CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LCEEC, LCEGI, LCEIC (Tagus) e LCERC
$2^{\underline{o}}$ TESTE/ $1^{\underline{o}}$ EXAME (Versão A)

22/Junho/2009 Duração: 1h30m / 3h

Sugestão de resolução:

Para o 2^oTeste responda apenas às questões III e IV

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq \frac{x+2}{2} \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \log(x-2) \leq 0\}$$

a) Mostre que $A \cap B =]2,3]$.

Tem-se

$$|x-1| \leq \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow \left(x \geq 1 \wedge x-1 \leq \frac{x+2}{2} \right) \vee \left(x < 1 \wedge 1-x \leq \frac{x+2}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge x \leq 4) \vee (x < 1 \wedge 1-3x \leq 0) \Leftrightarrow x \in [1,4] \cup [0,1[= [0,4]$$

e

$$\log(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \wedge x-2 \leq e^0 = 1 \Leftrightarrow x \in]2,3]$$

Assim,

$$A = [0,4], \quad B =]2,3] \quad \text{e} \quad A \cap B =]2,3].$$

b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min B$, $\inf(A \cap B)$ e $\max(A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

$\sup A = 4$, não existe $\min B$, $\inf(A \cap B) = 2$ e não existe $\max(A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

2. Calcule (caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim \sqrt[n]{e^n + n^2}$$

Com $a_n = e^n + n^2$, vem

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{e^{n+1} + (n+1)^2}{e^n + n^2} = \lim \frac{e + \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{1 + \frac{n^2}{e^{n+1}}} = e,$$

o que permite concluir que

$$\lim \sqrt[n]{e^n + n^2} = e.$$

3. Por indução, mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Com $n = 0$, temos

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}.$$

Supondo, por hipótese de indução, que o resultado é válido para n, vem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1+1)(n+1+2)} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = 1 - \frac{1}{n+3}\end{aligned}$$

o que significa que o resultado também é válido para $n + 1$.
Provámos então que a igualdade é válida para todo o $n \in \mathbb{N}$.

II

1. Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_x^{x^2} \cos t^2 dt}{\sin x}$

a)

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\log(\cos x)}{x^2}}.$$

Considerando $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$, obtemos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de Cauchy, vem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

b) Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$; aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^4 - \cos x^2}{\cos x} = -1,$$

pelo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{x^2}\cos t^2 dt}{\sin x} = -1.$$

2. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$\phi(x) = \log x + f(\cos x)$$

Detemine as funções ϕ' e ϕ''.

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{x} - f'(\cos x)\sin x\\ \phi''(x) &= -\frac{1}{x^2} - f'(\cos x)\cos x + f''(\cos x)\sin^2 x \qquad \forall x\in\mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Para o 2^o Teste, responda apenas às questões desta página

III

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\dfrac{\arctan^3 x}{1+x^2}$ b) $\dfrac{1}{(x+1)\log(x+1)}$

a) $\mathrm{P}\dfrac{\arctan^3 x}{1+x^2} = \dfrac{\arctan^4 x}{4}$

b) $\mathrm{P}\dfrac{1}{(x+1)\log(x+1)} = \log|\log(x+1)|$

2. Calcule a área do subconjunto do plano delimitado pelas linhas de equação $x = 1$, $x = -1$, $y = x + 1$ e $y = e^{-x}$.

A área vem dada por

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\left[e^{-x}-(x+1)\right]dx+\int_{0}^{1}(x+1-e^{-x})dx &= \left[-e^{-x}-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+x+e^{-x}\right]_{0}^{1}\\ &= -1-(-e-\frac{1}{2}+1)+(\frac{1}{2}+1+e^{-1}-1)\\ &= e+e^{-1}-1\end{aligned}$$

3. Considere a função f dada por

$$f(x)=\int_{1}^{x^2-x} te^{t^3}dt$$

a) Justificando, determine o domínio de f e o domínio de diferenciabilidade de f. Determine a função f'.

A função integranda é contínua em $\mathbb{R}$, logo é integrável em qualquer intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$; então f está definida em $\mathbb{R}$. A função f é a composta de uma função polinomial $(x^2 - x)$ com o integral indefinido com origem em 1 da função contínua te^{t^3}; do Teorema fundamental do Cálculo e da diferenciabilidade da função composta, concluímos que f é diferenciável em todo o seu domínio, isto é, em $\mathbb{R}$.Tem-se

$$f'(x)=(2x-1)\left(x^2-x\right)e^{\left(x^2-x\right)^3}\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

b) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais, se os houver.

Estudando o sinal de f'

		0		$\frac{1}{2}$		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$e^{\left(x^2-x\right)^3}$	$+$		$+$		$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

A função f é estritamente crescente em $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ e em $]1,+\infty[$; é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e em $\left]\frac{1}{2},1\right[$. f tem três pontos de extremo local: $x = 0$ e $x = 1$ são pontos de mínimo local, enquanto que $x = \frac{1}{2}$ é ponto de máximo local.

c) Justificando, mostre que se tem $f([0,1]) = [f(a), f(b)]$,determinando a e b.

Como f é contínua no intervalo $[0,1]$, o Teorema de Weierstrass garante que o conjunto $f([0,1])$ é um intervalo limitado e fechado. De **b),** $f(\frac{1}{2})$ é máximo; além disso,uma vez que

$$f(0) = \int_1^0 te^{t^3}dt = f(1),$$

conclui-se que $f([0,1]) = \left[f(0), f(\frac{1}{2})\right] = \left[f(1), f(\frac{1}{2})\right]$.

IV

1. a) Determine a natureza de cada uma das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{3n+2n^2} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+1}{\pi^{n+2}}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{3n+2n^2}$, série de termos não negativos, é comparável com a série de Dirichet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$; com efeito,

$$\lim \frac{\dfrac{\sqrt{n}+1}{3n+2n^2}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{n^2 + n\sqrt{n}}{3n+2n^2} = \frac{1}{2} \in]0, +\infty[$$

pelo que as séries têm a mesma natureza. Como $\frac{3}{2} > 1$, a série dada é (absolutamente) convergente.

Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+1}{\pi^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\pi^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+2}}$$

o que mostra que a série é soma de duas séries geométricas: a primeira de razão $\frac{-2}{\pi}$ e segunda de razão $\frac{1}{\pi}$. Como $\left|\frac{-2}{\pi}\right| < 1$ e $\left|\frac{1}{\pi}\right| < 1$, ambas são convergentes e a série dada é (absolutamente) convergente.

b) Calcule a soma de uma das séries anteriores.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n+1}{\pi^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\pi^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{n+2}} = \frac{\frac{-2}{\pi^3}}{1-(\frac{-2}{\pi})} + \frac{\frac{1}{\pi^3}}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{-2}{\pi^2(\pi+2)} + \frac{1}{\pi^2(\pi-1)}$$

2. Determine o conjunto de pontos em que é convergente (especificando o tipo de convergência) a seguinte série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n+1} \ .$$

Com $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n+1}$,

$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1} = 2$$

e a série tem raio de convergência igual a 2. Então,

$$\begin{aligned} \text{se } |x-1| &< 2 \Leftrightarrow x \in \,]-1,3[\,, \text{ a série é absolutamente convergente;} \\ \text{se } x &\in \,]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[\,, \text{ a série é divergente.} \end{aligned}$$

Por fim, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n+1} \text{ se } x=3, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} \text{ se } x=-1;$$

em qualquer dos casos, o termo geral não tende para zero, pelo que ambas as séries são divergentes.