# Equações separáveis

## Definição

As equações diferenciais que se podem escrever na forma

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t), \qquad \text{onde } f(y) \text{ e } g(t) \text{ são funções contínuas dadas,}$$

dizem-se equações diferenciais separáveis.

Note-se que as equações lineares homogéneas são deste tipo, pelo que há equações lineares que são separáveis

Esta equação pode apresentar-se na forma

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(F(y(t))\right) = g(t)$$

onde $F(y)$ é uma primitiva de $f(y)$. A solução vem de resolver, em ordem a $y$, a equação algébrica

$$F(y) = \int g(t)dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## Exemplo

Determinar a solução geral da equação $\cos y \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$.

Para $\operatorname{sen} y \neq 0$, a equação escreve-se na forma

$$\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} \frac{dy}{dt} = -\frac{t}{1+t^2}$$

sendo que a equação é separável com $f(y) = \cos y / \operatorname{sen} y$. Uma primitiva de $f(y)$ é

$$F(y) = \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} \, dy = \log |\operatorname{sen} y|$$

logo as soluções obtém-se de

$$F(y) = -\int \frac{t}{1+t^2} \, dt + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$\log |\operatorname{sen} y(t)| = -\frac{1}{2} \log\left(1+t^2\right) + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

resolvendo em ordem a $y(t)$.

Então

$$|\text{sen}\, y(t)| = e^{-\frac{1}{2}\log(1+t^2)+K}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$\text{sen}\, y(t) = \pm e^{K}\, e^{-\frac{1}{2}\log(1+t^2)}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Note-se que o caso

$$\text{sen}\, y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

corresponde a soluções com $y(t)$ constante. Na sua forma implícita, a solução geral escreve-se

$$\begin{aligned} \text{sen}\, y(t) &= Ce^{-\frac{1}{2}\log(1+t^2)} \\ &= \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e de forma explícita

$$y(t) = \text{arcsen}\left(\frac{C}{\sqrt{1+t^2}}\right) + 2k\pi, \qquad C \in \mathbb{R}$$

ou

$$y(t) = \pi - \text{arcsen}\left(\frac{C}{\sqrt{1+t^2}}\right) + 2k\pi, \qquad C \in \mathbb{R}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

## Exemplo com mudança de variável

Resolver o problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dt} = 2\,\dfrac{y}{t} + \left(\dfrac{y}{t}\right)^2; \qquad y(1) = 1.$

Neste caso a equação não é linear nem é separável pelo que se considera a mudança de variável

$$u(t) = \frac{y(t)}{t} \quad \Leftrightarrow \quad y = u\,t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = u + t\,\frac{du}{dt}$$

A equação, em termos da variável $u = u(t)$ é dada por

$$u + t\,\frac{du}{dt} = 2u + u^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{u+u^2}\,\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

e é separável. Tem-se

$$\frac{1}{u+u^2} = \frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{u+u^2}\,du = \log\left|\frac{u}{u+1}\right|$$

logo a equação a resolver é

$$\frac{d}{dt}\left(\mathsf{log}\left|\frac{u}{u+1}\right|\right)=\frac{1}{t}$$

$$\mathsf{log}\left|\frac{u}{u+1}\right|=\mathsf{log}\,|t|+K, \qquad K\in\mathbb{R}$$

$$\frac{u}{u+1}=\pm e^K|t|=C|t|, \qquad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$u(t)=-1+\frac{1}{1-C|t|}, \qquad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

O caso $C=0$ corresponde ainda a uma solução (constante $u(t)=0$) pelo que a solução geral é

$$u(t)=-1+\frac{1}{1-C|t|}, \qquad C\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y(t)=tu(t)=-t+\frac{t}{1-C|t|}, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Em conta do valor inicial $y(1)=1$ tem-se $C=1/2$, concluindo-se que a solução do PVI é

$$y(t)=-t+\frac{t}{1-\frac{1}{2}t}$$

# Equações exactas e redutíveis a exacta

## Definição

As equações diferenciais exactas são as que se podem escrever na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\,\frac{dy}{dt} = 0, \qquad \text{com } (M,N) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \nabla\phi,$$

para alguma função escalar $\phi = \phi(t,y)$, designada potencial escalar para $(M,N)$.

Recorda-se que um campo $(M,N)$ é um gradiente se e só se é um campo fechado, i.e.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{(pelo menos localmente a um ponto } (t,y)\text{)}$$

Portanto uma equação na forma anterior é exacta se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{(pelo menos localmente a um ponto } (t,y)\text{)}$$

Se a equação é exacta tem-se $(M, N) = \nabla\phi$ e pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}\left(\phi(t, y(t))\right) = \frac{\partial\phi}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = M(t, y) + N(t, y)\,\frac{dy}{dt}.$$

Portanto a equação $M(t, y) + N(t, y)\,\frac{dy}{dt} = 0$ escreve-se

$$\frac{d}{dt}\left(\phi(t, y(t))\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(t, y) = K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

a qual é uma equação algébrica que permite obter $y(t)$.

## Exemplo

Resolver o problema de valor inicial $y^2 + 2ty + (2yt + t^2)\dfrac{dy}{dt} = 0; \qquad y(1) = 1.$

A equação é exacta porque

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + 2ty\right) = 2y + 2t = \frac{\partial}{\partial t}\left(2yt + t^2\right).$$

Um potencial é uma solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = y^2 + 2ty \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2yt + t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \phi(t,y) = y^2 t + t^2 y + C(y) \\ C'(y) = 0 \end{cases}$$

Conclui-se que

$$\phi(t,y) = y^2 t + t^2 y$$

é um potencial.

A solução geral da equação diferencial fica definida implicitamente por

$$y^2 t + t^2 y = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Do valor inicial segue

$$(1, y(1)) = (1, 1) \quad \Rightarrow \quad C = \phi(1, 1) = 2.$$

A solução do PVI pode escrever-se explicitamente de

$$y^2 t + t^2 y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4 + 8t}}{2t},$$

sendo que o valor inicial $y(1) = 1$ impõe a escolha do sinal $+$, i. e.

$$y(t) = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + 8t}}{2t}.$$

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

aula 2 – problemas

**1.** Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais ordinárias

(a) $\varphi' = e^{\varphi - t}$;

(b) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$.

**2.** Determine a solução do problema de valor inicial:

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0, \qquad x(0) = 1$$

## Soluções

**1.** (a) $-\log\,(e^{-t} + C)$; (b) tg $\left(x - \frac{x^2}{2} + C\right)$;

**2.** $x(t) = -t^2 + \sqrt{t^4 - t^3 + 1}$