INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1
2.º TESTE
#B

LEE ∞ LEGI ∞ LEIC-T ∞ LERC 02|06|2012 09:00–10:30

ESTA PROVA TEM A DURAÇÃO DE 1H30M.*

QUESTÃO 1. — Indique, se existirem, os limites seguintes (não apresente cálculos).

(A) $\lim_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x)$ (B) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

QUESTÃO 2. — Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.

QUESTÃO 3. — O quadro seguinte contém informação relativa ao sinal da derivada de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

x	$-\infty$	0		π	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	n.e.	$-$	0	$-$

3.1 Estude f do ponto de vista da monotonia.

3.2 Indique se existem extremos locais de f e em caso afirmativo diga de que tipo são.

QUESTÃO 4. — Considere uma função f de classe $C^5(\mathbb{R})$ (i.e., f tem derivada de ordem 5 contínua), satisfazendo:

$$\begin{array}{lllll} f'(0)=0 & f''(0)=0 & f^{(3)}(0)=0 & f^{(4)}(0)=1 & f^{(5)}(0)=0 \\ f'(1)=0 & f''(1)=0 & f^{(3)}(1)=0 & f^{(4)}(1)=0 & f^{(5)}(1)=\sqrt{2} \end{array}$$

Indique se algum dos pontos $x = 0$ ou $x = 1$ é um extremo local de f e, em caso afirmativo diga qual o tipo.

QUESTÃO 5. — Considere a função real de variável real $f(x) = e^{x/\pi}$.

5.1 Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $a = 0$.

5.2 Usando a fórmula do resto de Lagrange, mostre que o erro cometido, aproximando f pelo polinómio de Taylor calculado na alínea anterior, não excede uma centésima quando $x \in [0, \pi/3]$.

QUESTÃO 6. — Calcule uma primitiva da função

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}. \quad (\textit{Sugestão}: \text{ use a substituição } e^x = t.)$$

QUESTÃO 7. — Determine uma função diferenciável, não nula, $f(x)$ satisfazendo:

$$f(x)^2 = \int_0^x \frac{t f(t)}{t^2+1}\, dt.$$

QUESTÃO 8. — Determine a área da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2/2$ e $y = 1/(1+x^2)$.

QUESTÃO 9. — Considere a série de potências

$$\sum \frac{(x+1)^n}{n+\sqrt{n}}.$$

Indique para que valores de x esta série converge absolutamente, converge simplesmente ou diverge.

* COTAÇÕES:

1. (A)	[1.0]
1. (B)	[1.0]
2.	[1.0]
3.1	[0.5]
3.2	[0.5]
4.	[1.0]
5.1	[0.5]
5.2	[0.5]
6.	[1.0]
7.	[1.0]
8.	[1.0]
9.	[1.0]