Exercícios do capítulo 1

Os símbolos **© ESD** e **© AL** indicam que o exercício foi retirado de uma lista de exercícios da Professora Esmeralda Sousa Dias ou do Professor Amarino Lebre, respectivamente.

1 Álgebra de matrizes

Exercício 1.—Escreva as matrizes $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que satisfazem

(a) $A_{i,j} = i + j$;

(b) $A_{i,j} = \begin{cases} 1 & (\text{se } i+j \text{ é par}) \\ 0 & (\text{se } i+j \text{ é ímpar}) \end{cases}$

(c) $A_{i,j} = (-1)^{i-j}$;

(d) $A_{i,j} = \begin{cases} -1 & (\text{se } i > j) \\ 0 & (\text{se } i = j) \\ 1 & (\text{se } i < j) \end{cases}$

Exercício 2.—Escrever a matriz $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ tal que:

(a) $A_{i,j}$ é o mínimo múltiplo comum de i e j;

(b) $A_{i,j}$ é o máximo divisor comum de i e j.

Exercício 3.—Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Descreva a matriz B onde $B_{i,j} = A_{i,n+1-j}$.

Exercício 4.—Sejam $A, B, D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $E \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos, indique o tipo da matriz resultante. **© ESD**

(a) BA	(b) $AC + D$	(c) $AE + B$	(d) $AB + B$
(e) $E(A + B)$	(f) $E(AC)$	(g) $E^\top A$	(h) $(A^\top + E)D$.

Exercício 5.—Simplifique:

$$\begin{bmatrix} x-y & y-x & z-w \\ w-x & x-y & y-z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x-w & y-x & z-y \\ y-x & z-y & w-z \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.—Resolva (em ordem a X), em função de A e B, a equação matricial:

$$3\big(X + \tfrac{1}{2}A\big) = 5\big(X - \tfrac{3}{4}B\big).$$

Exercício 7.—Sejam,

$$A = \mathbb{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva (em ordem a X) a equação

$$X + A = 2(X - B).$$

Exercício 8.—Comece por calcular o produto:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Depois, exprima em notação matricial as igualdades seguintes:

(a) $x^2 + 9xy + y^2 + 8x + 5y + 2 = 0$;

(b) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta_2} = 1$;

(c) $xy = \alpha^2$;

(d) $y^2 = 4xy$.

Exercício 9.—Calcule A^2 e A^3, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.—Mostre que $(A(B+C))^\top = B^\top A^\top + C^\top A^\top$.

Exercício 11.—Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ uma matriz quadrada. O *traço de A* que se denota $\operatorname{tr}(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal i.e.,

$$\operatorname{tr}(A) = A_{1,1} + A_{2,2} + \cdots + A_{n,n}.$$

Mostre que

(a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;

(b) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$.

Exercício 12.—Duas matrizes A, B anti-comutam se $AB = -BA$. Mostre que as *matrizes de Pauli*:

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

onde $i^2 = -1$, anti-comutam entre si.

Exercício 13.—Consideremos matrizes $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Mostre que se tem $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Exercício 14.—Consideremos a matriz complexa,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^2, A^3, A^4 e obtenha uma exprssão geral para A^n, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercício 15.—Sejam $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrizes quadradas da mesma ordem tais que A e $AB - BA$ comutam. Mostre que para cada natural $n \geq 1$ se tem:

$$A^n B - BA^n = n(AB - BA)A^{n-1}.$$

Exercício 16.—Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e B a matriz cujas colunas são, respetivamente, os vectores:

$$\mathrm{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que

$$A\mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_4, \quad A(\mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_3) = \mathrm{b}_1, \quad A(\mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3) = \mathrm{b}_4, \quad A\mathrm{b}_4 = \mathrm{b}_3.$$

Determine a matriz AB.

Exercício 17.—Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

mas,

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Exercício 18.—Duas matrizes A, B comutam se $AB = BA$ (neste caso A e B têm que ser quadradas da mesma ordem).

(a) Mostre que se A e B comutam então, para quaisquer naturais m, n as matrizes A^m e B^n também comutam.

(b) Mostre que se A e B comutam então a fórmula do binómio de Newton é verdadeira para A e B i.e.,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

(Use indução em n.)

Exercício 19.—Mostre que para cada $\lambda \neq 0$ se tem que $A_\lambda^2 = \mathbb{1}$, onde

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

(Este facto mostra que uma matriz pode possuir uma infinidade de *raízes quadradas*.)

Exercício 20.—Sejam $\mathrm{x} = [a\ b\ c]$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix},$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(a) Mostre que $A^2 = \mathrm{x}^\top \mathrm{x} - \mathbb{1}$.

(b) Prove que $A^3 = A$.

(c) Determine A^4 em função de x.

Exercício 21.—Seja $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\operatorname{tr}(E) = 0$.

(a) Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $E^2 = \lambda \mathbb{1}$.

(b) Use (a) para mostrar que, dadas matrizes $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se tem:

$$(AB - BA)^2 C = C(AB - BA)^2.$$

Exercício 22.—Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja B a matriz definida por:

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4 + \cdots$$

(a soma é infinita). Mostre que apenas um número finito de parcelas na soma acima é diferente de $\mathbb{0}$ e determine B. Mostre ainda que a soma

$$B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \cdots$$

tem apenas um número finito de parcelas diferentes da matriz nula e que a soma em causa é A.

Exercício 23.—Consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}.$$

(b) Prove que

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

(Use indução.)

Exercício 24.—Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denotamos por $[AB]$ o denominado *produto de Lie* das matrizes A e B que se define através de $[A, B] = AB - BA$. Estabeleça as seguintes identidades:

(a) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = \mathbb{0}$;

(b) $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$;

(c) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$;

(d) $[\alpha A, B] = [A, \alpha B] = \alpha[A, B]$.

2 Método de eliminação de Gauss. Resolução de sistemas de equações lineares

Exercício 25.—Considere uma função definida por $f(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$ (onde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$), que aplica o vector $\mathrm{u} = [2\ 1]^\top$ no vector $[3\ 2]^\top$ e o vector $\mathrm{v} = [1\ 1]^\top$ no vector $[5\ 6]^\top$. © ESD

(a) Sem determinar a matriz A calcule $f(\mathrm{u} - 2\mathrm{v})$.

(b) Determine a matriz A e use-a para calcular $f([3\ 2]^\top)$ e $f([1\ 0]^\top)$.

Exercício 26.—Considere os vectores © ESD

$$\mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique se b é combinação linear de u_1, u_2 e u_3 e, em caso afirmativo, indique os coeficientes da combinação linear.

(b) Seja A a matriz que tem como colunas os vectores u_1, u_2 e b, por esta ordem. Use a alínea anterior para determinar um vector

$$\mathrm{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -1 \end{bmatrix}$$

e um escalar δ tais que $A\mathrm{w} = \delta \mathrm{u}_3$.

Exercício 27.—Sejam A e b as matrizes: © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ c \end{bmatrix}$$

onde b é a terceira coluna de uma matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Determine a terceira coluna de AB.

(b) Determine os coeficientes que permitem obter $\mathrm{u} = A\mathrm{b}$ como combinação linear das colunas de A.

Exercício 28.—Resolvendo um sistema de equações lineares, determine um polinómio de grau menor ou igual a 2 cujos valores em $x = 1$, $x = -1$ e $x = 2$ são, respetivamente, 3, 3 e 9. © ESD

Exercício 29.—Resolvendo um sistema de equações lineares, determine valores reais a, b, c por forma a que $ax + by = c$ defina a reta: © ESD

(a) que passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(5, 6)$;

(b) que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(1, 1)$;

(c) que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

Exercício 30.—Resolva cada um dos sistemas de equações lineares correspondente à matriz aumentada indicada. © ESD

$$(a)\quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad (b)\quad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Exercício 31.—Escreva as matrizes aumentadas dos sistemas de equações lineares, não-homogéneos, e resolva-os utilizando o método de eliminação de Gauss. © ESD

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} -2v + 3w = 1 \\ 3u + 6v - 3w = -2 \\ 6u + 6v + 3w = 5 \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 9 \end{cases} \qquad \text{(c)}\quad \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 9 \end{cases}$$

Exercício 32.—Determine a natureza de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares em função dos respectivos parâmetros. © ESD

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \alpha x + \beta z = 2 \\ \alpha x + \alpha y + 4z = 4 \\ \alpha y + 2z = \beta \end{cases} \qquad \text{(b)}\quad \begin{cases} -2z = 0 \\ cy + 4z = d \\ 4x + 5y - 2z = -2 \end{cases} \qquad \text{(c)}\quad \begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = 2 \\ (a-4)z = a - 2 \end{cases}$$

Exercício 33.—Considere o sistema de equações lineares nas variáveis u, v e w representado pela matriz aumentada © AL

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right]$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ. A resposta correcta é:

(A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -5/3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$. e $\mu = -5/3$.

(B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$.

(C) O sistema é possível sse $\lambda \neq 3$; e é impossível sse $\lambda = 3$.

(D) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 3$; é impossível sse $\lambda = 3$ e $\mu = -5/3$; e é indeterminado sse $\lambda = 3$ e $\mu \neq -5/3$.

Exercício 34.—Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z representado pela matriz aumentada © AL

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right]$$

Faça a discussão do sistema em função dos parâmetros λ e μ. A resposta correcta é:

(A) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\mu = 5/2$.

(B) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

(C) O sistema é determinado sse $\lambda \neq 0$; e é indeterminado sse $\lambda = 0$.

(D) O sistema é possível sse $\lambda \neq 0$; e é impossível sse $\lambda = 0$.

Exercício 35.—Considere o seguinte sistema de equações lineares: © AL

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo (x, y, z) solução do sistema, qual o valor da soma $x + y + z$?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

Exercício 36.—Considere o seguinte sistema de equações lineares: © AL

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Sabendo que (x, y, z) com $x = 1$ é solução do sistema anterior, qual o valor do par (y, z)?

A) $(1, 0)$ B) $(3, -1)$ C) $(2, -1/2)$ D) $(-1, 1)$

Exercício 37.—Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ em que $b \in \mathbb{R}^3$, © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. Existe pelo menos um vector b para o qual o sistema $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ não tem soluções;

II. A equação $A\mathrm{u} = \mathbb{0}$ tem como única solução $\mathrm{u} = \mathbb{0}$;

III. Existindo soluções de $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$, o conjunto das soluções é uma recta em $\mathbb{R}^3$;

IV. Existindo soluções de $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$, o conjunto das soluções é um plano em $\mathbb{R}^3$.

Qual é a afirmação verdadeira?

A) I B) II C) III D) IV

Exercício 38.—Considere em $\mathbb{R}^3$ um sistema de equações lineares, dependente de um parâmetro real α, escrito na forma $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ em que © AL

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{b}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

e as seguintes afirmações:

I. O sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é impossível qualquer que seja o valor de α;

II. O sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é impossível pelo menos para um valor de α;

III. O sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é possível qualquer que seja o valor de α;

IV. Para todos os valores de α para os quais o sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}_\alpha$ é possível existe uma única solução.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) II B) I e II C) III D) III e IV

Exercício 39.—Considere a matriz dependente do parâmetro real α, © AL

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Qual das seguintes afirmações relativamente ao sistema de equações $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}$ é verdadeira?

(A) Existe (pelo menos) um valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o sistema é possível e determinado, qualquer que seja $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$.

(B) Existem valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$ tais que o sistema é possível e determinado.

(C) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4$ o sistema é indeterminado.

(D) Existe (pelo menos) um valor de b $\in \mathbb{R}^4$ tal que o sistema é impossível, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 40.— Considere a matriz © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre matrizes elementares E_1, E_2, E_3 tais que $E_3 E_2 E_1 A = \mathbb{1}$.

(b) Escreve A^{-1} como um produto de três matrizes elementares.

(c) Escreva A como produto de três matrizes elementares.

Exercício 41.— Considere a matriz © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Encontre uma expressão para A na forma $A = E_1 E_2 E_3 R$ onde E_1, E_2, E_3 são matrizes elementares e R é uma matriz em escada de linhas.

Exercício 42.— Nos casos seguintes, determine a matriz A: © ESD

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $6A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $(8A^{\top})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $(\mathbb{1} - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 43.—Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e © AL

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) A característica de A_μ em função de μ.

(b) A inversa de A_μ para $\mu = 1$.

Exercício 44.—Considere a matriz © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que A é invertível e calcule A^{-1}.

(b) Resolva a equação: $A^2\mathrm{u} = [1\ 2\ 3]^\top$;

EXERCÍCIO 45.—Considere as matrizes: © AL

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Determine as soluções de $AB\mathrm{u} = \mathrm{b}$.

EXERCÍCIO 46.— Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = A$. © ESD

(a) Mostre que $(\mathbb{1} - A)^2 = (\mathbb{1} - A)$.

(b) Calcule $(\mathbb{1} - 2A)^2$, verifique que $(\mathbb{1} - 2A)$ é invertível.
Calcule $(\mathbb{1} - 2A)^{-1}$.

EXERCÍCIO 47.— Considerem-se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $AB = A - B$. © ESD

(a) Mostre que $(A + \mathbb{1})^{-1} = \mathbb{1} - B$.

(b) Mostre que $AB = BA$.

EXERCÍCIO 48.— Considere a matriz © ESD

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^3, A^{-3} e $A^2 - 2A + \mathbb{1}$.

EXERCÍCIO 49.— Consideremos uma matriz quadrada, A, que verifica a igualdade: © ESD

$$A^3 + A + \mathbb{1} = \mathbb{0}.$$

Mostre que A é invertível e determine a sua inversa (em função de A).

EXERCÍCIO 50.—Considere o sistema de equações lineares dependente do parâmetro $\beta \in \mathbb{R}$, © AL

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & \beta + 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta^2 - 2 \end{bmatrix}$$

e as seguintes afirmações relativamente a este sistema

I. Existe uma única solução, qualquer que seja β.

II. Para $\beta = 1$ existe uma única solução.

III. Para $\beta = 2$ existe uma única solução.

IV. Para $\beta = 2$ não existem soluções.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I, II e III B) II e IV C) II e III D) II.

Soluções da secção 1

Indicações para a resolução do exercício 1.

$$\text{(a)}\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix}\quad \text{(b)}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\quad \text{(c)}\begin{bmatrix}(-1)^0&(-1)^{-1}&(-1)^{-2}\\(-1)^1&(-1)^0&(-1)^1\\(-1)^2&(-1)^1&(-1)^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\quad \text{(c)}\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

Indicações para a resolução do exercício 2.
Análogo ao anterior.

Indicações para a resolução do exercício 3.
Tendo em conta que $B_{i,j} = A_{i,n+1-j}$ tem-se que:

$$B=\begin{bmatrix}A_{1,n}&A_{1,n-1}&\cdots&A_{1,2}&A_{1,1}\\A_{2,n}&A_{2,n-1}&\cdots&A_{2,2}&A_{2,1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\A_{n,n}&A_{n,n-1}&\cdots&A_{n,2}&A_{n,1}\end{bmatrix}.$$

Indicações para a resolução do exercício 4.
(a) BA corresponderia um produto do tipo $(3\times x)\cdot(3\times 2)$ que não se encontra definido.
(b) $AC+D$ (tendo em conta que o produto tem precedência sobre a soma) é da forma $(3\times 2)\cdot(2\times 2)+(3\times 2)$. O produto está definido e resulta numa matriz (3×2) pelo que a soma se encontra igualmente definida.
(c) $AE\in\mathbb{K}^{3\times 3}$ e B não é deste tipo, logo a soma não está definida.
(d) O produto AB não está definido pelo que $AB+B$ também não.
(e) $E(A+B)$ está definida e é do tipo 2×2.
(f) $E(AC)$ está bem definida e é do tipo 2×2.
(g) $E^\top A$ não está definida.
(h) $(A^\top+E)D$ está definida e é do tipo 2×2.

Indicações para a resolução do exercício 5.

$$\begin{bmatrix}w-y&0&0\\w-y&x-z&y-w\end{bmatrix}.$$

Indicações para a resolução do exercício 6.
As leis a que obedecem as operações de adição de matrizes e multiplicação por escalar são aquelas que satisfazem as operações numéricas. Assim, quando estas são as únicas operações envolvidas podemos proceder como se estivésse-

mos a lidar com números:

$$3\left(X + \frac{1}{2}A\right) = 5\left(X - \frac{3}{4}B\right) \Leftrightarrow 3X - 5X = -\frac{3}{2}A - \frac{15}{4}B$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{3}{4}A + \frac{15}{8}B.$$

Indicações para a resolução do exercício 7.

Tem-se:

$$X + A = 2(X - B) \Leftrightarrow -X = -A - 2B$$
$$\Leftrightarrow X = A + 2B.$$

Ou seja,

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Indicações para a resolução do exercício 8.

Tem-se que:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + hy + g \\ hx + by + f \\ gx + fy + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c \end{bmatrix}.$$

Tem-se agora:

(a)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9/2 & 4 \\ 9/2 & 1 & 5/2 \\ 4 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Indicações para a resolução do exercício 9.
Tem-se:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}.$$

Indicações para a resolução do exercício 10.
Tem-se que:

$$(A(B+C)^\top)^\top = (B+C)^\top A^\top = (B^\top + C^\top)A^\top = B^\top A^\top + C^\top A^\top,$$

onde a primeira igualdade se justifica através do uso da propriedade $(XY)^\top = Y^\top X^\top$; e a segunda se justifica pelo emprego da propriedade de distributividade à direita.

Indicações para a resolução do exercício 11.
(a) Tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A+B) &= (A+B)_{1,1} + (A+B)_{2,2} + \cdots + (A+B)_{n,n} = \\ &= (A_{1,1} + B_{1,1}) + (A_{2,2} + B_{2,2}) + \cdots + (A_{n,n} + B_{n,n}) = \\ &= (A_{1,1} + A_{2,2} + \cdots + A_{n,n}) + (B_{1,1} + B_{2,2} + \cdots + B_{n,n}) = \\ &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B). \end{aligned}$$

(b) Tem-se que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\alpha A) &= (\alpha A)_{1,1} + (\alpha A)_{2,2} + \cdots + (\alpha A)_{n,n} = \\ &= \alpha A_{1,1} + \alpha A_{2,2} + \cdots + \alpha A_{n,n} = \\ &= \alpha(A_{1,1} + A_{2,2} + \cdots + A_{n,n}) = \\ &= \alpha \operatorname{tr}(A). \end{aligned}$$

Note-se que em geral não se tem $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$. Isso pode confirmar-se facilmente através do seguinte contra-exemplo: se $\mathbb{1}$ é a matriz identidade de ordem 2 então $\operatorname{tr}(\mathbb{1}) = 2$.

Considerando $A = B = \mathbb{1}$ tem-se $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(\mathbb{1}) = 2$. No entanto $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) = 2 \cdot 2 = 4$ logo, neste caso, $\operatorname{tr}(AB) \neq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Indicações para a resolução do exercício 12.
Verificamos apenas um dos casos os outros são análogos.

$$S_y S_z = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

e,

$$S_z S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, $S_y S_z = -S_z S_y$, como se pretendia.

Indicações para a resolução do exercício 13.
Tem-se que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) = (AB)_{1,1} + (AB)_{2,2} + \cdots + (AB)_{n,n} = \\
&= (A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + \cdots + A_{1,n}B_{n,1}) + \\
&\quad (A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} + \cdots + A_{2,n}B_{n,2}) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad (A_{n,1}B_{1,n} + A_{n,2}B_{2,n} + \cdots + A_{n,n}B_{n,n})
\end{aligned}$$

que, somando coluna a coluna, é igual a

$$\begin{aligned}
&= (A_{1,1}B_{1,1} + A_{2,1}B_{1,2} + \cdots + A_{n,1}B_{1,n}) + \\
&\quad (A_{1,2}B_{2,1} + A_{2,2}B_{2,2} + \cdots + A_{n,2}B_{2,n}) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad (A_{1,n}B_{n,1} + A_{2,n}B_{n,2} + \cdots + A_{n,n}B_{n,n}) \\
&= (B_{1,1}A_{1,1} + B_{1,2}A_{2,1} + \cdots + B_{1,n}A_{n,1}) + \\
&\quad (B_{2,1}A_{1,2} + B_{2,2}A_{2,2} + \cdots + B_{2,n}A_{n,2}) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad (B_{n,1}A_{1,n} + B_{n,2}A_{2,n} + \cdots + B_{n,n}A_{n,n}) \\
&= \operatorname{tr}(BA),
\end{aligned}$$

como se pretendia.

Indicações para a resolução do exercício 14.
A potenciação de matrizes faz-se de acordo com regras semelhantes à potenciação numérica. Em primeiro lugar, tendo em conta as restrições nos tipos das matrizes que tornam a multiplicação bem-definida, *só se consideram potências de matrizes quadradas*. De resto a definição é uma generalização da sua congénere numérica:

$$A^0 = \mathbb{1}, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA = AA^2, \quad A^4 = AAAA = AA^3, \quad \text{etc} \ldots.$$

As regras válidas nas potências matriciais são

1. $A^{m+n} = A^m A^n$;
2. $\left(A^m\right)^n = A^{mn}$;
3. $\alpha A)^m = \alpha^m A^m$.

A regra $A^m B^n = (AB)^n$ que é válida no caso numérico *não é, em geral, válida no caso matricial*. A razão é simples:

$$(AB)^m = \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{m \text{ vezes}}$$

e, para se poder concluir daqui que este produto coincide com $A^m B^m$ seria necessário envolver a propriedade comutativa, algo que sabemos não ser em geral válido, no caso da multiplicação de matrizes.

Relativamente a este exercício propriamente dito tem-se:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}.$$

Observe-se que se $n \geq 3$ se tem $A^n = \mathbb{0}$ porque

$$A^n = A^{(n-3)+3} = A^{n-3}A^3 = A^{n-3}\mathbb{0} = \mathbb{0}.$$

Indicações para a resolução do exercício 15.

A demonstração é por indução.[1] Para $n = 1$ a relação é trivialmente verdadeira pois corresponde a

$$AB - BA = 1(AB + BA)\mathbb{1} = 1(AB - BA)A^0.$$

Admitamos como *hipótese de indução* que para qualquer $1 \leq k \leq n$ se tem $A^kB - BA^k = k(AB - BA)A^{k-1}$. Admitindo esta relação tentaremos então provar a *tese* i.e., que se tem $A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)(AB - BA)A^n$. Pela nossa hipótese de indução a relação é verdadeira para n ou seja podemos assumir que

$$A^nB - BA^n = n(AB - BA)A^{n-1} \tag{1}$$

multiplicando (1) à esquerda por A, obtém-se:

$$A^{n+1}B - ABA^n = nA(AB - BA)A^{n-1} = n(AB - BA)A^n; \tag{2}$$

por outro lado, multiplicando (1) à direita por A, obtém-se:

$$A^nBA - BA^{n+1} = n(AB - BA)A^n. \tag{3}$$

Somando membro a membro as igualdades (2) e (3) obtemos:

$$A^{n+1} - BA^{n+1} + A^nBA - ABA^n = 2n(AB - BA)A^n,$$

ou seja,

$$A^{n+1} - BA^{n+1} = 2n(AB - BA)A^n - (A^nBA - ABA^n).$$

Tem-se então,

$$\begin{aligned} A^{n+1} - BA^{n+1} &= 2n(AB - BA)A^n - (A^nBA - ABA^n) \\ &= 2n(AB - BA)A^n - A(A^{n-1}BA - BA^n) \\ &= 2n(AB - BA)A^n - A(A^{n-1}B - BA^{n-1})A \\ &= 2n(AB - BA)A^n - A((n-1)(AB - BA)A^{n-2})A \\ &= 2n(AB - BA)A^n - (n-1)A(AB - BA)A^{n-1} \\ &= 2n(AB - BA)A^n - (n-1)(AB - BA)A^n \\ &= (n+1)(AB - BA)A^n, \end{aligned}$$

como se pretendia.

[1] O princípio de indução é normalmente formulado da seguinte forma: sendo $\Psi(x)$ é uma proposição acerca de números naturais x, se

(a) $\Psi(p)$ é verdadeira e,
(b) para qualquer $n \geq p$, sempre que $\Psi(n)$ é verdadeira, o mesmo sucede com $\Psi(n+1)$

então, tem-se que $\Psi(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \geq p$.

No entanto o princípio de indução possui outras formulações equivalentes que, consoante as circunstâncias, se podem revelar mais adequadas. Uma dessas formulações é o denominado *princípio de indução completa*. A respectiva formulação é a seguinte: sendo $\Psi(x)$ é uma proposição acerca de números naturais x, se

(a) $\Psi(p)$ é verdadeira e,
(b) sempre que $\Psi(k), \ldots, \Psi(n)$ são verdadeiras, isso implica que $\Psi(n+1)$ é verdadeira

então, tem-se que $\Psi(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \geq p$.

Observe-se que embora esta forma de indução seja logicamente equivalente à primeira, pode nas aplicações revelar-se mais fácil de usar. Observe-se que a hipótese de indução consiste, agora, em assumir que a proposição é verdadeira para todos os naturais que precedem cada n (e não apenas para o seu antecessor).

Indicações para a resolução do exercício 16.
A solução desta questão depende de uma simples observação: *se $AB = C$ então a i-ésima coluna de C obtém-se multiplicando a matriz A pela i-ésima coluna de B.* Feita esta observação tem-se que

$$AB = \left[A\mathrm{b}_1 \mid A\mathrm{b}_2 \mid A\mathrm{b}_3 \mid A\mathrm{b}_4 \right].$$

Ora, $A\mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_4$ e $A\mathrm{b}_4 = \mathrm{b}_3$. Por outro lado tem-se:

$$\mathrm{b}_1 = A(\mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_3) = A\mathrm{b}_2 - A\mathrm{b}_3 \quad \text{e} \quad \mathrm{b}_4 = A(\mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3) = A\mathrm{b}_2 + A\mathrm{b}_3.$$

Adicionando membro a membro as duas igualdades obtemos:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_4) = A\mathrm{b}_2$$

e, subtraindo membro a membro as duas igualdades obtemos:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{b}_4 - \mathrm{b}_1) = A\mathrm{b}_3.$$

Conclui-se assim que:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicações para a resolução do exercício 17.
Basta fazer as contas:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O exercício mostra que a fórmula do binómio de Newton não se aplica geralmente a matrizes, no entanto, pode ser verdadeira para certas potências de certas matrizes mesmo falhando para outras (envolvendo a mesmas matrizes).

Vale ainda a pena mencionar explicitamente as razões podem fazer falhar a igualdade $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Tem-se:

$$\begin{aligned} (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 &\Leftrightarrow (A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow A(A+B) + B(A+B) = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow AB + BA = AB + AB \\ &\Leftrightarrow AB = BA. \end{aligned}$$

Ou seja a fórmula é verdadeira se e só se as matrizes A e B permutam.

Indicações para a resolução do exercício 18.

(a) Mostremos primeiro (usando indução) que $AB^n = B^n A$, para todo o natural n. Para $n = 1$ o resultado é verdadeiro pela hipótese do enunciado (as matrizes comutam). Admitamos que o resultado é verdadeiro para um dado n. Vejamos que permanece válido para $n + 1$. Tem-se $AB^{n+1} = A(B^n B) = (AB^n)B$ e, por hipótese de indução $AB^n = B^n A$ assim, $(AB^n)B = B^n AB = B^n BA = B^{n+1}A$, como se pretendia.

Usando agora indução em m podemos provar o caso geral. Para $m = 1$ estamos perante o resultado que acabámos de estabelecer. Admitamos pois que para um dado m se tem $A^m B^n = B^n A^m$. Então, para $m + 1$ tem-se:

$$A^{m+1} B^n = AA^m B^n = AB^n A^m$$

pela hipótese de indução. Por outro lado, $AB^n A^m = B^n AA^m$, pelo anterior e, finalmente $B^n AA^m = B^n A^{m+1}$. como se pretendia.

(b) O resultado é trivialmente verdadeiro para $n = 1$ pois[2]

$$(A + B)^1 = A + B = \binom{1}{0} A^1 B^0 + \binom{n}{1} A^0 B^1 = \binom{1}{0} A^1 \mathbb{1} + \binom{n}{1} \mathbb{1} B^1.$$

visto que, para qualquer $n \geq 1$ se tem

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1.$$

Suponhamos então que para um dado n se tem

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

e verifiquemos que a relação permanece verdadeira, neste caso, para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
(A + B)^{n+1} &= (A + B)(A + B)^n \\
&= (A + B) \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \\
&= A \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k + B \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n+1-k} B^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^{k+1}.
\end{aligned}$$

Recorrendo às propriedades usuais do símbolo de *somatório* obtemos:[3]

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n+1-k} B^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^{k+1} \\
&\quad = A^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{n+1-k} B^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A^{n-k} B^{k+1} + B^{n+1} \\
&\quad = A^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{n+1-k} B^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} A^{n+1-k} B^k + B^{n+1} \\
&\quad = A^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) A^{n+1-k} B^k + B^{n+1} \\
&\quad = A^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} A^{n+1-k} B^k + B^{n+1} \\
&\quad = \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^{n+1-k} B^k,
\end{aligned}$$

como se pretendia.

[2] Recorde-se que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

onde $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)(n!)$. ($\binom{n}{k}$ é o número de combinações de n objectos tomados k a k e $n!$ é o factorial de n). Recorde-se ainda que por definição, para uma matriz quadrada A se tem:

$$A^0 = \mathbb{1}; \qquad A^{n+1} = A^n A = AA^n.$$

[3] As propriedades interessantes são:

$$\sum_{i=r}^{n} a_i = \sum_{i=r}^{s} a_i + \sum_{i=s+1}^{n} a_i$$

se $r < s < n$, e ainda

$$\sum_{j=r}^{n} a_i = \sum_{j=r+k}^{n+k} a_{i_k}$$

para $k \in Z$.

Indicações para a resolução do exercício 19.
Tem-se que:

$$A_\lambda^2 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+\lambda\lambda^{-1} & \lambda 0 + 0\lambda \\ \lambda^{-1}0 + 0\lambda^{-1} & \lambda^{-1}\lambda + 0 \end{bmatrix} = \mathbb{1}.$$

Ou seja, a matriz identidade pode possuir infinitas raízes quadradas i.e., matrizes A tais que $A^2 = \mathbb{1}$.

Indicações para a resolução do exercício 20.
(a) Calculando:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(b^2+c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2+c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

Por outro lado:

$$\mathrm{x}^\top \mathrm{x} - \mathbb{1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{bmatrix}$$

As duas matrizes são iguais porque, por hipótese $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
(b) Tem-se:

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{bmatrix} = -A$$

(Acima deixámos o cálculo do produto a cargo do leitor, mas as contas são simples.)
(c) Tendo em conta o anterior tem-se que:

$$A^4 = A^3 A = -A^2 = \mathbb{1} - \mathrm{x}^\top \mathrm{x}.$$

Indicações para a resolução do exercício 21.
O traço de uma matriz quadrada E, que se denota $\mathrm{tr}(E)$ é a soma dos elementos da diagonal principal. Se $\mathrm{tr}(E) = 0$ neste caso em que a matriz é 2×2 isso significa que os dois elementos da diagonal principal são simétricos. A matriz E é então da forma

$$E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix},$$

assim:

$$E^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab-ba \\ ca-ac & a^2+bc \end{bmatrix} = (a^2+bc)\mathbb{1}.$$

Pelo que basta considerar $\lambda = a^2 + bc$.
(b) Comecemos por observar que $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$. Como vimos no exercício 13, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Por outro lado, no exercício 11 vimos que $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$ e $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\mathrm{tr}(A)$. Tem-se assim que $\mathrm{tr}(AB-BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$.

Pelo exercício anterior temos que existe λ tal que $(AB - BA)^2 = \lambda\mathbb{1}$. Assim sendo,

$$(AB - BA)^2 C = \lambda\mathbb{1}C = \lambda C\mathbb{1} = C(\lambda\mathbb{1}) = C(AB - BA)^2.$$

Indicações para a resolução do exercício 22.
Calculando as primeiras potências de A obtemos que $A^4 = \mathbb{0}$, desta forma, para qualquer $n \geq 4$ tem-se $A^n = A^4 A^{n-4} = \mathbb{0}A^{n-4} = \mathbb{0}$. Do cálculo dessas potências resulta ainda que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se assim que

$$B = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2/2 & a^3/3 \\ 0 & 0 & a & a^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O resto da resolução é semelhante à primeira parte: o cálculo das primeiras potências de B mostra que $B^4 = \mathbb{0}$ pelo que

$$B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \frac{1}{4!}B^4 + \cdots = B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3,$$

e a igualdade pretendida pode ser verificada calculando a soma finita.

Indicações para a resolução do exercício 23.
(a) Tem-se:

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)(\cos\phi) - (\sin\theta\sin\phi) & (\cos\theta)(\sin\phi) + (\sin\theta)(\cos\phi) \\ -((\cos\theta)(\sin\phi) + (\sin\theta)(\cos\phi)) & (\cos\theta)(\cos\phi) - (\sin\theta)(\sin\phi) \end{bmatrix}$$

Tendo em contas as fórmulas trigonométricas[4] obtemos que

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}.$$

(b) O caso $n = 1$ é evidente. Admitamos como hipótese de indução que para um dado n se tem

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

[4] As fórmulas em questão são as seguintes:
$\sin(\theta \pm \phi) = (\sin\theta)(\cos\phi) \pm (\cos\theta)(\sin\phi)$
$\cos(\theta \pm \phi) = (\cos\theta)(\cos\phi) \mp (\sin\theta)(\sin\phi)$.

e verifiquemos que também se tem então que:

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}$$

Temos:

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n\theta+\theta) & \sin(n\theta+\theta) \\ -\sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ -\sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}$$

recorrendo uma vez mais às fórmulas trigonométricas.

Indicações para a resolução do exercício 24.
(a) Tem-se que

$$\begin{aligned} &[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = \\ &\quad = (AB-BA)C - C(AB-BA) + (BC-CB)A - A(BC-CB) + (CA-AC)B - B(CA-AC) \\ &\quad = ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB + CAB - ACB - BCA + BAC \\ &\quad = (ABC-ABC) + (BAC-BAC) + (CAB-CAB) + (CBA-CBA) + (BCA-BCA) + (ACB-ACB) = \mathbb{0}. \end{aligned}$$

(b) Tem-se:

$$[A+B,C] = (A+B)C - C(A+B) = AC + BC - CA - CB = (AC-CA) + (BC-CB) = [A,C] + [B,C].$$

(c) Tem-se:

$$[A,B+C] = A(B+C) - (B+C)A = AB + AC - BA - CA = (AB-BA) + (AC-CA) = [A,B] + [A,C].$$

(d) Temos que:

$$[\alpha A, B] = (\alpha A)B - B(\alpha A) = \alpha AB - \alpha BA = \alpha(AB-BA) = \alpha[A,B].$$

Por outro lado,

$$[A, \alpha B] = A(\alpha B) - (\alpha B)A = \alpha AB - \alpha BA = \alpha(AB-BA) = \alpha[A,B].$$

Soluções da secção 2

Indicações para a resolução do exercício 25.

(a) Tendo em conta a definição de f tem-se:

$$f(\mathrm{u}-2\mathrm{v}) = A(\mathrm{u}-2\mathrm{v}) = A\mathrm{u} - 2A\mathrm{v} = f(\mathrm{u}) - 2f(\mathrm{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(b) Necessariamente $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Assim

$$A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}.$$

Além disso sabemos que:

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+z \\ 2y+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente,

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Pelo que podemos determinar a matriz A resolvendo o sistema:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \end{array}.$$

Indicações para a resolução do exercício 26.

(a) b é combinação linear $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$ se e só se o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, onde A é a matriz cujas colunas são $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$, for possível. Ou seja, sse o sistema

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{u}_3 & \mathrm{b}_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

é possível.

(b) Tem-se que:

$$A\mathrm{w} = \delta\mathrm{u}_3 \Leftrightarrow a\mathrm{u}_1 + b\mathrm{u}_2 - \mathrm{b} = \delta\mathrm{u}_3 \Leftrightarrow a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \delta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

ou seja (a, b, δ) é uma solução do sistema $\bar{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ onde $\bar{A}$ é a matriz cujas colunas são $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2$ e $-\mathrm{u}_3$, i.e. uma solução do sistema:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{u}_1 & \mathrm{u}_2 & -\mathrm{u}_3 & \mathrm{b} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]. \end{array}$$

Indicações para a resolução do exercício 27.

(a) A terceira coluna de AB obtém-se multiplicando A pela terceira coluna de B, ou seja é Ab.

(b) Sabemos que um vector u é combinação linear das colunas de uma matriz A se e só se o sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{u}$ for possível, sendo que um qualquer vector solução, fornece os coeficientes de uma tal combinação linear. Neste caso, tendo-se $A\mathrm{b} = \mathrm{u}$ já se tem que b é solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{u}$, ou seja, b é o vector com os coeficientes pretendidos.

Indicações para a resolução do exercício 28.

A forma geral de um polinómio de grau ≤ 2 é $p(x) = ax^1 + bx + c$. Queremos então determinar a, b, c de modo que $p(1) = p(-1) = 3$ e $p(2) = 9$. Ou seja queremos determinar a, b, c de modo que

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (nas variáveis a, b e c) podemos agora determinar o polinómio pretendido.

Indicações para a resolução do exercício 29.

Consideramos a alínea (a) as outras são totalmente análogas. Os pontos $(2, 3)$ e $(5, 6)$ têm que ser soluções da equação $ax + by = c$. Ou seja tem que se ter:

$$\begin{cases} 2a + 3b = c \\ 5a + 6b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ 5a + 6b - c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo estes sistema de equações (nas variáveis a, b e c) podemos obter uma solução para o problema.

Nota: O sistema em causa é indeterminado e as soluções podem ser expressas em função de c, pelo que escolhendo, por exemplo, $c = 1$ se obtém uma equação concreta para a recta pretendida. Esta situação é perfeitamente normal já que uma recta possui infinitas equações daquela forma: se $\alpha \neq 0$, as equações $ax + by = c$ e $(\alpha a)x + (\alpha b)y = \alpha c$ são equivalentes.

Indicações para a resolução do exercício 30.
Qualquer uma das matrizes já se encontra em escada por linhas. Consideramos a alínea (b). Temos duas hipóteses. Podemos passar imediatamente à forma de sistema e resolvê-lo (considerando as variáveis x, y, z, w:

$$\begin{cases} x + 8z - 5w = 6 \\ y + 4z - 9w = 3 \\ z + w = 2 \end{cases}$$

ou então prosseguir com a utilização de operações elementares, eliminando todas as posições acima dos pivôs, coisa que iremos fazer pois, como se verá, produz um sistema equivalente mas com equações mais simples:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{-4L_3+L_2\to L_2 \\ -8L_3+L_1\to L_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -13 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Obtemos assim o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 13w = -10 \\ y - 13w = -5 \\ z + w = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13w - 10 \\ y = 13w - 5 \\ z = -w + 2 \end{cases}$$

Cuja solução é $\{(13w - 10, 13w - 5, -w + 2, w) \mid w \in \mathbb{R}\}$.

Indicações para a resolução do exercício 31.
As alíneas são semelhantes, a título de exemplo consideramos a alínea (c). A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3 \\ -7L_1+L_4\to L_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -7L_2+L_4\to L_4}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/2)L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A esta matriz corresponde o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ y + w = -2 \\ u + 2v - 3w = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - w \\ y = -2 - w \\ u = 1 - 2v + 3w \end{cases}$$

Desta forma, o conjunto solução do sistema é:

$$\{(1-w, -2-w, 1-2v+3w, v, w) \mid v, w \in \mathbb{R}\}.$$

Indicações para a resolução do exercício 32.
As matrizes aumentadas de cada um dos sistemas é:

$$\text{(a)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \qquad \text{(b)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & c & 4 & d \\ 4 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right] \qquad \text{(c)}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array}\right]$$

(a) Procedendo à eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 4 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-4 \end{array}\right]$$

Tem-se então que se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 2$ então o sistema é possível e determinado.
Se $\alpha = 0$ então a matriz em causa é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 4-\beta & 4 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-4 \end{array}\right]$$

e, neste caso, se $\beta = 0$ então o sistema é impossível. Se $\beta \neq 0$ então, podemos prosseguir a eliminação de Gauss de acordo com o seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 4-\beta & 4 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-4 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/\beta)L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2/\beta \\ 0 & 0 & 4-\beta & 4 \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta-4 \end{array}\right] \xrightarrow[(2-\beta)L_1+L_3\to L_3]{(\beta-4)L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2/\beta \\ 0 & 0 & 0 & (6\beta-8)/\beta \\ 0 & 0 & 0 & (\beta^2+4)/\beta \end{array}\right]$$

e o sistema é impossível pois, $(\beta^2+4)/\beta \neq 0$.

Deixamos (b) ao cuidado do leitor e consideramos desde já a alínea (c).
Procedendo à eliminação de Gauss temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & a-2 \end{array}\right] \xrightarrow{(4-a)L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-a \end{array}\right]$$

pelo que o sistema é possível e indeterminado se $a = 6$ e impossível caso contrário.

Indicações para a resolução do exercício 33.
Procedendo à eliminação de Gauss obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{(-2/5)L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \\ 0 & 6/5 & -2\lambda/5 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{5L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \\ 0 & 6 & -2\lambda & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{-6L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \mu \\ 0 & 0 & 6-2\lambda & -10-6\mu \end{array}\right]$$

Assim a resposta correcta é a (A).

Indicações para a resolução do exercício 34.
Fazendo a eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & \mu \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_2+L_1\to L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 5 & \mu-2 \\ 2 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 5 & \mu-2 \\ 0 & -25 & -13 & 5-\mu \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right]$$

Ou seja, a resposta correcta é a (C).

Indicações para a resolução do exercício 35.
A solução do sistema é $(-1, 1, 5)$, logo a resposta correcta é a (C).

Indicações para a resolução do exercício 36.
A solução do sistema é $(1, 1, 0)$, logo a resposta correcta é a (A).

Indicações para a resolução do exercício 37.
Procedendo à respectiva eliminação de Gauss constata-se que a característica de A é 3. Desta forma o sistema $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ será possível e determinado em todos os casos. Aúnica resposta correcta é assim a resposta II.

Indicações para a resolução do exercício 38.
Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 3\alpha & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[-7L_1+L_3\to L_3]{-4L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & 3\alpha-21 & \alpha-7 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 3\alpha-9 & \alpha-3 \end{array}\right]$$

Assim, se $\alpha \neq 3$ o sistema é possível e determinado. Se $\alpha = 3$ o sistema é possível e indeterminado. Assim apenas a resposta III é correcta.

Indicações para a resolução do exercício 39.
Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema $A_\alpha \mathrm{u} = \mathrm{b}$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & b_2 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & b_3 \\ 1 & 0 & \alpha & 1 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_3-3b_1 \\ 0 & -2 & \alpha-2 & -1 & b_4-b_1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ (-2/3)L_2+L_4\to L_4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 2 & b_1\\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2-b_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-2b_1-b_2\\ 0 & 0 & \alpha-2 & -1/3 & b_4-2b_2/3-7b_1/3\end{array}\right] \xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 2 & 2 & b_1\\ 0 & -3 & 0 & -1 & b_2-b_1\\ 0 & 0 & \alpha-2 & -1/3 & b_4-2b_2/3-7b_1/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-2b_1-b_2\end{array}\right]$$

O sistema nunca é possível e determinado e se $b_3-2b_1-b_2\neq 0$ o sistema é impossível. A única hipótese correcta é assim a (D).

Indicações para a resolução do exercício 40.

As descrição das matrizes elementares é feita na secção 2.2.2 dos apontamentos teóricos. Reproduz-se aqui a parte relevante para a resolução deste exercício e do seguinte.

Denotamos por $E^m_{ij}\in\mathbb{K}^{m\times m}$ a matriz, que é como a matriz identidade excepto que com as linhas i e j da identidade trocadas entre si. Denotamos por $E^m_{ij}(\alpha)\in\mathbb{K}^{m\times m}$ a matriz que é como a matriz identidade excepto que a entrada i,j é α. Finalmente, denotamos por $E^m_i(\alpha)\in\mathbb{K}^{m\times m}$ (para $\alpha\neq 0$) a matriz que é como a identidade excepto que na i-ésima posição da diagonal está o escalar α. Tem-se então o seguinte:

(1) $E^m_{ij}A=B$, onde B é a matriz que resulta de A trocando as linhas i e j entre si.

(2) $E^m_i(\alpha)A=B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a linha i de A por $\alpha A_{i,*}$, i.e. multiplicando a linha i de A pelo escalar $\alpha\neq 0$.

(3) $E^m_{ij}(\alpha)A=B$, onde B é a matriz que resulta de A substituindo a linha i de A por $A_{i,*}+\alpha A_{j,*}$, i.e. adicionando à linha i de A a linha j multiplicada por α.

As matrizes elementares são todas invertíveis e não é difícil constatar que $(E^m_{ij})^{-1}=E^m_{ij}$; $(E^m_i(\alpha))^{-1}=E^m_i(\alpha^{-1})$; e $(E^m_{ij}(\alpha))^{-1}=E^m_{ij}(-\alpha)$. Em particular, as inversas das matrizes elementares são matrizes elementares do mesmo tipo.

Como se descreveu a multiplicação à esquerda por uma matriz elementar corresponde à aplicação de uma das operações do método de eliminação de Gauss. Assim sendo: (a) Procedendo à eliminação de Gauss, obtemos:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{5L_1+L_2\to L_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\leftarrow L_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{(-1/2)L_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ora a primeira operação aplicada corresponde à matriz $E^3_{2,1}(5)$ a segunda à matriz $E^3_{2,3}$ e a terceira à matriz elementar $E^3_2(-1/2)$. Assim tem-se:

$$E^3_2(-1/2)E^3_{2,3}E^3_{2,1}(5)A=\mathbb{1},$$

como se pretendia.

(b) Da relação anterior resulta que

$$A^{-1}=E^3_2(-1/2)E^3_{2,3}E^3_{2,1}(5).$$

(c) Tem-se que

$$A = (A^{-1})^{-1} = (E_2^3(-1/2)E_{2,3}^3 E_{2,1}^3(5))^{-1}.$$

Como a inversa de um produto é o produto das inversas pela ordem inversa resulta que:

$$A = (E_{2,1}^3(5))^{-1}(E_{2,3}^3)^{-1}(E_2^3(-1/2))^{-1} = E_{2,1}^3(-5)E_{2,3}^3 E_2^3(1/2).$$

Indicações para a resolução do exercício 41.

Tal como no exercício anterior temos que proceder ªa eliminação de Gauss para obter a sequência de matrizes elementares envolvida.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_1+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

A sequência de matrizes elementares que corresponde às operações elementares usadas é então $E_{3,2}^3(-1)E_{3,1}^3(2)E_{1,2}^3$, ou seja tem-se

$$E_{3,2}^3(-1)E_{3,1}^3(2)E_{1,2}^3\, A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Indicações para a resolução do exercício 42.

(a) Basta observar que $A = (A^{-1})^{-1}$.

(b) Neste caso,

$$6A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \left(\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

ou seja,

$$A = 6\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(c) Tem-se:

$$(8A^\top)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 8A^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right)^\top$$

Como se tem que $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ obtém-se finalmente que

$$A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(d) Neste caso

$$(\mathbb{1} - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{1} - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ou seja,

$$A = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\right)$$

Indicações para a resolução do exercício 43.

(a) A característica de A_μ corresponde ao número de pivôs de uma qualquer matriz em escada de linhas que resulte de A_μ através do método de eliminação de Gauss. Assim sendo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \mu \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & \mu^2 & \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{-3L_1+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mu^2-12 & -2\mu \end{bmatrix} \xrightarrow{(12-\mu^2)L_2+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \mu \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 24-2\mu-2\mu^2 \end{bmatrix}$$

Concluímos assim que $\mathrm{Car}(A_\mu) = 2$ se $\mu^2+\mu-12 = 0$ e $\mathrm{Car}(A_\mu) = 3$ se $\mu^2+\mu-12 \neq 0$.

(b) Considerando $\mu = 1$ e recorrendo ao algoritmo de cálculo da inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1\S & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3L_1+L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{11L_2+L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 11 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/20)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/20 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_3+L_1 \to L_1]{-2L_3+L_2 \to L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & -11/20 & 23/20 & -1/20 \\ 0 & 1 & 0 & -2/20 & 6/20 & -2/20 \\ 0 & 0 & 1 & 11/29 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right] \xrightarrow{-4L_2+L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/20 & -1/20 & 7/20 \\ 0 & 1 & 0 & -2/20 & 6/20 & -2/20 \\ 0 & 0 & 1 & 11/29 & -3/20 & 1/20 \end{array}\right]$$

Ou seja tem-se que:

$$(A_1)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 11 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicações para a resolução do exercício 44.

(a) Usando o algoritmo para o cálculo da inversa obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_1+L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1/2)L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_3+L_1 \to L_1]{-L3+L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

Assim sendo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(b) Basta observar que:

$$A^2 \mathrm{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\mathrm{u} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{u} = A^{-1} \left(A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

Indicações para a resolução do exercício 45.
Tem-se que

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Basta então resolver o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 16 & 12 & 2 & 16 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Indicações para a resolução do exercício 46.
(a) Tem-se

$$(\mathbb{1} - A)^2 = (\mathbb{1} - A)(\mathbb{1} - A) = \mathbb{1} - A - A + A^2 = \mathbb{1} - 2A + A^2,$$

como, por hipótese, $A^2 = A$ tem-se:

$$\mathbb{1} - 2A + A^2 = \mathbb{1} - 2A^2 + A = \mathbb{1} - A.$$

(b) Calculando $(\mathbb{1} - 2A)^2$ tem-se:

$$(\mathbb{1} - 2A)^2 = (\mathbb{1} - 2A)(\mathbb{1} - 2A) = \mathbb{1} - 4A + 4A^2 = \mathbb{1},$$

a última igualdade justifica-se porque $A^2 = A$, por hipótese. Concluímos então que $(\mathbb{1} - 2A)$ é inversa de si própria.

Indicações para a resolução do exercício 47.
(a) Temos que verificar que $(\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - B) = \mathbb{1}$. Tem-se:

$$(\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - B) = \mathbb{1} - B + A - AB = \mathbb{1} + A - B - (A - B) = \mathbb{1},$$

com se pretendia.
(b) Como $(\mathbb{1} - B)$ é inversa de $(\mathbb{1} + A)$, tem-se que:

$$(\mathbb{1} - B)(\mathbb{1} + A) = (\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - B) = \mathbb{1}.$$

Tem-se então que $\mathbb{1} = (\mathbb{1}-B)(\mathbb{1}+A) = \mathbb{1}+A-B-BA$ ou seja, $\mathbb{0} = A-B-BA$ e, como $AB = A - B$, obtemos finalmente que $\mathbb{0} = AB - BA$, ou seja, $AB = BA$ como se pretendia estabelecer.

Indicações para a resolução do exercício 48.
O exercício envolve álgebra simples valendo a pena notar que por definição $A^{-n} = (A^{-1})^n$, em particular $A^{-3} = (A^{-1})^3$.

Indicações para a resolução do exercício 49.
Para provar que A é invertível temos que estabelecer a existência de uma matriz que multiplicada por A resulta na identidade. Tem-se:

$$A^3 + A + \mathbb{1} = \mathbb{0} \Leftrightarrow A^3 + A = -\mathbb{1} \Leftrightarrow A(A^2 + \mathbb{1}) = -\mathbb{1}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade pelo escalar -1 obtemos:

$$-A(A^2 + \mathbb{1}) = \mathbb{1} \Leftrightarrow A(-A^2 - \mathbb{1}) = \mathbb{1}.$$

Ou seja, $A^{-1} = -A^2 - \mathbb{1}$.

Indicações para a resolução do exercício 50.
Procedendo à eliminação de Gauss da matriz aumentada do sistema obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \beta+3 & 3 & \beta^2-2 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_1++L_3\to L_3]{L_1+L_2\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & \beta-1 & 1 & \beta^2-1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/3)L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 & \beta^2-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(5-\beta)L_2+L_3\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\beta & \beta^2-\beta \end{array}\right]$$

Assim, se $\beta \neq 2$ o sistema é possível e determinado e se $\beta = 2$ o sistema é impossível (pois $\beta^2 - \beta$ não se anula para $\beta = 2$). Desta forma, a resposta correcta é a C).

3 Exercícios suplementares

Exercício 51.—Consideremos os polinómios reais na variável X (o conjunto destes polinómios denota-se por $\mathbb{R}[X]$). Se $p(X)$ é um desses polinómios, $p'(X)$ denota a respectiva derivada. A cada polinómio $p(X)$ associamos a matriz M_p que é a matriz:

$$M_p = \begin{bmatrix} p(0) & 0 \\ p'(0) & p(0) \end{bmatrix}.$$

Mostre que se $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]$ então $M_p + M_q = M_{p+q}$ e $M_p M_q = M_{pq}$.

Exercício 52.—Uma matriz quadrada A é *nilpotente* se $A^p = \mathbb{0}$ para algum natural p e *unipotente* se $\mathbb{1} - A$ é nilpotente. Supondo que N é nilpotente e U é unipotente, considere:

$$\begin{aligned}\exp N &= \mathbb{1} + N\tfrac{1}{2!}A^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}A^n + \cdots \\ \log U &= -(\mathbb{1} - U) - \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} - U)^2 - \cdots - \tfrac{1}{n}(\mathbb{1} - U)^n - \cdots\end{aligned}$$

(a) Considere agora as matrizes

$$N = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e mostre que $\exp(\log U) = U$ e $\log(\exp N)$.

(b) Considere a função $U(t) = \exp(tM)$ (onde $t \in \mathbb{R}$) sendo M a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que $U(s)U(t) = U(s + t)$, para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$.

Exercício 53.—Considere as matrizes $H \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ da forma,

$$H = \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

As matrizes deste tipo designam-se de *quaterniões* e o respectivo conjunto denota-se por $\mathbb{H}$.

(a) Mostre que $\mathbb{H}$ é fechado para somas e produtos.

(b) Considerando $\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H}$, definidos por:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

1. Mostre que $H = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.
2. Verifique que

$$\mathbf{i}^2 + \mathbf{j}^2 + \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

3. Se $H \in \mathbb{H}$ mostre que:

$$H\bar{H} = \bar{H}H = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}.$$

(onde $\bar{H}$ é a matriz cujas entradas são as conjugadas das entradas de H).