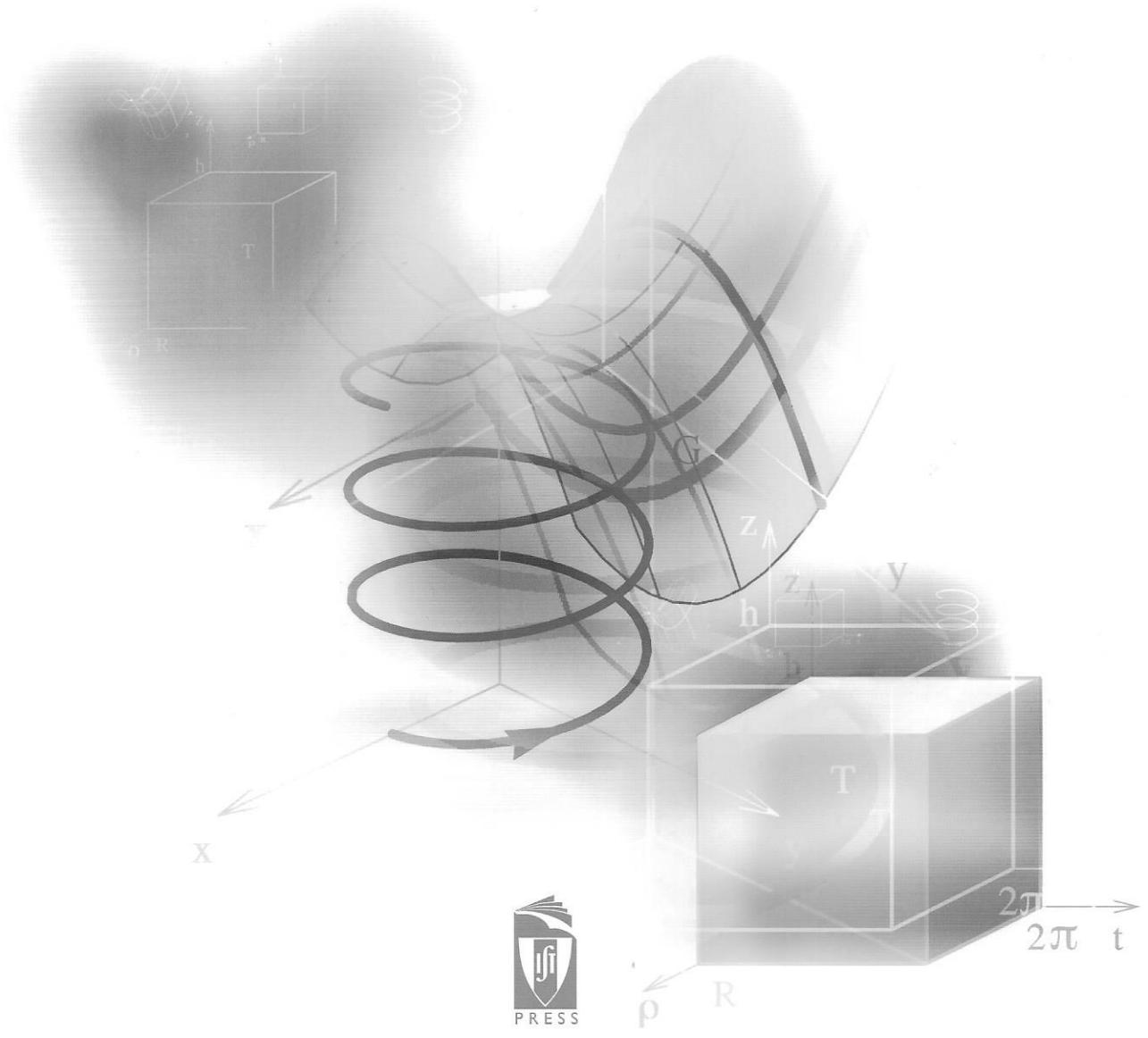


COLEÇÃO ENSINO DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM $\mathbb{R}^n$

GABRIEL E. PIRES



IFT  
PRESS

# ÍNDICE

<b>PREFÁCIO</b>	<b>ix</b>
<b>1 LIMITES. CONTINUIDADE</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução	3
1.2 Norma. Distância. Bola	4
1.3 Exemplos de Conjuntos em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$	7
1.4 Interior, Exterior e Fronteira	14
1.5 Sucessões em $\mathbb{R}^n$	16
1.6 Funções Definidas em $\mathbb{R}^n$	19
1.6.1 Campos Escalares. Gráficos. Conjuntos de Nível	20
1.6.2 Campos Vetoriais	22
1.6.3 Funções Injetivas. Parametrizações	24
1.6.4 Funções Contínuas e Sucessões	27
1.6.5 Continuidade e Limite. Propriedades	29
1.6.6 Conjuntos Fechados. Exemplos	35
1.6.7 Conjuntos Compactos. Teorema de Weierstrass	37
1.7 Exercícios	45
<b>2 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS</b>	<b>47</b>
2.1 Derivadas Parciais	49
2.2 Identificação de Funções Diferenciáveis	59
2.3 Derivada Direcional. Gradiente	70
2.4 Linha. Vetor Tangente	72
2.5 Conjunto de Nível. Vetor Normal	76
2.6 Exercícios	81

<b>3 EXTREMOS</b>	<b>83</b>
3.1 Derivadas de Ordem Superior	85
3.2 Extremos de Funções Escalares	87
3.3 Exercícios	97
<b>4 FUNÇÃO INVERSA. FUNÇÃO IMPLÍCITA</b>	<b>99</b>
4.1 Exemplos em $\mathbb{R}^2$	102
4.2 Exemplos em $\mathbb{R}^3$	105
4.3 Função Inversa. Função Implícita. Teoremas	111
4.4 Exemplos	117
4.5 Exercícios	123
<b>5 VARIEDADES. EXTREMOS CONDICIONADOS</b>	<b>125</b>
5.1 Variedades. Parametrizações	127
5.2 Extremos Condicionados	148
5.3 Exercícios	159
<b>6 FUNÇÕES INTEGRÁVEIS</b>	<b>161</b>
6.1 Intervalos. Partições. Funções em Escada	163
6.2 Funções Integráveis à Riemann	169
6.3 Cálculo do Integral. Teorema de Fubini	181
6.4 Integral em Conjuntos Limitados. Volumes em $\mathbb{R}^n$	188
6.5 Integrais Paramétricos. Regra de Leibniz	195
6.6 Exercícios	199
<b>7 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE FUBINI</b>	<b>201</b>
7.1 Cálculo de Integrais em $\mathbb{R}^2$ . Áreas	203
7.2 Cálculo de Integrais em $\mathbb{R}^3$ . Volumes	209
7.3 Exercícios	231
<b>8 TEOREMA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS</b>	<b>233</b>
8.1 Mudança de Variáveis	235
8.2 Teorema da Mudança de Variáveis	244
8.3 Exercícios	258
<b>9 INTEGRAIS EM VARIEDADES</b>	<b>261</b>
9.1 Integral de Linha de Um Campo Escalar	263

9.1.1	Comprimento de Uma Linha	263
9.1.2	Aplicações	267
9.1.3	Exemplos	268
9.2	Integral de Superfície de Um Campo Escalar	272
9.2.1	Área de Uma Superfície	272
9.2.2	Aplicações	275
9.2.3	Exemplos	276
9.3	Exercícios	283
<b>10 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO</b>		<b>285</b>
10.1	Trabalho. Potencial Escalar	287
10.2	Campos Vetoriais Fechados. Homotopia	300
10.3	Exercícios	311
<b>11 TEOREMA DE GREEN NO PLANO</b>		<b>313</b>
11.1	Domínio Elementar	315
11.2	Teorema de Green	317
11.3	Exercícios	327
<b>12 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA</b>		<b>329</b>
12.1	Fluxo de Um Campo Vetorial	331
12.2	Teorema da Divergência	339
12.3	Exercícios	349
<b>13 TEOREMA DE STOKES</b>		<b>351</b>
13.1	Superfícies Orientáveis	353
13.2	Fronteira ou Bordo de Uma Superfície	356
13.3	Teorema de Stokes	362
13.4	Potencial Vetorial	372
13.5	Exercícios	382
<b>BIBLIOGRAFIA</b>		<b>385</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO</b>		<b>387</b>

# PREFÁCIO

Este livro é o resultado de um processo quase contínuo de escrita de textos de apoio às aulas e publicados em versão eletrónica ao longo de vários anos.

Supõe-se que o leitor se encontra familiarizado com a estrutura vetorial de  $\mathbb{R}^n$ , as propriedades das transformações lineares e os conceitos e resultados fundamentais de cálculo diferencial e integral em  $\mathbb{R}$ .

Os conceitos de massa, temperatura, velocidade, força ou trabalho são matematicamente traduzidos em termos de funções que dependem de outras grandezas, como, por exemplo, posição, tempo, etc. O estudo de funções de várias variáveis constitui o objetivo central deste texto.

Partindo da noção de distância entre pontos, de gráfico e de conjunto de nível de uma função surgem naturalmente no primeiro capítulo muitos exemplos de conjuntos que estarão presentes nas aplicações ao longo de todo o texto. Apresentam-se muitos exemplos de ilustração e aplicação dos vários conceitos em estudo.

Na primeira parte estudam-se as noções de continuidade e diferenciabilidade. O gradiente de uma função escalar e a derivada da função composta são os conceitos estruturantes.

Na segunda parte, o conceito de integral de uma função desempenha o papel central. As noções de comprimento, área, volume, fluxo e trabalho ou energia são apresentados nas suas relações, quer algébricas e analíticas quer geométricas, com as noções de linha, superfície e sólido ou, mais geralmente, com a noção de variedade. Os teoremas de Green, Gauss e Stokes traduzem fundamentalmente essas relações.

As demonstrações de alguns teoremas são apresentadas em versões simples, com referências bibliográficas para os casos mais gerais. É importante notar que essas versões não comprometem as respetivas aplicações e têm a vantagem de ser geometricamente elucidativas.

Este livro pode ser usado como ponto de partida para o domínio e compreensão dos conceitos e das técnicas de cálculo diferencial e integral em  $\mathbb{R}^n$ . A lista de exercícios propostos no fim de cada capítulo reflete de algum modo tais linhas orientadoras. Muitos destes exercícios são transcrições ou modificações de outros que se encontram na bibliografia.

Lisboa, maio de 2012

*Gabriel E. Pires*

# 1

---

LIMITES. CONTINUIDADE

## 1.1 INTRODUÇÃO

O estudo de funções de várias variáveis é o tema central deste texto. Nas aplicações, estas funções são fundamentais para o estabelecimento de modelos matemáticos de vários fenómenos, como, por exemplo, os físicos, os químicos e os financeiros.

As grandezas físicas, tais como a densidade de massa, a temperatura, a pressão e o volume, também designadas por grandezas escalares, são matematicamente traduzidas em funções que dependem de várias outras grandezas, como, por exemplo, as coordenadas que identificam as posições dos objetos em estudo e o instante de observação ou medição. São as chamadas funções escalares cujos domínios são subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  e com valores em  $\mathbb{R}$ .

As grandezas, como a velocidade e a aceleração do movimento de uma partícula num dado instante, a força de interação entre corpos com massa ou carga elétrica são matematicamente traduzidas em funções que dependem das coordenadas dos pontos envolvidos e assumem valores que são vetores. São as chamadas funções vetoriais.

Portanto, é importante estudar as funções definidas em  $\mathbb{R}^n$  e com valores em  $\mathbb{R}^m$ .

Tal como para o estudo de funções reais de variável real, é necessário ter presente a estrutura algébrica e topológica de  $\mathbb{R}^n$ . Os conceitos de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade dependem crucialmente dessas estruturas.

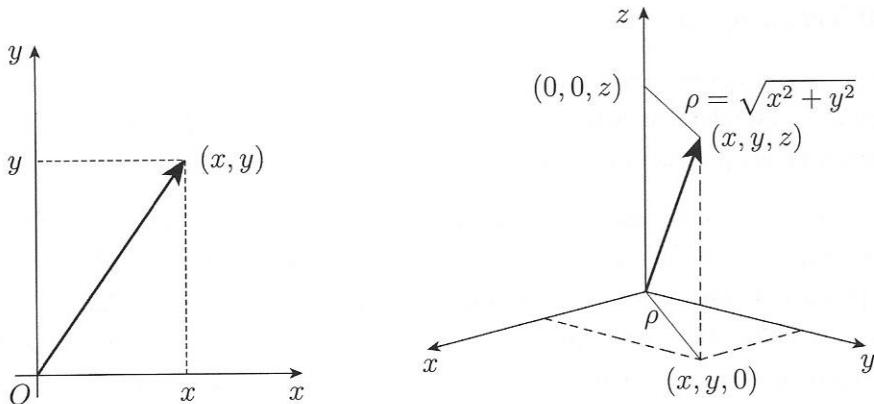
Recorde-se que  $\mathbb{R}^n$  é o produto cartesiano de  $n$  fatores todos iguais a  $\mathbb{R}$ , ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R},$$

munido da sua estrutura vetorial resultante da soma de vetores e multiplicação por escalares. Os elementos ou vetores  $x \in \mathbb{R}^n$  serão também identificados pelas respetivas componentes na base canónica, ou seja,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad x_k \in \mathbb{R}; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Casos muito importantes nas aplicações são  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , cujos vetores serão designados por  $(x, y)$  e por  $(x, y, z)$ , respetivamente. Encontram-se representados na Figura 1.1.

Figura 1.1  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ 

## 1.2 NORMA. DISTÂNCIA. BOLA

Tal como em  $\mathbb{R}$ , o conceito de limite de uma sucessão depende da noção de distância entre pontos. Em  $\mathbb{R}$ , esse papel é desempenhado pelo conceito de módulo, isto é,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Em  $\mathbb{R}^n$ , o conceito fundamental é o de norma de um vetor,  $\|x\|$ .

**Definição 1.2.1** A **norma** de um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  é o escalar

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Para os dois casos importantes  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  tem-se:

$$1. \mathbb{R}^2 : \| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$2. \mathbb{R}^3 : \| (x, y, z) \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

É claro que  $\|x\| \geq 0$ , com  $\|x\| = 0$ , se e só se  $x = 0$ , e também  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ , para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Recordando a noção de produto interno de vetores em  $\mathbb{R}^n$ ,

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2 + y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

é claro que

$$x \cdot x = \|x\|^2.$$

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então, pelas propriedades do produto interno,

$$0 \leq \|x + \alpha y\|^2 = (x + \alpha y) \cdot (x + \alpha y) = \|x\|^2 + 2(x \cdot y)\alpha + \|y\|^2\alpha^2.$$

Assim, fixados os vetores  $x$  e  $y$ , obtém-se uma inequação envolvendo um trinómio do segundo grau em  $\alpha$  do tipo

$$c + b\alpha + a\alpha^2 \geq 0,$$

e, portanto, o respetivo discriminante não poderá ser positivo, ou seja,  $b^2 - 4ac \leq 0$ .

Assim,

$$|x \cdot y|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0,$$

de onde se obtém a famosa **desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|.$$

Como consequência

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \cdot y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

A norma verifica então as três propriedades seguintes:

1.  $\|x\| \geq 0$ , com  $\|x\| = 0$ , se e só se  $x = 0$ .
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ , para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (**desigualdade triangular**).

### Definição 1.2.2

1. Chama-se **distância** entre dois pontos  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}^n$  ao escalar

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

2. Chama-se **bola** de centro num ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  e raio  $R > 0$  ao conjunto dos pontos que se encontram a uma distância de  $a$  inferior a  $R$ , ou seja, ao conjunto

$$B_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < R\}.$$

É claro que a norma de um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  é a distância entre a origem e o ponto de coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Em  $\mathbb{R}^2$ , o conjunto de pontos descrito pela equação  $\|(x, y)\| = R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$ , em que  $R > 0$ , é a **circunferência** centrada na origem e de raio  $R$ .

Em  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto de pontos descrito por  $\|(x, y, z)\| = R \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , em que  $R > 0$ , é a **esfera** centrada na origem e de raio  $R$ .

É importante referir que, em  $\mathbb{R}^2$  a distância do ponto  $(x, y)$  ao eixo  $Ox$  é  $|y|$  e a distância ao eixo  $Oy$  é  $|x|$ .

Em  $\mathbb{R}^3$ , a distância entre os pontos  $(x, y, z)$  e  $(0, 0, z)$ , ou seja, a distância do ponto  $(x, y, z)$  ao eixo  $Oz$ , é dada por  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Do mesmo modo, a distância do ponto  $(x, y, z)$  ao eixo  $Ox$  é dada por  $\sqrt{y^2 + z^2}$ , e a distância ao eixo  $Oy$  é  $\sqrt{x^2 + z^2}$ .

A Figura 1.1 ilustra estes pormenores que serão úteis em todo o texto.

Seja  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não negativa. Uma equação do tipo  $\rho = \alpha(z_0)$  descreve o conjunto dos pontos de coordenadas  $(x, y, z_0)$  que se encontram à distância  $\alpha(z_0)$  do ponto  $(0, 0, z_0)$ , ou seja, descreve a circunferência contida no plano  $z = z_0$ , centrada no ponto  $(0, 0, z_0)$  e de raio  $\alpha(z_0)$ . Designando por  $C(z_0)$  essa circunferência, tem-se

$$C(z_0) = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha(z_0)\}.$$

Assim, um conjunto descrito por uma equação do tipo  $\rho = \alpha(z)$  é a coleção de todas as circunferências  $C(z_0)$  com  $z_0$  no domínio da função  $\alpha$ .

De uma maneira mais geral, um conjunto descrito por uma equação nas variáveis  $\rho$  e  $z$  é uma coleção de circunferências contidas em planos horizontais e centradas no eixo  $Oz$ .

Conjuntos assim descritos são os chamados conjuntos com **simetria cilíndrica** em torno do eixo  $Oz$ . Com as devidas modificações definem-se também conjuntos com simetria cilíndrica em torno de cada um dos outros eixos,  $Ox$  e  $Oy$ .

Recorde-se que, em  $\mathbb{R}^2$ , um conjunto definido por uma equação do tipo  $ax + by + c = 0$ , em que  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , é uma linha **reta**.

Em  $\mathbb{R}^3$ , uma equação do tipo  $ax + by + cz + d = 0$ , em que  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , define um **plano**.

### 1.3 EXEMPLOS DE CONJUNTOS EM $\mathbb{R}^2$ E EM $\mathbb{R}^3$

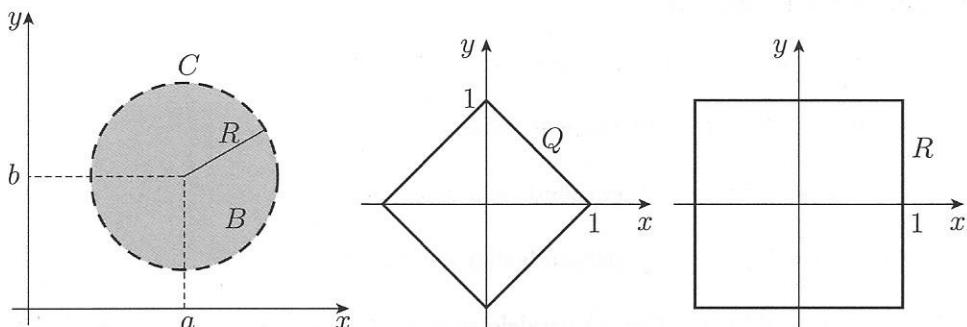
**Exemplo 1.3.1** Na Figura 1.2 estão representados uma bola  $B$  e dois quadrados  $Q$  e  $R$  em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, os conjuntos seguintes:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2\} \quad (1.1)$$

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\} \quad (1.2)$$

$$R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1 ; |y| = 1\}. \quad (1.3)$$

$B$  é a bola de raio  $R > 0$  e centro no ponto  $(a, b)$ , ou seja, é o conjunto de pontos que se encontram a uma distância inferior a  $R$  do ponto  $(a, b)$ .



**Figura 1.2** Uma bola, uma circunferência e dois quadrados em  $\mathbb{R}^2$

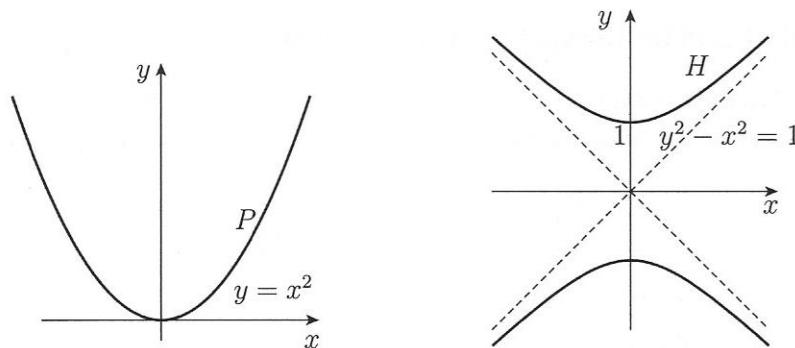
Também se encontra representada, a tracejado, a **circunferência**  $C$  de raio  $R$  e centro em  $(a, b)$ , ou seja, o conjunto definido por

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}.$$

**Exemplo 1.3.2** Na Figura 1.3 estão representadas uma parábola  $P$  e uma hipérbole  $H$ , definidas por

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \quad (1.4)$$

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1\}. \quad (1.5)$$

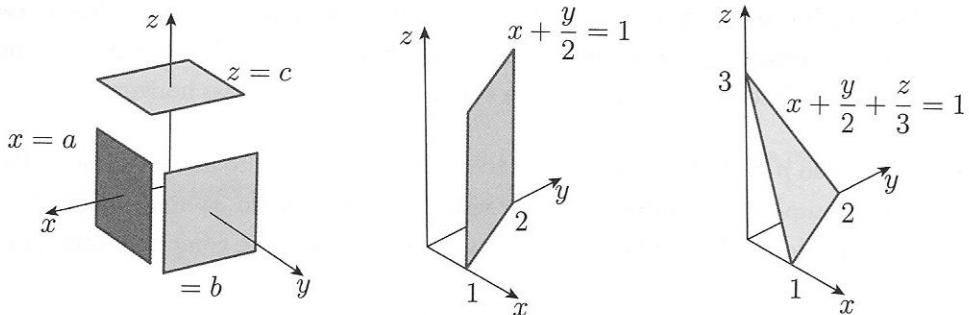


**Figura 1.3** Uma parábola e uma hipérbole

**Exemplo 1.3.3 Planos em  $\mathbb{R}^3$ .**

Na Figura 1.4 estão representados os planos:

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a\}$ , perpendicular ao eixo  $Ox$ .
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = b\}$ , perpendicular ao eixo  $Oy$ .
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = c\}$ , perpendicular ao eixo  $Oz$ .
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + \frac{y}{2} = 1\}$  paralelo ao eixo  $Oz$ , passando pelos pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ .
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1\}$ , que passa pelos pontos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$ .



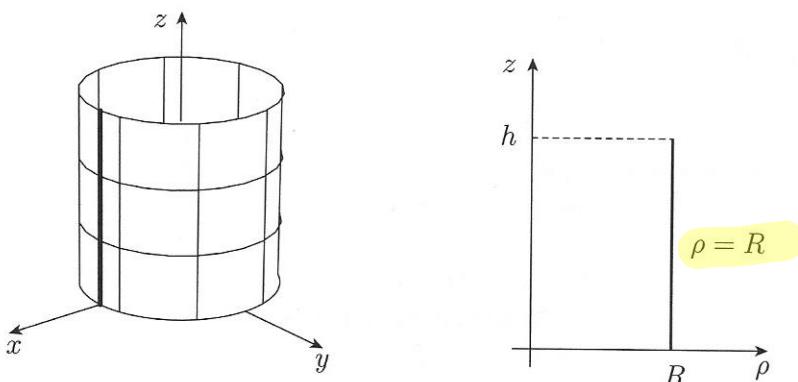
**Figura 1.4** Planos em  $\mathbb{R}^3$

Note-se que um plano perpendicular ao eixo  $Ox$  é paralelo ao plano em que  $x = 0$ , também designado por plano  $Oyz$ .

A equação  $x + \frac{y}{2} = 1$  não envolve a variável  $z$  e, portanto, o plano por ela definido é paralelo ao eixo  $Oz$ . De facto, para cada  $z \in \mathbb{R}$ , a equação define a reta que passa pelos pontos  $(1, 0, z)$  e  $(0, 2, z)$ , e a união de todas essas retas é um plano paralelo ao eixo  $Oz$ .

#### Exemplo 1.3.4 Um Cilindro em $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2 ; 0 \leq z \leq h\}$  a superfície cilíndrica de raio  $R$ , altura  $h$  e representada na Figura 1.5.



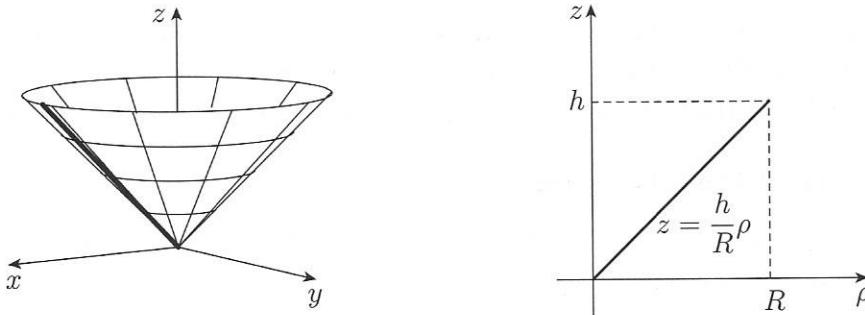
**Figura 1.5** Cilindro definido por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2 ; 0 \leq z \leq h\}$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- i) Como  $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow \rho = R$ , então, em cada plano horizontal definido por  $z = z_0$ , com  $0 \leq z_0 \leq h$ , é uma circunferência de raio  $R$  e centro no ponto  $(0, 0, z_0)$ . Trata-se, portanto, de uma coleção de circunferências horizontais.
- ii) A equação  $\rho = R$  descreve, nas variáveis  $\rho$  e  $z$ , um segmento de reta vertical. Portanto, a superfície cilíndrica pode ser vista como o resultado de uma rotação completa, em torno do eixo  $Oz$ , desse segmento de reta vertical, como se ilustra na Figura 1.5.

### Exemplo 1.3.5 Um Cone em $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}; z \leq h\}$  o cone de altura  $h$ , com raio da base  $R$  e representado na Figura 1.6.



**Figura 1.6** Cone definido por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq h\}$

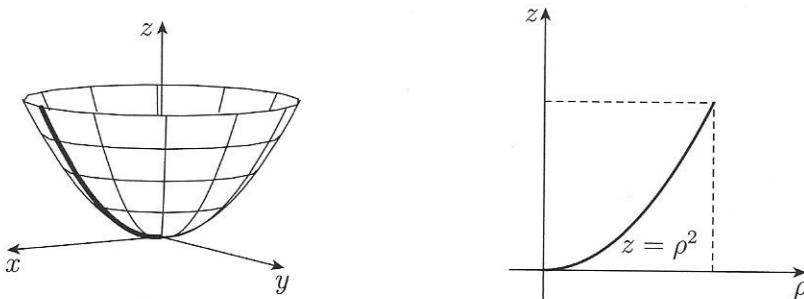
- i) Sendo definido pela equação  $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R}{h}z$ , em cada plano horizontal  $z = z_0$ , com  $0 \leq z_0 \leq h$ , é uma circunferência de raio  $\frac{R}{h}z_0$  e centro no ponto  $(0, 0, z_0)$ .
- ii) Resulta de uma rotação completa, em torno do eixo  $Oz$ , do segmento de reta dado pela equação  $\rho = \frac{R}{h}z$ , como se ilustra na Figura 1.6.

### Exemplo 1.3.6 Um Parabolóide em $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $P$  a superfície representada na Figura 1.7 e definida por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$

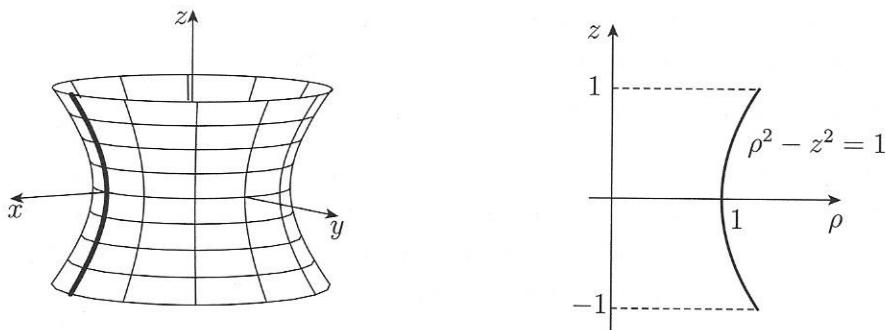
- i) Sendo  $P$  definido pela equação  $z = \rho^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{z}$ , em cada plano dado por  $z = z_0$ , em que  $0 \leq z_0 \leq h$ , é uma circunferência de raio  $\sqrt{z_0}$  e centro no ponto  $(0, 0, z_0)$ .
- ii) É o resultado de uma rotação completa, em torno do eixo  $Oz$ , da parábola definida por  $z = \rho^2$ , como se ilustra na Figura 1.7.



**Figura 1.7** Parabolóide definido por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$

### Exemplo 1.3.7 Um Hiperbolóide de Uma Folha em $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2 ; -1 \leq z \leq 1\}$  o hiperbolóide representado na Figura 1.8.



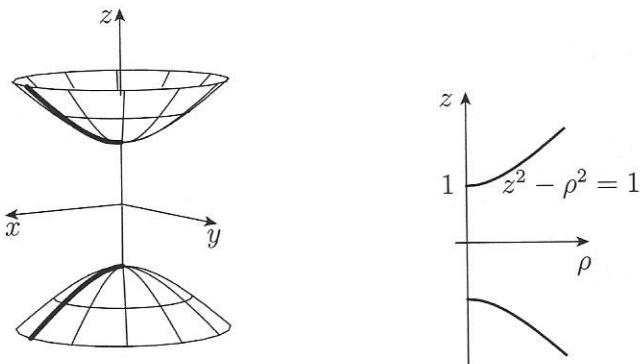
**Figura 1.8** Hiperbolóide definido por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2 ; -1 \leq z \leq 1\}$

- i) Sendo definido pela equação  $\rho^2 = 1 + z^2$ , este hiperbolóide é uma coleção de circunferências horizontais. De facto, em cada plano dado por  $z = z_0$ , em que  $-1 \leq z_0 \leq 1$ , há uma circunferência de raio  $\sqrt{1 + z_0^2}$  e centro no ponto  $(0, 0, z_0)$ .

- ii) A equação  $\rho^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow \rho^2 - z^2 = 1$  descreve, nas variáveis  $\rho$  e  $z$ , um ramo de hipérbole tal como se ilustra na Figura 1.8. Assim, este hiperbolóide pode ser visto como o resultado de uma rotação completa, em torno do eixo  $Oz$ , de um ramo de hipérbole.

**Exemplo 1.3.8 Um Hiperbolóide de Duas Folhas em  $\mathbb{R}^3$ .**

Seja  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$  o hiperbolóide representado na Figura 1.9.



**Figura 1.9** Hiperbolóide definido por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$

- i) Sendo definido pela equação  $\rho^2 = z^2 - 1$ , este hiperbolóide é uma coleção de circunferências. De facto, em cada plano dado por  $z = z_0$ , em que  $|z_0| \geq 1$ , há uma circunferência de raio  $\sqrt{z_0^2 - 1}$  e centro no ponto  $(0, 0, z_0)$ .

Note-se que, sendo  $z^2 - 1 = x^2 + y^2 \geq 0$ , então  $|z| \geq 1$ .

- ii) A equação  $\rho^2 = z^2 - 1 \Leftrightarrow z^2 - \rho^2 = 1$  descreve, nas variáveis  $\rho$  e  $z$ , uma hipérbole, tal como se ilustra na Figura 1.9. Assim, este hiperbolóide pode ser visto como o resultado de uma rotação completa, em torno do eixo  $Oz$ , de uma hipérbole, gerando duas superfícies, ou duas folhas.

**Exemplo 1.3.9 Uma Esfera em  $\mathbb{R}^3$ .**

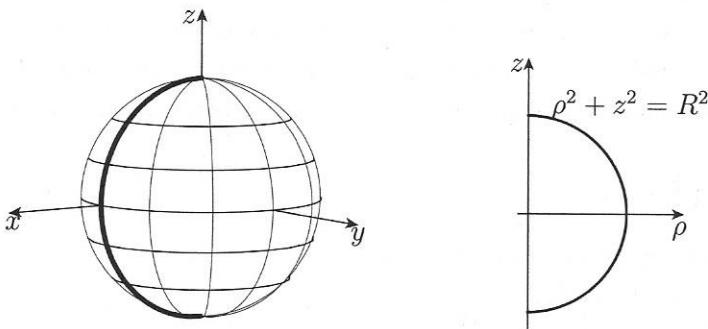
Seja  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  a superfície esférica de raio  $R$ , centro na origem de  $\mathbb{R}^3$  e representada na Figura 1.10.

Esta esfera pode ser entendida de vários modos:

- Sendo definida pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , é o conjunto dos pontos que se encontram à distância  $R$  da origem.
- Sendo  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 - z^2$ , em cada plano definido por  $z = z_0$ , com  $-R \leq z_0 \leq R$ , é uma circunferência de raio  $\sqrt{R^2 - z_0^2}$  e centro no ponto  $(0, 0, z_0)$ . Trata-se, portanto, de uma coleção de circunferências.
- A equação da esfera pode ser escrita na forma  $\rho^2 + z^2 = R^2$ . Assim, considerando apenas as duas variáveis  $\rho > 0$  e  $z$ , a esfera é representada pelo conjunto definido por

$$\{(\rho, z) : \rho^2 + z^2 = R^2\},$$

isto é, por uma semicircunferência tal como se ilustra na Figura 1.10.



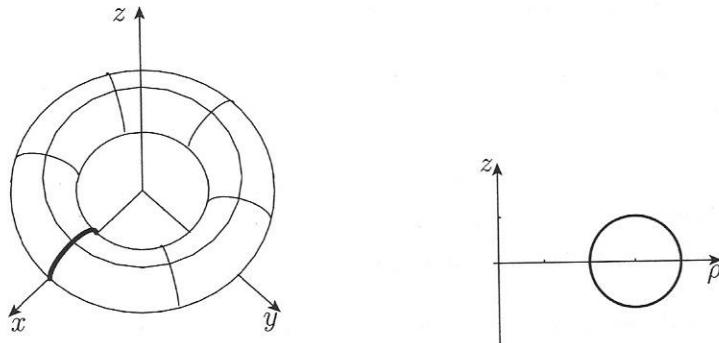
**Figura 1.10** Esfera definida por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

Portanto, a esfera pode ser vista como o resultado de uma rotação completa, em torno do eixo  $Oz$ , da semicircunferência de raio  $R$  nas variáveis  $\rho, z$ .

#### Exemplo 1.3.10 Um Toro em $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$  o toro de raios  $R = 3$  e  $r = 1$ .

Nas variáveis  $\rho, z$ , a equação  $(\rho - 3)^2 + z^2 = 1$  descreve uma circunferência centrada em  $(\rho, z) = (3, 0)$  e raio igual a 1. Assim, este toro pode ser visto como o resultado de uma rotação completa, em torno do eixo  $Oz$ , dessa circunferência, tal como se ilustra na Figura 1.11.



**Figura 1.11** Toro definido por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$

#### 1.4 INTERIOR, EXTERIOR E FRONTEIRA

O estudo de funções depende muito dos conceitos topológicos de interior, de exterior e de fronteira dos respectivos domínios. Definem-se de maneira simples a partir da noção bola. Intuitivamente, um ponto estará na fronteira de um conjunto se em qualquer bola centrada nesse ponto se encontrarem pontos do conjunto e pontos do seu complementar.

**Definição 1.4.1** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

- i) Diz-se que  $a \in \mathbb{R}^n$  é um ponto interior a  $D$ , se  $\exists_{R>0} : B_R(a) \subset D$ .
- ii) Diz-se que  $a \in \mathbb{R}^n$  é um ponto exterior a  $D$ , se  $\exists_{R>0} : B_R(a) \subset D^c$ .
- iii) Um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$  diz-se um ponto fronteiro a  $D$ , se

$$\forall_{R>0} : B_R(a) \cap D \neq \emptyset \wedge B_R(a) \cap D^c \neq \emptyset.$$

Ao conjunto de pontos interiores chama-se **interior** de  $D$  e será designado pelo símbolo  $\text{int}(D)$ .

Ao conjunto de pontos exteriores chama-se **exterior** de  $D$  e será designado pelo símbolo  $\text{ext}(D)$ .

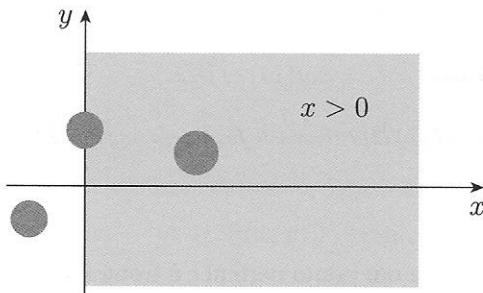
Ao conjunto de pontos fronteiros chama-se **fronteira** de  $D$  e será designado pelo símbolo  $\partial D$ .

\*\*\*

**Exemplo 1.4.1** Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  o conjunto representado na Figura 1.12.

A distância de um ponto  $(x, y)$  ao eixo  $Oy$  é dada por  $|x|$ . A bola centrada num ponto  $(a, b)$ , com  $a > 0$ , e de raio  $\frac{a}{2}$  está certamente contida em  $D$ . Se  $a = 0$ , então qualquer bola centrada em  $(a, b)$  intersecta tanto  $D$  como o seu complementar. Assim sendo, tem-se:

- a)  $\text{int}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
- b)  $\text{ext}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$
- c)  $\partial(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ .



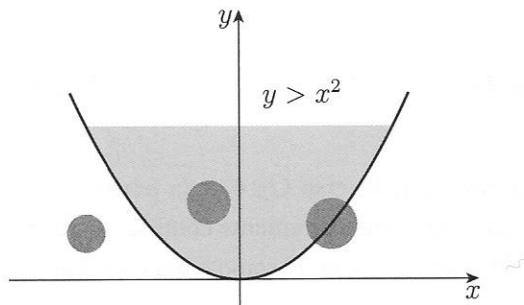
**Figura 1.12** Interior, exterior e fronteira de  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Claro que neste exemplo os cálculos são muito simples.

**Exemplo 1.4.2** Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$  o conjunto representado na Figura 1.13.

Neste caso, já não é tão fácil determinar a distância de um ponto à parábola dada pela equação  $y = x^2$ . No entanto, dada a representação gráfica, não é difícil acreditar que a fronteira deste conjunto seja a referida parábola. Mais adiante será possível estabelecer um critério simples para determinar o interior, o exterior e a fronteira de um conjunto definido por inequações.

\*\*\*



**Figura 1.13** Interior, exterior e fronteira de  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$

**Definição 1.4.2** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

- Diz-se que  $D$  é **aberto**, se  $D = \text{int}(D)$ .
- Diz-se que  $D$  é **fechado**, se  $D = \text{int}(D) \cup \partial D$ .
- Ao conjunto  $\overline{D} = \text{int}(D) \cup \partial D$  chama-se **fecho** do conjunto  $D$ .

É importante observar que, se um ponto pertence à fronteira de um conjunto  $D$ , por definição, também pertence à fronteira do respetivo complementar.

Note-se, também, que  $\mathbb{R}^n = \text{int}(D) \cup \partial D \cup \text{ext}(D)$ .

Portanto, é claro que um conjunto é aberto, se e só se o respetivo complementar for fechado.

## 1.5 SUCESSÕES EM $\mathbb{R}^n$

Os conceitos de sucessão e de limite são também fundamentais no estudo de funções definidas em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.5.1**

- Uma sucessão  $(x_k)$ , de termos em  $\mathbb{R}^n$ , é uma função que a cada  $k \in \mathbb{N}$  faz corresponder um vetor  $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ .

2. Diz-se que uma sucessão  $(x_k)$  converge para  $a \in \mathbb{R}^n$ , se, dado  $\delta > 0$ , existe uma ordem  $k_0$  a partir da qual os termos da sucessão se encontram na bola  $B_\delta(a)$ , ou seja,

$$\forall_{\delta>0} \exists_{k_0} : k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \delta.$$

Neste caso, escreve-se  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  ou  $x_k \rightarrow a$ .

Seja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Então,

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \geq |x|^2 + |y|^2 \geq |x|^2$$

e, tomando a raiz quadrada nesta sequência de desigualdades, obtém-se,

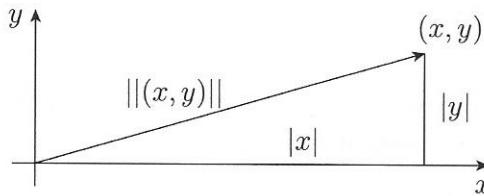
$$|x| + |y| \geq \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \geq |x|,$$

isto é,

$$|x| + |y| \geq \|(x, y)\| \geq |x|.$$

Do mesmo modo,

$$|x| + |y| \geq \|(x, y)\| \geq |y|.$$



**Figura 1.14**  $|x| \leq \|(x, y)\| \leq |x| + |y|$

Num triângulo retângulo, cada um dos catetos tem comprimento menor do que o comprimento da hipotenusa. Por outro lado, a soma dos comprimentos dos catetos é maior do que o comprimento da hipotenusa (ver Figura 1.14).

É claro que, para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \geq \|x\| \geq |x_j|, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

Seja  $(x_k)$  uma sucessão convergente para  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Usando a desigualdade (1.6), obtém-se

$$|x_{k1} - a_1| + |x_{k2} - a_2| + \dots + |x_{kn} - a_n| \geq \|x_k - a\| \geq |x_{kj} - a_j|, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Assim, a sucessão  $(x_k)$  converge para  $a$ , se e só se cada uma das sucessões, ditas componentes ou coordenadas,  $(x_{kj})$ , converge para  $a_j$ , em que  $j = 1, 2, \dots, n$ , isto é,

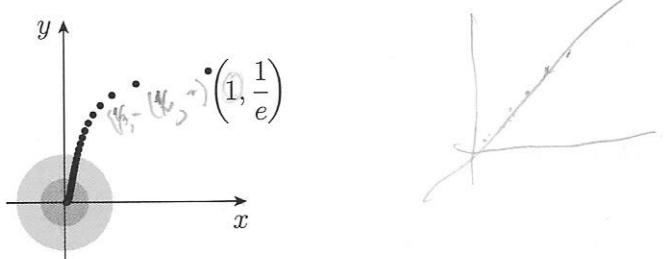
$$x_k \rightarrow a \Leftrightarrow x_{kj} \rightarrow a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Note-se que as sucessões componentes são sucessões de termos em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.5.1** A sucessão definida por  $\left(\frac{1}{k}, e^{-k}\right)$ , representada na Figura 1.15, é convergente, e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k}, e^{-k} \right) = (0, 0).$$

$$a_K = \left( \frac{1}{K}, \frac{1}{e^K} \right) \xrightarrow{K \rightarrow \infty}$$



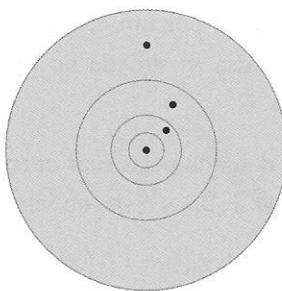
**Figura 1.15** Alguns termos da sucessão  $\left(\frac{1}{k}, e^{-k}\right)$ ,

**Exemplo 1.5.2** A sucessão  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}, 2^k\right)$  não é convergente porque a segunda componente não é uma sucessão convergente em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.5.3**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}, 1 + e^{-k}, 3, \frac{2}{1+k^2}\right) = (0, 1, 3, 0)$

\*\*\*

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $a \in \text{int}(D)$ . De acordo com a definição de ponto interior, existe uma bola  $B_{R_1}(a) \subset D$ . Seja  $x_1 \in B_{R_1}(a)$ . Tome-se  $R_2 < \frac{R_1}{2}$ . É claro que  $B_{R_2}(a) \subset B_{R_1}(a)$ . Seja  $x_2 \in B_{R_2}(a)$ . Tome-se  $R_3 < \frac{R_2}{2}$ . É claro que  $B_{R_3}(a) \subset B_{R_2}(a)$ . Considere-se  $x_3 \in B_{R_3}(a)$ . Deste modo, constrói-se uma sucessão  $(x_k)$  de termos em  $D$ , tal como se ilustra na Figura 1.16.



**Figura 1.16** Construção de uma sucessão convergente

Note-se que  $\|x_k - a\| < \frac{R_1}{k}$ , ou seja,  $x_k \rightarrow a$ .

Do mesmo modo se pode construir uma sucessão  $(x_k)$  de termos em  $D$ , tal que  $x_k \rightarrow a$  para o caso em que  $a \in \partial D$ .

Por outro lado, se  $(x_k)$  for uma sucessão convergente de termos em  $D$ , o respetivo limite não poderá encontrar-se no exterior de  $D$ , ou seja, só poderá estar no fecho de  $D$ , porque um ponto exterior pertence a uma bola que não intersecta  $D$ .

Assim,  $a \in \overline{D}$ , se e só se for limite de uma sucessão de termos em  $D$ .

**Teorema 1.5.1** Um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é fechado, se e só se os limites das suas sucessões convergentes estiverem em  $D$ .

## 1.6 FUNÇÕES DEFINIDAS EM $\mathbb{R}^n$

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função com domínio  $D$  e com valores em  $\mathbb{R}^m$ .

Quando  $n = m$ , diz-se que  $f$  é um **campo vetorial**. Para  $m = 1$ , diz-se que  $f$  é um **campo escalar**.

As grandezas físicas, tais como a temperatura, a pressão, a densidade de massa ou de carga elétrica são expressas em termos de funções escalares. A temperatura medida num ponto de coordenadas  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e no instante  $t$  é um número real. Tem-se assim uma função com domínio em  $\mathbb{R}^4$  e com valores em  $\mathbb{R}$ .

As grandezas físicas, como, por exemplo, a força de atração gravitacional entre massas, a força de atração ou repulsão entre cargas elétricas, são expressas em termos de funções

vetoriais. A força de atração exercida por um corpo de massa  $M$ , colocado na origem de  $\mathbb{R}^3$ , sobre uma partícula de massa  $m$  situada no ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  é um vetor  $F(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  fica definida pelas suas **componentes**  $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que são funções escalares, com  $j = 1, 2, \dots, m$ , ou seja,

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)).$$

### 1.6.1 CAMPOS ESCALARES. GRÁFICOS. CONJUNTOS DE NÍVEL

Os conceitos de gráfico e de conjunto de nível desempenham papéis da maior importância no estudo de uma função, especialmente no caso escalar.

**Definição 1.6.1** *Dada uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , o **gráfico** de  $f$  é o conjunto*

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = f(x) ; x \in D\}.$$

A importância do gráfico de uma função vem do facto de que ele encerra em si tanto os objetos como as respetivas imagens.

Para o caso de uma função escalar  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) ; (x, y) \in D\},$$

cuja representação gráfica aparecerá em vários exemplos.

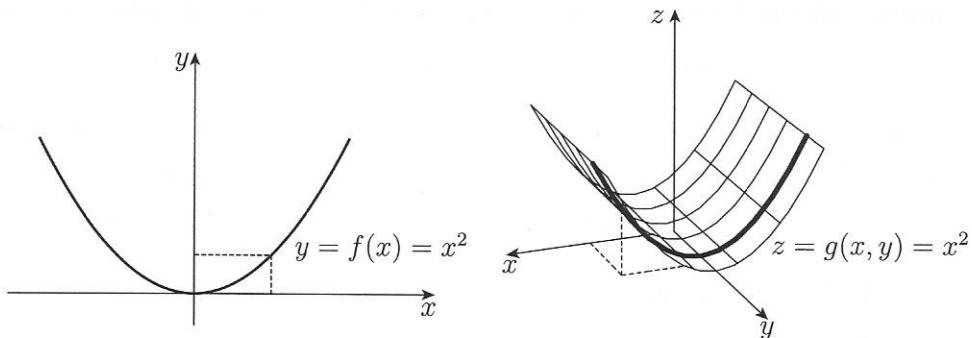
**Definição 1.6.2** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar. A um conjunto definido por*

$$N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha\},$$

*em que  $\alpha \in \mathbb{R}$ , chama-se **conjunto de nível**  $\alpha$  da função  $f$ .*

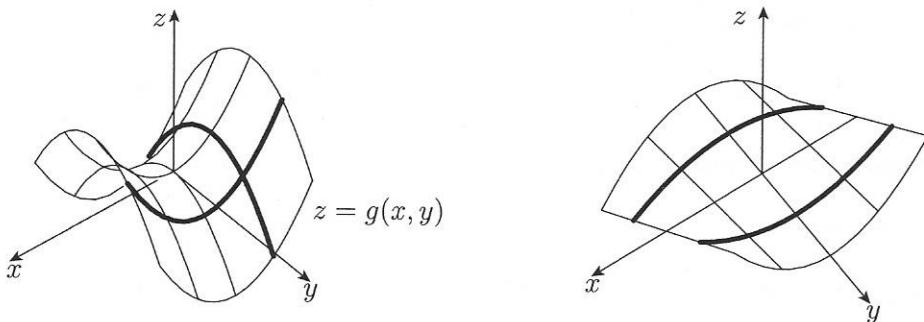
**Exemplo 1.6.1** Na Figura 1.17 estão representados os gráficos da função real de variável real  $f(x) = x^2$  e da função escalar definida em  $\mathbb{R}^2$  por  $g(x, y) = x^2$ .

Para cada  $y \in \mathbb{R}$  fixo, há uma parábola dada por  $z = x^2$ , e, portanto, o gráfico de  $g$  é a união de todas as parábolas assim obtidas.



**Figura 1.17** Gráficos das funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x, y) = x^2$

**Exemplo 1.6.2** Na Figura 1.18 apresenta-se o gráfico da função escalar definida em  $\mathbb{R}^2$  por  $g(x, y) = x^2 - y^2$ .



**Figura 1.18** Gráficos das funções  $g(x, y) = x^2 - y^2$  e  $f(x, y) = yx^2$

Fixando  $x = a$ , há uma parábola definida por  $z = a^2 - y^2$  e de concavidade para baixo. Do mesmo modo, fixando  $y = b$ , obtém-se uma parábola definida por  $z = x^2 - b^2$  e de concavidade para cima. Portanto, o gráfico de  $g$  é a união de todas estas parábolas.

**Exemplo 1.6.3** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = yx^2$ . É claro que, fixando  $y = b$ , com  $b > 0$ , o gráfico resultante é uma parábola dada por  $z = bx^2$  cuja concavidade é voltada para cima e tanto mais pronunciada quanto maior for  $b$ .

Do mesmo modo, para  $b < 0$ , obtém-se uma parábola voltada para baixo, tal como se representa na Figura 1.18.

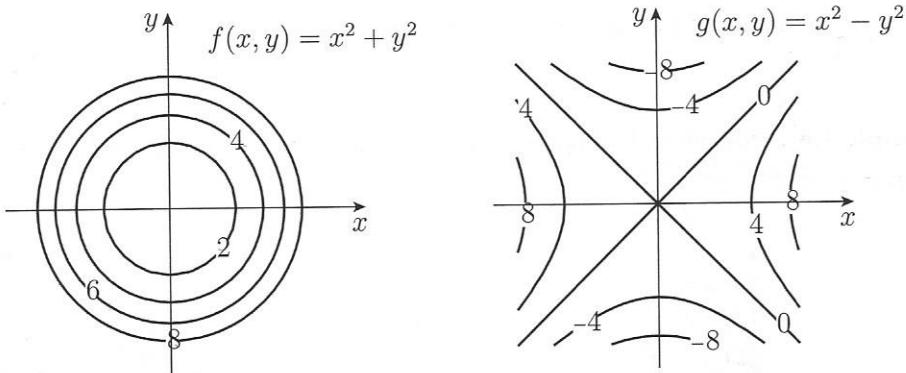
**Exemplo 1.6.4** Os conjuntos de nível da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , definidos por

$$N(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \alpha\},$$

são as circunferências de raio  $\sqrt{\alpha}$ , com  $\alpha \geq 0$ , e centro na origem, tal como se representam na Figura 1.19. Para a função  $g(x, y) = x^2 - y^2$ , os respetivos conjuntos de nível

$$N(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = \alpha\},$$

com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , são hipérboles que se representam na Figura 1.19.



**Figura 1.19** Conjuntos de nível das funções  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $g(x, y) = x^2 - y^2$

**Exemplo 1.6.5** Seja  $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  a função escalar definida por

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Fazendo  $\alpha = -\frac{1}{R}$ , os conjuntos de nível  $\alpha$  da função  $\phi$  são definidos por

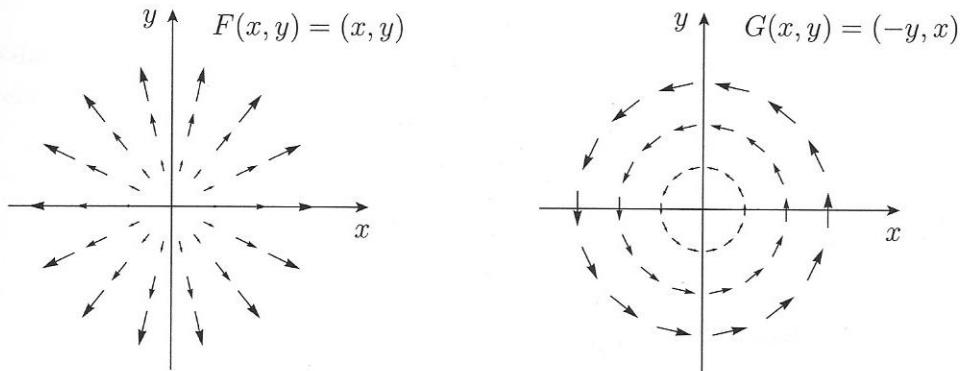
$$N(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

e, portanto, são esferas centradas na origem de  $\mathbb{R}^3$  e de raio  $R$ .

### 1.6.2 CAMPOS VETORIAIS

Um campo vetorial  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  faz corresponder a cada ponto  $x \in D$  um vetor  $F(x) \in \mathbb{R}^n$ . No caso de  $\mathbb{R}^2$ , em cada ponto  $(x, y)$  pode ser representado graficamente o correspondente vetor  $F(x, y)$ , para se ter uma ideia mais clara da natureza do campo vetorial.

**Exemplo 1.6.6** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por  $F(x, y) = (x, y)$ .



**Figura 1.20** Campos vetoriais em  $\mathbb{R}^2$

Em cada ponto  $(x, y)$  encontra-se representado um vetor  $F(x, y) = (x, y)$ , tal como se ilustra na Figura 1.20. Dado que  $\|F(x, y)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , nos pontos de uma circunferência centrada na origem estão vetores com a mesma norma, a qual irá crescendo à medida que o raio de tal circunferência for aumentando.

Para o campo vetorial  $G(x, y) = (-y, x)$  encontram-se também vetores com a mesma norma em cada circunferência centrada na origem e que vai aumentando à medida que o respetivo raio for crescendo, tal como se apresenta na Figura 1.20.

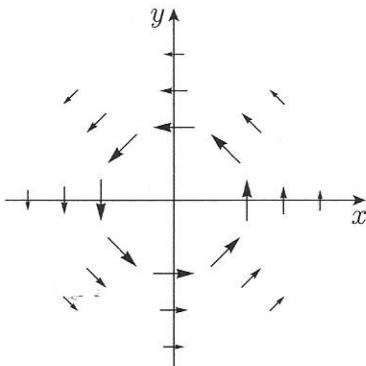
**Exemplo 1.6.7** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

e representado na Figura 1.21. Dado que  $\|F(x, y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , também se encontram vetores com a mesma norma em cada circunferência centrada na origem, mas que vai diminuindo à medida que o respetivo raio cresce, tal como se apresenta na Figura 1.21.

**Exemplo 1.6.8** Seja  $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$G(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$



**Figura 1.21** Campo vetorial  $F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Em cada ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  há um vetor  $G(x, y, z)$  tal que

$$\|G(x, y, z)\| = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^2}.$$

Assim, a norma é constante em cada esfera centrada na origem de  $\mathbb{R}^3$  e decresce com o quadrado do respetivo raio.

O campo gravitacional e o campo eletrostático são exemplos com este comportamento.

### 1.6.3 FUNÇÕES INJETIVAS. PARAMETRIZAÇÕES

Uma função  $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é **injetiva**, se, para  $x, y \in D$ , for

$$x \neq y \Rightarrow g(x) \neq g(y).$$

Sendo injetiva, a função  $g$  é uma bijeção entre  $D \subset \mathbb{R}^m$  e a respetiva imagem  $g(D) \subset \mathbb{R}^n$ .

Assim, uma função injetiva identifica o domínio com a respetiva imagem.

Mais adiante, no caso em que  $n \leq m$  e sob determinadas condições, uma tal função chamar-se-á **parametrização**.

Esta identificação de conjuntos terá um papel fundamental na descrição de objetos geometricamente complexos, designadamente linhas, superfícies e sólidos, em termos de outros mais simples, tais como segmentos de reta, retângulos e paralelepípedos. O cálculo de comprimentos, áreas e volumes será uma das aplicações mais relevantes.

**Exemplo 1.6.9** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Sabendo que  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , a imagem desta função é a circunferência de raio 1 e centrada na origem:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

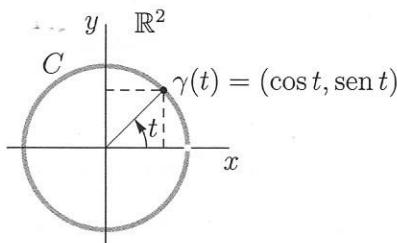
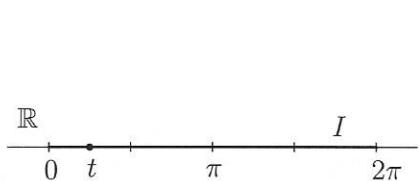


Figura 1.22

Por outro lado, as funções trigonométricas  $\sin t$  e  $\cos t$  são periódicas de período  $2\pi$ . Se  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ , então,  $t_1 = t_2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Sendo  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$ , conclui-se que a função  $\gamma$  é uma bijeção (função injetiva e sobrejetiva) entre o intervalo aberto  $I = ]0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}$  e a circunferência  $C \subset \mathbb{R}^2$ , sem o ponto  $(1, 0)$ , tal como se ilustra na Figura 1.22. Assim, a linha  $C^- = C \setminus \{(1, 0)\}$  em  $\mathbb{R}^2$  é a imagem da função, de uma variável apenas,  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Deste modo, obtém-se uma função que identifica dois conjuntos em espaços diferentes,  $I \subset \mathbb{R}$  e  $C^- \subset \mathbb{R}^2$ .

Com esta função será possível calcular o comprimento da circunferência  $C$ , usando o conceito simples de comprimento de um intervalo.

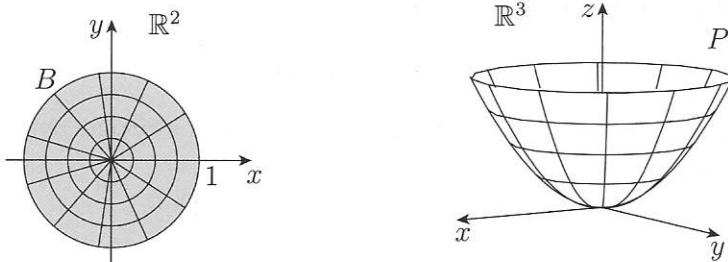
Uma linha em  $\mathbb{R}^n$  será definida como sendo a imagem de uma função de uma variável (ou **parâmetro**),  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , verificando certas propriedades a pormenorizar mais adiante.

**Exemplo 1.6.10** A imagem da função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

é o parabolóide

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$



**Figura 1.23**  $g : B \rightarrow P$  é uma bijeção

Se  $g(x, y) = g(u, v)$ , então é claro que  $(x, y) = (u, v)$ , e, portanto, a função  $g$  é injetiva.

A imagem da bola  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  é o parabolóide

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 ; z < 1\}.$$

Da definição, é claro que a função  $g$  transforma a circunferência centrada na origem de  $\mathbb{R}^2$  e de raio  $R$  na circunferência contida no plano  $z = R$  e centrada no ponto  $(0, 0, R)$ .

Esta função é uma bijeção (função injetiva e sobrejetiva) entre os conjuntos  $B \subset \mathbb{R}^2$  e  $P \subset \mathbb{R}^3$ , tal como se ilustra na Figura 1.23.

Assim, a superfície  $P$  em  $\mathbb{R}^3$  é identificada com a bola  $B \subset \mathbb{R}^2$  através da função  $g$ , de duas variáveis (ou **parâmetros**).

O cálculo da área de  $P$  será uma das aplicações da função  $g$ .

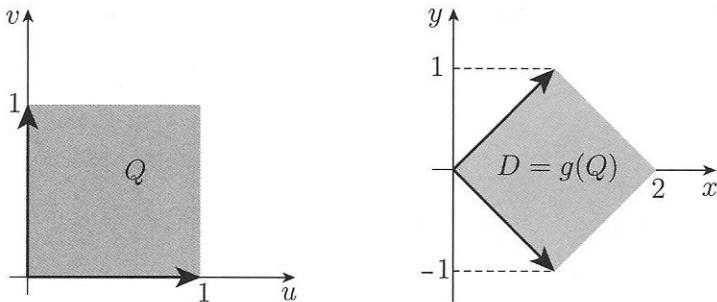
**Exemplo 1.6.11** Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $g(u, v) = (u + v, u - v)$ .

Sendo linear, é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e, como  $\det A = -2 \neq 0$ , a função  $g$  é injetiva e, portanto, a função  $g$  estabelece uma bijeção entre um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e a respetiva imagem  $g(A) \subset \mathbb{R}^2$ .

Por exemplo, a imagem do quadrado  $Q$  é o losango  $D = g(Q)$ , tal como se representa na Figura 1.24, ou seja, a função  $g$  permite identificar estes dois conjuntos.



**Figura 1.24**  $g : Q \rightarrow D$  é uma bijeção

Sendo  $g$  uma função linear, para obter a imagem do quadrado  $Q$ , basta simplesmente construir as imagens dos vetores  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Sendo

$$g(1, 0) = (1, 1); \quad g(0, 1) = (1, -1),$$

é claro que  $g(Q) = D$ . Fazendo  $(x, y) = g(u, v)$ , a função  $g$  passa a ser vista como uma mudança das variáveis  $(x, y)$  para as variáveis  $(u, v)$ , identificando losangos e quadrados.

Funções deste tipo serão fundamentais no cálculo da área de figuras complexas em termos da área de figuras mais simples, como, por exemplo, os retângulos.

#### 1.6.4 FUNÇÕES CONTÍNUAS E SUCESSÕES

A noção de função contínua desempenha um papel crucial nas aplicações. Muitas grandezas físicas são traduzidas matematicamente em termos de funções contínuas.

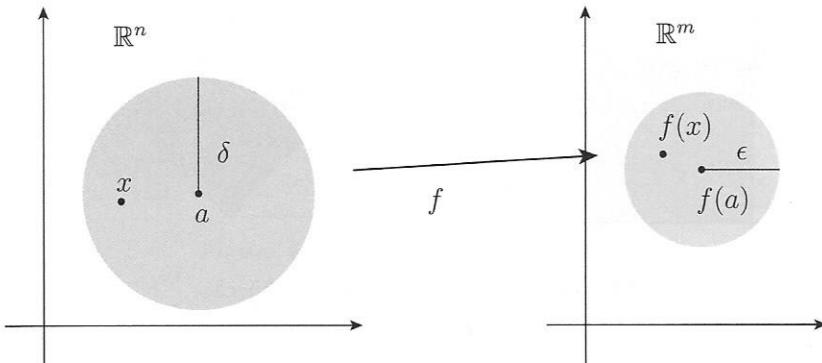
Dispondo da noção de distância entre pontos em  $\mathbb{R}^n$ , tal como em  $\mathbb{R}$ , facilmente se estabelece a definição de função contínua.

**Definição 1.6.3** Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é **contínua** em  $a \in D$ , se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Por outras palavras, e tal como se encontra ilustrado na Figura 1.25, dada uma bola em  $\mathbb{R}^m$ , de raio  $\varepsilon$  centrada em  $f(a)$ , ou seja,  $B_\varepsilon(f(a))$ , existe uma bola em  $\mathbb{R}^n$  de raio  $\delta$  e centrada em  $a$ ,  $B_\delta(a)$ , tal que, se  $x \in B_\delta(a) \cap D$ , então  $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$ .

Note-se que  $\|x - a\|$  é calculada em  $\mathbb{R}^n$  e  $\|f(x) - f(a)\|$  é calculada em  $\mathbb{R}^m$ .



**Figura 1.25** Definição de função contínua

Seja  $(x_k)$  uma sucessão em  $D$ , tal que  $x_k \rightarrow a$ . Então existe um inteiro positivo  $k_0$ , tal que  $\|x_k - a\| < \delta$ , para todo  $k > k_0$ . Sendo  $f$  contínua em  $a$ , então  $\|f(x_k) - f(a)\| < \varepsilon$ , ou seja,  $f(x_k) \rightarrow f(a)$ .

Por outro lado, se  $f$  não fosse contínua em  $a$ , existiria  $\varepsilon > 0$ , tal que, para qualquer  $\delta > 0$ , haveria um ponto  $x \in D$  verificando

$$\|x - a\| < \delta ; \quad \|f(x) - f(a)\| \geq \varepsilon.$$

Tomando sucessivamente  $\delta = \frac{1}{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , a sucessão  $(x_k)$  seria tal, que

$$\|x_k - a\| < \frac{1}{k} ; \quad \|f(x_k) - f(a)\| \geq \varepsilon,$$

ou seja,  $x_k \rightarrow a$ , mas a sucessão  $(f(x_k))$  não seria convergente para  $f(a)$ . Assim, as funções contínuas podem ser caracterizadas, recorrendo às sucessões convergentes.

**Teorema 1.6.1** Uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua em  $a \in D$ , se e só se, para qualquer sucessão  $(x_k)$ , de termos em  $D$ , tal que  $x_k \rightarrow a$ ,  $f(x_k) \rightarrow f(a)$ .

Tendo em conta a desigualdade (1.6), facilmente se conclui que uma função do tipo  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua em  $a \in D$ , se e só se cada uma das respetivas funções componentes  $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , for contínua em  $a \in D$ .

### 1.6.5 CONTINUIDADE E LIMITE. PROPRIEDADES

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, e  $a \in \overline{D} = \text{int}(D) \cup \partial(D)$ .

Diz-se que  $f(x)$  tende para  $b$ , quando  $x$  tende para  $a$ , se e só se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que, sempre que  $x \in D$  e  $\|x - a\| < \delta$ , se tiver  $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ .

Neste caso escreve-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Portanto, a função  $f$  é contínua no ponto  $a$ , se e só se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

É interessante o caso em que  $D$  é um conjunto aberto e  $a$  é um ponto da respectiva fronteira.

Tendo em conta a noção de limite, facilmente se verificam as propriedades seguintes das funções contínuas.

**Teorema 1.6.2** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então,

- A função  $\alpha f$  é contínua.
- A função  $f + g$  é contínua.
- A função  $fg$  é contínua.
- A função  $f/g$  é contínua nos pontos  $x$ , em que  $g(x) \neq 0$ .
- Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função contínua no ponto  $a \in A$ , e seja também  $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma função em que  $f(A) \subset B$  e que é contínua em  $f(a)$ . Então, a **função composta**  $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é contínua em  $a$ .

No caso da função composta  $g \circ f$ , definida pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)), \end{array}$$

se  $f$  for contínua em  $a$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , e se  $g$  for contínua em  $f(a)$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a)),$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a).$$

Portanto, a composição de funções contínuas é uma função contínua.

\*\*\*

Como se verá nos exemplos seguintes, as propriedades enunciadas no Teorema 1.6.2 são úteis na identificação de funções contínuas.

**Exemplo 1.6.12** A função definida por  $f(x, y) = x$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ . De facto,

$$|f(x, y) - f(a, b)| = |x - a| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \|(x - a, y - b)\|$$

e, portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , com  $\delta = \varepsilon$ ,

$$\|(x - a, y - b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b) = a.$$

Do mesmo modo se vê que a função  $f(x, y) = y$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

As funções  $f(x, y) = x^2$ ,  $g(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $h(x, y) = yx^2$ , definidas em  $\mathbb{R}^2$  e cujos gráficos podem ser vistos nas Figuras 1.17 e 1.18, são contínuas.

**Exemplo 1.6.13** A função definida por  $f(x, y) = |x|$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ . De facto, pela desigualdade triangular, tem-se

$$|x| = |(x - a) + a| \leq |x - a| + |a|,$$

ou seja,

$$|x| - |a| \leq |x - a|.$$

Do mesmo modo,

$$|a| = |(a - x) + x| \leq |x - a| + |x|$$

e, portanto,

$$-|x - a| \leq |x| - |a|.$$

Então,

$$||x| - |a|| \leq |x - a|.$$

Assim,

$$|f(x, y) - f(a, b)| = ||x| - |a|| \leq |x - a| \leq \|(x - a, y - b)\|$$

e, portanto, dado  $\varepsilon > 0$ , com  $\delta = \varepsilon$ , tem-se

$$\|(x - a, y - b)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b) = a.$$

Do mesmo modo se vê que a função  $f(x, y) = |y|$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 1.6.14** A função definida por  $f(x) = \|x\|$  é contínua em  $\mathbb{R}^n$ . Pela desigualdade triangular e tal como no exemplo anterior:

$$\|x\| = \|(x - a) + a\| \leq \|x - a\| + \|a\|,$$

ou seja,

$$\|x\| - \|a\| \leq \|x - a\|.$$

Do mesmo modo,

$$-\|x - a\| \leq \|x\| - \|a\|$$

e, portanto,

$$|\|x\| - \|a\|| \leq \|x - a\|.$$

Assim,

$$|f(x) - f(a)| \leq \|x - a\|$$

e, então, dado  $\varepsilon > 0$ , com  $\delta = \varepsilon$ :

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Em  $\mathbb{R}^2$ , a função  $f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  é contínua.

**Exemplo 1.6.15** Seja  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

- i) Pelas propriedades das funções contínuas,  $f$  é contínua em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

- ii) A fronteira de  $D$  é o conjunto  $\{(0, 0)\}$ . A função  $f$  pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto, para  $y = mx$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x\sqrt{1+m^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sqrt{1+m^2}} = 0, \forall m \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Assim, existe um candidato a limite. Usando a desigualdade (1.6),

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x||y|}{\|(x, y)\|} \leq \frac{\|(x, y)\|^2}{\|(x, y)\|} = \|(x, y)\|.$$

Portanto,

$$|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

A função  $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

A função  $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é o **prolongamento** contínuo de  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.6.16** Seja  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

- i) Pelas propriedades das funções contínuas,  $f$  é contínua em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- ii) A fronteira de  $D$  é o conjunto  $\{(0, 0)\}$ . A função  $f$  não pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto,

$$\begin{aligned}f(x, x) &= \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \\ f(x, -x) &= -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

e, portanto, para  $y = x$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$$

e para  $y = -x$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) = -\frac{1}{2},$$

ou seja, a função  $f$  não pode ser prolongada por continuidade à origem.

Esta função é constante em cada uma das linhas retas da forma  $y = mx$ . De facto,

$$f(x, mx) = \frac{m}{1 + m^2}.$$

**Exemplo 1.6.17** Seja  $g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ .

- i) Pelas propriedades das funções contínuas,  $g$  é contínua em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- ii) A fronteira de  $D$  é o conjunto  $\{(0, 0)\}$ . A função  $g$  pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto, para  $y = mx$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{1 + m^2} = 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$ , desde que este limite seja calculado segundo qualquer linha reta que passa pela origem. Este facto não garante que o limite exista, mas, se existir, deverá ser este mesmo.

Dado que  $x^2 \leq x^2 + y^2$  e  $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ , então:

$$\begin{aligned} |g(x, y)| &= \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \|(x, y)\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|g(x, y)| \leq \|(x, y)\|,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0.$$

**Exemplo 1.6.18** Seja  $h(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ .

- i) Pelas propriedades das funções contínuas,  $h$  é contínua em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De facto,  $h$  é a composição de funções contínuas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 & \mapsto & \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}. \end{array}$$

ii) Dado que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r}{r} = 1$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 1$ .

**Exemplo 1.6.19** Seja  $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ .

i) Pelas propriedades das funções contínuas,  $f$  é contínua em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

ii) Para  $y = mx$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^4 + m^2} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Fazendo  $x = 0$ , então  $f(0,y) = 0$ , e, portanto, segundo todas as linhas retas que passam pela origem, o limite é sempre o mesmo. Será que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  existe?

No entanto,

$$f(x,x^3) = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2},$$

e, portanto, o limite não existe.

**Exemplo 1.6.20** Seja  $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^4}$ .

i) Pelas propriedades das funções contínuas,  $f$  é contínua em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

ii) A fronteira de  $D$  é o conjunto  $\{(0,0)\}$ . A função  $f$  pode ser prolongada por continuidade à origem. De facto, para  $y = mx$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x,mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^4}{x^2 + mx^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{1 + mx^2} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

É claro que  $f(0,y) = 0$  e, portanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ , desde que este limite seja calculado segundo qualquer linha reta que passa pela origem. Este facto não garante que o limite exista, mas, se existir, deverá ser este mesmo.

Usando a desigualdade (1.6) e tendo em conta que  $x^2 + y^4 \geq x^2$ , então:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^3y}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{|x|^3|y|}{|x|^2} = |x||y| \leq \|(x,y)\|^2.$$

Portanto,  $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|^2$ , ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

### 1.6.6 CONJUNTOS FECHADOS. EXEMPLOS

Muitos dos exemplos interessantes de conjuntos são definidos por inequações. A noção de função contínua dará origem a um critério que permite determinar o interior, o exterior e a fronteira de tais conjuntos.

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar contínuo,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha\}.$$

Seja  $(x_k)$  uma sucessão de termos em  $A_\alpha$  e convergente para um ponto  $a \in \mathbb{R}^n$ . Dado que  $f$  é uma função contínua, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$$

e, sendo  $f(x_k) \geq \alpha$ , necessariamente  $f(a) \geq \alpha$ , ou seja,  $a \in A_\alpha$ . Portanto, o conjunto  $A_\alpha$  é fechado. Do mesmo modo se mostra que os conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$$

são também fechados.

Em particular, são fechados os conjuntos da forma

$$N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha\}.$$

Assim, **os conjuntos de nível de uma função escalar contínua são fechados**.

Sabendo que o complementar de um aberto é um fechado, então os conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\},$$

ou da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\},$$

são abertos.

O gráfico de uma função  $f$ ,

$$G(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\},$$

pode ser visto como o conjunto de nível zero da função contínua  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Então,  $G(f)$  é um conjunto fechado.

**O gráfico de uma função contínua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .**

\*\*\*

**Exemplo 1.6.21** Na Figura 1.19 estão representados os conjuntos de nível das funções escalares  $g(x, y) = x^2 + y^2$  e  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , que são, respectivamente, circunferências e hipérboles. Sendo  $f$  e  $g$  contínuas, esses conjuntos são fechados.

**Exemplo 1.6.22 Um Círculo em  $\mathbb{R}^2$ .**

Dado que a função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , o círculo de raio igual a um e centro na origem  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , é um conjunto fechado.

A respetiva fronteira é a circunferência  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Exemplo 1.6.23 Um Quadrado em  $\mathbb{R}^2$ .**

Dado que a função  $f(x, y) = |x| + |y|$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , o conjunto

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

é fechado.

**Exemplo 1.6.24 Uma Esfera em  $\mathbb{R}^3$ .**

A superfície esférica de raio  $R$  e centro na origem de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

representada na Figura 1.10, é o conjunto de nível zero da função contínua  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ . É um conjunto fechado que coincide com a respetiva fronteira e, portanto, o respetivo interior é o conjunto vazio.

**Exemplo 1.6.25 Um Cilindro em  $\mathbb{R}^3$ .**

A superfície cilíndrica de raio  $R$  e altura  $h$  em  $\mathbb{R}^3$ , representada na Figura 1.5, é definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2 ; 0 \leq z \leq h\},$$

é o conjunto de nível zero da função contínua  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela expressão  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$ . Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

**Exemplo 1.6.26 Um Hiperbolóide em  $\mathbb{R}^3$ .**

O hiperbolóide representado na Figura 1.8, e definido por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2 ; -1 \leq z \leq 1\},$$

é um conjunto fechado, por ser o conjunto de nível um da função contínua  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ .

**Exemplo 1.6.27 Um Parabolóide em  $\mathbb{R}^3$ .**

Seja  $P$  o parabolóide representado na Figura 1.7 e definido por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}.$$

É o gráfico da função contínua  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

**Exemplo 1.6.28 Um Cone em  $\mathbb{R}^3$ .**

O cone representado na Figura 1.6, com  $h = 1$  e  $R = 1$ , definido por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

é gráfico da função contínua  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

**Exemplo 1.6.29 Um Toro em  $\mathbb{R}^3$ .**

O toro

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\},$$

representado na Figura 1.11, é o conjunto de nível zero da função contínua  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 - 1$ . Trata-se, portanto, de um conjunto fechado.

**1.6.7 CONJUNTOS COMPACTOS. TEOREMA DE WEIERSTRASS**

No estudo e nas aplicações de funções escalares é da maior importância a garantia de existência e a determinação dos respetivos extremos (máximos ou mínimos). Para funções contínuas a existência de extremos está garantida nos chamados conjuntos compactos.

**Definição 1.6.4** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  diz-se **limitado**, se existir uma bola centrada na origem que o contém, ou seja,

$$\exists R > 0 : A \subset B_R(0).$$

Diz-se que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é **compacto**, se for limitado e fechado.

Da definição, é claro que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é limitado, se existir  $R > 0$ , tal que  $\|x\| < R$ , para todo  $x \in A$ .

É claro que uma bola em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto limitado. Basta considerar  $R$  maior do que o raio dessa bola.

Dado que os gráficos e os conjuntos de nível de funções contínuas são conjuntos fechados, serão compactos, desde que sejam limitados.

**Exemplo 1.6.30** A superfície cilíndrica (ver Figura 1.5) definida por

$$x^2 + y^2 = R^2 ; 0 \leq z \leq h,$$

em que  $R$  e  $h$  são dados, é um conjunto limitado.

De facto,  $z^2 < h^2$  e, portanto,

$$x^2 + y^2 + z^2 < R^2 + h^2,$$

ou seja, a superfície está contida na bola de raio  $\sqrt{R^2 + h^2}$  e centro na origem.

Sendo definido pela equação  $x^2 + y^2 = 1$ , é um conjunto fechado e, portanto, um conjunto compacto.

**Exemplo 1.6.31** A esfera (ver Figura 1.10), definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

é obviamente um conjunto limitado.

Sendo definido pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , é um conjunto fechado e, portanto, um conjunto compacto.

**Exemplo 1.6.32** O cone (ver Figura 1.6), definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}; z \leq h\},$$

de altura  $h$  e raio da base  $R$ , é um conjunto limitado porque, da sua definição,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{R^2}{h^2} + 1\right)z^2 < \left(\frac{R^2}{h^2} + 1\right)h^2 = R^2 + h^2.$$

Sendo fechado, por ser definido pela equação  $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ , é um conjunto compacto.

**Exemplo 1.6.33** O toro (ver Figura 1.11) definido por

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1$$

é um conjunto limitado e, sendo fechado, é compacto.

De facto, da equação, é claro que  $z^2 \leq 1$  e

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} - 3 \leq 1,$$

ou seja,

$$2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4; z^2 \leq 1.$$

Portanto,  $x^2 + y^2 + z^2 < 17$ .

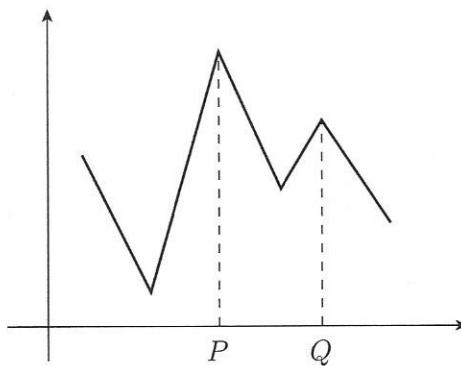
\*\*\*

**Definição 1.6.5** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Diz-se que  $a \in D$  é um ponto de **máximo relativo** de  $f$ , se existir uma bola  $B_r(a)$ , tal que  $f(x) \leq f(a)$ , para qualquer  $x \in B_r(a)$ . Se a desigualdade se verificar para todo  $x \in D$ , diz-se que  $a \in D$  é um ponto de **máximo absoluto**.

Com as modificações óbvias se definem mínimo relativo e mínimo absoluto. Aos máximos e mínimos também se chama **extremos**.

Na Figura 1.26 ilustra-se a distinção entre ponto de máximo absoluto  $P$  e ponto de máximo relativo  $Q$ .

A existência de tais pontos fica garantida, desde que a função seja contínua e definida num conjunto compacto. Para provar isso, é necessário dispor de uma boa caracterização dos conjuntos compactos.



**Figura 1.26** Distinção entre máximo absoluto e máximo relativo

É sabido que em  $\mathbb{R}$  uma sucessão limitada tem pelo menos uma subsucessão convergente. Em  $\mathbb{R}^n$  acontece o mesmo.

Sem perda de generalidade, basta considerar o caso de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $(x_k, y_k)$  uma sucessão limitada, ou seja,

$$\exists R > 0 \forall k, \|(x_k, y_k)\| \leq R.$$

Sabendo que

$$|x_k| \leq \|(x_k, y_k)\|,$$

a sucessão  $(x_k)$  é limitada em  $\mathbb{R}$  e, portanto, tem uma subsucessão convergente. Seja  $(x_{k_m})$  essa subsucessão.

A sucessão  $(x_{k_m}, y_{k_m})$  é uma subsucessão de  $(x_k, y_k)$ . A sucessão  $(y_{k_m})$  é limitada em  $\mathbb{R}$ . Portanto, tem, pelo menos, uma subsucessão  $(y_{k_l})$  convergente.

Assim, a sucessão  $(x_{k_l}, y_{k_l})$  é uma subsucessão convergente da sucessão  $(x_k, y_k)$ .

Recorde-se que uma sucessão convergente, com termos num conjunto fechado, tem limite nesse conjunto.

**Teorema 1.6.3** Um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é compacto, se qualquer sucessão com termos em  $D$  tem pelo menos uma subsucessão convergente, com limite em  $D$ .

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função contínua,  $D$  um conjunto compacto e  $f(D)$  a respetiva imagem.

Seja  $(y_k)$  uma sucessão em  $f(D)$ , e  $(x_k)$  a sucessão de termos em  $D$ , tal que  $y_k = f(x_k)$ .

Sendo  $D$  um conjunto compacto, a sucessão  $(x_k)$  tem uma subsucessão  $(x_{k_m})$  convergente com limite  $a \in D$  e, sendo  $f$  é uma função contínua, então:

$$\lim_{x_{k_m} \rightarrow a} f(x_{k_m}) = f(a)$$

e, portanto,

$$\lim_{k_m \rightarrow \infty} y_{k_m} = f(a) \in f(D).$$

Isto quer dizer que a sucessão  $(y_k)$  tem uma subsucessão  $(y_{k_m})$  convergente, com limite em  $f(D)$ , ou seja, o conjunto  $f(D)$  é um conjunto compacto.

**Teorema 1.6.4** Se  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  for uma função contínua e  $D$  um conjunto compacto, então a respetiva imagem  $f(D) \subset \mathbb{R}^m$  é também um conjunto compacto.

**Exemplo 1.6.34** Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy = 1\}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $g(u, v) = (u + v, u - v)$ . É claro que se trata de uma função contínua. A respetiva imagem é o conjunto de pontos da forma  $(x, y) = g(u, v)$ .

Assim,

$$x^2 + y^2 + xy = 3u^2 + v^2$$

e, portanto, o conjunto  $D$  é a imagem do conjunto

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 3u^2 + v^2 = 1\},$$

isto é,  $D = g(A)$ .

Sendo  $A$  definido pela equação  $3u^2 + v^2 = 1$ , é um conjunto fechado. Por outro lado,

$$u^2 + v^2 \leq 3u^2 + v^2 = 1,$$

e, portanto,  $A$  é um conjunto limitado.

Sendo  $g$  uma função contínua e  $A$  um conjunto compacto, o conjunto  $D = g(A)$  é também compacto.

No caso escalar, a imagem  $f(D)$  é um conjunto compacto em  $\mathbb{R}$  e, portanto, terá máximo e mínimo.

**Teorema 1.6.5 (Weierstrass)** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto e não vazio. Então qualquer função escalar contínua em  $D$  tem máximo e mínimo absolutos nesse conjunto.

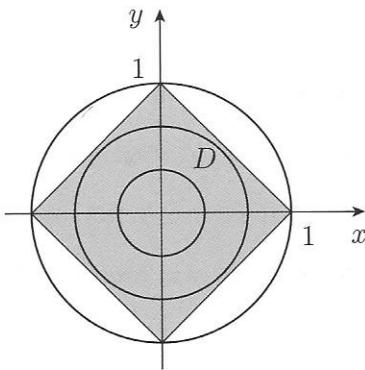
Este teorema garante apenas a existência do máximo e do mínimo, mas não estabelece nenhum critério para determinar os pontos em que esses valores são atingidos.

**Exemplo 1.6.35** Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ , e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

É claro que  $f$  é uma função contínua. O conjunto  $D$  é fechado, por ser definido por  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 1\}$ , em que  $g(x, y) = |x| + |y|$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso,  $D$  é um conjunto limitado, porque

$$1 \geq (|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2.$$

Assim, o teorema de Weierstrass garante que a função  $f$  tem máximo e mínimo absolutos em  $D$ .



**Figura 1.27** Extremos de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  em  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

Resta saber em que pontos esses valores são atingidos. Neste caso, é fácil determiná-los, porque  $f(x, y) = x^2 + y^2$  é o quadrado da distância de um ponto  $(x, y)$  à origem de  $\mathbb{R}^2$ . Sendo  $f(x, y) \geq 0$ , é claro que o ponto de mínimo é a origem. Dado que  $D$  é o

quadrado com vértices nos pontos  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  e, sendo estes os pontos mais afastados da origem, serão eles os pontos de máximo da função  $f$ . Portanto, em  $D$  tem-se  $0 \leq f(x, y) \leq 1$ .

Na Figura 1.27 encontra-se representado o quadrado  $D$ , bem como os conjuntos de nível de  $f$  que são circunferências centradas na origem:

$$N(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c, c \geq 0\},$$

ilustrando uma forma geométrica expedita para determinar os extremos da função  $f$  no conjunto  $D$ .

Basta considerar os conjuntos de nível  $N(c)$  que intersectam o conjunto  $D$ . O conjunto de nível  $N(1)$  intersecta  $D$  nos seus vértices e, portanto, são esses os pontos de máximo da função  $f$ .

É claro que neste exemplo não seria necessário recorrer ao teorema de Weierstrass, porque bastaria efetuar os cálculos que foram apresentados. Em geral, os cálculos para determinar os extremos de uma função escalar podem não ser simples. Portanto, a garantia da respectiva existência é fundamental. Em certas condições há formas expeditas de os determinar, fazendo intervir os conjuntos de nível da função escalar em causa.

Os conjuntos compactos podem ser caracterizados de outro modo, que será útil, por exemplo, na caracterização das funções integráveis.

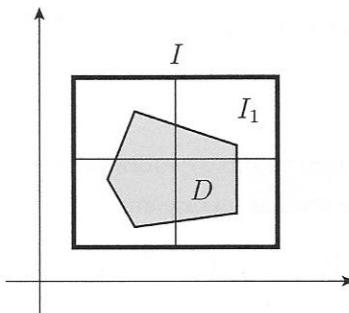
Diz-se que uma coleção de conjuntos abertos  $(A_\alpha)$  constitui uma **cobertura** de  $D$ , se

$$D \subset \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

**Teorema 1.6.6** Seja  $(A_\alpha)$  uma cobertura de um conjunto compacto  $D$ . Então existe um número finito de conjuntos  $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_N}$ , dessa cobertura, tais que

$$D \subset \bigcup_{k=1}^N A_{\alpha_k}.$$

Diz-se que um conjunto  $I \subset \mathbb{R}^n$  é um intervalo, se for o produto cartesiano de  $n$  intervalos de  $\mathbb{R}$ , que são as arestas de  $I$ .



**Figura 1.28** Bisseção das arestas do intervalo  $I$

Um intervalo  $I \subset \mathbb{R}^n$  é compacto se for da forma

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

em que  $a_k < b_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , são reais.

Em  $\mathbb{R}^2$  um intervalo é um retângulo cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados. Em  $\mathbb{R}^3$  é um paralelepípedo com arestas paralelas aos eixos coordenados.

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto. Então deverá existir um intervalo compacto  $I$ , tal que  $D \subset I$ , como se ilustra na Figura 1.28.

Por bissecção das arestas de  $I$  encontram-se  $2^n$  subintervalos compactos. Se  $D$  não verifica a propriedade enunciada no teorema, então, pelo menos um destes subintervalos, designado por  $I_1$ , será tal que o conjunto  $I_1 \cap D$  não verifica a referida propriedade. Seja  $x_1 \in I_1 \cap D$  um ponto qualquer.

Por bissecção das arestas do subintervalo  $I_1$ , obtém-se outro subintervalo compacto  $I_2$ , tal que  $I_2 \subset I_1$ , e o conjunto  $I_2 \cap D$  não verifica aquela propriedade. Seja  $x_2 \in I_2 \cap D$  um ponto qualquer.

Repetindo este processo, surge uma sucessão de conjuntos  $(I_k \cap D)$  que não verificam a propriedade e uma sucessão de pontos  $(x_k)$ , tal que  $x_k \in I_k \cap D$  e

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset \dots .$$

Sendo  $D$  limitado e fechado, existe uma subsucessão de  $(x_k)$ , designada por  $(x_{k_m})$ , que é convergente e cujo limite, designado por  $x$ , pertence a  $D$ .

Assim, existe algum  $A_\alpha$ , tal que  $x \in A_\alpha$ , e, sendo  $A_\alpha$  aberto, existe também uma bola  $B_\varepsilon(x) \subset A_\alpha$ .

Dado que  $x_{km} \rightarrow x$ , seja  $k_0$  tal que, para  $k_m > k_0$ , se tenha  $x_{km} \in B_\varepsilon(x)$ .

Por construção dos intervalos  $I_k$ , seja  $k_0$  tal que, para  $k_m > k_0$ , existe um conjunto  $A_\alpha$  tal que

$$x_{km} \in I_k \cap D \subset B_\varepsilon(x) \subset A_\alpha,$$

o que contradiz o facto de que  $I_k \cap D$  não verifica a propriedade enunciada no teorema. Portanto,  $D$  verifica aquela propriedade.

## 1.7 EXERCÍCIOS

1. Determine o interior e a fronteira de cada um dos conjuntos seguintes:

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$ .
- b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 - 1 ; |z| < 2\}$ .

2. Mostre que os conjuntos seguintes são compactos:

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x + y^2 = 0\}$ .
- b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z = x^2 - y^2 ; 0 \leq x \leq 1\}$ .

3. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

- a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^4}$ .
- b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ .
- c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .
- d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ .
- e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{y}{x}}$ .
- f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2}$ .

4. Considere a função definida pela expressão

$$f(x, y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{xy}\right).$$

Determine o domínio de  $f$  e o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$  aos quais  $f$  pode ser prolongada por continuidade.

5. Seja  $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  uma coleção de conjuntos compactos em  $\mathbb{R}^n$ , que verifica a propriedade  $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ . Mostre que a interseção  $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j$  não é vazia.
6. Mostre que a interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Dê um exemplo de uma família infinita de conjuntos abertos cuja interseção é um conjunto fechado e não vazio.
7. Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto, e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função contínua e injetiva. Prove que a função inversa  $f^{-1} : f(D) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua.

# 2

---

FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

## 2.1 DERIVADAS PARCIAIS

A noção de derivada é das mais importantes no estabelecimento de modelos matemáticos de fenómenos físicos, químicos, etc. Na prática, esses modelos são dados em termos de equações envolvendo as taxas de variação das grandezas em jogo.

Recorde-se que, dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , diz-se que  $f$  é diferenciável num ponto  $a$ , se existir o limite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a que se chama derivada de  $f$  em  $a$ .

Então,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0,$$

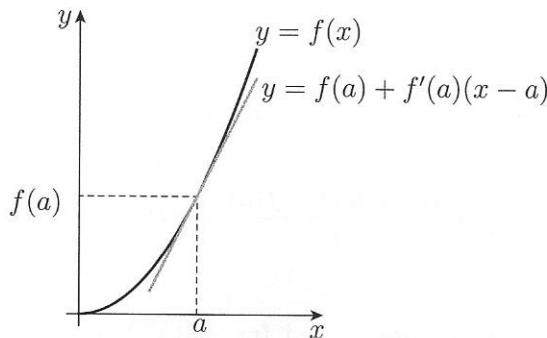
ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)h|}{|h|} = 0.$$

Fazendo  $x = a + h$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tais que, se  $|x - a| < \delta$ , então

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| < \varepsilon|x - a|.$$

Isto quer dizer que, no ponto  $a$ , a reta de equação  $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ , cujo declive é precisamente a derivada  $f'(a)$ , é tangente ao gráfico de  $f$ , tal como se ilustra na Figura 2.1.



**Figura 2.1** Derivada em  $\mathbb{R}$ . Tangente ao gráfico

A função real de variável real,  $\mathbb{R} \ni h \mapsto f'(a)h \in \mathbb{R}$ , é linear. Portanto,  $f$  é diferenciável em  $a$ , se, de certo modo, for possível aproximar a diferença  $f(a+h) - f(a)$  pela função

linear  $h \mapsto f'(a)h$ . Esta forma de descrever a noção de derivada em  $\mathbb{R}$  pode ser transposta para o caso das funções de várias variáveis.

**Definição 2.1.1** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Diz-se que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é diferenciável num ponto  $a \in D$ , se existir uma aplicação linear  $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , denominada **derivada** de  $f$  em  $a$ , tal que  $f(a+h) - f(a) - Df(a)h = o(h)$ , sendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\|}{\|h\|} = 0.$$

\*\*\*

A transformação linear  $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  deverá ser representada por uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas.

Para determinar essa matriz, seja  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Fazendo  $h = te_k$ , com  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(a + te_k) - f(a) = Df(a)(te_k) + o(te_k)$$

e, sabendo que  $Df(a)$  é uma aplicação linear, então:

$$f(a + te_k) - f(a) = tDf(a)e_k + o(te_k),$$

ou seja,

$$\frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = Df(a)e_k + \frac{o(te_k)}{t}.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = Df(a)e_k.$$

Dado que

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n); \quad a + te_k = (a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n),$$

então a razão incremental

$$\frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)}{t}$$

obtém-se, fixando todas as coordenadas, exceto a  $k$ -ésima.

Sendo  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ , então:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1(a + te_k) - f_1(a)}{t}, \dots, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_m(a + te_k) - f_m(a)}{t} \right).$$

O conjunto de pontos definido por  $\{a + te_k : t \in \mathbb{R}\}$  é a reta que passa pelo ponto  $a$  e com a direção do vetor  $e_k$ . Assim, a razão incremental

$$\frac{f_j(a + te_k) - f_j(a)}{t}$$

é a taxa de variação da função escalar  $f_j$  na direção do vetor  $e_k$ .

**Definição 2.1.2** *Ao limite*

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(a + te_k) - f_j(a)}{t}$$

chama-se **derivada parcial** de  $f_j$  no ponto  $a$  em ordem à variável  $x_k$ , sendo  $k = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Para calcular a derivada parcial  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)$  fixam-se todas as variáveis, exceto  $x_k$ . Portanto, trata-se de calcular a derivada de uma função de uma variável real  $x_k$ .

Por outro lado,  $Df(a)e_k$  é a  $k$ -ésima coluna da matriz que representa a derivada  $Df(a)$ . Portanto, a matriz que representa a derivada  $Df(a)$  é

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

À matriz  $Df(a)$  chama-se **jacobiana** de  $f$ .

No caso em que  $m = 1$ , ou seja,  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $Df(a)$  tem apenas uma linha:

$$Df(a) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right],$$

e pode ser representada na forma vetorial

$$Df(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

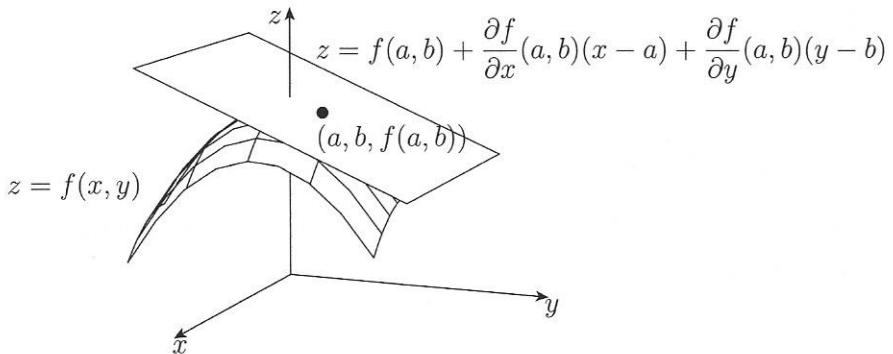
que se chama **gradiente** de  $f$  em  $a$ .

Este vetor passa a ser designado pelo símbolo  $\nabla f(a)$ , ou seja,

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Assim, o gradiente de uma função escalar  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é também uma função que a cada ponto  $x \in D$  faz corresponder um vetor  $\nabla f(x)$ , ou seja, é um campo vetorial,  $\nabla f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

No caso geral, a  $j$ -ésima linha da matriz jacobiana é o gradiente da função coordenada  $f_j$ .



**Figura 2.2** Derivada em  $\mathbb{R}^2$ . Interpretação geométrica

No caso em que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável num ponto  $(a, b)$ , tem-se

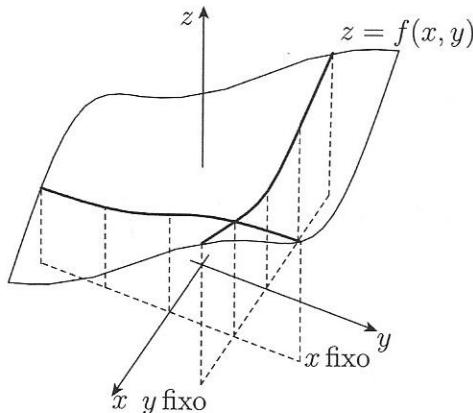
$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + o(x - a, y - b).$$

Notando que a equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

define um plano que passa pelo ponto  $(a, b, f(a, b))$ , diz-se que esse plano é tangente ao gráfico da função  $f$  nesse ponto.

Na Figura 2.2 encontra-se representado o gráfico de uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e o plano definido pela respetiva derivada.



**Figura 2.3** Procedimento para cálculo de derivadas parciais

Recorde-se que a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  é calculada fixando a variável  $y = b$ , o que significa calcular a derivada de uma função real de variável real. O mesmo acontece para a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , fixando a variável  $x = a$ .

Na Figura 2.3 encontra-se uma representação gráfica deste procedimento em  $\mathbb{R}^2$ .

No caso em que  $n = 1$ , a derivada é dada por uma matriz-coluna, que pode ser escrita na forma vetorial. Havendo apenas uma variável em jogo, ou seja,

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)),$$

com  $t \in \mathbb{R}$ , usa-se a seguinte notação para a respetiva derivada

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_m(t)).$$

\*\*\*

**Exemplo 2.1.1** A função  $f(x, y) = x$ , definida em  $\mathbb{R}^2$ , é diferenciável em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

Seja  $(a, b)$  um ponto qualquer de  $\mathbb{R}^2$ . Fixando  $y = b$  e derivando  $f$  como função apenas de  $x$ , obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 1.$$

Fixando  $x = a$  e derivando  $f$  como função apenas de  $y$ , deduz-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Portanto,

$$Df(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$Df(a, b)(h, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = h.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Df(a, b)(h, k)}{\|(h, k)\|} &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{a+h-a-h}{\|(h, k)\|} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, portanto,  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , de acordo com a definição 2.1.1.

A respetiva derivada é o gradiente  $\nabla f(x, y) = (1, 0)$ .

**Exemplo 2.1.2** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação linear e seja  $A$  a matriz (com  $m$  linhas e  $n$  colunas) que a representa na base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,  $f(x) = Ax$ .

É claro que, dados  $x$  e  $a$  em  $\mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) - f(a) = f(x - a) = A(x - a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) - A(x - a) = 0$$

e, portanto, a função  $f$  é diferenciável em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^n$ , e a respetiva derivada é dada pela matriz  $A$ , ou seja,  $Df(a) = A$ .

**Exemplo 2.1.3** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $f(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$ . É claro que se trata de uma aplicação linear, e, portanto, a respetiva derivada é dada pela matriz

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 2.1.4** O gradiente da função  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  no ponto  $(x, y)$  do respetivo domínio é o vetor

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right).$$

**Exemplo 2.1.5** A jacobiana da função  $f(x, y) = (\frac{x}{y}, \operatorname{sen}(xy), e^{x^2+y^2})$  é a matriz de três linhas e duas colunas:

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$$

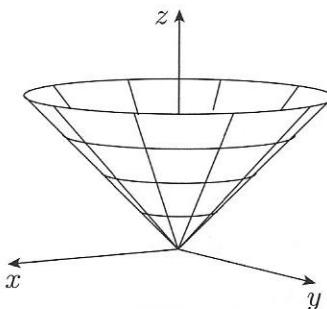
**Exemplo 2.1.6** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por  $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ . A respectiva derivada é dada pela matriz-coluna:

$$g'(t) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou, na forma vetorial,

$$g'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1).$$

**Exemplo 2.1.7** A função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , cujo gráfico se apresenta na Figura 2.4, não é diferenciável na origem.



**Figura 2.4** Gráfico da função  $f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

De facto, o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}$$

não existe, ou seja, a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  não existe. O mesmo acontece para a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

**Exemplo 2.1.8** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , fixando  $y$  e derivando em ordem a  $x$ , então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Fixando  $x$  e derivando em ordem a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Na origem deve ser usada a definição de derivada parcial. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

porque  $f(t, 0) = f(0, 0) = 0$ . Do mesmo modo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

porque  $f(0, t) = f(0, 0) = 0$ . Portanto, as derivadas parciais existem em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

No entanto, esta função não é diferenciável na origem. De facto, se tal sucedesse, então:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Mas, sendo  $f(0, 0) = 0$  e  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ , o limite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

não existe, como facilmente se verifica, fazendo  $k = h$ .

A função  $f$  não é contínua na origem e, portanto, não se pode esperar que seja diferenciável nesse ponto. No entanto, as derivadas parciais existem.

Este exemplo leva-nos a concluir que a existência de derivadas parciais não garante que a função seja diferenciável.

**Exemplo 2.1.9** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Tendo em conta que

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|,$$

é claro que esta função é contínua na origem.

Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , fixando  $y$  e derivando em ordem a  $x$ , então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Fixando  $x$  e derivando em ordem a  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Na origem usa-se a definição de derivada parcial. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

porque  $f(t, 0) = f(0, 0) = 0$ . Do mesmo modo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

porque  $f(0, t) = f(0, 0) = 0$ .

Portanto, as derivadas parciais existem em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

No entanto, esta função não é diferenciável na origem. De facto, se tal sucedesse, então:

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Mas, sendo  $f(0, 0) = 0$  e  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ ,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{hk}{h^2 + k^2} \neq 0,$$

como facilmente se verifica, fazendo  $k = h$ .

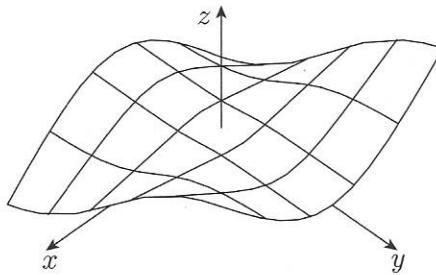
Portanto, esta função não é diferenciável na origem.

De facto, as derivadas parciais de  $f$  não são contínuas na origem. Basta fazer  $y = mx$  para verificar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  não existem.

**Exemplo 2.1.10** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

cujo gráfico se encontra na Figura 2.5.



**Figura 2.5** Gráfico da função  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Tal como no exemplo anterior, facilmente se verifica que se trata de uma função contínua em  $\mathbb{R}^2$ , e as respetivas derivadas parciais na origem existem e são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} = 0,$$

ou seja, trata-se de uma função diferenciável na origem.

Em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^3 y + 2x y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

e é fácil verificar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

ou seja, as derivadas parciais são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2 IDENTIFICAÇÃO DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

A identificação de funções diferenciáveis pode ser facilitada, recorrendo às respetivas propriedades. A ideia consiste em usar a definição para elaborar um catálogo de funções diferenciáveis e, a partir dessas e usando as propriedades, alargar esse catálogo.

Por definição, se uma função escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável em  $a \in \mathbb{R}^n$ , então:

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + o(x - a).$$

A função  $x \mapsto Df(a)(x - a)$  é contínua em  $a$ . De facto,

$$|Df(a)(x - a)| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) \right| \leq C \|x - a\|,$$

em que  $C = n \max_{j=1}^n \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| \right\}$ .

Por outro lado,

$$|o(x - a)| = \frac{|o(x - a)|}{\|x - a\|} \|x - a\|,$$

e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

ou seja,  $f$  é contínua em  $a$ .

Recorde-se que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua, se e só se cada uma das componentes escalares,  $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , for contínua.

Portanto, **se uma função for diferenciável num ponto será necessariamente contínua nesse ponto.**

Neste contexto, a propriedade mais importante é a que se refere à derivada da composição de funções.

Considere-se a seguinte composição de funções diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & f(g(x)) \\ a & \mapsto & b = g(a) & \mapsto & f(g(a)) = f(b) \end{array}$$

e sejam  $U \in \mathbb{R}^n$  e  $V \in \mathbb{R}^p$  conjuntos abertos, tais que  $g(U) \subset V$ .

Sejam  $a \in U$  e  $b = g(a) \in V$ . Sendo  $g$  diferenciável em  $a$ , então:

$$g(a + h) - g(a) = Dg(a)h + o_g(h).$$

Seja  $k \in \mathbb{R}^p$ , tal que  $g(a + h) = b + k$ . Sendo  $f$  diferenciável em  $b = g(a)$ ,

$$f(b + k) - f(b) = Df(b)k + o_f(k)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f(g(a + h)) - f(g(a)) &= Df(g(a))k + o_f(k) \\ &= Df(g(a))(g(a + h) - g(a)) + o_f(k) \\ &= Df(g(a))(Dg(a)h + o_g(h)) + o_f(k) \\ &= Df(g(a))Dg(a)h + Df(g(a))o_g(h) + o_f(k). \end{aligned}$$

Assim, a função  $f \circ g$  é diferenciável em  $a$ , e a respetiva derivada é

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a))Dg(a),$$

desde que se verifique

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Df(g(a))o_g(h) + o_f(k)}{\|h\|} = 0.$$

Dado que  $k = g(a + h) - g(a)$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{o_f(k)}{\|h\|} &= \frac{o_f(k)}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|} \\ &= \frac{o_f(k)}{\|k\|} \frac{\|g(a + h) - g(a)\|}{\|h\|} \\ &= \frac{o_f(k)}{\|k\|} \frac{\|Dg(a)h + o_g(h)\|}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Dado um vetor qualquer  $v \in \mathbb{R}^n$  e uma matriz  $A = (a_{ij})$  com  $m$  linhas e  $n$  colunas, tem-se

$$\|Av\| \leq C\|v\|,$$

com  $C = nm \max_{i,j=1}^{mn} \{|a_{ij}|\}$ , ou seja,

$$\frac{\|Av\|}{\|v\|} \leq C, \quad \forall v \neq 0.$$

À constante  $C$  chama-se norma da matriz  $A$ .

Assim, sendo  $C$  a norma da matriz  $Dg(a)$  e usando a desigualdade triangular,

$$\frac{\|o_f(k)\|}{\|h\|} \leq \frac{\|o_f(k)\|}{\|k\|} \left( C + \frac{\|o_g(h)\|}{\|h\|} \right)$$

e, portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o_f(k)\|}{\|h\|} = 0.$$

**Teorema 2.2.1 (Derivada da Função Composta)** Se  $g$  for diferenciável no ponto  $a$  e  $f$  diferenciável no ponto  $g(a)$ , então  $f \circ g$  é diferenciável no ponto  $a$ , e

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a))Dg(a).$$

A matriz que representa a derivada  $Dg(a)$  tem  $p$  linhas e  $n$  colunas e a que representa a derivada  $Df(g(a))$  tem  $m$  linhas e  $p$  colunas. Assim, a matriz que representa a derivada da função composta  $D(f \circ g)(a)$  tem  $m$  linhas e  $n$  colunas, por ser o produto  $Df(g(a))Dg(a)$ .

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , duas funções diferenciáveis em  $a \in D$ .

Considere-se a seguinte composição:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{s} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) & \mapsto & f(x) + g(x), \end{array} \tag{2.2}$$

em que  $h(x) = (f(x), g(x))$  e  $s(u, v) = u + v$ .

Pelo teorema da função composta,

$$D(s \circ h)(a) = D(s(h(a)))Dh(a),$$

em que

$$Ds(h(a)) = Ds(f(a), g(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial u}(f(a), g(a)) & \frac{\partial s}{\partial v}(f(a), g(a)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$Dh(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D(s \circ h)(a) &= D(s(h(a)))Dh(a) \\ &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial s}{\partial u}(f(a), g(a)) & \frac{\partial s}{\partial v}(f(a), g(a)) \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \right] \\ &= Df(a) + Dg(a). \end{aligned}$$

Notando que  $s(h(x)) = f(x) + g(x)$ , então **a soma de funções diferenciáveis é uma função diferenciável**, e a respetiva derivada é dada por

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a),$$

ou seja, a derivada da soma é a soma das derivadas.

Fazendo  $s(u, v) = uv$  na composição (2.2), facilmente se deduz que **o produto de funções diferenciáveis é uma função diferenciável**, e a respetiva derivada é dada por

$$D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a).$$

Do mesmo modo, fazendo  $s(u, v) = \frac{u}{v}$ , com  $v \neq 0$ , o **quociente de funções diferenciáveis é uma função diferenciável**, e

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2},$$

desde que  $g(a) \neq 0$ .

É também claro que, se  $f$  for uma função diferenciável e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\alpha f$  é diferenciável.

\*\*\*

**Exemplo 2.2.1** A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é diferenciável na origem, mas é diferenciável em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

De facto,  $f$  é o quociente  $f(x, y) = \frac{h(x, y)}{g(x, y)}$ , em que  $h(x, y) = xy$  e  $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

A função  $h$  é diferenciável, por ser o produto de funções diferenciáveis.

A função  $g$  é a composição  $r \circ s$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{s} & \mathbb{R} & \xrightarrow{r} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 & \mapsto & \sqrt{x^2 + y^2}, \end{array}$$

em que  $s(x, y) = x^2 + y^2$  e  $r(u) = \sqrt{u}$ , ( $u \neq 0$ ), são funções diferenciáveis.

**Exemplo 2.2.2** A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é contínua na origem e, portanto, não é diferenciável nesse ponto. Em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  é diferenciável, por ser o quociente de funções diferenciáveis.

**Exemplo 2.2.3** Sejam  $g, u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis, e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

Esta função é diferenciável, por ser a composição  $f = g \circ h$  de funções diferenciáveis

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (u(x, y), v(x, y)) & \mapsto & g(u(x, y)v(x, y)), \end{array}$$

em que  $h(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ . Assim,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= Dg(h(x, y))Dh(x, y) \\ &= \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, efetuando a multiplicação de matrizes, obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$

ou mais concisamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

\*\*\*

Desta forma concisa de apresentar as derivadas parciais de  $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$  retira-se uma mnemónica, chamada **regra da cadeia**, que evita escrever as matrizes envolvidas. A derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é a soma de duas parcelas resultantes das duas cadeias  $g, u, x$  e  $g, v, x$ . A derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é a soma de duas parcelas resultantes das duas cadeias  $g, u, y$  e  $g, v, y$ .

É muito importante ter presente em que pontos as diversas derivadas parciais são calculadas.

É claro que esta ideia pode ser generalizada a um número qualquer de variáveis. Por exemplo, se  $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ , então a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é a soma

de três parcelas resultantes das cadeias  $g, u, x$ ;  $g, v, x$  e  $g, w, x$ , ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

\*\*\*

**Exemplo 2.2.4** Seja  $f(x, y) = g(x - y, x + 2y)$ , em que  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e tal que  $\nabla g(0, 3) = (3, 2)$ .

Fazendo  $h(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , em que  $u(x, y) = x - y$  e  $v(x, y) = x + 2y$ , a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é a composição  $f = g \circ h$ , ou seja,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (u(x, y), v(x, y)) & \mapsto & g(u(x, y)v(x, y)) \\ (x, y) & \mapsto & (x - y, x + 2y) & \mapsto & g(x - y, x + 2y) \\ (1, 1) & \mapsto & (0, 3) & \mapsto & g(0, 3) \end{array}$$

Sendo  $f(1, 1) = g(0, 3)$  e recorrendo à regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{\partial g}{\partial u}(0, 3) \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + \frac{\partial g}{\partial v}(0, 3) \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \frac{\partial g}{\partial u}(0, 3) \frac{\partial u}{\partial y}(1, 1) + \frac{\partial g}{\partial v}(0, 3) \frac{\partial v}{\partial y}(1, 1), \end{aligned}$$

e, portanto,  $\nabla f(1, 1) = (5, 1)$ .

**Exemplo 2.2.5** Sejam  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis, tais que  $u(1, 0) = 2$  e  $v(1, 0) = \pi$  e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(u(x, y)v(x, y)).$$

Esta função é diferenciável, por ser a composição  $f = g \circ h$  de funções diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (u(x, y), v(x, y)) & \mapsto & \operatorname{sen}(u(x, y)v(x, y)), \end{array}$$

em que  $h(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  e  $g(u, v) = \operatorname{sen}(uv)$ .

Sendo  $h(1, 0) = (2, \pi)$ , a respetiva derivada no ponto  $(1, 0)$  é dada por

$$\nabla f(1, 0) = Dg(h(1, 0))Dh(1, 0) = Dg(2, \pi)Dh(1, 0).$$

Assim, recorrendo à regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = \frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0).$$

Sabendo que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = v \cos(uv) \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = u \cos(uv),$$

e, portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(2, \pi) = \pi$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(2, \pi) = 2,$$

então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \pi \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + 2 \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = \pi \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) + 2 \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0).$$

**Exemplo 2.2.6** Diz-se que uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é **homogénea** de grau  $k$  se, para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ . As funções homogéneas desempenham um papel importante em termodinâmica.

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , sejam  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  as funções definidas por

$$g(\lambda) = f(\lambda x); \quad h(\lambda) = \lambda x.$$

É claro que a função  $g$  é a função composta  $f \circ h$ , ou seja:  $g(\lambda) = f(h(\lambda))$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & h(\lambda) & \mapsto & f(h(\lambda)) \\ \lambda & \mapsto & \lambda x & \mapsto & f(\lambda x). \end{array}$$

Assim,  $g'(\lambda) = Df(h(\lambda))h'(\lambda) = \nabla f(\lambda x) \cdot x$ .

Por outro lado, tendo em conta que  $g(\lambda) = f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ ,

$$g'(\lambda) = k\lambda^{k-1}f(x)$$

e, portanto,  $\nabla f(\lambda x) \cdot x = k\lambda^{k-1}f(x)$ .

Dado que  $\lambda$  é arbitrário, fazendo  $\lambda = 1$ , obtém-se

$$\nabla f(x) \cdot x = kf(x),$$

ou, ainda,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) x_j = kf(x).$$

\*\*\*

As derivadas parciais da função estudada no Exemplo 2.1.8 existem na origem embora essa função não seja contínua nesse ponto.

A função estudada no Exemplo 2.1.9 é contínua na origem, mas as respetivas derivadas parciais não são, e a função não é diferenciável nesse ponto.

Por sua vez, a função estudada no exemplo 2.1.10 é diferenciável na origem, e as respetivas derivadas parciais são funções contínuas na origem.

Estes três exemplos levam-nos à questão seguinte: Será que a continuidade das derivadas parciais de uma função garante que essa função seja diferenciável?

Para ver que a resposta a esta questão é positiva, basta considerar o caso de uma função escalar  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com derivadas parciais contínuas numa bola centrada num ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Tendo em conta a definição de função diferenciável, obtém-se

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) - \nabla f(a, b)(h, k) = o((h, k)),$$

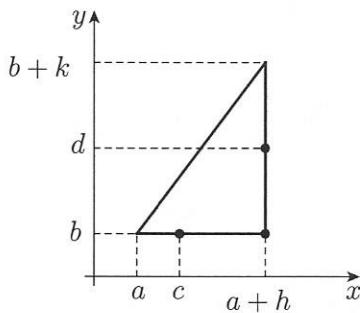
ou seja,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

A diferença  $f(a+h, b+k) - f(a, b)$  pode ser calculada (ver Figura 2.6) do seguinte modo:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] + [f(a+h, b) - f(a, b)].$$

A diferença  $f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$  é calculada ao longo do segmento de reta vertical em que  $x = a+h$ , e a variação  $f(a+h, b) - f(a, b)$  é calculada ao longo do segmento de reta horizontal, em que  $y = b$ . Portanto, em ambos os casos, uma das variáveis está fixa, ou seja, a função  $f$  dependerá apenas de uma das variáveis.



**Figura 2.6** Diagrama para estudo da derivada

Pelo teorema do valor intermédio para funções reais de variável real, existe  $d \in ]b, b+k[$ , tal que

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, d)k$$

e, do mesmo modo, existe  $c \in ]a, a+h[$  tal que

$$f(a+h, b) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, b)h.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(c, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] h + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] k. \end{aligned}$$

Como as derivadas parciais são contínuas e

$$\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1 ; \quad \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1,$$

então:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

**Definição 2.2.1 (Funções de classe  $C^1$ )** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Diz-se que uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  se em cada ponto  $x \in D$  as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  existirem e forem contínuas.

**Teorema 2.2.2 (Condição Suficiente de Diferenciabilidade)** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função de classe  $C^1$ . Então  $f$  é diferenciável.

\*\*\*

A função, estudada no Exemplo 2.1.9,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em  $\mathbb{R}^2$ , diferenciável em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mas não é diferenciável na origem.

Note-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

É fácil verificar que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

não são contínuas na origem.

\*\*\*

Por outro lado, a função, estudada no Exemplo 2.1.10,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tem derivadas parciais contínuas. Portanto, é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

### 2.3 DERIVADA DIRECIONAL. GRADIENTE

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar diferenciável e  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor, tal que  $\|v\| = 1$ . Seja  $a \in D$ . Sendo  $f$  diferenciável em  $a$ , tem-se

$$f(a + h) - f(a) = \nabla f(a)h + o(h).$$

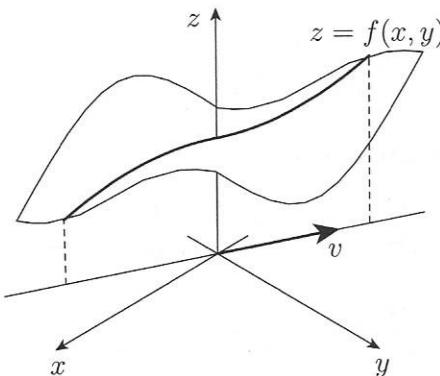
Fazendo  $h = tv$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , obtém-se  $f(a + tv) - f(a) = t\nabla f(a)v + o(tv)$ , ou seja,

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a)v + \frac{o(tv)}{t}.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \nabla f(a)v. \quad (2.3)$$

O vetor  $v$  determina a reta ou direção de pontos da forma  $a + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, o limite anterior é calculado, tomando apenas pontos sobre a direção determinada por  $v$ . Trata-se, portanto, do limite da taxa de variação de  $f$  na direção de  $v$ , como se ilustra na Figura 2.7.



**Figura 2.7** Estudo de uma função na direção do vetor  $v$

**Definição 2.3.1** *Ao limite*

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

em que  $\|v\| = 1$ , chama-se **derivada direcional** de  $f$  no ponto  $a$  segundo o vetor  $v$ .

Da equação (2.3), deduz-se que

$$D_v f(a) = \nabla f(a)v. \quad (2.4)$$

Portanto, para obter uma aproximação linear de  $f$  na direção determinada por  $v$ , basta conhecer o respetivo gradiente. Sendo

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= \nabla f(a)v = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n. \end{aligned}$$

então, na forma vetorial, a derivada direcional  $D_v f(a)$  é o produto interno dos vetores  $\nabla f(a)$  e  $v$ .

Assim, sendo  $\|v\| = 1$ , então:

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v = \|\nabla f(a)\| \|v\| \cos \alpha = \|\nabla f(a)\| \cos \alpha$$

em que  $\alpha$  é o ângulo determinado pelos vetores  $\nabla f(a)$  e  $v$ .

A derivada direcional  $D_v f(a)$  é a maior possível no caso em que  $\cos \alpha = 0$ , ou seja, quando os vetores  $\nabla f(a)$  e  $v$  são paralelos ou co-lineares.

Portanto, **o vetor gradiente  $\nabla f(a)$  determina a direção segundo a qual a derivada direcional de  $f$  em  $a$  é a maior possível**.

Da equação (2.3) conclui-se que a derivada direcional  $D_v f(a)$  é nula na direção definida por um vetor  $v$  ortogonal ao gradiente  $\nabla f(a)$ .

\*\*\*

**Exemplo 2.3.1** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = x^2 + xy$ .

Então,

$$\nabla f(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + y, x)$$

e

$$\nabla f(1, 1) = (3, 1).$$

Portanto, no ponto  $(1, 1)$ , o vetor  $(3, 1)$  determina a direção e o sentido de crescimento máximo da função  $f$ .

- Para  $v = (1, 2)$ , tem-se  $\|(1, 2)\| = \sqrt{5}$ , e a derivada direcional de  $f$  em  $(1, 1)$  na direção determinada por  $v$ , de acordo com a definição, é dada por

$$D_v f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \frac{v}{\|v\|} = (3, 1) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

- A direção segundo a qual a derivada de  $f$  em  $(1, 1)$  é nula é determinada por um vetor  $v = (v_1, v_2)$  ortogonal a  $\nabla f(1, 1)$ , ou seja,

$$Df_v(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow (3, 1) \cdot (v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow v_2 = -3v_1.$$

Fazendo, por exemplo,  $v_1 = 1$  obtém-se  $v = (1, -3)$ .

## 2.4 LINHA. VETOR TANGENTE

**Exemplo 2.4.1** A reta dada pela equação  $x + y = 1$  em  $\mathbb{R}^2$  e representada na Figura 2.8 pode ser descrita de outro modo.

Da equivalência

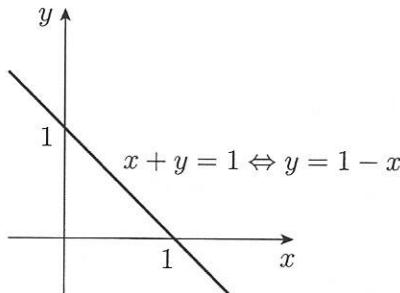
$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

conclui-se que esta reta é o conjunto

$$\{(x, 1 - x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função contínua definida por  $g(x) = (x, 1 - x)$ .

É claro que a reta é a imagem da função  $g$ .

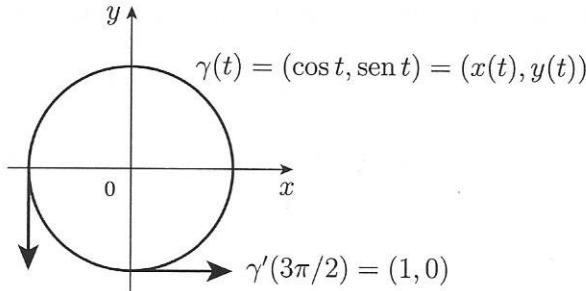


**Figura 2.8** Reta dada por:  $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$

**Exemplo 2.4.2** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Sendo  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  e fazendo  $(\cos t, \sin t) = (x(t), y(t))$ , fica claro que a imagem da função  $\gamma$  é a circunferência de raio 1 e centro na origem de  $\mathbb{R}^2$ , que se encontra representada na Figura 2.9.



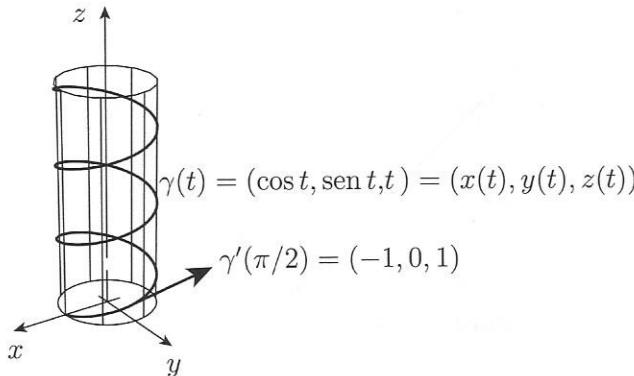
**Figura 2.9** Uma circunferência em  $\mathbb{R}^2$

**Exemplo 2.4.3** Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Sendo  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  e fazendo  $(\cos t, \sin t, t) = (x(t), y(t), z(t))$ , fica claro que a imagem da função  $\gamma$  é uma linha assente sobre a superfície cilíndrica vertical de raio 1 e que se encontra representada na Figura 2.10.

\*\*\*



**Figura 2.10** Uma hélice cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$

Dos exemplos anteriores fica claro que funções contínuas de uma variável real, da forma  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , descrevem linhas em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.4.1 (Linha)** Diz-se que um conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  é uma **linha**, se for a imagem de uma função contínua  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em que  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo. À função  $\gamma$  chama-se **caminho** ou **trajetória**.

No caso em que  $\gamma$  é uma função de classe  $C^1$ , a respetiva derivada é dada por

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

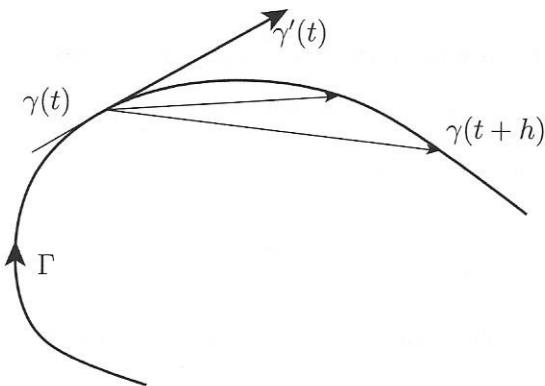
Observando a Figura 2.11, conclui-se que os vetores secantes  $\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$  transformam-se, à medida que  $h \rightarrow 0$ , no vetor  $\gamma'(t)$ , que é tangente à linha no ponto  $\gamma(t)$ .

Esta ideia leva-nos à definição de vetor tangente a uma linha num dado ponto.

**Definição 2.4.2 (Vetor Tangente)** Seja  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , e  $\Gamma$  a linha descrita por  $\gamma$ . Ao vetor

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

chama-se vetor tangente à linha no ponto  $\gamma(t)$ .



**Figura 2.11** Tangente a uma linha

No Exemplo 2.4.2 tem-se

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

e, portanto,

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Na Figura 2.9 estão representados os vetores  $\gamma'(\pi) = (0, -1)$  e  $\gamma'(3/2\pi) = (1, 0)$  que são tangentes à circunferência nos pontos  $\gamma(\pi) = (-1, 0)$  e  $\gamma(3/2\pi) = (0, -1)$ , respectivamente.

No Exemplo 2.4.3,

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

e, portanto,

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Na Figura 2.10 está representado o vetor  $\gamma'(\pi/2) = (-1, 0, 1)$ , que é tangente à hélice cilíndrica no ponto  $\gamma(\pi/2) = (0, 1, \pi/2)$ .

\*\*\*

Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  uma linha descrita por uma função  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Seja  $p \in \Gamma$  e  $t_0 \in I$ , tal que  $p = \gamma(t_0)$ .

Seja  $T = \gamma'(t_0)$  o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $p$ .

**Definição 2.4.3** Chama-se **reta tangente** a  $\Gamma$  no ponto  $p$  ao conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x - p = \lambda T ; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

\*\*\*

**Exemplo 2.4.4** Para a hélice cilíndrica do Exemplo 2.4.3, a reta tangente no ponto  $(0, 1, \pi/2)$  é dada por

$$(x, y, z) - (0, 1, \pi/2) = \lambda (-1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$x = -\lambda; y - 1 = 0; z - \frac{\pi}{2} = \lambda$$

e, portanto, é a reta definida pelas duas equações

$$y = 1; x + z = \frac{\pi}{2}.$$

## 2.5 CONJUNTO DE NÍVEL. VETOR NORMAL

Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar de classe  $C^1$ . Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , considere-se o respetivo **conjunto de nível**:

$$N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \alpha\}.$$

Seja  $p \in N(\alpha)$  um ponto qualquer e  $\Gamma \subset N(\alpha)$  uma linha, tal que  $p \in \Gamma$ .

Supondo que  $\Gamma$  é descrita por uma função  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ , com  $\varepsilon > 0$ , sem perda de generalidade, tome-se  $p = \gamma(0)$ .

Como  $\Gamma \subset N(\alpha)$ , é claro que  $\gamma(t) \in N(\alpha)$  e, portanto,

$$F(\gamma(t)) = 0; -\varepsilon < t < \varepsilon$$

Pelo teorema da derivada da função composta:

$$\nabla F(\gamma(0))\gamma'(0) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla F(p)\gamma'(0) = 0.$$

Assim, os vetores  $\gamma'(0)$  e  $\nabla F(p)$  são ortogonais entre si. Note-se que  $\nabla F(p)$  é uma matriz linha e  $\gamma'(0)$  é uma matriz coluna. O produto de uma matriz linha por uma matriz coluna é o produto interno das respetivas versões vetoriais.

Dado que o vetor  $\gamma'(0)$  é, por definição, tangente a  $\Gamma$  no ponto  $p$ , diz-se que o vetor  $T = \gamma'(0)$  é tangente a  $N(\alpha)$  no ponto  $p$ .

Seja  $N$  um vetor ortogonal a  $T$ , ou seja, um vetor que verifica a equação  $N \cdot T = 0$ .

Ao vetor  $N$  chama-se **vetor normal** a  $N(\alpha)$  no ponto  $p$ .

É claro que o vetor normal  $N$  é perpendicular a qualquer vetor tangente ao conjunto de nível  $N(\alpha)$  no ponto  $p$ .

Assim, o vetor gradiente,  $\nabla F(p)$ , é um vetor normal ao conjunto de nível  $N(\alpha)$  de  $F$ .

Portanto, **o gradiente de uma função escalar num ponto é normal ao respetivo conjunto de nível dessa função.**

\*\*\*

**Exemplo 2.5.1** Considerem-se as funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; \quad g(x, y) = x^2 - y^2 .$$

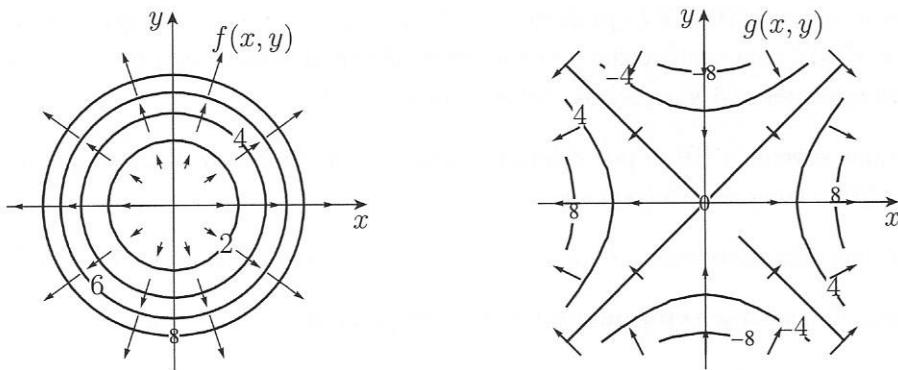
Os conjuntos de nível da função  $f$  são os conjuntos

$$N(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \alpha\},$$

ou seja, são circunferências centradas na origem, e, em cada ponto,  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ .

Na Figura 2.12 estão representados os conjuntos de nível  $N(\alpha)$ , em que  $\alpha = 2, 4, 6, 8$  e o campo vetorial,  $\nabla f$ , ilustrando o facto de que o gradiente num ponto é perpendicular ao conjunto de nível que contém esse ponto.

As circunferências  $N(6)$  e  $N(8)$  estão mais próximas uma da outra do que as circunferências  $N(2)$  e  $N(4)$ . Por outro lado, sendo  $\|\nabla f(x, y)\| = \|(2x, 2y)\| = 2\|(x, y)\|$ , a norma do campo vetorial  $\nabla f$  aumenta, à medida que o raio das circunferências aumenta ilustrando o facto de que o campo vetorial  $\nabla f$ , em cada ponto, determina a direção e o sentido da maior variação da função  $f$ .



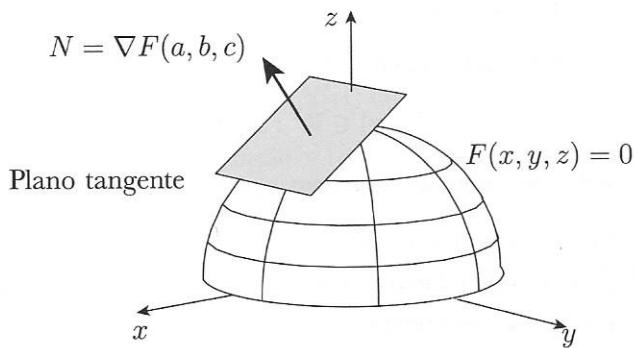
**Figura 2.12** Relação entre conjuntos de nível e o campo gradiente

Os conjuntos de nível da função  $g$  são as hipérboles

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = \alpha\},$$

e o respetivo gradiente é o campo  $\nabla g(x, y) = (2x, -2y)$  e estão representados na Figura 2.12, ilustrando também as propriedades do gradiente.

**Exemplo 2.5.2** Seja  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2\}$  o parabolóide que se encontra representado na Figura 2.13.



**Figura 2.13** Normal e plano tangente

Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função escalar definida por

$$F(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 1.$$

Então o parabolóide  $P$  é o conjunto de nível zero de  $F$ , e em cada ponto  $(a, b, c)$  a respetiva normal é dada pelo gradiente de  $F$  nesse ponto,  $\nabla F(a, b, c)$ , tal como se representa na Figura 2.13.

O vetor normal  $N = \nabla F(a, b, c)$  determina a **reta normal** a  $P$  que passa pelo ponto  $(a, b, c)$  e é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (a, b, c) + \lambda \nabla F(a, b, c); \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Por definição de vetor normal, os vetores ortogonais a  $N$  são tangentes a  $P$  no ponto  $(a, b, c)$  e constituem um espaço linear de dimensão 2.

O plano gerado pelos vetores tangentes e que passa pelo ponto  $(a, b, c)$  chama-se **plano tangente** a  $P$  no ponto  $(a, b, c)$  e é dado pela equação

$$(x - a, y - b, z - c) \cdot \nabla F(a, b, c) = 0.$$

Como  $\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$ , então:

$$N = \nabla F(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

e, portanto, a reta normal no ponto  $(0, 0, 1)$  é dada por

$$(x, y, z) - (0, 0, 1) = \lambda N,$$

ou seja,

$$(x, y, z - 1) = \lambda(0, 0, 1) \Leftrightarrow x = 0; y = 0; z \in \mathbb{R},$$

que é o eixo  $Oz$ .

O plano tangente é dado por

$$(x, y, z - 1) \cdot N = 0 \Leftrightarrow (x, y, z - 1) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1,$$

ou seja, é o plano horizontal definido por  $z = 1$ .

\*\*\*

O parabolóide  $P$  é o **gráfico** da função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$

Sendo  $f$  diferenciável, então:

$$f(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b) + o(x - a, y - b).$$

Fazendo  $z = f(x, y)$  e  $c = f(a, b)$ , tem-se

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + o(x - a, y - b).$$

O plano definido pela equação

$$z = c + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, c) = (a, b, f(a, b))$ .

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -2a; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -2b,$$

esse plano é dado pela equação

$$z = c - 2a(x - a) - 2b(y - b).$$

No caso do ponto  $(0, 0, 1)$ , o plano tangente é dado pela equação  $z = 1$ , tal como se obteve acima.

\*\*\*

Note-se que fazendo  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ , obtém-se

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y),$$

ou seja, o **gráfico de  $f$**  é o **conjunto de nível zero de  $F$** .

a) Como conjunto de nível de  $F$ , o vetor normal é

$$N = \nabla F(a, b, c) = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1 \right)$$

e, portanto, o plano tangente no ponto  $(a, b, c)$  é dado pela equação

$$(z - c) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0.$$

- b) Visto como gráfico de  $f$ , pela definição de derivada, o respetivo plano tangente é dado pela equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Se  $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ , então o plano tangente ao gráfico da função  $f$  é dado pela equação  $z = c$ , com  $c = f(a, b)$ . Portanto, no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , o plano tangente é horizontal.

## 2.6 EXERCÍCIOS

 Mostre que a função  $f(x, y) = xe^{-\sqrt{x^2+y^2}}$  é diferenciável na origem de  $\mathbb{R}^2$  e calcule  $\nabla f(0, 0)$ .

 Determine o conjunto de pontos em que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável.

 Determine o conjunto de pontos em que a função  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  é diferenciável.

4. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, tal que  $|f(x)| \leq \|x\|^2$ . Mostre que  $f$  é diferenciável na origem.

5. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Mostre que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .
- b) Determine um vetor  $v \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $D_v f(1, 0) = 0$ .
6. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável num ponto  $(a, b)$  verificando a igualdade  $D_v f(a, b) = D_w f(a, b) = 1$ , em que  $v = (1, 1)$  e  $w = (1, -2)$ . Calcule  $\nabla f(a, b)$ .
7. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $f(1, 1) = 1$  e  $\nabla f(1, 1) = (2, 3)$ . Calcule  $\nabla g(1, 1)$ , em que  $g(x, y) = f(f(x, y), xy)$ .

8. Considere a função  $\sigma(x) = f(x, x^2 + 1)$ , em que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é de classe  $C^1$  e tal que

$$Df(0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada  $\sigma'(0)$ .

9. Escreva uma equação para o plano tangente ao gráfico da função definida por

$$f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$$

no ponto  $(1, 0, 2)$ .

10. Considere a linha  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  definida pelo caminho  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ , com  $t > 0$ . Escreva uma equação para a reta tangente a  $\Gamma$  no ponto  $(2\pi, 0)$ .

11. Prove que uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cujas derivadas parciais existem, sendo uma delas contínua, é diferenciável.

# 3

---

EXTREMOS

### 3.1 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , e

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

as respetivas derivadas parciais.

Estas derivadas são também funções escalares definidas em  $D$ . Se forem funções diferenciáveis então as respetivas derivadas parciais são as funções

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Estas funções são as derivadas parciais de ordem dois (ou de segunda ordem) de  $f$ . Por convenção, são designadas por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad \text{se } j \neq k,$$

e por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad \text{se } j = k.$$

Se as derivadas de ordem dois forem funções diferenciáveis, as respetivas derivadas parciais são as funções

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Estas funções são as derivadas parciais de ordem três de  $f$ , que passam a ser designadas por

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.$$

**Exemplo 3.1.1** Seja  $f(x, y) = xy^2 + yx^3$ . Então, as derivadas parciais de ordem um serão as funções

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 3yx^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + x^3.$$

As derivadas parciais de ordem dois serão as funções

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 6xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = 2x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y) = 2y + 3x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = 2y + 3x^2\end{aligned}$$

e algumas de ordem três serão

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)(x, y) = 6y \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)(x, y) = 6x \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 2 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = 6x.\end{aligned}$$

Diz-se que uma função  $f$  é de classe  $C^k$ , se as derivadas parciais de ordem menor ou igual a  $k$  existirem e forem funções contínuas.

Diz-se que  $f$  é de classe  $C^\infty$ , se for de classe  $C^k$ , para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ .

Note-se que as derivadas parciais de ordem dois, no exemplo anterior,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , são iguais. Este facto acontece para qualquer função de classe  $C^2$ .

**Teorema 3.1.1 (Schwarz)** Se  $D \subset \mathbb{R}^n$  for um conjunto aberto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Sem perda de generalidade, basta considerar o caso em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $(a, b) \in D$  e  $B_r(a, b)$  uma bola centrada em  $(a, b)$ , de raio  $r$  e contida em  $D$ .

Tendo em conta a definição, é fácil concluir que o cálculo das derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

depende da expressão

$$\Delta = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) - f(a + h, b) + f(a, b).$$

Definindo  $\phi(t) = f(a + th, b + k) - f(a + th, b)$ , é claro que  $\Delta = \phi(1) - \phi(0)$ . Usando o teorema do valor intermédio para funções reais de variável real, deverá existir  $t_1 \in ]0, 1[$ , tal que

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(t_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + t_1 h, b + k)h - \frac{\partial f}{\partial x}(a + t_1 h, b)h.$$

Usando de novo o teorema do valor intermédio para funções reais de variável real, obtém-se

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + t_1 h, b + t_2 k)hk,$$

sendo  $t_2 \in ]0, 1[$ . Do mesmo modo, definindo  $\psi(t) = f(a + h, b + tk) - f(a, b + tk)$ , ter-se-á

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + t_3 h, b + t_4 k)hk,$$

em que  $t_3, t_4 \in ]0, 1[$ . Tem-se, portanto, para  $\|(h, k)\| < r$  e  $h \neq 0, k \neq 0$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + t_1 h, b + t_2 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + t_3 h, b + t_4 k).$$

Note-se que, quando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , os pontos  $(a + t_1 h, b + t_2 k)$  e  $(a + t_3 h, b + t_4 k)$  tendem ambos para  $(a, b)$ . Dado que  $f$  é de classe  $C^2$  em  $D$ , obtém-se imediatamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b).$$

### 3.2 EXTREMOS DE FUNÇÕES ESCALARES

Uma maneira muito conveniente de analisar o comportamento de uma função escalar em torno de um ponto é a de restringir a uma linha reta que passe por esse ponto. Foi deste modo que se introduziu a noção de derivada direcional segundo um vetor.

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ .

Considere-se a reta que passa pelo ponto  $a$  e tem a direção do vetor  $h$ , isto é, a linha descrita pela função  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\gamma(t) = a + th.$$

Note-se que  $\gamma(0) = a$  e  $\gamma(1) = a + h$ .

Seja  $x = \gamma(t)$  um ponto tal que o segmento de reta entre  $a$  e  $x$  esteja contido em  $D$ . Este segmento de reta existe porque o conjunto  $D$  é aberto e, portanto, existe uma bola centrada no ponto  $a$  e contida em  $D$  que certamente contém um tal segmento, desde que  $t$  seja suficientemente pequeno.

Sobre a reta tem-se  $f(x) = f(\gamma(t))$  e, portanto, a função  $f$  restringida à reta que passa pelo ponto  $a$  com a direção do vetor  $h$  é dada pela função composta

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \gamma(t) & \mapsto & f(\gamma(t)) \end{array}$$

que é uma função real de variável real,  $g(t) = f(\gamma(t))$ .

É claro que  $\gamma$  é de classe  $C^1$  e  $\gamma'(t) = h$ . Portanto,

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot h.$$

Para  $t = 0$ , tem-se

$$g'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0),$$

ou seja,

$$g'(0) = \nabla f(a) \cdot h. \quad (3.1)$$

Sendo  $g$  de classe  $C^1$ , pelo teorema de Lagrange para funções reais de variável real, existirá  $t_0 \in ]0, 1[$ , tal que

$$g(1) - g(0) = g'(t_0),$$

ou seja,

$$f(a + h) - f(a) = \nabla f(c) \cdot h,$$

em que  $c = \gamma(t_0)$  é um ponto no segmento de reta entre  $a$  e  $a + h$ .

**Teorema 3.2.1 (Lagrange)** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto, e  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Sejam  $a$  e  $b$  dois pontos em  $D$ , tais que o segmento de reta entre eles esteja contido em  $D$ . Então existe um ponto  $c$  nesse segmento de reta, tal que

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a),$$

com  $c$  distinto de  $a$  e de  $b$ .

\*\*\*

Se  $\nabla f(x) = 0$  na bola  $x \in B_\varepsilon(a)$ , então, pelo teorema de Lagrange,  $f(a + h) = f(a)$ , para qualquer vetor  $h$ , tal que  $a + h \in B_\varepsilon(a)$ , ou seja, a função  $f$  é constante.

Portanto, **uma função de classe  $C^1$  e com gradiente nulo numa bola é constante nessa bola.**

\*\*\*

Seja  $a \in D$  um ponto de **extremo** da função  $f$ . Para um vetor qualquer  $h \in \mathbb{R}^n$ , considere-se a restrição de  $f$  à linha reta que passa no ponto  $a$  na direção  $h$ , isto é, a função  $g(t) = f(\gamma(t))$ , com  $\gamma(t) = a + th$ .

Sendo  $a = \gamma(0)$  um ponto de extremo de  $f$ , a função  $g$  tem um extremo em  $t = 0$ , ou seja,  $g'(0) = 0$ .

Dado que  $g'(0) = \nabla f(a) \cdot h = 0$ , para qualquer vetor  $h \in \mathbb{R}^n$ , então

$$\nabla f(a) = 0.$$

Assim, para que uma função escalar de classe  $C^1$  possua um extremo num ponto interior do seu domínio, é necessário que o respetivo gradiente se anule nesse ponto.

**Definição 3.2.1** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto. Diz-se que  $a \in D$  é um **ponto crítico** ou **ponto de estacionaridade** da função  $f$  se  $\nabla f(a) = 0$ .

Portanto, os pontos de extremo de uma função escalar, de classe  $C^1$  e definida num subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  encontram-se no conjunto dos pontos críticos.

É então necessário definir um critério para identificar, no conjunto dos pontos críticos, os que são pontos de máximo e os que são pontos de mínimo.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , e  $a \in D$  um ponto crítico de  $f$ . Considere-se de novo a restrição de  $f$  à reta que passa pelo ponto  $a$  na direção  $h$ .

Sendo  $a$  um ponto crítico, é claro que  $g'(0) = \nabla f(a) \cdot h = 0$ . Pela fórmula de Taylor para funções reais de variável real:

$$g(t) - g(0) = g'(0)t + \frac{1}{2!}g''(0)t^2 + o(t^2) = \frac{1}{2!}g''(0)t^2 + o(t^2),$$

ou seja,

$$\frac{g(t) - g(0)}{t^2} = \frac{1}{2!}g''(0) + \frac{o(t^2)}{t^2}. \quad (3.2)$$

Sabendo que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0$ , então, para  $t$  suficientemente próximo de zero, a diferença  $g(t) - g(0)$  tem o mesmo sinal da derivada  $g''(0)$ . Note-se que

$$g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot h = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t))h_k$$

e, portanto,

$$g''(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\gamma(t))h_j h_k,$$

ou seja,

$$g''(0) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)h_j h_k.$$

A matriz com  $n$  linhas e  $n$  colunas cujas entradas são as derivadas parciais de ordem dois, designada pelo símbolo  $D^2 f(a)$ , ou seja,

$$D^2 f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

chama-se **matriz hessiana** de  $f$  no ponto  $a$ . Assim, a derivada  $g''(0)$  poderá ser apresentada na forma matricial

$$g''(0) = h^T D^2 f(a) h$$

ou na forma vetorial

$$g''(0) = h \cdot D^2 f(a) h.$$

Portanto, da fórmula de Taylor (3.2), obtém-se

$$\frac{f(a + th) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{2!} h \cdot D^2 f(a) h + \frac{o(t^2)}{t^2}.$$

Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  um valor próprio da matriz hessiana  $D^2 f(a)$  e  $h \neq 0$  um vetor próprio associado a  $\lambda$ , ou seja,

$$D^2 f(a) h = \lambda h.$$

Então,

$$g''(0) = h \cdot D^2 f(a) h = \lambda h \cdot h = \lambda \|h\|^2$$

e, portanto,  $g''(0)$  tem o sinal do valor próprio  $\lambda$ .

Assim, se  $a$  for um ponto crítico de  $f$ , então:

$$\frac{f(a + th) - f(a)}{t^2} = \frac{1}{2!} \lambda \|h\|^2 + \frac{o(t^2)}{t^2},$$

na direção do vetor próprio  $h$  associado ao valor próprio  $\lambda$  da matriz hessiana  $D^2 f(a)$ .

Pelo teorema de Schwarz, a matriz hessiana é simétrica e, por isso, é diagonalizável, os respectivos valores próprios são números reais e os correspondentes vetores próprios constituem uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^n$ .

Assim, para classificar os pontos críticos deve ser analisado o comportamento da função nas linhas retas determinadas pelos vetores próprios através dos sinais dos correspondentes valores próprios da matriz hessiana  $D^2 f(a)$ .

A uma linha reta determinada por um vetor próprio chama-se direção própria ou direção singular.

### Classificação dos Pontos de Estacionaridade:

- a) Os valores próprios de  $D^2 f(a)$  são todos positivos:  $a$  é um ponto de mínimo de  $f$ .

- b) Os valores próprios de  $D^2f(a)$  são todos negativos:  $a$  é um ponto de máximo de  $f$ .
- c) A matriz hessiana  $D^2f(a)$  tem pelo menos um valor próprio positivo e pelo menos um negativo:  $a$  não é um extremo de  $f$  (por vezes chamado ponto de sela).
- d) A matriz hessiana  $D^2f(a)$  tem pelo menos um valor próprio nulo, e os restantes têm o mesmo sinal. Neste caso, a função  $f$  deve ser analisada nas direções próprias associadas aos valores próprios nulos, recorrendo, por exemplo, às derivadas de ordem superior a dois ou outras técnicas.

No último caso, esta análise pode não ser conclusiva. O **estudo direto** do comportamento da função numa vizinhança de  $a$  poderá esclarecer o problema.

\*\*\*

**Exemplo 3.2.1** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . É claro que a função  $f$  é de classe  $C^2$ .

- a) Pontos Críticos:  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

A origem é o único ponto crítico.

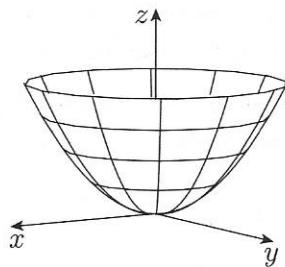
- b) Classificação do Ponto Crítico  $(0, 0)$ .

A matriz hessiana

$$D^2f(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

apresenta dois valores próprios positivos  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$  e, portanto, o ponto crítico  $(0, 0)$  é um ponto de mínimo local de  $f$ , pois pelo teste de segunda ordem não se pode concluir mais nada.

No entanto, por análise elementar, a origem é um ponto de mínimo absoluto da função  $f$ . Na Figura 3.1 encontra-se representado o gráfico desta função.



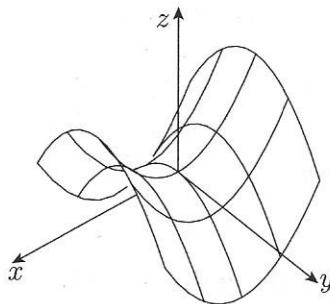
**Figura 3.1** Exemplo de ponto de mínimo:  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**Exemplo 3.2.2** Seja  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . É claro que  $f$  é, pelo menos, de classe  $C^2$ .

a) Pontos Críticos:  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

A origem é o único ponto crítico.



**Figura 3.2** Exemplo de ponto de sela:  $f(x, y) = x^2 - y^2$

b) Classificação do Ponto Crítico  $(0, 0)$ .

A matriz hessiana

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

apresenta um valor próprio positivo  $\lambda_1 = 2$  e um valor próprio negativo  $\lambda_2 = -2$  e, portanto, o ponto crítico  $(0, 0)$  não é um extremo de  $f$ .

Neste caso diz-se que é um ponto de sela. Na Figura 3.2 encontra-se o gráfico de  $f$  que ilustra e justifica a designação de ponto de sela.

Note-se que na direção em que  $y = 0$  a função apresenta um mínimo e na direção  $x = 0$  a função apresenta um máximo na origem.

**Exemplo 3.2.3** Seja  $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$ .

a) Pontos Críticos:  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = (2(x-y)-4x^3, -2(x-y)-4y^3) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2x^3 = 0 \\ - (x - y) - 2y^3 = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x - y - 2x^3 = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2x^3 = 0 \\ y = -x, \end{cases}$$

onde se conclui que os pontos críticos são  $(0, 0)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$ .

Para os classificar recorre-se à matriz hessiana

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 - 12y^2 \end{bmatrix}$$

b) Classificação dos Pontos Críticos  $(-1, 1)$  e  $(1, -1)$ .

As matrizes hessianas nestes dois pontos são iguais:

$$D^2 f(-1, 1) = D^2 f(1, -1) = \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix},$$

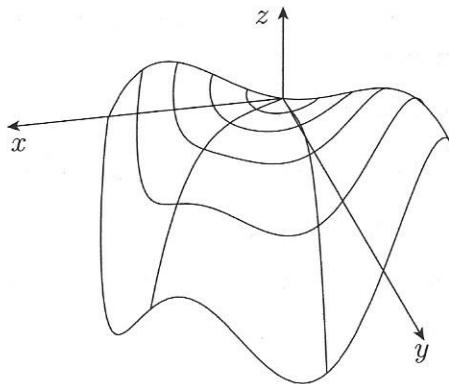
e apresentam dois valores próprios negativos,  $\lambda_1 = -8$  e  $\lambda_2 = -12$ . Portanto, estes dois pontos são pontos de máximo de  $f$ .

c) Classificação do Ponto Crítico  $(0, 0)$ .

A matriz hessiana

$$D^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio nulo,  $\lambda_1 = 0$ , e outro, positivo  $\lambda_2 = 4$ .



**Figura 3.3** Gráfico da função:  $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$

Portanto, na direção definida pelo vetor próprio associado a  $\lambda_2 = 4$ , a função  $f$  tem um mínimo na origem. Isto quer dizer que, se a origem for um extremo de  $f$ , deverá ser um ponto de mínimo. Como  $f(x, x) = -2x^4 \leq 0$ , a função  $f$  tem um ponto de máximo na origem na direção definida por  $y = x$ . Fica, assim, claro que a origem não é um extremo de  $f$ . Na Figura 3.3 encontra-se o gráfico de  $f$ , onde se pode verificar a natureza dos pontos críticos.

**Exemplo 3.2.4** Seja  $f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$ .

a) Pontos Críticos:  $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = (-8xy + 12x^3, 2y - 4x^2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x(-2y + 3x^2) = 0 \\ y - 2x^2 = 0, \end{cases}$$

onde se conclui que o único ponto crítico é a origem.

b) Classificação do Ponto Crítico  $(0, 0)$ . A matriz hessiana

$$\begin{aligned} D^2f(0, 0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8y + 36x^2 & -8x \\ -8x & 2 \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tem um valor próprio nulo,  $\lambda_1 = 0$ , e outro, positivo  $\lambda_2 = 2$ . Portanto, se a origem for extremo, será um mínimo.

A função  $f$  pode ser dada na forma:

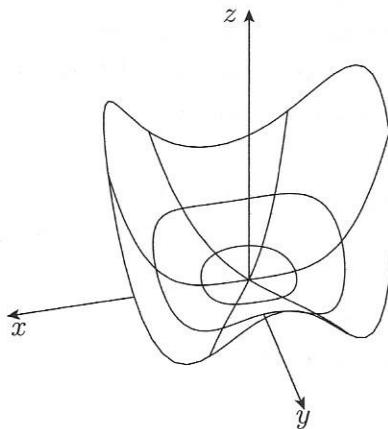
$$f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4 = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

Assim, é claro que em torno da origem se tem:

- i)  $f(x, y) > 0$  para  $y > 3x^2$  ou para  $y < x^2$ .
- ii)  $f(x, y) < 0$  para  $x^2 < y < 3x^2$ .

Portanto, em torno da origem, a função  $f$  toma valores tanto positivos como negativos, ou seja, a origem não é um extremo de  $f$ .

Na Figura 3.4 encontra-se o gráfico de  $f$ , onde se pode verificar a natureza da origem como ponto crítico.



**Figura 3.4** Gráfico da função:  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$

\*\*\*

Os critérios de identificação e classificação dos pontos críticos de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  foram estabelecidos, tendo em conta que o conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é aberto. Por outro lado, o teorema de Weierstrass garante a existência de máximos e mínimos, mas não fornece um critério para os identificar.

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Se  $D$  for um conjunto compacto, os extremos de  $f$  em  $D$  ou estão no interior e são pontos críticos ou estão na fronteira. O critério de identificação dos extremos na fronteira será estudado quando for introduzido o conceito de extremo condicionado.

### 3.3 EXERCÍCIOS

1. Seja  $f(x, y) = h(x - y)$ , em que  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ . Mostre que  $f$  verifica a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

2. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função de classe  $C^1$ , e  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Mostre que se tem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$$

3. Seja  $\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$  o chamado laplaciano de uma função escalar  $f$ , com domínio em  $\mathbb{R}^n$ . Calcule o laplaciano de cada uma das seguintes funções:

- b)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- b)  $f(x) = \|x\|^{-n+2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .
- 4. Determine e classifique os pontos de estacionaridade das funções seguintes:
  - a)  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2xy + 5x + y$ .
  - b)  $g(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ .
  - c)  $h(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz$ .
- 5. Considere a função  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = 3y^2 - 3xy + x^3$ . Determine os pontos de mínimo local e os de máximo local de  $g$ .
- 6. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  cujo único ponto crítico não é ponto de extremo local. Mostre que nenhuma linha de nível de  $f$ , isto é, um conjunto da forma  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , pode ser fronteira de uma região limitada.
- 7. Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , tal que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$ . Supondo que  $u = 0$  na fronteira do disco  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ , mostre que  $u \geq 0$  em  $D$ .

8. Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto.  
Mostre que existe uma constante  $K > 0$ , tal que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

# 4

FUNÇÃO INVERSA. FUNÇÃO IMPLÍCITA

Para uma função escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada **explicitamente**, é possível dar resposta a questões sobre continuidade, diferenciabilidade, existência de extremos, etc.

É claro que o respetivo gráfico, ou seja, o conjunto

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

pode ser descrito na forma

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : F(x, y) = 0\},$$

em que  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por  $F(x, y) = y - f(x)$ . Assim, o gráfico de  $f$  passa a ser descrito por uma equação, isto é, um gráfico é um conjunto de nível.

Por outro lado, dado um conjunto definido por uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$ , em que  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , será possível descrevê-lo como o gráfico de alguma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, será possível estabelecer a equivalência,

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)?$$

Claro que isso pode ser feito resolvendo algebraicamente a equação, de modo a explicitar  $y = f(x)$ . Mas isso nem sempre é possível.

Nesses casos, se for garantido, de algum modo, que a função  $f$  existe, diz-se que ela é definida **implicitamente** pela equação  $F(x, y) = 0$ .

Assim, surge a questão de saber se há condições que garantam a existência, a continuidade e a diferenciabilidade de tal função a partir da equação dada.

Seja  $G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  a função definida por  $G(x, y) = (x, F(x, y))$ . Então, é claro que

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow G(x, y) = (x, 0).$$

Se  $G$  for uma função injetiva (invertível), então:

$$(x, y) = G^{-1}(x, 0)$$

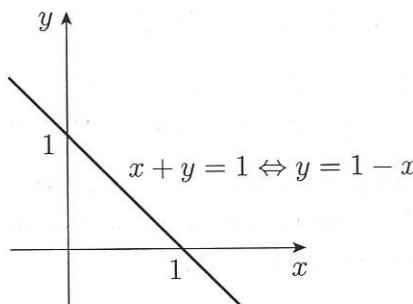
e, portanto, como o segundo membro da equação só depende de  $x$ , fica estabelecido que  $y$  é uma função de  $x$ .

O problema está em saber se a função  $G$  tem inversa, o que, na prática nem sempre é possível recorrendo à manipulação algébrica. No entanto, haverá condições que garantam a existência da inversa?

São estas as questões que serão, em certas condições, resolvidas pelos teoremas da função inversa e da função implícita.

#### 4.1 EXEMPLOS EM $\mathbb{R}^2$

**Exemplo 4.1.1** A reta definida pela equação  $x + y = 1$  encontra-se representada na Figura 4.1.



**Figura 4.1** Reta dada por:  $x + y = 1$

Notando que

$$x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y,$$

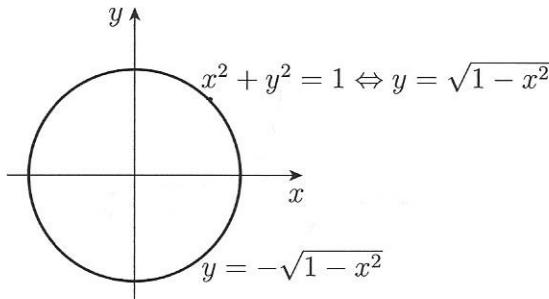
há duas maneiras equivalentes de descrever esta reta.

- i) Como o conjunto de nível zero da função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pela expressão  $F(x, y) = x + y - 1$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , em que  $F(x, y) = 0$ .
- ii) Como o gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = 1 - x$ , ou seja, como o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , em que  $y = f(x)$ , ou como o gráfico da função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(y) = 1 - y$ .

Dito de outro modo, recorrendo à manipulação algébrica, a equação  $F(x, y) = 0$  define uma das variáveis como função da outra,  $y = 1 - x$  ou  $x = 1 - y$ .

**Exemplo 4.1.2** Na Figura 4.2 encontra-se representada a circunferência definida pela equação  $x^2 + y^2 = 1$ .

É claro que, se  $y > 0$ , então  $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$  e, portanto, a parte da circunferência em que  $y > 0$  pode ser descrita de duas maneiras diferentes:



**Figura 4.2** Circunferência dada por:  $x^2 + y^2 = 1$

- i) Como o conjunto de nível zero da função  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , em que  $F(x, y) = 0$ .
- ii) Como o gráfico da função  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , em que  $y = f(x)$ .

Assim, para  $y > 0$ , a equação  $F(x, y) = 0$  define uma das variáveis como função da outra,  $y = f(x)$ .

A restrição do conjunto das soluções da equação  $F(x, y) = 0$  a uma vizinhança dos pontos  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  não define  $y$  como função de  $x$ , mas define  $x$  como função de  $y$ . De facto,

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - y^2},$$

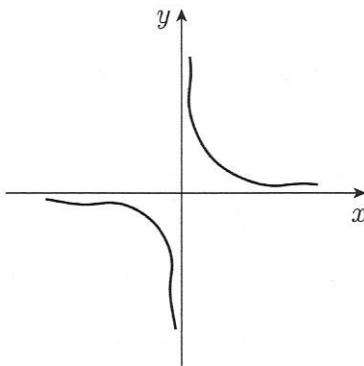
desde que  $x > 0$ .

Este exemplo mostra que a equivalência  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$  não se verifica globalmente em todo o conjunto definido pela equação  $F(x, y) = 0$ , mas apenas **localmente** em torno de cada um dos pontos desse conjunto.

**Exemplo 4.1.3** Na Figura 4.3 encontra-se uma representação parcial do subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  definido pela equação

$$xy + \operatorname{sen}(x + y) + \cos(x + y) = 5.$$

Neste caso, não parece fácil, por manipulação algébrica, concluir que a equação dada define uma das variáveis como função da outra, ou seja, descrever localmente este conjunto como o gráfico de alguma função.



**Figura 4.3** Parte do conjunto definido por:  $xy + \operatorname{sen}(x+y) + \cos(x+y) = 5$

\*\*\*

Do Exemplo 4.1.3 surge a questão de saber se uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$  define uma das variáveis como função da outra e se é possível obter alguma informação sobre a natureza dessa função.

Os exemplos anteriores mostram que, em geral, isso só poderá acontecer em termos locais, mesmo nos casos em que é possível efetuar explicitamente os cálculos.

\*\*\*

Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , e  $(a, b)$  um ponto tal que  $F(a, b) = 0$ .

Supondo que, mesmo sem efetuar os cálculos explicitamente, em alguma bola centrada no ponto  $(a, b)$  se tem

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x),$$

sendo  $f$  uma função real de variável real de classe  $C^1$  e definida em algum intervalo contendo o ponto  $a$ , então

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Derivando, obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)f'(a) = 0.$$

Portanto,

$$f'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}, \quad (4.1)$$

desde que se verifique a condição

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Então, se for apenas garantida a existência e a diferenciabilidade da função  $f$ , pode calcular-se a derivada  $f'(a)$ , mesmo não sendo possível explicitar  $y = f(x)$  a partir da equação  $F(x, y) = 0$ .

Surge, assim, a questão seguinte. Se  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função de classe  $C^1$ , e  $(a, b)$  um ponto que verifique as condições

$$F(a, b) = 0 ; \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0,$$

existirá alguma função  $f$ , de classe  $C^1$ , tal que, localmente em torno de  $(a, b)$ , se tenha

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)?$$

A resposta afirmativa a esta questão é dada pelo célebre teorema da função implícita.

## 4.2 EXEMPLOS EM $\mathbb{R}^3$

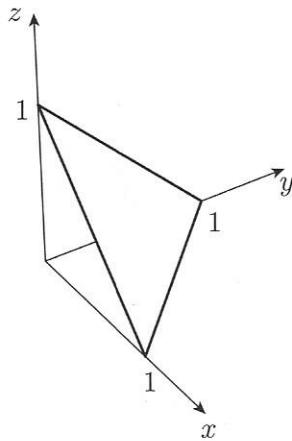
**Exemplo 4.2.1** Na Figura 4.4 encontra-se representado o plano definido pela equação  $x + y + z = 1$ .

É claro que

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow z = 1 - x - y$$

e, portanto, este plano pode ser descrito de duas maneiras diferentes:

- i) Como o conjunto de nível zero da função  $F(x, y, z) = x + y + z - 1$ .
- ii) Como o gráfico da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = 1 - x - y$ , ou seja, como o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , em que  $z = f(x, y)$ .

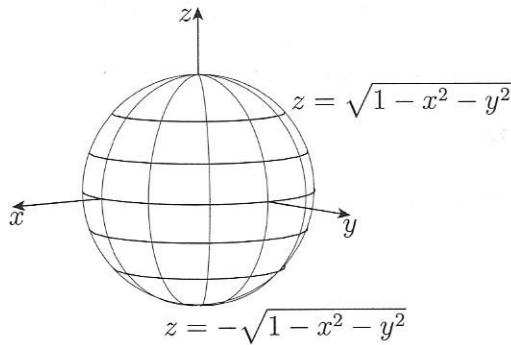


**Figura 4.4** Plano em  $\mathbb{R}^3$  dado por  $x + y + z = 1$

Assim, a equação  $F(x, y, z) = 0$  define  $z$  como função das outras duas,  $z = f(x, y)$ .

É claro que a mesma equação define qualquer uma das variáveis como função das duas restantes.

**Exemplo 4.2.2** Na Figura 4.5 encontra-se representada a esfera definida pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .



**Figura 4.5** Esfera em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

É claro que, para  $z > 0$ ,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

e, para  $z < 0$ ,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

ou seja, a equação define a variável  $z$  como função de  $x$  e de  $y$ .

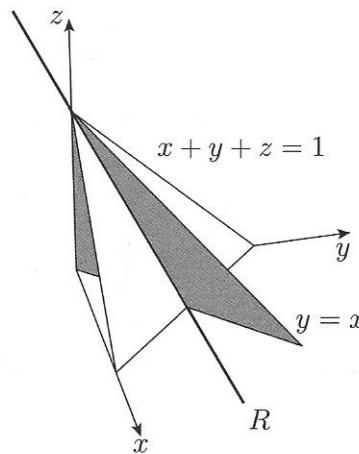
Em torno dos pontos em que  $z = 0$ , a equação não define  $z$  como função de  $x$  e de  $y$ , mas pode definir  $y$  como função de  $x$  e de  $z$ , ou  $x$  como função de  $y$  e de  $z$ .

Portanto, contrariamente ao que se passa com o plano do exemplo anterior, a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  define uma das variáveis como função das restantes apenas **localmente** em torno de cada um dos pontos da esfera.

**Exemplo 4.2.3** Na Figura 4.6 encontra-se representada a linha reta  $R$  definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = x, \end{cases} \quad (4.2)$$

ou seja, a intersecção do plano em que  $x + y + z = 1$  com o plano dado por  $y = x$ .



**Figura 4.6** Reta em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x + y + z = 1$ ;  $y = x$

É claro que

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = x, \end{cases}$$

ou seja, o sistema de duas equações (4.2) define as variáveis  $y$  e  $z$  como funções de  $x$ .

Sendo linear, o sistema pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x \\ x \end{bmatrix}.$$

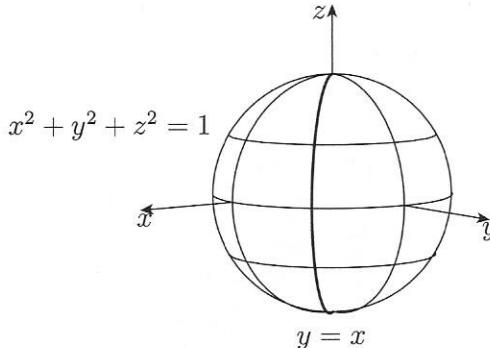
Portanto,  $y$  e  $z$  são funções de  $x$  porque

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0.$$

**Exemplo 4.2.4** Seja  $C$  a circunferência em  $\mathbb{R}^3$  que resulta da intersecção de uma esfera com um plano, definida pelo sistema de duas equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$$

e representada na Figura 4.7.



**Figura 4.7** Circunferência em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;  $y = x$

Para  $z > 0$ ,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{1 - 2x^2} \\ y = x, \end{cases}$$

ou seja, o sistema de equações define, em torno dos pontos da circunferência em que  $z > 0$ , as variáveis  $y$  e  $z$  como funções de  $x$ .

\*\*\*

Estes exemplos ilustram dois tipos de subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ :

- Definidos por uma equação  $F(x, y, z) = 0$  em que  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ .

Em que condições esta equação define, localmente, uma das variáveis como função das restantes, por exemplo  $z = f(x, y)$ , com  $f$  de classe  $C^1$ ?

Quando não for possível por cálculo direto explicitar a função  $f$ , que informação sobre  $f$  pode ser obtida a partir da equação dada?

Se, em torno de um ponto  $(a, b, c)$  que verifique a equação  $F(a, b, c) = 0$ , for garantida a equivalência

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = f(x, y),$$

então,  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ .

Derivando em ordem a  $x$  e a  $y$ , obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}, \quad (4.3)$$

desde que se verifique a condição

$$\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0. \quad (4.4)$$

- Definidos por um sistema de duas equações

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

em que as funções  $F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^1$ . Em que condições este sistema de equações define duas das variáveis como funções da terceira variável, como por exemplo  $y = f(x)$  e  $z = g(x)$ , com  $f$  e  $g$  de classe  $C^1$ ?

Quando não for possível por cálculo direto explicitar as funções  $f$  e  $g$  que informação sobre elas pode ser obtida a partir das equações?

Se, em torno de um ponto  $(a, b, c)$ , tal que  $F_1(a, b, c) = 0$  e  $F_2(a, b, c) = 0$ , for verdadeira a equivalência

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x), \end{cases}$$

então, derivando o sistema

$$\begin{cases} F_1(x, f(x), g(x)) = 0 \\ F_2(x, f(x), g(x)) = 0 \end{cases}$$

em ordem a  $x$ , obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b, c) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c)f'(a) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c)g'(a) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b, c) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c)f'(a) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c)g'(a) = 0. \end{cases}$$

Na forma matricial, será

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b, c) \end{bmatrix}$$

e podem ser calculadas as derivadas  $f'(a)$  e  $g'(a)$ , desde que se tenha

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (4.5)$$

Neste caso, as derivadas  $f'(a)$  e  $g'(a)$  serão dadas por

$$\begin{bmatrix} f'(a) \\ g'(a) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a, b, c) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b, c) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b, c) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

### 4.3 FUNÇÃO INVERSA. FUNÇÃO IMPLÍCITA. TEOREMAS

Tal como nos exemplos, no caso geral, considera-se um sistema de  $m$  equações em  $\mathbb{R}^n$ , com  $m < n$ ,

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

em que  $F_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , são funções de classe  $C^1$ .

Surge então o problema de saber em que condições é possível garantir que  $m$  das variáveis envolvidas são funções das restantes ( $n - m$ ) variáveis, localmente em torno de cada um dos pontos que satisfazem o sistema de equações.

Esta questão é da maior importância, quando não é possível resolver algebraicamente o sistema, de modo a explicitar as funções referidas.

A resposta positiva a esta questão é dada pelo chamado teorema da função implícita.

**Teorema 4.3.1 (Função Implícita)** Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $m < n$ , uma função de classe  $C^1$ , definida num aberto  $A$ . Seja  $(a, b) \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $a \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e

$$F(a, b) = 0 ; \quad \det D_y F(a, b) \neq 0. \quad (4.7)$$

Então, existe uma função  $f$ , de classe  $C^1$ , tal que, **localmente** em torno de  $(a, b)$ , se tem

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

\*\*\*

1. No caso geral, um sistema de  $m$  equações em  $\mathbb{R}^n$ , nas condições (4.7), define implicitamente  $m$  variáveis, designadas por  $y$ , em função das restantes ( $n - m$ ) variáveis, designadas por  $x$ .
2. A existência local da função  $f$  em torno de cada um dos pontos do conjunto definido pelo referido sistema de equações deve ser entendida no seguinte sentido. Existe uma

bola centrada no ponto  $(a, b)$  em que o conjunto definido pela equação  $F(x, y) = 0$  é o gráfico da função  $f : B_\varepsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , em que  $\varepsilon > 0$ , e  $B_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^{n-m}$  designa uma bola centrada em  $a \in \mathbb{R}^{n-m}$  e de raio  $\varepsilon$ .

3. Usam-se os símbolos  $D_x F(a, b)$  e  $D_y F(a, b)$  para designar as matrizes das derivadas parciais da função  $F$  em ordem às variáveis designadas por  $x$  e por  $y$ , respetivamente, no ponto  $(a, b)$ . Assim, se  $\det D_y F(a, b) \neq 0$ , então  $y = f(x)$ , localmente em torno de  $(a, b)$ , ou seja,  $F(x, f(x)) = 0$ .

Derivando em  $x$ , obtém-se

$$D_x F(a, b) + D_y F(a, b) Df(a) = 0$$

e, portanto,

$$Df(a) = - (D_y F(a, b))^{-1} D_x F(a, b). \quad (4.8)$$

É importante enfatizar o facto de que este teorema garante a existência local e a regularidade de uma função  $y = f(x)$  definida implicitamente por uma equação do tipo  $F(x, y) = 0$ .

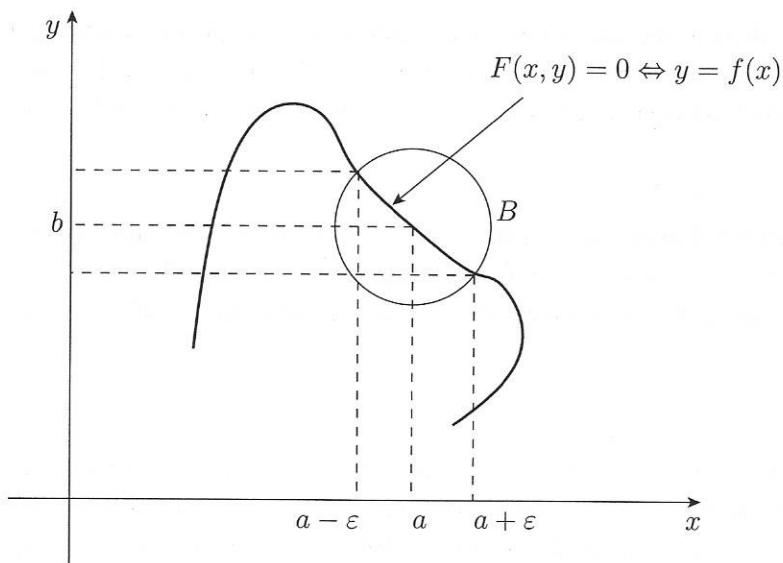
Como consequência fundamental, tem-se uma maneira de calcular a derivada da função implícita (4.8), que se traduz nas fórmulas (4.1, 4.3, 4.6) em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ , respetivamente.

\*\*\*

Por ser instrutivo, apresenta-se na Figura 4.8 a ilustração do enunciado do teorema da função implícita em  $\mathbb{R}^2$ .

A equivalência local deve ser entendida no sentido em que existe uma bola  $B$ , centrada no ponto  $(a, b)$ , em que o conjunto definido pela equação  $F(x, y) = 0$  é o gráfico de uma função  $f : ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\varepsilon > 0$ , ou seja,  $y = f(x)$ .

\*\*\*



**Figura 4.8** Função implícita em  $\mathbb{R}^2$

Seja  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função de classe  $C^1$  definida por

$$G(x, y) = (x, F(x, y)),$$

em que  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  está nas condições do teorema da função implícita.

Note-se que  $G(a, b) = (a, 0)$  e

$$\det DG(a, b) = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_x F(a, b) & D_y F(a, b) \end{bmatrix} = \det D_y F(a, b) \neq 0,$$

em que  $I$  designa a matriz identidade, com  $(n - m)$  linhas e  $(n - m)$  colunas.

Se a função  $G$  for invertível, localmente em torno do ponto  $(a, b)$ , então

$$G(x, y) = (x, F(x, y)) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = G^{-1}(x, 0),$$

ou seja, existe uma função  $f$ , localmente definida em torno do ponto  $a$ , tal que se verifica a equivalência

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

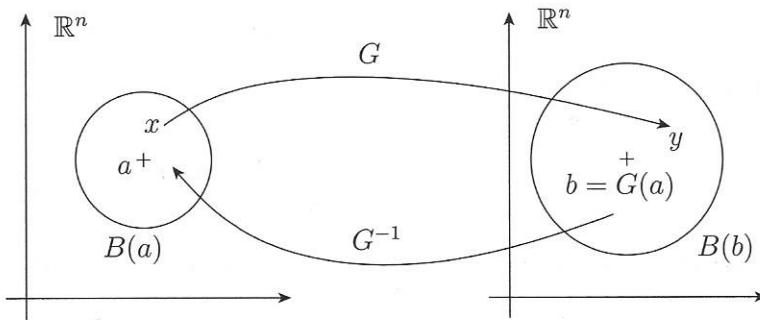
Se a função inversa  $G^{-1}$  for de classe  $C^1$ , então a função  $f$  também o será.

Portanto, a demonstração do teorema da função implícita depende da existência local e da regularidade da função inversa  $G^{-1}$ , que são garantidas pelo chamado teorema da função inversa. Assim, o teorema da função inversa implica o teorema da função implícita.

**Teorema 4.3.2 (Função Inversa)** Seja  $G : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , definida num aberto  $A$ , e  $a \in \mathbb{R}^n$  um ponto, tal que  $\det DG(a) \neq 0$ . Então,  $G$  é localmente invertível em torno do ponto  $a$ , e a respetiva inversa  $G^{-1}$  é uma função de classe  $C^1$ .

A existência local e a regularidade da função inversa devem ser entendidas da maneira seguinte. Existe uma bola  $B(a)$ , centrada no ponto  $a$ , e uma bola  $B(b)$ , centrada no ponto  $b = G(a)$ , tais que a função  $G : B(a) \rightarrow B(b)$  é uma bijeção (injetiva e sobrejetiva) e a respetiva inversa  $G^{-1} : B(b) \rightarrow B(a)$  é uma função de classe  $C^1$  (ver Figura 4.9).

Em geral, não é possível resolver diretamente as equações do tipo  $G(x) = b$ , ou seja, calcular a função inversa  $G^{-1}$ . O teorema da função inversa estabelece uma condição suficiente,  $\det DG(a) \neq 0$ , para que uma função de classe  $C^1$  seja localmente invertível.



**Figura 4.9** Função inversa

Por definição de função inversa, tem-se  $x = G^{-1}(G(x))$ ,  $\forall x \in B(a)$  e, portanto,

$$DG^{-1}(b) = [DG(a)]^{-1}, \quad (4.9)$$

Assim, a matriz jacobiana da função inversa  $G^{-1}$  no ponto  $b = G(a)$  é a inversa da matriz jacobiana de  $G$  no ponto  $a$ .

Conclui-se, então, que é possível calcular a derivada da função inversa tendo apenas a garantia das respectivas existência e diferenciabilidade.

\*\*\*

Nos casos em que  $\det DG(a) = 0$ , o teorema não é aplicável, pelo que não é possível nenhuma afirmação geral.

Considere-se a função  $G(x) = x^2$  definida em  $\mathbb{R}$ . Então,  $G'(0) = 0$ , e  $G$  não é invertível em nenhuma vizinhança da origem, porque se trata de uma função par.

A função  $G(x) = x^3$  é crescente, ou seja, invertível em  $\mathbb{R}$ , apesar de  $G'(0) = 0$ .

\*\*\*

Os pormenores da demonstração do teorema da função inversa podem ser vistos em ([6], p. 221), em ([1], pp. 50–56) ou em ([7], pp. 34–39). Indicam-se de seguida apenas os passos essenciais.

Para  $n = 1$ , pelo teorema de Lagrange, existe  $c \in ]a, b[$ , tal que

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b - a).$$

Portanto, se  $G'(c) \neq 0$ , então  $G(a) = G(b) \Leftrightarrow a = b$ .

Para  $n > 1$ , o teorema de Lagrange aplica-se apenas a cada uma das componentes escalares de  $G$  e, portanto, concluir que  $G$  é localmente injetiva não é simples.

Aplicando o teorema de Lagrange à componente  $G_i$ , existe um ponto  $p_i$  no segmento de reta entre  $a$  e  $b$ , tal que

$$G_i(b) - G_i(a) = \nabla G_i(p_i) \cdot (b - a), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Seja  $\phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \det D\tilde{G}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , em que  $D\tilde{G}(p_1, p_2, \dots, p_n)$  é a matriz cujas entradas são definidas por

$$(D\tilde{G})_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(p_i),$$

com  $p_i \in A$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . A  $i$ -ésima linha da matriz  $D\tilde{G}$  é o gradiente de  $G_i$  no ponto  $p_i$ .

Note-se que  $\phi(a, a, \dots, a) = \det DG(a) \neq 0$ . Assim, existem pontos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  no segmento de reta entre  $a$  e  $b$ , tais que

$$G(b) - G(a) = D\tilde{G}(p_1, p_2, \dots, p_n)(b - a).$$

Dado que a função  $G$  é de classe  $C^1$  em  $A$  e o determinante é uma soma algébrica de produtos, é claro que a função  $\phi$  é contínua em  $A \times A \times \dots \times A$  e existe uma bola  $B = B(a) \subset A$ , centrada no ponto  $a$ , tal que  $\phi \neq 0$  em  $B \times B \times \dots \times B$ . Sem perda de generalidade, pode considerar-se que o fecho da bola  $B(a)$  está contido em  $A$ . Assim, a função  $G$  é injetiva em  $\overline{B(a)}$  e, portanto, a respetiva inversa é uma função contínua.

Sendo injetiva, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|G(x) - G(a)\| \geq 2\delta$ ,  $\forall x \in \partial B(a)$ .

Fazendo  $b = G(a)$ , verifica-se que  $B(b) = B_\delta(b) \subset G(B(a))$ , isto é, o conjunto  $G(B(a))$  é aberto.

Para ver que  $G : B(a) \rightarrow B(b)$  é sobrejetiva, seja  $y \in B(b)$  e considere-se a função  $x \mapsto \|G(x) - y\|^2$  definida no compacto  $B(a)$ .

Para  $x \in \partial B(a)$ , tem-se

$$2\delta \leq \|G(x) - G(a)\| \leq \|G(x) - y\| + \|y - G(a)\| < \|G(x) - y\| + \delta,$$

ou seja,  $\|G(x) - y\| > \delta > \|G(a) - y\|$ .

Portanto, o mínimo da função  $x \mapsto \|G(x) - y\|^2$  está no interior de  $B(a)$ .

Se  $\bar{x} \in B(a)$  for um ponto de mínimo, então:

$$\sum_{i=1}^n (G_i(\bar{x}) - y_i) \left( \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

de onde se conclui que  $y = G(\bar{x})$ .

Para ver que a função inversa  $H = G^{-1} : B(b) \rightarrow B(a)$  é de classe  $C^1$ , faz-se  $x = H(y)$  e  $z = H(y + te_k)$  e, portanto,

$$G(z) - G(x) = te_k$$

em que  $e_k$  é o  $k$ -ésimo vetor unitário da base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Aplicando de novo o teorema de Lagrange às componentes  $G_i$ , tendo em conta que  $H$  é contínua e usando as propriedades da função  $\phi$ , conclui-se que as derivadas parciais de  $H$  são contínuas e

$$DH(y) = (DG(x))^{-1}.$$

\*\*\*

#### 4.4 EXEMPLOS

**Exemplo 4.4.1** Seja  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$G(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

É claro que  $G$  é de classe  $C^1$  e a respetiva derivada é dada pela matriz

$$DG(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\det DG(x, y) = e^{2x} \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, a função  $G$  tem inversa local em torno de cada um dos pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

No entanto, a função  $G$  não é invertível (não é injetiva) em  $\mathbb{R}^2$ . De facto,

$$G(x, 2k\pi) = (e^x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

ou seja, embora  $G$  não seja globalmente invertível em  $\mathbb{R}^2$ , possui inversa local em torno de qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 4.4.2** Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear, isto é, existe uma matriz  $A_{n \times n}$ , tal que  $f(x) = Ax$ . Esta função é injetiva, desde que  $\det A \neq 0$ . A respetiva inversa é dada por  $f^{-1}(y) = A^{-1}y$ , em que  $A^{-1}$  é a matriz inversa de  $A$ .

Note-se que uma aplicação linear é uma função de classe  $C^1$  e a respetiva derivada é representada pela matriz  $A$ , ou seja,

$$Df(x) = A.$$

Neste caso verifica-se a condição do teorema da função inversa, mas não é necessário usá-lo. Para além disso, a função inversa é global (está definida em  $\mathbb{R}^n$ ) e não apenas local.

**Exemplo 4.4.3** Considerando o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \frac{x^4 + y^4}{x} \\ v = \sin x + \cos y, \end{cases}$$

facilmente se conclui que a respetiva resolução para  $x$  e  $y$ , como funções de  $u$  e  $v$ , não é fácil. No entanto, recorrendo ao teorema da função inversa, é possível determinar os pontos  $(x, y)$ , para cada um dos quais o sistema é localmente invertível. Seja

$$G(x, y) = \left( \frac{x^4 + y^4}{x}, \sin x + \cos y \right)$$

a função definida para  $x \neq 0$ . Trata-se de uma função de classe  $C^1$  no seu domínio e a sua derivada é dada por

$$DG(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3x^4 - y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{bmatrix}$$

Portanto, para cada ponto  $(x, y)$ , com  $x \neq 0$ , tal que

$$\det DG(x, y) = \frac{\sin y}{x^2} (y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x} \cos x \neq 0,$$

existirá uma vizinhança em que o sistema exprime  $x$  e  $y$  como funções de  $u$  e  $v$ , ou seja,  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$ .

Sendo  $G(\pi, \pi) = (\pi^3, -1)$  e

$$\det DG(\pi, \pi) = \det \begin{bmatrix} 3\pi^2 & 4\pi^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 4\pi^2,$$

a derivada da inversa de  $G$  no ponto  $(\pi^3, -1)$  é dada por

$$DG^{-1}(\pi^3, -1) = [DG(\pi, \pi)]^{-1} = \frac{1}{4\pi^2} \begin{bmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 3\pi^2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(\pi^3, -1) & \frac{\partial x}{\partial v}(\pi^3, -1) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(\pi^3, -1) & \frac{\partial y}{\partial v}(\pi^3, -1) \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \begin{bmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 3\pi^2 \end{bmatrix}$$

\*\*\*

Mais geralmente, considere-se o sistema

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

em que  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções de classe  $C^1$ , tais que, num dado ponto  $(x, y)$ , verificam a condição

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então, pelo teorema da função inversa, o sistema é localmente invertível em torno do ponto  $(x, y)$ , ou seja,

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

em que as funções  $x, y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são de classe  $C^1$ , e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}^{-1}.$$

\*\*\*

**Exemplo 4.4.4** Considere-se a equação

$$x^2y + \operatorname{sen}(x + y) = 0. \quad (4.10)$$

Não é fácil decidir se esta equação define uma das variáveis como função da outra.

Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função de classe  $C^1$  dada por

$$F(x, y) = x^2y + \operatorname{sen}(x + y).$$

Então,  $F(0, 0) = 0$  e

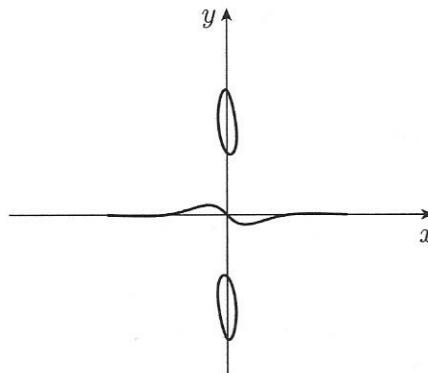
$$DF(0, 0) = \left[ \begin{array}{cc} 2xy + \cos(x + y) & x^2 + \cos(x + y) \end{array} \right]_{x=0, y=0} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \right].$$

Portanto, como  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1$ , pelo teorema da função implícita, existe uma bola  $B$  centrada em  $(0, 0)$  e uma função  $f : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , para algum  $\varepsilon > 0$ , tal que  $f(0) = 0$ , e

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x); \quad \text{em } B.$$

Para além disso,

$$f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)} = -\frac{1}{1} = -1.$$



**Figura 4.10** Parte do subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  dado por  $x^2y + \sin(x+y) = 0$

Do mesmo modo, sendo  $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1$ , a equação (4.10) define implicitamente, localmente em torno de  $(0, 0)$ , a variável  $x$  como função de  $y$ .

Na Figura 4.10 encontra-se representada parte do conjunto definido pela Equação (4.10).

**Exemplo 4.4.5** A equação  $x^3z^2 - z^3yx = 0$  define implicitamente  $z$  como função de  $(x, y)$  localmente em torno do ponto  $(1, 1, 1)$ .

De facto, seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a função de classe  $C^1$  definida por

$$F(x, y, z) = x^3z^2 - z^3yx.$$

Note-se que  $F(1, 1, 1) = 0$ . Sendo

$$\begin{aligned} DF(1, 1, 1) &= \left[ \begin{array}{ccc} 3x^2z^2 - z^3y & -z^3x & 2x^3z - 3z^2yx \end{array} \right]_{x=1, y=1, z=1} \\ &= \left[ \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = -1.$$

Assim, localmente em torno do ponto  $(1, 1, 1)$ , a equação  $F(x, y, z) = 0$  define implicitamente  $z$  como função de  $(x, y)$ . Seja  $f(x, y)$  essa função. Então,  $F(x, y, f(x, y)) = 0$ , e derivando em  $x$ , obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

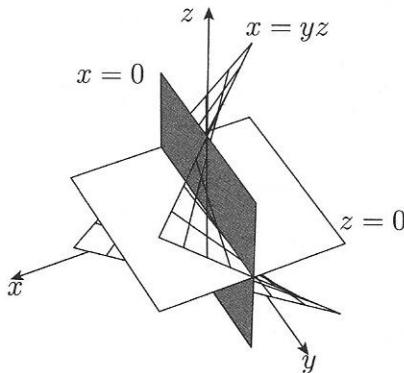
e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\frac{2}{-1} = 2.$$

Como  $DF(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , o teorema da função implícita não se aplica no ponto  $(0, 0, 0)$ . No entanto,

$$x^3z^2 - z^3yx = 0 \iff xz^2(x - zy) = 0 \iff x = 0 \vee z = 0 \vee x = zy$$

e, portanto, em torno da origem não é possível exprimir nenhuma das variáveis como função das outras, porque se intersectam três superfícies, como se ilustra na Figura 4.11.



**Figura 4.11** Subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $x^3z^2 - z^3yx = 0$

**Exemplo 4.4.6** O sistema de equações

$$\begin{cases} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2v^4 = 2 \end{cases}$$

define implicitamente  $(u, v)$  como funções de  $(x, y)$  em torno do ponto  $(1, 1, 1, 1)$ .

De facto, seja  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$F(x, y, u, v) = (xu + yvu^2, xu^3 + y^2v^4).$$

Trata-se de uma função de classe  $C^1$ , tal que  $F(1, 1, 1, 1) = (2, 2)$ , e a respetiva derivada no ponto  $(1, 1, 1, 1)$  é dada por

$$\begin{aligned} DF(1, 1, 1, 1) &= \begin{bmatrix} u & vu^2 & x + 2yvu & yu^2 \\ u^3 & 2yv^4 & 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{bmatrix}_{x=1, y=1, u=1, v=1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\det D_{uv}F(1, 1, 1, 1) = \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 9.$$

O teorema da função implícita garante  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$  localmente em torno do ponto  $(1, 1, 1, 1)$ . Derivando a função  $F$  em  $x$ , obtém-se

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} + u + y \frac{\partial v}{\partial x} u^2 + 2yvu \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \\ 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \end{cases}$$

no ponto  $(1, 1, 1, 1)$ , de onde se deduz

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{3} \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = 0. \end{cases}$$

**Exemplo 4.4.7** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , tal que

$$F(a, b) = 0 ; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0 ; \quad \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0,$$

num ponto dado  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Pelo teorema da função implícita, em torno do ponto  $(a, b)$ ,

$$F(x, f(x)) = 0, \quad (4.11)$$

em que  $f$  é uma função real de variável real de classe  $C^2$ , com  $f(a) = b$ .

Derivando a equação (4.11), obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x) = 0. \quad (4.12)$$

No ponto  $(a, b) = (a, f(a))$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)f'(a) = 0,$$

e, portanto,  $f'(a) = 0$ , ou seja, a função implícita  $f$  tem um ponto de estacionaridade em  $a$ .

Derivando a equação (4.12), obtém-se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}f'(x) + \frac{\partial F}{\partial y}f''(x) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}f'(x) \right) f'(x) = 0.$$

Então, no ponto  $(a, b)$ ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)f''(a) = 0,$$

ou seja,

$$f''(a) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}.$$

Assim, se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) > 0,$$

então a função  $f$  terá um máximo no ponto  $a$ .

## 4.5 EXERCÍCIOS

- Mostre que a função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F(x, y) = (x^2 - \cos y, y + \operatorname{sen}(\pi x))$  admite uma inversa local  $F^{-1}$  em torno do ponto  $(1, \pi)$ . Calcule a derivada de  $F^{-1}$  no ponto  $(2, \pi)$ .

2. Considere o conjunto  $L \subset \mathbb{R}^2$  definido pela equação  $x^2 + xy + y^2 = 3$ .
- Mostre que existe uma bola  $B \subset \mathbb{R}^2$  centrada no ponto  $(1, -2)$  tal que
$$L \cap B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\},$$
em que  $f$  é uma função de classe  $C^1$ .
  - Calcule as derivadas  $f'(1)$  e  $f''(1)$ .
3. Mostre que a equação  $zx^2 + z^3y^2 - xy^2 = 1$  define implicitamente  $z$  como função de  $x$  e de  $y$ , numa bola centrada no ponto  $(0, 1, 1)$ . Calcule as derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1)$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$ .
4. Mostre que o sistema de equações
- $$\begin{cases} xy + z^2 = 1 \\ x^2 - y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$
- define  $x$  e  $y$  como funções de  $z$  numa vizinhança do ponto  $(x, y, z) = (1, -2, \sqrt{3})$ , e calcule  $\frac{dx}{dz}(\sqrt{3})$ .
5. Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  e suponha que a equação  $F(x, y, z) = 0$  determina, localmente, cada uma das variáveis como função das restantes, ou seja,
- $$x = x(y, z); \quad y = y(x, z); \quad z = z(x, y).$$
- Mostre que se tem
- $$\left( \frac{\partial x}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -1.$$
- Demonstre o teorema da função inversa, usando o teorema da função implícita.
  - Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , tal que  $\det Dg(a) \neq 0$ . Mostre que existe uma bola centrada no ponto  $a$ , onde a função  $g$  é injetiva e a respetiva inversa é uma função contínua (sugestão: Use o teorema de Lagrange para cada uma das funções componentes  $g_k$ ).

# 5

---

VARIEDADES. EXTREMOS CONDICIONADOS

Em termos simples, uma variedade é um conjunto definido localmente por um sistema de equações em que o teorema da função implícita seja aplicável. O conceito de variedade é a generalização natural, para dimensões arbitrárias, das noções de curva ou linha e de superfície. Tais conjuntos podem descrever-se de três formas geométricas diferentes.

### 5.1 VARIEDADES. PARAMETRIZAÇÕES

Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , e  $M$ , o respetivo conjunto de nível zero, ou seja,

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Seja  $(a, b) \in M$ , tal que  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ .

Pelo teorema da função implícita, existe uma bola  $B$  centrada no ponto  $(a, b)$ , tal que

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x), \quad (x, y) \in M \cap B,$$

sendo  $f : ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\varepsilon > 0$ , uma função de classe  $C^1$ , tal como se representa na Figura 5.1.

Seja  $I = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$g(x) = (x, f(x)).$$

Então:

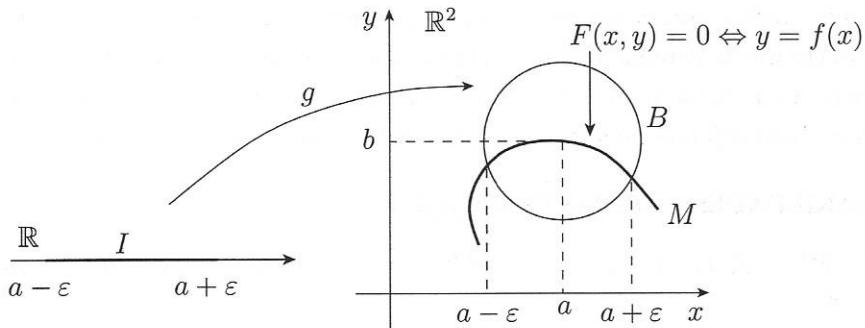
1. A função  $g$  é de classe  $C^1$ .
2. A função  $g$  é injetiva. De facto, se  $x_1 \neq x_2$ , então  $g(x_1) \neq g(x_2)$ .
3. O conjunto  $M \cap B$  é a imagem do intervalo  $I$  através da função  $g$ , ou seja,

$$M \cap B = g(I).$$

4. A derivada da função  $g$  não se anula. De facto,  $g'(x) = (1, f'(x)) \neq (0, 0)$ .

A imagem da função  $g$  é o conjunto  $M \cap B$  e, portanto, a função  $g$  é uma bijeção entre o intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  e o conjunto  $M \cap B \subset \mathbb{R}^2$ , tal como se ilustra na Figura 5.1.

Por ser uma bijeção (aplicação injetiva e sobrejetiva), a função  $g$  permite a identificação do intervalo  $I$  com o conjunto  $M \cap B$ .



**Figura 5.1** Variedade-1 em  $\mathbb{R}^2$

Reciprocamente, seja  $M \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto que, localmente em torno de um ponto  $(a, b)$ , é a imagem de uma função injetiva  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^1$ , tal que

$$g(t_0) = (a, b); \quad g'(t_0) \neq (0, 0),$$

sendo  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto.

Dado que  $g'(t) = (x'(t), y'(t))$ , sem perda de generalidade, seja  $x'(t_0) \neq 0$ . Pelo teorema da função inversa em  $\mathbb{R}$ , a função  $x = x(t)$  é localmente invertível em torno de  $t = t_0$ , ou seja,  $t = h(x)$ , para alguma função de classe  $C^1$  designada por  $h$ . Portanto,

$$y = y(t) = y(h(x)) = f(x).$$

Fazendo  $F(x, y) = y - f(x)$ , então, localmente em torno do ponto  $(a, b)$ , o conjunto  $M$  é definido pela equação  $F(x, y) = 0$ .

Assim, dado um ponto qualquer  $(a, b) \in M$ , existe uma bola  $B$ , centrada em  $(a, b)$ , tal que o conjunto  $M \cap B$  pode ser descrito numa das três formas seguintes.

- i) Como conjunto de nível zero de uma função  $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , definida num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ , tal que  $\nabla F(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $\forall (x, y) \in M \cap B$ , ou seja,

$$M \cap B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

- ii) Como gráfico de uma função  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , definida num intervalo  $J \subset \mathbb{R}$ , isto é,

$$M \cap B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) ; x \in J\}.$$

- iii) Como a imagem de uma função injetiva  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^1$ , definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , tal que  $g'(t) \neq (0, 0)$ ,  $\forall t \in I$ , ou seja,

$$M \cap B = \{g(t), t \in I\}.$$

À função  $g$  chama-se **parametrização** de  $M \cap B$ .

Diz-se que  $M \subset \mathbb{R}^2$ , descrito desta forma, é uma variedade de dimensão 1. Para simplificar, a uma variedade de dimensão um chama-se **variedade-1**.

A função  $g$  estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $M \cap B \subset \mathbb{R}^2$  e o intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , ou seja, basta uma variável (**parâmetro**) para descrever o conjunto  $M$ .

Localmente, em torno do ponto  $(a, b)$ ,

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow (x(t), y(t)) = g(t),$$

e, portanto,  $F(g(t)) = 0$ , e pelo teorema da derivada da função composta, obtém-se

$$\nabla F(g(t_0)) \cdot g'(t_0) = 0, \quad (5.1)$$

querendo dizer que os vetores  $\nabla F(a, b)$  e  $g'(t_0)$  são ortogonais entre si.

Recordar-se que, sendo  $M$  uma linha descrita pela função  $g$ , então, por definição, o vetor  $g'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$  é **tangente** a  $M$  no ponto  $(a, b) = g(t_0)$ .

Por outro lado,  $M$  é um conjunto de nível da função  $F$  e, como o vetor gradiente  $\nabla F(a, b)$  é ortogonal ao vetor tangente  $g'(t_0)$ , diz-se que é um vetor **normal** a  $M$  no ponto  $(a, b)$ . Portanto, as diferentes formas de descrever uma variedade fornecem informações geométricas distintas.

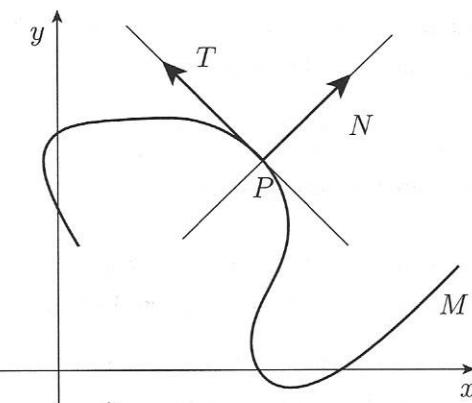
Ao espaço linear gerado pelo vetor  $N = \nabla F(a, b)$  chama-se **espaço normal** a  $M$  no ponto  $(a, b)$ . Ao espaço linear gerado pelo vetor  $T = g'(t_0)$  chama-se **espaço tangente** a  $M$  no ponto  $(a, b)$ .

A **reta tangente** a  $M$  no ponto  $P = (a, b)$  é dada pela equação paramétrica

$$X - P = \lambda T, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

em que  $X = (x, y)$  (ver Figura 5.2).

Do mesmo modo, a **reta normal** a  $M$  no ponto  $P = (a, b)$  é dada pela equação paramétrica  $X - P = \lambda N$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .



**Figura 5.2** Reta tangente e reta normal em  $\mathbb{R}^2$

Os vetores  $T$  e  $N$  são ortogonais, ou seja,  $N \cdot T = 0$  e, portanto, a reta tangente no ponto  $P = (a, b)$  é dada pela equação cartesiana  $(X - P) \cdot N = 0$ , e a reta normal, por

$$(X - P) \cdot T = 0.$$

\*\*\*

Em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ , é importante analisar conjuntos definidos por sistemas de  $m$  equações, ou seja, conjuntos  $M \subset \mathbb{R}^n$  da forma

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\},$$

em que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $m < n$ , é uma função de classe  $C^1$ .

Se o teorema da função implícita for aplicável a  $F$  então diz-se que  $M$  é uma variedade. Quer isto dizer que, localmente em torno de cada um dos seus pontos,  $m$  variáveis serão expressas implicitamente como funções das restantes  $(n - m)$  variáveis, também designadas por **variáveis livres ou parâmetros**.

É importante observar que uma variedade em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto e não depende da representação. Por exemplo, se  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}$ , com  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , então  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : H^2(x) = 0\}$ , mas, neste caso, o teorema da função implícita não se aplica. De facto, fazendo  $F(x) = H^2(x)$ , obtém-se  $DF(x) = 2H(x)\nabla H(x) = 0$ .

Fazendo  $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))$ , o conjunto  $M$  fica definido pelo sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

O teorema da função implícita é aplicável, se as linhas da matriz que representa a derivada de  $F$ ,

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix},$$

forem linearmente independentes em cada um dos pontos de  $M$ .

Se as  $(n - m)$  variáveis livres forem  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$ , seja  $u = (x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$  e  $v = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ . Então:

$$F(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_m(u)),$$

em que  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  é de classe  $C^1$  e definida num aberto de  $\mathbb{R}^{n-m}$ .

A função  $g(u) = (u, v) = (u, f(u))$  é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada

$$Dg(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{n-m}}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_m}{\partial u_2}(u) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_{n-m}}(u) \end{bmatrix}$$

tem  $(n - m)$  colunas linearmente independentes.

Reciprocamente, fazendo  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ , seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto que, localmente em torno do ponto  $(a, b) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ , é a imagem de uma função injetiva  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ , definida num aberto  $T \subset \mathbb{R}^{n-m}$ , tal que  $g(t_0) = (a, b)$ , para algum  $t_0 \in T$ , sendo as  $(n - m)$  colunas da derivada  $Dg(t_0)$  linearmente independentes.

Seja  $g(t) = (u(t), v(t))$  e, sem perda de generalidade,  $\det Du(t_0) \neq 0$ . Pelo teorema da função inversa em  $\mathbb{R}^{n-m}$ , a função  $u = u(t)$  é localmente invertível em torno de  $t = t_0$ , ou seja,  $t = h(u)$ , para alguma função  $h$  de classe  $C^1$ .

Portanto,

$$v = v(t) = v(h(u)) = f(u).$$

Fazendo  $F(u, v) = v - f(u)$ , então, localmente em torno do ponto  $(a, b)$ , o conjunto  $M$  fica definido pela equação  $F(u, v) = 0$ .

Assim, há três maneiras equivalentes de descrever o mesmo conjunto em torno de cada um dos seus pontos.

**Definição 5.1.1** Diz-se que  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $(n - m)$ , se para qualquer ponto  $a \in M$  existe uma bola  $B(a)$ , centrada em  $a$ , tal que o conjunto  $M \cap B(a)$  pode ser descrito de uma das três maneiras seguintes.

- i) Como **conjunto de nível** zero de uma função  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $m < n$ , de classe  $C^1$ , definida num aberto de  $\mathbb{R}^n$ , tal que a matriz  $DF(x)$  tem característica  $m$ , para qualquer  $x \in M \cap B(a)$ :

$$M \cap B(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}.$$

- ii) Como **gráfico** de uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$ , definida num aberto de  $A \subset \mathbb{R}^{n-m}$ :

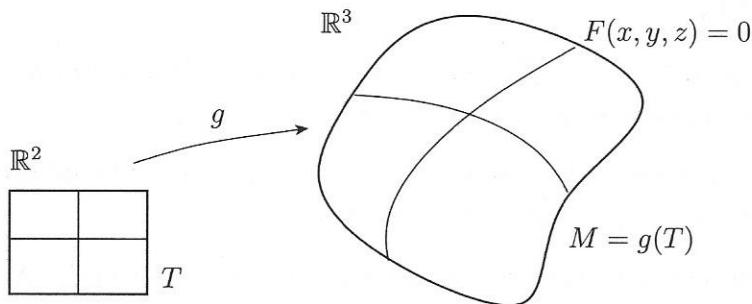
$$M \cap B(a) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m : v = f(u), u \in A\}.$$

- iii) Como a imagem de uma **parametrização** que é uma função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  injetiva de classe  $C^1$ , definida num aberto  $T \subset \mathbb{R}^{n-m}$ , tal que a matriz  $Dg(t)$  tem característica  $(n - m)$ , para qualquer  $t \in T$ :

$$M \cap B(a) = \{g(t), t \in T\} = g(T).$$

Para simplificar, chama-se **variedade-(n-m)** a um conjunto assim definido.

Da definição, é claro que, sendo  $M = g(T)$ , então os conjuntos  $M \subset \mathbb{R}^n$  e  $T \subset \mathbb{R}^{n-m}$  estão em correspondência biunívoca.



**Figura 5.3** Variedade-2 em  $\mathbb{R}^3$

Na Figura 5.3 encontra-se ilustrado o caso de uma variedade-2 em  $\mathbb{R}^3$ . Localmente é dada por uma equação do tipo  $F(x, y, z) = 0$  ou é a imagem de uma parametrização, ou seja,  $g : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

\*\*\*

Sendo  $M \cap B(a)$  a imagem da parametrização  $g$ , dado um ponto qualquer  $x \in M \cap B(a)$ , existe algum  $t \in T$  tal que  $x = g(t)$ .

Por outro lado,  $F(x) = 0 \Leftrightarrow F(g(t)) = 0$  e, derivando, obtém-se

$$DF(g(t))Dg(t) = 0. \quad (5.2)$$

Portanto, as colunas da matriz  $Dg(t)$  são ortogonais às linhas da matriz  $DF(g(t))$ .

Seja  $a = g(t_0)$ , para algum  $t_0 \in T$ .

Seja  $\Gamma \subset M$  uma linha descrita pelo caminho  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\gamma(0) = a$ .

Dado que  $\gamma(s) \in M$ , então  $F(\gamma(s)) = 0$  e, portanto,

$$DF(\gamma(s))\gamma'(s) = 0. \quad (5.3)$$

Por definição, o vetor  $\gamma'(0)$  é tangente à linha  $\Gamma$  no ponto  $a$ .

Das equações (5.2, 5.3), fazendo  $t = t_0$  e  $s = 0$ , deduz-se que o vetor  $\gamma'(0)$  é uma combinação linear das colunas da matriz  $Dg(t_0)$  e é ortogonal às linhas da matriz  $DF(a)$ .

### Definição 5.1.2

1. Diz-se que um vetor  $T \in \mathbb{R}^n$  é **tangente** a uma variedade  $M$ , num ponto  $a \in M$ , se for tangente a uma linha  $\Gamma \subset M$  que passe nesse ponto.
2. Ao espaço gerado pelos vetores tangentes à variedade  $M$  no ponto  $a$  chama-se **espaço tangente** a  $M$  no ponto  $a$ , e será designado pela expressão  $T_a M$ .
3. Ao ortogonal do espaço tangente a  $M$  no ponto  $a$  chama-se **espaço normal** a  $M$  no ponto  $a$ , e será designado pela expressão  $(T_a M)^\perp$ .

\*\*\*

Tendo em conta a equação (5.3), é claro que as colunas da matriz  $Dg(t_0)$  geram o **espaço tangente** a  $M$  no ponto  $a$ . Da equação (5.2) deduz-se que o espaço linear gerado pelos vetores  $\nabla F_1(a), \nabla F_2(a), \dots, \nabla F_m(a)$ , ou seja, o espaço gerado pelas linhas da matriz  $DF(a)$ , é o **espaço normal** a  $M$  no ponto  $a$ .

Da definição, é claro que o espaço normal num ponto tem dimensão  $m$ , e o respetivo espaço tangente tem dimensão  $n - m$ , ou seja, a dimensão da variedade é a dimensão do espaço tangente em cada um dos seus pontos.

Por definição, se  $N$  for um vetor normal e  $T$  um vetor tangente à variedade  $M$  num dado ponto, então estes dois vetores são ortogonais, ou seja,

$$N \cdot T = 0.$$

Então, se a variedade  $M$  for localmente definida como conjunto de nível da função  $F$ , o espaço normal num ponto  $x$  será gerado pelas linhas da matriz  $DF(x)$  e o espaço tangente obtém-se da relação de ortogonalidade.

Se  $M$  for localmente definida como a imagem de uma parametrização  $g$ , então o espaço tangente num ponto  $x = g(t)$  é gerado pelas colunas da matriz  $Dg(t)$  e o espaço normal vem da relação de ortogonalidade.

\*\*\*

São de especial interesse os casos seguintes.

1. Dada uma variedade-1  $M \subset \mathbb{R}^3$  e um ponto  $P \in M$ , sejam  $N_1$  e  $N_2$  dois vetores normais linearmente independentes e  $T$  o vetor tangente.

A reta tangente a  $M$  no ponto  $P$  é dada pelo sistema de duas equações

$$\begin{cases} (X - P) \cdot N_1 = 0 \\ (X - P) \cdot N_2 = 0, \end{cases}$$

ou, na forma vetorial, por

$$X = P + \lambda T, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O plano normal a  $M$  no ponto  $P$  é dado pela equação

$$(X - P) \cdot T = 0,$$

ou, na forma vetorial, por

$$X = P + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Dada uma variedade-2  $M \subset \mathbb{R}^3$  e um ponto  $P \in M$ , sejam  $T_1$  e  $T_2$  dois vetores tangentes linearmente independentes e  $N$  o vetor normal.

A reta normal a  $M$  no ponto  $P$  é dada pelo sistema de duas equações

$$\begin{cases} (X - P) \cdot T_1 = 0 \\ (X - P) \cdot T_2 = 0, \end{cases}$$

ou, na forma vetorial, por

$$X = P + \lambda N, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O plano tangente a  $M$  no ponto  $P$  é dado pela equação

$$(X - P) \cdot N = 0,$$

ou, na forma vetorial, por

$$X = P + \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

\*\*\*

**Exemplo 5.1.1** O subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  definido pelo sistema de equações

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

é conjunto de nível zero da função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^1$ , definida por

$$F(x, y, z) = (z - x^2 - y^2, x + y + z - 1).$$

A respetiva matriz derivada,

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

não tem característica nula porque as entradas não são todas nulas. Se tivesse característica igual a 1 os determinantes das três submatrizes  $(2 \times 2)$  seriam nulos, ou seja,

$$\begin{cases} x = y \\ 2x + 1 = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e, substituindo nas equações de definição do conjunto, ter-se-ia

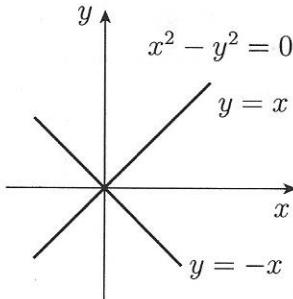
$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ z = 2. \end{cases}$$

Portanto, a matriz derivada tem característica igual a dois, e o conjunto é uma variedade de dimensão 1.

**Exemplo 5.1.2** O subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , definido pela equação  $x^2 - y^2 = 0$ , é a união das duas retas definidas, respetivamente, por  $y = x$  e por  $y = -x$ , tal como se ilustra na Figura 5.4.

De facto,  $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$ .

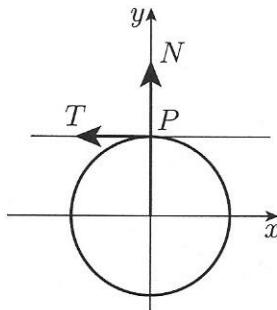
Sendo o conjunto de nível zero da função de classe  $C^1$  dada por  $F(x, y) = x^2 - y^2$ , e como  $\nabla F(x, y) = (2x, -2y)$ , é claro que na origem o teorema da função implícita não se aplica.



**Figura 5.4** A equação  $x^2 - y^2 = 0$  define um conjunto que não é uma variedade

Da observação da Figura 5.4 fica claro que, dada uma bola centrada na origem, não é possível descrever este conjunto como o gráfico de alguma função real de variável real, ou seja, este conjunto não é uma variedade.

**Exemplo 5.1.3** Seja  $C \subset \mathbb{R}^2$  a circunferência definida pela equação  $x^2 + y^2 = 1$ , que se encontra representada na Figura 5.5.



**Figura 5.5** Circunferência  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

É claro que se trata do conjunto de nível zero da função  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Esta função é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , e a respetiva derivada

$$\nabla F(x, y) = [2x \quad 2y]$$

é nula apenas na origem  $(x, y) = (0, 0)$ . No entanto, a origem não pertence à circunferência. Portanto, esta circunferência é uma variedade-1.

Como  $N = \nabla F(0, 1) = (0, 2)$  é um vetor normal no ponto  $(0, 1)$ , a reta normal à circunferência nesse ponto é dada na forma paramétrica por

$$(x, y) - (0, 1) = \lambda(0, 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = 2\lambda \end{cases}$$

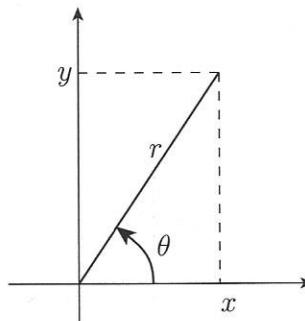
e, portanto, é definida pela equação  $x = 0$  (ver Figura 5.5).

A reta tangente em  $P$  é dada por  $(x, y - 1) \cdot (0, 2) = 0$ , ou seja, pela equação  $y = 1$  (ver Figura 5.5).

Para  $y > 0$  tem-se

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

e, portanto, a função  $g(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$ , com  $-1 < x < 1$ , é uma parametrização da parte da circunferência em que  $y > 0$ . É claro que esta parametrização descreve apenas metade da circunferência.



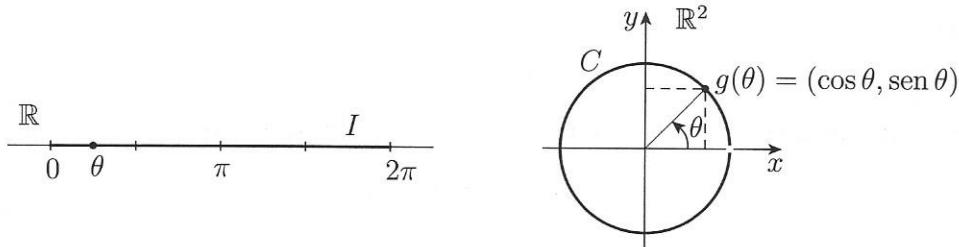
**Figura 5.6** Coordenadas polares  $(r, \theta)$

Tendo em conta a simetria, a circunferência pode ser descrita de outro modo. Note-se que os pontos de uma circunferência estão todos à mesma distância do centro. Se à distância ao centro se associar o ângulo  $\theta$ , tal como se ilustra na Figura 5.6, ficam definidas novas variáveis  $(r, \theta)$  que se relacionam com  $(x, y)$  através das equações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Nestas novas coordenadas, denominadas **coordenadas polares**, a circunferência dada por  $x^2 + y^2 = 1$  passa a ser descrita pela equação  $r = 1$  e, portanto, a variável  $\theta$  pode ser usada para descrever parametricamente a circunferência.



**Figura 5.7** Parametrização da circunferência em coordenadas polares

De facto, seja

$$g(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Esta função é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada

$$g'(t) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

tem característica 1. Para além disso, a sua imagem é a circunferência sem o ponto  $(1, 0)$ , ou seja,  $g([0, 2\pi]) = C \setminus \{(1, 0)\}$ , tal como se ilustra na Figura 5.7.

Esta parametrização descreve a circunferência, excluindo um ponto apenas, ou seja, as coordenadas polares  $(r, \theta)$  são mais adequadas do que as coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .

Para descrever completamente a circunferência, recorre-se a outra parametrização, que pode ser definida pela função

$$h(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad -\pi < \theta < \pi,$$

a qual exclui apenas o ponto  $(-1, 0)$ .

Assim, as duas funções  $g$  e  $h$  descrevem completamente a circunferência  $C$ .

**Exemplo 5.1.4** Seja  $P$  o parabolóide definido por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 ; z < 1\}.$$

Da definição, é claro que se trata do conjunto de nível zero da função escalar

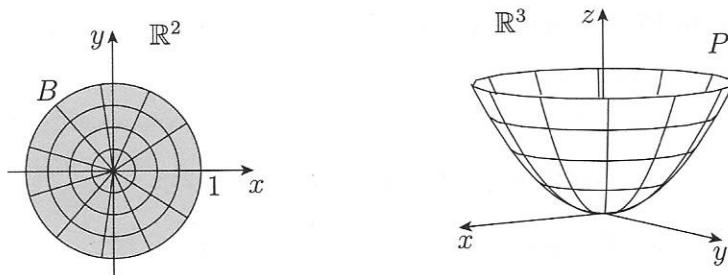
$$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2,$$

em que  $z < 1$ . É também claro que é o gráfico da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  definida na bola

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Assim, uma parametrização de  $P$  é a função  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2).$$



**Figura 5.8** Parametrização de um parabolóide

A função  $g$  é obviamente de classe  $C^1$ , injetiva, e a imagem da bola  $B$  é, de facto, o parabolóide  $P$ .

Esta função é uma bijeção (injetiva e sobrejetiva) entre os conjuntos  $B \subset \mathbb{R}^2$  e  $P \subset \mathbb{R}^3$ , tal como se ilustra na Figura 5.8. Assim, a superfície  $P$  em  $\mathbb{R}^3$  é identificada com a bola  $B \subset \mathbb{R}^2$  através da função  $g$ , de duas variáveis (ou **parâmetros**).

A derivada dada pela matriz

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

tem característica 2, ou seja, as duas colunas são vetores linearmente independentes. Portanto, o parabolóide  $P$  é uma variedade-2.

As duas colunas desta matriz são vetores tangentes. Na origem, o espaço tangente é gerado pelos vetores  $T_1 = (1, 0, 0)$  e  $T_2 = (0, 1, 0)$ . O espaço normal é gerado por um vetor

$N = (a, b, c)$  que verifique a relação de ortogonalidade

$$\begin{cases} N \cdot T_1 = 0 \\ N \cdot T_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N \cdot (a, b, c) = 0 \\ N \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0, \end{cases}$$

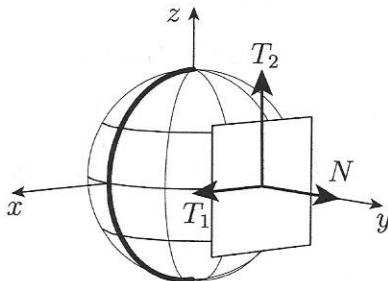
ou seja, pelo vetor  $N = (0, 0, 1)$ .

É claro que, sendo  $P$  o conjunto de nível zero da função escalar  $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ , então  $N = \nabla F(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ .

**Exemplo 5.1.5** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  a esfera definida pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

que se encontra representada na Figura 5.9.



**Figura 5.9** Esfera definida pela equação:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Trata-se do conjunto de nível zero da função de classe  $C^1$  definida por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

A derivada

$$\nabla F(x, y, z) = [2x \quad 2y \quad 2z]$$

tem característica 1 em todos os pontos de  $S$ , porque o caso contrário ocorre apenas na origem, que não se encontra em  $S$ . Portanto,  $S$  é uma variedade-2.

O vetor  $\nabla F(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$  é normal a  $S$  no ponto  $(0, 1, 0)$ .

Os vetores tangentes a  $S$  no mesmo ponto resultam da resolução da equação

$$T \cdot N = 0.$$

Fazendo  $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ , então  $\beta = 0$  e, portanto,

$$T = (\alpha, 0, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1).$$

Assim, os vetores  $T_1 = (1, 0, 0)$  e  $T_2 = (0, 0, 1)$  geram o espaço tangente a  $S$  no ponto  $(0, 1, 0)$ .

Na Figura 5.9 encontram-se representados os vetores  $N, T_1, T_2$ .

Fazendo  $X = (x, y, z)$  e  $P = (0, 1, 0)$ , o plano tangente a  $S$  no ponto  $(0, 1, 0)$  é dado por

$$(X - P) \cdot N = 0,$$

ou seja,

$$(x, y - 1, z) \cdot (0, 2, 0) = 0 \Leftrightarrow y = 1,$$

e encontra-se representado na Figura 5.9.

A reta normal a  $S$  no ponto  $P = (0, 1, 0)$  é dada pelas equações

$$\begin{cases} (X - P) \cdot T_1 = 0 \\ (X - P) \cdot T_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

ou seja, é o eixo  $Oy$ .

Note-se que, para  $z > 0$ ,

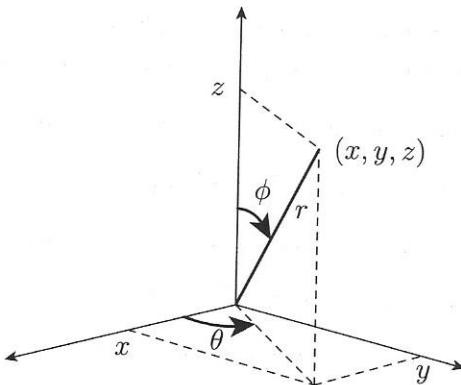
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Assim, a função  $g(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  é uma parametrização da parte da esfera em que  $z > 0$ . É claro que esta parametrização descreve apenas metade da esfera.

Tendo em conta a simetria, a esfera pode ser descrita de outro modo. Note-se que os pontos de uma esfera estão todos à mesma distância do centro. Se à distância ao centro se associarem os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , tal como se ilustra na Figura 5.10, ficam definidas novas variáveis  $(r, \theta, \phi)$ , que se relacionam com  $(x, y, z)$  através das equações

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi, \end{cases}$$

em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .



**Figura 5.10** Coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  em  $\mathbb{R}^3$

Nestas novas coordenadas, denominadas **coordenadas esféricas**, a esfera definida por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  passa a ser descrita pela equação  $r = 1$  e, portanto, as variáveis  $\theta, \phi$  podem ser usadas para descrever parametricamente a esfera  $S$ .

De facto, seja

$$g(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad 0 < \theta < 2\pi; 0 < \phi < \pi.$$

Esta função é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada,

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -\sin \phi \end{bmatrix},$$

tem característica 2. Para além disso, a sua imagem é a esfera sem a linha definida por  $x \geq 0, y = 0$ , ou seja,

$$g([0, 2\pi] \times [0, \pi]) = S \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0; y = 0\}.$$

Esta linha encontra-se destacada na Figura 5.9.

As colunas da matriz

$$Dg\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são os vetores tangentes  $-T_1$  e  $-T_2$  no ponto  $(0, 1, 0)$  (ver Figura 5.9).

Tal parametrização descreve a esfera, excluindo uma linha apenas, ou seja, as coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  são mais adequadas do que as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ .

Para descrever completamente a esfera são necessárias mais duas parametrizações.

Seja  $T = ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \subset \mathbb{R}^2$  e  $h, k : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  as funções definidas por

$$h(\theta, \phi) = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta)$$

$$k(\theta, \phi) = (\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta).$$

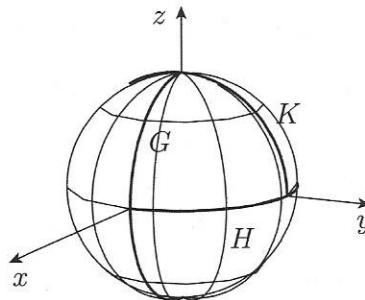
As funções  $g, h, k$  são de classe  $C^1$  e injetivas. Definindo

$$G = \{(x, y, z) : x \geq 0 ; y = 0\}$$

$$H = \{(x, y, z) : y \geq 0 ; z = 0\}$$

$$K = \{(x, y, z) : z \geq 0 ; x = 0\},$$

então cada uma das funções  $g, h, k$  estabelece uma bijeção entre o conjunto  $T \subset \mathbb{R}^2$  e as partes da esfera  $S \setminus G, S \setminus H, S \setminus K$ , respectivamente. As linhas  $G, H, K$  estão representadas na Figura 5.11.



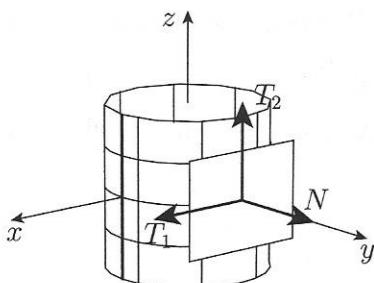
**Figura 5.11** Parametrização da esfera

É fácil verificar que, tal como  $Dg(\theta, \phi)$ , as derivadas  $Dh(\theta, \phi)$  e  $Dk(\theta, \phi)$  são matrizes com característica igual a 2. Portanto, as funções  $g, h, k$  parametrizam a esfera  $S$ .

**Exemplo 5.1.6** Seja  $C \subset \mathbb{R}^3$  o cilindro definido por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 ; -1 < z < 1,$$

que se encontra representado na Figura 5.12.



**Figura 5.12** Cilindro definido por:  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $-1 < z < 1$

Trata-se do conjunto de nível zero da função de classe  $C^1$  definida por

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1.$$

A derivada

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 1 em todos os pontos de  $S$ , porque o caso contrário ocorre apenas nos pontos da forma  $(0, 0, z)$ , que não se encontram em  $C$ . Portanto,  $C$  é uma variedade-2.

O vetor  $\nabla F(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$  é normal a  $S$  no ponto  $(0, 1, 0)$ .

Os vetores tangentes a  $S$  no mesmo ponto resultam da resolução da equação

$$T \cdot N = 0.$$

Fazendo  $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ , então  $\beta = 0$  e, portanto,

$$T = (\alpha, 0, \gamma) = \alpha(1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1).$$

Assim, os vetores  $T_1 = (1, 0, 0)$  e  $T_2 = (0, 0, 1)$  geram o espaço tangente a  $S$  no ponto  $(0, 1, 0)$ . Na Figura 5.12 encontram-se representados os vetores  $N, T_1, T_2$ .

Fazendo  $X = (x, y, z)$  e  $P = (0, 1, 0)$ , o plano tangente a  $S$  no ponto  $(0, 1, 0)$  é dado por

$$(X - P) \cdot N = 0,$$

ou seja,

$$(x, y - 1, z) \cdot (0, 2, 0) = 0 \Leftrightarrow y = 1,$$

e encontra-se representado na Figura 5.12.

A reta normal a  $S$  no ponto  $P = (0, 1, 0)$  é dada pelas equações

$$\begin{cases} (X - P) \cdot T_1 = 0 \\ (X - P) \cdot T_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

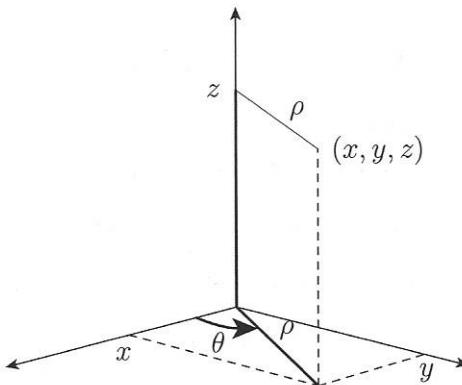
ou seja, é o eixo  $Oy$ .

Dado que

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2},$$

desde que  $y > 0$ , a função  $g(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2}, z)$  é uma parametrização da parte do cilindro em que  $y > 0$ .

É claro que esta parametrização descreve apenas metade do cilindro.



**Figura 5.13** Coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  em  $\mathbb{R}^3$

Tendo em conta a simetria, o cilindro pode ser descrito de outro modo. Note-se que os pontos do cilindro  $C$  estão todos à mesma distância do eixo  $Oz$ . Se à distância ao eixo  $Oz$  se associarem o ângulo  $\theta$  e a variável  $z$ , tal como se ilustra na Figura 5.13, ficam definidas novas variáveis  $(\rho, \theta, z)$ , que se relacionam com  $(x, y, z)$  pelas equações

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z, \end{cases}$$

em que  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Nestas novas coordenadas, denominadas **coordenadas cilíndricas**, o cilindro dado por  $x^2 + y^2 = 1$  passa a ser descrito pela equação  $\rho = 1$  e, portanto, as variáveis  $\theta, z$  podem ser usadas para o descrever parametricamente.

De facto, seja

$$g(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad 0 < \theta < 2\pi; -1 < z < -1.$$

Esta função é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 2. Para além disso, a sua imagem é o cilindro sem a linha, definida por  $x = 1, y = 0$ , ou seja

$$g([0, 2\pi] \times [-1, 1]) = C \setminus \{(x, y, z) : x = 1; y = 0\}.$$

Esta linha está destacada na Figura 5.12.

As colunas da matriz

$$Dg\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são os vetores tangentes  $-T_1$  e  $T_2$  no ponto  $(0, 1, 0)$  (ver Figura 5.12).

Esta parametrização descreve o cilindro excluindo uma linha apenas, ou seja, as coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  são mais adequadas do que as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ .

Para descrever completamente o cilindro, é necessário definir mais uma parametrização.

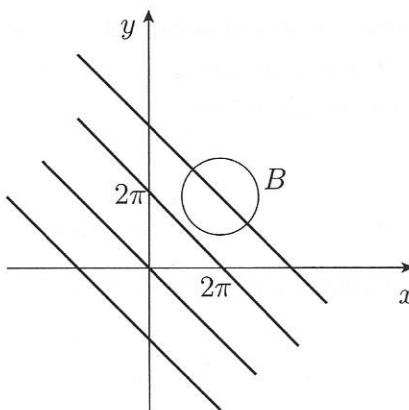
Seja  $h : ]-\pi, \pi[ \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por

$$h(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z).$$

Então, a função  $h$  é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada é igual à derivada de  $g$  e, portanto, tem característica igual a 2.

A imagem de  $h$  é o cilindro sem a linha vertical dada por  $x = -1; y = 0$ . Portanto, as funções  $g$  e  $h$  parametrizam o cilindro  $C$ .

**Exemplo 5.1.7** Seja  $M$  o conjunto definido pela equação  $\cos(x + y) = 1$ .



**Figura 5.14** Variedade-1 dada por  $\cos(x + y) = 1$

A função  $F(x, y) = \cos(x + y) - 1$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  e, da relação fundamental da trigonometria, obtém-se

$$\nabla F(x, y) = (-\sin(x + y), -\sin(x + y)) = (0, 0).$$

Portanto, o teorema da função implícita não pode ser aplicado. No entanto,

$$\cos(x + y) = 1 \Leftrightarrow x + y = 2k\pi; k \in \mathbb{Z},$$

ou seja, o conjunto  $M$  é a união numerável das retas definidas por  $y = -x + 2k\pi$ .

Na Figura 5.14 apresentam-se algumas dessas retas.

É claro que, dado um ponto qualquer de  $M$ , há uma bola  $B$ , nele centrada, em que  $M$  é o gráfico de uma das funções de classe  $C^1$  dadas por  $f(x) = -x + 2k\pi$ . Assim, o conjunto  $M$  é uma variedade-1 em  $\mathbb{R}^2$ .

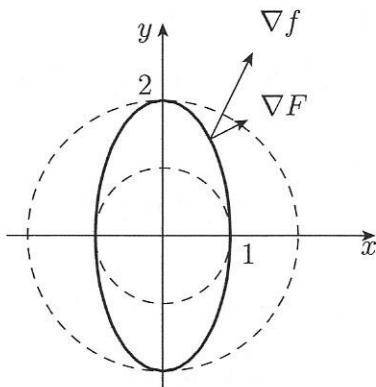
## 5.2 EXTREMOS CONDICIONADOS

Na Figura 5.15 encontra-se representada a elipse definida pela equação

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

É claro que a elipse é o conjunto de nível zero da função

$$F(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1.$$



**Figura 5.15** Extremos de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sobre a elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Como  $f(x, y)$  representa o quadrado da distância de um ponto  $(x, y)$  à origem, é claro que  $(0, 2)$  e  $(0, -2)$  são os pontos de máximo de  $f$  na elipse. Do mesmo modo,  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  são os pontos de mínimo de  $f$  sobre a elipse. Ou seja, se a função  $f$  for restrinuida à elipse, estes são os pontos onde se encontram os extremos.

A origem é o único ponto de estacionaridade da função  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ . De facto,

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Portanto, os extremos de  $f$ , quando restrinuida à elipse, não se encontram no conjunto dos pontos críticos de  $f$ . Assim, é necessário seguir uma estratégia diferente para determinar os extremos de  $f$  sobre a elipse.

Considere-se a função  $\gamma(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t) = (x(t), y(t))$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , cuja imagem é a elipse. A função composta  $f \circ \gamma$  definida pelo diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \gamma(t) & \mapsto & f(\gamma(t)). \end{array}$$

é a restrição de  $f$  à elipse.

Sendo  $[0, 2\pi]$  um intervalo compacto, a função composta  $f \circ \gamma$  tem máximo e mínimo absolutos. Os pontos de extremo ou estão no interior do intervalo  $I$ , e são pontos críticos, ou estão na fronteira.

No interior do intervalo tem-se

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0,$$

ou seja,

$$(2 \cos t, 4 \sin t) \cdot (-\sin t, 2 \cos t) = 0 \Leftrightarrow 6 \sin t \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \vee \cos t = 0,$$

e, portanto,

$$t = \frac{\pi}{2} \vee t = \pi \vee t = \frac{3\pi}{2}.$$

Dado que  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ , na fronteira do intervalo  $I$  basta considerar  $t = 0$ . Notando que

$$f(\gamma(0)) = f(\gamma(\pi)) = f(1, 0) = 1; f\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = f\left(\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = f(0, 2) = 4,$$

conclui-se que o procedimento seguido permite determinar os pontos de extremo da função  $f$  restringida à elipse.

É importante observar que o vetor  $\gamma'(t)$  é tangente à elipse no ponto  $\gamma(t)$ . Dado que num extremo se tem  $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ , então o vetor  $\nabla f(\gamma(t))$  é ortogonal ao vetor tangente  $\gamma'(t)$ . Portanto, o vetor  $\nabla f(x, y)$  pertence ao espaço normal à elipse no ponto  $(x, y)$ .

Sendo a elipse o conjunto de nível zero da função  $F$ , o vetor  $\nabla F(x, y)$  gera o espaço normal à elipse no ponto  $(x, y)$ .

Assim, num ponto de extremo, o vetor  $\nabla f(x, y)$  é um múltiplo do vetor  $\nabla F(x, y)$ , ou seja,

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y),$$

em que  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Deste modo, uma estratégia para determinar os extremos de  $f$ , quando sujeitos à condição  $F = 0$ , consiste em resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Portanto, os extremos de  $f$  pertencentes ao conjunto em que  $F = 0$  são aqueles onde os vetores  $\nabla f$  e  $\nabla F$  são colineares.

Seja  $(a, b)$  um extremo de  $f$  sobre a elipse definida pela equação  $F = 0$  e seja  $c = f(a, b)$ . Então, o conjunto de nível  $c$  de  $f$ , ou seja, o conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ , intersecta a elipse nesse ponto. De facto,

$$\begin{cases} f(a, b) = c \\ F(a, b) = 0. \end{cases}$$

Na Figura 5.15 estão representadas as circunferências de raio 1 e 2, respetivamente, e a elipse. Note-se que estas circunferências intersectam a elipse nos pontos de extremo. Por outro lado, os vetores  $\nabla f$  e  $\nabla F$  são colineares apenas nesses pontos.

\*\*\*

Este raciocínio pode ser aplicado à resolução de um problema mais geral, formulado do seguinte modo:

### Problema dos Extremos Condicionados

Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $m < n$ , funções de classe  $C^1$ .

Se o conjunto  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$  for uma variedade de dimensão  $(n - m)$ , então o problema dos extremos condicionados consiste na determinação dos extremos da função escalar  $f$  restrinuida à variedade  $M$ .

Dito de outro modo, pretende-se determinar os extremos de  $f$  sujeitos ao sistema de equações (ou **condições**):

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

em que  $F_1, F_2, \dots, F_m$  são as componentes da função  $F$  que define a variedade  $M$ .

Este sistema de equações define a variedade  $M$ , desde que a característica da derivada  $DF(x)$  seja igual a  $m$  em qualquer ponto  $x \in M$ .

No caso geral, o vetor  $\nabla f(x)$  deverá ser normal à variedade  $M$ , ou seja, deverá ser uma combinação linear dos vetores que geram o espaço normal à variedade.

De facto, seja  $a \in M$  um ponto de extremo de  $f$ , e seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho de classe  $C^1$  tal que

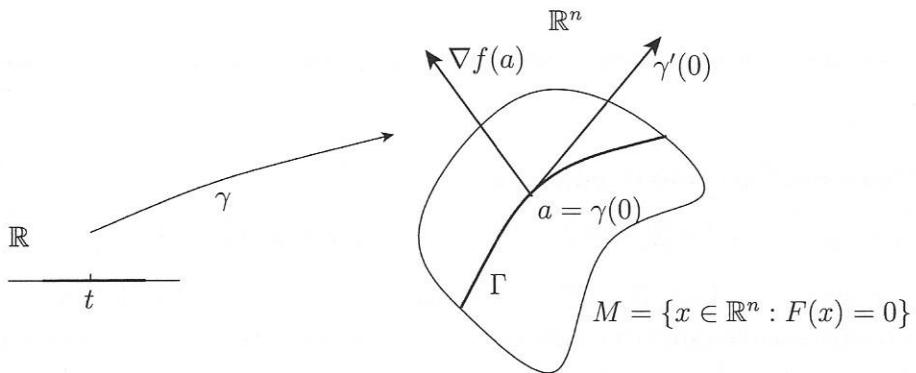
$$\gamma(0) = a ; \quad F(\gamma(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja,  $\gamma$  define uma linha  $\Gamma \subset M$  que passa no ponto  $a$ .

A função composta  $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de facto a restrição de  $f$  à linha  $\Gamma \subset M$  e, portanto, deverá apresentar um extremo em  $a$ , e, sendo uma função real de variável real, então:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(a) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

Assim, os vetores  $\nabla f(a)$  e  $\gamma'(0)$  são ortogonais, tal como se ilustra na Figura 5.16.



**Figura 5.16** Extremo condicionado

Por definição, o vetor  $\gamma'(0)$  é tangente à linha  $\Gamma$  no ponto  $a$  e, dado que  $\Gamma \subset M$ , o vetor  $\gamma'(0)$  é tangente a  $M$  nesse ponto. Portanto,  $\nabla f(a)$  é um vetor normal à variedade  $M$  nesse ponto, ou seja, é uma combinação linear dos vetores  $\nabla F_1(a), \nabla F_2(a), \dots, \nabla F_m(a)$ , isto é,

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla F_1(x) + \lambda_2 \nabla F_2(x) + \cdots + \lambda_m \nabla F_m(x) = 0 \\ F(x) = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

em que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ . Este sistema apresenta  $(n+m)$  equações e  $(n+m)$  incógnitas e, em geral, não é linear.

Os extremos da função  $f$  na variedade  $M$ , definida por  $F(x) = 0$ , encontram-se no conjunto de soluções do sistema (5.4), mas nem todas as soluções são extremos de  $f$ .

Os escalares  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  são os chamados **multiplicadores de Lagrange**. À estratégia para deduzir o Sistema de Equações (5.4) chama-se método dos multiplicadores de Lagrange.

**Nota 5.2.1** Seja  $c \in \mathbb{R}$  o valor extremo da função  $f$  no conjunto definido por  $F = 0$ . Os pontos em que isso acontece serão dados pelo sistema

$$\begin{cases} f(x) = c \\ F(x) = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

ou seja, estarão na intersecção do conjunto de nível  $c$  da função  $f$  com o conjunto de nível zero de  $F$ .

Recorde-se que o vetor  $\nabla f(x)$  é normal ao conjunto de nível dado por  $f(x) = c$  e pertence ao espaço normal da variedade descrita por  $F(x) = 0$ . Assim, num ponto de extremo de  $f$ , os conjuntos de nível descritos por  $f(x) = c$  e por  $F(x) = 0$  apresentam o mesmo espaço tangente, ou seja, nesse ponto, os dois conjuntos de nível são tangentes.

Portanto, geometricamente a determinação de um extremo condicionado consiste em encontrar o conjunto de nível de  $f$  que é tangente ao conjunto de nível zero de  $F$ .

**Exemplo 5.2.1** Para o caso da elipse, considerado acima,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad ; \quad F(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y = \frac{\lambda y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \lambda) = 0 \\ y(4 - \lambda) = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee \lambda = 1 \\ y = 0 \vee \lambda = 4 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

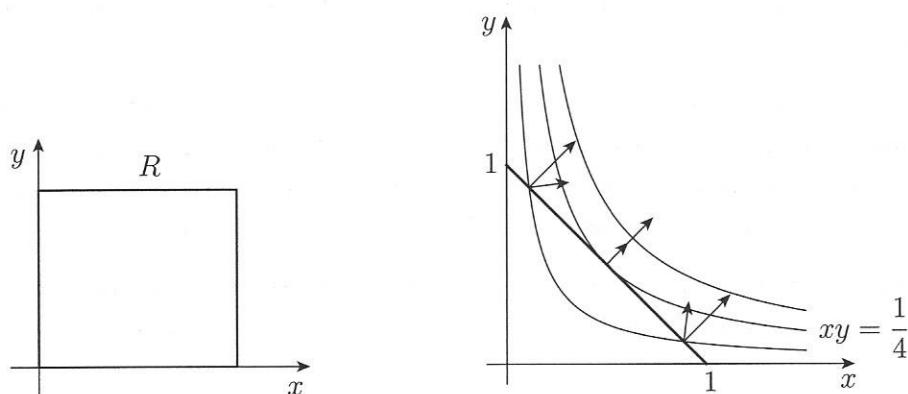
cuja solução é o conjunto de pontos  $\{(0, -2), (0, 2), (-1, 0), (1, 0)\}$ . Os dois primeiros são os mais afastados da origem e os outros dois são os mais próximos.

Note-se que o cálculo do escalar  $\lambda$  é irrelevante para o problema.

**Exemplo 5.2.2** No conjunto dos retângulos com perímetro igual a 2, qual deles apresenta maior área?

Neste caso, o perímetro fixo é uma condição ou restrição, e a área é a grandeza a maximizar.

Este problema pode ser formulado (ver Figura 5.17) em termos do método dos multiplicadores de Lagrange, fazendo  $f(x, y) = xy$  e  $F(x, y) = 2x + 2y - 2$ , ou seja, pretende-se determinar os extremos de  $f$  sujeitos à condição  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 1$ .



**Figura 5.17** Retângulo de perímetro fixo com área máxima

Então:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \lambda \\ 2x = 1 \end{cases}$$

e, portanto,  $y = x = \frac{1}{2}$ .

Trata-se de um quadrado de lado  $\frac{1}{2}$ , ou seja, um quadrado de área  $xy = \frac{1}{4}$ .

Na Figura 5.17 está ilustrado o método dos multiplicadores de Lagrange. De facto, nela estão representados os conjuntos de nível da função  $f$ , ou seja,  $xy = c$ ;  $c > 0$  (área), o

conjunto de nível zero de  $F$ , ou seja,  $x + y = 1$  (perímetro), e os vetores  $\nabla f$  e  $\nabla F$  nos pontos de intersecção.

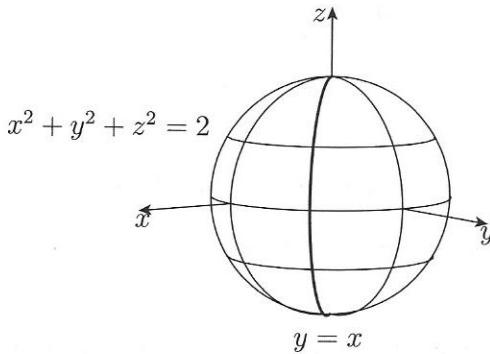
O máximo de  $f(x, y) = xy$  é atingido quando o respetivo gradiente  $\nabla f(x, y) = (y, x)$  é múltiplo (colinear) do gradiente  $\nabla F(x, y)$ , e isso acontece no ponto em que a linha  $xy = \frac{1}{4}$  é tangente à reta  $x + y = 1$ . Nos pontos de intersecção das linhas  $xy = c \neq \frac{1}{4}$  com a linha  $x + y = 1$ , os vetores  $\nabla f(x, y)$  e  $\nabla F(x, y)$  não são colineares, ou seja, nesses pontos tais linhas não são tangentes.

**Exemplo 5.2.3** Seja  $L$  o conjunto definido pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = x. \end{cases}$$

Quais os pontos de  $L$  mais próximos do ponto  $(0, 0, 1)$ ?

O conjunto  $L$  resulta da intersecção da esfera de raio  $\sqrt{2}$  e centro na origem com o plano vertical  $y = x$  e, portanto, é uma circunferência, tal como se ilustra na Figura 5.18.



**Figura 5.18** Circunferência em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ;  $y = x$

Seja  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$ . Esta é a função a minimizar em  $L$ . É claro que  $L$  é um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^3$  e, sendo  $f$  contínua, tem mínimo nesse conjunto.

A função  $\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}$  é a distância de um ponto  $(x, y, z)$  ao ponto  $(0, 0, 1)$ . No entanto, esta função não é diferenciável no ponto  $(0, 0, 1)$  e, dado que no método dos multiplicadores de Lagrange as funções envolvidas devem ser de classe  $C^1$ , não é elegível para a solução do problema.

O quadrado da distância definido pela função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$ , de classe  $C^1$ , resolve o mesmo problema.

Assim, sejam  $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$  e  $F_2(x, y, z) = y - x$ .

Portanto,

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla F_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla F_2(x, y, z) \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda_1 x - \lambda_2 \\ 2y = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2(z - 1) = 2\lambda_1 z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = x, \end{cases}$$

onde se deduz

$$\begin{cases} 2x(1 - \lambda_1) = -\lambda_2 \\ 2y(1 - \lambda_1) = \lambda_2 \\ z(1 - \lambda_1) = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = x. \end{cases}$$

Tendo em conta que  $y = x$ , da primeira e segunda equações deduz-se que  $\lambda_2 = 0$ . Da primeira equação obtém-se

$$x(1 - \lambda_1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \lambda_1 = 1.$$

Se  $\lambda_1 = 1$ , então da terceira equação obtém-se  $0 = 1$ . Assim,  $y = x = 0$ , e da quarta equação deduz-se  $z = \sqrt{2}$  ou  $z = -\sqrt{2}$ .

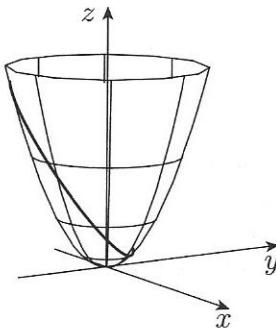
Portanto, os pontos a considerar são  $(0, 0, -\sqrt{2})$  e  $(0, 0, \sqrt{2})$ . É claro que o mais próximo de  $(0, 0, 1)$  é o ponto  $(0, 0, \sqrt{2})$ .

**Exemplo 5.2.4** Na Figura 5.19 encontra-se representada a linha definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Esta linha resulta da intersecção do plano definido por  $x + y + z = 1$  com o parabolóide dado por  $z = x^2 + y^2$ .

Pretende-se determinar o ponto desta linha que apresenta maior cota, ou seja, coordenada  $z$  mais elevada.



**Figura 5.19** Linha em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $z = x^2 + y^2$ ;  $x + y + z = 1$

No Exemplo 5.1.1 ficou provado que este conjunto é uma variedade de dimensão um em  $\mathbb{R}^3$ . O problema consiste em determinar os extremos da função  $f(x, y, z) = z$ , sujeitos à condição  $F(x, y, z) = (0, 0)$ . Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 0 = -2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 x = \lambda_2 \\ 2\lambda_1 y = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1(x - y) = 0 \\ 2\lambda_1 y = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação é claro que  $\lambda_1 = 0$  ou  $x = y$ .

No caso de  $\lambda_1 = 0$ , da segunda equação vem  $\lambda_2 = 0$ . Substituindo estes valores na terceira equação, deduz-se que este caso não pode ocorrer.

Para o caso em que  $x = y$ , da quarta e quinta equações:

$$2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

e, portanto,

$$x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

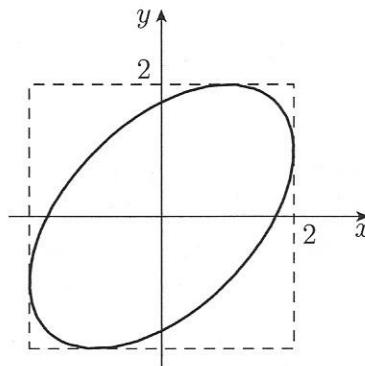
Sendo  $y = x$  e  $z = 1 - x - y$ , os pontos que resolvem o sistema são:

$$\left( \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, 2 + \sqrt{3} \right); \left( \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 2 - \sqrt{3} \right).$$

Assim, o ponto de cota mais elevada é o primeiro destes dois. O outro é o de cota menos elevada.

**Exemplo 5.2.5** Quais os pontos da elipse definida pela equação  $x^2 + y^2 - xy = 3$  que se encontram mais afastados do eixo  $Ox$ ?

Facilmente se verifica que esta linha é uma variedade de dimensão 1 em  $\mathbb{R}^2$ .



**Figura 5.20** Linha em  $\mathbb{R}^2$  dada por  $x^2 + y^2 - xy = 3$

A distância de um ponto do plano de coordenadas  $(x, y)$  ao eixo  $Ox$  é dada por  $|y|$ . Seja então  $f(x, y) = y$ .

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 0 = \lambda(2x - y) \\ 1 = \lambda(2y - x) \\ x^2 + y^2 - xy = 3. \end{cases}$$

Da primeira equação, é claro que  $\lambda = 0$  ou  $y = 2x$ . Fazendo  $\lambda = 0$  e substituindo na segunda equação, ter-se-ia  $1 = 0$ .

Portanto,  $y = 2x$  e, da terceira equação, deduz-se  $x^2 = 1$ , ou seja, os pontos que resolvem o sistema são  $(-1, -2)$ ,  $(1, 2)$ .

Note-se que estes pontos estão ambos à distância 2 do eixo  $Ox$ . Na Figura 5.20 encontra-se representada esta elipse onde se pode verificar que os pontos mais afastados tanto do eixo  $Ox$  como do eixo  $Oy$  se encontram à distância 2.

Note-se, também, que nesses pontos as linhas retas  $y = 2$  e  $y = -2$  são tangentes à elipse.

Do mesmo modo, os pontos da elipse mais afastados do eixo  $Oy$  podem ser determinados usando a função  $f(x, y) = x$ .

**Exemplo 5.2.6** Seja  $f(x, y) = x + y$  e  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ .

É claro que a função  $f$  é contínua, e  $D$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ . Pelo teorema de Weierstrass, a função  $f$  tem máximo e mínimo em  $D$ .

Os extremos de  $f$  em  $D$  ou estão no interior e são pontos críticos ou estão na fronteira. Sendo a fronteira uma variedade-1, dada pela equação  $x^2 + y^2 = 2$ , o método dos multiplicadores de Lagrange permite determinar os extremos que aí se encontram.

Sendo  $\nabla f(x, y) = (1, 1)$ , a função  $f$  não tem pontos críticos e, portanto, os extremos estão na fronteira, ou seja, na circunferência definida pela equação  $x^2 + y^2 = 2$ . Os pontos correspondentes são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2, \end{cases}$$

de onde se obtém  $2\lambda(x - y) = 0$ . O caso em que  $\lambda = 0$  não ocorre, porque daí viria  $1 = 0$ . Portanto,  $y = x$  e, da terceira equação, deduz-se que  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$ .

Sendo  $f(-1, -1) = -2$  e  $f(1, 1) = 2$ , conclui-se que  $(-1, -1)$  é o ponto de mínimo e  $(1, 1)$  é o ponto de máximo.

### 5.3 EXERCÍCIOS

1. Considere o conjunto  $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 ; z = 1 + y\}$ .
  - a) Mostre que  $L$  é uma variedade e determine a respetiva dimensão.
  - b) Determine o espaço tangente a  $L$  no ponto  $(0, 0, 1)$ .
  - c) Parametrize a variedade  $L$ .

2. Considere o conjunto  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 < 2\}$ .
  - a) Mostre que  $S$  é uma variedade e determine a respetiva dimensão.
  - b) Determine o espaço normal e o espaço tangente a  $S$  no ponto  $(1, 0, 1)$ .
  - c) Parametrize a variedade  $S$ .
3. Determine os pontos da linha definida pelas equações  $z = x^2 - y^2$ ;  $x^2 + y^2 = 1$  em que a reta tangente é horizontal.
4. Determine os extremos da função  $f(x, y) = 2x(y - 1)$  no círculo de raio igual a 1 e centro na origem.
5. Determine os extremos da função  $f(x, y) = x^3 + y$  no conjunto limitado pela elipse  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ .
6. Determine os extremos da função  $f(x, y, z) = (x + z)(y + z)$  na esfera definida por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
7. Calcule a distância do ponto  $(0, 1, 2)$  ao conjunto dado pela equação  $z = x^2 + y^2$ .
8. Mostre que no conjunto definido pelas equações  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;  $z = 1 + y$  existe um ponto com maior coordenada  $x$ . Determine esse ponto.
9. Determine os extremos da função  $f(x, y) = xy$  no conjunto

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1 ; x \geq 0 ; y \geq 0\}$$

e mostre que  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .

10. Sejam  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  duas variedades, com  $\dim M = m$ ,  $\dim N = k$ , tais que para todo o ponto  $p \in M \cap N \neq \emptyset$  se tem  $(T_p M)^\perp \cap (T_p N)^\perp = \{0\}$ . Mostre que  $M \cap N$  é uma variedade e determine o espaço tangente  $T_p(M \cap N)$ .

# 6

---

FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

Um dos objetivos da teoria do integral é a definição e cálculo de comprimentos de linhas, áreas de superfícies e volumes de sólidos. Para isso parte-se de conjuntos básicos, tais como segmentos de reta, retângulos e paralelepípedos que serão designados por intervalos. Nestes casos as noções de comprimento, área e volume são muito simples e intuitivas.

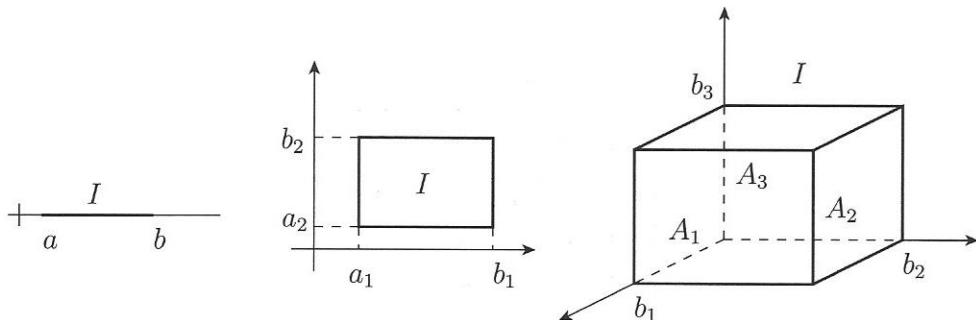
## 6.1 INTERVALOS. PARTIÇÕES. FUNÇÕES EM ESCADA

**Definição 6.1.1** Um intervalo em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto da forma

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in A_k ; k = 1, 2, \dots, n\},$$

onde cada conjunto  $A_k$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ .

É claro que  $I = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  e diz-se que  $I$  é o produto cartesiano das suas **arestas**  $A_k$ .



**Figura 6.1** Intervalos em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$

Em  $\mathbb{R}^2$  um intervalo é um retângulo cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados. Em  $\mathbb{R}^3$  trata-se de um paralelepípedo cujas faces são paralelas aos planos coordenados e cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados.

É fácil verificar que um intervalo  $I \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto, fechado ou limitado se e só se todos os intervalos  $A_k$  são, respectivamente, abertos, fechados ou limitados. Um intervalo limitado e fechado é um intervalo compacto.

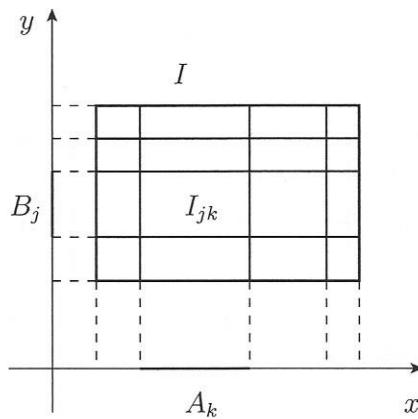
Na Figura 6.1 representam-se exemplos de intervalos limitados em  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 6.1.2** Dado um intervalo limitado  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , uma **partição** de  $I$  é uma coleção finita de pontos  $P = \{p_0 < p_1 < \dots < p_m\}$ ;  $m \in \mathbb{N}$ , em que  $a = p_0$  e  $b = p_m$ .

Esta coleção de pontos determina a coleção de subintervalos  $\{I_k ; k = 1, 2, \dots, m\}$ , sendo cada  $I_k$  limitado pelos extremos  $p_{k-1}$  e  $p_k$ . Assim, a partição  $P$  pode ser identificada com a coleção finita de subintervalos  $\{I_k\}_{k=1}^m$ .

Uma partição de um intervalo limitado  $I = A_1 \times A_2$  em  $\mathbb{R}^2$  é o produto  $P = P_1 \times P_2$ , em que  $P_1$  é uma partição da aresta  $A_1$ , e  $P_2$  é uma partição da aresta  $A_2$ . Sejam  $m_1$  e  $m_2$ , respetivamente, o número de subintervalos de  $P_1$  e de  $P_2$ . Tal como no caso anterior, a partição  $P$  pode ser identificada com uma coleção de subintervalos designados por  $\{I_{jk}\}_{j,k=1}^{m_1, m_2}$ .

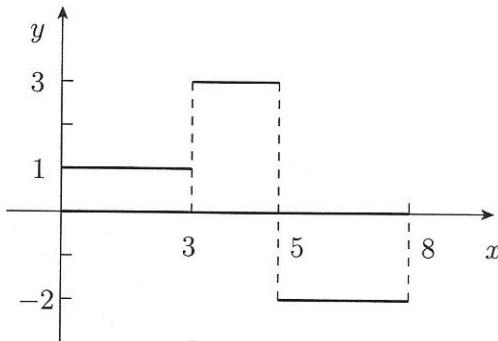
Na Figura 6.2 representa-se uma partição de um intervalo em  $\mathbb{R}^2$ . Cada subintervalo da partição  $I_{jk}$  é o produto de duas arestas,  $A_k$  e  $B_j$ , ou seja,  $I_{jk} = A_k \times B_j$ .



**Figura 6.2** Partição de um intervalo em  $\mathbb{R}^2$

Do mesmo modo, dado um intervalo limitado  $I = A_1 \times A_2 \times A_3$  em  $\mathbb{R}^3$ , uma partição de  $I$  é o produto  $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ , onde cada  $P_k$  é uma partição da aresta  $A_k$  em que  $k = 1, 2, 3$ . Tal como nos casos anteriores,  $P$  pode ser identificada com uma coleção de subintervalos  $\{I_{jkl}\}_{j,k,l=1}^{m_1, m_2, m_3}$ .

Assim, de um modo geral, uma partição de um intervalo limitado  $I$  pode ser definida por uma coleção de subintervalos limitados  $\{I_k\}_{k=1}^N$ , em que  $N < \infty$ .



**Figura 6.3** Exemplo de uma função em escada em  $\mathbb{R}$

**Definição 6.1.3** Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo limitado. Diz-se que  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função em escada** em  $I$ , se existir uma partição  $\{I_k\}_{k=1}^N$  do intervalo  $I$ , e uma coleção de números reais  $\{s_k\}_{k=1}^N$ , tais que  $s(x) = s_k$ , se  $x \in \text{int}(I_k)$ , em que  $\text{int}(I_k)$  designa o interior de  $I_k$ .

Não é relevante para a nossa discussão o modo como a função em escada é definida nas arestas dos intervalos da partição, desde que seja limitada.

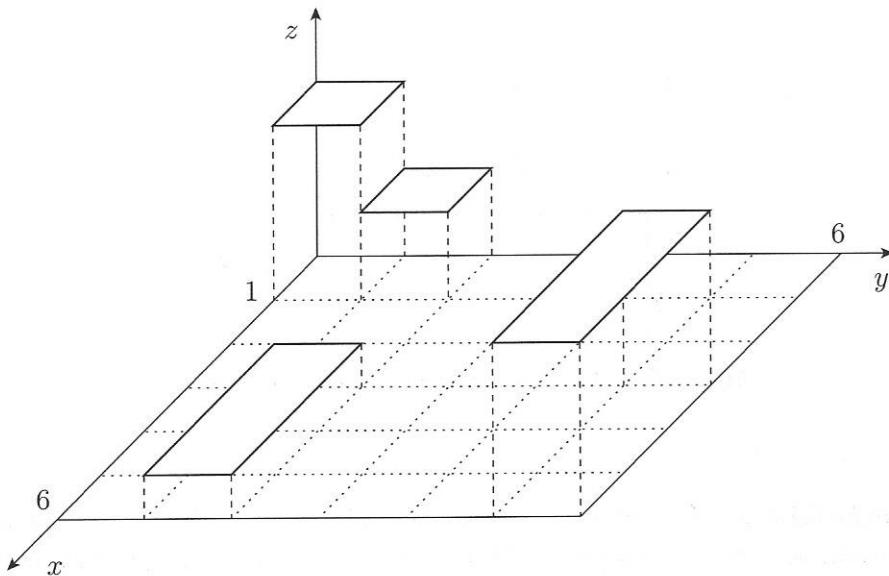
Dadas duas funções em escada  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $t : I \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma partição  $P$  associada às duas. Basta considerar em cada aresta do intervalo  $I$  a união das correspondentes partições das duas funções.

Assim, sem perda de generalidade, pode considerar-se que às duas funções está associada a mesma partição.

**Definição 6.1.4** Dado um intervalo limitado,  $I = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subset \mathbb{R}^n$ , chama-se **volume** de  $I$  à quantidade  $\text{vol}_n(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ , em que  $a_i < b_i$  são os extremos da aresta  $A_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Um intervalo  $I \subset \mathbb{R}^n$  é o produto cartesiano de  $n$  intervalos  $A_k \subset \mathbb{R}$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$ . Então:

$$\text{vol}_n(I) = \prod_{k=1}^n \text{vol}_1(A_k).$$



**Figura 6.4** Exemplo de uma função em escada em  $\mathbb{R}^2$

**Definição 6.1.5** Dada uma função em escada,  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , chama-se **integral** de  $s$  em  $I \subset \mathbb{R}^n$  à quantidade

$$\int_I s = \sum_{k=1}^N s_k \text{vol}_n(I_k),$$

em que  $\{I_k\}_{k=1}^N$  é uma partição associada à função  $s$ .

Em  $\mathbb{R}$ , o integral de uma função em escada  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I = [a, b]$ , será designado pela expressão

$$\int_I s = \int_a^b s(x) dx.$$

No caso de uma função em escada  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ , será

$$\int_I s = \sum_j \sum_k s_{jk} \text{vol}(I_{jk}) = \sum_j \sum_k s_{jk} \text{vol}(A_k) \text{vol}(B_j),$$

em que  $s_{jk}$  designa o valor de  $s$  no interior do subintervalo  $I_{jk} = A_k \times B_j$ .

Neste caso o integral de uma função em escada  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , será designado pela expressão

$$\int_I s = \int_I s(x, y) dx dy.$$

A soma dupla pode ser efetuada de duas maneiras:

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k s_{jk} \text{vol}(A_k) \text{vol}(B_j) &= \sum_j \left( \sum_k s_{jk} \text{vol}(A_k) \right) \text{vol}(B_j) = \\ &= \sum_k \left( \sum_j s_{jk} \text{vol}(B_j) \right) \text{vol}(A_k). \end{aligned}$$

Para cada  $a \leq x \leq b$ , a função  $y \mapsto s(x, y)$  é uma função em escada. Do mesmo modo, para cada  $c \leq y \leq d$ , a função  $x \mapsto s(x, y)$  é uma função em escada.

Dado que  $A_k$  é a aresta de  $I_{jk}$  na direção  $Ox$ , então:

$$\sum_k s_{jk} \text{vol}(A_k) = \int_a^b s(x, y) dx.$$

Nesta soma,  $y$  está fixo na aresta  $B_j$  e, do mesmo modo, sendo  $B_j$  a aresta na direção  $Oy$ ,

$$\sum_j s_{jk} \text{vol}(B_j) = \int_c^d s(x, y) dy,$$

em que  $x$  está fixo na aresta  $A_k$ .

Assim, o integral de  $s$  em  $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  pode ser calculado de duas maneiras diferentes:

$$1. \int_I s = \int_I s(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d s(x, y) dy \right) dx$$

$$2. \int_I s = \int_I s(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b s(x, y) dx \right) dy.$$

É claro que, se  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função em escada definida num intervalo compacto  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ , então o respetivo integral pode ser calculado da forma:

$$\int_I s = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \dots \int_{a_n}^{b_n} s(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1. \quad (6.1)$$

\*\*\*

Dadas duas funções em escada  $s$  e  $t$ , é claro que a função  $as + bt$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais, é também uma função em escada, e o respetivo integral é dado por

$$\int_I (as + bt) = a \int_I s + b \int_I t.$$

**Exemplo 6.1.1** Seja  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  e  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função, cujo gráfico se apresenta na Figura 6.3, definida por

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 3, & \text{se } \frac{1}{2} < x < \frac{2}{3} \\ -2, & \text{se } \frac{2}{3} < x < 1. \end{cases}$$

Trata-se de uma função em escada, cujo integral é dado por

$$\int_I s = \int_I s(x) dx = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) - 2 \times \left( 1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

**Exemplo 6.1.2** Seja  $I = [0, 6] \times [0, 6] \subset \mathbb{R}^2$ , e  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função em escada dada por

$$s(x, y) = \begin{cases} 4, & \text{se } 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 2, & \text{se } 0 < x < 1; 1 < y < 2 \\ 1, & \text{se } 3 < x < 6; 1 < y < 2 \\ 4, & \text{se } 3 < x < 6; 5 < y < 6 \\ 0, & \text{nos restantes casos,} \end{cases}$$

cujo gráfico se apresenta na Figura 6.4.

O integral de  $s$  em  $I$  é dado por

$$\int_I s = \int_I s(x, y) dx dy = 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4 = 21.$$

**Exemplo 6.1.3** Seja  $I = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 2] \subset \mathbb{R}^3$ , e  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$s(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1; 0 < y < 2; 1 < z < \frac{3}{2} \\ 2, & \text{se } 0 < x < 1; 0 < y < 2; \frac{3}{2} < z < 2. \end{cases}$$

O integral de  $s$  em  $I$  é dado por

$$\int_I s = \int_I s(x, y, z) dx dy dz = 1 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3.$$

## 6.2 FUNÇÕES INTEGRÁVEIS À RIEMANN

Sabendo, por definição, calcular volumes de intervalos compactos e integrar funções em escada, coloca-se a questão de fazer o mesmo para outros conjuntos compactos e encontrar critérios que nos permitam decidir da existência do integral de uma dada função, bem como o modo de calcular o respetivo integral.

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e definida num intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}^n$  e considere-se o conjunto das funções em escada  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $s \leq f$ , e o conjunto das funções em escada  $t : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $f \leq t$ .

É importante notar que estes conjuntos não são vazios, porque a função  $f$  é limitada. De facto, sabendo que existe  $M > 0$ , tal que  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in I$ , as funções constantes  $s(x) = -M$  e  $t(x) = M$  verificam a condição  $s \leq f \leq t$ .

O integral em  $\mathbb{R}^n$  será definido, recorrendo às funções em escada que verificam a condição  $s \leq f \leq t$ .

**Definição 6.2.1** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e definida num intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $f$  é integrável à **Riemann** em  $I$ , se

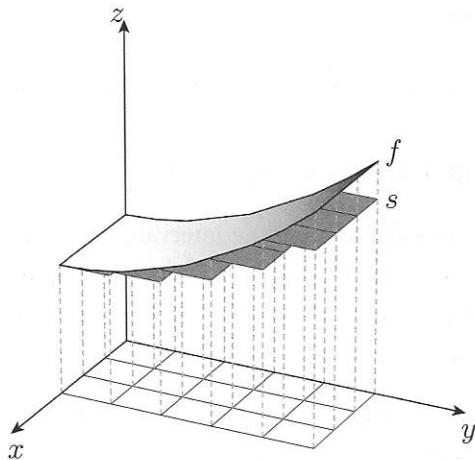
$$\sup_{s \leq f} \int_I s = \inf_{t \geq f} \int_I t.$$

O respetivo integral é o número real

$$\int_I f = \sup_{s \leq f} \int_I s = \inf_{t \geq f} \int_I t.$$

Na Figura 6.5 encontra-se um exemplo de uma função limitada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e uma função em escada  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $s \leq f$ , com  $I \subset \mathbb{R}^2$ , para ilustração da definição de integral.

As funções em escada são naturalmente integráveis face a esta definição. Para além disso, é importante observar que, tendo em conta a expressão (6.1), dada uma função em escada



**Figura 6.5** Exemplo de uma função em escada  $s \leq f$

$s : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida em  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ , então a função  $x_k \rightarrow s(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ , em que todas as variáveis estão fixas, exceto  $x_k$ , é integrável no intervalo  $[a_k, b_k]$ , para qualquer  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Por definição de ínfimo e de supremo, é claro que, dado  $\varepsilon > 0$ , deverão existir duas funções em escada  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $t : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $s \leq f \leq t$  e

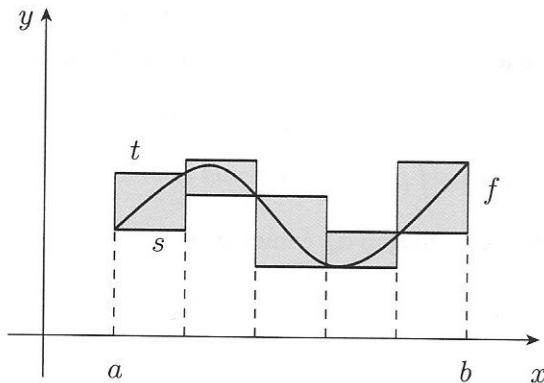
$$\int_I (t - s) < \varepsilon \Leftrightarrow \int_I t < \int_I s + \varepsilon.$$

É também claro que, dado  $\varepsilon > 0$ , então:

$$\int_I f < \int_I s + \varepsilon,$$

ou seja, o integral  $\int_I s$  é uma aproximação por defeito do integral de  $f$ . Do mesmo modo, o integral  $\int_I t$  é uma aproximação por excesso do integral de  $f$ .

Em  $\mathbb{R}$ , o integral  $\int_I (t - s)$  mede a área compreendida entre os gráficos de  $s$  e de  $t$ , tal como se ilustra na Figura 6.6. Em  $\mathbb{R}^n$ , esse integral mede o volume do conjunto compreendido entre os gráficos de  $s$  e de  $t$ .



**Figura 6.6** A área entre os gráficos de  $s$  e  $t$  deve ser inferior a  $\varepsilon$

Assim, uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, se para qualquer  $\varepsilon > 0$  existirem duas funções em escada  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $s \leq f \leq t$ , e o volume do conjunto compreendido entre os respectivos gráficos for inferior a  $\varepsilon$ .

\*\*\*

Da definição de função integrável deduzem-se algumas propriedades úteis.

1. Dadas duas funções integráveis  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  e dado  $\varepsilon > 0$ , sejam  $s_f, t_f, s_g, t_g$  funções em escada, tais que  $s_f \leq f \leq t_f, s_g \leq g \leq t_g$  e

$$\int_I (t_f - s_f) < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \int_I (t_g - s_g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$\int_I (t_f + t_g) = \int_I t_f + \int_I t_g < \int_I s_f + \int_I s_g + \varepsilon = \int_I (s_f + s_g) + \varepsilon$$

e, como se pode tomar  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeno e  $s_f + s_g \leq f + g \leq t_f + t_g$ , então a função  $f + g$  é também integrável em  $I$ , e

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

É claro que, se  $f$  for integrável, então a função  $af$ , em que  $a \geq 0$ , é também uma função integrável em  $I$ .

Para o caso em que  $a < 0$ , basta notar que, se  $f$  for integrável, então  $-f$  também é integrável. De facto, se  $s$  e  $t$  forem funções em escada, tais que  $s \leq f \leq t$ , então:

$$-t \leq -f \leq -s,$$

$$\text{com } \int_I (-s - (-t)) = \int_I (t - s) < \varepsilon.$$

Portanto, para  $a \in \mathbb{R}$ , a função  $af$  é integrável, e

$$\int_I af = a \int_I f.$$

2. Dadas duas funções integráveis  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $f \leq g$ , então  $\int_I f \leq \int_I g$ .

De facto, se  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função em escada e  $s \leq f$ , então  $s \leq g$ . Por outro lado, se  $t : I \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função em escada e  $t \geq g$ , então  $t \geq f$ .

Portanto,

$$\sup_{s \leq f} \int_I s \leq \sup_{s \leq g} \int_I s ; \quad \inf_{t \geq f} \int_I t \leq \inf_{t \geq g} \int_I t,$$

ou seja,

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

3. Dada uma função integrável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sejam  $f^+$  e  $f^-$  as funções definidas em  $I$  por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

e

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \\ 0, & \text{se } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

As funções  $f^+$  e  $f^-$  são ambas não negativas, e facilmente se verifica que

$$f = f^+ - f^- ; \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Sejam  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções em escada, tais que  $s \leq f \leq t$ , e sejam  $S^+, S^-, T^+, T^-$  as funções em escada definidas por

$$S^+ = \begin{cases} s, & \text{se } f \geq 0 \\ 0, & \text{se } f < 0 \end{cases} ; \quad T^+ = \begin{cases} t, & \text{se } f \geq 0 \\ 0, & \text{se } f < 0 \end{cases}$$

e

$$S^- = \begin{cases} -t, & \text{se } f \leq 0 \\ 0, & \text{se } f > 0 \end{cases}; \quad T^- = \begin{cases} -s, & \text{se } f \leq 0 \\ 0, & \text{se } f > 0. \end{cases}$$

Facilmente se conclui que estas funções em escada são não negativas e verificam as relações seguintes:

$$S^+ \leq f^+ \leq T^+ ; \quad S^- \leq f^- \leq T^- ; \quad S^+ + S^- \leq |f| \leq T^+ + T^-.$$

É claro que

$$t = T^+ - S^+ ; \quad s = S^+ - T^-$$

e, portanto,

$$t - s = (T^+ - S^+) + (T^- - S^-) = (T^+ + T^-) - (S^+ + S^-).$$

Assim, a função  $f$  é integrável, se e só se as funções  $f^+$  e  $f^-$  também o forem.

Para além disso, se  $f$  for integrável, então  $|f|$  também é integrável.

Tendo em conta que  $f \leq |f|$  e  $-f \leq |f|$ , então:

$$\int_I f \leq \int_I |f| ; \quad -\int_I f \leq \int_I |f|,$$

ou seja,

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

4. Para uma função integrável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dado  $\varepsilon > 0$ , sejam  $s$  e  $t$  duas funções em escada, tais que  $s \leq f \leq t$  e

$$\int_I t - \varepsilon < \int_I f < \int_I s + \varepsilon.$$

Seja  $\{I_k\}_{k=1}^N$  a correspondente partição associada a  $s$  e  $t$ . Seja  $\bar{x}_k \in I_k$  um ponto qualquer do interior de  $I_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, N$ .

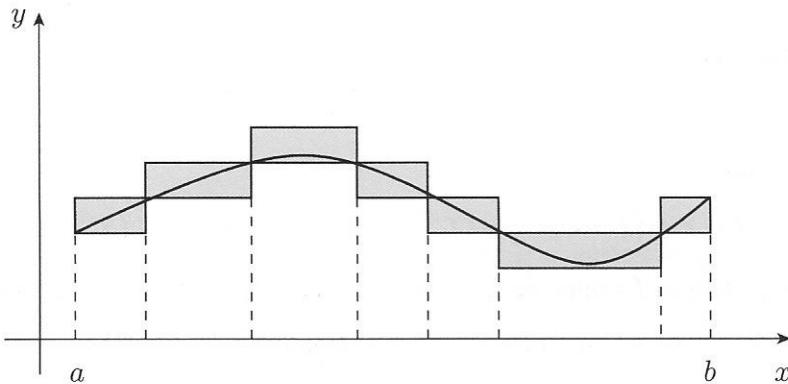
Seja  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função em escada definida por  $S(x) = f(\bar{x}_k)$ , se  $x \in \text{int}(I_k)$ .

É claro que  $s \leq S \leq t$  e, portanto,

$$\int_I S - \varepsilon < \int_I f < \int_I S + \varepsilon.$$

**Teorema 6.2.1** Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição  $\{I_k\}_{k=1}^N$  do intervalo  $I$ , tal que

$$\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f < \varepsilon, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}. \quad (6.2)$$



**Figura 6.7** Oscilação de uma função contínua num intervalo compacto

A propriedade (6.2) das funções contínuas encontra-se ilustrada na Figura 6.7. Note-se que a diferença  $\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f$  é inferior a  $\varepsilon$  em todos os subintervalos da partição.

À diferença  $\sup_A f - \inf_A f$  chama-se **oscilação** de  $f$  no conjunto  $A$ , e será designada pela expressão  $\text{osc}(f, A)$ .

Se esta propriedade não se verificasse, então existiria  $\varepsilon > 0$ , tal que, para qualquer partição  $\{I_k\}_{k=1}^N$  de  $I$ , ter-se-ia  $\text{osc}(f, I_k) > \varepsilon$ , em algum subintervalo  $I_k$  dessa partição.

Considere-se a partição de  $I$  que se obtém dividindo ao meio cada uma das respetivas arestas, e seja  $I_1$  o subintervalo em que  $\text{osc}(f, I_2) > \varepsilon$ . Seja  $a_1$  um ponto desse subintervalo. Repetindo este processo para o intervalo  $I_1$ , obtém-se um intervalo  $I_2 \subset I_1$ , em que a oscilação de  $f$  é superior a  $\varepsilon$ , sendo  $a_2$  um ponto de  $I_2$ .

Repetindo este processo, obtém-se uma sucessão de subintervalos

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots,$$

e uma sucessão de pontos  $a_j \in I_j$ , que, por construção, é limitada.

Por ser limitada, essa sucessão tem uma subsucessão convergente, também designada por  $a_j$ . Seja  $a$  o respetivo limite.

Dado que  $f$  é uma função contínua, seja  $I_m$  o subintervalo, em que  $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Então, para quaisquer  $x, y \in I_m$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja,  $\text{osc}(f, I_m) < \varepsilon$ .

Mas, por construção,  $\text{osc}(f, I_m) > \varepsilon$ , ou seja, a propriedade deve verificar-se.

\*\*\*

Dado  $\varepsilon > 0$  considere-se a partição  $\{I_k\}_{k=1}^N$  do intervalo  $I$ , tal que, em cada um dos respetivos subintervalos, se tem

$$\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(I)}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Sejam  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  as funções em escada que no interior de cada  $I_k$  assumem, respetivamente, o ínfimo e o supremo de  $f$  nesse subintervalo e assumem, respetivamente o ínfimo e o supremo de  $f$  em  $I$  nas arestas de  $I_k$ .

Por definição,  $s \leq f \leq t$  e, para além disso,

$$\int_I (t - s) = \sum_{k=1}^N (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f) \text{vol}(I_k) < \varepsilon,$$

ou seja,  $f$  é integrável em  $I$ .

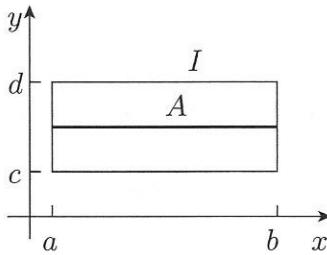
**Teorema 6.2.2** *Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto, e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então,  $f$  é integrável em  $I$ .*

\*\*\*

As funções em escada são integráveis, mas podem ser descontínuas nas arestas dos subintervalos da partição do respetivo intervalo de definição.

Note-se que uma aresta de um intervalo em  $\mathbb{R}^2$  é um segmento de reta e estará contida num intervalo de área arbitrariamente pequena. Na Figura 6.8 está representado um segmento de reta  $A$  e um intervalo  $I = ]a, b[ \times ]c, d[$ , em que  $d - c < \frac{\varepsilon}{b-a}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , então  $A \subset I$  e  $\text{vol}(I) < \varepsilon$ . Intuitivamente, uma aresta de um intervalo em  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto que tem área nula.



**Figura 6.8**  $\forall \varepsilon > 0 \exists I : A \subset I ; \text{vol}(I) < \varepsilon$

Por outro lado, as arestas dos intervalos são gráficos de funções contínuas.

O gráfico de uma função contínua  $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tem volume nulo em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

De facto, seja  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida num intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}^n$ . Invocando o Teorema 6.2.1, dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\{I_k\}_{k=1}^N$  uma partição de  $I$ , tal que, em cada um dos respetivos subintervalos, se verifique

$$\sup_{I_k} \phi - \inf_{I_k} \phi < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(I)}.$$

Fazendo

$$a_k = \inf_{I_k} \phi ; \quad b_k = \sup_{I_k} \phi$$

e

$$J_k = I_k \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

é claro que, se  $x \in I_k$ , então  $y = \phi(x) \in [a_k, b_k]$ , e, portanto, o gráfico de  $\phi$ ,

$$G(\phi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \phi(x)\},$$

estará contido numa união finita de intervalos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  cujo volume é

$$\sum_{k=1}^N \text{vol}_{n+1}(J_k) = \sum_{k=1}^N \text{vol}_n(I_k)(b_k - a_k) < \varepsilon.$$

**Definição 6.2.2** Diz-se que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem **conteúdo nulo**, se, dado  $\varepsilon > 0$ , existir uma coleção finita de intervalos  $\{I_k\}_{k=1}^N$  tais que

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^N I_k ; \quad \sum_{k=1}^N \text{vol}(I_k) < \varepsilon.$$

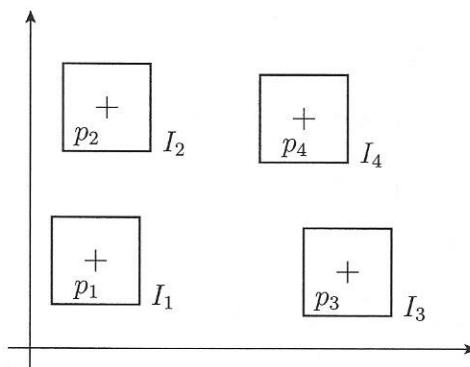
Com esta definição, obtém-se uma propriedade interessante do gráfico de uma função contínua.

**Teorema 6.2.3** O gráfico de uma função contínua  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}^n$ , tem conteúdo nulo em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

\*\*\*

**Exemplo 6.2.1** Um conjunto constituído por um número finito de pontos em  $\mathbb{R}^n$  tem conteúdo nulo.

De facto, seja  $A = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  esse conjunto, com  $N < \infty$ , e sejam  $I_1, I_2, \dots, I_N$  intervalos centrados nos pontos de  $A$ , tais que  $\text{vol}(I_k) < \varepsilon/N$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .



**Figura 6.9** Um conjunto finito de pontos tem conteúdo nulo em  $\mathbb{R}^n$

Assim,

$$A \subset \bigcup_{k=1}^N I_k ; \quad \sum_{k=1}^N \text{vol}(I_k) < \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon.$$

Na Figura 6.9 encontra-se ilustrado um caso em  $\mathbb{R}^2$ , com  $N = 4$ .

**Exemplo 6.2.2** Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_N$  conjuntos de conteúdo nulo em  $\mathbb{R}^n$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\{I_{kj}\}_{j=1}^{m_k}$  a coleção de intervalos, tal que

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} I_{kj} ; \quad \sum_{j=1}^{m_k} \text{vol}(I_{kj}) < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Assim, para a coleção de todos os intervalos  $I_{kj}$ , com  $k = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, m_k$ ,

$$\bigcup_{k=1}^N A_k \subset \bigcup_{k=1, j=1}^{Nm_k} I_{kj} ; \quad \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{m_k} \text{vol}(I_{kj}) < \varepsilon.$$

**A união finita de conjuntos de conteúdo nulo é também um conjunto de conteúdo nulo.**

**Exemplo 6.2.3** A fronteira de cada um dos conjuntos seguintes tem conteúdo nulo, porque se trata da união finita de conjuntos de conteúdo nulo, designadamente, gráficos de funções contínuas definidas em conjuntos compactos:

- a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 1\}$
- b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
- c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$
- d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 ; -1 < z < 1\}$
- e)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2 ; -1 < z < 1\}$
- f)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\}$
- g)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}$
- h)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$
- i)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 < 1\}$

Mais geralmente, a fronteira de um conjunto limitado e definido por um sistema de inequações que envolvam funções contínuas tem conteúdo nulo.

\*\*\*

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e contínua exceto num conjunto de conteúdo nulo.

Seja  $D \subset I$  o conjunto dos pontos em que  $f$  não é contínua. Então existe uma coleção de intervalos  $\{I_k\}_{k=1}^N$ , tais que

$$D \subset \bigcup_{k=1}^q I_k ; \quad \sum_{k=1}^q \text{vol}(I_k) < \varepsilon.$$

Por outro lado, se  $x \in I$  for um ponto em que  $f$  é contínua, então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma bola  $B = B_\delta(x) \subset I$ , tal que  $\text{osc}(f, B) < \varepsilon$ . Portanto, existe um intervalo  $I(x) \subset B$ , centrado em  $x$ , em que  $\text{osc}(f, B) < \varepsilon$ .

Assim, é claro que a coleção de intervalos

$$\{I_k\}_{k=1}^N \cup \{I(x)\}_{x \in I \setminus D}$$

constitui uma cobertura de  $I$ .

Sendo  $I$  um intervalo compacto, existirá um número finito de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  em  $I \setminus D$ , tais que

$$I \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N \cup I(x_1) \cup I(x_2) \cup \dots \cup I(x_p).$$

Esta coleção de intervalos gera uma partição do intervalo  $I$ . Seja  $\{J_k\}_{k=1}^m$  essa partição e, sem perda de generalidade,

$$D \subset \bigcup_{k=1}^q J_k ; \quad \sum_{k=1}^q \text{vol}(J_k) < \varepsilon, \quad q < m.$$

Seja  $M > 0$ , tal que  $|f(x)| \leq M$ , e sejam  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  as funções em escada definidas por

$$s(x) = -M ; \quad t(x) = M$$

nos subintervalos  $J_k$ , com  $1 \leq k \leq q$ , e assumindo, respetivamente, o ínfimo de  $f$  e o supremo de  $f$  em cada um dos restantes subintervalos.

Assim,  $s \leq f \leq t$  em  $I$ , e, para além disso,

$$\int_I (t - s) \leq 2M\varepsilon + \sum_{k=q+1}^m \varepsilon \text{vol}(J_k) < 2M\varepsilon + \varepsilon \text{vol}(I) = (\text{vol}(I) + 2M)\varepsilon,$$

ou seja,  $f$  é integrável em  $I$ .

**Teorema 6.2.4** *Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto, e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, exceto num conjunto de conteúdo nulo. Então  $f$  é integrável em  $I$ .*

\*\*\*

É importante notar que, se uma função limitada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  for integrável em  $I$ , então, por definição, dados dois reais arbitrários,  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , existirão duas funções em escada  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  definidas numa partição  $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_N\}$  do intervalo  $I$ , tais que  $s \leq f \leq t$  e

$$\int_I (t - s) < \varepsilon\delta.$$

Sem perda de generalidade, seja  $\mathcal{D} = \{I_1, I_2, \dots, I_L\}$ , com  $L < N$ , a coleção dos subintervalos em que a oscilação de  $f$  é superior a  $\varepsilon$ .

Então, tem-se

$$\varepsilon\delta > \int_I (t - s) = \sum_{k=1}^N (t_k - s_k) \text{vol}(I_k) \geq \sum_{k=1}^L (t_k - s_k) \text{vol}(I_k) \geq \varepsilon \sum_{k=1}^L \text{vol}(I_k).$$

Portanto, para os subintervalos em que a oscilação de  $f$  é superior a  $\varepsilon$ , tem-se

$$\sum_{k=1}^L \text{vol}(I_k) \leq \delta.$$

Isto quer dizer que os conjuntos em que as funções integráveis não são contínuas têm volume nulo. Os conjuntos de conteúdo nulo são exemplos de tais conjuntos.

Reciprocamente, seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, tal que para quaisquer  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  existe uma partição com as propriedades de  $\mathcal{P}$ , designada pela mesma expressão.

Seja  $M > 0$ , tal que  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in I$ .

Sejam  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  as funções em escada definidas por

$$\begin{cases} s = \inf_{I_k} f, & \text{se } I_k \notin \mathcal{D} \\ s = -M, & \text{se } I_k \in \mathcal{D} \\ t = \sup_{I_k} f, & \text{se } I_k \notin \mathcal{D} \\ t = M, & \text{se } I_k \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

É claro que  $s \leq f \leq t$  e

$$\int_I (t - s) \leq \sum_{k=1}^L 2M \operatorname{vol}(I_k) + \sum_{k=L+1}^N \varepsilon \operatorname{vol}(I_k) \leq 2M\delta + \varepsilon \operatorname{vol}(I),$$

querendo dizer que a função  $f$  é integrável à Riemann em  $I$ .

Diz-se que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem **medida nula**, se, dado  $\varepsilon > 0$ , existir uma coleção numerável de intervalos  $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tais que

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k ; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) < \varepsilon.$$

Com estas observações é possível demonstrar que as funções limitadas e definidas num intervalo compacto são integráveis à Riemann, se e só se forem contínuas, exceto num conjunto de medida nula. Os restantes pormenores da demonstração desta caracterização das funções integráveis à Riemann podem ser vistos em ([4], p. 25) ou em ([7], p. 52).

Neste texto consideram-se apenas as funções que são contínuas, exceto em conjuntos de conteúdo nulo, porque são suficientes para as aplicações a considerar.

Dada uma função integrável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , resta saber como se calcula o respetivo integral. Esta questão será resolvida pelo chamado teorema de Fubini.

### 6.3 CÁLCULO DO INTEGRAL. TEOREMA DE FUBINI

Por ser muito instrutivo, considere-se o caso em que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada e integrável num intervalo compacto  $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ , tal que:

- a) Para cada  $x \in [a, b]$ , a função  $y \mapsto f(x, y)$  é integrável em  $[c, d]$ .

Seja  $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  o respetivo integral.

- b) A função  $x \mapsto \psi(x)$  é integrável em  $[a, b]$ .

Sejam  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções em escada, tais que  $s \leq f \leq t$ . Para cada  $x \in [a, b]$ , as funções  $y \mapsto s(x, y)$  e  $y \mapsto t(x, y)$  são funções em escada no intervalo  $[c, d]$ , verificando a relação  $s \leq f \leq t$ .

Dado que a função  $y \mapsto f(x, y)$  é integrável em  $[c, d]$ , então

$$\int_c^d s(x, y) dy \leq \int_c^d f(x, y) dy \leq \int_c^d t(x, y) dy,$$

ou seja,

$$\int_c^d s(x, y) dy \leq \psi(x) \leq \int_c^d t(x, y) dy. \quad (6.3)$$

Da definição de integral de uma função em escada, fica claro que as funções

$$x \mapsto \int_c^d s(x, y) dy; \quad x \mapsto \int_c^d t(x, y) dy$$

são integráveis em  $[a, b]$  e, portanto, de (6.3) vem

$$\int_I s \leq \int_a^b \psi(x) dx \leq \int_I t,$$

ou seja,

$$\int_I s \leq \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \int_I t.$$

Dado que as funções  $s$  e  $t$  verificam a relação  $s \leq f \leq t$  e foram escolhidas arbitrariamente, então:

$$\int_I f = \int_I f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Assim, o integral de  $f$  em  $I$  pode ser calculado através de um **integral duplo iterado**, no sentido em que se integra primeiro  $f$ , como função apenas de  $y$ , e o resultado disso,  $\psi(x)$ , se integra de seguida em  $x$ . Assim, o integral de uma função limitada num intervalo compacto em  $\mathbb{R}^2$  pode ser calculado através de um integral iterado, que consiste numa sequência de dois integrais simples.

\*\*\*

Este procedimento é facilmente generalizável a  $\mathbb{R}^n$ . Sejam  $A \subset \mathbb{R}^k$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$  intervalos compactos, e  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável no intervalo compacto  $A \times B$ .

Note-se que cada ponto do intervalo  $A \times B$  é da forma  $(x, y)$ , em que  $x \in \mathbb{R}^k$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ .

Sejam  $s, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções em escada tais que  $s \leq f \leq t$ . Para cada  $x \in A$ , as funções  $y \mapsto s(x, y)$  e  $y \mapsto t(x, y)$  são funções em escada em  $B$  verificando a relação  $s \leq f \leq t$ .

Se a função  $y \mapsto f(x, y)$  for integrável em  $B$ , então a função  $\psi(x) = \int_B f(x, y) dy$  está bem definida em  $A$ . Se a função  $x \mapsto \psi(x)$  for integrável em  $A$ , então, tendo em conta a igualdade (6.1), obtém-se

$$\int_A \left( \int_B s(x, y) dy \right) dx \leq \int_A \psi(x) dx \leq \int_A \left( \int_B t(x, y) dy \right) dx.$$

Dado que  $s$  e  $t$  foram escolhidas arbitrariamente, conclui-se que

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

**Teorema 6.3.1 (Fubini)** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^k$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$  intervalos compactos, e seja  $f$  uma função limitada e integrável no intervalo  $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+m}$ , tais que:

a) Para cada  $x \in A$ , a função  $y \mapsto f(x, y)$  é integrável em  $B$ .

Seja  $\psi(x) = \int_B f(x, y) dy$  o respetivo integral.

b) A função  $x \mapsto \psi(x)$  é integrável em  $A$ .

Então:

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \psi(x) dx = \int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

É claro que os papéis de  $x$  e de  $y$  podem ser trocados, obtendo-se

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left( \int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Os integrais da forma  $\int_A^B [\int_B^f f(x, y) dy] dx$  ou  $\int_B^A [\int_A^f f(x, y) dx] dy$  são designados por **integrais iterados**. No primeiro integral, fixa-se  $x \in A$  e procede-se ao cálculo do integral de  $f$  como função de  $y$  em  $B$ , obtendo-se, assim, uma função de  $x$ , a qual, de seguida, é integrada em  $A$ . No segundo integral procede-se do mesmo modo, trocando os papéis das variáveis  $x$  e  $y$ .

Os intervalos  $A$  e  $B$  são produtos cartesianos de intervalos em  $\mathbb{R}$ . Então, o integral de  $f$  em  $I$  obtém-se por sucessivas integrações numa variável, mantendo-se as restantes fixas.

\*\*\*

Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função contínua, então a função  $y \mapsto f(x, y)$  é também contínua e, portanto, integrável em  $[c, d]$ , ou seja, a função  $\psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  está bem definida em  $[a, b]$ .

Sejam  $x \in [a, b]$  e  $h$ , tais que  $x + h \in [a, b]$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma partição do intervalo  $I$ , tal que, em cada um dos correspondentes subintervalos a oscilação de  $f$  é inferior a  $\varepsilon$ .

Então, para  $h$ , tal que os pontos  $(x, y)$  e  $(x + h, y)$  estejam no mesmo subintervalo da partição, tem-se  $|f(x + h, y) - f(x, y)| < \varepsilon$  e, consequentemente,

$$|\psi(x + h) - \psi(x)| = \\ \left| \int_c^d (f(x + h, y) - f(x, y)) dy \right| \leq \int_c^d |f(x + h, y) - f(x, y)| dy < (d - c)\varepsilon.$$

No caso em que  $(x, y)$  e  $(x + h, y)$  não estão no mesmo subintervalo, então  $(x, y)$  estará na fronteira de um subintervalo. Assim,  $|f(x + h, y) - f(x, y)| < 2\varepsilon$ , e a conclusão é a mesma.

Deste modo, a função  $\psi(x)$  é contínua e, por isso, integrável em  $[a, b]$ .

Portanto, as duas condições do teorema de Fubini são automaticamente verificadas para funções contínuas.

\*\*\*

**Exemplo 6.3.1** Seja a função  $f(x, y) = xy$  definida no intervalo  $I = [0, 2] \times [0, 1]$ .

Sendo contínua, é integrável no intervalo compacto  $I$ . Para o cálculo do respetivo integral, recorre-se ao teorema de Fubini.

Fixando  $0 \leq x_0 \leq 2$ , a função de uma variável  $f(x_0, y) = x_0 y$  é contínua e, por isso, é integrável em  $[0, 1]$ , e o respetivo integral dado é por

$$\psi(x_0) = \int_0^1 x_0 y dy = x_0 \int_0^1 y dy = \frac{x_0}{2}.$$

Sendo  $\psi(x) = \frac{x}{2}$  uma função contínua, é integrável em  $[0, 1]$ .

Então:

$$\int_I f = \int_0^2 \psi(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = 1.$$

**Exemplo 6.3.2** A função  $f(x, y) = e^{x+y}$  definida no intervalo  $I = [0, 1] \times [1, 2]$  é contínua e, portanto,

$$\int_I f = \int_1^2 \left( \int_0^1 e^{x+y} dx \right) dy = \int_1^2 (e-1)e^y dy = e(e-1)^2.$$

**Exemplo 6.3.3** A função  $f(x, y, z) = xy + e^z$  é contínua e, portanto, o respetivo integral no intervalo  $I = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 1]$  é dado por

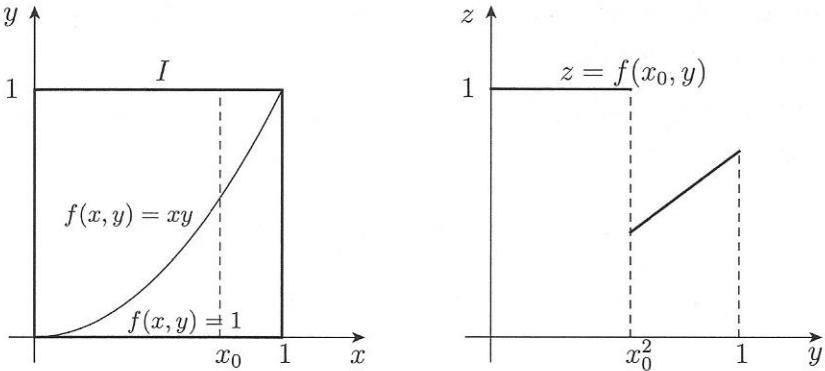
$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_0^1 \left( \int_0^2 \left( \int_0^1 (xy + e^z) dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^2 (xy + e - 1) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (2x + 2e - 2) dx \\ &= 2e - 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 6.3.4** Seja a função  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } y > x^2 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta função é contínua exceto na linha dada pela equação  $y = x^2$ , que tem conteúdo nulo, porque é o gráfico da função contínua  $\phi(x) = x^2$ .

Assim, a função  $f$  é integrável em  $I = [0, 1] \times [0, 1]$  e para o cálculo do respetivo integral recorre-se ao teorema de Fubini.



**Figura 6.10** Função descontínua na parábola  $y = x^2$

Para cada  $0 \leq x = x_0 \leq 1$  fixo, tem-se

$$f(x_0, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < y < x_0^2 \\ x_0 y, & \text{se } x_0^2 < y < 1, \end{cases}$$

que, como função de  $y$ , é integrável por ser descontínua apenas no ponto  $y = x_0^2$  e, portanto,

$$\psi(x_0) = \int_0^1 f(x_0, y) dy = \int_0^{x_0^2} dy + \int_{x_0^2}^1 x_0 y dy = x_0^2 + \frac{x_0}{2}(1 - x_0^4).$$

Na Figura 6.10 apresenta-se o intervalo  $I$ , em que se indicam os valores da função em cada uma das regiões separadas pela parábola definida por  $y = x^2$ , e o gráfico da função de uma variável  $y \mapsto f(x_0, y)$  em que  $x_0$  está fixo no intervalo  $[0, 1]$ .

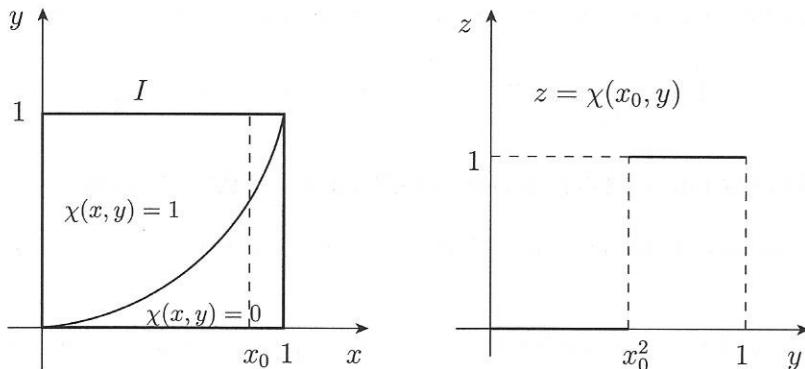
A função  $\psi(x) = x^2 + \frac{x}{2}(1 - x^4)$  é contínua e, por isso, integrável no intervalo  $[0, 1]$ .

Assim,

$$\int_I f = \int_0^1 \psi(x) dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{x}{2}(1 - x^4)) dx = \frac{1}{2}.$$

**Exemplo 6.3.5** Seja a função  $\chi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y > x^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



**Figura 6.11** Função descontínua na parábola  $y = x^2$

Tal como no exemplo anterior, esta função é contínua exceto na linha dada pela equação  $y = x^2$ , que tem conteúdo nulo, porque é o gráfico da função contínua  $\phi(x) = x^2$ .

Assim, a função  $\chi$  é integrável em  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ , e para o cálculo do respetivo integral recorre-se ao teorema de Fubini.

Para cada  $0 \leq x = x_0 \leq 1$  fixo, tem-se

$$\chi(x_0, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < y < x_0^2 \\ 1, & \text{se } x_0^2 < y < 1, \end{cases}$$

que, como função de  $y$ , é integrável por ser descontínua apenas no ponto  $y = x_0^2$  e, portanto,

$$\psi(x_0) = \int_0^1 \chi(x_0, y) dy = \int_{x_0^2}^1 dy = 1 - x_0^2.$$

Na Figura 6.3.5 apresenta-se o intervalo  $I$ , em que se indicam os valores da função em cada uma das regiões separadas pela parábola definida por  $y = x^2$ , bem como o gráfico da função  $y \mapsto \chi(x_0, y)$ .

Note-se que, fixar  $x = x_0$  no intervalo  $I$  corresponde a intersectá-lo com uma reta vertical, de que resulta um segmento de reta.

A função  $\chi$  é nula para  $y < x^2$  e, por isso, no cálculo de  $\psi(x_0)$  tem contribuição apenas a parte do segmento de reta em que  $y > x_0^2$ .

Dado que a função  $\psi(x) = 1 - x^2$  é contínua, é integrável no intervalo  $[0, 1]$  e, portanto,

$$\int_I \chi = \int_0^1 \psi(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

#### 6.4 INTEGRAL EM CONJUNTOS LIMITADOS. VOLUMES EM $\mathbb{R}^n$

Uma das aplicações do teorema de Fubini é o cálculo de volumes de subconjuntos limitados de  $\mathbb{R}^n$ .

É claro que, se  $I \subset \mathbb{R}^n$  for um intervalo compacto e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  for a função em escada definida por  $f(x) = 1$ , então

$$\text{vol}_n(I) = \int_I f.$$

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado, cuja fronteira tem conteúdo nulo. Um conjunto limitado por gráficos de funções contínuas é naturalmente um dos exemplos mais importantes.

Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e seja  $I$  um intervalo compacto, tal que  $D \subset I$ .

Seja  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I \setminus D, \end{cases} \quad (6.4)$$

tal como se ilustra na Figura 6.12.

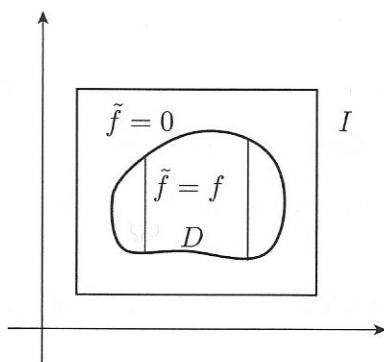
É claro que, se  $\tilde{f}$  for uma função descontínua apenas num conjunto de conteúdo nulo, será integrável em  $I$ .

**Definição 6.4.1** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, e  $I$  um intervalo compacto, tais que  $D \subset I$ .

Se  $\tilde{f}$  for integrável no intervalo  $I$ , diz-se que  $f$  é integrável em  $D$ , e

$$\int_D f = \int_I \tilde{f}.$$

Tal como para um intervalo, o volume de um conjunto limitado será definido à custa do integral da função constante e igual a 1 nesse conjunto.



**Figura 6.12** Extensão de uma função definida em  $D$  a um intervalo compacto  $I$

**Definição 6.4.2** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado,  $I$  um intervalo compacto, tal que  $D \subset I$ , e  $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}$  a chamada **função característica** do conjunto  $D$ , definida por

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I \setminus D. \end{cases}$$

O **volume** do conjunto  $D$  é o integral

$$\text{vol}_n(D) = \int_I \chi,$$

desde que a função  $\chi$  seja integrável em  $I$ .

O volume de um conjunto limitado, cuja fronteira é a união finita de gráficos de funções contínuas, fica perfeitamente definido. De facto, a função  $\chi$  é contínua, exceto na respetiva fronteira e, por isso, é integrável em  $I$ . Este integral será calculado recorrendo ao teorema de Fubini, ou seja, recorrendo ao cálculo de integrais iterados.

Note-se que, por definição de função característica,  $\tilde{f} = f\chi_D$  e, portanto,

$$\int_D f = \int_I \tilde{f} = \int_I f\chi_D.$$

Dado que a função  $\chi$  é nula no complementar do conjunto  $D$ , a contribuição para o integral é nula. Fica então claro que a determinação da fronteira do conjunto é essencial para calcular os integrais iterados.

No Exemplo 6.3.5 encontra-se descrito o cálculo da área do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 1 ; 0 < x < 1\},$$

através do integral iterado da forma  $\int (\int \chi(x, y) dy) dx$ .

Sendo  $D \subset I = [0, 1] \times [0, 1]$ , a função  $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é descontínua na parábola descrita pela equação  $y = x^2$ .

Para calcular o integral iterado, fixa-se  $x = x_0$  no intervalo  $[0, 1]$  e calcula-se

$$\psi(x_0) = \int_0^1 \chi(x_0, y) dy,$$

ou seja, considera-se a função  $\chi$  restringida ao conjunto descrito pela equação  $x = x_0$ .

Recorda-se que ao fixar  $x = x_0$  no intervalo  $I$  obtém-se um segmento de reta vertical.

Dado que a função  $\chi$  é nula para  $y < x^2$ , no cálculo de  $\psi(x_0)$  tem contribuição apenas a parte do segmento de reta em que  $y > x_0^2$ . Assim,

$$\psi(x_0) = \int_0^1 \chi(x_0, y) dy = \int_{x_0^2}^1 dy = 1 - x_0^2.$$

Finalmente, a área é dada pelo integral

$$\text{vol}_2(D) = \int_0^1 \psi(x) dx = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 dy \right) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}. \quad (6.5)$$

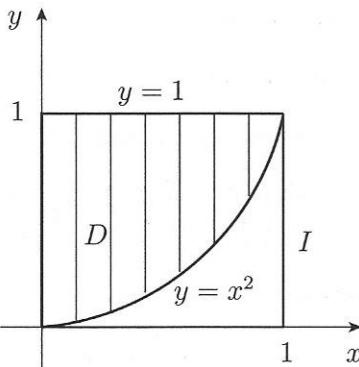
Em resumo, para calcular a área do conjunto  $D$  é essencial descrevê-lo como uma coleção de segmentos de reta verticais, sendo cada um deles descrito pela equação  $x = x_0$ , em que  $0 < x_0 < 1$ , tal como se ilustra na Figura 6.13.

É claro que cada um destes segmentos de reta resulta da intersecção do conjunto  $D$  com a reta dada pela equação  $x = x_0$ , ou seja, é o conjunto

$$C(x_0) = D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\} = \{(x_0, y) \in \mathbb{R}^2 : c(x_0) < y < d(x_0)\}. \quad (6.6)$$

Sendo vertical, o conjunto  $C(x_0)$  é perpendicular ao eixo  $Ox$ .

Os pontos extremos do segmento de reta  $C(x_0)$  são, respectivamente,  $(x_0, x_0^2)$  e  $(x_0, 1)$ , ou seja, são pontos da fronteira do conjunto  $D$ .



**Figura 6.13** Cortes verticais em  $D$

Fazendo  $a = 0$ ,  $b = 1$  e definindo as funções  $c, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $c(x) = x^2$  e  $d(x) = 1$ , respetivamente, tem-se

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b ; c(x) < y < d(x)\}, \quad (6.7)$$

ou seja, o conjunto  $D$  é, de facto, uma coleção de segmentos de reta perpendiculares ao eixo  $Ox$  entre os pontos da fronteira  $(x, c(x))$  e  $(x, d(x))$ , respetivamente.

Assim, a área do conjunto  $D$  é dada pelo integral iterado:

$$\text{vol}_2(D) = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} dy \right) dx.$$

Notando que o comprimento do segmento de reta  $C(x)$  é a diferença  $d(x) - c(x)$ , então a área do conjunto  $D$  é dada por

$$\text{vol}_2(D) = \int_a^b \text{vol}_1(C(x)) dx.$$

Dada uma função integrável  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , o respetivo integral é dado por

$$\int_D f = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Assim, para calcular o integral iterado da forma  $\int (\int dy) dx$ , o conjunto  $D$  deve ser descrito como uma coleção de segmentos de reta perpendiculares ao eixo  $Ox$ , ou seja, da forma (6.7), tal como se ilustra na Figura 6.13.

Em  $\mathbb{R}^3$ , se um conjunto for descrito na forma

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < x < b ; c(x) < y < d(x) ; e(x, y) < z < f(x, y)\},$$

em que  $c, d, e, f$  são funções contínuas, então o respetivo volume é dado por

$$\text{vol}_3(D) = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} \left( \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} dz \right) dy \right) dx.$$

Para cada  $x = x_0 \in [a, b]$ , considere-se o conjunto

$$C(x_0) = \{(x_0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c(x_0) < y < d(x_0) ; e(x_0, y) < z < f(x_0, y)\}.$$

É claro que o volume do conjunto  $D$  é dado por

$$\text{vol}_3(D) = \int_a^b \text{vol}_2(C(x)) dx.$$

Pelas observações anteriores fica claro que é essencial determinar a intersecção de um dado conjunto com os planos perpendiculares aos eixos coordenados.

**Definição 6.4.3** Dado  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ao conjunto  $C(x_k)$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$ , definido por

$$C(x_k) = D \cap \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = c\},$$

em que  $c \in \mathbb{R}$ , chama-se **corte em  $D$  perpendicular ao eixo  $Ox_k$** .

Se um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , limitado e cuja fronteira tem conteúdo nulo, for descrito na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x \in C(y) ; a < y < b\},$$

ou seja, como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Oy$ , então o respetivo volume é dado pelo integral

$$\text{vol}_n(D) = \int_a^b \text{vol}_{n-1}(C(y)) dy. \quad (6.8)$$

**Exemplo 6.4.1** Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto com simetria cilíndrica em torno do eixo  $Oz$ .

Assim sendo, o conjunto  $D$  pode ser descrito na forma

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < R(z); a < z < b\},$$

em que  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e não negativa.

Portanto,  $D$  é uma coleção de círculos perpendiculares ao eixo  $Oz$ . O raio de cada círculo é  $R(z)$ , ou seja, para cada  $a < z < b$ , o correspondente corte é o conjunto

$$C(z) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < R(z)\}.$$

Usando (6.8) e, sabendo que a área de um círculo de raio  $R(z)$  é  $\pi R(z)^2$ , obtém-se

$$\text{vol}_3(D) = \int_a^b \text{vol}_2(C(z)) dz = \pi \int_a^b R(z)^2 dz.$$

Para o caso de um cilindro de raio  $R > 0$  e altura  $h > 0$ ,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < R^2; 0 < z < h\},$$

tem-se  $R(z) = R$  e, portanto, o respetivo volume é dado por  $\text{vol}_3(C) = \pi R^2 h$ .

Para o caso de uma bola de raio  $R > 0$ ,

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\},$$

tem-se  $R(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ , com  $-R < z < R$ . Portanto,

$$\text{vol}_3(B) = \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Para o caso de um cone de altura  $h > 0$  e raio da base  $R > 0$ ,

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

tem-se  $R(z) = R - \frac{R}{h} z$ , com  $0 < z < h$ . Portanto,

$$\text{vol}_3(B) = \pi \int_0^h (R - \frac{R}{h} z)^2 dz = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Nos exemplos de aplicação do teorema de Fubini será visto em pormenor como se descreve um conjunto como coleção de cortes, especialmente em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ .

Em muitos casos, a descrição de um conjunto como coleção de cortes pode levar à necessidade de dividi-lo em subconjuntos disjuntos. Seja  $D = D_1 \cup D_2$ .

Seja  $\phi$  uma função escalar. Da definição de função característica de um conjunto, é claro que

$$\phi = \phi\chi_{D_1} + \phi\chi_{D_2}.$$

Tendo em conta as propriedades das funções integráveis, então

$$\int_D \phi = \int_D \phi\chi_{D_1} + \int_D \phi\chi_{D_2} = \int_{D_1} \phi + \int_{D_2} \phi.$$

\*\*\*

Apresentam-se, de seguida, exemplos de funções importantes pelo significado físico do respetivo integral.

#### a) Volume

Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1$ . Então, o integral  $\int_D f = \text{vol}_n(D)$  é o volume do conjunto  $D$ .

#### b) Massa

Seja  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}$  a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado pelo conjunto  $D$ . Então, a massa  $M$  do corpo  $D$  é dada pelo integral  $M = \int_D \sigma$ .

Note-se que, para  $\sigma = 1$ , a massa é o volume.

#### c) Centro de Massa

Seja  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}$  a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado pelo conjunto  $D$ , e seja

$$f_i(x) = \frac{1}{M}x_i\sigma(x); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

em que  $M$  é a massa do corpo  $D$ .

O centro de massa é o ponto de coordenadas  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  calculadas da maneira seguinte:

$$\bar{x}_i = \int_D f_i; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

No caso em que  $\sigma = 1$ , ao centro de massa também se chama **centróide**.

#### d) Momento de Inércia

Seja  $L$  uma linha reta e  $d_L(x)$  a distância do ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  à linha  $L$ .

O momento de inércia do conjunto  $D$  relativo à reta  $L$ , designado pelo símbolo  $I_L$ , é o integral da função definida por  $f(x) = \sigma(x)d_L^2(x)$ , ou seja,

$$I_L = \int_D f,$$

em que  $\sigma$  é a densidade de massa por unidade de volume de  $D$ .

Os casos importantes a considerar são aqueles em que  $L$  é um dos eixos coordenados.

### 6.5 INTEGRAIS PARAMÉTRICOS. REGRA DE LEIBNIZ

O teorema de Fubini pode ser aplicado para analisar a diferenciabilidade de uma função definida através do integral de outra função. Em certas condições, a chamada regra de Leibniz estabelece que a derivada de uma função definida por um integral é o integral da derivada.

Seja  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida pelo integral

$$F(x) = \int_0^1 f(t, x) dt.$$

Ao integral  $\int_0^1 f(t, x) dt$  chama-se **integral paramétrico**, em que a variável  $x$  desempenha o papel de parâmetro.

Pelas propriedades do integral:

$$|F(x + h) - F(x)| \leq \int_0^1 |f(t, x + h) - f(t, x)| dt.$$

Sendo  $f$  uma função contínua, então:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; |h| < \delta \Rightarrow |f(t, x + h) - f(t, x)| < \varepsilon$$

e, portanto,  $|F(x + h) - F(x)| < \varepsilon$ , ou seja, a função  $F$  é contínua.

Em certas condições, a função  $F$  também é diferenciável, e a respetiva derivada é dada por

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Se  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}$  forem funções contínuas, então, para cada  $x \in [0, 1]$ , tem-se:

- a) A função  $f(t, x)$  é integrável em  $[0, 1]$  como função de  $t$ .  
 b) A derivada  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  é integrável em  $[0, 1]$  como função de  $t$ .

Estas duas condições serão imediatamente satisfeitas pelas funções de classe  $C^1$ . Assim,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 (f(t, x+h) - f(t, x)) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 \left( \int_x^{x+h} \frac{\partial f}{\partial x}(t, s) ds \right) dt \end{aligned}$$

e, aplicando o teorema de Fubini, obtém-se

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, s) dt \right) ds.$$

Dado que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é contínua, a função  $s \rightarrow \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, s) dt$  é também contínua e, portanto,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, s) dt \right) ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 f(t, x) dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt,$$

que é a chamada **regra de Leibniz**.

\*\*\*

É claro que este raciocínio se generaliza para os casos em que  $x \in I \subset \mathbb{R}^n$ , sendo  $I$  um intervalo compacto, e tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, x) dt ; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

\*\*\*

Sejam  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis, e  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida pelo integral

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t, x) dt.$$

A função  $F$  pode ser vista como a composição

$$F(x) = G(x, \phi(x), \psi(x)),$$

em que  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$G(x, u, v) = \int_u^v f(t, x) dt.$$

Assim, derivando a função composta e tendo em conta a regra de Leibniz e o teorema fundamental do cálculo, obtém-se

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \phi'(x) + \frac{\partial G}{\partial v} \psi'(x) \\ &= \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt - f(u, x)\phi'(x) + f(v, x)\psi'(x) \\ &= \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt - f(\phi(x), x)\phi'(x) + f(\psi(x), x)\psi'(x) \end{aligned}$$

\*\*\*

**Exemplo 6.5.1** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida pelo integral

$$F(x) = \int_0^1 \sin(xt^2) dt.$$

Não é fácil calcular o integral, por não se ter à disposição uma primitiva para a função  $\sin(xt^2)$ . No entanto, recorrendo à regra de Leibniz,

$$F'(x) = \int_0^1 t^2 \cos(xt^2) dt$$

e, então,

$$F'(0) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

**Exemplo 6.5.2** Seja  $F : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{1+xt^2} dt ; \quad x \geq 1.$$

A respetiva derivada é dada por

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{x^2} t^2 e^{1+xt^2} dt + 2xe^{1+x^5} \\ &= \frac{x^2}{2x} e^{1+x^5} - \frac{1}{2x} \int_0^{x^2} e^{1+xt^2} dt + 2xe^{1+x^5} \\ &= \frac{5x}{2} e^{1+x^5} - \frac{1}{2x} F(x), \end{aligned}$$

e, então, a função  $F$  e a respetiva derivada verificam a equação

$$F'(x) + \frac{1}{2x} F(x) = \frac{5x}{2} e^{1+x^5}.$$

**Exemplo 6.5.3** Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial, de classe  $C^1$  e fechado, isto é,

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k} ; \quad k \neq j.$$

Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o campo escalar definido por

$$\phi(x) = \int_0^1 F(tx) \cdot x dt.$$

Notando que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (F(tx) \cdot x) = \sum_{k=1}^n t \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx) x_k + F_j(tx),$$

e sendo  $F$  um campo fechado, então:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (F(tx) \cdot x) = \frac{d}{dt} (t F_j(tx)).$$

Pela regra de Leibniz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t F_j(tx)) dt = F_j(x) ; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ou seja, o campo vetorial  $F$  é o gradiente do campo escalar  $\phi$ :

$$F = \nabla \phi.$$

## 6.6 EXERCÍCIOS

- Calcule o integral  $\int_I f$ , em que  $f(x, y) = \max(x, y)$  e  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ .
- Mostre que  $\int_I g = \frac{1}{3}$ , para  $g(x, y) = \min(x, y)$ , e  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ .
- Mostre que  $\int_I f = \frac{3}{4}$ , para  $f(x, y, z) = \max(x, y, z)$ , e  $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .
- Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{x^2}, & \text{se } y < x \\ 0, & \text{se } y \geq x. \end{cases}$$

Mostre que  $f$  é integrável no intervalo  $[0, 1] \times [0, 1]$  e calcule o respetivo integral.

- Considere a função  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2y, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Mostre que  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = 1$ .
- Prove que  $f$  não é integrável à Riemann em  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
- Seja  $|D| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in D\}$  o diâmetro do conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Prove a igualdade

$$f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}_n(D_k)} \int_{D_k} f(x) dx,$$

em que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua,  $(D_k)$  é uma sucessão de intervalos contendo o ponto  $a$ , e  $\lim_{k \rightarrow \infty} |D_k| = 0$ .

- Use a regra de Leibniz para mostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(a \cos^2 x + b \sin^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

onde  $a, b > 0$ .

Sugestão: Considere o integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} dx$ .

- Considere a função

$$f(x) = \int_0^{2\pi} e^{x \cos t} \cos(x \sin t) dt.$$

Mostre que  $f(1) = 2\pi$ .

9. Seja  $I \subset \mathbb{R}^n$  um intervalo compacto, e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Prove que existe  $\bar{x} \in I$ , tal que

$$\int_I f = f(\bar{x}) \operatorname{vol}_n(I).$$

10. Mostre que um conjunto de conteúdo nulo é limitado.
11. Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de classe  $C^1$ , e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto de conteúdo nulo. Prove que  $g(D)$  tem conteúdo nulo.
12. Sabendo que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ , mostre que um conjunto de conteúdo nulo tem medida nula e que a união numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
13. Prove que, se um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  tiver medida nula, então tem conteúdo nulo.
14. Adapte a demonstração do Teorema 6.2.4 para mostrar que uma função limitada e definida num intervalo compacto é integrável à Riemann, se e só se for contínua exceto num conjunto de medida nula.

# 7

C

APLICAÇÕES DO TEOREMA DE FUBINI

Recorde-se que o teorema de Fubini estabelece uma forma expedita de cálculo do integral de uma função através dos chamados integrais iterados. Para tal, é essencial descrever o domínio da função como coleção de cortes perpendiculares aos eixos coordenados.

Para maior clareza de exposição e pela importância prática, os casos de  $\mathbb{R}^2$  e de  $\mathbb{R}^3$  serão tratados separadamente. Serão consideradas apenas funções definidas em conjuntos limitados por gráficos de funções contínuas.

## 7.1 CÁLCULO DE INTEGRAIS EM $\mathbb{R}^2$ . ÁREAS

Seja  $D_1$  um conjunto limitado, da forma

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b ; c(x) \leq y \leq d(x)\}, \quad (7.1)$$

em que  $c, d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções contínuas e  $a < b$ .

Seja  $I$  um intervalo limitado que contém o conjunto  $D_1$  e seja  $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) \in D_1 \\ 0, & \text{se } (x, y) \in I \setminus D_1. \end{cases}$$

Por definição, a área de  $D_1$  é dada pelo integral da função  $\chi$ , ou seja,

$$\text{vol}_2(D_1) = \int_I \chi.$$

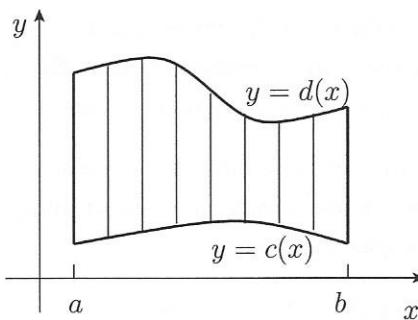
O cálculo deste integral é feito recorrendo ao teorema de Fubini, ou seja, recorrendo ao cálculo de integrais iterados. Note-se que  $D_1$  está na forma adequada para ser descrito como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Ox$ . Para cada  $x \in [a, b]$ , há um segmento de reta entre os pontos  $(x, c(x))$  e  $(x, d(x))$ , tal como se ilustra na Figura 7.1.

Cada um destes segmentos de reta é a intersecção de  $D_1$  com a reta dada pela equação  $x = c$ , em que  $c$  é uma constante.

Para cada  $x = c$ , tem-se  $\chi(c, y) = 1$ , desde que  $c(x) \leq y \leq d(x)$ , e  $\chi(c, y) = 0$ , caso contrário.

Então:

$$\text{vol}_2(D_1) = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} dy \right) dx = \int_a^b (d(x) - c(x)) dx.$$



**Figura 7.1** Teorema de Fubini. Cortes perpendiculares a  $Ox$

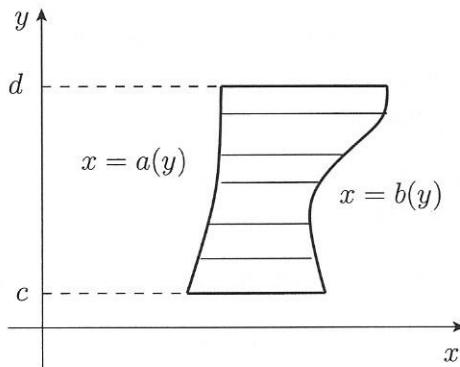
Do mesmo modo, a área de um conjunto da forma

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d ; a(y) \leq x \leq b(y)\}, \quad (7.2)$$

em que  $c$  e  $d$  são números reais e  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas, é calculada do seguinte modo:

$$\text{vol}_2(D_2) = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} dx \right) dy = \int_c^d (b(y) - a(y)) dy. \quad (7.3)$$

Neste caso, o conjunto  $D_2$  é uma coleção de segmentos de reta entre os pontos  $(a(y), y)$  e  $(b(y), y)$ , tal como se ilustra na Figura 7.2.



**Figura 7.2** Teorema de Fubini. Cortes perpendiculares a  $Oy$

O integral de uma função  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $D \subset \mathbb{R}^2$  pode ser calculado descrevendo  $D$  como uma coleção de cortes perpendiculares a um dos eixos coordenados.

Se o conjunto for descrito na forma  $D_1$ , então:

$$\int_{D_1} f = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} \phi(x, y) dy \right) dx,$$

e se for descrito na forma  $D_2$ , o integral é dado por

$$\int_{D_2} f = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} \phi(x, y) dx \right) dy.$$

\*\*\*

### Exemplo 7.1.1 Conjunto Limitado por Uma Parábola

Considere-se o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 - x^2 ; x > 0\}.$$

É claro que, sendo  $0 < 1 - x^2$  e  $x > 0$ , então  $0 < x < 1$ .

Assim,  $D$  pode ser descrito na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 - x^2\},$$

ou seja, como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Ox$  (cortes verticais), tal como se representa na Figura 7.3.

A respetiva área é então dada pelo seguinte integral iterado:

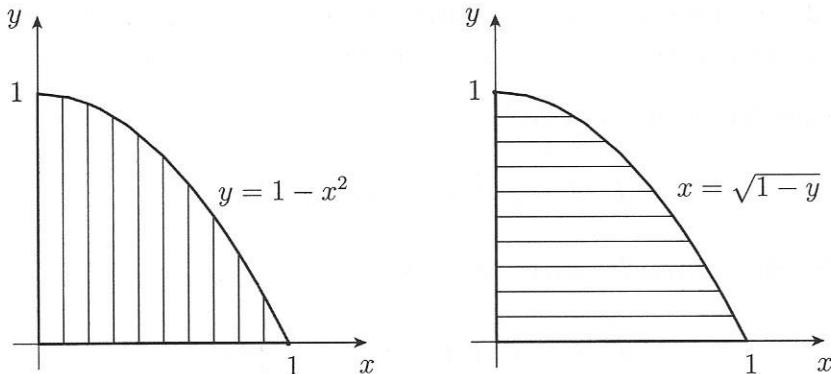
$$\text{vol}_2(D) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

Dado que  $0 < y < 1 - x^2$ , então,  $0 < y < 1$ ;  $0 < x < \sqrt{1 - y}$ , e  $D$  pode ser descrito na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 ; 0 < x < \sqrt{1 - y}\},$$

ou seja, como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Oy$  (cortes horizontais), e a respetiva área é calculada pelo seguinte integral iterado:

$$\text{vol}_2(D) = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-y}} dx \right) dy = \int_0^1 \sqrt{1-y} dy = \frac{2}{3}.$$



**Figura 7.3** Cortes no conjunto definido por:  $x > 0$ ;  $0 < y < 1 - x^2$ .

### Exemplo 7.1.2 Conjunto Limitado por Duas Parábolas

Considere-se o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0; 0 < y < x^2; y < 1 - x^2\}.$$

Dado que  $y < 1 - x^2$ , então  $x < \sqrt{1 - y}$ , e, sendo  $y > 0$ , então  $0 < x < 1$ .

Por outro lado, sendo simultaneamente  $y < x^2$  e  $y < 1 - x^2$ , então  $y < x^2$ , desde que  $x^2 < 1 - x^2$ , ou seja, desde que  $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Do mesmo modo,  $y < 1 - x^2$ , desde que  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Portanto, para  $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , tem-se  $0 < y < x^2$  e, para  $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ , tem-se  $y < 1 - x^2$ .

Assim, o conjunto  $D$  é a união de dois conjuntos disjuntos  $D = A \cup B$ , da forma (7.1), em que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 < y < x^2\}$$

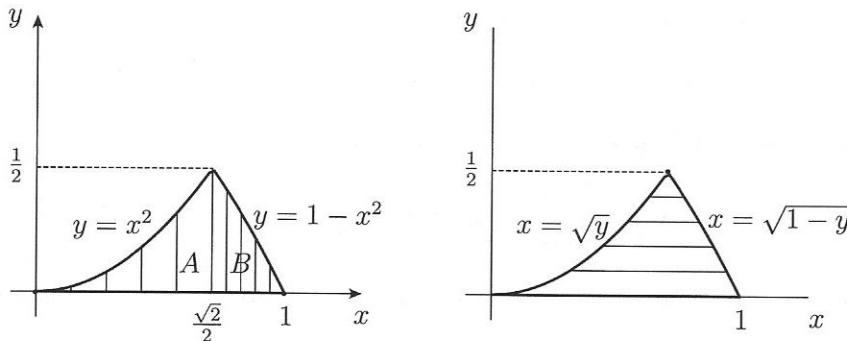
e

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1; 0 < y < 1 - x^2\},$$

tal como se representa na Figura 7.4.

A área do conjunto  $D$  é então dada por

$$\text{vol}_2(D) = \text{vol}_2(A) + \text{vol}_2(B) = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \int_0^{x^2} dy \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left( \int_0^{1-x^2} dy \right) dx.$$



**Figura 7.4** Cortes no conjunto definido por:  $x > 0$ ;  $0 < y < x^2$ ;  $y < 1 - x^2$ .

Tanto em  $A$  como em  $B$  verifica-se  $y < \frac{1}{2}$ . Por isso,  $0 < y < \frac{1}{2}$  em  $D$ .

Das inequações  $y < x^2$ ;  $y < 1 - x^2$ , obtém-se  $\sqrt{y} < x < \sqrt{1-y}$ . Então,  $D$  pode ser descrito na forma (7.2), ou seja,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{1}{2}; \sqrt{y} < x < \sqrt{1-y}\},$$

e a respetiva área é dada por

$$\text{vol}_2(D) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y}} dx \right) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-y} - \sqrt{y}) dy = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}.$$

### Exemplo 7.1.3 Conjunto limitado por Uma Parábola e Uma Circunferência

Seja  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2; y > x^2\}$ , o conjunto representado na Figura 7.5, limitado por um arco de circunferência e por um arco de parábola.

É claro que, sendo  $x^2 + y^2 < 2$  e  $y > x^2$ , então  $x^4 + x^2 - 2 < 0$ , ou seja,

$$x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

A circunferência e a parábola intersectam-se nos pontos cujas coordenadas são determinadas resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ y = x^2, \end{cases}$$

ou seja, nos pontos  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$ , tal como se ilustra na Figura 7.5.

Assim, o conjunto  $D$  pode ser descrito na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1; x^2 < y < \sqrt{2 - x^2}\},$$

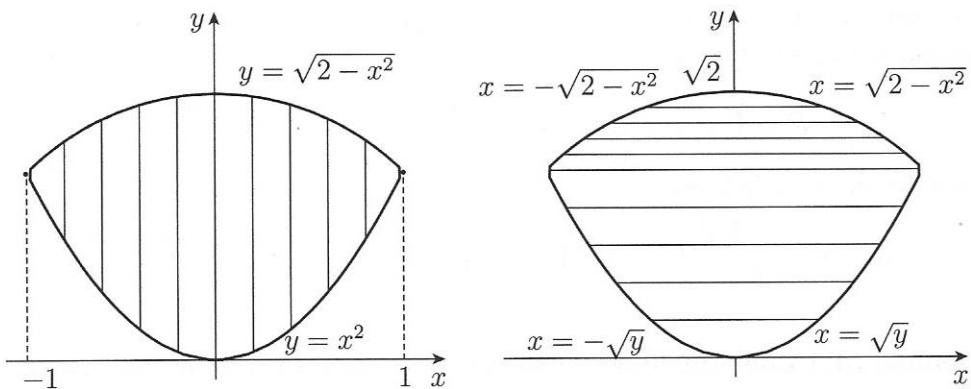
e a respetiva área é dada pelo seguinte integral iterado:

$$\text{vol}_2(D) = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx.$$

Do mesmo modo, sendo  $x^2 + y^2 < 2$ , então  $y^2 < 2 - x^2$  e, dado que  $y > x^2 \geq 0$ , deduz-se que  $0 < y < \sqrt{2}$ .

Por outro lado,  $x^2 < y$  e  $x^2 < 2 - y^2$ . Assim, há dois casos a considerar.

Será  $x^2 < y$ , desde que  $y < 2 - y^2$ , isto é, para  $0 < y < 1$ .



**Figura 7.5** Cortes no conjunto definido por  $x^2 + y^2 < 2$ ;  $y > x^2$

Portanto,  $0 < y < 1$ ;  $-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}$ .

Deverá ser  $x^2 < 2 - y^2$ , desde que  $2 - y^2 < y$ , isto é, para  $1 < y < \sqrt{2}$ .

Assim,  $1 < y < \sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{2-y^2} < x < \sqrt{2-y^2}$ .

Tal como se ilustra na Figura 7.5, o conjunto  $D$  pode então ser descrito como a união dos dois conjuntos seguintes:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1; -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\}$$

e

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < y < \sqrt{2}; -\sqrt{2-y^2} < x < \sqrt{2-y^2}\}.$$

A área de  $D$  é dada por

$$\text{vol}_2(S) = \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} dx \right) dy.$$

## 7.2 CÁLCULO DE INTEGRAIS EM $\mathbb{R}^3$ . VOLUMES

Tal como em  $\mathbb{R}^2$ , a noção de corte é crucial para o cálculo de integrais em  $\mathbb{R}^3$ .

Note-se que a equação  $x = c$ , em que  $c$  é uma constante, descreve o plano perpendicular ao eixo  $Ox$  no ponto  $(c, 0, 0)$ .

Recorde-se que, dado  $D \subset \mathbb{R}^3$ , ao conjunto  $D \cap \{(x, y, z) : x = c\}$  chama-se **corte** em  $D$  perpendicular ao eixo  $Ox$ . Do mesmo modo se definem cortes perpendiculares aos eixos  $Oy$  e  $Oz$ .

Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto definido por

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b; c(x) \leq y \leq d(x); e(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}, \quad (7.4)$$

em que  $a, b \in \mathbb{R}$  são constantes, e  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas.

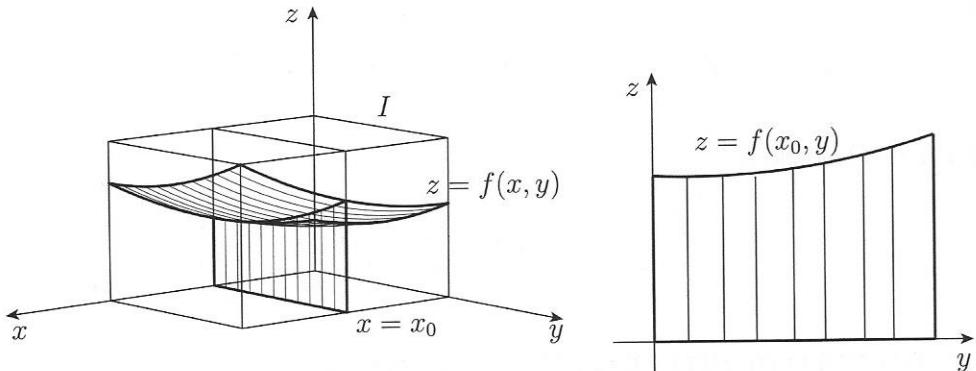
Seja  $I$  um intervalo limitado que contém o conjunto  $D$  e seja  $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\chi(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y, z) \in D \\ 0, & \text{se } (x, y, z) \in I \setminus D. \end{cases}$$

Por definição, o volume de  $D$  é dado pelo integral da função  $\chi$ , ou seja,

$$\text{vol}_3(D) = \int_I \chi.$$

O conjunto  $D$  descrito por (7.4) está na forma adequada para ser visto como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Ox$ .



**Figura 7.6** Cortes perpendiculares ao eixo  $Ox$

De facto, fixando  $x = x_0$  no intervalo  $[a, b]$ , obtém-se o corte em  $D$ , perpendicular ao eixo  $Ox$ , descrito por

$$D \cap \{x = x_0\} = \{(x_0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c(x_0) \leq y \leq d(x_0); e(x_0, y) \leq z \leq f(x_0, y)\}.$$

Cada um destes cortes pode ser visto como um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , nas variáveis  $y, z$ , e está na forma adequada para ser descrito como uma coleção de cortes verticais (segmentos de reta) perpendiculares ao eixo  $Oy$ .

Para cada  $y = y_0$  no intervalo  $[c(x_0), d(x_0)]$ , tem-se

$$\begin{aligned} D \cap \{x = x_0\} \cap \{y = y_0\} &= \{(x_0, y_0, z) \in \mathbb{R}^3 : c(x_0) \leq y \leq d(x_0); \\ &\quad e(x_0, y_0) \leq z \leq f(x_0, y_0)\}, \end{aligned}$$

que é o segmento de reta vertical entre os pontos  $(x_0, y_0, e(x_0, y_0))$  e  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Na Figura 7.6 encontra-se representado o esboço de um conjunto do tipo (7.4) em que  $a = 0$ ,  $c = 0$ ,  $e = 0$  e  $b$  e  $d$  são constantes. Assim, de acordo com o teorema de Fubini:

$$A(x_0) = \int_{c(x_0)}^{d(x_0)} \left( \int_{e(x_0, y)}^{f(x_0, y)} dz \right) dy.$$

O volume do conjunto  $D$  é então dado pelo integral

$$\text{vol}_3(D) = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} \left( \int_{e(x, y)}^{f(x, y)} dz \right) dy \right) dx.$$

Dada uma função escalar  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , integrável em  $D$ , o respetivo integral é dado por

$$\int_D \phi = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} \left( \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} \phi(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

\*\*\*

### Exemplo 7.2.1 Uma Pirâmide Triangular

Considere-se o conjunto

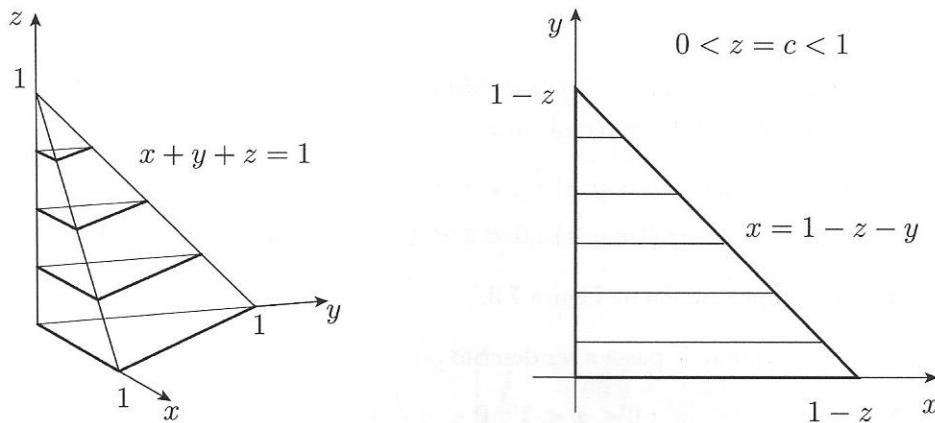
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

Para o integral iterado da forma  $\int(\int dx)dy)dz$ , fixa-se  $0 < z = c < 1$  e obtém-se o corte em  $X$  perpendicular ao eixo  $Oz$ , dado por

$$\begin{aligned} X \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x + y < 1 - c; x > 0; y > 0\} \\ &= \{(x, y, c) : 0 < y < 1 - c; 0 < x < 1 - c - y\} \end{aligned}$$

e que se encontra representado na Figura 7.7. Assim, o conjunto  $X$  passa a ser descrito como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Oz$ , ou seja,

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1; 0 < y < 1 - z; 0 < x < 1 - z - y\}.$$

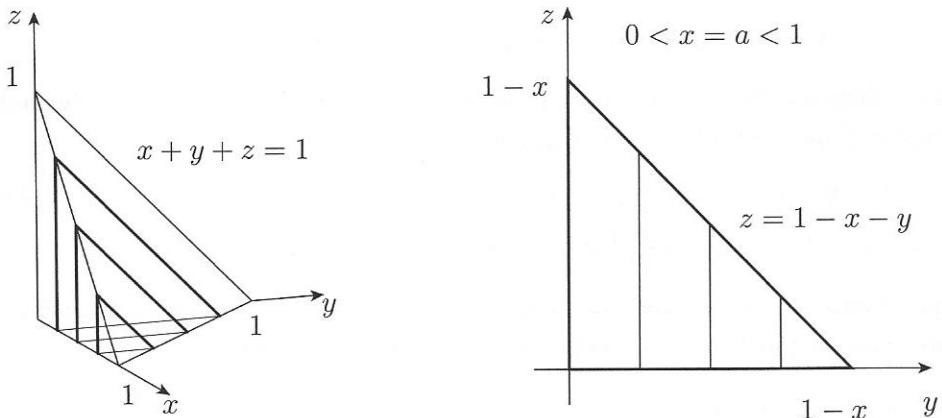


**Figura 7.7** Pirâmide triangular. Cortes perpendiculares a  $Oz$

O volume de  $X$  é então dado por

$$\begin{aligned}\text{vol}_3(X) &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} \left( \int_0^{1-z-y} dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-z} (1-z-y) dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^2 dz = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Trata-se de uma pirâmide cuja base é um triângulo com área igual a  $\frac{1}{2}$  e de altura igual a 1. Portanto, o respetivo volume é um terço do produto da área da base pela altura.



**Figura 7.8** Pirâmide triangular. Cortes perpendiculares a  $Ox$

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dz)dy)dx$ , fixa-se  $0 < x = a < 1$ , e obtém-se o correspondente corte em  $X$ , com o plano  $x = a$ :

$$\begin{aligned}X \cap \{x = a\} &= \{(a, y, z) : y + z < 1 - a; y > 0; z > 0\} \\ &= \{(a, y, z) : 0 < z < 1 - a - y; 0 < y < 1 - a\},\end{aligned}$$

que se encontra representada na Figura 7.8.

Deste modo, o conjunto  $X$  passa a ser descrito por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1; 0 < y < 1 - x; 0 < z < 1 - x - y\},$$

ou seja, como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Ox$ .

O respetivo volume é então dado por

$$\text{vol}_3(X) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx.$$

### Exemplo 7.2.2 Uma Tenda

Considere-se o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 ; y > 0 ; z > 0 ; z < 1 - x^2 ; z < 1 - y^2\}.$$

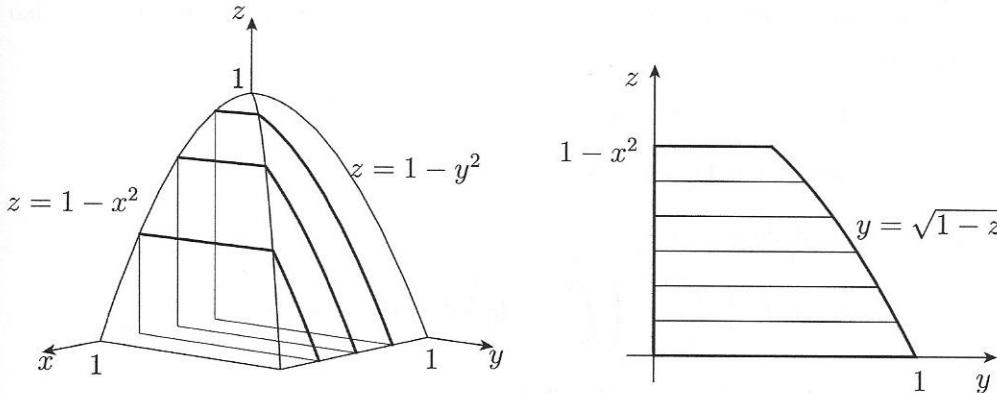
Para o integral iterado, da forma  $\int(\int(\int dy)dz)dx$ , note-se que, sendo  $0 < z < 1 - x^2$ , é claro que, se deve fixar  $0 < x = a < 1$ , e o corte em  $S$ , perpendicular ao eixo  $Ox$ , é dado por

$$\{(a, y, z) : 0 < z < 1 - a^2 ; 0 < y < \sqrt{1 - z}\}.$$

Assim, o conjunto  $S$  pode ser descrito como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Ox$ , ou seja,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 ; 0 < z < 1 - x^2 ; 0 < y < \sqrt{1 - z}\},$$

tal como se representa na Figura 7.9.



**Figura 7.9** Uma tenda. Cortes perpendiculares a  $Ox$

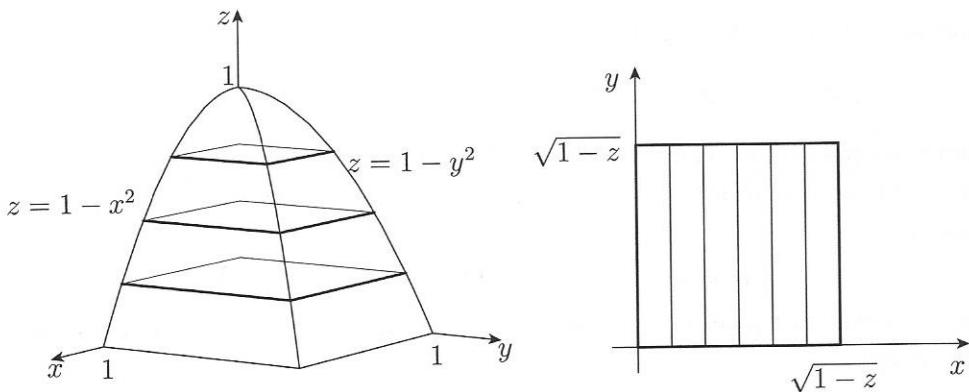
O volume de  $S$  é dado por

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x^2} \left( \int_0^{\sqrt{1-z}} dy \right) dz \right) dx.$$

\*\*\*

Para o integral iterado, da forma  $\int(\int(\int dy)dx)dz$ , é claro que o corte em  $S$  perpendicular ao eixo  $Oz$  é dado por

$$\{(x, y, z) : 0 < z < 1 ; 0 < x < \sqrt{1-z} ; 0 < y < \sqrt{1-z}\}.$$



**Figura 7.10** Uma tenda. Cortes perpendiculares a  $Oz$

Assim, o conjunto  $S$  pode ser descrito como uma coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Oz$ , ou seja,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 ; 0 < x < \sqrt{1-z} ; 0 < y < \sqrt{1-z}\},$$

tal como se representa na Figura 7.10.

O volume de  $S$  é dado por

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-z}} \left( \int_0^{\sqrt{1-z}} dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 (1-z) dz = \frac{1}{2}.$$

### Exemplo 7.2.3 Uma Pirâmide Quadrangular

Considere-se o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 ; \frac{x}{2} < y < x ; 0 < z < x\}.$$

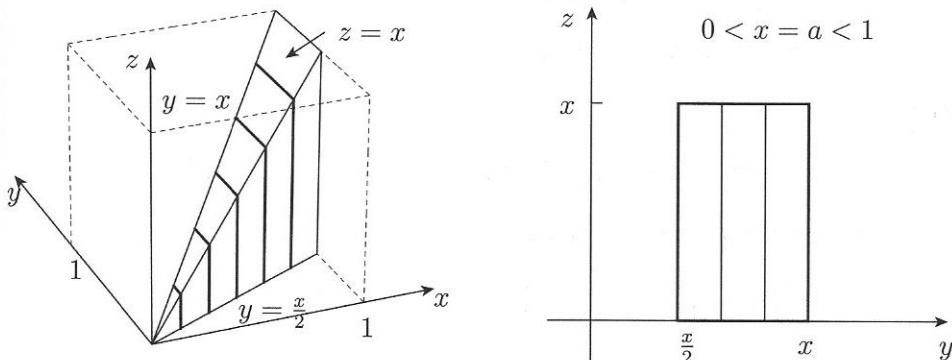
É claro que o conjunto  $S$  está na forma adequada para ser descrito como coleção de cortes perpendiculares ao eixo  $Ox$ , obtendo-se imediatamente os integrais iterados do tipo  $\int(\int(\int dz)dy)dx$  e do tipo  $\int(\int(\int dy)dz)dx$ .

Para o integral iterado da forma  $\int(\int dz)dy)dx$ , fixa-se  $0 < x = a < 1$ . Na Figura 7.11 representa-se o conjunto  $S$  e a intersecção de  $S$  com o plano  $x = a$ , ou seja, o corte em  $S$  perpendicular ao eixo  $Ox$ , que se pode descrever na forma

$$S \cap \{x = a\} = \{(a, y, z) : \frac{a}{2} < y < a; 0 < z < a\}.$$

Assim, o volume de  $S$  é dado por

$$\begin{aligned}\text{vol}_3(S) &= \int_0^1 \left( \int_{\frac{x}{2}}^x \left( \int_0^x dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_{\frac{x}{2}}^x x dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$



**Figura 7.11** Uma pirâmide quadrangular. Cortes perpendiculares a  $Ox$

\*\*\*

Para o integral iterado da forma  $\int(\int dy)dz)dx$ , tem-se também imediatamente

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left( \left( \int_0^x \int_{\frac{x}{2}}^x dz \right) dy \right) dx.$$

\*\*\*

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dz)dx)dy$ , deve fixar-se  $0 < y = b < 1$ .

Dado que  $\frac{x}{2} < y < x$ , então  $y < x < 2y$ . Assim, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < x < 2y \\ 0 < z < x \end{cases}$$

e devem ocorrer dois casos:

a)  $2y < 1 \Rightarrow 0 < y < \frac{1}{2}$ ,

b)  $2y > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < y < 1$ ,

tal como representa na Figura 7.12.

Para  $0 < y = b < \frac{1}{2}$ , a intersecção (corte) de  $S$  com o plano  $y = b$  é dada por

$$S \cap \{y = b\} = \{(x, b, z) : y < x < 2y : 0 < z < x\}.$$

Para  $\frac{1}{2} < y = b < 1$  tem-se,

$$S \cap \{y = b\} = \{(x, b, z) : y < x < 1 : 0 < z < x\}.$$

Portanto,  $S$  é a união dos dois conjuntos

$$\{(x, y, z) : 0 < y < \frac{1}{2}; y < x < 2y; 0 < z < x\}$$

e

$$\{(x, y, z) : \frac{1}{2} < y < 1; y < x < 1; 0 < z < x\}.$$

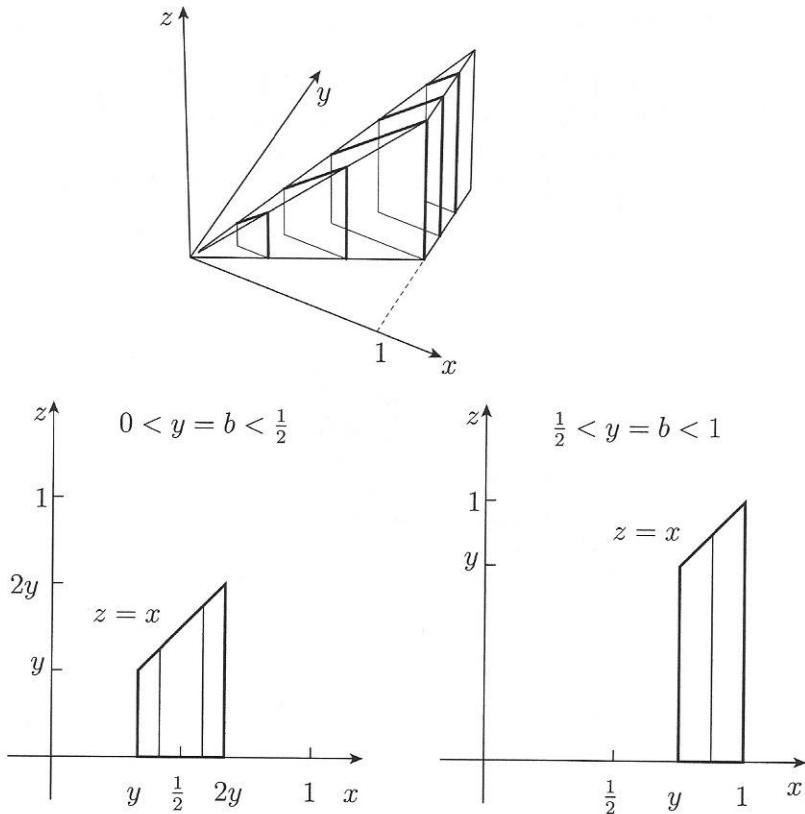
O volume de  $S$  é, portanto, a soma de dois integrais iterados

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_y^{2y} \left( \int_0^x dz \right) dx \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_y^1 \left( \int_0^x dz \right) dx \right) dy.$$

\*\*\*

Para o integral da forma  $\int(\int(\int dx)dz)dy$ , consideram-se as inequações

$$\begin{cases} z < x < 1 \\ y < x < 2y. \end{cases}$$



**Figura 7.12** Uma pirâmide quadrangular. Cortes perpendiculares a  $Oy$

Portanto, para  $0 < y = b < \frac{1}{2}$  vem

$$\begin{cases} z < x \\ y < x < 2y, \end{cases}$$

e deve-se fixar  $z$  em dois intervalos:  $0 < z < y$  ou  $y < z < 2y$ .

Para  $\frac{1}{2} < y = b < 1$  tem-se

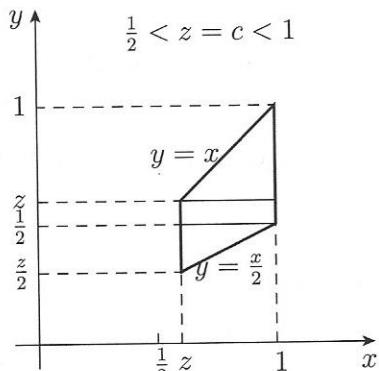
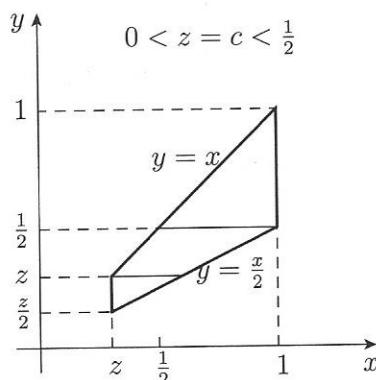
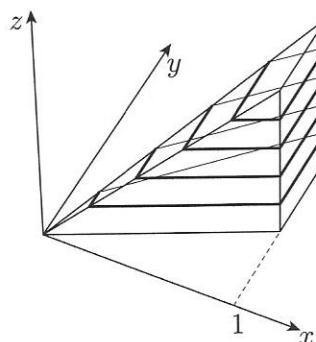
$$\begin{cases} z < x < 1 \\ y < x, \end{cases}$$

e deve-se fixar  $z$  em dois intervalos:  $0 < z < y$  ou  $y < z < 1$ .

Assim, o volume de  $S$  é dado pela soma de quatro integrais iterados:

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^y \left( \int_y^{2y} dx \right) dz \right) dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_y^{2y} \left( \int_z^{2y} dx \right) dz \right) dy + \\ + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_0^y \left( \int_y^1 dx \right) dz \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_y^1 \left( \int_z^1 dx \right) dz \right) dy.$$

\*\*\*



**Figura 7.13** Uma pirâmide quadrangular. Cortes perpendiculares a  $Oz$

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ , devem ocorrer dois casos, tal como se representa na Figura 7.13.

- a)  $0 < z = c < \frac{1}{2}$
- b)  $\frac{1}{2} < z = c < 1$ .

Em qualquer dos casos, o corte em  $S$  com o plano  $z = c$  é dado por

$$S \cap \{z = c\} = \{(x, y, c) : z < x < 1 ; \frac{x}{2} < y < x\}.$$

De seguida fixa-se  $y$  e, de acordo com a Figura 7.13, para cada um dos casos resultam três regiões de integração na variável  $x$ .

Das inequações de definição de  $S$  deduz-se

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < x < 2y \\ z < x < 2y \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} 0 < z < x < 1 \\ \frac{z}{2} < y < x < 2y. \end{cases}$$

Isto quer dizer que, depois de se fixar  $z$  e  $y$ , tem-se  $x < 1$ , se  $2y > 1$ , ou então  $x < 2y$ , se  $y < \frac{1}{2}$ .

Por outro lado, tem-se  $x > z$ , se  $y < z$ , ou então  $x > y$ , se  $y > z$ .

Assim, depois de se fixar  $z$ , para se fixar  $y$  devem ser considerados os valores  $\frac{z}{2}$ ,  $z$ ,  $\frac{1}{2}$ , ou seja, há duas situações distintas (ver Figura 7.13).

- a) Para  $0 < z = c < \frac{1}{2}$ , a coordenada  $y$  é fixada em três intervalos: ou  $\left] \frac{z}{2}, z \right[$ , ou  $\left] z, \frac{1}{2} \right[$  ou  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ .
- b) Para  $\frac{1}{2} < z = c < 1$ , a coordenada  $y$  é fixada em três intervalos: ou  $\left] \frac{z}{2}, \frac{1}{2} \right[$ , ou  $\left] \frac{1}{2}, z \right[$  ou  $\left] z, 1 \right[$ .

Assim, o volume de  $S$  é dado pela soma de seis integrais iterados:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\frac{z}{2}}^z \left( \int_z^{2y} dx \right) dy \right) dz + \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_z^{\frac{1}{2}} \left( \int_y^{2y} dx \right) dy \right) dz + \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_y^1 dx \right) dy \right) dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \int_z^{2y} dx \right) dy \right) dz + \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_{\frac{1}{2}}^z \left( \int_z^1 dx \right) dy \right) dz + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_z^1 \left( \int_y^1 dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

### Exemplo 7.2.4 Um Cilindro

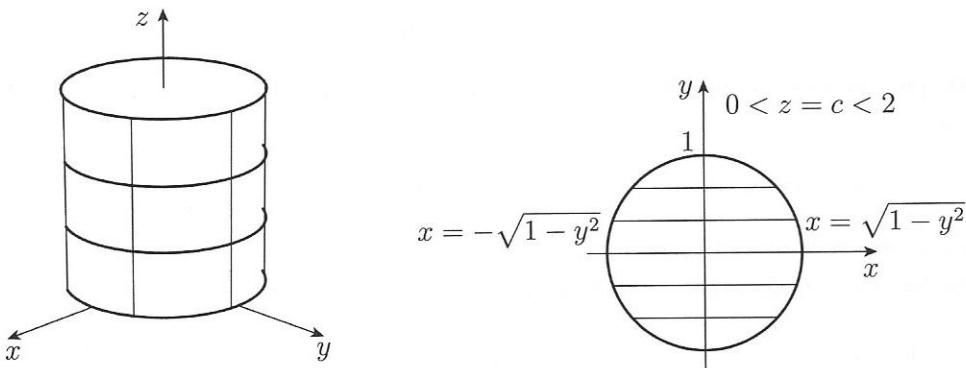
Considere-se o cilindro vertical de raio igual a 1, altura igual a 2, e dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 ; 0 < z < 2\}.$$

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ , fixa-se  $0 < z = c < 2$  e obtém-se o corte em  $S$ , com o plano  $z = c$ ,

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < 1\} \\ &= \{(x, y, c) : -1 < y < 1 ; -\sqrt{1 - y^2} < x < \sqrt{1 - y^2}\}, \end{aligned}$$

que se representa na Figura 7.14.



**Figura 7.14** Um cilindro. Cortes perpendiculares a  $Oz$

Assim,  $S$  pode ser descrito como uma coleção de cortes perpendiculares a  $Oz$ , ou seja,

$$0 < z < 2 ; -1 < y < 1 ; -\sqrt{1 - y^2} < x < \sqrt{1 - y^2},$$

e o volume de  $S$  é dado por

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^2 \left( \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

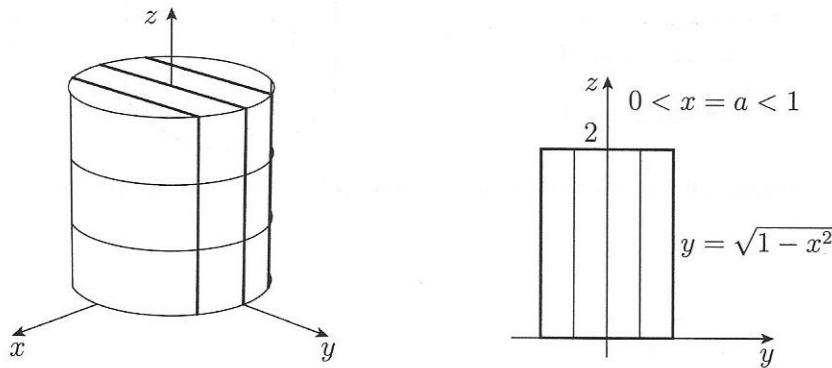
\*\*\*

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dz)dy)dx$ , fixa-se  $-1 < x = a < 1$  e obtém-se

o correspondente corte em  $S$

$$\begin{aligned} S \cap \{x = a\} &= \{(a, y, z) : y^2 < 1 - a^2 ; 0 < z < 2\} \\ &= \{(a, y, z) : -\sqrt{1 - a^2} < y < \sqrt{1 - a^2} ; 0 < z < 2\}, \end{aligned}$$

que se representa na Figura 7.15.



**Figura 7.15** Um cilindro. Cortes perpendiculares a  $Ox$

O volume de  $S$  é

$$\text{vol}_3(S) = \int_{-1}^1 \left( \int_0^2 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dz \right) dx.$$

#### Exemplo 7.2.5 Intersecção de Dois Cilindros Perpendiculares

Considere-se o conjunto que resulta da intersecção de dois cilindros perpendiculares e definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 ; x^2 + z^2 < 1\}.$$

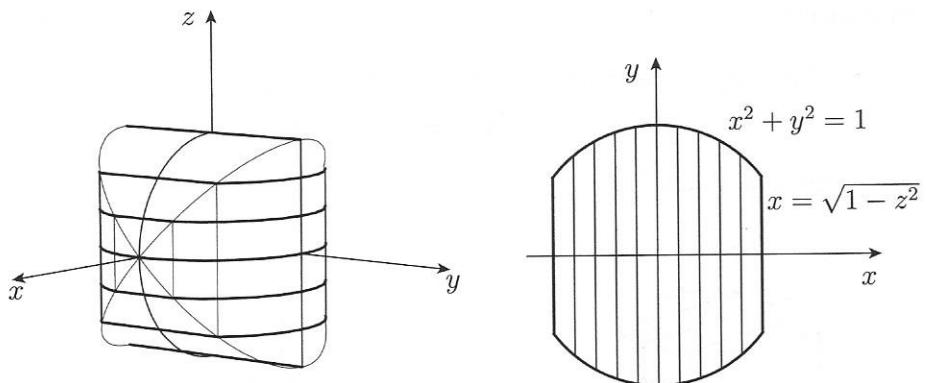
Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dy)dx)dz$ , note-se que  $z^2 < 1$ . Assim, fixando  $z = c$  neste intervalo, o respetivo corte perpendicular ao eixo  $Oz$  é dado por

$$\{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 ; -\sqrt{1 - z^2} < x < \sqrt{1 - z^2}\},$$

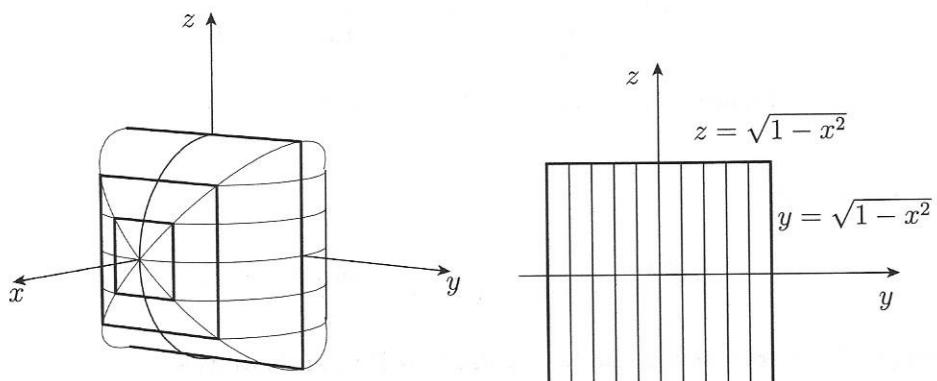
e o conjunto  $V$  é descrito como uma coleção de cortes em  $z$ , ou seja,

$$-1 < z < 1 ; -\sqrt{1 - z^2} < x < \sqrt{1 - z^2} ; -\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{1 - x^2},$$

tal como se encontra representado na Figura 7.16.



**Figura 7.16** Intersecção de dois cilindros perpendiculares. Cortes em  $z$ .



**Figura 7.17** Intersecção de dois cilindros perpendiculares. Cortes em  $x$ .

O volume de  $V$  é dado pelo seguinte integral iterado:

$$\text{vol}_3(V) = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx \right) dz.$$

\*\*\*

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dz)dy)dx$ , note-se que  $x^2 < 1$ . Assim, fixando  $x = a$  neste intervalo, o respetivo corte perpendicular ao eixo  $Ox$  é dado por

$$\{(a, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}; -\sqrt{1-x^2} < z < \sqrt{1-x^2}\},$$

e o conjunto  $V$  é descrito como uma coleção de cortes em  $x$ , ou seja

$$-1 < x < 1; -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}; -\sqrt{1-x^2} < z < \sqrt{1-x^2},$$

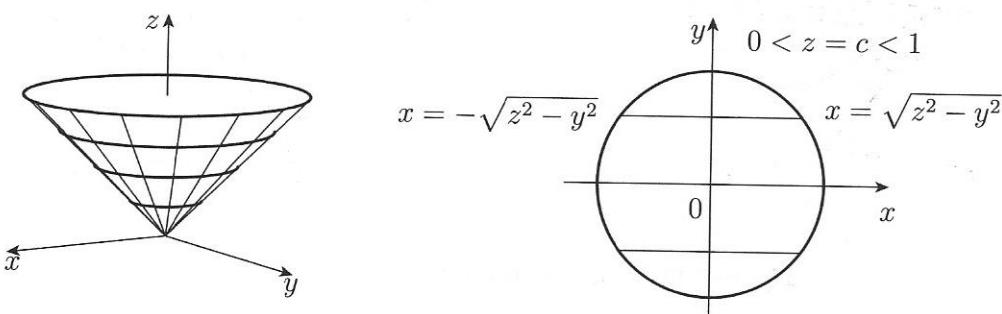
tal como se ilustra na Figura 7.17.

Portanto, o volume de  $V$  é dado pelo seguinte integral iterado:

$$\text{vol}_3(V) = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \right) dy \right) dx = 4 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{16}{3}.$$

### Exemplo 7.2.6 Um Cone

Considere-se o cone  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\}$ .



**Figura 7.18** Um cone. Cortes perpendiculares a  $Oz$

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ , fixa-se  $0 < z = c < 1$  e obtém-se o respetivo corte:

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < c^2\} \\ &= \{(x, y, c) : -c < y < c; -\sqrt{c^2 - y^2} < x < \sqrt{c^2 - y^2}\}, \end{aligned}$$

que se representa na Figura 7.18. O volume de  $S$  é dado por

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left( \int_{-z}^z \left( \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

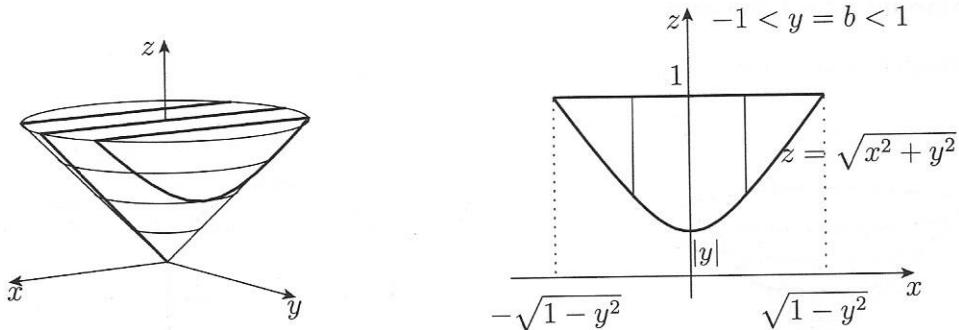
\*\*\*

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dz)dx)dy$ , fixa-se  $-1 < y = b < 1$  e obtém-se o correspondente corte:

$$\begin{aligned} S \cap \{y = b\} &= \{(x, b, z) : x^2 + b^2 < z^2 < 1\} \\ &= \{(x, b, z) : -\sqrt{1-b^2} < x < \sqrt{1-b^2}; \sqrt{x^2+b^2} < z < 1\}, \end{aligned}$$

tal como se apresenta na Figura 7.19, e, portanto,

$$\text{vol}_3(S) = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz \right) dx \right) dy.$$



**Figura 7.19** Um cone. Cortes perpendiculares a  $Oy$

### Exemplo 7.2.7 Um Hiperbolóide

Considere-se o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2 + 1; x > 0; y > 0; 0 < z < 1\}.$$

Trata-se de um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$  limitado pelos planos

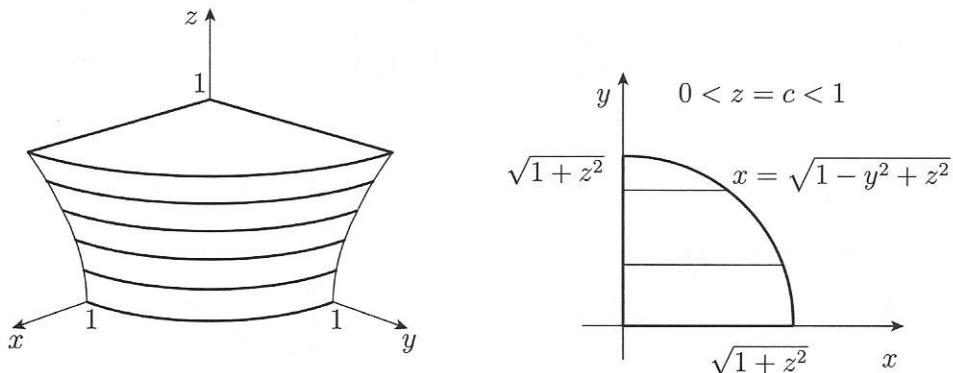
$$x = 0; y = 0; z = 0; z = 1$$

e pela superfície  $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ .

Usando o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ , fixa-se  $0 < z = c < 1$  e obtém-se

$$S \cap \{z = c\} = \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < c^2 + 1; x > 0; y > 0\},$$

ou seja, o corte  $S \cap \{z = c\}$  é um quarto de círculo centrado na origem e de raio  $\sqrt{1 + z^2}$ , tal como se representa na Figura 7.20.



**Figura 7.20** Um hiperbolóide. Cortes perpendiculares a  $Oz$

De seguida, fixa-se  $y = b$ , com  $0 < b < \sqrt{z^2 + 1}$ , e obtém-se

$$0 < z < 1; 0 < y < \sqrt{1 + z^2}; 0 < x < \sqrt{1 + z^2 - y^2}.$$

Assim,

$$\text{vol}_3(S) = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \left( \int_0^{\sqrt{1+z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

\*\*\*

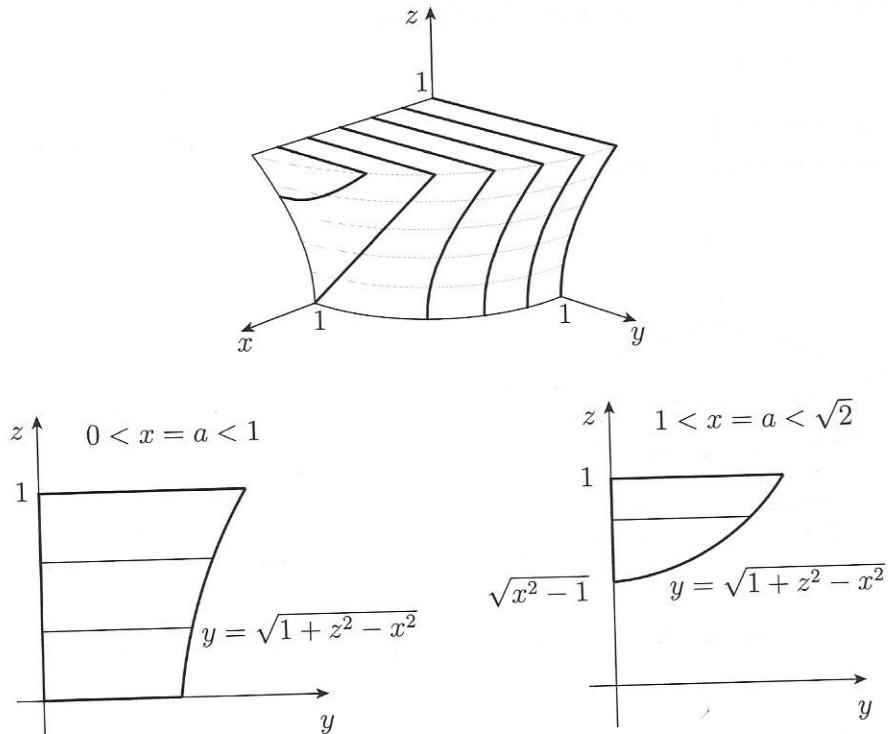
Considere-se o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dy)dz)dx$ . Neste caso obtém-se

$$S \cap \{x = a\} = \{(a, y, z) : y^2 < z^2 - a^2 + 1; y > 0; 0 < z < 1\}.$$

Portanto, tem-se  $z^2 - x^2 + 1 > 0$ , ou seja,  $z^2 > x^2 - 1$ .

Assim, se  $x = a < 1$ , então  $z > 0$  e  $0 < y < \sqrt{z^2 - x^2 + 1}$ .

Se  $x = a > 1$ , então  $z > \sqrt{x^2 - 1}$  e  $0 < y < \sqrt{z^2 - x^2 + 1}$ .



**Figura 7.21** Um hiperbolóide. Cortes perpendiculares a  $Ox$

Na Figura 7.21 apresentam-se os cortes em  $S$ , com o plano  $x = a$ , para os dois casos acima descritos:  $0 < x < 1$  e  $1 < x < \sqrt{2}$ .

Destas figuras obtém-se

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) = & \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1+z^2-x^2}} dy \right) dz \right) dx + \\ & + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_{\sqrt{x^2-1}}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1+z^2-x^2}} dy \right) dz \right) dx. \end{aligned}$$

\*\*\*

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dz)dy)dx$ , fixa-se  $0 < x = a < \sqrt{2}$  e obtém-se

$$S \cap \{x = a\} = \{(a, y, z) : z^2 > a^2 + y^2 - 1; y > 0; 0 < z < 1\},$$

ou seja,

1. Se  $x^2 + y^2 < 1$ , então  $z > 0$ .
2. Se  $1 < x^2 + y^2 < 2$ , então  $z > \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ .

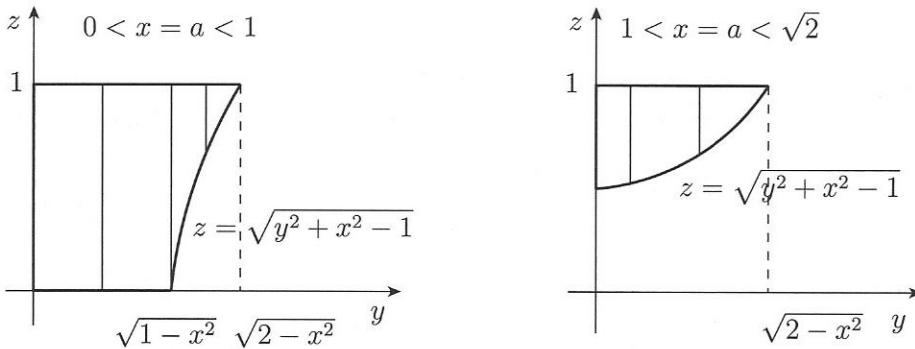
tal como se apresenta na Figura 7.21. Assim,

1. Se  $x^2 + y^2 < 1$ , então  $0 < x < 1 ; y < \sqrt{1 - x^2} ; 0 < z < 1$ .
2. Se  $x^2 + y^2 > 1$  e  $0 < x < 1$ , então

$$\sqrt{1 - x^2} < y < \sqrt{2 - x^2} ; \sqrt{x^2 + y^2 - 1} < z < 1.$$

3. Se  $x^2 + y^2 > 1$  e  $1 < x < \sqrt{2}$ , então

$$0 < y < \sqrt{2 - x^2} ; \sqrt{x^2 + y^2 - 1} < z < 1.$$



**Figura 7.22** Um hiperbolóide. Cortes perpendiculares a  $Ox$

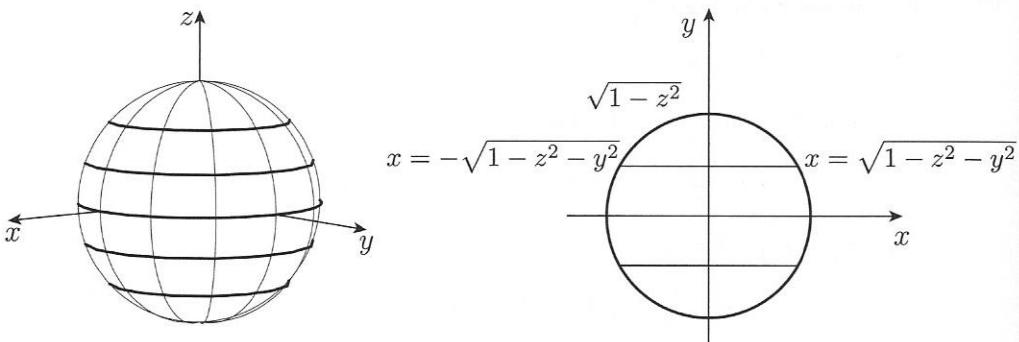
Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_0^1 dz \right) dy \right) dx + \\ &\quad + \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2-1}}^1 dz \right) dy \right) dx + \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2-1}}^1 dz \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

### Exemplo 7.2.8 Uma Bola

Seja  $S$  a bola de raio 1 e centro na origem em  $\mathbb{R}^3$ :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$



**Figura 7.23** Uma bola. Cortes perpendiculares a  $Oz$

Fixando  $-1 < z = c < 1$ , obtém-se  $x^2 + y^2 < 1 - z^2$ , ou seja, um círculo centrado na origem e com raio igual a  $\sqrt{1 - z^2}$ , tal como se representa na Figura 7.23, e dado por

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : x^2 + y^2 < 1 - c^2\} \\ &= \{(x, y, c) : |y| < \sqrt{1 - c^2}; |x| < \sqrt{1 - c^2 - y^2}\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{vol}_3(S) = \int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

### Exemplo 7.2.9 Parte de Um Toro

Neste exemplo considera-se o sólido em  $\mathbb{R}^3$  limitado por um quarto do toro de raios  $R = 3$  e  $r = 1$  e pelos planos  $x = 0$  e  $y = 0$ :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 < 1; x > 0; y > 0\}.$$

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ , fixa-se  $-1 < z = c < 1$  e obtém-se

$$\begin{aligned} S \cap \{z = c\} &= \{(x, y, c) : -\sqrt{1-c^2} < \sqrt{x^2 + y^2} - 3 < \sqrt{1-c^2}; x > 0; y > 0\} \\ &= \{(x, y, c) : 3 - \sqrt{1-c^2} < \sqrt{x^2 + y^2} < 3 + \sqrt{1-c^2}; x > 0; y > 0\}, \end{aligned}$$

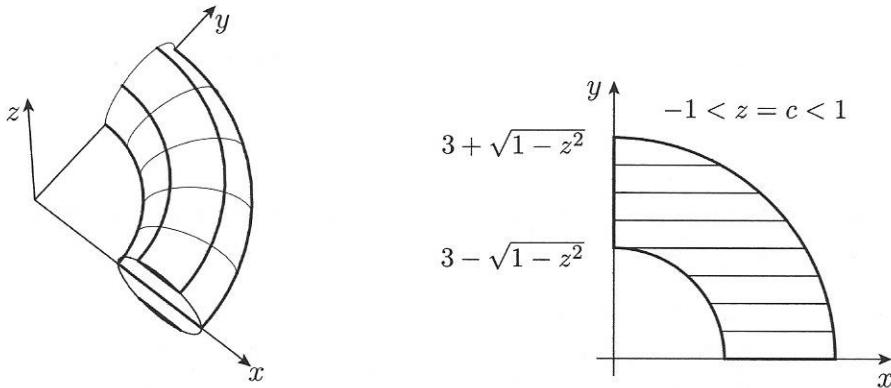
tal como se representa na Figura 7.25.

De seguida fixa-se a variável  $y$ . Da Figura 7.25 fica claro que ocorrem dois casos:

- a)  $0 < y < 3 - \sqrt{1 - z^2}$ .
- b)  $3 - \sqrt{1 - z^2} < y < 3 + \sqrt{1 - z^2}$ .

O volume de  $S$  é então expresso pela soma de dois integrais

$$\text{vol}_3(S) = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{3-\sqrt{1-z^2}} \left( \int_{\sqrt{(3-\sqrt{1-z^2})^2-y^2}}^{\sqrt{(3+\sqrt{1-z^2})^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz \\ + \int_{-1}^1 \left( \int_{3-\sqrt{1-z^2}}^{3+\sqrt{1-z^2}} \left( \int_0^{\sqrt{(3+\sqrt{1-z^2})^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$



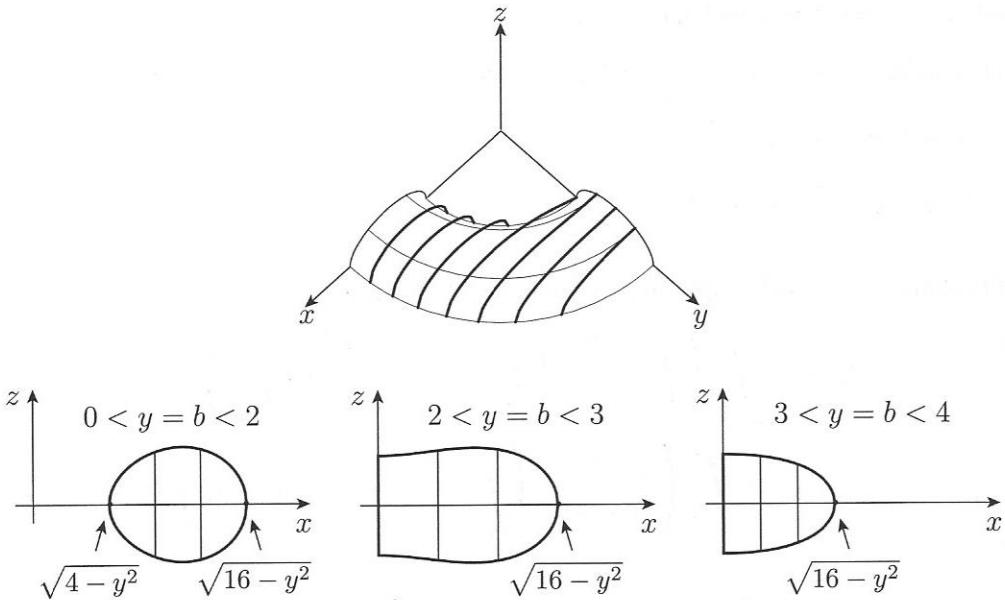
**Figura 7.24** Parte de um toro. Cortes perpendiculares a  $Oz$

\*\*\*

Para o integral iterado da forma  $\int(\int(\int dz)dx)dy$ , fixa-se  $0 < y = b < 4$ .

Para  $x = 0$ , tem-se  $(y - 3)^2 + z^2 < 1$  e, portanto,  $2 < y < 4$ .

Assim, ou  $0 < y = b < 2$  ou  $2 < y = b < 4$ , como se representa na Figura 7.25. O caso  $2 < y = b < 4$  apresenta-se subdividido em dois:  $2 < y = b < 3$  e  $3 < y = b < 4$ . Esta



**Figura 7.25** Parte de um toro. Cortes perpendiculares a  $Oy$

subdivisão é relevante para o cálculo do integral iterado da forma  $\int(\int(\int dx)dz)dy$ , que não é considerado neste texto.

Para  $0 < y = b < 2$ , obtém-se  $\sqrt{4 - y^2} < x < \sqrt{16 - y^2}$  e

$$-\sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2} < z < \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2}.$$

Para  $2 < y = b < 4$ , obtém-se  $0 < x < \sqrt{16 - y^2}$  e, tal como anteriormente,

$$-\sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2} < z < \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \int_0^2 \left( \int_{\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}}^{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}} dz \right) dx \right) dy + \\ &\quad + \int_2^4 \left( \int_0^{\sqrt{16-y^2}} \left( \int_{-\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}}^{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2}} dz \right) dx \right) dy. \end{aligned}$$

### 7.3 EXERCÍCIOS

1. Exprima a área do conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 ; y^2 - x^2 < 1\}$  em termos de integrais iterados da forma  $\int (\int dy) dx$ .
2. Considere o conjunto  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 ; y^2 + z^2 < 1\}$ . Escreva expressões para o volume de  $V$  em termos de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int dz) dx) dy$  e da forma  $\int (\int (\int dx) dy) dz$ . Mostre que  $\text{vol}_3(V) = \frac{16}{3}$ .
3. Seja  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 ; 0 < z < x^2 + y^2\}$ .
  - a) Mostre que  $\text{vol}_3(A) = \frac{2}{3}$ .
  - b) Escreva uma expressão para o volume de  $A$  em termos de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int dy) dx) dz$ .
4. Considere o conjunto  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1 ; 0 < z < y^2 - x^2\}$ .
  - a) Mostre que o volume de  $X$  é dado pelo integral
 
$$\int_0^1 \left( \int_{-y}^y \left( \int_0^{y^2-x^2} dz \right) dx \right) dy = \frac{1}{3}.$$
  - b) Escreva uma expressão para o volume de  $X$  em termos de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int dx) dy) dz$ .
5. Considere o conjunto
 
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1 ; x < y < 2x ; 0 < z < y\}.$$
  - a) Calcule o volume do conjunto  $B$  e confirme que é igual a  $\frac{1}{6}$ .
  - b) Escreva expressões para o volume de  $B$  em termos de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int dy) dx) dz$ .
6. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Mostre que
 
$$\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^y f(z) dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)(1-t)^2 dt.$$

# 8

---

TEOREMA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS

## 8.1 MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Dada uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrável num conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , o cálculo do respetivo integral  $\int_D f$  recorre ao teorema de Fubini. Essa tarefa pode ser facilitada, tendo em conta, por exemplo, as propriedades de simetria do conjunto  $D$ . Nesses casos, o conjunto pode ser descrito em termos de novas variáveis que sejam mais adequadas para evidenciar a simetria apresentada.

Muitas vezes, nas novas variáveis, o conjunto  $D$  passa a ser descrito como um intervalo em que a aplicação do teorema de Fubini é muito simples. Por outro lado, a expressão da função  $f$  pode sugerir a definição de novas variáveis, de modo a facilitar o cálculo dos integrais iterados.

Sem perda de generalidade, basta pensar apenas em  $\mathbb{R}^2$ . Se o conjunto  $D$  for um intervalo  $I = [a, b] \times [c, d]$  e se a função  $f$  for do tipo  $f(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$ , então, pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_D f &= \int_I f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \alpha(x) \int_c^d \beta(y) dy \right) dx \\ &= \left( \int_a^b \alpha(x) dx \right) \left( \int_c^d \beta(y) dy \right),\end{aligned}$$

ou seja, o cálculo do integral será apenas o produto de dois integrais em  $\mathbb{R}$ .

O objetivo da mudança de variáveis é a simplificação do cálculo do integral, adequando-o às características do conjunto  $D$  ou ao tipo da função  $f$ .

**Definição 8.1.1** *Seja  $T \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Diz-se que uma função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma **mudança ou transformação de variáveis**, se verificar as seguintes condições:*

- i)  $g$  é de classe  $C^1$ .
- ii)  $g$  é injetiva.
- iii) A derivada de  $g$  é injetiva, ou seja,  $\det Dg(t) \neq 0 ; \forall t \in T$ .

Assim, fazer  $x = g(t)$  significa substituir as variáveis  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  pelas variáveis  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

\*\*\*

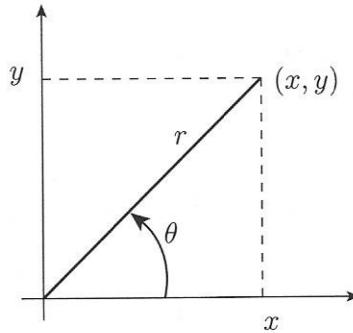
**Exemplo 8.1.1 Coordenadas polares  $(r, \theta)$  em  $\mathbb{R}^2$** 

As coordenadas polares  $(r, \theta)$  são definidas por

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$

De acordo com a Figura 8.1,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  designa a distância de cada ponto de coordenadas  $(x, y)$  à origem, e  $\theta$  é o ângulo formado entre o semieixo positivo  $Ox$  e o vetor  $(x, y)$ .



**Figura 8.1** Coordenadas Polares  $(r, \theta)$  em  $\mathbb{R}^2$

Seja  $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ . Então,  $g$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , e a derivada é injetiva em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De facto,

$$\det Dg(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Dado que as funções trigonométricas são periódicas, a função  $g$  não é injetiva no conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Mas, definindo

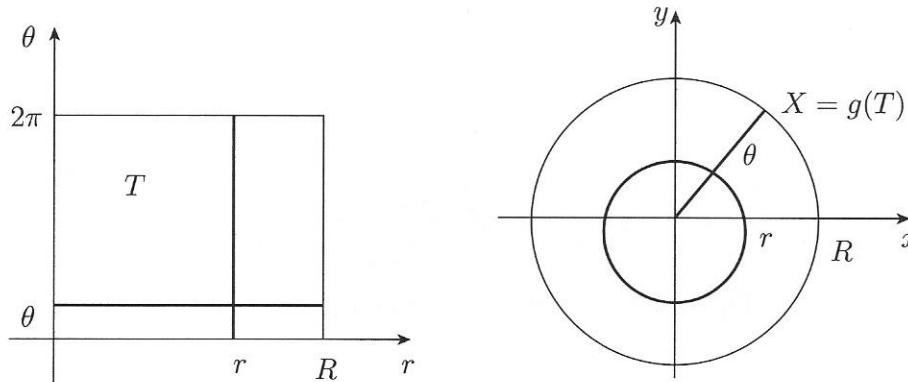
$$T = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0 ; 0 < \theta < 2\pi\},$$

então, a função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma mudança de variáveis.

A função  $g$  transforma  $T$  no conjunto

$$X = g(T) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0 ; x \geq 0\}.$$

Para cada  $r$  fixo em  $T$ , a equação  $x^2 + y^2 = r^2$  descreve uma circunferência de raio  $r$  e centro na origem, tal como se representa na Figura 8.2.



**Figura 8.2**

Por outro lado, a cada  $\theta$  fixo em  $T$  corresponde, em  $(x, y)$ , um segmento de reta, tal como se mostra na Figura 8.2. Portanto, ao círculo centrado na origem e de raio  $R$  e do qual se retira o semieixo positivo  $Ox$ , corresponde, nas coordenadas polares  $(r, \theta)$ , o retângulo  $[0, R] \times [0, 2\pi]$ .

### Exemplo 8.1.2 Coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, z)$ em $\mathbb{R}^3$

As coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  são definidas por

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z.$$

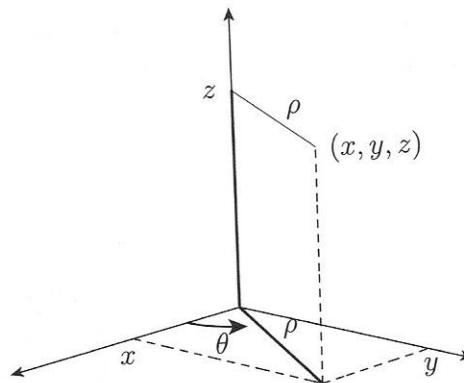
De acordo com a Figura 8.3,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  designa a distância de cada ponto de coordenadas  $(x, y, z)$  ao eixo  $Oz$ , e  $\theta$  é o ângulo formado entre o semieixo positivo  $Ox$  e o vetor  $(x, y, 0)$ .

Seja

$$T = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0; 0 < \theta < 2\pi; z \in \mathbb{R}\}.$$

Então, a função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z),$$

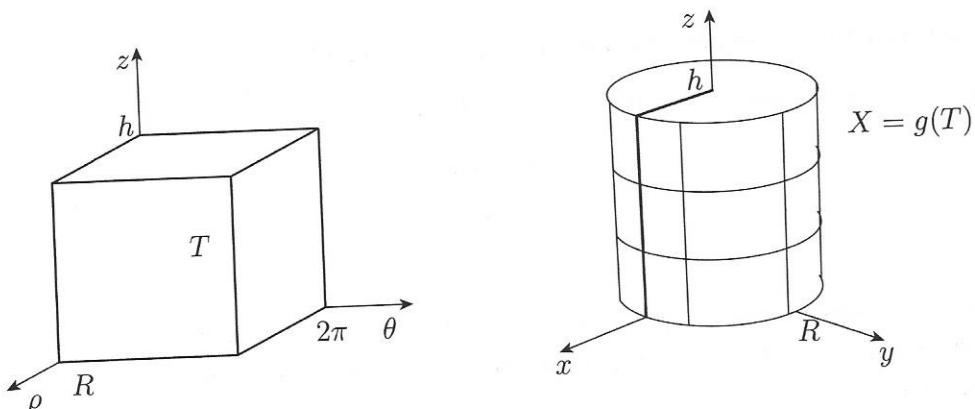


**Figura 8.3** Coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  em  $\mathbb{R}^3$

é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada é injetiva, porque

$$\det Dg(\rho, \theta, z) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho > 0.$$

Assim, a função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma mudança de variáveis.



**Figura 8.4**

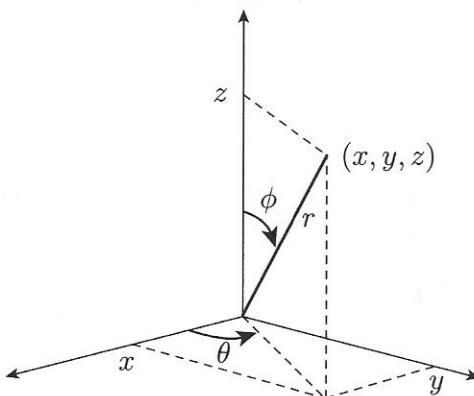
Facilmente se verifica que, ao cilindro com eixo  $Oz$ , de raio  $R$  e altura  $h$  e do qual se retire o plano  $\{x \geq 0; y = 0\}$ , corresponde, em coordenadas cilíndricas, o paralelipípedo  $[0, R[\times]0, 2\pi[\times]0, h[$ , tal como se mostra na Figura 8.4.

**Exemplo 8.1.3 Coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  em  $\mathbb{R}^3$** 

As coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  são definidas por

$$\begin{aligned}x &= r \sen \phi \cos \theta \\y &= r \sen \phi \sen \theta \\z &= r \cos \phi.\end{aligned}$$

De acordo com a Figura 8.5,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  designa a distância de cada ponto de coordenadas  $(x, y, z)$  à origem,  $\theta$  é o ângulo formado entre o semieixo positivo  $Ox$  e o vetor  $(x, y, 0)$ , e  $\phi$  designa o ângulo entre o semieixo positivo  $Oz$  e o vetor  $(x, y, z)$ .



**Figura 8.5** Coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  em  $\mathbb{R}^3$

Seja  $T = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : r > 0 ; 0 < \theta < 2\pi ; 0 < \phi < \pi\}$ .

Então, a função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$g(r, \theta, \phi) = (r \sen \phi \cos \theta, r \sen \phi \sen \theta, r \cos \phi),$$

é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada é injetiva, porque

$$\det Dg(r, \theta, \phi) = \det \begin{bmatrix} \sen \phi \cos \theta & -r \sen \phi \sen \theta & r \cos \phi \cos \theta \\ \sen \phi \sen \theta & r \sen \phi \cos \theta & r \cos \phi \sen \theta \\ \cos \phi & 0 & -r \sen \phi \end{bmatrix} = -r^2 \sen \phi \neq 0.$$

Portanto, a função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma mudança de variáveis. Assim, à bola centrada na origem, de raio  $R$ , e da qual se retira o plano  $\{x \geq 0 ; y = 0\}$  corresponde o paralelipípedo  $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ , tal como se representa na Figura 8.6.

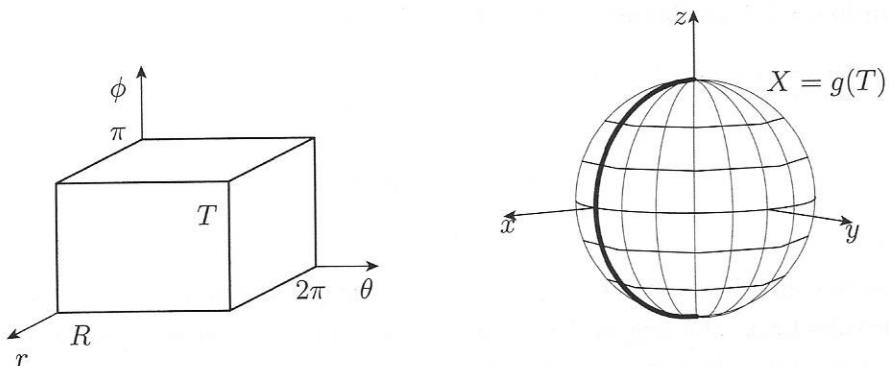


Figura 8.6

\*\*\*

É interessante notar que as coordenadas cilíndricas e as esféricas podem ser vistas no mesmo diagrama, tal como se ilustra na Figura 8.7.

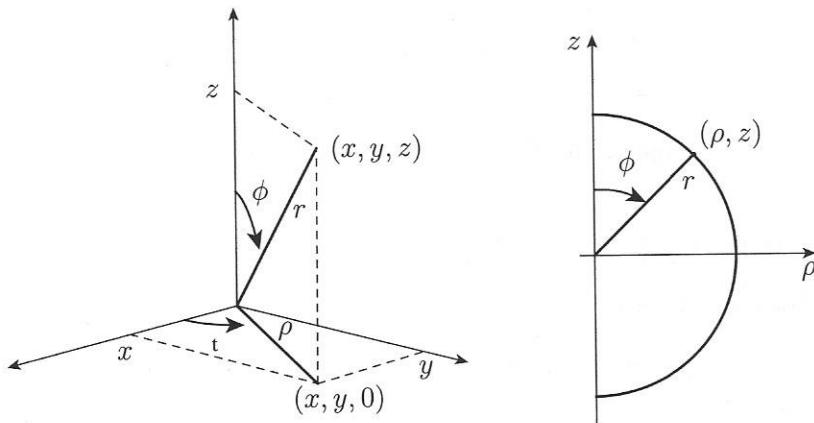


Figura 8.7 Coordenadas esféricas e cilíndricas

É claro que,

$$z = r \cos \phi ; r^2 = \rho^2 + z^2 ; \rho = r \sin \phi ,$$

e, portanto, basta ter presente o diagrama bidimensional em  $\rho$ ,  $z$ , representado na Figura 8.7, para descrever subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

\*\*\*

#### **Exemplo 8.1.4 Transformação linear de variáveis em $\mathbb{R}^n$**

Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação linear e seja  $A$  a matriz que a representa, ou seja,  $g(v) = Av$ ;  $v \in \mathbb{R}^n$ . Tendo em conta que uma transformação linear é de classe  $C^1$  e que a respetiva derivada é representada pela matriz  $A$ , então  $g$  é uma mudança de variáveis em  $\mathbb{R}^n$  desde que se verifique a condição

$$\det A \neq 0.$$

Na Figura 8.8 encontra-se representada uma transformação linear em  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\{e_1, e_2\}$  for a base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , então:

$$g(e_1) = g(1, 0) = v_1; \quad g(e_2) = g(0, 1) = v_2$$

e, portanto, a função  $g$  transforma o quadrado  $T$  no paralelogramo  $X$ , ou seja,

$$X = g(T).$$

A matriz  $A$  que representa a transformação  $g$  é a que se obtém colocando em colunas os vetores  $v_1$  e  $v_2$ .

É sabido da álgebra linear que o módulo do determinante da matriz  $A$  é precisamente a área do paralelogramo  $X$ . Assim, fica claro que

$$\text{vol}_2(X) = \det A \text{ vol}_2(T)$$

e, portanto,

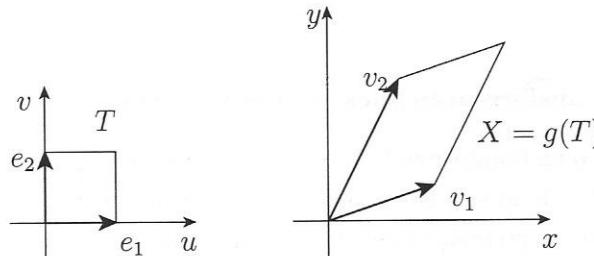
$$\iint_X dx dy = \iint_T |\det A| du dv.$$

Notando que, por ser linear,  $Dg(u, v) = A$ , então:

$$\iint_X dx dy = \iint_T |\det Dg(u, v)| du dv. \quad (8.1)$$

É claro que esta fórmula se verifica em  $\mathbb{R}^n$ , substituindo-se o conceito de área pelo de volume de dimensão  $n$ .

O teorema da mudança de variáveis estabelece que, para uma transformação de variáveis qualquer, a fórmula de transformação do integral é a mesma.



**Figura 8.8** Transformação linear em  $\mathbb{R}^2$

### Exemplo 8.1.5 Transformações primitivas em $\mathbb{R}^2$

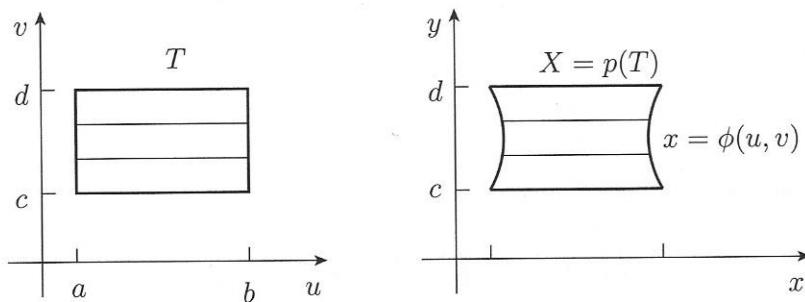
Seja  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ , tal que  $\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \neq 0$ , e  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$p(u, v) = (\phi(u, v), v).$$

É claro que  $p$  é de classe  $C^1$ , injetiva, e  $\det Dp(u, v) = \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \neq 0$ , e, portanto é uma mudança de variáveis em  $\mathbb{R}^2$ .

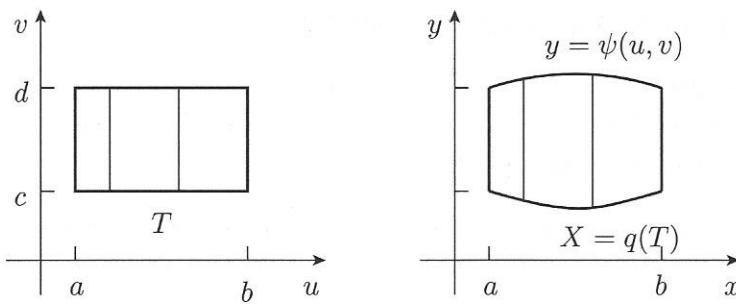
Seja  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \neq 0$ , e  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $q(u, v) = (u, \psi(u, v))$ .

É também claro que  $q$  é uma mudança de variáveis em  $\mathbb{R}^2$  que verifica a desigualdade  $\det Dq(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \neq 0$ .



**Figura 8.9** Transformação primitiva  $(x, y) = p(u, v) = (\phi(u, v), v)$

Nas Figuras 8.9 e 8.10 mostra-se como um intervalo se transforma sob a ação de  $p$  e de  $q$ , respectivamente. É importante verificar que  $p$  mantém as arestas horizontais e  $q$  mantém as arestas verticais.



**Figura 8.10** Transformação primitiva  $(x, y) = q(u, v) = (u, \psi(u, v))$

As transformações definidas deste modo chama-se **transformações primitivas**.

Qualquer mudança de variáveis em  $\mathbb{R}^2$  pode ser dada, localmente, pela composição de duas transformações primitivas.

De facto, seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma mudança de variáveis definida por

$$g(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v)).$$

Sendo

$$\det Dg(u, v) = \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \neq 0,$$

pelo menos uma das derivadas parciais de  $\phi$  ou de  $\psi$  deve ser não nula.

Se

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u_0, v_0) \neq 0,$$

então, pelo teorema da função implícita, a equação  $x = \phi(u, v)$  define localmente  $u$  como função de  $(x, v)$ , ou seja,  $u = u(x, v)$  em algum intervalo que contém o ponto  $(u_0, v_0)$  e em algum intervalo que contém  $x_0 = \phi(u_0, v_0)$ .

Definindo  $p(u, v) = (\phi(u, v), v)$  e  $q(x, v) = (x, \psi(u(x, v), v))$ , então:

$$g(u, v) = (q \circ p)(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v)).$$

Portanto, existe um intervalo que contém o ponto  $(u_0, v_0)$  e um intervalo que contém o ponto  $(x_0, y_0) = g(u_0, v_0)$ , em que a transformação  $g$  é a composição de duas transformações primitivas.

## 8.2 TEOREMA DA MUDANÇA DE VARIÁVEIS

Dada uma mudança de variáveis, coloca-se o problema de saber como se transforma a expressão do integral. Para o caso de uma transformação linear, a fórmula (8.1) resolve o problema, como se viu no Exemplo 8.1.4.

O teorema da mudança de variáveis estabelece que no caso geral a fórmula é a mesma.

**Teorema 8.2.1** *Seja  $T \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado,  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma mudança de variáveis, tal que  $X = g(T)$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então:*

$$\int_X f(x)dx = \int_T f(g(t)) |\det Dg(t)|dt.$$

Por ser instrutivo, apresenta-se com algum pormenor o caso em  $\mathbb{R}^2$ , usando a noção de transformações primitivas. A demonstração do caso geral pode ser vista em ([7], pp. 66–71).

Do Exemplo 8.1.5 sabe-se que uma mudança de variáveis  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^2$  pode ser dada, localmente, pela composição de duas transformações primitivas, ou seja,

$$g(u, v) = (q \circ p)(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v)),$$

em que

$$p(u, v) = (\phi(u, v), v); \quad q(u, v) = (u, \psi(u, v))$$

são funções de classe  $C^1$ .

Por simplicidade e sem perda de generalidade, tome-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} > 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} > 0.$$

Seja

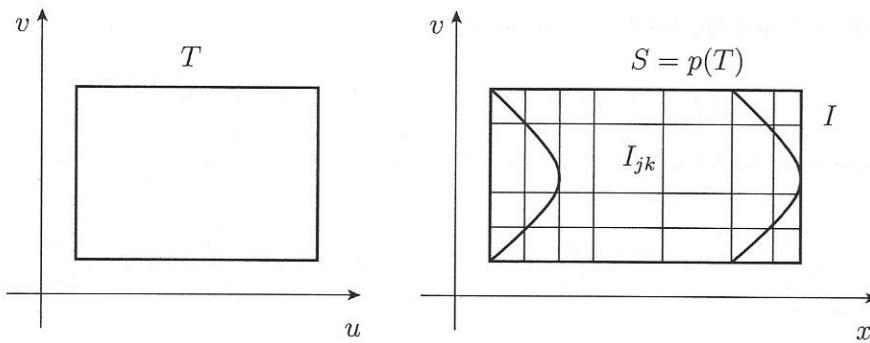
$$S = p(T) = \{(\phi(u, v), v) : (u, v) \in T\}.$$

Então:

$$X = g(T) = q(p(T)) = q(S) = \{(x, \psi(x, v)) : (x, v) \in S\}.$$

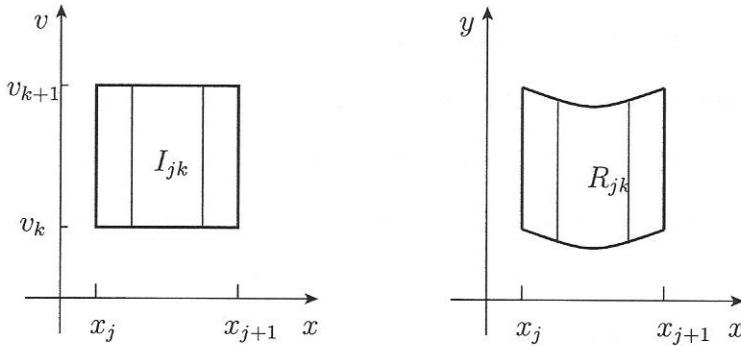
Seja  $I$  um intervalo, tal que  $S \subset I$  e considere-se uma partição de  $I$  dada pelos pontos  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, M$  e pelos pontos  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Sejam  $I_{jk}$  os subintervalos dessa partição tal como se ilustra na Figura 8.11.



**Figura 8.11** Mudança de variáveis:  $S = p(T)$

Seja  $R = q(I)$  e  $R_{jk} = q(I_{jk})$ . É claro que o conjunto  $R_{jk}$  é limitado pelas linhas paralelas  $x = x_j$  e  $x = x_{j+1}$  e pelos gráficos das funções  $x \rightarrow \psi(x, v_k)$  e  $x \rightarrow \psi(x, v_{k+1})$ , em que  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ , tal como se ilustra na Figura 8.12.



**Figura 8.12** Mudança de variáveis:  $R_{jk} = q(I_{jk})$

Assim,

$$\text{vol}_2(R_{jk}) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\psi(x, v_{k+1}) - \psi(x, v_k)) dx.$$

Pelo teorema do valor intermédio em  $\mathbb{R}$ , existe um ponto  $x'_j \in ]x_j, x_{j+1}[$ , tal que

$$\text{vol}_2(R_{jk}) = (\psi(x'_j, v_{k+1}) - \psi(x'_j, v_k))(x_{j+1} - x_j).$$

Pelo teorema de Lagrange em  $\mathbb{R}$ , existe um ponto  $v'_k \in ]v_k, v_{k+1}[$ , tal que

$$\text{vol}_2(R_{jk}) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(x'_j, v'_k)(x_{j+1} - x_j)(v_{k+1} - v_k).$$

Dado que  $f$  é integrável em  $X$  e sendo  $\text{vol}_2(I_{jk}) = (x_{j+1} - x_j)(v_{k+1} - v_k)$ , então

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_S f(x, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(x, v) dx dv.$$

Argumentando do mesmo modo e trocando os papéis de  $x, y$  e de  $\phi, \psi$ , respectivamente, obtém-se

$$\iint_S f(x, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(x, v) dx dv = \iint_T f(\phi(u, v), \psi(\phi(u, v), v)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(\phi(u, v), v) \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) du dv.$$

Notando que

$$\det Dg(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(\phi(u, v), v) \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v),$$

então:

$$\iint_X f(x, y) dx dy = \iint_T f(g(u, v)) |\det Dg(u, v)| du dv.$$

\*\*\*

### Exemplo 8.2.1 Área de Um Círculo em $\mathbb{R}^2$ :

Seja  $S$  o círculo centrado na origem de  $\mathbb{R}^2$  e de raio  $R$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Seja  $X$  o conjunto que se obtém de  $S$  retirando-lhe o semieixo positivo:

$$X = S \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}.$$

Considerando a mudança de variáveis para coordenadas polares em  $\mathbb{R}^2$ :

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y),$$

então:

$$X = g(T),$$

sendo

$$T = \{(r, \theta) : 0 < r < R; 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Notando que o segmento de reta  $\{(x, 0) : 0 \leq x < R\}$  tem conteúdo nulo em  $\mathbb{R}^2$ , e, aplicando o teorema da mudança de variáveis e o teorema de Fubini, obtém-se

$$\text{vol}_2(S) = \text{vol}_2(X) = \int_T r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r dr \right) d\theta = \pi R^2.$$

É de salientar que o conjunto  $T$  é um intervalo, e a aplicação do teorema de Fubini no cálculo do integral duplo é muito simples.

### Exemplo 8.2.2 Volume de Um Cilindro em $\mathbb{R}^3$

Seja  $S$  o cilindro vertical de raio  $R$  e altura  $h$  dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < R^2 ; 0 < z < h\}.$$

Seja  $X$  o conjunto que se obtém de  $S$  retirando-lhe o semiplano  $\{y = 0 ; x \geq 0\}$ , isto é,

$$X = S \setminus \{(x, y, z) : 0 \leq x < R ; y = 0 ; 0 < z < h\}.$$

Seja  $g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = (x, y, z)$  a mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas em  $\mathbb{R}^3$ .

Então:

$$X = g(T),$$

em que

$$T = \{(\rho, \theta, z) : 0 < \rho < R ; 0 < \theta < 2\pi ; 0 < z < h\}.$$

Sabendo que o retângulo

$$\{(x, y, z) : 0 \leq x < R ; y = 0 ; 0 < z < h\}$$

tem conteúdo nulo em  $\mathbb{R}^3$ , e, aplicando o teorema da mudança de variáveis e o teorema de Fubini, obtém-se

$$\text{vol}_3(S) = \text{vol}_3(X) = \int_T \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^h \left( \int_0^R \rho dr \right) dz \right) d\theta = \pi R^2 h.$$

Note-se que  $T$  é um intervalo, e a aplicação do teorema de Fubini ao cálculo do integral é simples.

### Exemplo 8.2.3 Volume de Uma Bola em $\mathbb{R}^3$

Seja  $B$  a bola centrada na origem de  $\mathbb{R}^3$  e de raio  $R$ :

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}.$$

Seja  $X$  o conjunto que se obtém de  $B$  retirando-lhe o semiplano  $\{y = 0 ; x \geq 0\}$ :

$$X = S \setminus \{(x, y, z) : y = 0 ; x^2 + z^2 < R^2\}.$$

Seja  $g(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) = (x, y, z)$  a mudança de variáveis para coordenadas esféricas em  $\mathbb{R}^3$ .

Então:

$$X = g(T),$$

sendo

$$T = \{(r, \theta, \phi) : 0 < r < R; 0 < \theta < 2\pi; 0 < \phi < \pi\}.$$

Tendo em conta que o semicírculo  $\{(x, y, z) : y = 0; x^2 + z^2 < R^2\}$  tem conteúdo nulo em  $\mathbb{R}^3$ , e, aplicando o teorema da mudança de variáveis e o teorema de Fubini, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(B) &= \text{vol}_3(X) = \int_T r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin \phi dr \right) d\phi \right) d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Tal como nos exemplos anteriores, o conjunto  $T$  é um intervalo, e a aplicação do teorema de Fubini ao cálculo do integral triplo é muito simples.

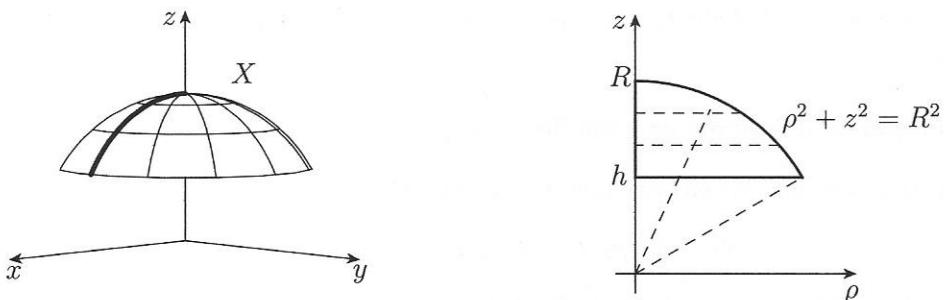
#### Exemplo 8.2.4 Volume de Uma Calote Esférica em $\mathbb{R}^3$

Seja  $S$  a calote esférica, representada na Figura 8.13, definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2; z > h\}$$

e seja  $X$  o conjunto que se obtém de  $S$  retirando-lhe o semiplano  $\{y = 0; x \geq 0\}$ :

$$X = S \setminus \{(x, y, z) : y = 0; x \geq 0\}.$$



**Figura 8.13** Calote esférica em coordenadas esféricas e cilíndricas

Sendo  $S$  uma porção de uma bola em  $\mathbb{R}^3$ , pode ser usada a mudança de variáveis para coordenadas esféricas  $g(r, \theta, \phi) = (r \sen \phi \cos \theta, r \sen \phi \sen \theta, r \cos \phi) = (x, y, z)$ .

Da condição  $z > h$ , vem  $r > \frac{h}{\cos \phi}$ , e, portanto,  $X = g(T)$ , sendo

$$T = \left\{ (r, \theta, \phi) : 0 < \theta < 2\pi ; 0 < \phi < \arccos\left(\frac{h}{R}\right) ; \frac{h}{\cos \phi} < r < R \right\}.$$

Assim, o volume de  $S$  é dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \text{vol}_3(X) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\arccos(\frac{h}{R})} \left( \int_{\frac{h}{\cos \phi}}^R r^2 \sen \phi dr \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\arccos(\frac{h}{R})} \sen \phi \left( R^3 - \frac{h^3}{\cos^3 \phi} \right) d\phi \end{aligned}$$

e, tendo em conta que,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cos^2 x} \right) = 2 \frac{\sen x}{\cos^3 x},$$

então:

$$\text{vol}_3(S) = \frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^2h + h^3).$$

Por outro lado, dado que a calote esférica  $S$  também apresenta simetria cilíndrica em torno do eixo  $Oz$ , considere-se a mudança para coordenadas cilíndricas:

$$g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sen \theta, z) = (x, y, z).$$

Da inequação  $x^2 + y^2 < R^2 - z^2$ , vem  $\rho < \sqrt{R^2 - z^2}$ , e então  $X = g(T)$ , sendo

$$T = \{(\rho, \theta, z) : h < z < R ; 0 < \theta < 2\pi ; 0 < \rho < \sqrt{R^2 - z^2}\}.$$

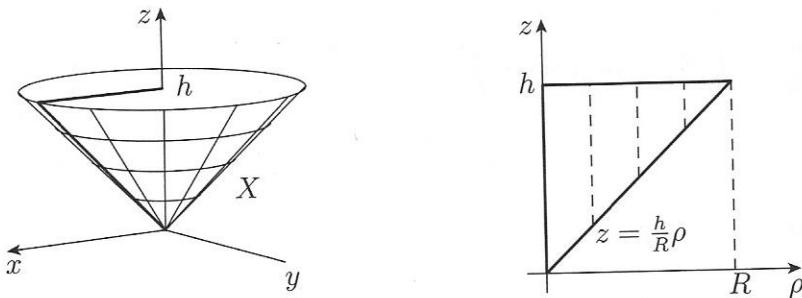
Assim, o volume de  $S$  é dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \text{vol}_3(X) = \int_T \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_h^R \left( \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta \\ &= \pi \int_h^R (R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^2h + h^3). \end{aligned}$$

**Exemplo 8.2.5 Volume de Um Cone em  $\mathbb{R}^3$** 

Seja  $S$  o cone de raio da base  $R > 0$  e altura  $h > 0$ , representado na Figura 8.14, definido por

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} < z < h \right\}.$$



**Figura 8.14** Cone em  $\mathbb{R}^3$

A cada valor de  $z$  corresponde um círculo de raio  $\frac{R}{h}z$ , ou seja,  $S$  apresenta simetria cilíndrica com eixo  $Oz$ , e, portanto, considere-se a mudança para coordenadas cilíndricas:

$$g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = (x, y, z).$$

Seja  $X$  o conjunto que se obtém de  $S$  retirando-lhe o plano  $\{y = 0; x \geq 0\}$ .

Das condições,  $\frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2} < z < h$  vem  $\rho < \frac{R}{h}z < R$ , e, portanto,  $X = g(T)$ , em que

$$T = \left\{ (\rho, \theta, z) : 0 < \theta < 2\pi; 0 < \rho < R; \frac{h}{R}\rho < z < h \right\}.$$

O volume de  $S$  é, então, dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(S) &= \text{vol}_3(X) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \left( \int_{\frac{h}{R}\rho}^h \rho dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^h \rho \left( h - \frac{h}{R}\rho \right) d\rho \\ &= 2\pi h \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 h. \end{aligned}$$

**Exemplo 8.2.6** Seja  $V$  o sólido representado na Figura 8.15 e definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z^2 ; x^2 + y^2 + z^2 < 5 ; z > 0\}.$$

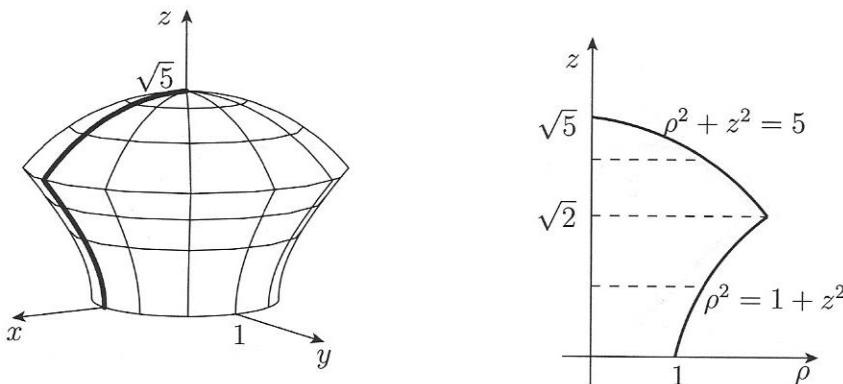


Figura 8.15

Das inequações  $x^2 + y^2 + z^2 < 5$  e  $z > 0$ , vem  $0 < z < \sqrt{5}$ . Por outro lado, as superfícies dadas, respectivamente, por  $x^2 + y^2 = 1 + z^2$  e  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ , intersectam-se segundo a linha dada pelas equações

$$z = \sqrt{2}; \quad x^2 + y^2 = 3.$$

É claro que  $V$  apresenta simetria cilíndrica relativa ao eixo  $Oz$ . Assim, em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ ,  $V$  é descrito por

- i) Se  $0 < z < \sqrt{2}$ , então  $0 < \theta < 2\pi$ ;  $0 < \rho < \sqrt{1+z^2}$ .
- ii) Se  $\sqrt{2} < z < \sqrt{5}$ , então  $0 < \theta < 2\pi$ ;  $0 < \rho < \sqrt{5-z^2}$ .

Pelo teorema da mudança de variáveis, o volume de  $V$  pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}} \left( \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left( \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left( \int_0^{\sqrt{5-z^2}} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (1+z^2) dz + \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (5-z^2) dz \\ &= \pi \frac{10\sqrt{5} - 8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

**Exemplo 8.2.7** Seja  $V$  o sólido limitado por um cone e uma esfera, representado na Figura 8.16, definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2; \sqrt{x^2 + y^2} < z\}.$$

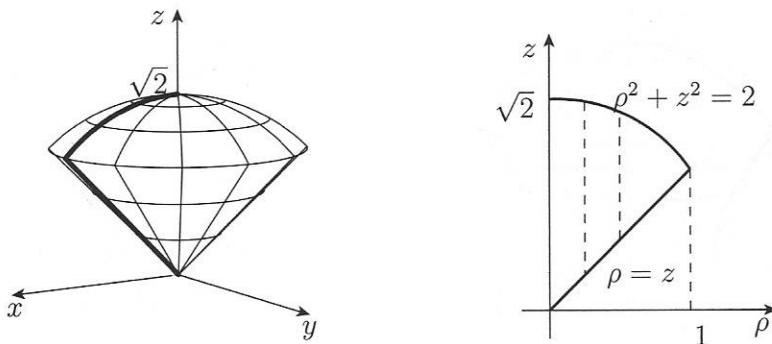


Figura 8.16

É claro que este sólido apresenta simetria cilíndrica em torno do eixo  $Oz$ . De facto,

$$\rho^2 + z^2 < 2; \quad z > \rho,$$

ou seja,

$$0 < \theta < 2\pi; \quad 0 < \rho < 1; \quad \rho < z < \sqrt{2 - \rho^2},$$

tal como se ilustra na Figura 8.16.

Assim, o respetivo volume é dado por

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_{\rho}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho (\sqrt{2 - \rho^2} - \rho) d\rho \\ &= \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

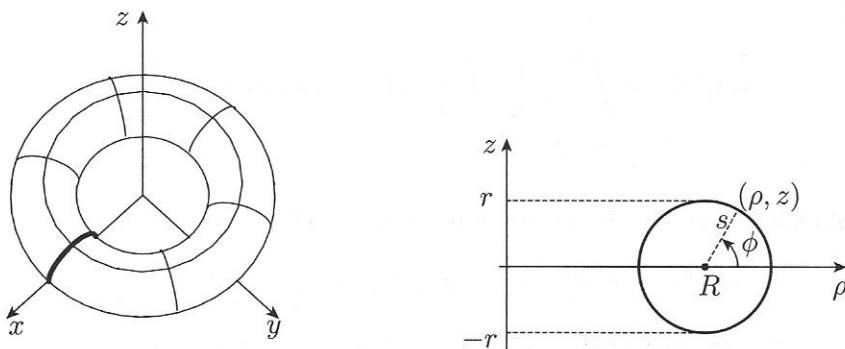
Da Figura 8.16, também é claro que as coordenadas esféricas são adequadas para calcular o volume de  $V$ . Sendo  $z > \rho$ , é claro que  $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$  e, portanto,

$$0 < \theta < 2\pi; \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{4}; \quad 0 < r < \sqrt{2},$$

e o respetivo volume é dado pelo integral

$$\text{vol}_3(V) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin(\phi) dr \right) d\phi \right) d\theta = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - 1).$$

**Exemplo 8.2.8** Seja  $X$  o toro de raios  $R > 0$  e  $r > 0$ , que se representa na Figura 8.17 e descrito por  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 < r^2\}$ .



**Figura 8.17** Toro de raios  $R, r$

Embora possa ser descrito em coordenadas cilíndricas, o toro também pode ser definido nas chamadas coordenadas toroidais  $(s, \theta, \phi)$ .

Recorrendo à Figura 8.17, é claro que

$$\rho - R = s \cos \phi ; \quad z = s \sin \phi,$$

e então:

$$\begin{cases} x = (R + s \cos \phi) \cos \theta \\ y = (R + s \cos \phi) \sin \theta \\ z = s \sin \phi. \end{cases}$$

O toro resulta da rotação do círculo centrado no ponto  $(\rho, z) = (R, 0)$  e raio  $r$  em torno do eixo  $Oz$ .

Seja  $T$  o intervalo definido por

$$T = \{(s, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \theta < 2\pi ; 0 < \phi < 2\pi ; 0 < s < r\},$$

e  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por

$$g(s, \theta, \phi) = ((R + s \cos \phi) \cos \theta, (R + s \cos \phi) \sin \theta, s \sin \phi).$$

É fácil verificar que  $g$  é uma mudança de variáveis e que  $g(T) = X \setminus N$ , sendo  $N$  o conjunto definido por

$$N = \{(0, y, z)\} \cup \{(x, y, 0)\}.$$

Para além disso,  $\det Dg(s, \theta, \phi) = (R + s \cos \phi)s$ . Assim, o volume do toro é dado pelo integral

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(X) &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r (R + s \cos \phi) s ds \right) d\phi \right) d\theta \\ &= 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

**Exemplo 8.2.9** Seja  $S \subset \mathbb{R}^2$  a região representada na Figura 8.18, definida por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq \pi - x, \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{x}{2}\},$$

e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = \sin(x + y) \cos(x - 2y)$ .

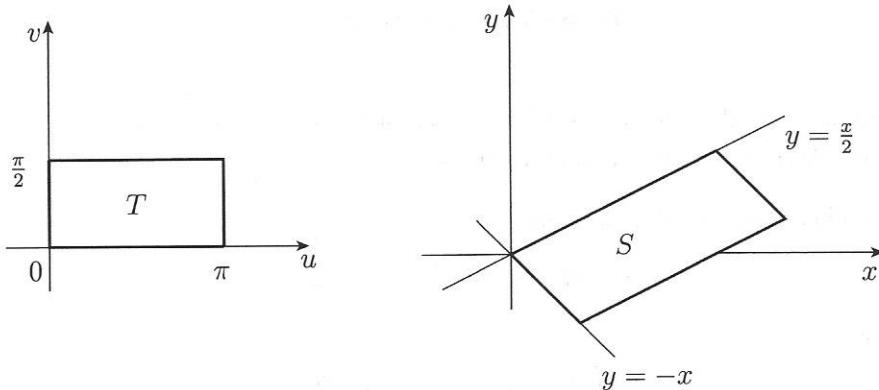


Figura 8.18

Para calcular o integral  $\int_S f$  considere-se a transformação linear  $(u, v) = g(x, y)$  definida por

$$u = x + y$$

$$v = x - 2y.$$

Através desta transformação, a função  $f$  passa a ser o produto de duas funções de uma variável cada. Este facto irá certamente simplificar o cálculo do integral.

Sendo linear, para que  $g$  seja uma mudança de variáveis, basta que a matriz que a representa seja não singular. Recorde-se que para uma transformação linear a matriz que a representa e a sua derivada coincidem. Assim,  $g$  é uma mudança de variáveis, porque

$$\det Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 \neq 0.$$

É de salientar que a transformação  $g$  permite mudar das coordenadas  $(u, v)$  para as coordenadas  $(x, y)$ , e o que se pretende é a mudança inversa.

No entanto, a transformação inversa  $g^{-1}$  é também uma mudança de variáveis, e

$$\det Dg^{-1}(u, v) = -\frac{1}{3}.$$

Assim, seja  $T \subset \mathbb{R}^2$ , tal que  $S = g^{-1}(T)$ . Da definição de  $S$ , vem

$$T = \left\{ (u, v) : 0 \leq u \leq \pi ; 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Usando o teorema da mudança de variáveis, obtém-se

$$\begin{aligned} \int \int_S f(x, y) dx dy &= \int \int_T f(g^{-1}(u, v)) |\det Dg^{-1}(u, v)| dudv \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) \cos(v) dv \right) du \\ &= \frac{1}{3} \left( \int_0^\pi \sin(u) du \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v) dv \right) \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Exemplo 8.2.10** Seja  $S \subset \mathbb{R}^2$  a região representada na Figura 8.19, definida por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2 ; x > 0 ; x < y < 3x, \}$$

e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \frac{y}{x(1 + x^2y^2)}.$$

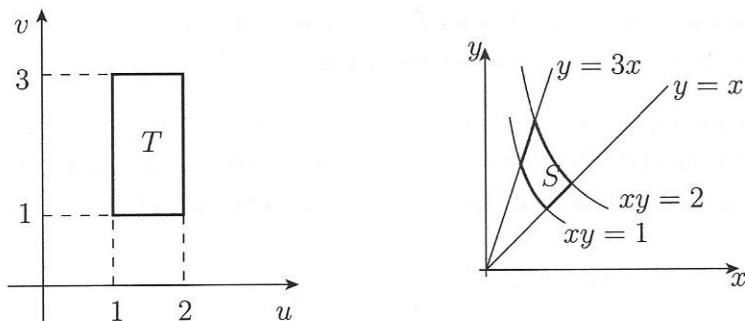


Figura 8.19

Note-se que  $S$  é um conjunto limitado e que a função  $f$  é limitada e contínua em  $S$ , e, por isso, o respetivo integral existe.

Tendo em conta que  $S$  pode ser dado por

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2 ; x > 0 ; 1 < \frac{y}{x} < 3 \right\},$$

e sabendo que a função  $f$  depende do produto  $xy$  e da razão  $\frac{y}{x}$ , considere-se a transformação  $(u, v) = g(x, y)$  definida por

$$u = xy$$

$$v = \frac{y}{x}.$$

Então:  $T = g(S) = \{(u, v) : 1 < u < 2 ; 1 < v < 3\}$ , ou seja, a função  $g$  transforma  $S$  no retângulo  $T = g(S)$ .

É claro que  $g$  é de classe  $C^1$ . Da definição de  $g$ , vem

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$$y = \sqrt{uv}$$

e, portanto,  $g$  é invertível, ou seja, injetiva.

A derivada de  $g$  é dada pela matriz

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

e, tendo em conta que  $y > x > 0$ , então:

$$\det Dg(x, y) = \frac{2y}{x} > 0.$$

Deste modo,  $g$  é uma mudança de variáveis.

Aplicando o teorema da mudança de variáveis, e tendo o cuidado de notar que a transformação a usar é a função  $g^{-1}$ , e que

$$\det Dg^{-1}(u, v) = \frac{1}{2v},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \int \int_S f(x, y) dx dy &= \int \int_T f(g^{-1}(u, v)) |\det Dg^{-1}(u, v)| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \int_1^2 \frac{1}{1+u^2} du \right) dv \\ &= \operatorname{arctg}(2) - \operatorname{arctg}(1). \end{aligned}$$

**Exemplo 8.2.11** Seja  $S$  o círculo centrado na origem de  $\mathbb{R}^2$ , de raio  $R$ , e seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ .

Para calcular o integral de  $f$  em  $S$  recorre-se à mudança de variáveis para coordenadas polares:

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Do Exemplo 8.1.1 sabe-se que  $g(T) = S$ , em que

$$T = \{(r, \theta) : 0 < r < R; 0 < \theta < 2\pi\},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y) dx dy &= \int_T f(g(r, \theta)) |\det Dg(r, \theta)| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r e^{-r^2} dr \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R r e^{-r^2} dr \\ &= \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

Da aplicação do teorema de Fubini ao cálculo do integral em coordenadas  $(x, y)$ , vem

$$\int_S f(x, y) dx dy = \int_{-R}^R e^{-x^2} \left( \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} e^{-y^2} dy \right) dx,$$

e este integral não é facilmente calculável, por não estar à disposição uma primitiva para a função  $e^{-x^2}$ .

Em coordenadas polares, este problema não existe, porque a função a integrar é dada por  $re^{-r^2}$ , cuja primitivação é imediata.

### 8.3 EXERCÍCIOS

1. Calcule o integral  $\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2 + y^2) dy \right) dx$ .

2. Use uma mudança de variáveis adequada para mostrar que

$$\iint_I \cos^2(\pi(x+y)) dx dy = \frac{1}{2},$$

sendo  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ .

3. Seja  $f(x, y) = \left(\frac{x+y}{x}\right)^2$  e  $S \subset \mathbb{R}^2$  o conjunto situado no primeiro quadrante e limitado pelas retas definidas pelas equações:  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x+y = 1$ ,  $x+y = 2$ .

Use uma mudança de variáveis adequada para mostrar que  $\iint_S f(x, y) dx dy = \frac{3}{2}$ .

4. Considere a função

$$h(x, y) = \left( \frac{x^2}{4} + y^2, \frac{y}{x} \right)$$

definida para  $x > 0$ .

a) Mostre que  $h$  é uma mudança de variáveis.

b) Use a transformação  $h$  para calcular a área do conjunto situado, no primeiro quadrante, entre as elipses  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  e  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$  e entre as retas  $y = x$  e  $y = 2x$ .

5. Calcule o volume do elipsóide em  $\mathbb{R}^3$  definido por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ , em que  $a, b, c > 0$ .

6. Determine as coordenadas do centróide do sólido representado pelo cone cuja base é um círculo de raio  $R > 0$  e altura  $h > 0$ .

7. Considere o sólido  $V$  definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z^2 \leq x^2 + y^2; x \geq 0\},$$

cuja densidade de massa é constante e igual a 1. Calcule o momento de inércia de  $V$  relativo ao eixo  $Oz$ .

8. Seja  $S$  um conjunto definido no plano  $Oxz$ , limitado, com área bem definida, e  $D \subset \mathbb{R}^3$  o sólido de revolução que resulta da rotação de  $S$  em torno do eixo  $Oz$ .

- a) Mostre que o volume do sólido  $D$  é o produto da área de  $S$  pelo comprimento da circunferência descrita pelo centróide de  $S$ .
- b) Use o resultado anterior para mostrar que o volume de um toro de raios  $R > 0$  e  $r > 0$  é igual a  $2\pi^2 Rr^2$ .

9. Seja  $V_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq t\}$ , e  $F: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$F(t) = \int \int \int_{V_t} \frac{e^{t(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz.$$

Calcule a derivada  $F'(t)$ .

# 9

---

INTEGRAIS EM VARIEDADES

## 9.1 INTEGRAL DE LINHA DE UM CAMPO ESCALAR

### 9.1.1 COMPRIMENTO DE UMA LINHA

Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $[A, B]$  o segmento de reta entre os pontos  $A$  e  $B$ . É claro que o comprimento de  $[A, B]$  é dado pela norma  $\|B - A\|$ .

Recorde-se que uma linha é a imagem de um caminho ou trajetória  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , em que  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo.

O segmento de reta  $[A, B]$  pode ser descrito pela função  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por

$$\gamma(t) = A + t(B - A).$$

De facto, o segmento de reta  $[A, B]$  é a imagem da função  $\gamma$ , sendo  $A = \gamma(0)$  e  $B = \gamma(1)$ . Para cada  $t$ , o ponto  $x = \gamma(t)$  encontra-se sobre a reta definida pela direção do vetor  $B - A$ .

Para o caso de um segmento de reta  $[A, B]$ , a função  $\gamma(t) = A + t(B - A)$ , definida no intervalo  $[0, 1]$ , é de classe  $C^1$  e  $\gamma'(t) = B - A$ .

Assim,

$$\|B - A\| = \int_0^1 \|B - A\| dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

ou seja, o comprimento do segmento de reta  $[A, B]$  é dado pelo integral  $\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$ .

Seja  $\Gamma$  uma linha descrita por um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para definir o comprimento de  $\Gamma$  recorre-se ao procedimento ilustrado na Figura 9.1.

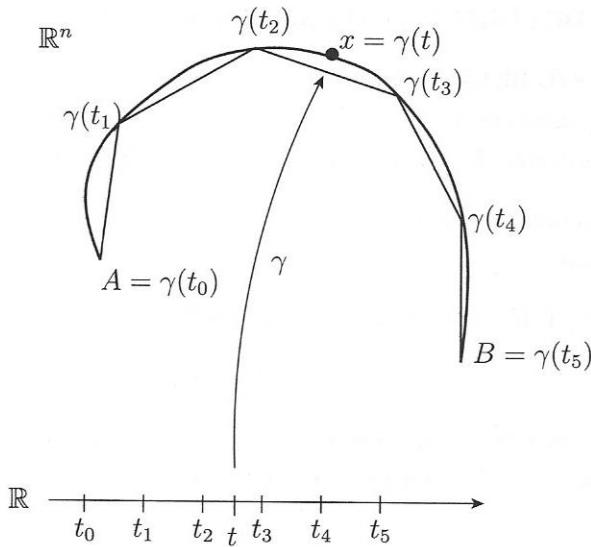
Considere-se a linha poligonal constituída por segmentos de reta que ligam os pontos

$$\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_N),$$

sendo  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ , com  $N \in \mathbb{N}$ . Na Figura 9.1 tem-se  $N = 5$ .

É claro que o comprimento desta linha poligonal é uma aproximação por defeito do comprimento da linha  $\Gamma$ . Note-se, também, que o comprimento da linha poligonal cresce à medida que  $N \rightarrow \infty$ .

Assim, tomando o supremo dos comprimentos das linhas poligonais obtidas deste modo, tem-se uma boa definição de comprimento da linha  $\Gamma$ .



**Figura 9.1** Comprimento de uma linha

Como o comprimento da linha poligonal é dado por

$$\sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|,$$

o comprimento da linha  $\Gamma$  será definido por

$$l(\Gamma) = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \right\}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1}^N \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Estas considerações levam-nos a estabelecer a seguinte definição de comprimento de uma linha  $\Gamma$ :

**Definição 9.1.1** Chama-se **comprimento** de uma linha  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ , descrita por um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $b > a$ , de classe  $C^1$ , ao integral

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Tendo em conta as aplicações, é importante definir integral de linha de um campo escalar.

**Definição 9.1.2** Seja  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um **campo escalar**, e  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  uma linha descrita pelo caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Chama-se **integral de linha do campo escalar  $\phi$  ao longo da linha  $\Gamma$**  ao integral

$$\int_{\Gamma} \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

\*\*\*

Chamando **elemento de comprimento de arco** a

$$ds = \|\gamma'(t)\| dt,$$

o integral de linha de um campo escalar  $\phi$  ao longo da linha  $\Gamma$  será representado pelo símbolo  $\int_{\Gamma} \phi ds$ , ou seja,

$$\int_{\Gamma} \phi ds = \int_{\Gamma} \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Em particular,

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds.$$

\*\*\*

A função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\alpha(t) = a + (b - a)t$  transforma o intervalo  $[0, 1]$  no intervalo  $[a, b]$ .

Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho que descreve uma linha  $\Gamma$ . O caminho  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido pela composição  $g(t) = \gamma(\alpha(t))$  também descreve a linha  $\Gamma$ . Assim, uma linha pode ser sempre descrita por um caminho definido no intervalo  $[0, 1]$ .

Note-se que a função  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  é bijetiva, de classe  $C^1$ , e  $\alpha'(t) \neq 0$  para qualquer  $t \in [0, 1]$ .

A definição do integral de linha de um campo escalar  $\phi$  depende, aparentemente, do caminho escolhido. No entanto, sejam  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dois caminhos que descrevem a mesma linha.

Se existir uma função  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  bijetiva, de classe  $C^1$ , tal que  $\alpha'(t) \neq 0$ , para qualquer  $t \in [0, 1]$ , e  $g(t) = \gamma(\alpha(t))$ , diz-se que os caminhos  $\gamma$  e  $g$  são equivalentes.

Então,  $g'(t) = \gamma'(\alpha(t))\alpha'(t)$  e, portanto,

$$\int_0^1 \phi(g(t)) \|g'(t)\| dt = \int_0^1 \phi(\gamma(\alpha(t))) \|\gamma'(\alpha(t))\| |\alpha'(t)| dt,$$

e, fazendo  $r = \alpha(t)$ , obtém-se

$$\int_0^1 \phi(g(t)) \|g'(t)\| dt = \int_a^b \phi(\gamma(r)) \|\gamma'(r)\| dr,$$

ou seja, a definição de integral de linha de um campo escalar não depende do caminho que descreve a linha.

\*\*\*

Dado um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , tal que  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  para qualquer  $t \in [0, 1]$ , seja  $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Seja  $\Gamma$  a linha descrita pelo caminho  $\gamma$ . Notando que  $s(1) = l(\Gamma) = l$ , a  $s$  chama-se **comprimento de arco**.

É claro que  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ , e, portanto, a linha  $\Gamma$  pode ser descrita por um caminho  $r : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dependente de  $s$  e equivalente a  $\gamma$ , ou seja,  $\gamma(t) = r(s(t))$ .

É importante observar que  $\gamma'(t) = r'(s)s'(t) = r'(s)\|\gamma'(t)\|$  e, portanto,  $\|r'(s)\| = 1$ .

Esta relação desempenha um papel relevante no estudo da geometria de linhas, como pode ser visto em ([2], Cap. 1) ou em ([1], Cap. 12).

### 9.1.2 APLICAÇÕES

De seguida apresentam-se alguns campos escalares com interesse nas aplicações.

#### a) Comprimento de Uma Linha

Seja  $\phi \equiv 1$ . Então, o integral de linha de  $\phi$

$$\int_{\Gamma} \phi \, ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = l(\Gamma)$$

é o comprimento da linha  $\Gamma$ .

#### b) Massa de Um Fio

Seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio descrito por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então, o integral de linha de  $\phi$

$$\int_{\Gamma} \phi \, ds = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = M$$

é a massa  $M$  do fio.

#### c) Centro de Massa

Seja  $\sigma : S \rightarrow \mathbb{R}$  a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio de massa  $M$  descrito por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e seja

$$\phi_i(x) = \frac{1}{M} x_i \sigma(x); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

O centro de massa é o ponto de coordenadas  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  calculadas da forma seguinte:

$$\bar{x}_i = \int_{\Gamma} \phi \, ds = \int_a^b \phi_i(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

#### d) Momento de Inércia relativo a Uma Linha Reta

Seja  $L$  uma linha reta, e  $d_L(x)$  a distância do ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  à linha  $L$ .

O momento de inércia da linha  $\Gamma$  relativo à reta  $L$  é o integral de linha da função  $\phi(x) = \sigma(x) d_L^2(x)$ , ou seja,

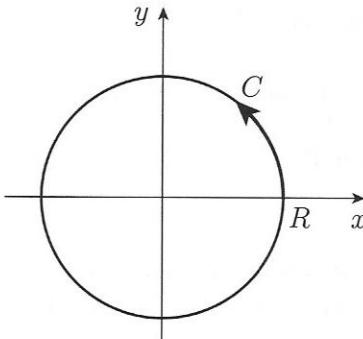
$$I_L = \int_{\Gamma} \phi \, ds = \int_a^b \sigma(\gamma(t)) d_L^2(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

### 9.1.3 EXEMPLOS

**Exemplo 9.1.1** Seja  $\Gamma$  uma circunferência de raio  $R$  e centro na origem de  $\mathbb{R}^2$ , descrita pela função

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t) ; 0 < t < 2\pi$$

e representada na Figura 9.2.



**Figura 9.2** Uma circunferência de raio  $R$  em  $\mathbb{R}^2$

Então, o comprimento de  $\Gamma$  é dado por

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ||\gamma'(t)|| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**Exemplo 9.1.2** Seja  $P$  a parábola definida pela equação  $y = x^2$ , com  $-1 < x < 1$ , que se apresenta na Figura 9.3.

Seja  $\gamma : ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  a parametrização de  $P$  definida por  $\gamma(t) = (t, t^2)$ .

Então:

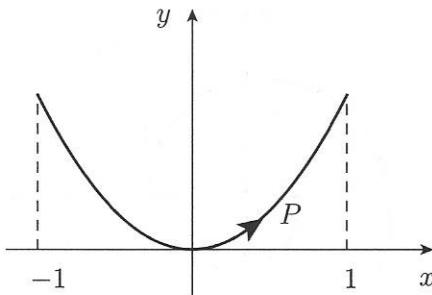
$$\|\gamma'(t)\| = \|(1, 2t)\| = \sqrt{1 + 4t^2},$$

e o comprimento de  $P$  é dado por

$$l(P) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt.$$

Para calcular este integral recorre-se à mudança de variável definida por  $2t = \operatorname{sh} \theta$ , em que

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$



**Figura 9.3** Uma parábola em  $\mathbb{R}^2$

Sabendo que

$$\operatorname{ch} \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2},$$

é fácil ver que se tem

$$\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$$

e

$$\operatorname{sh}' \theta = \operatorname{ch} \theta; \quad \operatorname{ch}' \theta = \operatorname{sh} \theta.$$

Note-se que

$$\operatorname{sh} \theta = 0 \Leftrightarrow e^\theta = e^{-\theta} \Leftrightarrow \theta = 0$$

e

$$\operatorname{sh} \theta = 2 \Leftrightarrow e^{2\theta} - 4e^\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\theta = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow \theta = \ln(2 + \sqrt{5}).$$

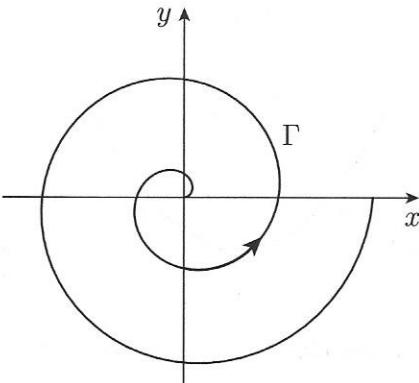
Portanto,

$$\begin{aligned} l(P) &= 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \operatorname{ch}^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{(2+\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1}{2(2+\sqrt{5})^2} + 2 \ln(2+\sqrt{5}) \right]. \end{aligned}$$

**Exemplo 9.1.3** Seja  $\Gamma$  um fio de um material cuja densidade de massa é dada por

$$\sigma(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

e tem a configuração de uma espiral descrita por  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ ;  $0 < t < 4\pi$ , representada na Figura 9.4.



**Figura 9.4** Uma espiral em  $\mathbb{R}^2$

Então:

$$\|\gamma'(t)\| = \|(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)\| = \sqrt{1+t^2}; \quad \sigma(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

e a massa de  $\Gamma$  é dada por

$$M = \int_{\Gamma} \sigma \, ds = \int_0^{4\pi} \sigma(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sqrt{1+t^2} dt = 4\pi.$$

A coordenada  $\bar{y}$  do centro de massa é dada por

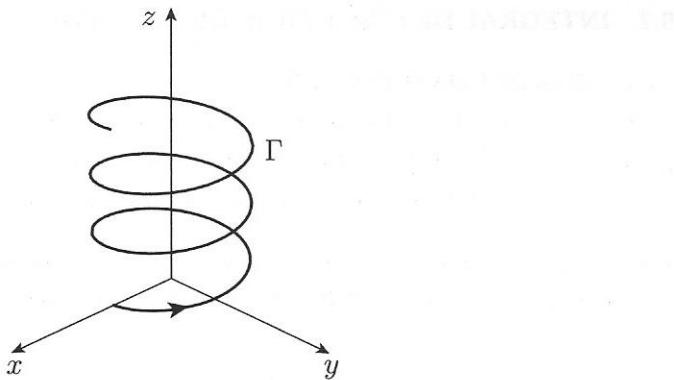
$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \sigma \, ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} t \sin t \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} t \sin t dt = -1.$$

**Exemplo 9.1.4** Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  um fio de um material com densidade de massa definida por  $\sigma(x, y, z) = z$  e cuja configuração é a de uma hélice cilíndrica, representada na Figura 9.5 e descrita pela função

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t); \quad 0 < t < 6\pi.$$

Então  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$  e o momento de inércia de  $\Gamma$  relativo ao eixo  $Oz$  é dado pelo integral de linha

$$I_z(\Gamma) = \int_{\Gamma} z(x^2 + y^2) \, ds = \sqrt{2} \int_0^{6\pi} t dt = 18\sqrt{2}\pi^2.$$



**Figura 9.5** Hélice cilíndrica em  $\mathbb{R}^3$

**Nota 9.1.1** A fórmula do comprimento de uma linha  $\Gamma$ , descrita por uma parametrização  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

pode ser escrita noutra forma.

De facto,

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)}$$

e, tendo em conta que a derivada  $\gamma'(t)$  é representada por uma matriz com  $n$  linhas e uma coluna, então:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} = \sqrt{\gamma'(t)^t \gamma'(t)},$$

em que  $\gamma'(t)^t$  designa a matriz transposta de  $\gamma'(t)$ .

Sabendo que  $\gamma'(t)^t \gamma'(t)$  é uma matriz com uma linha e uma coluna, então:

$$\gamma'(t)^t \gamma'(t) = \det(\gamma'(t)^t \gamma'(t))$$

e, portanto,

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\det(\gamma'(t)^t \gamma'(t))} dt.$$

Note-se que  $\Gamma$  é uma variedade-1. Mais adiante, ficará claro que a fórmula para o cálculo da área de uma superfície ou, mais geralmente, para o cálculo do volume- $m$  de uma variedade- $m$  será do mesmo tipo.

## 9.2 INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE UM CAMPO ESCALAR

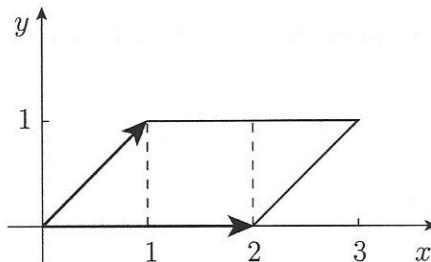
### 9.2.1 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

Seja  $\{e_1, e_2\}$  uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^2$  e considere-se o paralelogramo determinado por dois vetores  $\{t_1, t_2\}$ . É sabido, da álgebra linear, que a área do paralelogramo é dada pelo determinante da matriz cujas colunas são os vetores  $t_1, t_2$  escritos na base  $\{e_1, e_2\}$ .

Por exemplo, considerando a base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , a área do paralelogramo definido, ou gerado, pelos vetores  $t_1 = (2, 0)$  e  $t_2 = (1, 1)$  é dada por

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

tal como se pode verificar na Figura 9.6.



**Figura 9.6** Paralelogramo gerado por dois vetores

Seja  $P$  o paralelogramo determinado, ou gerado, por dois vetores linearmente independentes  $\{t_1, t_2\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, aplicado a  $\{t_1, t_2\}$  e ilustrado na Figura 9.7, obtém-se uma base ortonormada  $\{e_1, e_2\}$  de  $P$  da seguinte maneira:

$$e_1 = \frac{t_1}{\|t_1\|}$$

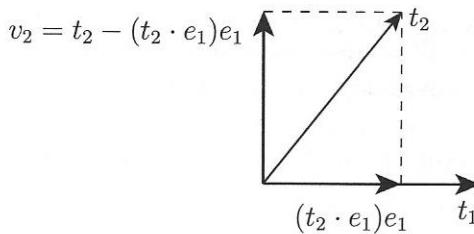
$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|},$$

em que

$$v_2 = t_2 - (t_2 \cdot e_1)e_1.$$

Note-se que  $v_2 \cdot e_1 = 0$  e, portanto,

$$\|v_2\|^2 = v_2 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_2 - (t_2 \cdot e_1)^2 = \|t_2\|^2 - (t_2 \cdot e_1)^2.$$



**Figura 9.7** Ortogonalização de Gram-Schmidt

Assim, na base ortonormada  $\{e_1, e_2\}$ , os vetores  $t_1$  e  $t_2$  são expressos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} t_1 &= \|t_1\| e_1 \\ t_2 &= (t_2 \cdot e_1)e_1 + \sqrt{\|t_2\|^2 - (t_2 \cdot e_1)^2} e_2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} t_1 &= \|t_1\| e_1 \\ t_2 &= \frac{t_2 \cdot t_1}{\|t_1\|} e_1 + \sqrt{\|t_2\|^2 - \frac{(t_2 \cdot t_1)^2}{\|t_1\|^2}} e_2 \end{aligned}$$

e, portanto, a área do paralelogramo definido por  $t_1$  e  $t_2$  é o determinante

$$\det \begin{bmatrix} |t_1| & \frac{t_2 \cdot t_1}{\|t_1\|} \\ 0 & \sqrt{|t_2|^2 - \frac{(t_2 \cdot t_1)^2}{\|t_1\|^2}} \end{bmatrix} = \sqrt{\|t_1\|^2 \|t_2\|^2 - (t_2 \cdot t_1)^2}.$$

Por outro lado, seja  $\Delta$  a matriz cujas colunas são os vetores  $t_1$  e  $t_2$ . Então:

$$\det \Delta^t \Delta = \begin{bmatrix} t_1 \cdot t_1 & t_1 \cdot t_2 \\ t_2 \cdot t_1 & t_2 \cdot t_2 \end{bmatrix} = \|t_1\|^2 \|t_2\|^2 - (t_2 \cdot t_1)^2.$$

Assim, a área do paralelogramo determinado pelos vetores  $t_1$  e  $t_2$  é dada por  $\sqrt{\det \Delta^t \Delta}$ .

No caso de uma variedade-2, ou superfície, em  $\mathbb{R}^3$ , em cada um dos seus pontos haverá dois vetores tangentes, linearmente independentes, que geram o respetivo plano tangente.

Estas observações motivam a seguinte definição de área de uma variedade-2 ou superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 9.2.1** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma variedade de dimensão 2, e  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  a respetiva parametrização, com  $T \subset \mathbb{R}^2$ . Então a **área** de  $S$  é dada pelo integral

$$\text{vol}_2(S) = \int_T \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt.$$

Tendo em conta as aplicações, é importante definir integral de um campo escalar sobre uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 9.2.2** Define-se o **integral de um campo escalar**  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sobre uma variedade  $S$  de dimensão  $p$  como sendo o integral

$$\int_S \phi = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt,$$

em que  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma parametrização de  $S$ , com  $T \subset \mathbb{R}^p$ .

\*\*\*

São importantes os casos em que  $p = 1$  em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  (comprimento de uma linha) ou  $p = 2$  em  $\mathbb{R}^3$  (área de uma superfície).

É fácil verificar que, no caso em que  $p = 1$ , tem-se

$$\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = \|g'(t)\|$$

e, portanto, a Definição 9.2.2 tem como caso particular a definição de integral de linha de um campo escalar.

Para  $p = 2$ , fazendo  $t = (u, v)$  e chamando **elemento de área** de  $S$  a

$$dS = \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv,$$

o integral de um campo escalar  $\phi$  sobre uma superfície  $S$  será representado pelo símbolo  $\int_S \phi dS$ , ou seja,

$$\int_S \phi dS = \iint_T \phi(g(u, v)) \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv.$$

Em particular,

$$\text{vol}_2(S) = \int_S dS.$$

\*\*\*

A definição do integral de um campo escalar  $\phi$  sobre uma variedade  $S$  de dimensão  $p$  depende, aparentemente, da parametrização escolhida. No entanto, sejam  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U, T \subset \mathbb{R}^p$ , duas parametrizações que descrevem a variedade  $S$ .

A função  $\alpha : U \rightarrow T$  definida por  $\alpha(u) = g^{-1}(h(u))$  é uma mudança de variáveis, e tem-se  $h = g \circ \alpha$ . Assim,

$$Dh(u)^t Dh(u) = D\alpha(u)^t Dg(t)^t Dg(t) D\alpha(u),$$

ou seja,

$$\sqrt{\det Dh(u)^t Dh(u)} = |\det D\alpha(u)| \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)}.$$

Sendo  $t = \alpha(u)$ , então:

$$\int_S \phi = \int_U \phi(h(u)) \sqrt{\det Dh(u)^t Dh(u)} du = \int_T \phi(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt,$$

isto é, a definição do integral de um campo escalar sobre uma variedade não depende da parametrização.

### 9.2.2 APLICAÇÕES

De seguida apresentam-se casos de campos escalares com interesse nas aplicações em que  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície descrita por uma parametrização  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

a) **Área:** Seja  $\phi = 1$ . Então, o integral de  $\phi$  é a área de  $S$ :

$$\text{vol}_2(S) = \int_S \phi dS = \iint_T \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv.$$

b) **Massa:** Se  $S$  representa uma folha de um material, com densidade de massa por unidade de área  $\sigma$ , então, o integral de  $\sigma$  é a massa de  $S$ :

$$M = \int_S \sigma dS = \iint_T \phi(g(u, v)) \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv.$$



- c) **Centro de Massa:** Seja  $S$  uma folha de um material, com densidade de massa  $\sigma$ . Então, o centro de massa de  $S$  é o ponto de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  determinadas por

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{M} \int_S x \sigma dS = \frac{1}{M} \iint_T g_1(u, v) \sigma(g(u, v)) \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv \\ \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_S y \sigma dS = \frac{1}{M} \iint_T g_2(u, v) \sigma(g(u, v)) \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_S z \sigma dS = \frac{1}{M} \iint_T g_3(u, v) \sigma(g(u, v)) \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv.\end{aligned}$$

- d) **Momento de Inércia relativo a Uma Linha Reta:** Seja  $L$  uma linha reta e  $S$  uma folha de um material com densidade  $\sigma$ . Então, o momento de inércia de  $S$  relativo a  $L$  é o integral

$$I_L(S) = \int_S \sigma d_L^2 dS = \iint_T \sigma(g(u, v)) d_L^2(g(u, v)) \sqrt{\det Dg(u, v)^t Dg(u, v)} dudv,$$

em que  $d_L$  designa a distância à linha  $L$ .

### 9.2.3 EXEMPLOS

**Exemplo 9.2.1** Seja  $S^2$  a superfície esférica de raio  $R$ , centrada na origem e definida por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Seja  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função dada por

$$g(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi),$$

em que

$$T = ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \subset \mathbb{R}^2.$$

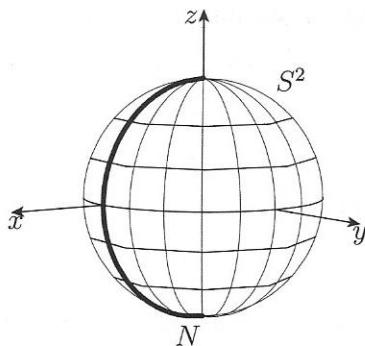
Então,  $g$  é uma função de classe  $C^1$ , injetiva, cuja derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -R \sin \phi \sen \theta & R \cos \phi \cos \theta \\ R \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \sen \theta \\ 0 & -R \sen \phi \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2 e

$$g(T) = S^2 \setminus \{(x, y, z) \in S^2 : y = 0 ; x \geq 0\} = S^2 \setminus N,$$

ou seja,  $g$  é uma parametrização de  $S^2 \setminus N$ , tal como se representa na Figura 9.8.



**Figura 9.8** Esfera de raio  $R$

Dado que

$$Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} R^2 \operatorname{sen}^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix},$$

então:

$$\sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} = R^2 \operatorname{sen} \phi.$$

Note-se que  $S^2 = g(\bar{T})$  e, sendo a fronteira de  $T$  um conjunto de conteúdo nulo, o integral calculado em  $T$  é o mesmo que o calculado em  $\bar{T}$ .

Assim, a área de  $S^2$  é dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_2(S^2) &= \operatorname{vol}_2(S^2 \setminus N) = \iint_T \sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi R^2 \operatorname{sen} \phi d\phi \right) d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

**Exemplo 9.2.2** O parabolóide  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z < 1\}$  pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela equação  $z = \rho^2$ .

Seja  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, \rho^2),$$

em que  $T = ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}^2$ .

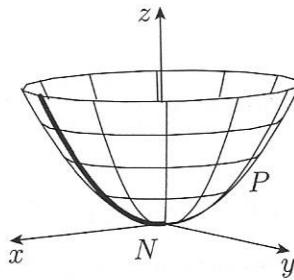
Esta função é de classe  $C^1$ , injetiva, e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 2\rho & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2. Para além disso,

$$g(T) = P \setminus \{(x, y, z) \in P : x \geq 0 ; y = 0\} = P \setminus N.$$

A função  $g$  é uma parametrização do conjunto  $P \setminus N$ , representado na Figura 9.9. Note-se que  $N$  é a imagem de dois segmentos de reta da fronteira de  $T$ , correspondentes a  $\theta = 0$  e  $\theta = 2\pi$ .



**Figura 9.9** Um parabolóide

Dado que

$$Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} 1 + 4\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix},$$

então:

$$\sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} = \rho \sqrt{1 + 4\rho^2}.$$

A área da superfície  $P$ , é dada por

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(P) &= \text{vol}_2(P \setminus N) = \iint_T \sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} \int_0^1 12\rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \\ &= \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

**Exemplo 9.2.3** A superfície cónica  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \sqrt{x^2 + y^2} = z < 1\}$  pode ser descrita em coordenadas cilíndricas pela equação  $z = \rho$ .

Tal como no exemplo anterior, seja  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho),$$

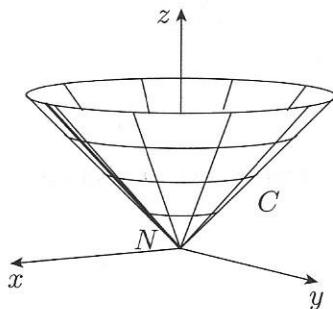
em que  $T = ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}^2$ .

Esta função é de classe  $C^1$ , injetiva, e a sua derivada

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2. Para além disso,

$$g(T) = C \setminus \{(x, y, z) \in M : x \geq 0 ; y = 0\} = C \setminus N.$$



**Figura 9.10** Um cone

Portanto, a função  $g$  é uma parametrização de  $C \setminus N$ , que se encontra representado na Figura 9.10. Facilmente se determina  $\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta) = \sqrt{2}\rho$ , e, portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(C) &= \text{vol}_2(C \setminus N) = \iint_T \sqrt{\det Dg(\rho, \theta)^t Dg(\rho, \theta)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \sqrt{2}\rho d\rho \right) d\theta \\ &= \sqrt{2}\pi \int_0^1 2\rho d\rho \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

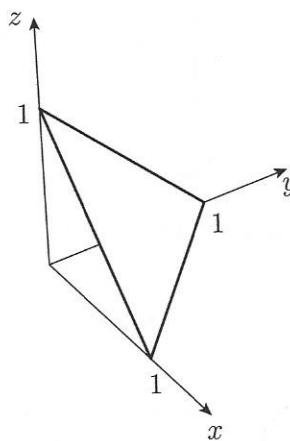
**Exemplo 9.2.4** Seja  $\Pi$  a porção do plano, representado na Figura 9.11, definido por

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1; x > 0; y > 0; z > 0\}.$$

Fazendo  $z = 1 - x - y$ , obtém-se a parametrização  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x - y),$$

em que  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1; 0 < y < 1 - x\}$ .



**Figura 9.11** Um plano

Sendo

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

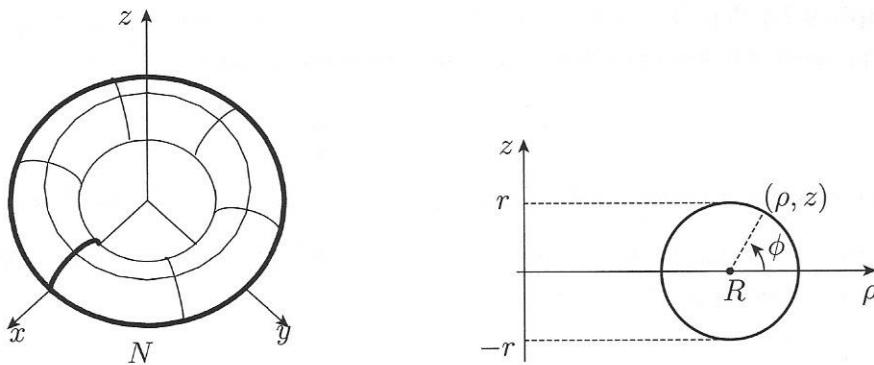
então

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(\Pi) &= \iint_T \sqrt{3} dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \sqrt{3} dy \right) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (1-x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 9.2.5** Seja  $T^2$  o toro com raios  $R$  e  $r$ , definido por

$$T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\},$$

isto é, a superfície que se obtém fazendo rodar em torno do eixo  $Oz$  a circunferência no plano  $Oxz$ , com centro em  $(R, 0)$  e raio  $r$ , descrita pelo ângulo  $\phi$ , contado a partir do plano  $z = 0$ , no sentido positivo. Seja  $\theta$  o ângulo de rotação em torno do eixo  $Oz$ , medido a partir do eixo  $Ox$  no sentido positivo.



**Figura 9.12** Toro de raios  $R, r$

Seja  $D = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < 2\pi\}$  e  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$g(\theta, \phi) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi).$$

Facilmente se verifica que  $g$  é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -(R + r \cos \phi) \sin \theta & -r \sin \phi \cos \theta \\ (R + r \cos \phi) \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ 0 & r \cos \phi \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2. Assim,  $g$  é uma parametrização de

$$T^2 \setminus N,$$

em que

$$N = \{(x, y, z) : z = 0\} \cup \{(x, y, z) : y = 0\}.$$

Sendo  $N$  a união de duas linhas em  $T^2$ , que são a imagem da fronteira do conjunto  $D$ , então:

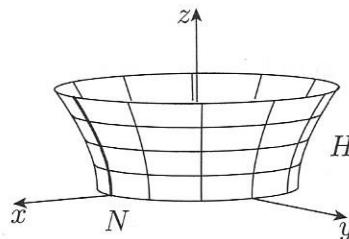
$$\begin{aligned}\text{vol}_2(T^2) &= \text{vol}_2(T^2 \setminus N) = \iint_D \sqrt{\det Dg(\theta, \phi)^t Dg(\theta, \phi)} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \phi) d\theta \right) d\phi \\ &= 4\pi^2 Rr.\end{aligned}$$

**Exemplo 9.2.6** Seja  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1, 0 < z < 1\}$  a superfície que representa uma folha de um material, com densidade de massa dada por

$$\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2z^2 + 1}}.$$

Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ , esta superfície é descrita pela equação  $\rho^2 = z^2 + 1$ .

Seja  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  a função definida por  $g(\theta, z) = ((\sqrt{z^2 + 1}) \sin \theta, (\sqrt{z^2 + 1}) \cos \theta, z)$ , em que  $T = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi; 0 < z < 1\}$ .



**Figura 9.13** Um hiperbolóide

Então,  $g$  é de classe  $C^1$ , injetiva, e a respetiva derivada

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -(\sqrt{z^2 + 1}) \sin \theta & \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \cos \theta \\ (\sqrt{z^2 + 1}) \cos \theta & \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \sin \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2, ou seja é uma parametrização de  $H \setminus N$ , em que

$$N = \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\},$$

tal como se representa na Figura 9.13.

A massa de  $C$  é dada por

$$\begin{aligned} M = \int_C \sigma \, dS &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \sigma(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} dz \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2z^2 + 1}} \sqrt{2z^2 + 1} dz \right) d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

A coordenada  $\bar{z}$  do centro de massa de  $C$  é dada por

$$\begin{aligned} \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z \sigma \, dS &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 g_3(\theta, z) \sigma(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} dz \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 z dz \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Seja  $d_z(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  a distância ao eixo  $Oz$ . O momento de inércia de  $C$  relativo ao eixo  $Oz$  é dado por

$$\begin{aligned} I_z = \int_C \sigma d_z^2 \, dS &= \int_T \sigma(g(\theta, z)) d_L^2(g(\theta, z)) \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)} d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (z^2 + 1) dz \right) d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

### 9.3 EXERCÍCIOS

- Calcule o comprimento da linha descrita pelo caminho

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t), \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

- Calcule a massa total de um aro que une os pontos  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 2, 4)$  e que é descrito pelas equações  $x^2 + y^2 - z = 1$ ,  $z = y^2$ , sabendo que a densidade de massa é dada pela função

$$f(x, y, z) = z \sqrt{1 + 4y^2}.$$

- Mostre que, se  $r : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$  for um caminho de classe  $C^1$  que descreve uma linha em função do comprimento de arco, então os vetores  $r'$  e  $r''$  são ortogonais.

4. Calcule o momento de inércia relativo ao eixo  $Oy$  da superfície representada pelo conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 ; |y| < 1 ; 0 < x < 1\}$$

e com densidade de massa  $\sigma(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}$ .

5. Calcule a área da superfície definida pela equação  $x^2 + z^2 = 1$ , sendo  $x^2 + y^2 \leq 1$ .  
 6. Calcule a massa da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 ; z \geq 0 ; 0 \leq x \leq 1\},$$

com densidade de massa  $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$ .

7. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  a superfície esférica de raio  $R$ , centrada na origem, e  $f(x, y, z) = z^2$ . Calcule o integral  $\iint_S f$ , usando a função  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .  
 8. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície definida pela equação  $F(x, y, z) = 0$ , sendo  $F$  uma função de classe  $C^1$ , tal que  $\partial_3 F = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ .
- Mostre que o elemento de área de  $S$  é dado por  $dS = \frac{\|\nabla F\|}{|\partial_3 F|} dx dy$ .
  - Calcule a área da esfera dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
9. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície de revolução que resulta da rotação, em torno do eixo  $Oz$ , de uma linha  $\Gamma$  simples (não se autointersecta), fechada e definida no plano  $Oxz$ .
- Mostre que área da superfície  $S$  é dada pela expressão

$$\text{vol}_2(S) = 2\pi \int_{\Gamma} x ds.$$

- Use o resultado anterior para mostrar que a área da superfície de um toro de raios  $R > 0$  e  $r > 0$  é igual a  $4\pi^2 Rr$ .

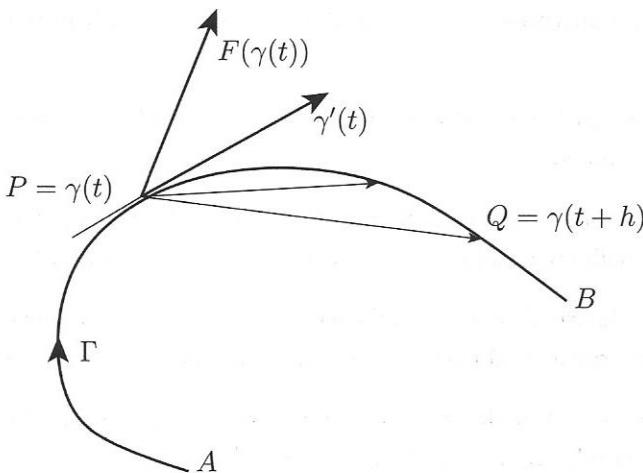
# 10

---

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

## 10.1 TRABALHO POTENCIAL ESCALAR

Uma das noções mais importantes da física é a de trabalho realizado por uma força ao longo da trajetória de uma partícula com massa que se traduz na variação da respetiva energia cinética. Matematicamente, uma força é um campo vetorial, e o trabalho define-se como sendo o integral de linha desse campo vetorial.



**Figura 10.1** Tangente a uma linha. Definição de trabalho

**Definição 10.1.1** Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial, e  $\Gamma \subset S$  uma linha descrita pelo caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ . Ao integral

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

chama-se integral de linha do campo vetorial  $F$  ao longo do caminho  $\gamma$ , ou **trabalho** realizado pelo campo  $F$  ao longo do caminho  $\gamma$ .

Para entender de maneira simples esta definição, basta considerar que  $\Gamma$  é o segmento de reta entre os pontos  $A$  e  $B$ , sendo a força  $F$  um campo vetorial constante. Nesse caso,  $\gamma(t) = A + t(B - A)$ , com  $0 \leq t \leq 1$  e, portanto, o trabalho dado por

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_0^1 F \cdot (B - A) dt = F \cdot (B - A)$$

é o produto da **força** pelo **deslocamento**. Por vezes usa-se o símbolo  $\int_{\Gamma} F$  para designar esse trabalho.

No caso em que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , diz-se que o caminho é fechado e a correspondente linha é **fechada**.

Se a função  $\gamma$  for injetiva, isto é, se a correspondente linha não se autointersectar, diz-se que é um caminho **simples**. A um caminho de classe  $C^1$  também se chama caminho **regular**.

Tal como se ilustra na Figura 10.1, recorde-se que a derivada  $\gamma'(t)$  define a direção da tangente à linha  $\Gamma$  no ponto  $P = \gamma(t)$ .

Se o campo vetorial  $F$  for, em cada ponto  $P = \gamma(t) \in \Gamma$ , ortogonal ao vetor tangente  $\gamma'(t)$ , então o trabalho realizado pelo campo  $F$  ao longo do caminho  $\gamma$  será nulo.

Tal como para a definição de integral de linha de um campo escalar, também é fácil verificar que a definição de trabalho não depende do caminho usado para descrever a linha.

No entanto, dado que o trabalho é o integral do produto interno  $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ , é claro que depende do sentido em que a linha  $\Gamma$  é percorrida.

Sem perda de generalidade, a linha  $\Gamma$  entre o ponto  $A$  e o ponto  $B$  pode ser descrita por um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $A = \gamma(0)$  e  $B = \gamma(1)$ .

A função  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\beta(t) = 1 - t$ , transforma o intervalo  $[0, 1]$  no mesmo intervalo mas percorrido no sentido oposto, porque  $\beta(0) = 1$  e  $\beta(1) = 0$ . Assim, o caminho  $g(t) = \gamma(\beta(t))$  descreve a linha  $\Gamma$  no sentido de  $B$  para  $A$ .

Seja  $\bar{\Gamma}$  a linha descrita no sentido de  $B$  para  $A$ .

Fazendo  $s = \beta(t)$ , então:

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Gamma}} F \cdot dg &= \int_0^1 F(g(t)) \cdot g'(t) dt \\ &= \int_0^1 F(\gamma(\beta(t))) \cdot \gamma'(\beta(t)) \beta'(t) dt \\ &= - \int_0^1 F(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds \\ &= - \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma\end{aligned}$$

e, portanto, o trabalho realizado por  $F$  na linha  $\bar{\Gamma}$  é simétrico do trabalho em  $\Gamma$ , ou seja,

$$\int_{\bar{\Gamma}} F = - \int_{\Gamma} F. \quad (10.1)$$

\*\*\*

Interessa por vezes considerar caminhos ou linhas que não sendo regulares podem ser decompuestos num número finito de caminhos ou linhas regulares. Como exemplo tome-se a linha descrita pela equação  $y = |x|$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Seja  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho regular que descreve a linha  $\Gamma_1$  entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , e  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  outro caminho regular que descreve a linha  $\Gamma_2$  entre os pontos  $P_2$  e  $P_3$ .

É fácil verificar que o caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

descreve a linha  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  entre os pontos  $P_1$  e  $P_3$ .

Das propriedades do integral em  $\mathbb{R}$  vem

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F &= \int_0^{1/2} 2F(\gamma_1(2t)) \cdot \gamma'_1(2t) dt + \int_{1/2}^1 2F(\gamma_2(2t - 1)) \cdot \gamma'_2(2t) dt \\ &= \int_0^1 F(\gamma_1(s)) \cdot \gamma'_1(s) ds + \int_0^1 F(\gamma_2(s)) \cdot \gamma'_2(s) ds \\ &= \int_{\Gamma_1} F + \int_{\Gamma_2} F. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} F = \int_{\Gamma_1} F + \int_{\Gamma_2} F. \quad (10.2)$$

É claro que este processo é facilmente generalizável ao caso de um caminho que pode ser decomposto num número finito de caminhos regulares. Nesse caso, diz-se que o caminho é **seccionalmente regular**.

Nas aplicações, o integral de linha representa o trabalho realizado por uma força  $F$  ao longo da trajetória  $\Gamma$ .

Se  $\Gamma$  for a trajetória de uma partícula de massa  $m$ , então  $F(\gamma(t)) = m\gamma''(t)$ , e

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_a^b m\gamma''(t) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \gamma'(t) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 dt \\ &= E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c, \end{aligned}$$

em que  $E_c = \frac{m}{2} \|\gamma'(t)\|^2$  é a energia cinética da partícula no instante  $t$  ou na posição  $\gamma(t)$ .

**Então, o trabalho realizado pela força  $F$  ao longo da trajetória da partícula é a variação da respetiva energia cinética.**

\*\*\*

**Exemplo 10.1.1** Considere-se o campo vetorial  $F(x, y) = (x, y)$ .

1. Seja  $C$  a circunferência de raio 1, centrada na origem e percorrida uma vez no sentido anti-horário.

A linha  $C$  pode ser descrita pelo caminho  $g(t) = (\cos t, \sin t)$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ . Assim,

$$F(g(t)) = (\cos t, \sin t); \quad g'(t) = (-\sin t, \cos t),$$

ou seja,  $F(g(t)) \cdot g'(t) = 0$  e, portanto, o trabalho realizado pelo campo  $F$  ao longo de  $C$  é nulo.

2. Seja  $\Gamma$  o arco de parábola descrita por  $g(t) = (t, t^2)$ , com  $t \in [0, 1]$ .

Sendo  $F(g(t)) = (t, t^2)$  e  $g'(t) = (1, 2t)$ , o integral de linha do campo  $F$  ao longo da linha  $\Gamma$  é dado por

$$\int_{\Gamma} F \cdot dg = \int_0^1 (t + 2t^3) dt = 1.$$

Na Figura 10.2 encontram-se representados o campo  $F$  e as linhas  $C$  e  $\Gamma$ . É de salientar o facto de que o campo é perpendicular à circunferência.

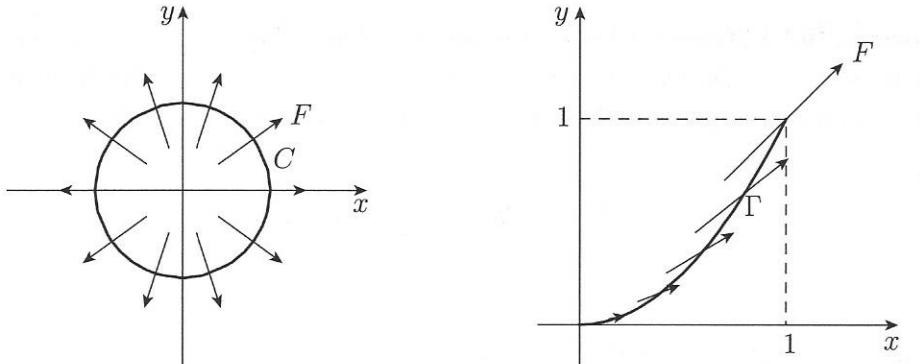


Figura 10.2

**Exemplo 10.1.2** Considere-se o campo vetorial  $F(x, y, z) = (xyz, x^2z, xy)$ .

1. Seja  $R$  o segmento de reta entre a origem e o ponto  $(1, 2, 1)$ . Esta linha pode ser descrita pelo caminho  $g(t) = (t, 2t, t)$ , com  $t \in [0, 1]$ .

Assim,

$$F(g(t)) = (2t^3, t^3, 2t^2); \quad g'(t) = (1, 2, 1),$$

e o trabalho de  $F$  ao longo de  $\Gamma$  é dado por

$$\int_R F \cdot dg = \int_0^1 (4t^3 + 2t^2) dt = \frac{5}{3}.$$

2. Seja  $\Gamma$  a linha definida pelas equações  $x = y$ ;  $z = x^2 + y^2$ , ligando a origem ao ponto  $(1, 1, 2)$ .

Esta linha pode ser descrita pelo caminho  $g(t) = (t, t, 2t^2)$  com  $t \in [0, 1]$ . Portanto,

$$F(g(t)) = (2t^4, 2t^4, t^2); \quad g'(t) = (1, 1, 4t)$$

e,

$$\int_{\Gamma} F \cdot dg = \int_0^1 (4t^4 + 4t^3) dt = \frac{9}{5}.$$

\*\*\*

**Teorema 10.1.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)** Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar de classe  $C^1$ , e  $\Gamma \subset S$  a linha definida pelo caminho regular  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  entre o ponto  $A$  e o ponto  $B$ .

Então:

$$\int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot dg = \phi(B) - \phi(A). \quad (10.3)$$

De facto, sendo  $A = g(a)$  e  $B = g(b)$ , então:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot dg &= \int_a^b \nabla \phi(g(t)) \cdot g'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(g(t)) dt \\ &= \phi(g(b)) - \phi(g(a)) \\ &= \phi(B) - \phi(A). \end{aligned}$$

**Definição 10.1.2** Dado um campo vetorial  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se existir um campo escalar  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$F(x) = \nabla \phi(x),$$

diz-se que  $F$  é um campo **gradiente** e que  $\phi$  é o **potencial escalar** de  $F$ .

Recorde-se que um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é fechado, se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e diz-se que uma linha é fechada se for descrita por um caminho fechado.

- a) O integral de linha de um campo gradiente não depende do caminho. Depende apenas do ponto inicial  $A$  e do ponto final  $B$ .
- b) Se a linha  $\Gamma$  for fechada, então:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dg = \int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot dg = \phi(B) - \phi(A) = 0.$$

- c) Nas aplicações, se  $F = \nabla \phi$  for a força que atua sobre uma partícula de massa  $m$  que descreve uma trajetória  $\Gamma$ , então

$$E_c(B) - E_c(A) = \phi(B) - \phi(A) \Leftrightarrow E_c(B) - \phi(B) = E_c(A) - \phi(A).$$

Sendo  $-\phi$  a energia potencial, e  $E_c - \phi$  a energia mecânica da partícula, a energia mecânica não varia.

A um campo gradiente também se chama campo **conservativo**.

\*\*\*

Dado um campo vetorial, coloca-se então o problema de se saber, se ele é um campo gradiente.

Seja  $F$  um campo gradiente e de classe  $C^1$ . Então, existe um campo escalar  $\phi$ , tal que

$$F_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e, derivando em ordem a  $x_j$ , obtém-se

$$D_j F_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = D_i F_j ; \quad \forall i \neq j.$$

**Definição 10.1.3** A um campo vetorial  $F$  de classe  $C^1$ , tal que

$$D_j F_i = D_i F_j , \quad \forall i \neq j,$$

chama-se campo **fechado**.

Assim, ser fechado é condição necessária para que um campo vetorial seja gradiente, isto é, se um campo não for fechado, não é certamente um gradiente.

\*\*\*

O cálculo do trabalho realizado por um campo gradiente é simples, desde que o respetivo potencial escalar  $\phi$  seja conhecido.

No caso em que o caminho é fechado, o trabalho é nulo, e não é necessário conhecer explicitamente o potencial escalar.

Se o caminho não for fechado, então é necessário ter uma maneira de calcular explicitamente o potencial escalar.

Em alguns casos, esse cálculo é simples. Em geral, recorre-se a primitivações sucessivas como se verá nos exemplos. Note-se que

$$F = \nabla\phi,$$

ou seja,

$$F_k = \frac{\partial\phi}{\partial x_k}, k = 1, 2, \dots, n$$

e, de uma destas equações, por primitivação na variável  $x_k$ , obtém-se uma função candidata a potencial escalar.

Esta função envolve uma constante relativamente à variável  $x_k$ , que pode depender das restantes variáveis. Usando sistematicamente as restantes equações, deduz-se uma forma explícita para o potencial escalar.

\*\*\*

### Exemplo 10.1.3 Campo Gravitacional:

Seja  $M$  uma massa pontual, situada na origem de  $\mathbb{R}^3$ . O campo gravitacional gerado pela massa  $M$  é dado por

$$F(x, y, z) = -GM \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3} = -GM \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3},$$

em que  $\vec{r} = (x, y, z)$ , e  $G$  é a constante universal da gravitação.

Fazendo  $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , e tendo em conta que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

facilmente se verifica que o campo gravitacional é um gradiente, e o respetivo potencial é a função

$$\phi(x, y, z) = GM \frac{1}{\|(x, y, z)\|} = GM \frac{1}{\|\vec{r}\|} = \frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

O domínio do campo  $F$  coincide com o domínio do respetivo potencial  $\phi$ , isto é,  $F = \nabla\phi$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

**Exemplo 10.1.4** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado e que

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \nabla \log(x^2 + y^2),$$

ou seja,  $F$  é um campo gradiente, e o respetivo potencial é o campo escalar  $\phi$  definido por  $\phi(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Tanto  $F$  como  $\phi$  estão definidos no mesmo domínio,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Exemplo 10.1.5** Seja  $F(x, y) = (x, y^2)$  o campo vetorial definido em  $\mathbb{R}^2$ . Trata-se de um campo fechado, porque se tem

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$

e, então, há a possibilidade de que seja um gradiente. Para determinar o respetivo potencial escalar, recorre-se às equações

$$\begin{cases} x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ y^2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \end{cases}$$

Da primeira equação, primitivando na variável  $x$ , vem

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + K(y),$$

em que  $K(y)$  é uma constante relativamente a  $x$  (não depende de  $x$ , mas pode depender de  $y$ ).

Esta função  $\phi(x, y)$  passa a ser a candidata a potencial escalar de  $F$ . Substituindo na segunda equação, vem

$$y^2 = K'(y)$$

e, primitivando em  $y$ , obtém-se

$$K(y) = \frac{y^3}{3} + C,$$

em que  $C$  é uma constante.

Assim, o potencial escalar do campo  $F$  é dado por

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C.$$

**Exemplo 10.1.6** Considere-se o campo vetorial  $F(x, y, z) = (y, x + ze^{yz}, ye^{yz})$ .

Facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado. Se for um campo gradiente, o respetivo potencial escalar  $\phi$  é calculado a partir da equação  $F = \nabla\phi$ , ou seja,

$$\begin{cases} y &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ x + ze^{yz} &= \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ ye^{yz} &= \frac{\partial\phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Da primeira equação e primitivando em  $x$ , vem

$$\phi(x, y, z) = xy + A(y, z),$$

em que  $A(y, z)$  é uma constante relativamente a  $x$ , mas que pode depender de  $y$  e de  $z$ .

Substituindo na segunda equação, obtém-se

$$x + ze^{yz} = x + \frac{\partial A}{\partial y},$$

ou seja,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = ze^{yz}.$$

Primitivando em  $y$ , vem  $A(y, z) = e^{yz} + B(z)$ , em que  $B(z)$  é uma constante relativamente a  $y$ , mas que pode depender de  $z$ . Assim, a função  $\phi$  passa a ser dada por

$$\phi(x, y, z) = xy + e^{yz} + B(z).$$

Substituindo na terceira equação, obtém-se

$$ye^{yz} = ye^{yz} + B'(z),$$

ou seja,

$$B'(z) = 0 \Leftrightarrow B(z) = C,$$

em que  $C$  é uma constante.

O potencial escalar de  $F$  é então dado por

$$\phi(x, y, z) = xy + e^{yz} + C.$$

**Exemplo 10.1.7** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado.

Note-se que se  $x \neq 0$ , então:

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

No entanto, o campo escalar  $\phi(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$  está definido no subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , em que  $x \neq 0$ . Este conjunto não coincide com o domínio do campo vetorial  $F$ , que é o conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Assim, a função  $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$  não é um potencial escalar do campo  $F$ .

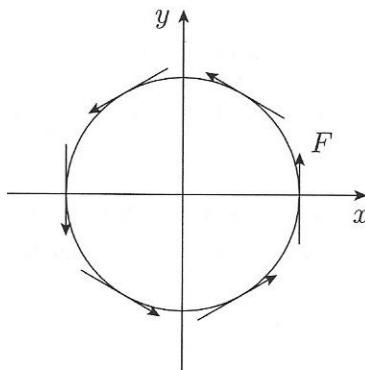


Figura 10.3

Seja  $\Gamma$  uma circunferência de raio  $R$  e centro na origem, descrita pelo caminho

$$g(t) = (R \cos t, R \sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então:

$$\int_{\Gamma} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{R \sin t}{R^2}, \frac{R \cos t}{R^2} \right) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt = 2\pi.$$

É importante observar que este integral não depende do raio da circunferência.

Sendo  $g$  um caminho fechado, então o campo  $F$  não é um campo gradiente no seu domínio,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Na Figura 10.3 encontram-se representados o campo  $F$  e a circunferência de raio  $R$  em que se evidencia o facto de o campo ser tangente à linha e, portanto, o respetivo trabalho não é nulo.

Se o campo  $F$  estiver definido apenas no aberto  $S = \{(x, y) : x > 0\}$ , então  $F$  é um gradiente cujo potencial é a função

$$\phi(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

porque  $S$  é um subconjunto tanto do domínio de  $F$  como do domínio de  $\phi$ .

O mesmo se passará para o conjunto  $\{(x, y) : x < 0\}$  ou seja, há subconjuntos de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , em que  $F$  é um campo gradiente.

\*\*\*

Deste exemplo surgem duas questões importantes:

- a) Será possível caracterizar os subconjuntos de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , em que  $F$  é um campo gradiente?
- b) Será que o integral de linha de  $F$  ao longo de uma qualquer linha fechada em torno da origem é igual ao integral de linha de  $F$  ao longo de uma circunferência centrada na origem?

\*\*\*

Seja  $F : B \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial fechado, em que  $B \subset \mathbb{R}^n$  é uma bola aberta centrada num ponto  $P$ .

Seja  $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\phi(x) = \int_{[P, x]} F \cdot dg, \tag{10.4}$$

em que  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o caminho definido por

$$g(t) = (1 - t)P + tx$$

e que descreve o segmento de reta  $[P, x]$ . Assim,

$$\phi(x) = \int_0^1 F((1-t)P + tx) \cdot (x - P) dt,$$

onde se deduz, usando a regra de Leibniz, que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n [t D_i F_j((1-t)P + tx)(x_j - P_j)] + F_i((1-t)P + tx) \right) dt.$$

Sendo  $F$  um campo fechado, então:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t F_i((1-t)P + tx)) dt = F_i(x),$$

o que quer dizer que

$$F = \nabla \phi.$$

Assim, o campo  $F$  é gradiente em  $B$ , e o respetivo potencial escalar é a função  $\phi$  dada pela fórmula (10.4), ou seja, é o trabalho realizado por  $F$  ao longo do segmento de reta  $[P, x]$ .

É claro que este argumento é válido em qualquer conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  onde exista um ponto  $P$ , tal que, dado um ponto qualquer  $x \in S$ , o segmento de reta  $[P, x]$  está contido em  $S$ .

Se  $S$  for um conjunto aberto e  $P \in S$  um ponto qualquer, existe uma bola centrada em  $P$  e contida em  $S$ , e o campo vetorial  $F$  é gradiente nessa bola. Portanto, um campo vetorial fechado  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido num aberto  $S$ , é localmente um gradiente, ou seja, em torno de um ponto qualquer de  $S$  existe uma bola em que  $F$  tem um potencial escalar.

Portanto, **um campo vetorial fechado é localmente um gradiente**, mas pode não ser gradiente em todo o seu domínio. No domínio do campo vetorial do Exemplo 10.1.7, ou seja, no conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , não existe nenhum ponto que possa desempenhar o papel de  $P$  na fórmula (10.4). De facto, nesse caso existiria um ponto  $Q$ , tal que o segmento de reta  $[P, Q]$  passaria pela origem.

Põe-se então o problema de saber quais os conjuntos em que um campo vetorial fechado é gradiente.

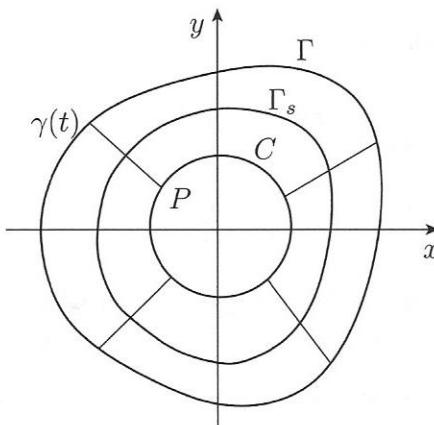
Recorrendo ao conceito de homotopia, há uma classe geral de conjuntos em que um campo fechado é gradiente. Esta abordagem tem a vantagem de evitar o cálculo explícito do potencial escalar, tendo apenas em conta as propriedades geométricas do domínio do campo vetorial dado.

## 10.2 CAMPOS VETORIAIS FECHADOS. HOMOTÓPIA

O campo vetorial

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

estudado no Exemplo 10.1.7, é fechado, e o respetivo integral de linha ao longo de uma circunferência  $C_R$ , centrada na origem, não depende do raio.



**Figura 10.4** Deformação de  $\Gamma$  em  $C$

Se  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  for uma linha fechada e percorrida uma vez em torno da origem, será que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{C_R} F \cdot d\gamma = 2\pi?$$

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  o conjunto limitado por uma linha fechada  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ . Diz-se que um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  pertence ao interior da linha  $\Gamma$ , se  $P \in D$ .

Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  uma linha fechada que não contém a origem no seu interior. Será que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0?$$

Se as respostas a estas questões forem positivas, bastará considerar a circunferência centrada na origem, e de raio igual a 1 para se ter o valor do integral de linha de  $F$  ao longo de qualquer linha fechada em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Seja  $\Gamma$  uma linha fechada em torno da origem, descrita pelo caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , e  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por

$$H(s, t) = s \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} + (1 - s)\gamma(t).$$

A função  $\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$  descreve a circunferência  $C$  de raio igual a 1 e centro na origem.

Por outro lado,

$$H(0, t) = \gamma(t); \quad H(1, t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

Para cada  $s \in [0, 1]$ , a função  $g_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$g_s(t) = H(s, t)$$

descreve uma linha  $\Gamma_s$ , tal como se representa na Figura 10.4.

Fixando  $t \in [0, 1]$ , a função  $s \mapsto H(s, t)$  é um caminho que descreve o segmento de reta  $[P, \gamma(t)]$ , em que  $P = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \in C$ , tal como se ilustra na Figura 10.4.

A função  $H$  descreve uma família de linhas, sendo, para  $s = 0$ , a linha  $\Gamma$ , e, para  $s = 1$ , a circunferência  $C$ , isto é,  $H$  descreve uma transformação contínua (ou deformação) da linha  $\Gamma$  na circunferência  $C$ , tal como se ilustra na Figura 10.4.

Estas observações motivam a seguinte definição de linhas homotópicas em  $\mathbb{R}^n$ :

**Definição 10.2.1** Diz-se que dois caminhos fechados  $\alpha, \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  são **homotópicos**, se existir uma função contínua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a que se chama *homotopia*, com as seguintes propriedades:

1.  $H(0, t) = \alpha(t); \quad t \in [0, 1]$
2.  $H(1, t) = \gamma(t); \quad t \in [0, 1]$
3.  $H(s, 0) = H(s, 1); \quad s \in [0, 1].$

Seja  $\Gamma_s$  a linha descrita pelo caminho  $g_s(t) = H(s, t)$ . Então, usando a regra de Leibniz e supondo que a função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^2$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} F &= \frac{d}{ds} \int_0^1 F(g_s(t)) \cdot g'_s(t) dt = \frac{d}{ds} \int_0^1 F(H(s, t)) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(s, t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) + \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial^2 H_k}{\partial s \partial t}(s, t) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) + \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial^2 H_k}{\partial s \partial t}(s, t) \right) dt, \end{aligned}$$

porque  $F$  é fechado.

É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n F_j(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \frac{\partial H_k}{\partial t}(s, t) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n F_k(H(s, t)) \frac{\partial^2 H_k}{\partial s \partial t}(s, t) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_{\Gamma_s} F &= \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n F_j(H(s, t)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, t) \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n F_j(H(s, 1)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, 1) - \sum_{j=1}^n F_j(H(s, 0)) \frac{\partial H_j}{\partial s}(s, 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

porque  $H(s, 0) = H(s, 1)$ .

Assim, a função  $\int_{\Gamma_s} F$  não depende de  $s$ , ou seja, o integral de linha de um campo vetorial fechado é invariante para caminhos homotópicos. Dito de outro modo, o trabalho realizado por um campo fechado tem o mesmo valor em linhas fechadas homotópicas.

A demonstração, para o caso geral em que a homotopia  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua, pode ser vista em ([3], pp.129-136).

O integral de linha de um campo vetorial fechado é nulo, ao longo de um caminho fechado, e, homotópico a um caminho constante. Note-se que a imagem de um caminho constante é um ponto.

Portanto, dado um campo vetorial fechado, é importante saber se no respetivo domínio as linhas fechadas são homotópicas a um ponto.

**Definição 10.2.2** Diz-se que um conjunto aberto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é **simplesmente conexo** se qualquer linha fechada  $\Gamma \subset S$  pode ser transformada continuamente num ponto  $P \in S$ , ou seja, se existe uma função  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua, com as seguintes propriedades,

1.  $H(0, t) = P ; \quad t \in [0, 1]$
2.  $H(1, t) = \gamma(t) ; \quad t \in [0, 1]$
3.  $H(s, 0) = H(s, 1) ; \quad s \in [0, 1],$

em que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho que descreve a linha  $\Gamma$ . Nestas circunstâncias, diz-se que a linha  $\Gamma$  é homotópica a um ponto.

\*\*\*

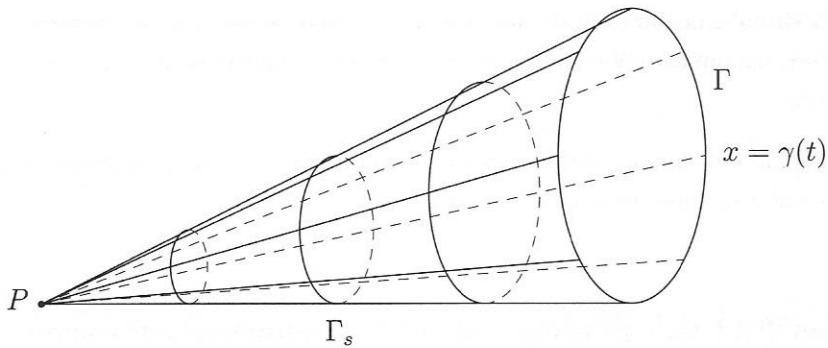
Assim, num conjunto simplesmente conexo, o integral de linha de um campo vetorial fechado ao longo de uma linha fechada é nulo.

**Exemplo 10.2.1** Qualquer conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  convexo é simplesmente conexo.  $S$  é convexo se, dados dois pontos  $P \in S$  e  $Q \in S$ , o segmento de reta  $[P, Q]$  estiver contido em  $S$ .

Seja  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  a função definida por

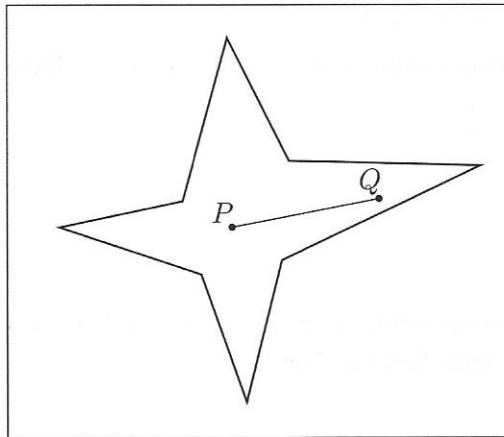
$$H(s, t) = P + s(\gamma(t) - P).$$

Esta função estabelece a homotopia (deformação contínua) entre uma linha qualquer fechada  $\Gamma \subset S$ , descrita pelo caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e um ponto qualquer  $P$  fixo em  $S$ , tal como se ilustra na Figura 10.5.



**Figura 10.5** Homotopia ou deformação de uma linha fechada num ponto

**Exemplo 10.2.2** Qualquer conjunto em estrela é simplesmente conexo. Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  diz-se em estrela, ou que é uma estrela, se existir um ponto  $P \in S$ , tal que o segmento de reta  $[P, Q]$  se encontra em  $S$ , para qualquer ponto  $Q \in S$ .



**Figura 10.6** Conjunto em estrela

A homotopia pode ser definida do mesmo modo que no exemplo anterior. Qualquer conjunto convexo é uma estrela. Em particular, uma bola é uma estrela.

**Exemplo 10.2.3** O conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  não é simplesmente conexo. Dada uma linha fechada em torno da origem, não é possível deformá-la num ponto. No entanto, qualquer linha  $\Gamma$  fechada em torno da origem é homotópica à circunferência centrada na origem e de raio igual a 1.

De facto, seja  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o caminho que descreve a linha  $\Gamma$ . É claro que a função  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\alpha(t) = \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

é um caminho que descreve a circunferência centrada na origem e de raio igual a 1. Assim, a função

$$H(s, t) = \alpha(t) + s(\gamma(t) - \alpha(t))$$

estabelece a referida homotopia.

**Exemplo 10.2.4** O conjunto  $S = \mathbb{R}^2 \setminus L$ , em que  $L$  é uma semireta, é um conjunto em estrela e, portanto, é simplesmente conexo. De facto, um ponto  $P$  que se encontre no prolongamento da semireta  $L$  pode ser ligado a outro ponto qualquer  $Q \in S$ , tal como se ilustra na Figura 10.7.

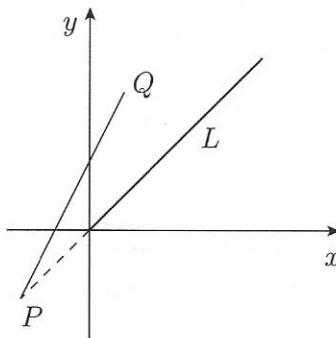


Figura 10.7

**Exemplo 10.2.5** O conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ , em que  $L$  é uma semireta, é um conjunto em estrela e, portanto, é simplesmente conexo.

**Exemplo 10.2.6** O conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ , em que  $L$  é uma reta, não é simplesmente conexo. Não é possível deformar continuamente uma circunferência, centrada na reta  $L$  e situada num plano perpendicular a  $L$ , num ponto de  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ .

**Exemplo 10.2.7** O conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  não é uma estrela, mas é simplesmente conexo. Qualquer linha fechada neste conjunto pode ser continuamente deformada num ponto qualquer distinto da origem.

**Exemplo 10.2.8** Considere-se o campo vetorial  $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ .

Este campo é fechado no seu domínio  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Para além disso, o integral de linha de  $F$  ao longo de qualquer circunferência centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo tem o valor  $2\pi$ .

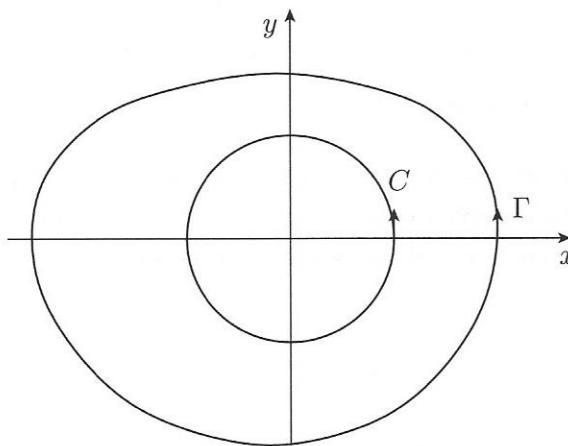


Figura 10.8

Seja  $\Gamma$  uma linha fechada em torno da origem e descrita por um caminho  $\alpha$ , tal como se ilustra na Figura 10.8. É claro que  $\Gamma$  é homotópica à circunferência  $C$ , centrada na origem, percorrida no mesmo sentido de  $\Gamma$  e descrita por um caminho  $g$ .

Dado que  $F$  é um campo fechado, então:

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\alpha = \int_C F \cdot dg = 2\pi.$$

Se a origem não se encontrar no conjunto limitado pela linha  $\Gamma$ , tal como se mostra na Figura 10.9, então a linha  $\Gamma$  é homotópica a um ponto, e o integral de linha de  $F$  em  $\Gamma$  é nulo.

Portanto, o integral de linha de  $F$  ao longo de uma linha fechada e percorrida uma vez no sentido positivo só pode tomar os valores 0 e  $2\pi$ .

**Exemplo 10.2.9** Considere-se o campo

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{z}{x^2+z^2}, y, \frac{x}{x^2+z^2}\right).$$

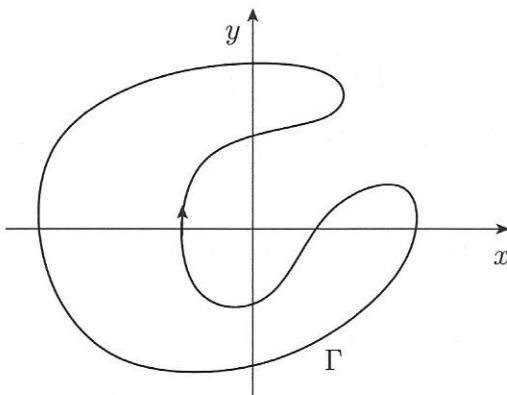


Figura 10.9

O domínio de  $F$  é o conjunto  $S = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ , e facilmente se verifica que  $F$  é um campo fechado. Embora  $S$  não seja um conjunto simplesmente conexo, as possíveis linhas fechadas,  $\Gamma \subset S$ , serão de dois tipos: ou serão homotópicas a um ponto ou serão homotópicas à circunferência  $C$  definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1; y = 0\}.$$

Na Figura 10.10 ilustra-se o caso de uma linha homotópica à circunferência  $C$ .

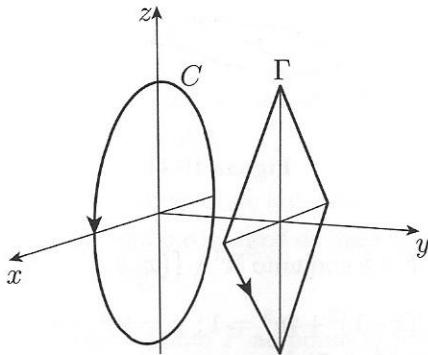


Figura 10.10

No primeiro caso, o integral de linha de  $F$  é nulo. No segundo caso, considera-se  $\Gamma$  homotópica à circunferência  $C$  percorrida uma vez no sentido positivo quando vista de um ponto da forma  $(0, y, 0)$  com  $y > 0$ , tal como se ilustra na Figura 10.10.

Então:

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot dg,$$

em que  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  é o caminho que descreve  $C$ , ou seja,  $g(t) = (\sin t, 0, \cos t)$ . Portanto,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} (-\cos t, 0, \sin t) \cdot (\cos t, 0, -\sin t) dt = -2\pi.$$

**Exemplo 10.2.10** Considere-se o campo vetorial

$$F(x, y, z) = \left( -\frac{y}{(x-1)^2 + 4y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + 4y^2}, z \right)$$

e o caminho fechado que descreve a linha quadrada no plano  $z = 1$ , que une os pontos  $(0, -1, 1), (2, -1, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 1)$ , percorrida por esta ordem. Seja  $C$  esta linha.

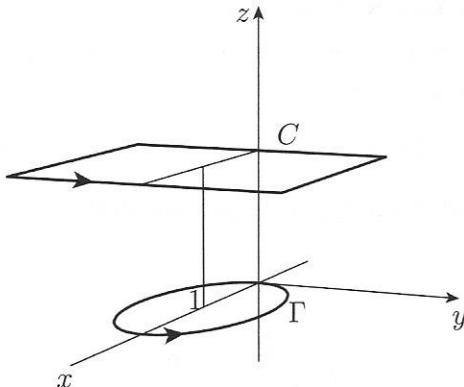


Figura 10.11

Note-se que o domínio de  $F$  é o conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1; y = 0\}$ .

Seja  $\Gamma$  a elipse definida por  $(x-1)^2 + 4y^2 = 1; z = 0$  e percorrida no sentido anti-horário quando observada do ponto  $(1, 0, 5)$ .

Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , o caminho definido por

$$\gamma(t) = \left( 1 + \cos t, \frac{\sin t}{2}, 0 \right)$$

e que descreve a elipse  $\Gamma$ .

Usando a definição para integrais de linha de campos vetoriais, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin t}{2}, \cos t, 0 \right) \cdot \left( -\sin t, \frac{\cos t}{2}, 0 \right) dt = \pi.\end{aligned}$$

É fácil ver que o campo  $\mathbf{F}$  é fechado. Dado que o quadrado  $C$  e a elipse  $\Gamma$  são linhas fechadas e homotópicas no domínio deste campo, tal como se ilustra na Figura 10.11, então:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot dg = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \pi,$$

em que  $g$  é um caminho que descreve  $C$ .

Note-se que é fácil calcular, pela definição, o integral de linha do campo  $\mathbf{F}$  ao longo da elipse  $\Gamma$ . O mesmo não acontece para a linha  $C$ .

\*\*\*

É importante observar que um campo gradiente é necessariamente fechado e que o respetivo integral de linha é nulo em caminhos fechados.

Por outro lado, num conjunto simplesmente conexo, o integral de linha de um campo vetorial fechado é nulo nos caminhos fechados.

Destas considerações deduz-se que um campo vetorial fechado  $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  é gradiente, desde que  $S \subset \mathbb{R}^n$  seja simplesmente conexo.

Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos em  $S$ . Se o integral de linha de um campo vetorial  $\mathbf{F}$  ao longo de qualquer linha fechada for nulo, então o integral de linha desse campo é independente da linha que une os dois pontos,  $P$  e  $Q$ .

De facto, seja  $\Gamma$  uma linha que une o ponto  $P$  ao ponto  $Q$  e seja  $C$  uma linha que une o ponto  $Q$  ao ponto  $P$ , tal como se ilustra na Figura 10.12. Da união destas duas linhas resulta uma linha fechada.

Usando as propriedades (10.1) e (10.2), obtém-se

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} + \int_C \mathbf{f} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \mathbf{F} = \int_{\overline{C}} \mathbf{f}.$$

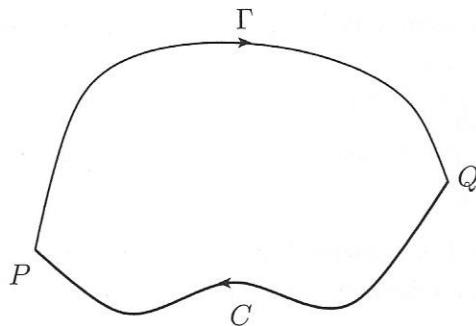


Figura 10.12

Como a linha  $\overline{C}$  une o ponto  $P$  ao ponto  $Q$ , conclui-se que o integral é independente da linha que une os dois pontos. Fixando um ponto  $P$  em  $S$ , seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  o campo escalar definido por

$$\phi(x) = \int_{\Gamma} F,$$

em que  $\Gamma$  é uma linha em  $S$  que une o ponto  $P$  ao ponto  $x \in S$ . Este campo está bem definido, porque o integral de linha de  $F$  é independente da linha que une os pontos  $P$  e  $x$ .

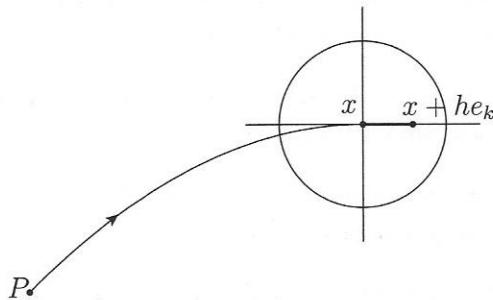


Figura 10.13

O campo  $\phi$  será um potencial escalar de  $F$ , isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = F_k; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Seja  $[x, x + he_k] \subset S$  o segmento de reta que passa no ponto  $x$ , na direção do vetor unitário  $e_k$  cujas componentes são todas nulas, exceto a  $k$ -ésima, tal como se ilustra na Figura 10.13.

Dado que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + he_k) - \phi(x)}{h},$$

e sendo o integral de linha de  $F$  independente do caminho percorrido, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + he_k) - \phi(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+he_k]} F \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F(x + te_k) \cdot e_k dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_k(x + te_k) dt \\ &= F_k(x).\end{aligned}$$

Portanto, se o integral de linha de um campo vetorial for independente do caminho percorrido, então esse campo é um gradiente.

Num conjunto simplesmente conexo, qualquer linha fechada é homotópica a um ponto e, portanto, o integral de um campo vetorial fechado é nulo nessa linha.

**Teorema 10.2.1** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto simplesmente conexo, e  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$ .*

*Então o campo  $F$  é um gradiente, se e só se  $F$  for um campo fechado.*

### 10.3 EXERCÍCIOS

- Calcule o trabalho do campo vetorial  $F(x, y, z) = (-y, x, xy + z^2)$  ao longo do caminho dado por  $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$  com  $t \in [0, 2\pi]$ .
- Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial  $G(x, y, z) = (y, z, x)$  ao longo das linhas seguintes:
  - O segmento de reta que une o ponto  $(1, 0, 1)$  a  $(2, 1, 0)$ .
  - A intersecção das superfícies  $x^2 + y^2 = 1$  e  $z = xy$  percorrida num sentido que parece o anti-horário, quando visto a partir de um ponto no eixo  $Oz$  muito acima do plano  $Oxy$ .

3. Mostre que os campos vetoriais seguintes são conservativos:

- a)  $F(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$ .
- b)  $G(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ .
- c)  $H(x, y, z) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z \right)$

4. Diz-se que um campo vetorial  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido por  $F(x) = g(r)x$ , tendo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é um campo radial. Mostre que, se  $g$  for contínua, então  $F$  é um campo conservativo.

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo  $F(x, y, z) = (2xy, x^2+2yz, y^2)$  ao longo do caminho  $\gamma(t) = (e^{t^4} \sin t, e^t \cos t, \sin t)$ , com  $t \in [0, \pi]$ .

6. Considere o campo vetorial

$$H(x, y, z) = \left( \frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2} + yz, \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y^2} + xz, xy \right).$$

Seja  $\mathcal{L}$  a coleção de todas as linhas regulares, simples, fechadas e contidas no domínio de  $H$ . Calcule os valores possíveis do integral  $\int_{\Gamma} H \cdot d\gamma$ , com  $\Gamma \in \mathcal{L}$ .

7. Considere o campo vetorial  $F(x, y) = r^a(-y, x)$ , em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Determine  $a$ , de modo a que o trabalho realizado por  $F$  ao longo de uma circunferência centrada na origem não dependa do respetivo raio.

8. Seja  $H$  um campo vetorial fechado, de classe  $C^1$ , não conservativo e definido no conjunto  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Mostre que o campo  $H$  é da forma

$$H = \alpha F + \nabla \phi,$$

em que  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função escalar de classe  $C^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

# 11

---

TEOREMA DE GREEN NO PLANO

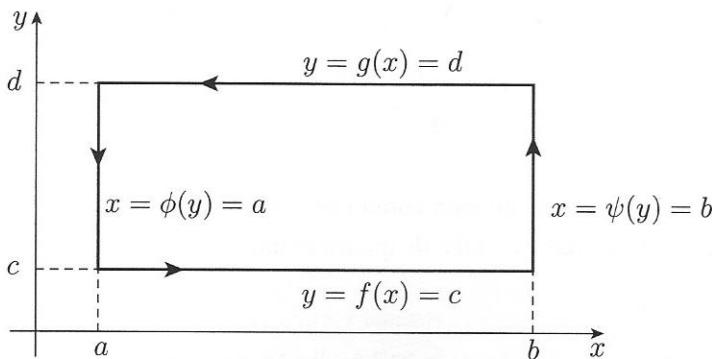
O teorema de Green relaciona o trabalho de um campo vetorial ao longo de uma linha fechada  $\Gamma$ , com um integral duplo na região limitada por essa linha. Esta relação permite caracterizar o integral de linha de um campo vetorial fechado.

## 11.1 DOMÍNIO ELEMENTAR

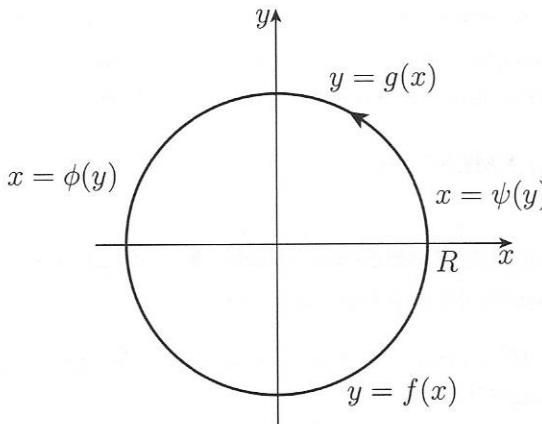
**Definição 11.1.1** Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e limitado. Diz-se que  $D$  é um **domínio elementar**, se for descrito, simultaneamente, nas duas formas seguintes:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x); a < x < b\}$ , em que  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções de classe  $C^1$ .
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(y) < x < \psi(y); c < y < d\}$ , em que  $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções de classe  $C^1$ .

**Exemplo 11.1.1** Um intervalo em  $\mathbb{R}^2$  é um domínio elementar, tal como se ilustra na Figura 11.1.



**Figura 11.1** Um intervalo é um domínio elementar



**Figura 11.2** Um círculo é um domínio elementar

**Exemplo 11.1.2** Um círculo em  $\mathbb{R}^2$  é um domínio elementar. Na Figura 11.2 encontra-se um círculo de raio  $R$ , centrado na origem para o qual facilmente se verificam as desigualdades:

$$f(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}; \quad -R < x < R$$

$$g(x) = \sqrt{R^2 - x^2}; \quad -R < x < R$$

$$\phi(y) = -\sqrt{R^2 - y^2}; \quad -R < y < R$$

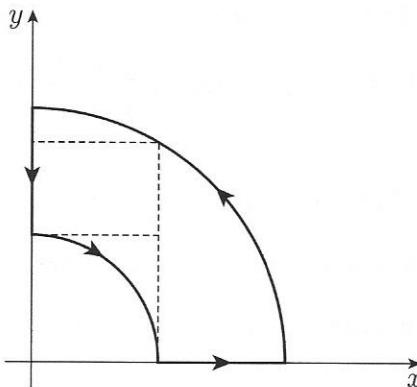
$$\psi(y) = \sqrt{R^2 - y^2}; \quad -R < y < R.$$

**Exemplo 11.1.3** Um quarto de uma coroa circular no primeiro quadrante de  $\mathbb{R}^2$  não é um domínio elementar, mas é a união de quatro domínios elementares, como se ilustra na Figura 11.3.

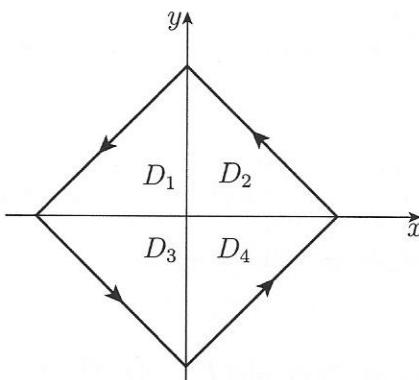
**Exemplo 11.1.4** Um losango é a união de quatro domínios elementares,  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , como se pode verificar na Figura 11.4.

\*\*\*

Dos exemplos, fica claro que há muitos conjuntos que são uniões finitas de conjuntos elementares.



**Figura 11.3** Uma coroa circular é a união de quatro domínios elementares



**Figura 11.4** Um losango é a união de quatro domínios elementares

**Definição 11.1.2** Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e limitado. Diz-se que  $D$  é um **domínio quase regular**, se for uma união finita de domínios elementares.

## 11.2 TEOREMA DE GREEN

O integral de linha de um campo vetorial  $F = (P, Q)$  ao longo de uma linha  $\Gamma$  passará a ser designado pela expressão

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

Note-se que, sendo  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , então:

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

e, portanto,

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt},$$

dando sentido ao novo símbolo para o integral de linha de um campo vetorial.

Ao integral de linha de um campo vetorial  $F$  sobre um caminho simples e fechado  $\Gamma$  chama-se **circulação** de  $F$  ao longo de  $\Gamma$ .

**Teorema 11.2.1 (Green)** Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um domínio quase regular, e  $\partial D$  a sua fronteira.

Seja  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo vetorial de classe  $C^1$  cujo domínio contém  $D$ .

Então:

$$\int \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

em que a linha  $\partial D$  é percorrida no sentido positivo.

Seja  $D$  um domínio elementar. Dado que  $F = (P, Q) = (P, 0) + (0, Q)$  e sendo o integral linear, pode admitir-se que  $D$  é descrito na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x); a < x < b\},$$

e que  $F = (P, 0)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left( \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, a fronteira  $\partial D$  é a união de quatro linhas,

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

definidas por

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(x, y) : a \leq x \leq b; y = f(x)\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) : x = b; f(b) \leq y \leq g(b)\} \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) : a \leq x \leq b; y = g(x)\} \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) : x = a; f(a) \leq y \leq g(a)\}\end{aligned}$$

e percorridas no sentido positivo. Então:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma &= \int_a^b P(x, f(x)) dx \\ \int_{\Gamma_2} F \cdot d\gamma &= 0 \\ \int_{\Gamma_3} F \cdot d\gamma &= - \int_a^b P(x, g(x)) dx \\ \int_{\Gamma_4} F \cdot d\gamma &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\partial D} P dx = \int_{\partial D} F \cdot d\gamma = \int_a^b P(x, f(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Do mesmo modo, considerando  $F = (0, Q)$  e  $D$  descrito na forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(y) < x < \psi(y); c < y < d\},$$

obtém-se

$$\int_{\partial D} Q dy = \int_{\partial D} F \cdot d\gamma = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy,$$

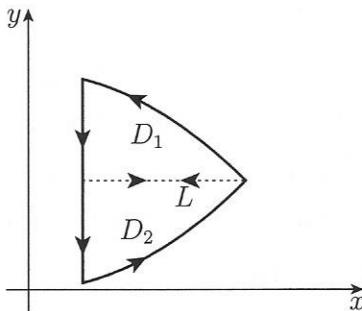
e, portanto,

$$\int \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Assim, o teorema de Green é válido para domínios elementares.

Se  $D$  for uma união finita de domínios elementares, sem perda de generalidade, basta considerar  $D$  como a união de dois domínios elementares,  $D_1, D_2$ , tal como, a título ilustrativo, se apresenta na Figura 11.5. Seja  $L$  a linha comum às fronteiras de  $D_1$  e  $D_2$ , isto é,

$$\partial D_1 = \Gamma_1 \cup L, \quad \partial D_2 = \Gamma_2 \cup L.$$



**Figura 11.5** União de dois domínios elementares

Note-se que  $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Aplicando o teorema de Green a ambos os domínios, obtém-se

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_L P dx + Q dy, \\ \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy - \int_L P dx + Q dy. \end{aligned}$$

O integral de linha de um campo vetorial  $F$  ao longo de um caminho tem o sinal contrário ao do integral de  $F$  ao longo da mesma linha, mas percorrida no sentido contrário. Adicionando ambas as equações, obtém-se

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

É claro que este procedimento é válido para uma união finita de domínios elementares, ou seja, para um domínio quase regular.

**Corolário 11.2.1** *A circulação de um campo vetorial fechado, de classe  $C^1$ , ao longo de uma linha fechada que limita um domínio quase regular é nula.*

Sendo  $F = (P, Q)$  um campo fechado, então  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  e, aplicando o teorema de Green ao conjunto limitado por  $\Gamma$ , obtém-se imediatamente

$$\oint_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0.$$

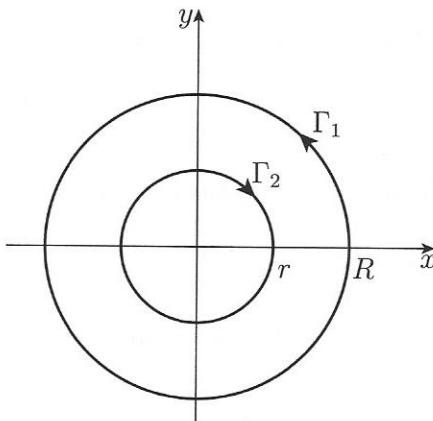
\*\*\*

**Exemplo 11.2.1** Seja  $D$  a coroa circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 < x^2 + y^2 < R^2\},$$

de raios  $r$  e  $R$ , representada na Figura 11.6.

Seja  $F = (P, Q)$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , definido num subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .



**Figura 11.6** Coroa circular

A fronteira  $\partial D$  é a união da circunferência  $\Gamma_2$ , de raio  $r$ , percorrida no sentido positivo, e da circunferência  $\Gamma_1$ , de raio  $R$ , percorrida no sentido negativo. Do Exemplo 11.1.3, fica claro que a coroa circular  $D$  é um domínio quase regular.

Da aplicação do teorema de Green, vem

$$\int \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy.$$

Se o campo  $F$  for fechado, então:

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = - \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy.$$

Se as duas linhas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  forem **percorridas no mesmo sentido**, então:

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy.$$

É claro que o mesmo raciocínio é válido para qualquer domínio quase regular  $D \subset \mathbb{R}^2$ , limitado por duas linhas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

**Corolário 11.2.2** *Seja  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  um campo vetorial de classe  $C^1$  e fechado.*

*Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um domínio quase regular limitado por duas linhas fechadas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , percorridas no mesmo sentido.*

*Então:*

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy.$$

**Exemplo 11.2.2** Seja  $F$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . É fácil verificar que  $F$  é um campo fechado.

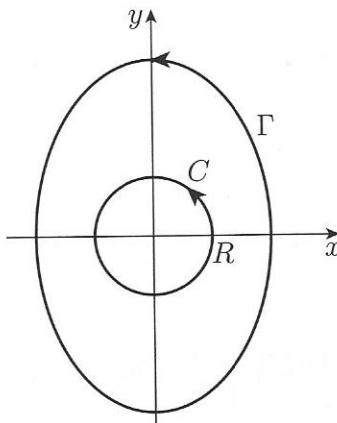


Figura 11.7

Seja  $C$  uma circunferência de raio  $R$  e centro na origem, tal como se representa na Figura 11.7. Usando a parametrização

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t); \quad 0 < t < 2\pi,$$

a circulação de  $F$  em  $C$  é dada por

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi.$$

A circulação de  $F$  não depende do raio da circunferência. Será que o integral numa outra linha  $\Gamma$ , fechada em torno da origem, tem o mesmo valor?

Sejam  $C$  e  $\Gamma$  as linhas que limitam um domínio quase regular, percorridas no mesmo sentido, tal como se representa na Figura 11.7.

Da aplicação do Corolário 11.2.2 do teorema de Green a esse domínio, vem

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy = 2\pi.$$

Se a linha  $\Gamma$  limitar um domínio quase regular que não contenha a origem no seu interior então, pelo Corolário 11.2.1 do teorema de Green,

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0.$$

**Exemplo 11.2.3** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = \left( -\frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} \right).$$

e seja  $\Gamma$  a fronteira do quadrilátero com vértices nos pontos

$$(3, 0), (0, 3), (-3, 0), (0, -3),$$

percorrida no sentido positivo e descrita por um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Para calcular o integral de linha  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ , considera-se a região limitada por  $\Gamma$  e pela circunferência  $C$  de raio igual a 1 e centro no ponto  $(0, 1)$  percorrida no sentido positivo e descrita pelo caminho

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t + 1); \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

como se mostra na Figura 11.8.

Facilmente se verifica que o campo  $F$  é fechado e que a região considerada é um domínio quase regular.

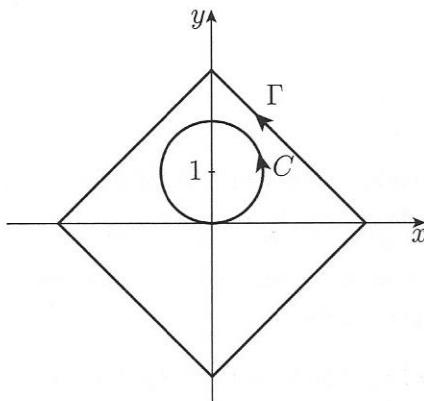


Figura 11.8

Aplicando o teorema de Green, obtém-se

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot d\gamma.$$

Por outro lado,

$$\int_C F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\pi$$

e, portanto,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 2\pi.$$

Note-se que o cálculo direto do integral  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ , pela definição, seria muito mais complicado.

**Exemplo 11.2.4** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-2,0), (2,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x,y) = \left( -\frac{y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right) + \left( -\frac{y}{(x+2)^2 + y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \right),$$

e seja  $\Gamma$  uma linha regular, tal como se representa na Figura 11.9.

Para calcular o integral de linha  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ , considera-se a região limitada por  $\Gamma$ , pela circunferência  $C_1$  de raio igual a 1 e centro no ponto  $(2,0)$  e pela circunferência  $C_2$  de raio igual a 1 e centro no ponto  $(-2,0)$ , como se mostra na Figura 11.9. Facilmente se verifica que o campo  $F$  é fechado e que a região considerada é um domínio quase regular.

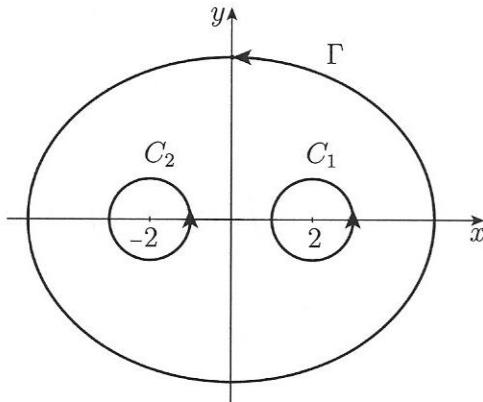


Figura 11.9

Pelo teorema de Green, obtém-se

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{C_1} F \cdot d\gamma + \int_{C_2} F \cdot d\gamma.$$

Note-se que  $F(x, y) = G(x, y) + H(x, y)$ , sendo

$$G(x, y) = \left( -\frac{y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right)$$

e

$$H(x, y) = \left( -\frac{y}{(x+2)^2 + y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \right).$$

Usando a parametrização  $\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t)$ ;  $0 < t < 2\pi$ , para  $C_1$ , obtém-se

$$\int_{C_1} G \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\pi.$$

Usando a parametrização  $\gamma(t) = (-2 + \cos t, \sin t)$ ;  $0 < t < 2\pi$ , para  $C_2$ , obtém-se

$$\int_{C_2} H \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\pi.$$

Dado que o campo  $G$  é de classe  $C^1$  no círculo limitado por  $C_2$ , pelo Corolário 11.2.1 do teorema de Green, deduz-se que

$$\int_{C_2} G \cdot d\gamma = 0.$$

Do mesmo modo, sendo  $H$  de classe  $C^1$  no círculo limitado por  $C_1$ , tem-se

$$\int_{C_1} H \cdot d\gamma = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{C_1} G \cdot d\gamma + \int_{C_2} G \cdot d\gamma + \int_{C_1} H \cdot d\gamma + \int_{C_2} H \cdot d\gamma = 2\pi + 2\pi = 4\pi.$$

\*\*\*

Seja  $F = (P, Q)$  um campo vetorial, tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = k,$$

em que  $k \neq 0$  é uma constante. Então, pelo teorema de Green,

$$\text{vol}_2(D) = \frac{1}{k} \oint_{\partial D} P dx + Q dy,$$

em que a linha  $\partial D$  é percorrida no sentido positivo, ou seja, a área do conjunto  $D$  pode ser calculada recorrendo ao integral de linha do campo  $F$  ao longo da respetiva fronteira.

**Exemplo 11.2.5** Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y) = (-y, x).$$

Note-se que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

Seja  $S$  o conjunto limitado por uma elipse,

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}, \quad a, b > 0,$$

cuja fronteira  $\Gamma$  é descrita pelo caminho

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Então, a área de  $S$  é dada por

$$\begin{aligned}\text{vol}_2(S) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -ydx + xdy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-a \sin t, b \cos t) \cdot (-a \sin t, b \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt \\ &= \pi ab.\end{aligned}$$

### 11.3 EXERCÍCIOS

1. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial  $F(x, y) = (-y^3, x^3)$  ao longo da circunferência dada pela equação  $x^2 + y^2 = 4$  e percorrida no sentido horário.
2. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial  $G(x, y) = (\sin(x^2), \cos(y^2) + x)$  ao longo da elipse dada pela equação  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  e percorrida no sentido horário.
3. Considere o campo vetorial
 
$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2} \right).$$
  - a) Mostre que  $F$  não é conservativo no seu domínio.
  - b) Seja  $\mathcal{L}$  a coleção de todas as linhas regulares, simples, fechadas e contidas no domínio de  $F$ . Calcule os valores possíveis do integral  $\int_{\Gamma} H \cdot d\gamma$ , com  $\Gamma \in \mathcal{L}$ .
4. Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma mudança de variáveis de classe  $C^2$ , tal que  $\det Dg > 0$ , e seja  $T \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto limitado por uma linha regular simples. Use o campo vetorial  $F(x, y) = (0, x)$  para provar a igualdade

$$\text{vol}_2(D) = \iint_D dx dy = \iint_T \det dg(u, v) du dv,$$

em que  $D = g(T)$ .

# 12

TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

O teorema da divergência ou teorema de Gauss relaciona a divergência de um campo vetorial num domínio com o respetivo fluxo, através de uma superfície que limita o referido domínio.

## 12.1 FLUXO DE UM CAMPO VETORIAL

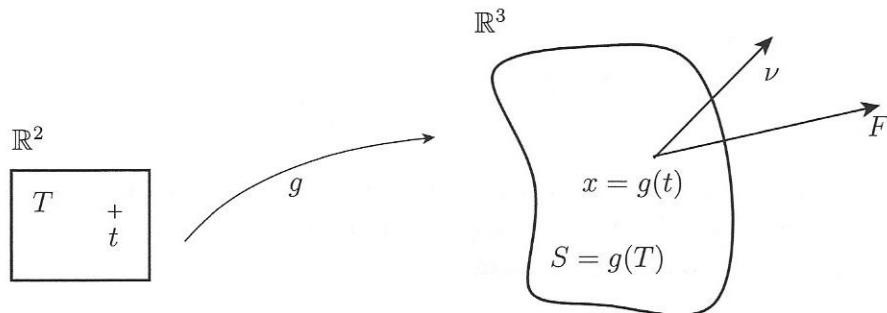
Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma variedade-2 (superfície), definida por uma parametrização  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $T \subset \mathbb{R}^2$ , como se ilustra na Figura 12.1.

Seja  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial definido num aberto  $A \subset \mathbb{R}^3$ , tal que  $S \subset A$ .

**Definição 12.1.1** Ao integral

$$\Phi = \int_S F \cdot \nu = \int_T F(g(t)) \cdot \nu(g(t)) \sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} dt,$$

em que  $\nu(x)$  designa a normal (unitária) a  $S$  no ponto  $x \in S$ , chama-se **fluxo do campo vetorial  $F$  através de  $S$ , segundo a normal  $\nu$** .



**Figura 12.1** Fluxo de  $F$  através de  $S$ , segundo a normal  $\nu$

\*\*\*

Para entender de maneira simples esta definição, basta supor que a superfície  $S$  é plana e o campo vetorial  $F$  é constante, e  $\|F\|$  é o número de partículas que passam através de  $S$  por unidade de tempo e por unidade de área.

É claro que o número total de partículas que passam através de  $S$ , por unidade de tempo, é proporcional à área de  $S$ . No entanto, se  $F$  for perpendicular à direção normal a  $S$ , não

passarão partículas através dela. O número de partículas que passam através de  $S$  será maior, se  $F$  for perpendicular a  $S$ .

Assim, o número de partículas que passam através de  $S$  é proporcional à respetiva área e ao produto interno  $F \cdot \nu$ .

A definição de fluxo traduz esta ideia. Neste caso, fazendo  $F_\nu = F \cdot \nu$ , o número de partículas que passam através de  $S$  por unidade de tempo é dado por

$$\Phi = F_\nu \operatorname{vol}_2(S).$$

\*\*\*

Sejam  $A = (a_1, a_2, a_3)$  e  $B = (b_1, b_2, b_3)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ .

O **produto externo** de  $A$  por  $B$  é o vetor definido por

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Na prática, usa-se a seguinte regra mnemónica para definir o produto externo:

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix},$$

em que se simula o cálculo do determinante da matriz que apresenta, na primeira linha, os vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , na segunda linha, as componentes do vetor  $A$ , e na terceira linha, as componentes do vetor  $B$ .

Facilmente se verificam as seguintes propriedades.

1. Designando por  $e_1, e_2, e_3$  os vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^3$  (ver Figura 12.2), então:

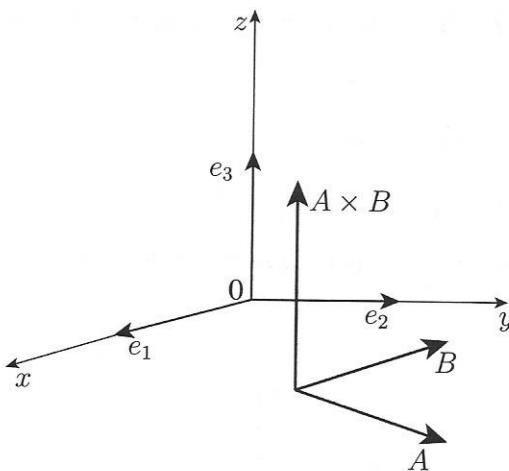
$$e_1 \times e_2 = e_3; e_2 \times e_3 = e_1; e_3 \times e_1 = e_2.$$

2.  $B \times A = -A \times B$ .

3.  $A \times B$  é ortogonal a  $A$  e a  $B$ .

4.  $\|A \times B\| = \sqrt{\det \Delta^t \Delta}$ , em que  $\Delta$  é a matriz cujas colunas são os vetores  $A$  e  $B$ .

\*\*\*



**Figura 12.2** Produto externo em  $\mathbb{R}^3$

Sejam  $D_1g(t)$  e  $D_2g(t)$ , respectivamente, a primeira e a segunda colunas da matriz  $Dg(t)$ . Então o produto externo  $D_1g(t) \times D_2g(t)$  é um vetor normal a  $S$  no ponto  $x = g(t)$ , porque as colunas da matriz  $Dg(t)$  geram o espaço tangente a  $S$  nesse ponto. Assim:

- a) Uma normal unitária no ponto  $x = g(t)$  é dada por

$$\nu(g(t)) = \frac{D_1g(t) \times D_2g(t)}{\|D_1g(t) \times D_2g(t)\|}.$$

b)  $\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = \|D_1g(t) \times D_2g(t)\|.$

Portanto,

$$\nu(g(t))\sqrt{\det Dg(t)^t Dg(t)} = D_1g(t) \times D_2g(t),$$

ou seja, o fluxo de  $F$  é dado pela fórmula

$$\int_S F \cdot \nu = \int_T F(g(t)) \cdot D_1g(t) \times D_2g(t) dt.$$

\*\*\*

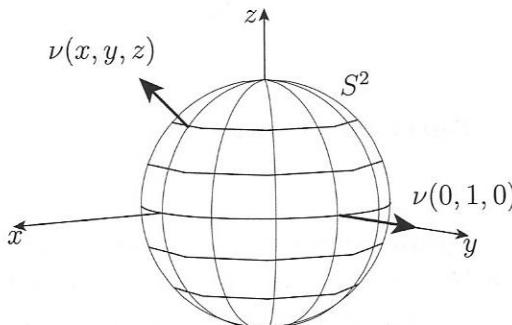
**Exemplo 12.1.1** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (x, y, z).$$

Seja  $S^2$  a superfície esférica dada por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

cuja normal  $\nu$  no ponto  $(0, 1, 0)$  tem a segunda componente positiva, tal como se representa na Figura 12.3.



**Figura 12.3** Superfície esférica  $S^2$  e respetiva normal  $\nu(x, y, z)$

Para calcular o fluxo de  $F$  através de  $S^2$ , segundo a normal  $\nu$ , seja

$$T = \{(\theta, \phi) : 0 < \theta < 2\pi ; 0 < \phi < \pi\},$$

e  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  a parametrização de  $S^2 \setminus N$  dada por

$$g(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi),$$

em que  $N = \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ .

Então:

$$D_1 g(\theta, \phi) = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0)$$

$$D_2 g(\theta, \phi) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi),$$

e, portanto,

$$D_1 g(\theta, \phi) \times D_2 g(\theta, \phi) = (-\sin^2 \phi \cos \theta, -\sin^2 \phi \sin \theta, -\sin \phi \cos \phi).$$

No ponto  $(0, 1, 0) = g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  tem-se

$$D_1g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times D_2g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0, -1, 0),$$

ou seja, a normal a considerar é dada por  $D_2g(\theta, \phi) \times D_1g(\theta, \phi)$ .

Assim, o fluxo de  $F$  através de  $S^2$ , segundo a normal  $\nu$ , é dado por

$$\begin{aligned} \int_{S^2} F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi F(g(\theta, \phi)) \cdot (D_2g(\theta, \phi) \times D_1g(\theta, \phi)) d\phi \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) d\theta \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

\*\*\*

O fluxo de  $F$  pode ser calculado de outro modo. Sendo  $S^2$  dada pela equação

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

em cada ponto  $(x, y, z) \in S^2$ , a normal unitária é dada por

$$\nu(x, y, z) = \frac{DG(x, y, z)}{\|DG(x, y, z)\|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x, y, z)$$

e, então,

$$F(x, y, z) \cdot \nu(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

ou seja,

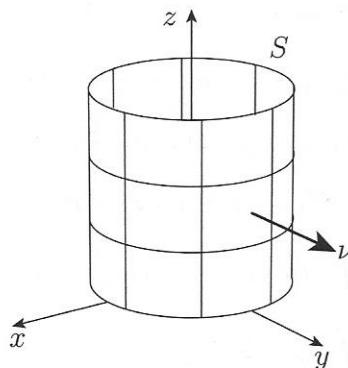
$$\int_{S^2} F \cdot \nu = \text{vol}_2(S^2) = 4\pi.$$

**Exemplo 12.1.2** Considere-se o campo vetorial  $F(x, y, z) = (x, y, z)$  e a superfície cilíndrica  $S$  definida pela equação  $x^2 + y^2 = 1$ , tal que  $0 < z < 2$ .

Seja  $\nu$  a normal unitária a  $S$ , que no ponto  $(0, 1, 1)$  tem segunda componente positiva tal como se representa na Figura 12.4.

Da equação  $x^2 + y^2 = 1$ , determina-se a normal

$$\nu(x, y, z) = \frac{(2x, 2y, 0)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = (x, y, 0)$$



**Figura 12.4** Superfície cilíndrica  $S$  e respetiva normal  $\nu$

e, portanto,

$$F(x, y, z) \cdot \nu(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1.$$

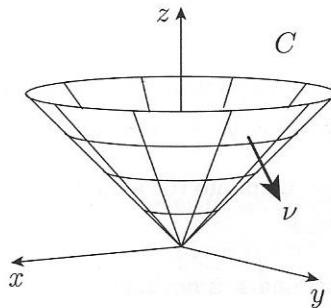
Assim, o fluxo de  $F$  através de  $S$ , segundo a normal  $\nu$ , é dado por

$$\int_S F \cdot \nu = \text{vol}_2(S) = 4\pi.$$

**Exemplo 12.1.3** Considere-se o campo vetorial  $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$  e o cone definido por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 ; 0 < z < 1\}.$$

Seja  $\nu$  a normal unitária que em cada ponto de  $C$  tem terceira componente negativa, tal como se representa na Figura 12.5.



**Figura 12.5** Cone  $C$  e respetiva normal  $\nu$

Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ , o cone  $C$  é dado pela equação  $z = \rho$ .

Facilmente se verifica que a função  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho),$$

em que  $T = ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[$ , é uma parametrização de  $C \setminus N$ .

Note-se que  $N = \{(x, y, z) \in C : y = 0; x \geq 0\}$  é uma linha sobre  $C$ . Então:

$$D_1 g(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$$

$$D_2 g(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

e, portanto,

$$D_2 g(\rho, \theta) \times D_1 g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, -\rho),$$

e o fluxo de  $F$  através de  $C$ , segundo a normal  $\nu$ , é dado por

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot \nu &= \int_{C \setminus N} F \cdot \nu = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} F(g(\rho, \theta)) \cdot D_2 g(\rho, \theta) \times D_1 g(\rho, \theta) d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \cdot (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, -\rho) d\theta \right) d\rho \\ &= 0. \end{aligned}$$

\*\*\*

Da equação  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , que define  $C$ , determina-se a normal unitária pela fórmula

$$\nu(x, y, z) = \frac{DG(x, y, z)}{\|DG(x, y, z)\|} = \frac{(2x, 2y, -2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Então:

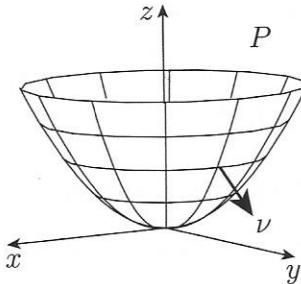
$$F(x, y, z) \cdot \nu(x, y, z) = (-y, x, 0) \cdot \frac{(2x, 2y, -2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

e o fluxo de  $F$  através de  $C$  segundo a normal  $\nu$  é nulo.

**Exemplo 12.1.4** Seja  $F(x, y, z) = (-y, x, 1)$  e  $P$  a superfície definida por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z < 1\}.$$

Seja  $\nu$  a normal a  $P$  que, no ponto  $(0, 0, 0)$ , tem terceira componente negativa, tal como se representa na Figura 12.6.



**Figura 12.6** Parabolóide  $P$  e respetiva normal  $\nu$

Em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ , a superfície  $P$  é dada pela equação  $z = \rho^2$ . Então, seja  $g : ]0, 1[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2)$ .

Facilmente se verifica que  $g$  é uma parametrização de  $P \setminus N$ , em que

$$N = \{(x, y, z) : y = 0; x \geq 0\}$$

é uma linha sobre  $P$ , e

$$D_1 g(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho)$$

$$D_2 g(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0).$$

Assim,  $D_2 g(\rho, \theta) \times D_1 g(\rho, \theta) = (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho)$ .

O fluxo de  $F$  através de  $P$ , segundo a normal  $\nu$ , é dado por

$$\begin{aligned} \int_P F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 F(g(\rho, \theta)) \cdot D_2 g(\rho, \theta) \times D_1 g(\rho, \theta) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 1) \cdot (2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta, -\rho) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 -\rho d\rho \right) d\theta \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

**Exemplo 12.1.5** Seja  $S$  a superfície esférica centrada na origem de  $\mathbb{R}^3$ , de raio  $R$ , e  $F$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

Em coordenadas esféricas,  $S$  é definida pela equação  $r = R$ , e a respetiva parametrização é a função  $g : ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$g(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi).$$

Então:

$$D_1 g(\theta, \phi) = (-R \sin \phi \sin \theta, R \sin \phi \cos \theta, 0)$$

$$D_2 g(\theta, \phi) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, -R \sin \phi)$$

$$D_1 g(\theta, \phi) \times D_2 g(\theta, \phi) = (-R^2 \sin^2 \phi \cos \theta, -R^2 \sin^2 \phi \sin \theta, -R^2 \sin \phi \cos \phi).$$

O fluxo de  $F$  através de  $S$ , segundo a normal que em cada ponto se dirige para a origem, é dado por

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi F(g(\theta, \phi)) \cdot D_1 g(\theta, \phi) \times D_2 g(\theta, \phi) d\phi \right) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) d\theta \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

## 12.2 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Devido ao interesse das suas aplicações, apresenta-se o teorema apenas em  $\mathbb{R}^3$ . O caso geral, com as devidas adaptações, não é significativamente diferente e pode ser visto em ([3], p. 104).

Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto, limitado, cuja fronteira  $\partial D$  é localmente, em torno de cada um dos seus pontos, uma variedade-2 (superfície).

Isto quer dizer que, para cada  $(x, y, z) \in \partial D$ , existe uma bola  $B$  centrada nesse ponto, tal que  $\partial D \cap B$  é uma variedade-2 (superfície).

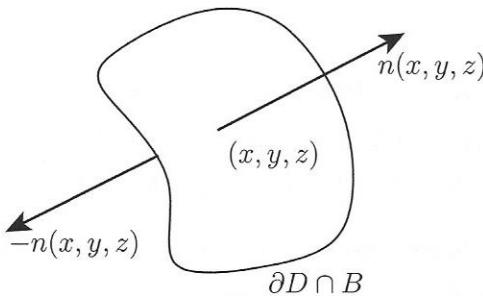
Seja  $n(x, y, z)$  a normal à superfície  $\partial D \cap B$  no ponto  $(x, y, z)$ . Se existir  $\varepsilon > 0$ , tal que

$$(x, y, z) + t n(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus D ; \quad 0 < t < \varepsilon$$

$$(x, y, z) - t n(x, y, z) \in D ; \quad 0 < t < \varepsilon,$$

diz-se que a normal  $n(x, y, z)$  é **exterior** ao conjunto  $D$ .

Em cada ponto  $(x, y, z) \in \partial D$ , a normal  $n(x, y, z)$  dirige-se do interior para o exterior do conjunto  $D$  e a normal  $-n(x, y, z)$  dirige-se do exterior para o interior do conjunto  $D$ , tal como se representa na Figura 12.7.



**Figura 12.7** Normal na fronteira de um domínio

**Nota 12.2.1** Seja  $\partial D \cap B$  um conjunto de nível de uma função  $H : B \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\nabla H(x, y, z) \neq 0$ , em qualquer ponto  $(x, y, z) \in \partial D \cap B$ .

Se

$$\begin{aligned} D \cap B &= \{(x, y, z) : H(x, y, z) < 0\} \\ (\mathbb{R}^3 \setminus D) \cap B &= \{(x, y, z) : H(x, y, z) > 0\}, \end{aligned}$$

então a normal  $n(x, y, z) = \nabla H(x, y, z)$  é exterior a  $D$ .

De facto, considerando a função  $\psi(t) = H((x, y, z) + t n(x, y, z))$ , temos:

$$\psi(0) = (x, y, z); \quad \psi'(0) = \nabla H(x, y, z) \cdot \nabla H(x, y, z) = \|\nabla H(x, y, z)\|^2 > 0,$$

onde se conclui que existe  $\varepsilon > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} H((x, y, z) + t n(x, y, z)) &> 0; 0 < t < \varepsilon \\ H((x, y, z) - t n(x, y, z)) &< 0; 0 < t < \varepsilon. \end{aligned}$$

\*\*\*

**Definição 12.2.1** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  um aberto. Dado um campo vetorial  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ , a **divergência** de  $F$  é o campo escalar  $\operatorname{div} F : S \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

É usual representar a divergência de um campo vetorial  $F$  pelo símbolo  $\nabla \cdot F$ .

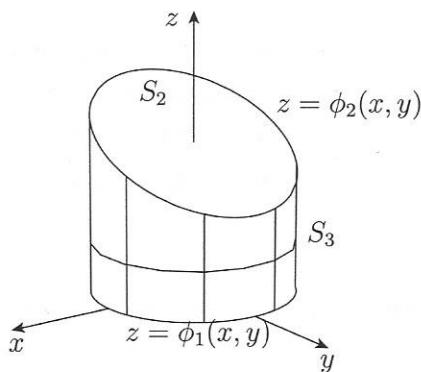
**Definição 12.2.2** Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  um aberto e limitado. Diz-se que  $D$  é um **domínio elementar**, se for definido, simultaneamente, das três maneiras seguintes:

- a)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y); (x, y) \in T_1\}$ , em que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são funções de classe  $C^1$ , e definidas num aberto limitado  $T_1 \subset \mathbb{R}^2$  cuja fronteira é uma linha regular  $\Gamma_1$ . Na direção  $z$ , o conjunto  $D$  encontra-se entre dois gráficos de classe  $C^1$ .
- b)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi_1(y, z) < x < \psi_2(y, z); (y, z) \in T_2\}$ , em que  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são funções de classe  $C^1$ , e definidas num aberto limitado  $T_2 \subset \mathbb{R}^2$  cuja fronteira é uma linha regular  $\Gamma_2$ . Na direção  $x$ , o conjunto  $D$  encontra-se entre dois gráficos de classe  $C^1$ .
- c)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \eta_1(x, z) < y < \eta_2(x, z); (x, z) \in T_3\}$ , em que  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são funções de classe  $C^1$ , e definidas num aberto limitado  $T_3 \subset \mathbb{R}^2$  cuja fronteira é uma linha regular  $\Gamma_3$ . Na direção  $y$ , o conjunto  $D$  encontra-se entre dois gráficos de classe  $C^1$ .

Supondo que o campo  $F$  é dado por  $F = (0, 0, F_3)$ , e o domínio  $D$  é definido como em a), tal como se ilustra na Figura 12.8, então a fronteira do conjunto  $D$  é constituída por três superfícies:

$$\begin{aligned}S_1 &= \{(x, y, z) : z = \phi_1(x, y); (x, y) \in T_1\} \\S_2 &= \{(x, y, z) : z = \phi_2(x, y); (x, y) \in T_1\} \\S_3 &= \{(x, y, z) : (x, y) \in \Gamma_1; \phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y)\},\end{aligned}$$

em que  $\Gamma_1$  designa a linha regular que limita  $T_1$ .



**Figura 12.8**  $D$  descrito na forma a)

Na Figura 12.8 ilustra-se o caso em que  $\phi_1(x, y) = 0$ .

A superfície  $S_3$  é vertical e, por isso, em cada um dos seus pontos, a normal  $\nu$  tem terceira componente nula. Assim, o fluxo de  $F = (0, 0, F_3)$ , através de  $S_3$ , segundo a normal  $\nu$ , é nulo.

Seja  $g_1 : T_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a parametrização de  $S_1$  definida por  $g_1(x, y) = (x, y, \phi_1(x, y))$ .

Então:

$$D_1 g_1(x, y) = \left( 1, 0, \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)$$

$$D_2 g_1(x, y) = \left( 0, 1, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right),$$

e o vetor

$$D_2 g_1(x, y) \times D_1 g_1(x, y) = \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, -1 \right)$$

é a normal exterior a  $D$  no ponto  $g_1(x, y) \in S_1$ .

O fluxo de  $F$  através de  $S_1$ , segundo a normal unitária exterior, é dado por

$$\begin{aligned} \int_{S_1} F \cdot \nu &= \int_{T_1} F(g_1(x, y)) \cdot D_2 g_1(x, y) \times D_1 g_1(x, y) dx dy \\ &= - \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Do mesmo modo se calcula o fluxo de  $F$  através de  $S_2$ , segundo a normal unitária exterior, obtendo-se

$$\begin{aligned}\int_{S_2} F \cdot \nu &= \int_{T_1} F(g_2(x, y)) \cdot D_1 g_1(x, y) \times D_2 g_1(x, y) dx dy \\ &= \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_2(x, y)) dx dy.\end{aligned}$$

O fluxo de  $F$  através da fronteira do conjunto  $D$ , segundo a normal exterior, é a soma dos fluxos através das superfícies  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , ou seja,

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_2(x, y)) dx dy - \int_{T_1} F_3(x, y, \phi_1(x, y)) dx dy.$$

Por outro lado, o integral da divergência de  $F$  em  $D$  é dado por

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{div} F dx dy dz &= \int_{T_1} \left( \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) dx dy \\ &= \int_{T_1} [F_3(x, y, \phi_2(x, y)) - F_3(x, y, \phi_1(x, y))] dx dy.\end{aligned}$$

Para um campo  $F = (F_1, 0, 0)$  considera-se  $D$  descrito como em b), e para um campo  $F = (0, F_2, 0)$  considera-se  $D$  descrito como em c).

Tendo em conta a linearidade do integral e da derivada, fica estabelecida a igualdade

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu,$$

para um domínio elementar  $D$ .

Sem grande dificuldade se mostra que o mesmo acontece para um domínio que pode ser decomposto numa união finita de domínios elementares, a que se chama **domínio quase regular**.

Tal como no caso do teorema de Green, basta considerar a união de dois domínios elementares.

\*\*\*

**Teorema 12.2.1 (Gauss)** Sejam

1.  $D \subset \mathbb{R}^3$  um domínio quase regular, e

2.  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , sendo  $A \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto, tal que  $\overline{D} \subset A$ .

Então:

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu, \quad (12.1)$$

em que  $\nu$  é a normal unitária e exterior à fronteira do conjunto  $D$ .

\*\*\*

Da equação (12.1) conclui-se imediatamente que o teorema da divergência pode ser usado para o cálculo do fluxo de um campo vetorial  $F$  através de uma superfície  $S$ . Para isso, a superfície deve fazer parte da fronteira de um domínio quase regular  $D$ . Nos exemplos ficará claro como se procede para, dados o campo  $F$  e a superfície  $S$ , determinar o domínio  $D$  adequado. Em geral,  $D$  é um domínio cuja fronteira é uma união finita de superfícies, sendo  $S$  uma delas.

Se  $\partial D = S \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$ , com  $N \in \mathbb{N}$ , então:

$$\int_S F \cdot \nu = \int_D \operatorname{div} F - \int_{S_1} F \cdot \nu_1 - \dots - \int_{S_N} F \cdot \nu_N,$$

em que  $\nu_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, N$ , é a normal unitária e exterior à superfície  $S_k$ .

\*\*\*

**Exemplo 12.2.1** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ , e  $D$  o domínio

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Então,  $\operatorname{div} F = 3$ , e

$$\int_D \operatorname{div} F = 3 \operatorname{vol}_3(D) = 4\pi.$$

Do Exemplo 12.1.1, o fluxo do campo  $F$  através da fronteira do conjunto  $D$ , segundo a normal unitária e exterior, é dado por

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = 4\pi,$$

e, então:

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_{\partial D} F \cdot \nu.$$

Note-se que  $D$  é um domínio elementar. De facto,

$$D = \{(x, y, z) : -\sqrt{1-x^2-y^2} < z < \sqrt{1-x^2-y^2}; x^2+y^2 < 1\}$$

$$D = \{(x, y, z) : -\sqrt{1-y^2-z^2} < x < \sqrt{1-y^2-z^2}; y^2+z^2 < 1\}$$

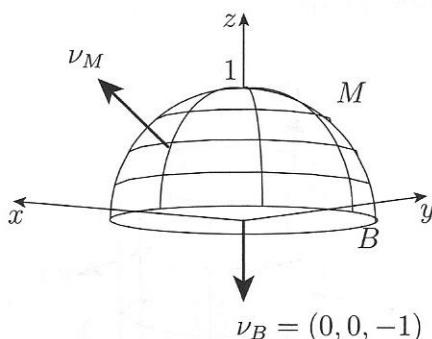
$$D = \{(x, y, z) : -\sqrt{1-x^2-z^2} < y < \sqrt{1-x^2-z^2}; x^2+z^2 < 1\}.$$

**Exemplo 12.2.2** Seja  $M$  a superfície definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\},$$

e  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial dado por

$$F(x, y, z) = (x, y, -z).$$



**Figura 12.9**

Para calcular o fluxo de  $F$  através de  $M$ , segundo a normal que no ponto  $(0, 0, 1)$  tem terceira componente positiva, aplica-se o teorema da divergência ao domínio

$$D = \{(x, y, z) : 0 < z < 1 - x^2 - y^2\}.$$

Facilmente se verifica que  $D$  é um domínio quase regular cuja fronteira é a união de duas superfícies,  $M$  e  $B$ , em que

$$B = \{(x, y, z) : z = 0; x^2 + y^2 < 1\},$$

tal como se ilustra na Figura 12.9.

Como  $\operatorname{div} F = 1$ , do teorema da divergência, vem

$$\operatorname{vol}_3(D) = \int_M F \cdot \nu_M + \int_B F \cdot \nu_B.$$

Mas  $z = 0$  em  $B$ , e a normal unitária e exterior é o vetor  $\nu_B = (0, 0, -1)$ . Assim, em  $B$ , tem-se  $F \cdot \nu_B = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ , ou seja,

$$\int_B F \cdot \nu_B = 0.$$

Portanto,

$$\int_M F \cdot \nu_M = \operatorname{vol}_3(D) = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{1-\rho^2} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

**Exemplo 12.2.3** Seja  $F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$  e  $M$  a superfície cilíndrica dada pela equação  $x^2 + y^2 = 1$ , limitada pelos planos  $z = 1$  e  $z = -1$ , cuja normal tem segunda componente positiva no ponto  $(0, 1, 0)$ .

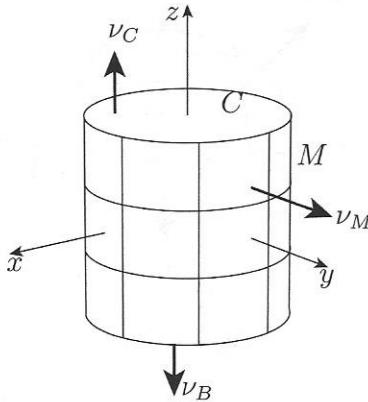


Figura 12.10

Seja  $D$  o domínio elementar limitado por  $M$  e pelos planos  $z = 1$  e  $z = -1$ :

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1 ; -1 < z < 1\}.$$

O integral da divergência de  $F$  em  $D$  pode ser calculado, usando coordenadas cilíndricas:

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_D (y^2 + x^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) dz \right) d\theta = \pi.$$

O fluxo de  $F$  através da fronteira do conjunto  $D$  resulta de três contribuições:

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = \int_M F \cdot \nu + \int_B F \cdot \nu + \int_C F \cdot \nu,$$

em que

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z) : z = -1 ; x^2 + y^2 < 1\} \\ C &= \{(x, y, z) : z = 1 ; x^2 + y^2 < 1\}, \end{aligned}$$

tal como se representa na Figura 12.10.

Para  $B$ , considera-se a parametrização  $g : ]0, 2\pi[ \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, -1),$$

da qual se obtém

$$D_2 g(\rho, \theta) \times D_1 g(\rho, \theta) = (0, 0, -\rho).$$

Para  $C$ , considera-se a parametrização  $h : ]0, 2\pi[ \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$h(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 1),$$

de onde vem

$$D_1 h(\rho, \theta) \times D_2 h(\rho, \theta) = (0, 0, \rho),$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_B F \cdot \nu &= - \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \right) d\theta = 0 \\ \int_C F \cdot \nu &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Da aplicação do teorema da divergência ao domínio  $D$ , resulta

$$\int_M F \cdot \nu = \int_D \operatorname{div} F - \int_B F \cdot \nu - \int_C F \cdot \nu = \pi.$$

**Exemplo 12.2.4** Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  um domínio quase regular, e  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

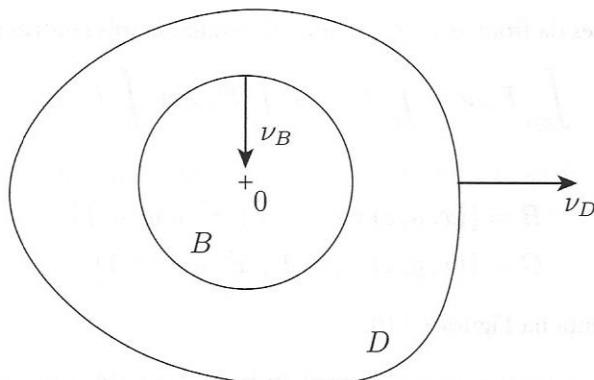


Figura 12.11

Se a origem não se encontrar na fronteira do conjunto  $D$ , então o fluxo do campo vetorial  $F$ , através da fronteira do conjunto  $D$ , segundo a normal exterior, é dado por

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = \begin{cases} 4\pi & \text{se } (0, 0, 0) \in D \\ 0 & \text{se } (0, 0, 0) \notin D. \end{cases}$$

Se  $(0, 0, 0) \notin D$ , então o campo  $F$  é de classe  $C^1$  em  $D$ . Como  $\operatorname{div} F = 0$ , então:

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu = 0.$$

Para o caso em que  $(0, 0, 0) \in D$ , o campo  $F$  não está definido em  $D$  e, portanto, o teorema da divergência não se aplica.

Mas, sendo  $D$  um conjunto aberto, existe uma bola  $B$  de raio  $\varepsilon > 0$ , centrada na origem e contida em  $D$ , tal como se ilustra na Figura 12.11, em que se apresenta apenas um corte do conjunto  $D$  para melhor visualização do problema.

Seja  $S = D \setminus \bar{B}$ . Então,  $F$  é de classe  $C^1$  em  $S$  e, aplicando o teorema da divergência, obtém-se

$$0 = \iint_{\partial D} F \cdot \nu_D + \iint_{\partial B} F \cdot \nu_B,$$

em que  $\nu_D$  e  $\nu_B$  se dirigem, respectivamente, para o exterior de  $D$  e para o interior de  $B$ .

Do Exemplo 12.1.5, sabe-se que

$$\iint_{\partial B} F \cdot \nu_B = -4\pi$$

e, portanto,

$$\int_{\partial D} F \cdot \nu_D = - \int_{\partial B} F \cdot \nu_B = 4\pi.$$

### 12.3 EXERCÍCIOS

1. Calcule o fluxo do campo vetorial  $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z)$ , através do cone definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 0 < z < 1,$$

segundo a normal unitária  $\nu$ , com terceira componente positiva.

2. Calcule o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (x, -y, 0)$ , através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad 0 < y < 1\},$$

orientada com a normal unitária  $\nu$ , tal que  $\nu_2 > 0$ :

- a) Pela definição.
- b) Pelo teorema da divergência.

3. Calcule o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (x, y - 1, -2z + 1)$ , através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, \quad y > 0, \quad z > 0\},$$

orientada com a normal unitária  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ , tal que  $\nu_3 > 0$ .

4. Calcule o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (1 - x^2, yx, xz)$ , através da superfície

$$S = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad x > 0; \quad z > 0\},$$

segundo a normal com terceira componente negativa.

5. Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (xf(z), -yf(z), z),$$

em que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$ . Calcule o fluxo do campo  $F$ , através da superfície

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, \quad 0 < z < 1\},$$

na direção da normal com terceira componente positiva.

6. Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  um domínio regular. Prove a igualdade

$$\iiint_D (\varphi \operatorname{div}(\nabla \psi) - \psi \operatorname{div}(\nabla \varphi)) dx dy dz = 0,$$

em que  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções de classe  $C^2$ , tais que  $\varphi = \psi = 0$  em  $\partial D$ .

7. Seja  $B \subset \mathbb{R}^3$  a bola de raio igual a 1 e centro na origem, e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ , tal que  $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ . Prove a igualdade

$$\iiint_B f = \frac{1}{k(k+3)} \iiint_B \operatorname{div}(\nabla f).$$

8. Seja  $|D| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in D\}$  o diâmetro do conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , e  $(D_k)$  uma sucessão de domínios regulares contendo um dado ponto  $p$ , tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |D_k| = 0$ .

Mostre que

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(D_k)} \iint_{\partial D_k} F \cdot \nu,$$

sendo  $\nu$  a normal unitária e exterior a  $\partial D_k$ .

# 13

---

TEOREMA DE STOKES

### 13.1 SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS

O teorema de Stokes relaciona dois conceitos diferentes, a circulação ou trabalho de um campo vetorial numa linha e o fluxo do respetivo rotacional, através de uma superfície cuja fronteira ou bordo contém a referida linha.

**Definição 13.1.1** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma variedade-2 (superfície), e  $A \subset \mathbb{R}^3$  um aberto, tal que  $S \subset A$ .  $S$  é **orientável**, se existir um campo vetorial contínuo  $\nu : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que, em cada ponto  $x \in S$ , o vetor  $\nu(x)$  é unitário e normal a  $S$ . Também se diz que  $\nu$  define uma orientação em  $S$ .

**Exemplo 13.1.1** Seja  $S$  uma variedade-2 dada pelo conjunto de nível zero de uma função  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , definida num aberto  $A \subset \mathbb{R}^3$ , tal que  $\nabla F(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  em  $S$ . Então, o campo vetorial, definido por

$$\nu(x, y, z) = \frac{\nabla F(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|},$$

é contínuo, unitário e normal a  $S$  em cada ponto  $(x, y, z) \in S$ , ou seja,  $S$  é orientável.

**Exemplo 13.1.2** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma variedade-2 dada pelo gráfico de uma função escalar  $f$ , de classe  $C^1$ , definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ou seja,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y); (x, y) \in D\}.$$

Os vetores

$$t_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) ; \quad t_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

são tangentes a  $S$ , e, portanto, o campo vetorial, definido por

$$\nu(x, y, f(x, y)) = \frac{t_1 \times t_2}{\|t_1 \times t_2\|} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2},$$

é contínuo, unitário e normal a  $S$  em cada um dos seus pontos  $(x, y, f(x, y))$ . Assim, o gráfico de uma função de classe  $C^1$  é uma superfície orientável.

**Exemplo 13.1.3** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma variedade-2, descrita através de uma parametrização  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em que  $T \subset \mathbb{R}^2$ . Então, o campo vetorial definido por

$$\nu(x, y, z) = \frac{D_1g(t) \times D_2g(t)}{\|D_1g(t) \times D_2g(t)\|},$$

onde  $g(t) = (x, y, z)$ , é contínuo, unitário e normal a  $S$  no ponto  $(x, y, z)$ , ou seja,  $S$  é orientável. Note-se que os vetores  $D_1g(t)$  e  $D_2g(t)$  são linearmente independentes, ou seja, o seu produto externo não se anula.

\*\*\*

Assim, uma variedade-2 é localmente orientável. De facto, em torno de cada um dos seus pontos, uma variedade-2 pode ser descrita como um conjunto de nível, como um gráfico ou através de uma parametrização.

**Definição 13.1.2** Diz-se que uma variedade-2,  $S \subset \mathbb{R}^3$ , tem uma orientação induzida pela parametrização  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se for dada pela normal  $\nu$  definida por

$$\nu = \frac{D_1g \times D_2g}{\|D_1g \times D_2g\|}.$$

\*\*\*

**Exemplo 13.1.4** O exemplo de uma **superfície não orientável**, a chamada banda ou fita de Möbius, resulta da identificação de duas arestas opostas de um retângulo, percorridas em sentidos opostos, tal como se ilustra na Figura 13.1.

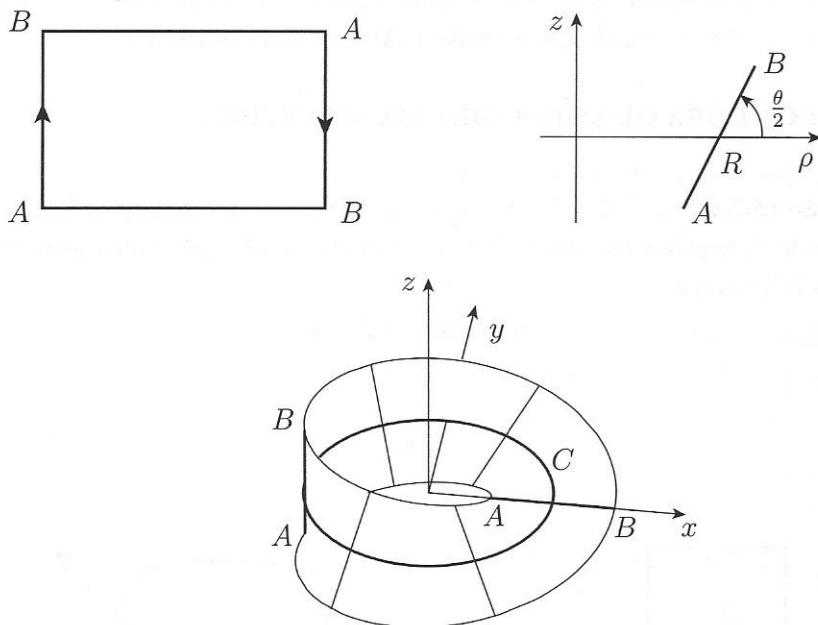
Mais precisamente, seja  $[AB]$  o segmento de reta, definido no plano  $yz$  por

$$z = 0 ; R - 1 < y < R + 1,$$

e  $C$  a circunferência de raio  $R$ , com centro na origem e no plano  $z = 0$ .

A banda de Möbius é a superfície que se obtém deslocando o centro do segmento  $[AB]$  ao longo da circunferência  $C$  e, ao mesmo tempo, fazendo-o rodar em torno do seu centro e no plano vertical que o contém e passa pela origem. Se a deslocação ao longo da circunferência  $C$  for dada pelo ângulo  $\theta$ , a rotação do segmento em torno do seu centro deve ser  $\frac{\theta}{2}$ . Na

Figura 13.1 apresenta-se a banda de Möbius e destaca-se o segmento  $[AB]$  na posição inicial ( $\theta = 0$ ) (horizontal) e na posição em que  $\theta = \pi$  (vertical).



**Figura 13.1** A banda de Möbius

Usando as coordenadas cilíndricas  $(\rho, z)$ , cada ponto do segmento  $[A, B]$  é dado por

$$\rho = R + w \cos \frac{\theta}{2} \quad z = w \sin \frac{\theta}{2},$$

em que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $-1 \leq w \leq 1$ . Então:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = (R + w \cos \frac{\theta}{2}) \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta = (R + w \cos \frac{\theta}{2}) \sin \theta \\ z = w \sin \frac{\theta}{2}, \end{cases}$$

e a função  $g : [-1, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$g(w, \theta) = \left( \left( R + w \cos \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta, \left( R + w \cos \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta, w \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

descreve parametricamente a banda de Möbius.

Assim, tendo percorrido a circunferência  $C$ , ou seja, para  $\theta = 2\pi$ , o segmento  $[AB]$  encontra-se na posição inicial, mas com os extremos trocados. Portanto, se  $\nu$  designar a normal unitária no ponto  $(0, R, 0)$  no instante inicial, então, no instante final e no mesmo ponto, a normal será  $-\nu$ , ou seja, a banda de Möbius não é orientável.

## 13.2 FRONTEIRA OU BORDO DE UMA SUPERFÍCIE

**Definição 13.2.1** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície. Diz-se que um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  pertence ao **interior** de  $S$ , se existir um aberto  $V \subset \mathbb{R}^3$ , um aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e uma parametrização  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tais que

$$p \in g(D) = S \cap V.$$

\*\*\*

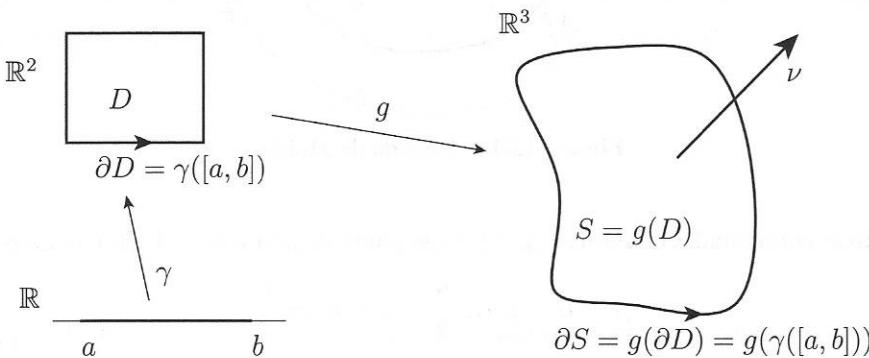


Figura 13.2 Orientação e bordo de uma superfície

Em termos simples, um ponto pertence ao interior de uma superfície  $S$ , se estiver na imagem de alguma parametrização de  $S$ .

Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  um aberto, limitado, cuja fronteira  $\partial D$  é uma linha simples, fechada, percorrida no sentido positivo (contrário ao dos ponteiros do relógio) e descrita por um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  seccionalmente regular.

Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  um aberto, tal que  $\overline{D} \subset A$ , e  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma função de classe  $C^1$ , tal que  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma parametrização da superfície  $S$ .

**Definição 13.2.2** Chama-se **fronteira ou bordo** da superfície  $S$  à linha descrita pelo caminho  $g \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , isto é,

$$\partial S = g(\partial D) = g(\gamma([a, b])).$$

Supondo que a orientação de  $S$  é a induzida pela parametrização  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ou seja, a normal em  $S$  é dada por

$$\nu = \frac{D_1g \times D_2g}{\|D_1g \times D_2g\|},$$

diz-se que a orientação ou sentido de percurso da linha  $\partial S$ , parametrizada por  $g \circ \gamma$ , é **compatível** com a orientação de  $S$ , desde que o caminho  $\gamma$  descreva  $\partial D$  no sentido positivo em  $\mathbb{R}^2$ .

Na Figura 13.2 encontra-se uma ilustração dos conceitos de orientação e bordo de uma superfície.

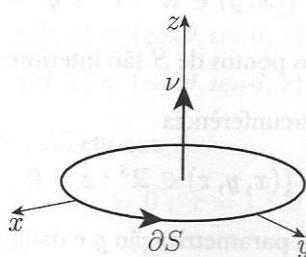
Note-se que, por definição, o bordo da superfície  $S$  é a imagem do caminho  $g \circ \gamma$ , ou seja, é uma linha ou uma coleção de linhas.

\*\*\*

**Exemplo 13.2.1** Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x^2 + y^2 < 1\}$  a porção de plano parametrizada pela função  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$g(x, y) = (x, y, 0),$$

sendo  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ .



**Figura 13.3** Orientação e bordo de um disco

Dado que  $D$  é aberto e  $S = g(D)$ , então os pontos de  $S$  são interiores. A fronteira ou bordo de  $S$  é o conjunto

$$\partial S = g(\partial D) = \{(x, y, z) : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\}.$$

A superfície  $S$  é definida por uma equação,  $z = 0$ , e o respetivo bordo é a linha definida por duas equações,  $z = 0 ; x^2 + y^2 = 1$ .

A orientação de  $S$  induzida por  $g$  é dada pela normal

$$D_1g(x, y) \times D_2g(x, y) = (0, 0, 1).$$

Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a parametrização que descreve  $\partial D$  no sentido positivo, dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Então, a orientação do bordo  $\partial S$  é compatível com a orientação de  $S$ , induzida pela parametrização  $g$ . De facto,

$$g(\gamma(t)) = (\cos t, \sin t, 0),$$

ou seja,  $\partial S$  é percorrido no sentido positivo, e a normal a  $S$  dirige-se no sentido positivo do eixo  $Oz$ , tal como se mostra na Figura 13.3.

**Exemplo 13.2.2** Considere-se a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$$

parametrizada pela função  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por

$$g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2),$$

em que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Sendo  $D$  aberto e  $S = g(D)$ , os pontos de  $S$  são interiores.

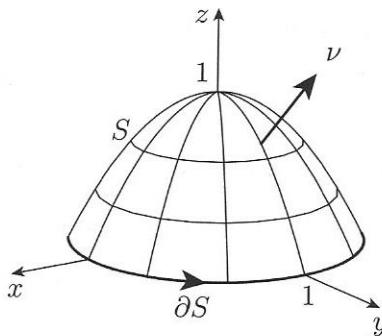
A fronteira ou bordo de  $S$  é a circunferência

$$\partial S = g(\partial D) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\}.$$

A orientação de  $S$  induzida pela parametrização  $g$  é dada pelo vetor

$$\nu = \frac{D_1g(x, y) \times D_2g(x, y)}{\|D_1g(x, y) \times D_2g(x, y)\|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Assim, se  $\partial D$  for percorrida no sentido positivo, então o bordo  $\partial S$  é percorrido no sentido positivo, ou seja, segundo a orientação compatível com a normal  $\nu$ , tal como se ilustra na Figura 13.4.



**Figura 13.4** Orientação e bordo de um parabolóide

De facto, seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a parametrização de  $\partial D$ , definida por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Então:  $g(\gamma(t)) = (\cos t, \sin t, 0)$ , ou seja,  $\partial S$  é percorrido no sentido ilustrado na Figura 13.4.

**Exemplo 13.2.3** Considere-se a superfície cilíndrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 ; 0 < z < 1\}.$$

A descrição paramétrica de  $S$  é dada, em coordenadas cilíndricas, por duas funções:

$$g : ]0, 2\pi[ \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \quad h : ]-\pi, \pi[ \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

definidas por

$$\begin{aligned} g(\theta, z) &= (\cos \theta, \sin \theta, z) \\ h(\theta, z) &= (\cos \theta, \sin \theta, z). \end{aligned}$$

A parametrização  $g$  descreve  $S \setminus N$ , em que

$$N = \{(x, y, z) : y = 0 ; x = 1 ; 0 < z < 1\},$$

e  $h$  descreve  $S \setminus M$ , sendo

$$M = \{(x, y, z) : y = 0 ; x = -1 ; 0 < z < 1\}.$$

No entanto,

$$N = \{(h(0, z) : 0 < z < 1\}$$

$$M = \{(g(\pi, z) : 0 < z < 1\},$$

ou seja, os conjuntos  $M$  e  $N$  estão no interior de  $S$ . Assim, apesar de a fronteira do conjunto  $D = ]0, 2\pi[ \times ]0, 1[$  ser constituída por quatro segmentos de reta, apenas dois deles contribuem para o bordo de  $S$ . Dos outros dois resultam os conjuntos  $N$  e  $M$ .

Então, a fronteira ou bordo de  $S$  é a união das duas circunferências:

$$\Gamma_0 = \{(x, y, z) : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) : z = 1 ; x^2 + y^2 = 1\}.$$

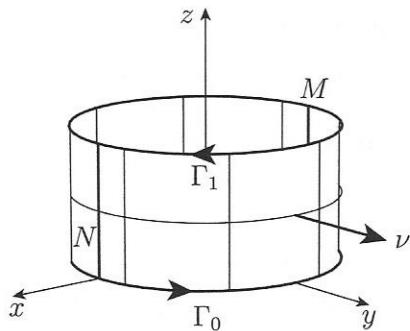
A orientação de  $S$ , induzida pela parametrização  $g$ , é traduzida pela normal

$$\nu = \frac{D_1g(\theta, z) \times D_2g(\theta, z)}{\|D_1g(\theta, z) \times D_2g(\theta, z)\|} = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Dado que  $D_1g = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$  e  $D_2g = (0, 0, 1)$ , então, no ponto  $(0, 1, \frac{1}{2})$  tem-se

$$\nu \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) = (0, 1, 0),$$

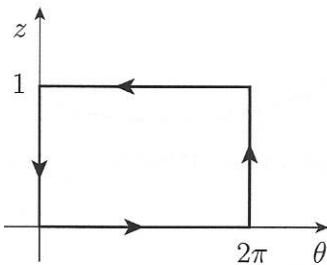
tal como se ilustra na Figura 13.5.



**Figura 13.5** Orientação e bordo de um cilindro

A orientação do bordo de  $S$ , ou seja, das linhas  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ , compatível com a orientação de  $S$ , determina-se percorrendo a fronteira do domínio da parametrização no sentido positivo em  $\mathbb{R}^2$ .

O domínio da parametrização  $g$  é o retângulo  $[0, 2\pi] \times [0, 1]$  e para o bordo de  $S$  contribuem apenas os segmentos de reta correspondentes a  $z = 0$  e a  $z = 1$ , percorridos no sentido positivo, tal como se ilustra na Figura 13.6.



**Figura 13.6**

Para  $z = 0$ , o segmento de reta é descrito por  $\gamma_0(\theta) = (\theta, 0)$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Assim, a circunferência  $\Gamma_0$  é descrita pelo caminho

$$g(\gamma_0(\theta)) = g(\theta, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

ou seja, deve ser percorrida no sentido positivo, ilustrado na Figura 13.5.

Para  $z = 1$ , o segmento de reta é descrito por  $\gamma_1(\theta) = (2\pi - \theta, 1)$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

A circunferência  $\Gamma_1$  é descrita pelo caminho

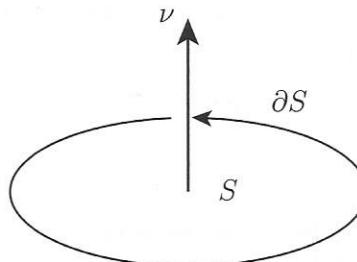
$$g(\gamma_1(\theta)) = g(2\pi - \theta, 1) = (\cos(2\pi - \theta), \sin(2\pi - \theta), 1) = (\cos \theta, -\sin \theta, 1),$$

ou seja, deve ser percorrida no sentido negativo, tal como se mostra na Figura 13.5.

\*\*\*

Na prática, a orientação de uma superfície orientável  $S$  pode ser dada através da célebre **regra da mão direita**. Supondo a mão direita fechada, com o polegar levantado e apoiada sobre  $S$ , a normal  $\nu$  é dada pelo polegar e o sentido de percurso no bordo  $\partial S$  é indicado pelos restantes dedos, tal como se representa na Figura 13.7.

\*\*\*



**Figura 13.7** Regra da mão direita

### 13.3 TEOREMA DE STOKES

Seja  $F$  um campo vetorial de classe  $C^1$  e definido num subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 13.3.1** Ao campo vetorial definido por

$$\text{rot } F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

chama-se **rotacional** do campo  $F$ .

Da definição, é claro que um campo vetorial  $F$ , tal que  $\text{rot } F = 0$ , é um campo fechado. Neste caso também se diz que o campo  $F$  é **irrotacional**.

Na prática, usa-se a seguinte regra mnemónica para definir o rotacional de um campo  $F$ :

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right),$$

em que se simula o cálculo do determinante da matriz que apresenta na primeira linha os vetores da base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , na segunda linha, os símbolos das derivadas parciais em  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e na terceira linha as componentes do campo  $F$ .

Tendo em conta a definição de produto externo de dois vetores, é usual representar o rotacional de um campo vetorial  $F$  pelo símbolo  $\nabla \times F$ .

O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um campo vetorial  $F$ , de classe  $C^1$ , através de uma superfície orientável  $S$  é o trabalho realizado por  $F$  ao longo da fronteira ou bordo de  $S$  cuja orientação é compatível com a de  $S$ . É usual designar este trabalho por **circulação**.

**Teorema 13.3.1 (Stokes)** Seja  $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vectorial de classe  $C^1$ , sendo  $A$  um aberto, e  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma variedade-2, orientável, tal que  $S \cup \partial S \subset A$ . Então:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma \quad (13.1)$$

onde  $\gamma$  é um caminho regular simples que descreve a linha  $\partial S$  com orientação compatível com a de  $S$ .

\*\*\*

O teorema de Stokes pode ser usado para resolver vários tipos de problemas, que serão ilustrados nos exemplos.

- a) Determinar ou calcular o fluxo do rotacional de um campo  $F$  através de uma superfície  $S$  orientável. Da igualdade (13.1), vem

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

e, portanto, deve ser calculado o trabalho de  $F$  ao longo do bordo  $\partial S$ .

Neste caso, o problema está na descrição do bordo da superfície.

- b) Determinar ou calcular o trabalho de  $F$  ao longo de uma linha fechada  $\Gamma$ .

Se existir uma superfície  $S$  e  $N$  linhas fechadas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \cup \Gamma_N$ , tais que

$$\partial S = \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_N,$$

então, da igualdade (13.1), vem

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} F \cdot d\gamma_k,$$

em que  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , é o caminho que descreve a linha  $\Gamma_k$ .

Neste caso, o problema é a determinação de uma superfície cujo bordo contenha a linha  $\Gamma$ .

Note-se que, se  $\text{rot } F = 0$  (campo fechado), então:

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} F \cdot d\gamma_k = 0.$$

- c) Determinar ou calcular o fluxo do rotacional de um campo vetorial  $F$  através de uma superfície  $S$  orientável. Da igualdade (13.1), é claro que, fazendo  $F = \text{rot } A$ , obtém-se

$$\iint_S F \cdot \nu = \iint_S \text{rot } A \cdot \nu = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma.$$

Trata-se de determinar um campo vetorial  $A$ , tal que  $F = \text{rot } A$ , e o bordo da superfície  $S$  para calcular o trabalho de  $A$  em  $\partial S$ .

\*\*\*

**Nota 13.3.1** Se  $F$  for um campo fechado, ou seja,  $\text{rot } F = 0$ , então, pelo teorema de Stokes, o trabalho realizado por  $F$  ao longo de uma linha fechada é nulo. É claro que, para aplicar o teorema de Stokes, a linha deve ser o bordo de uma superfície orientável, e o campo  $F$  deve ser de classe  $C^1$  num conjunto aberto que contenha a superfície.

\*\*\*

Por ser instrutivo apresenta-se a ideia da demonstração do teorema de Stokes para um caso simples em que  $S$  é o gráfico de uma função de classe  $C^2$ .

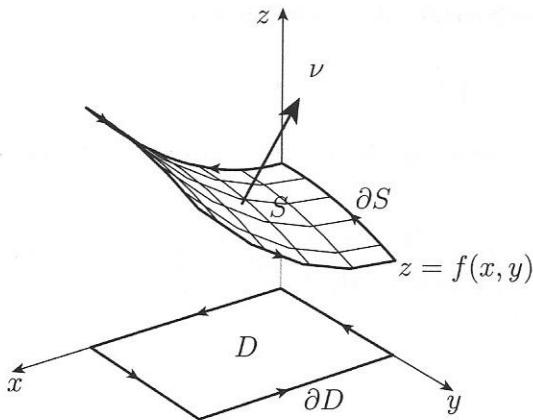
Seja então  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície descrita pela parametrização  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$g(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

em que  $D \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio quase regular e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ , tal como se representa na Figura 13.8.

Neste caso,  $S$  é o gráfico de uma função de classe  $C^2$  e, por isso, é uma variedade-2 orientável.

Seja  $F = (P, Q, R)$  um campo vetorial de classe  $C^1$ .



**Figura 13.8** Orientação e bordo de um gráfico

Note-se que

$$D_1g \times D_2g = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

e, então,

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu = \iint_D \left( -\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Fazendo,

$$A = P + R \frac{\partial f}{\partial x}; \quad B = Q + R \frac{\partial f}{\partial y},$$

obtém-se

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy.$$

Por outro lado, o bordo de  $S$  pode ser descrito pelo caminho regular:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))),$$

em que  $(x(t), y(t))$  é o caminho que descreve a fronteira de  $D$ , tal como se ilustra na Figura 13.8.

Assim,

$$\gamma'(t) = (x'(t), 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t)) + (0, y'(t), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t))$$

e o trabalho de  $F$  em  $\partial S$  é então dado pelo integral

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \oint_{\partial D} Adx + Bdy.$$

Sendo  $D \subset \mathbb{R}^2$  um domínio quase regular, aplicando o teorema de Green ao campo  $(A, B)$ , obtém-se

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} Adx + Bdy = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma,$$

como era pretendido.

\*\*\*

No caso mais geral, em que  $S$  é descrita por uma parametrização (ver Figura 13.2),

$$g(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

tem-se

$$\nu = D_1 g \times D_2 g = (\nu_1, \nu_2, \nu_3),$$

em que

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \nu_2 &= \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \nu_3 &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.\end{aligned}$$

A fronteira  $\partial D$  é descrita pelo caminho  $\gamma$ , e o bordo  $\partial S$  é descrito pelo caminho  $r = g \circ \gamma$ .

Fazendo  $F = (P, 0, 0)$ , o respetivo trabalho em  $\partial S$  é dado por

$$\int_{\partial S} P dx = \int_{\partial D} P \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

e, pelo teorema de Green,

$$\int_{\partial S} P dx = \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dudv.$$

Usando a regra da cadeia e tendo em conta a expressão de  $\nu$ , vem

$$\int_{\partial S} P dx = \iint_D \left( 0, \frac{\partial P}{\partial z}, -\frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot D_1 g \times D_2 g dudv = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu.$$

Fazendo o mesmo para  $F = (0, Q, 0)$  e para  $F = (0, 0, R)$ , tem-se

$$\int_{\partial S} F \cdot dr = \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu.$$

A demonstração do teorema de Stokes numa forma mais geral pode ser vista em ([3], p. 118) ou em ([5], pp. 588-603).

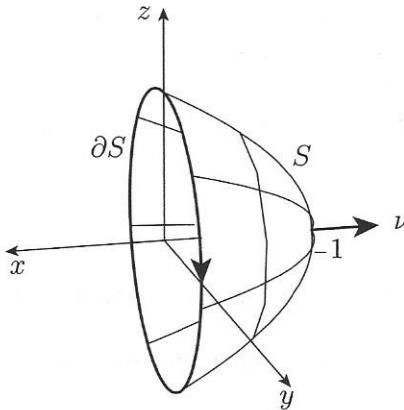
\*\*\*

**Exemplo 13.3.1** Seja  $S$  a superfície definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1 + y^2 + z^2, x \leq 0\}$$

e  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (xz, ze^x, -y).$$



**Figura 13.9** Orientação e bordo de um parabolóide

A superfície  $S$  é o gráfico da função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  definida por

$$f(y, z) = -1 + y^2 + z^2$$

em que  $D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < 1\}$ . Assim,  $S$  é uma superfície orientável.

Sendo o gráfico de  $f$ , pode ser parametrizada pela função  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $g(y, z) = (-1 + y^2 + z^2, y, z)$ , e a respetiva fronteira ou bordo é a linha

$$\partial S = g(\partial D) = \{(x, y, z) : x = 0; y^2 + z^2 = 1\}.$$

Seja  $\nu$  a normal que orienta a superfície  $S$ , e tal que  $\nu(-1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ , como se ilustra na Figura 13.9.

Dado que  $D_1g = (2y, 1, 0)$  e  $D_2g = (2z, 0, 1)$ , então  $D_1g \times D_2g = (1, 2y, 2z)$  e, portanto, no ponto  $(-1, 0, 0)$  tem-se

$$D_1g \times D_2g = (1, 0, 0) = -\nu(-1, 0, 0).$$

Assim, para que a orientação do bordo de  $S$  seja compatível com a normal  $\nu$ , a fronteira  $\partial D$  deve ser percorrida no sentido negativo em  $\mathbb{R}^2$ .

O caminho  $\beta(t) = (\cos t, -\sin t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , descreve  $\partial D$  no sentido negativo e, portanto,  $\partial S = g(\partial D)$  é descrito pelo caminho

$$\gamma(t) = g(\beta(t)) = (0, \cos t, -\sin t).$$

Fica claro que  $\partial S$  é percorrido no sentido negativo, como se mostra na Figura 13.9.

Usando o teorema de Stokes para calcular o fluxo de  $\text{rot } F$  através de  $S$  no sentido da normal  $\nu$ , obtém-se

$$\iint_S \text{rot } F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (0, -\sin t, -\cos t) \cdot (0, -\sin t, -\cos t) dt = 2\pi.$$

**Exemplo 13.3.2** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$$

e  $S$  a semiesfera

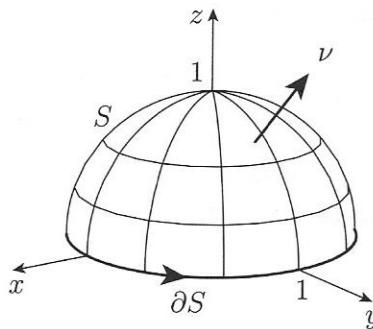
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 ; z > 0\}.$$

Sendo o conjunto de nível zero da função  $H(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , a superfície  $S$  é orientável. A respetiva fronteira ou bordo é a linha

$$\partial S = \{(x, y, z) : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Seja  $\nu$  a normal que orienta a superfície  $S$ , e tal que  $\nu(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ .

Sendo  $S$  orientada pela normal  $\nu$ , pela regra da mão direita, o bordo  $\partial S$  deve ser percorrido no sentido positivo, como se ilustra na Figura 13.10.



**Figura 13.10** Orientação e bordo de uma semiesfera

Assim,  $\partial S$  deve ser descrita pelo caminho

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Usando o teorema de Stokes, obtém-se

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt = -2\pi.$$

**Exemplo 13.3.3** Considere-se o campo vetorial definido no exemplo anterior e a superfície cilíndrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 ; 0 < z < 1\}.$$

A superfície  $S$  é orientável, por ser um conjunto de nível, e a fronteira é a união de duas linhas

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \{(x, y, z) : z = 0 ; x^2 + y^2 = 1\}, \\ \Gamma_1 &= \{(x, y, z) : z = 1 ; x^2 + y^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Seja  $\nu$  a normal em  $S$ , tal que  $\nu(0, 1, 1/2) = (0, 1, 0)$ . Então,  $\Gamma_0$  deve ser percorrida no sentido positivo, e  $\Gamma_1$  deve ser percorrida no sentido negativo, tal como se mostra na Figura 13.5. As respetivas parametrizações devem ser dadas por

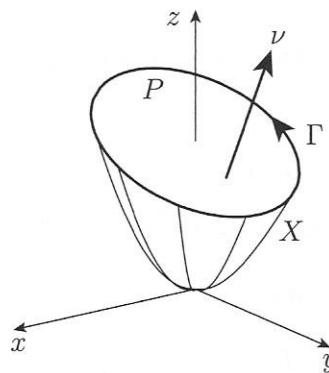
$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &= (\cos t, \sin t, 0), \\ \gamma_1(t) &= (\cos t, -\sin t, 1),\end{aligned}$$

em que  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Pelo teorema de Stokes, tem-se

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu = \int_{\Gamma_0} F \cdot d\gamma_0 + \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = 2\pi - 2\pi = 0.$$

**Exemplo 13.3.4** Considere-se o campo vetorial  $F(x, y, z) = (x^2, e^y - x - z, z^3 - 2x)$  e a linha  $\Gamma$  definida pelas equações  $z = x^2 + y^2$ ;  $y + 2z = 3$ , percorrida no sentido ilustrado na Figura 13.11.



**Figura 13.11** Linha definida por  $z = x^2 + y^2$ ;  $y + 2z = 3$

Pretende-se usar o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo  $F$  ao longo da linha  $\Gamma$ . Para isso, seja  $S$  uma superfície, tal que  $\partial S = \Gamma$  e, então,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu.$$

Da definição da linha  $\Gamma$ , é claro que ela é o bordo do plano  $P$  e do parabolóide  $X$ , representados na Figura 13.11, e definidos por

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + 2z = 3 ; z > x^2 + y^2\}, \\ X &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 ; y + 2z < 3\}. \end{aligned}$$

Facilmente se obtém  $\operatorname{rot} F = (1, 2, -1)$  e, sendo  $P$  um plano, a respetiva normal unitária é o vetor  $\nu = (0, 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ . Assim,  $\operatorname{rot} F \cdot \nu = 0$  em  $P$ , ou seja, para calcular o trabalho do campo  $F$  deve ser escolhido o plano  $P$  para desempenhar o papel de  $S$  e, portanto,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \iint_P \operatorname{rot} F \cdot \nu = 0.$$

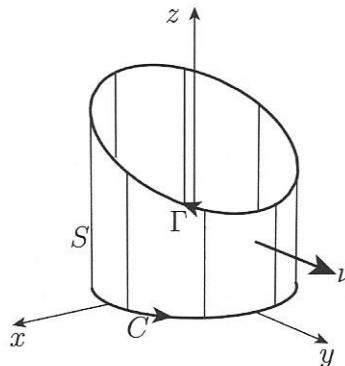
É claro que, pelo teorema de Stokes, o resultado seria o mesmo usando a superfície  $X$ , mas os cálculos não seriam tão simples.

**Exemplo 13.3.5** Considere-se o campo vetorial

$$F(x, y, z) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, h(z) \right),$$

em que a função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ . Os pontos da forma  $(0, 0, z)$ , ou seja, os pontos do eixo  $Oz$  não pertencem ao domínio de  $F$ .

Seja  $\Gamma$  a linha definida pelas equações  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $y + 2z = 3$ , percorrida no sentido ilustrado na Figura 13.12.



**Figura 13.12** Linha definida por  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $y + 2z = 3$

Pretende-se calcular o trabalho realizado pelo campo  $F$  ao longo da linha  $\Gamma$ , usando o teorema de Stokes.

Facilmente se verifica que  $\text{rot } F = 0$ , ou seja, o campo  $F$  é fechado. No entanto, a linha  $\Gamma$  é fechada em torno do eixo  $Oz$  e, para aplicar o teorema de Stokes, ela deveria ser o bordo de uma superfície orientável. É claro que nessa superfície haveria um ponto do eixo  $Oz$  onde o campo  $F$  não está definido.

Considere-se a superfície cilíndrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; 0 < z < \frac{3}{2} - \frac{y}{2}\},$$

que se encontra representada na Figura 13.12. Esta superfície não intersecta o eixo  $Oz$  e, portanto, o teorema de Stokes pode ser aplicado.

É fácil verificar que o bordo de  $S$  é constituído por duas linhas, ou seja,  $\partial S = \Gamma \cup C$ , em que  $C$  é a circunferência definida pelas equações  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $z = 0$  e percorrida no sentido representado na Figura 13.12.

Sendo  $F$  um campo fechado, do teorema de Stokes, vem

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \int_C F \cdot dg = 0 \Leftrightarrow \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = - \int_C F \cdot dg.$$

Seja  $g(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ , o caminho que descreve a circunferência  $C$ . Usando a definição, o integral de linha de  $F$  ao longo da circunferência  $C$  é fácil de calcular:

$$\int_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = 2\pi.$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = - \int_C F \cdot dg = -2\pi.$$

É importante notar que, não sendo conhecida a função  $h$ , o integral de linha em  $\Gamma$  não pode ser calculado pela definição.

O campo vetorial  $F$  é fechado, e a linha  $\Gamma$  é homotópica à circunferência  $C$ , quando percorridas no mesmo sentido. Portanto, o integral de linha de  $F$  é o mesmo nas duas linhas.

### 13.4 POTENCIAL VETORIAL

O teorema de Stokes pode também ser usado para calcular o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície.

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície orientável, e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , definido num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , e tal que  $S \subset \Omega$ . Para usar o teorema de Stokes no cálculo do fluxo de  $F$ , através de  $S$ , segundo a normal unitária  $\nu$ , deverá existir um campo vetorial  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que

$$F = \text{rot } A.$$

Ao campo  $A$  chama-se **potencial vetorial** de  $F$ .

Se tal campo vetorial existir, então:

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \text{rot } A \cdot \nu = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma,$$

em que  $\gamma$  é um caminho que descreve o bordo  $\partial S$  no sentido compatível com a orientação de  $S$ .

É fácil verificar que, dado um campo vetorial  $A$ , se tem

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0.$$

Assim, dado um campo vetorial  $F$ , a condição  $\operatorname{div} F = 0$  é necessária para que exista o respetivo potencial vetorial  $A$ .

Assim,  $\operatorname{div} F = 0$  é condição necessária para usar o teorema de Stokes no cálculo do fluxo de um campo vetorial  $F$ , através de uma superfície  $S$ .

\*\*\*

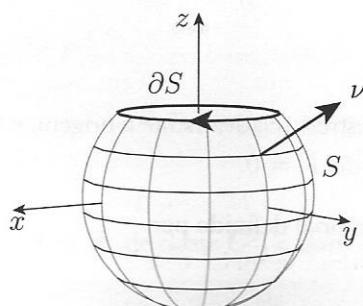
**Exemplo 13.4.1** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

e  $S$  a superfície definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z < h < 1\},$$

em que  $h > 0$ , tal como se representa na Figura 13.13. Note-se que  $\operatorname{div} F = 0$  e que  $S$  é a superfície esférica da qual se retirou a calote esférica correspondente a  $z > h$ .



**Figura 13.13** Orientação e bordo de uma esfera sem a calote polar

Se o campo  $F$  possuir um potencial vetorial  $A$  definido em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ , então, pelo teorema de Stokes, tem-se

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \operatorname{rot} A \cdot \nu = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma,$$

em que  $\gamma$  é um caminho que descreve o bordo  $\partial S$ , compatível com a orientação de  $S$ .

Dado que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  em  $S$ , então:

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (x, y, z) = \operatorname{vol}_2(S),$$

em que  $\operatorname{vol}_2(S)$  é a área de  $S$ . Note-se que  $\operatorname{vol}_2(S)$  depende de  $h$ . Para  $h = 1$ , a superfície  $S$  é a esfera, e, portanto,  $\operatorname{vol}_2(S) = 4\pi$ .

Por outro lado, das propriedades do integral, vem

$$\left| \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \right| \leq M l(\partial S),$$

em que  $l(\partial S)$  é o comprimento de  $\partial S$  e  $M = \max_{\partial S} \|A\|$ . Este máximo existe, porque  $\partial S$  é um conjunto compacto.

Fazendo  $h \rightarrow 1$ , deduz-se o absurdo

$$4\pi = \lim_{h \rightarrow 1} \int_S F \cdot \nu = \lim_{h \rightarrow 1} \int_{\partial S} A \cdot d\gamma = 0,$$

e, portanto, mesmo sendo  $\operatorname{div} F = 0$ , não existe potencial vetorial para o campo  $F$ .

É importante notar que  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  não é um conjunto em estrela.

\*\*\*

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um aberto, em estrela relativamente à origem, e seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , tal que  $\operatorname{div} F = 0$ .

Seja  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo vetorial definido por

$$A(x, y, z) = \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt.$$

Sendo  $A = (A_1, A_2, A_3)$ , então :

$$\begin{aligned} A_1(x, y, z) &= \int_0^1 t [zF_2(tx, ty, tz) - yF_3(tx, ty, tz)] dt \\ A_2(x, y, z) &= \int_0^1 t [xF_3(tx, ty, tz) - zF_1(tx, ty, tz)] dt \\ A_3(x, y, z) &= \int_0^1 t [yF_1(tx, ty, tz) - xF_2(tx, ty, tz)] dt. \end{aligned}$$

Usando a regra de Leibniz e sabendo que  $\operatorname{div} F = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \int_0^1 \left( 2tF_1 + xt^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + yt^2 \frac{\partial F_1}{\partial y} + zt^2 \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^2 F_1(tx, ty, tz)) dt \\ &= F_1(x, y, z). \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} &= F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= F_3(x, y, z), \end{aligned}$$

ou seja,  $F = \operatorname{rot} A$  e, portanto, o campo  $A$  é o potencial vetorial de  $F$  em  $\Omega$ .

**Teorema 13.4.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um aberto em estrela, e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , tal que*

$$\operatorname{div} F = 0.$$

*Então, existe um potencial vetorial de  $F$ , ou seja, existe um campo  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que*

$$F = \operatorname{rot} A.$$

Dado um campo escalar  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , é claro que

$$\operatorname{rot}(\nabla \phi) = 0,$$

ou seja, um campo gradiente é fechado. Se  $A$  for um potencial vetorial de  $F$ , então o campo  $A + \nabla \phi$  é também um potencial vetorial de  $F$ .

Seja  $\phi(x, y, z) = -\int_0^z A_3(x, y, t)dt$ .

É claro que  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = -A_3$  e, portanto, o campo vetorial  $A + \nabla\phi$  é um potencial vetorial de  $F$  com terceira componente nula. Assim, sem perda de generalidade, uma das componentes do potencial vetorial de  $F$  pode ser considerada nula.

Supondo  $A_3 = 0$ , então a equação  $\text{rot } A = F$  traduz-se no sistema de equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_2}{\partial z} &= F_1(x, y, z) \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} &= F_2(x, y, z) \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= F_3(x, y, z),\end{aligned}$$

que pode ser resolvido para determinar funções  $A_1$  e  $A_2$ . De modo semelhante podem ser determinados potenciais vetoriais, com  $A_1 = 0$  ou com  $A_2 = 0$ .

\*\*\*

**Exemplo 13.4.2** Considere-se a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = x^2, 1 < x < 2\},$$

orientada com a normal  $\nu$  cuja primeira componente é negativa, e o campo vetorial dado por  $F(x, y, z) = (2x, -y, -z)$ .

Facilmente se verifica que  $\text{div } F = 0$ . Estando  $F$  definido em  $\mathbb{R}^3$ , que é um conjunto em estrela, existe potencial vetorial de  $F$ , e o teorema de Stokes pode ser usado para calcular o fluxo de  $F$ , através de  $S$ , segundo a direção da normal  $\nu$ .

Um potencial vetorial de  $F$  é dado por

$$\begin{aligned}A(x, y, z) &= \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 t(2tx, -ty, -tz) \times (x, y, z) dt \\ &= \int_0^1 (0, -3txz, 3txy) dt \\ &= (0, -xz, xy).\end{aligned}$$

Outra maneira de determinar um potencial vetorial  $A$  é a de resolver o sistema

$$\text{rot } A = F \iff \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = (2x, -y, -z) \iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z. \end{cases}$$

Nesta forma, não é fácil resolver o sistema. No entanto, dado que o potencial vetorial não é único, fazendo, por exemplo  $A_1 = 0$ , obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = -y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = -z, \end{cases}$$

que pode ser resolvido.

Resolvendo a segunda e a terceira equações, tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 2x \\ A_3(x, y, z) = yx + C_3(y, z) \\ A_2(x, y, z) = -zx + C_2(y, z), \end{cases}$$

e, substituindo  $A_2$  e  $A_3$  na primeira equação, deduz-se que

$$x + \frac{\partial C_3}{\partial y}(y, z) + x - \frac{\partial C_2}{\partial z}(y, z) = 2x.$$

Não havendo mais nenhuma equação para determinar as funções  $C_2$  e  $C_3$ , pode considerar-se  $C_2(y, z) = C_3(y, z) = 0$ .

Um potencial vetorial para  $F$  é então dado por

$$A(x, y, z) = (0, -zx, yx).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_S F \cdot n \, dS = \int_S \text{rot } A \cdot n \, dS = \oint_{\partial S} A \cdot d\gamma.$$

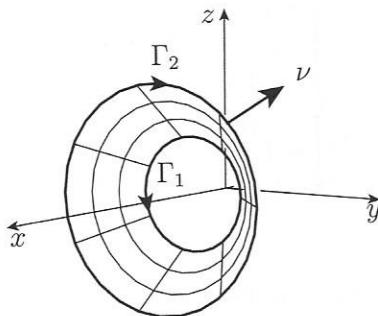
O bordo de  $S$  é constituído por duas linhas:

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, x = 1\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4, x = 2\}.$$

Para que as respetivas orientações sejam compatíveis com a normal  $\nu$ , então  $\Gamma_1$  deve ser percorrida no sentido positivo, e  $\Gamma_2$  no sentido negativo, tal como se ilustra na Figura 13.14.



**Figura 13.14** Orientação e bordo de um cone truncado

$\Gamma_1$  pode ser descrita pelo caminho

$$\gamma_1(t) = (1, \cos t, \sin t), \quad 0 < t < 2\pi,$$

e  $\Gamma_2$  por

$$\gamma_2(t) = (2, 2 \cos t, -2 \sin t), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n \, dS &= \oint_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2 \\ &= \int_0^{2\pi} (0, -\sin t, \cos t) \cdot (0, -\sin t, \cos t) \, dt + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (0, 4 \sin t, 4 \cos t) \cdot (0, -2 \sin t, -2 \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} 8 \, dt = -14\pi. \end{aligned}$$

**Exemplo 13.4.3** Considere-se o campo  $F(x, y, z) = (0, x, 0)$  e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y^2 - z^2; z > 0; x > 0\},$$

orientada com a normal  $\nu$ , com primeira componente positiva.

Dado que  $\operatorname{div} F = 0$  e  $\mathbb{R}^3$  é um conjunto em estrela, o campo  $F$  admite potencial vetorial  $A$ , e o teorema de Stokes pode ser usado para calcular o fluxo de  $F$  através de  $S$ .

O potencial vetorial  $A$  pode ser determinado, resolvendo a equação  $\operatorname{rot} A = F$  ou calculando o integral seguinte:

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \int_0^1 F(tx, ty, tz) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 (0, tx, 0) \times (tx, ty, tz) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 xz, 0, -t^2 x^2) dt \\ &= \left( \frac{1}{3} xz, 0, -\frac{1}{3} x^2 \right). \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes, o fluxo de  $F$ , através de  $S$ , segundo a normal  $\nu$ , é dado por

$$\int_S F \cdot \nu = \int_S \operatorname{rot} A \cdot \nu = \int_{\partial S} A \cdot d\gamma,$$

em que  $\gamma$  é um caminho que descreve o bordo  $\partial S$  compatível com a orientação de  $S$ .

O bordo de  $S$  é constituído por duas linhas:

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 - y^2; z = 0; x > 0\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1; z > 0; x = 0\},$$

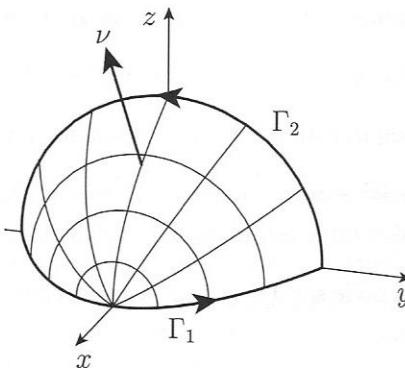
cujas orientações, compatíveis com a normal  $\nu$ , se ilustram na Figura 13.15.

Assim, a linha  $\Gamma_1$  pode ser descrita pelo caminho  $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido por

$$\gamma_1(y) = (1 - y^2, y, 0),$$

e a linha  $\Gamma_2$ , pelo caminho  $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dado por

$$\gamma_2(\theta) = (0, \cos \theta, \sin \theta).$$



**Figura 13.15** Orientação e bordo de um parabolóide truncado

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_S F \cdot \nu &= \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \\
 &= \int_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2 \\
 &= \int_{-1}^1 \left(0, 0, -\frac{(1-y^2)^2}{3}\right) \cdot (-2y, 1, 0) dy + \int_0^\pi (0, 0, 0) \cdot (0, -\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 13.4.4** Considere-se o campo  $F(x, y, z) = (2xz, -xy, xz - z^2)$  e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2; z < 1\},$$

cuja normal  $\nu$  tem terceira componente negativa.

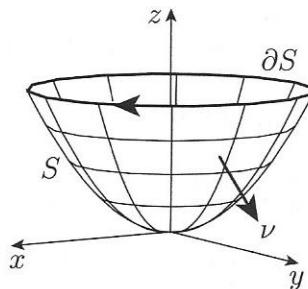
Dado que  $\operatorname{div} F = 0$  e sendo  $\mathbb{R}^3$  um conjunto em estrela,  $F$  admite um potencial vetorial  $A$  que pode ser determinado, resolvendo a equação  $\operatorname{rot} A = F$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= 2xz \\
 \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} &= -xy \\
 \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} &= xz - z^2.
 \end{aligned}$$

O bordo de  $S$  é a circunferência

$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; z = 1\}$$

e pode ser descrita pelo caminho  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $\gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$ , que é compatível com a normal  $\nu$ , tal como se ilustra na Figura 13.16.



**Figura 13.16** Orientação e bordo de um parabolóide

Dado que  $\gamma'(t) = (-\sin t, -\cos t, 0)$ , a componente  $A_3$  é irrelevante para o cálculo do trabalho do campo  $A$  ao longo de  $\partial S$ . Assim, fazendo  $A_1 = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= 2xz \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} &= -xy \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} &= xz - z^2.\end{aligned}$$

Da segunda e da terceira equações, vem

$$\begin{aligned}A_2(x, y, z) &= \frac{x^2}{2}z - xz^2 \\ A_3(x, y, z) &= \frac{x^2}{2}y + K(y, z),\end{aligned}$$

em que  $K$  é uma função que não depende de  $x$ .

Substituindo  $A_2$  e  $A_3$  na primeira equação, obtém-se

$$\frac{\partial K}{\partial y} = 0,$$

e um potencial vetorial de  $F$  pode ser o campo

$$A(x, y, z) = \left( 0, \frac{zx^2}{2} - xz^2, \frac{yx^2}{2} \right).$$

Usando o teorema de Stokes, tem-se

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot \nu &= \int_{\partial S} A \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \left( 0, -\frac{\cos^2 t}{2} - \cos t, -\frac{\cos^2 t}{2} \sin t \right) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos^3 t}{2} + \cos^2 t \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( (1 - \sin^2 t) \frac{\cos t}{2} + \cos^2 t \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos t}{2} - \frac{\sin^2 t \cos t}{2} + \cos^2 t \right) dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

### 13.5 EXERCÍCIOS

- Sejam  $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campos vetoriais, e  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar de classe  $C^1$ . Prove as identidades seguintes:
  - $\nabla \times (\phi F) = \nabla \phi \times F + \phi \nabla \times F$
  - $\nabla \cdot (\phi F) = \phi \nabla \cdot F + \nabla \phi \cdot F$
  - $\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)$ .
- Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial  $F(x, y, z) = (y + \sin x, \cos y, z^3)$  ao longo do caminho  $g(t) = (\cos t, \sin t, \sin 2t)$ , em que  $t \in [0, 2\pi]$ .
- Calcule o fluxo do rotacional do campo  $F(x, y, z) = (x, -z, y)$ , através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}; 0 < x < 1\},$$

segundo a normal com primeira componente positiva.

- Calcule o fluxo do campo  $F(x, y, z) = (x, y - 1, -2z + 1)$ , através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, y > 0, z > 0\},$$

segundo a normal unitária  $\nu$ , tal que  $\nu_3 > 0$ .

5. Seja  $F(x, y, z) = (f(x), -x - z, y - x)$ , em que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$ . Mostre que é nulo o trabalho realizado pelo campo  $F$  ao longo da linha definida por  $x^2 + y^2 = 1 ; x + 2z = 3$ .
6. Calcule o fluxo do campo vetorial  $F(x, y, z) = (-x, -2yz, z^2 + z)$ , através da superfície definida por  $z = \sqrt{x^2 + y^2} ; 1 < z < 2$ , segundo a normal com terceira componente negativa.
7. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície, e  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$  ortogonal a  $S$ , isto é,  $F(x) \in (T_x S)^\perp$ , para qualquer  $x \in S$ . Mostre que  $\text{rot } F$  é um campo vetorial tangente a  $S$  em cada ponto.
8. Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $\phi(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \cos(t^2) dt$  e considere o campo vetorial  $F(x, y, z) = \left( -\phi(y), yz, z + \frac{y^2}{2} \right)$ .
- Descreva linhas fechadas e simples, para as quais o trabalho realizado por  $F$  é nulo.
  - Mostre que se tem  $|\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma| \leq 1$ , sendo  $\Gamma$  a linha definida pelas equações  $x^2 + y^2 = 1 ; z = 1$ .
9. Prove o teorema de Stokes para um campo vetorial da forma  $F = (0, 0, R)$  e para uma superfície  $S$  definida por uma parametrização.
10. Seja  $|D| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in D\}$  o diâmetro do conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , e  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície orientável.

Seja  $(B_k)$  uma sucessão de bolas centradas num ponto  $p \in S$ , tais que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |B_k| = 0$ .

Seja  $S_k = S \cap B_k$ . Mostre que se tem

$$\text{rot } F(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}_2(S_k)} \int_{\partial S_k} F \cdot d\gamma_k,$$

em que  $\gamma_k$  é um caminho regular simples que descreve a linha  $\partial S_k$ , com orientação compatível com a de  $S_k$ .

11. Seja  $V \subset \mathbb{R}^3$  um domínio regular,  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar de classe  $C^1$ , e  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial de classe  $C^1$ , tal que  $B = 0$  em  $\partial V$ . Prove que

$$\int_V \nabla \phi \cdot \nabla \times B = 0.$$

# BIBLIOGRAFIA

- [1] F. R. Dias Agudo. *Cálculo Diferencial em  $\mathbb{R}^n$* . Escolar Editora, 1977.
- [2] M. P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [3] Luís T. Magalhães. *Integrais em Variedades e Aplicações*. Texto Editora, 1993.
- [4] Luís T. Magalhães. *Integrais Múltiplos*. Texto Editora, 1996.
- [5] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman and Company, 2003.
- [6] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 1976.
- [7] J. Spivak. *Calculus on Manifolds*. Addison-Wesley, 1965.

# ÍNDICE REMISSIVO

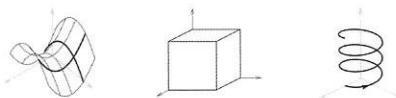
- arco
  - comprimento, 266
  - elemento de, 265
- área, 275
  - elemento de, 274
- calote esférica, 248
- caminho, 74
  - fechado, 288
  - simples, 288
- campo
  - conservativo, 293
  - escalar, 20
  - fechado, 293
  - gradiente, 292
  - vetorial, 22
- centro de massa, 194, 267, 276
- centróide, 194
- cilindro, 9, 36, 144, 220, 238, 247, 359
- circulação, 318, 363
- comprimento, 263, 264, 267
- cone, 10, 37, 223, 250, 279, 336, 376
- conjunto
  - aberto, 16, 35
  - compacto, 37
  - conteúdo nulo, 177
  - corte, 192, 205, 209
- estrela, 304
- exterior, 14, 35
- fechado, 16, 19, 35
- fecho, 16
- fronteira, 14, 35
- interior, 14, 35
- limitado, 37
- simplesmente conexo, 303
- volume, 209
- área, 203
- coordenadas
  - cilíndricas, 147, 237
  - esféricas, 143, 238
  - polares, 139, 236
- derivada
  - direcional, 71
  - função composta, 61
  - função implícita, 112
  - função inversa, 114
  - gradiente, 52, 71, 77
  - matriz hessiana, 91
  - matriz jacobiana, 51
  - ordem superior, 85
  - parcial, 51
  - propriedades, 59
  - regra da cadeia, 64

- divergência, 341  
domínio  
  elementar, 315, 341  
  quase regular, 317, 343  
  
esfera, 12, 36, 106, 141, 276  
  
fluxo, 331, 363  
  
função  
  característica, 189  
  componente, 20  
  composta, 30  
  conjunto de nível, 20, 77  
  contínua, 27, 29  
  diferenciável, 50  
  escada, 165  
  escalar, 3, 19, 20  
  extremo, 39, 87, 89  
  extremos condicionados, 151  
  gráfico, 20  
  implícita, 101, 127  
  integrável, 169  
  inversa, 101  
  máximo, 39  
  mínimo, 39  
  oscilação, 174  
  ponto crítico, 89  
  ponto de estacionaridade, 89  
  vetorial, 3, 20  
  
hiperbolóide, 11, 12, 37, 224, 282  
homotopia, 300, 301  
  
integrais iterados, 184, 203  
integral, 166, 169  
intervalo, 163  
  volume, 165  
  
limite, 29  
linha, 74, 287  
  
massa, 194, 267, 275  
momento de inércia, 195, 267, 276  
mudança de variáveis, 235  
multiplicadores de Lagrange, 153  
  
normal, 77  
  exterior, 340  
  plano, 135  
  reta, 79, 129, 135  
  
parabolóide, 10, 37, 139, 277, 337, 358,  
  367, 379, 380  
  
parametrização  
  cilindro, 147  
  esfera, 144  
  partição, 164  
  plano, 8, 280  
  ponto crítico, 89  
  ponto de estacionaridade, 89  
  potencial  
    escalar, 292  
    vetorial, 372  
  produto externo, 332  
  rotacional, 362  
  
sucessão, 27  
  convergente, 16  
  limite, 16  
  
superfície  
  bordo, 357  
  orientável, 353  
  área, 274  
  
tangente, 74, 288

- plano, 79, 135
- reta, 129
- teorema
  - divergência, 343
  - Fubini, 183, 203
  - fundamental do cálculo, 292
  - função composta, 61
  - função implícita, 111
  - função inversa, 114
  - Gauss, 343
  - Green, 318
  - Lagrange, 88
  - mudança de variáveis, 244
  - regra de Leibniz, 196
  - Schwarz, 86
  - Stokes, 363
  - Weierstrass, 37, 42
- toro, 13, 37, 228, 253, 281
- trabalho, 287
- trajetória, 74
- variedade
  - conjunto de nível, 128, 132
  - espaço normal, 129, 134
  - espaço tangente, 129, 134
  - gráfico, 128, 132
  - multiplicadores de Lagrange, 153
  - parametrização, 129, 132
- volume, 188, 189, 194

#45

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM $R^n$



Este livro destina-se a alunos de engenharia, matemática, física, química e outras áreas das ciências exatas, cobrindo aspectos fundamentais na compreensão dos modelos matemáticos dos fenómenos físicos, químicos, económicos, entre outros.

O livro está estruturado em duas partes. Na primeira estudam-se as noções de continuidade e diferenciabilidade. O gradiente de uma função escalar e a derivada da função composta são os conceitos estruturantes. Na segunda, o conceito de integral de uma função desempenha o papel central. As noções de comprimento, área, volume, fluxo e trabalho são apresentadas nas suas relações com as de linha, superfície e sólido. Os teoremas de Green, Gauss e Stokes são apresentados em versões simples mas elucidativas do ponto de vista analítico e geométrico.

Os conceitos são profusamente ilustrados com exemplos e figuras, que facilitam a respetiva apreensão, especialmente para alunos que têm o primeiro contacto com estas matérias. No fim de cada capítulo, apresenta-se um conjunto de exercícios de dificuldade variável, que complementa a lista de problemas resolvidos ao longo do texto.

O livro pode ser complementado com o manual de exercícios, do mesmo autor, *Exercícios de Cálculo Integral em  $R^n$*  editado na Coleção Apoio ao Ensino.

ISBN 978-989-8481-16-0



9 789898 481160

