possuem o predicado A representa-se simbolicamente por $\{x \mid A(x)\}$.

Definição em extensão
Definição em compreensão

Exemplo 1.— O conjunto $\{x \mid x \neq x\}$ não possui quaisquer elementos e designa-se de *conjunto vazio*. O conjunto vazio denota-se por $\varnothing$. Outros conjuntos podem agora definir-se: $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, etc.

A concepção cantoriana de «conjunto» é o resultado daquela que constituiu historicamente, a primeira tentativa sistemática de estudar este conceito de um ponto de vista matemático. No entanto, esta abordagem, ao mesmo tempo que se revelava conceptualmente rica, revelava-se igualmente frágil do ponto de vista lógico pois não é imune a contradições.

A primeira dificuldade está associada à noção de «propriedade» ou «predicado» que se encontra subjacente à definição de conjuntos em compreensão. No sentido mais geral possível, por predicado ou propriedade, podemos entender alguma característica de certos indivíduos, característica essa que pode ser descrita na linguagem natural. Mas não é preciso pensar muito para observar que esta noção de «predicado» é demasiado vaga para ser útil em matemática. Propriedades como «x é interessante» padecem do

1. Georg Cantor (1874): Über eine Eigenschaft des Ingebriffes aller reelen algebraischen Zahlen.

óbvio defeito de não serem objectivas. Por outro lado, outras propriedades, por mais objectivas que sejam, também induzem problemas. O paradoxo de Richard ilustra precisamente este ponto. Considere-se o predicado «x é um número natural que não é definível usando menos de 20 palavras» que denotamos por $R(n)$. Como as frases que se podem escrever com menos de 20 palavras são em número finito e os números naturais são infinitos, existem certamente números naturais que satisfazem $R(n)$, ou seja, o conjunto $W = \{n \mid n \text{ é um natural e } R(n)\}$ não é vazio. Como qualquer conjunto não vazio de números naturais, este conjunto possui um elemento que é mínimo na ordenação usual dos números naturais, designemo-lo por n_0. Enquanto elemento de W, n_0 não é definível com menos de 20 palavras. Por outro lado, n_0 é o menor natural que não é definível com menos de 20 palavras e, consequentemente a frase «x é o menor natural que não é definível com menos de 20 palavras» é uma definição de n_0 com *menos de 20 palavras*!!

Paradoxo de Richard

A segunda dificuldade surge na forma do Paradoxo de Russell e encontra-se directamente ligada à «definição» de conjunto. Para apreciarmos esta objecção consideremos o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios, i.e., consideremos $A = \{x \mid x \notin x\}$. Suponhamos que $A \notin A$, neste caso o conjunto A não satisfaz a propriedade que define A, ou seja, neste caso deve ter-se $A \in A$. Mas, se $A \in A$ então, A deve possuir a propriedade que define A, ou seja, tem-se $A \notin A$. Somos assim forçados a concluir que se tem $A \in A$ se e só se $A \notin A$, o que constitui uma evidente contradição.

Paradoxo de Russell

Estes paradoxos ilustram as fragilidades da abordagem intuitiva de Georg Cantor. Como qualquer paradoxo, também estes se encontram profundamente enraizados nas regras lógicas ou seja, no conjunto de leis que rege o nosso pensamento. Para que possamos apreciar essa conexão em maior detalhe, interromperemos neste ponto a nossa descrição da teoria de conjuntos, para introduzir de forma semi-formal alguns aspectos de *lógica proposicional e lógica de primeira ordem*.

Lógica proposicional
Lógica de primeira ordem

Lógica proposicional

O propósito da lógica proposicional é o de isolar as formas correctas de inferência. Uma inferência assume tipicamente a seguinte forma: «verificando-se A, B, …, podemos concluir C». A inferência correcta assegura a propagação da verdade, das premissas para as conclusões. Certas expressões da linguagem natural são semanticamente relevantes, no sentido em que faz sentido atribuir-lhes um valor de verdade. (Isto não significa que saibamos se são verdadeiras ou falsas mas apenas que reconhecemos que devem possuir um destes valores de verdade.) De modo a estudar o modo como a verdade se reflecte nessas expressões introduzimos um formalismo. Esse formalismo consiste de letras $p, q, r, s, \ldots$ eventualmente indexadas, designadas de *variáveis proposicionais*. Estas variáveis são representantes abstractos dessas expressões semanticamente relevantes que designamos de *sentenças* ou *proposições*..

Variáveis proposicionais

Sentenças
Proposições

Habitualmente, combinamos sentenças através de certos conectivos (*conectivos proposicionais*), originando sentenças mais complexas. Uma análise mais detalhada do discurso, revela os seguintes conectivos: a *conjunção* que se denota simbolicamente por $\wedge$ (a expressão «$p \wedge q$» lê-se «p e q»); a *disjunção* que se denota simbolicamente por $\vee$ (a expressão «$p \vee q$» lê-se «p ou q»); a *implicação* que se denota por $\Rightarrow$ (a expressão «$p \Rightarrow q$»

Conectivos proposicionais

lê-se «se p então q» ou «p implica q»); a *equivalência* que se denota por $\equiv$ (a expressão «$p \equiv q$» lê-se «p se e só se q» ou «p é equivalente a q»); a *negação* que se denota por $\neg$ (a expressão «$\neg p$» lê-se «não p»).

Consideramos ainda dois símbolos $\top$ e $\bot$ que se designam por «verum» e «falsum» que são *constantes proposicionais*. Constantes proposicionais

O nosso formalismo (variáveis proposicionais, constantes proposicionais e conectivos) permite agora descrever formalmente as sentenças mais complexas através do seguinte esquema:

Definição 1.1 (Sentenças).— *As variáveis e as constantes proposicionais são sentenças. Se σ, τ são sentenças, o mesmo sucede com as expressões $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$, $\sigma \Rightarrow \tau$, $\sigma \equiv \tau$ e $\neg\sigma$.*

Agora que dispomos de formas de combinar sentenças mais simples para obter outras mais complexas interessa determinar de que forma os valores de verdade das sentenças simples afectam os valores de verdade da sentenças mais complexas construídas usando os conectivos acima. Antes de mais vamos denotar o valor de verdade «verdadeiro» por $\mathbb{1}$ e o valor de verdade «falso» por $\mathbb{0}$.

Feitas estas considerações, a maior parte dos conectivos comporta-se como os seus correspondentes na linguagem natural. Denotando por $[\![\sigma]\!]$ o valor de verdade da sentença σ temos:

1. $[\![\sigma \wedge \tau]\!] = \mathbb{1}$ apenas se $[\![\sigma]\!] = [\![\tau]\!] = \mathbb{1}$, nos outros casos $[\![\sigma \wedge \tau]\!] = \mathbb{0}$. (Isto corresponde completamente ao uso conjunção «e» na linguagem natural.)

2. $[\![\sigma \vee \tau]\!] = \mathbb{0}$ apenas se $[\![\sigma]\!] = [\![\tau]\!] = \mathbb{0}$, nos outros casos $[\![\sigma \wedge \tau]\!] = \mathbb{1}$. Ou seja $\sigma \vee \tau$ é falsa apenas se ambas σ e τ são falsas o que, uma vez mais, encontra total correspondência no uso de «ou» na linguagem natural.

3. $[\![\sigma \equiv \tau]\!] = \mathbb{1}$ se $[\![\sigma]\!] = [\![\tau]\!]$ e $[\![\sigma \equiv \tau]\!] = \mathbb{0}$ se $[\![\sigma]\!] \neq [\![\tau]\!]$.

4. $[\![\neg\sigma]\!] = \mathbb{1}$ se $[\![\sigma]\!] = \mathbb{0}$ e $[\![\neg\sigma]\!] = \mathbb{0}$ se $[\![\sigma]\!] = \mathbb{1}$.

5. Deixamos para o fim o caso da implicação. Se à semelhança dos casos anteriores tentarmos agora decidir o valor de verdade de $\sigma \Rightarrow \tau$ em função dos valores de verdade de σ e τ, dois casos não apresentam qualquer tipo de conflito com a utilização normal de uma expressão do tipo «se σ então τ». Se σ é verdadeiro e τ é verdadeiro então $\sigma \Rightarrow \tau$ é verdadeira. Se σ é verdadeira e τ é falsa então $\sigma \Rightarrow \tau$ é falsa. Mas, querendo definir o valor de verdade de $\sigma \Rightarrow \tau$ em todas as circunstâncias, a intuição que decorre do uso corrente de expressões do tipo «se A então B» deixa de nos ajudar. A tabela seguinte resume todas as possibilidades:

σ	τ	$\sigma \Rightarrow_1 \tau$	$\sigma \Rightarrow_2 \tau$	$\sigma \Rightarrow_3 \tau$	$\sigma \Rightarrow_4 \tau$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$

Como iremos ver é possível fornecer argumentação que justifica apenas uma escolha. Comecemos por observar que $\Rightarrow_3$ não é aceitável. Com efeito se aceitássemos esta interpretação semântica da implicação então, o valor de verdade da implicação dependeria exclusivamente do valor lógico de τ. Deste modo «se σ então τ» seria, do ponto de vista semântico, equivalente a «τ independentemente de σ» o que, evidentemente, não é o pretendido. Também devemos rejeitar $\Rightarrow_2$ com base no seguinte argumento: adoptando $\Rightarrow_2$ como a interpretação semântica correcta da implicação formal, somos forçados a tomar como falsa a implicação «se pontapeio a bola então ela move-se» quando não pontapeio a bola e não obstante ela se move. Esta atitude não é razoável pois a bola pode mover-se devido a outra acção totalmente estranha ao acto de pontapear (por exemplo uma forte corrente de ar). Ou seja, tendo em conta que na implicação material, a sua verdade ou falsidade deve depender da verificação ou não de uma certa relação de causalidade, estaríamos a considerar como falsa uma relação que efectivamente não pudémos testar. A possibilidade $\Rightarrow_3$ é ainda mais fácil de rejeitar, pois a respectiva tabela de verdade coincidiria com a tabela de verdade da conjunção e, uma vez mais, não pretendemos que «se σ então τ» seja semanticamente equivalente a «σ e τ».

Resta-nos a última possibilidade $\Rightarrow_4$ que finalmente adoptamos como a interpretação correcta da implicação material.

As cláusulas 1–5 acima fixam o modo como atribuímos o valor de verdade de uma sentença, em função do valor de verdade das suas componentes mais simples. É fácil perceber, tendo em conta a definição indutiva de «sentença» que por este processo, acabaremos por fazer depender o valor de verdade de qualquer sentença do valor de verdade das variáveis e constantes proposicionais que a compõem. Quanto às constantes proposicionais elas são sempre interpretadas da mesma forma: $\top$ é sempre interpretado como «verdade» e $\perp$ como «falso». Quanto às variáveis proposicionais, elas são os elementos de um conjunto infinito $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ e são interpretadas através de *valuações*. As valuações são funções $\overline{v} : \mathrm{Var} \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Cada valuação «interpreta» cada variável p_i conferindo-lhe o valor $\overline{v}(p_i)$.

Feitas estas considerações fica claro que o valor de verdade de uma sentença só pode decidir-se relativamente a uma valuação. Assim, se σ é uma sentença, o respectivo valor de verdade relativamente a uma valuação $\overline{v}$ denota-se por $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}}$. Observe-se que $[\![p_i]\!]_{\overline{v}} = \overline{v}(p_i)$. Podemos reunir todas estas considerações numa única definição.

Definição 1.2.— *O valor lógico de uma sentença relativamente a uma valuação $\overline{v}$ define-se indutivamente de acordo com,*

1. $[\![\top]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{1}$ *e* $[\![\perp]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{0}$*;*

2. $[\![p_i]\!]_{\overline{v}} = \overline{v}(p_i)$*;*

3. $[\![\sigma \wedge \tau]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{1}$ *se e só se* $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}} = [\![\tau]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{1}$*;*

4. $[\![\sigma \vee \tau]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{0}$ *se e só se* $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}} = [\![\tau]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{0}$*;*

5. $[\![\sigma \equiv \tau]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{1}$ *se e só se* $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}} = [\![\tau]\!]_{\overline{v}}$

6. $[\![\sigma \Rightarrow \tau]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{0}$ *se e só se* $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{1}$ *e* $[\![\tau]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{0}$*;*

7. $[\![\neg\sigma]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{1}$ *se e só se* $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}} = \mathbb{0}$*.*

É mais ou menos claro que a maneira como são interpretadas as variáveis que não ocorrem em σ não tem qualquer influência na determinação de $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}}$. Isso mesmo é comprovado no resultado seguinte.

Lema 1.1.— *Se σ é uma sentença e se $\overline{v}_0, \overline{v}_1$ são valuações tais que $\overline{v}_0(p) = \overline{v}_1(p)$ para qualquer variável p que ocorre em σ então, $[\![\sigma]\!]_{\overline{v}_0} = [\![\sigma]\!]_{\overline{v}_1}$.*

Se $\overline{v}$ uma valuação e se $[\![\sigma]\!] = \mathbb{1}$, dizemos que $\overline{v}$ é um *modelo* de σ e escrevemos $\vDash_{\overline{v}} \sigma$; se Γ é um conjunto de sentenças escrevemos $\vDash_{\overline{v}} \Gamma$ para indicar que $\vDash_{\overline{v}} \sigma$, qualquer que seja $\sigma \in \Gamma$. Se σ é verdadeira independentemente da valuação considerada, dizemos que σ é uma *tautologia* e escrevemos $\vDash \sigma$. Consideramos ainda uma generalização desta notação: se Γ é um conjunto de sentenças, e σ é uma sentença escrevemos $\Gamma \vDash \sigma$ (dizemos que σ é uma *consequência semântica* de Γ) se dada uma qualquer valuação $\overline{v}$, quando $\vDash_{\overline{v}} \Gamma$ também se tem que $\vDash_{\overline{v}} \sigma$.

Definição 1.3.— *Denotamos por* Taut *o conjunto de todas as tautologias.*

Teorema 1.1 (Substituição).— *Se $\sigma(p_1, \dots, p_n)$ é uma tautologia, i.e., se $\sigma \in$ Taut então, dadas sentenças $\tau_1, \dots, \tau_n$ e denotando por $\sigma(\tau_1, \dots, \tau_n)$ o resultado de substituir algumas (eventualmente todas ou mesmo nenhuma) das ocorrências de p_i em σ por τ_i, resulta que $\sigma(\tau_1, \dots, \tau_n) \in$ Taut.*

Veremos um exemplo de aplicação deste teorema no exemplo seguinte.

Exemplo 2 (Consequentia mirabilis).— A *consequentia mirabilis* é um argumento que surge utilizado já na antiguidade clássica, por exemplo em certas passagens de Aristóteles e nos *Elementos* de Euclides. Uma utilização notável foi feita por Girolamo Saccheri[2] na tentativa de estabelecer a falsidade do quinto postulado de Euclides (o axioma das paralelas). O argumento estabelece que se uma proposição (sentença) σ é consequência da (implicada pela) sua própria negação então, deve ser verdadeira. No nosso formalismo, este argumento pode ser traduzido pelas sentenças do tipo

$$[(\neg\sigma) \Rightarrow \sigma] \Rightarrow \sigma.$$

Tendo em conta o teorema da substituição se verificarmos que $[(\neg p) \Rightarrow p] \Rightarrow p$, podemos concluir que as sentenças do tipo acima são todas tautologias. Para verificar que $[(\neg p) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ é uma tautologia usamos um procedimento algorítmico que consiste em escrever a respectiva *tabela de verdade*.[3] A tabela de verdade de uma sentença é, tal como um nome indica, uma tabela onde surgem todas as sentenças mais simples que compõem σ, aquilo que se poderia designar de *sub-sentenças* de σ (considerando aqui que σ é sempre uma sub-sentença de σ). Consideradas todas as possibilidades de interpretar as variáveis em σ podemos determinar o valor de verdade de todas as sub-sentenças de σ e, em particular, o valor de verdade de σ. No nosso caso particular, a tabela de verdade toma o seguinte aspecto,

2. Girolamo Saccheri (1733): Euclides ad omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia.

3. Este não é o único proceso para verificar o carácter tautológico de uma sentença, mas sendo o método mais geral, aproveitamos a oportunidade para o exemplificar.

p	$\neg p$	$(\neg p) \Rightarrow p$	$[(\neg p) \Rightarrow p] \Rightarrow p$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$

Conclui-se assim que nos encontramos perante uma tautologia.

É interessante constatar que, em certo sentido, a nossa escolha de conectivos é completa. De facto, qualquer sentença $\sigma(p_1, \dots, p_n)$, onde ocorrem exactamente as variáveis proposicionais $p_1, \dots, p_n$, determina uma função $f_\sigma : \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^n \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$. Essa função pode ser descrita do seguinte modo: cada sequência $s = \langle i_1, \dots, i_n \rangle$ de valores lógicos, determina uma interpretação v_s que satisfaz

$$v_s(p) = \begin{cases} i_k & (\text{se } 1 \leq k \leq n \text{ e } p = p_k) \\ \mathbb{0} & (\text{se } (\forall 1 \leq k \leq n) p \neq p_k) \end{cases}$$

A função f_σ define-se então

$$f_\sigma(i_1, \dots, i_n) = [\![\sigma]\!]_{v_s}.$$

(A maneira como definimos v_s para variáveis proposicionais p diferentes de algum p_k é irrelevante já que se duas valuações v_0, v_1 coincidem em $\{p_1, \dots, p_n\}$ então $[\![\sigma]\!]_{v_0} = [\![\sigma]\!]_{v_1}$.)

A completude do nosso sistema de conectivos traduz-se então no seguinte facto: dada uma qualquer função $f : \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^n \to \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ existe uma fórmula envolvendo n variáveis proposicionais, σ, tal que $f = f_\sigma$.