Instituto Superior Técnico - TagusPark
Matemática Discreta 2020/2021
Exercícios para as aulas de problemas e teorico-práticas

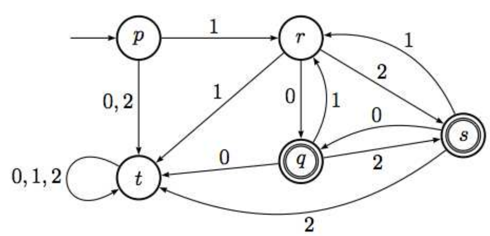
Lista 13

Após a aula teorico-prática e a de problemas da semana em que a lista foi publicada, os alunos deverão tentar resolver todos os exercícios que não foram resolvidos nas aulas. Se tiverem dificuldades ou dúvidas deverão contactar os docentes da disciplina. Vários dos exercícios (ou muito semelhantes) são apresentados como exemplos ou exercícios resolvidos no Capítulo 8 do livro (alguns estão explicitamente indicados abaixo).

Exercícios desta lista resolvidos sobretudo em aulas teorico-práticas e teóricas (ver algumas resoluções nos guiões).

1 Autómatos finitos: palavras aceites e linguagens reconhecidas

1. Considere o seguinte autómato finito determinístico A com alfabeto $\{0, 1, 2\}$:



De entre as palavras ε, 21, 102 e 1220 indique as que são as aceites por A. Verifique, depois, informalmente, que a linguagem reconhecida por A (conjunto das palavras aceites por A), é o conjunto das palavras sobre $\{0, 1, 2\}$ que começam em 1, terminam em 0 ou 2 e não têm símbolos consecutivos iguais.

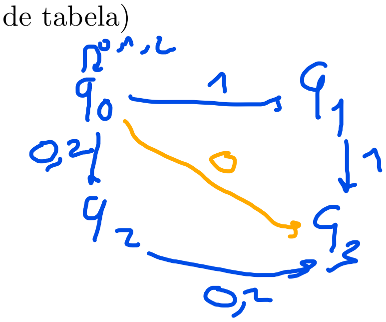
2. Considere o autómato finito determinístico A cuja representação algébrica é a seguinte: o conjunto de estados é $Q = \{r, s, t\}$, o alfabeto é $\Sigma = \{0, 1\}$, o estado inicial é r, o conjunto dos estados finais é $F = \{r, s\}$, e a função de transição $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é (na forma de tabela)

δ	0	1
r	s	r
s	t	s
t	t	t

De entre as palavras ε, 001, 110 e 0101 indique as que são as aceites. Verifique depois, informalmente, que a linguagem reconhecida por A é o conjunto das palavras sobre $\{0, 1\}$ que têm no máximo um 0.

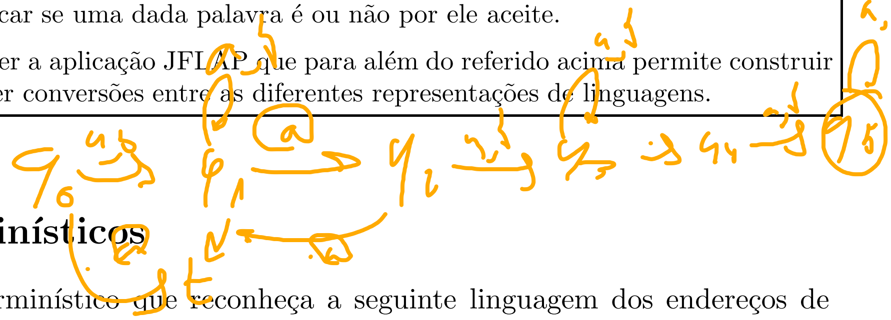
3. Considere o autómato finito não determinístico A cuja representação algébrica é a seguinte: o conjunto de estados é $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, o alfabeto é $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, o estado inicial é q_0, o conjunto dos estados finais é $F = \{q_3\}$, e a função de transição $\delta : Q \times \Sigma \to \wp(Q)$ é (na forma de tabela)

δ	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$



De entre as palavras ε, 0, 110, 1021 e 1022 indique as que são as aceites pelo autómato. Verifique depois, informalmente, que a linguagem reconhecida por A é o conjunto de todas as palavras sobre $\{0, 1, 2\}$ que ou terminam em 0 ou nas quais a soma dos dois últimos símbolos é par.

> Em `http://automatonsimulator.com` pode construir *on-line* autómatos finitos determinísticos e não determinísticos, autómatos de pilha, e verificar se uma dada palavra é ou não por ele aceite.
>
> Em `http://www.jflap.org/` pode obter a aplicação JFLAP que para além do referido acima permite construir gramáticas, expressões regulares, e fazer conversões entre as diferentes representações de linguagens.



2 Autómatos finitos determinísticos

1. Especifique um autómato finito determinístico que reconheça a seguinte linguagem dos endereços de correio eletrónico simplificados, ou seja, especifique um autómato finito determinístico que, de entre as palavras que se escrevem com os símbolos em $\{a, b, c, ., @\}$ aceita apenas todas as do tipo $\alpha_1 @ \alpha_2$ em que α_1 é uma sequência de letras não vazia, e α_2 é uma sequência que não tem @, começa e termina numa letra, tem pelo menos um ".", mas não tem "."'s consecutivos. Por exemplo, *aba@bb.ba* e *b@ba.a.bbb* devem ser aceites pelo autómato, mas *@aa.ba*, *baa@aa* e *b@aa..abb* não o devem ser.

2. Uma sequência de ADN é uma palavra sobre o alfabeto $\{A, C, G, T\}$ que representa uma cadeia de ADN (A - adenosina, C - citosina, G - guanina, T - timina). As características genéticas dos seres vivos são representadas estas cadeias, e diversas anomalias genéticas correspondem a anomalias nestas sequências.

   (a) Especifique n um autómato finito determinístico que detecte a presença da sequência $AGTC$ numa sequêcia de ADN, ou seja, especifique um autómato finito determinístico que aceite todas as palavras sobre $\{A, C, G, T\}$ que tenham $AGTC$ como subsequência, e apenas essas.

   (b) Especifique um autómato finito determinístico que detecte a presença da sequência $ATGATC$ numa sequência de ADN, ou seja, especifique um autómato finito determinístico que aceite todas as palavras sobre $\{A, C, G, T\}$ que tenham $ATGATC$ como subsequência, e apenas essas.(Livro: exemplo 204, página 545)

   (c) Especifique um autómato finito determinístico que detecte que numa sequência de ADN não está presente a sequência $AGTC$.

3. Especifique um autómato finito determinístico que, de entre as palavras que se escrevem com as letras do alfabeto $\{a, b, c\}$, aceita todas as que verifiquem a propriedade indicada, e apenas essas

   (a) têm comprimento ímpar

   (b) têm pelo menos dois a's

   (c) têm no máximo dois a's

   (d) terminam em bc (Livro: exemplo 196, página 540)

   (e) começam em a e têm dois c's consecutivos

   (f) não têm dois símbolos consecutivos iguais

4. Especifique um autómato finito determinístico que, de entre as palavras que se escrevem com as letras do alfabeto $\{a, b\}$, aceita todas as que verifiquem a propriedade indicada, e apenas essas

   (a) têm um número ímpar de a's e um número par de b's

   (b) os seus três últimos símbolos são iguais

   (c) têm a na penúltima posição

   (d) têm a na antepenúltima posição

5. Especifique um autómato finito determinístico que, de entre as palavras que se escrevem com os dígitos em $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, aceita apenas todas aquelas em que a soma dos dígitos que as constituem é um múltiplo de 5, e apenas essas.

6. Mostre que é regular a linguagem constituída pelas palavras sobre $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ que

   (a) são naturais pares
   (Livro: exemplo 201, página 544)

   (b) são naturais múltiplos de 3

   (c) são naturais múltiplos de 5
   (Livro: exemplo 202, página 544)

   (d) são naturais múltiplos de 6

   Sugestão: na resolução de (d) pode tomar como ponto de partida o autómato especificado em (b).

7. Mostre que é regular a linguagem das palavras que se escrevem com os símbolos do alfabeto

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

   que, quando concatenados de modo a formar uma matriz $2 \times m$ em que cada linha representa um número binário, são matrizes nas quais a linha de cima representa um número superior ao representado pela linha de baixo.

8. Mostre que é regular a linguagem constituída pelas palavras sobre o alfabeto $\{0,1\}$ que representam naturais n em *base 2*

   (a) que são ímpares

   (b) tais que $n \equiv_4 0$

   (c) tais que $n \equiv_4 0$ ou $n \equiv_4 1$

   (d) tais que $n \equiv_8 0$

   (e) tais que $n \equiv_3 0$

   (f) tais que $n \equiv_6 0$

   (g) tais que $n \equiv_5 0$

   (h) tais que $n \equiv_{10} 0$

   Sugestão: na resolução de (f) pode tomar como ponto de partida o autómato especificado em (e).

3 Autómatos finitos não determinísticos

1. Especifique um autómato finito não determinístico que, de entre as palavras que se escrevem com os dígitos em $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, aceita as que são números em $\mathbb{N}_1$ múltiplos de 5, e apenas essas.

2. Especifique um autómato finito não determinístico que, de entre as palavras que se escrevem com as letras do alfabeto $\{a,b\}$, aceita todas as que verifiquem a propriedade indicada, e apenas essas

   (a) os três últimos símbolos são iguais

   (b) têm a na penúltima posição

   (c) têm a na antepenúltima posição

   (d) são do tipo $a^k b^m c^n$ com $k,m,n \in \mathbb{N}$

3. Especifique um autómato finito não determinístico que, de entre as palavras que se escrevem com as letras do alfabeto $\{a,b,c\}$, aceita todas as que verifiquem a propriedade indicada, e apenas essas

   (a) o último símbolo ocorre uma única vez em toda a palavra.

   (b) o último símbolo ocorre pelo menos duas vezes em toda a palavra.

4. Mostrar que é regular a linguagem L das palavras que se escrevem com os símbolos do alfabeto

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

   que, quando concatenados de modo a formar uma matriz $3 \times m$ em que cada linha representa um número binário, são matrizes nas quais a linha de baixo representa a soma dos números denotados pelas outras duas linhas. Sugestão: comece por especificar um autómato finito que reconheça L^R.

5. Considere a linguagem L das palavras que se escrevem com os símbolos do alfabeto

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

que, quando concatenadas de modo a formar uma matriz $2 \times m$ em que cada linha representa um número binário, são matrizes cuja linha de baixo representa o número denotado pela linha de cima mais uma unidade. Mostrar que L é regular. Sugestão: comece por especificar um autómato finito que reconheça L^R.

4 Eliminação do não determinismo

1. Seja A o autómato finito não determinístico com conjunto de estados $Q = \{r, s, t\}$, alfabeto $\Sigma = \{1, 2\}$ estado inicial r, conjunto de estados finais $F = \{s, t\}$, e função de transição $\delta : Q \times \Sigma \to \wp(Q)$:

δ	1	2
r	$\{s\}$	$\{r, t\}$
s	$\{s\}$	$\{\}$
t	$\{t\}$	$\{t, s\}$

Use o algoritmo estudado para obter um autómato finito determinístico equivalente a A.

2. Seja A o autómato finito não determinístico com conjunto de estados $Q = \{p, q, r\}$, alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ estado inicial p, estado final r, e função de transição $\delta : Q \times \Sigma \to \wp(Q)$ (na forma de tabela)

δ	a	b	c
p	$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{q\}$
q	$\{\}$	$\{r\}$	$\{\}$
r	$\{\}$	$\{\}$	$\{r\}$

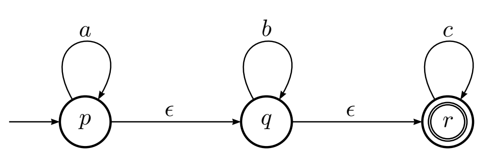
Use o algoritmo estudado para obter um autómato finito determinístico equivalente a A.

3. Seja A o autómato finito não determinístico com conjunto de estados $Q = \{t, u, v\}$, alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ estado inicial t, estado final v, e função de transição $\delta : Q \times \Sigma \to \wp(Q)$ (na forma de tabela)

δ	0	1	2
t	$\{u, v\}$	$\{t\}$	$\{\}$
u	$\{t\}$	$\{u, v\}$	$\{u\}$
v	$\{\}$	$\{v\}$	$\{t\}$

Use o algoritmo estudado para obter um autómato finito determinístico equivalente a A.

4. Considere o autómato finito não determinístico com alfabeto $\{a, b, c\}$ especificado diagramaticamente como se segue:



   (a) Descreva informalmente a linguagem reconhecida pelo autómato.

   (b) Use o algoritmo estudado para obter um autómato finito determinístico equivalente a A.

5. Considere o autómato finito não determinístico A com conjunto de estados $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$, estado inicial q_0, conjunto de estados finais $F = \{q_2, q_3\}$, e função de transição $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \to \wp(Q)$ (na forma de tabela)

δ	a	b	c	ε
q_0	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{\}$
q_2	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{\}$	$\{q_4\}$	$\{\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{\}$

Use o algoritmo estudado para obter um autómato finito determinístico equivalente a A.

5 Gramáticas: palavras e linguagens geradas

1. Considere a gramática G com conjunto de símbolos não terminais (ou auxiliares) $V = \{S, X, Y\}$, alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, símbolo inicial S e regras $S \longrightarrow aX \mid bY \quad X \longrightarrow \varepsilon \mid bY \quad Y \longrightarrow \varepsilon \mid aX$.

   Mostre que as palavras bab e $abab$ são geradas por G. Verifique depois, informalmente, que a linguagem gerada por G é o conjunto de todas as palavras sobre $\{a, b\}$ que não têm símbolos consecutivos iguais.

2. Considere a gramática G com conjunto de símbolos não terminais (ou auxiliares) $V = \{S\}$, alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, símbolo inicial S e regras $S \longrightarrow 0S1 \mid 01$.

   Mostre que as palavras 0011 e 00001111 são geradas por G. Verifique depois, informalmente, que a linguagem gerada por G é o conjunto de todas as palavras sobre $\{0, 1\}$ do tipo $0^n 1^n$ com $n \in \mathbb{N}_1$.

3. Considere a gramática G com conjunto de símbolos não terminais (ou auxiliares) $V = \{S\}$, alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, símbolo inicial S e regras $S \longrightarrow aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$

   Mostre que as palavras $aabb$ e $bababaab$ são geradas por G. Verifique depois, informalmente, que a linguagem gerada por G é o conjunto de todas as palavras sobre $\{a, b\}$ com igual número de a's e b's.

6 Gramáticas regulares e independentes do contexto

1. Especifique uma gramática regular que, de entre as palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$, gera todas as que verifiquem a propriedade indicada, e apenas essas

   (a) têm comprimento ímpar

   (b) têm no máximo dois a's

   (c) têm a antepenúltima posição

   (d) começam em a, terminam em c e têm número par de b's

2. Seja $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Uma constante numérica tem uma parte inteira e uma parte decimal, separadas por ".". A parte inteira é 0 ou uma palavra sobre $\mathcal{D}$ que não começa por 0. A parte decimal é uma palavra sobre $\mathcal{D}$. Pode omitir-se "." se a parte decimal for vazia. A parte inteira e a decimal não podem ser ambas vazias. Especifique uma gramática regular que, de entre as palavras sobre $\mathcal{D} \cup \{., +, -\}$, gera apenas todas as do tipo w, $+w$ ou $-w$, onde w é uma constante numérica, e apenas essas.

3. Especifique uma gramática independente do contexto que, de entre as palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$, gera todas as que verifiquem a propriedade indicada, e apenas essas: (a) palavras do tipo $a^{2n}b^n$, com $n \in \mathbb{N}_1$; (b) palavras do tipo $a^n b^m$, com $n, m \in \mathbb{N}_1$ e $m > n$.

4. Especifique uma gramática independente do contexto que, de entre as palavras sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$, gera todas as que verifiquem a propriedade indicada, e apenas essas: (a) palavras do tipo $a^n c^m b^{n+1}$, com $n, m \in \mathbb{N}_1$ (b) palavras que são palíndromos

5. Especifique uma gramática independente do contexto que, de entre as palavras sobre $\{a, \times, 2, =\}$, gera todas as do tipo $a^n \times 2 = a^{2n}$, com $n \in \mathbb{N}_1$, e apenas essas.