Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# ANÁLISE MATEMÁTICA I

E. Aeroespacial, E. Biomédica, E. Física Tecnológica,
Matemática Aplicada e Computação, Ciências Informáticas

## RESOLUÇÃO DO 1º EXAME - 16/1/2004

**I.** a) Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{x} \geq |x-1|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x \geq 1 \wedge \frac{x^2-1}{x} \geq x-1\right) \vee \left(x < 1 \wedge \frac{x^2-1}{x} \geq -x+1\right),$$

Para $x \geq 1$:

$$\frac{x^2-1}{x} \geq x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1)-x(x-1)}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x} \geq 0\,,$$

sendo esta desigualdade verdadeira, para todo $x \geq 1$.
Para $x < 1$:

$$\frac{x^2-1}{x} \geq -x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1)+x(x-1)}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2x+1)(x-1)}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\,2x+1 \geq 0 \;\wedge\; x < 0\,) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0\,,$$

dado que $2x+1 \leq 0 \wedge x > 0$ não é verificado por nenhum valor de $x$.
Concluimos que

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1 \vee -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

o que é equivalente a $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[ \cup [1, +\infty[$.

b) O conjunto dos majorantes de $A \cap C$ é o conjunto vazio.
O conjunto dos minorantes de $A \cap C$ é $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.
Como $x \in B$ sse $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ e, portanto, para $k \neq 0$, $x \notin \mathbb{Q}$, temos $B \cap C = \{0\}$. Logo, o conjunto dos majorantes de $B \cap C$ é $[0, +\infty[$ e o conjunto dos minorantes de $B \cap C$ é $]-\infty, 0]$.
$\sup A$ não existe;
$\inf A \cap C = -\frac{1}{2}$;
$\min A \cap C = -\frac{1}{2}$;
$\min B$ não existe;
$\sup B \cap C = 0$.

c) Se $(x_n)$ é uma sucessão de termos em $A$, tem-se para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $x_n \geq -\frac{1}{2}$. Logo $(x_n)$ é minorada. Por outro lado, como $(x_n)$ é decrescente, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $x_n \leq x_1$. Logo $(x_n)$ é majorada. Então $(x_n)$ é limitada. Como por hipótese $(x_n)$ é monótona e toda a sucessão monótona e limitada é convergente concluimos que $(x_n)$ é convergente.

Designemos por $l$ o limite de $(x_n)$ e seja $y_n = (-1)^n x_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é convergente e tende para o mesmo limite. Em particular, considerando a subsucessão dos termos de ordem par e a subsucessão dos termos de ordem ímpar de $(x_n)$:

$$x_{2k} \to l \qquad \text{e} \qquad x_{2k-1} \to l\,,$$

e logo,

$$y_{2k} = (-1)^{2k} x_{2k} = x_{2k} \to l \qquad \text{e} \qquad y_{2k-1} = (-1)^{2k-1} x_{2k-1} = -x_{2k-1} \to -l\,.$$

Assim, $l$ e $-l$ são sublimites da sucessão $(y_n)$. Ora, para que uma sucessão convirga é necessário que o conjunto dos sublimites seja um conjunto singular. Logo para $(y_n)$ convergir é necessário que $l = -l$, ou seja, que $l = 0$. Mas isto é impossível. De facto, suponhamos, por absurdo, que $x_n \to 0$. Então, por definição de limite, para $n$ a partir de certa ordem, ter-se-ia $x_n \in V_1(0)$. Por outro lado, como $x_n$ é decrescente, $x_n$ não pode ser negativo para nenhum $n$, dado que, se houvesse $p$ tal que $x_p < 0$ então, para todo $n > p$, ter-se-ia $x_n \leq x_p$ e, logo $x_n \notin V_\varepsilon(0)$ com $0 < \varepsilon < |x_p|$ o que iria contra a definição de limite. Assim, a partir de certa ordem, $x_n \in V_1(0) \cap \mathbb{R}_o^+ = [0,1[$. Mas isto contradiz o facto de $(x_n)$ ser uma sucessão em $A$ e $A \cap [0,1[ = \emptyset$. Logo, $(x_n)$ não pode tender para 0 e, logo, $(y_n)$ é necessariamente divergente.

**II.** 1. a) A série dada é uma série de Mengoli. Como $\operatorname{arctg} n \to \frac{\pi}{2}$ a série é convergente com soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n+2)) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 - 2 \lim \operatorname{arctg} n$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}\,.$$

Como $(\operatorname{arctg} n)$ é uma sucessão crescente, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n+2)| = -\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n+2))$$

donde se conclui que a série dos módulos é convergente e, portanto, a série de Mengoli dada é absolutamente convergente.

b) Como $(\frac{n}{n+10})^5 \to 1^5 = 1$ e, portanto, a sucessão dada pelo termo geral da série não tende para zero, concluimos que a série dada é divergente.

c) Consideremos a série de termos não negativos dos módulos dos termos da série dada. Como, para $n \geq 1$,

$$\left| \frac{\sqrt{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2+1} \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\,,$$

e como a série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ é convergente, conclui-se que $\sum \left| \frac{\sqrt{n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2+1} \right|$ é convergente e, por isso, a série dada é absolutamente convergente.

d) Trata-se de uma série de termos não negativos. Apliquemos o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}\,.$$

Como $e^{-1} < 1$, segue-se que a série é convergente. Como a série é de termos não negativos ela coincide com a respectiva série de módulos. Logo, é absolutamente convergente.

2. Para cada $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, a expressão dada define uma série numérica. Considerando a variável $x$ naquele domínio, designemos $y = \frac{x}{x-1}$. Reduzimos o problema ao estudo da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{\sqrt{n}}$. Calculemos o seu raio de convergência:

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \right| = \lim \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1\,.$$

Logo, para $|y| < 1$, a série é absolutamente convergente e para $|y| > 1$ a série é divergente. Voltando à variável $x$:

$$|y| < 1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{x}{x-1}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; (\,|x| < |x-1| \,\wedge\, x \neq 1\,) \;\Leftrightarrow\; x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$$

$$|y| > 1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{x}{x-1}\right| > 1 \;\Leftrightarrow\; (\,|x| > |x-1| \,\wedge\, x \neq 1\,) \;\Leftrightarrow\; x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[ \setminus \{1\}\,.$$

Logo, se $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ a série dada é absolutamente convergente e se $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ a série dada é divergente.

Vejamos agora o ponto $x = \frac{1}{2}$: neste caso a série numérica correspondente é a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Dado que $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ é uma sucessão de termos positivos, decrescente e convergente com limite zero, concluimos, usando o critério de Leibnitz, que a série é convergente. Dado que $\sum \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ a qual se trata de uma série divergente, podemos concluir que, para $x = \frac{1}{2}$, a série é simplesmente convergente.

**III.** 1. a) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}\,.$

b) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,.$

c) Como $\lim_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ temos uma indeterminação do tipo $1^{+\infty}$. Fazendo

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \log\cos\frac{1}{x}}$$

e dado que $\lim_{x\to+\infty} \log\cos\frac{1}{x} = \log 1 = 0$ transformamos o problema numa indeterminação do tipo $\infty \times 0$. Para aplicar a regra de Cauchy, transforma-se aquela indetermnação numa do tipo $\frac{0}{0}$ fazendo:

$$x^2 \log\cos\frac{1}{x} = \frac{\log\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}.$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\log\cos\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x^2\cos\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{2\cos\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{y\to0^+}\frac{\operatorname{sen}y}{y}=-\frac{1}{2}\,,$$

pela regra de Cauchy, concluimos que

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\log\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

2. A função $x\mapsto\operatorname{arctg}x$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, sendo $x\mapsto\operatorname{arctg}f(x)$ a função composta de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, também ela é diferenciável em $\mathbb{R}$ pelo teorema da derivação da função composta. Como $x\mapsto f(1+\operatorname{arctg}x)$ é a composta da função $f$ com a função $x\mapsto 1+\operatorname{arctg}x$, a qual por sua vez também é diferenciável por ser a soma de uma constante com a função diferenciável $\operatorname{arctg}x$, concluimos que também $f(1+\operatorname{arctg}x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Como a subtracção de duas funções diferenciáveis é diferenciável concluimos que $h$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

   Pelo teorema da derivação da função composta:

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}-\frac{f'(1+\operatorname{arctg}x)}{1+x^2}.$$

   Como, por hipótese, $h$ tem um extremo em $x=0$ e $h$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, sabemos que $h'(0)=0$. Por outro lado, fazendo $x=0$ na expressão acima, e usando a hipótese $f(0)=0$:

$$h'(0)=\frac{f'(0)}{1+f^2(0)}-\frac{f'(1+\operatorname{arctg}0)}{1+0^2}=\frac{f'(0)}{1+0}-\frac{f'(1+0)}{1+0^2}=f'(0)-f'(1)\,.$$

   Logo, como $h'(0)=0$ obtemos $f'(0)-f'(1)=0\,.$

3. a) Seja $a\in]-\infty,1[$. Então, existe uma vizinhança de $a$ contida em $]-\infty,1[$. Nessa vizinhnança, a função $f$ coincide com a dada pelo produto da função contínua $x\mapsto x$ pela composta da exponencial com a função contínua $x\mapsto 1-|x|$. Pelo teorema da continuidade da função composta, a função $x\mapsto e^{1-|x|}$ é contínua e logo, a função produto $x\mapsto xe^{1-|x|}$ também o é. Logo, $f$ é contínua em $]-\infty,1[$.
   Para $a\in]1,+\infty[$: existe uma vizinhança de $a$ contida em $]1,+\infty[$ na qual $f$ coincide com $x\mapsto\log(x-1)$. A função polinomial $x\mapsto x-1$ é contínua e transforma $]1,+\infty[$ no intervalo $]0,+\infty[$. Como $\log x$ é contínua em $]0,+\infty[$ concluimos que a função composta $\log(x-1)$ é contínua em $]1,+\infty[$ e portanto concluimos que $f$ é contínua em $]1,+\infty[$.
   No ponto $a=1$:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\log(x-1)=-\infty.$$

   Logo $f$ não é contínua neste ponto.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{1+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-1-x}}$. Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{-\infty}{+\infty}$. Como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x)'}{(e^{-1-x})'} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-1-x}} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

concluimos, usando a regra de Cauchy, que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(x-1) = +\infty$.

c) Se $a \in ]-\infty, 0[$, existe uma vizinhnça de $a$ contida em $]-\infty, -1[$ onde, por conseguinte, $f$ coincide com a função $x \mapsto xe^{1+x}$. Tratando-se do produto da função diferenciável $x \mapsto x$ pela composta da função exponencial com a função polinomial $x \mapsto 1+x$, e logo, pelo teorema da derivação da função composta, também diferenciável, concluimos que em $]-\infty, 0[$, $f$ é diferenciável.
Se $a \in ]0,1[$, então numa vizinhança de $a$, $f(x)$ coincide com $xe^{1-x}$, e portanto, por razões análogas às anteriores, $f$ é diferenciável neste intervalo.
Se $a \in ]1, +\infty[$, numa vizinhança de $a$, $f$ coincide com $x \mapsto \log(x-1)$ que é diferenciável por ser a composta da função polinomial $x \mapsto x-1$ com a função logarítmica, diferenciável no seu domínio, e porque, sendo $]0, +\infty[$ o conjunto imagem de $]1, +\infty[$ pela função polinomial $x \mapsto x-1$, coincide com o domínio da função logarítmica.
Em $a = 1$, já sabemos que $f$ não é contínua e, por isso, não é diferenciável.
Em $a = 0$:

$$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} e^{1+x} = e$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} e^{1-x} = e$$

Como $f_e'(0) = f_d'(0) \in \mathbb{R}$, concluimos que $f$ é diferenciável em $x = 0$. Logo, o domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Cálculo de $f'$:
Para $x < 0$, usando as regras de derivação do produto e da função composta,

$$f'(x) = \left(xe^{1+x}\right)' = e^{1+x} + xe^{1+x} = (1+x)e^{1+x}\,.$$

Para $0 < x < 1$,

$$f'(x) = \left(xe^{1-x}\right)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}\,.$$

Para $x = 0$: $f'(0) = f_e'(0) = f_d'(0) = e$
Logo, $f'$ é a aplicação $f' : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} (1+x)e^{1+x} & \text{se} \quad x \le 0 \\ (1-x)e^{1-x} & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. No intervalo $]-\infty, -1[$, $f'(x) < 0$ e, portanto, $f$ é estritamente decrescente nesse intervalo. Em $]-1, 1[$, $f'(x) > 0$, e, portanto, nesse intervalo, $f$ é estritamente crescente. Logo, $f$ tem um mínimo relativo em $x = -1$: $f(-1) = -1$. No intervalo $]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$. Logo $f$ é estritamente crescente nesse intervalo. Vejamos o ponto $x = 1$: Como $f$ é estritamente crescente em $]-1, 1[$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, para todo o $x$ numa vizinhança de 1, $f(x) < f(1)$. Logo, $f$ tem um máximo relativo em $x = 1$: $f(1) = 1$.

e) Como a restrição de $f$ a $]1,+\infty[$ é contínua, $f(]1,+\infty[)$ é um intervalo. Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ , e como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ , o conjunto imagem daquele intervalo não é nem minorado nem majorado. Logo $f(]1,+\infty[) = ]-\infty,+\infty[$. Como este intervalo é necessariamente um subconjunto do contradomínio de $f$, $C(f)$, e logo $\mathbb{R} \subset C(f)$, concluimos que $C(f) = \mathbb{R}$.

**IV.** a) Usando a desigualdade verificada por hipótese por $f(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$ obtem-se

$$f(x_n) > x_n^2 - 1 \,.$$

Por outro lado, por hipótese,

$$f(x_n) = \frac{1}{n} \,.$$

Combinando as duas expressões anteriores:

$$x_n^2 - 1 < \frac{1}{n} \leq 1$$

Logo, $x_n^2 < 2$ e portanto $|x_n| < \sqrt{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, o que, por definição, mostra que $(x_n)$ é uma sucessão limitada.

b) Trata-se de uma aplicação do teorema de Bolzano-Weierstrass: uma vez que $(x_n)$ é limitada, tem uma subsucessão convergente $(x'_n)$. Designemos por $a$ o limite dessa subsucessão. Como por hipótese $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, então $f$ é contínua em $\mathbb{R}$. Usando a definição de continuidade à Heine,

$$x'_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad f(x'_n) \to f(a) \,.$$

Mas, por outro lado, como $f(x_n) = \frac{1}{n} \to 0$, e qualquer subsucessão de uma sucessão convergente é convergente e tende para o mesmo limite, sabemos que $f(x'_n) \to 0$. Logo $f(a) = 0$, pela unicidade do limite.

c) Sabemos por um lado que $f(-1) > (-1)^2 - 1 = 0$ e $f(1) > 1^2 - 1 = 0$. Por outro sabemos que $f(a) = 0$. Como $f(a) > a^2 - 1$, temos que $a^2 - 1 < 0$, e, portanto, $-1 < a < 1$. Sendo $f$ diferenciável em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o teorema de Lagrange aos intevalos $[-1, a]$ e $[a, 1]$ para concluir que existem $\alpha \in ]-1, a[$ e $\beta \in ]a, 1[$ tais que

$$f'(\alpha) = \frac{f(a) - f(-1)}{a - (-1)} = -\frac{f(-1)}{a+1} < 0$$

$$f'(\beta) = \frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{f(1)}{1 - a} > 0 \,.$$

Dado que, por hipótese, $f$ é de classe $C^1$, $f'$ é contínua e, nesse caso podemos aplicar o teorema do valor intermédio a $f'$ no intervalo $[\alpha, \beta]$ para concluirmos que existe $c \in ]\alpha, \beta[ \subset ]-1, 1[$, tal que $f'(c) = 0$.