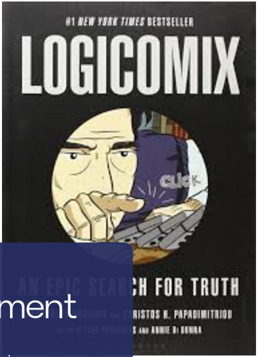
Lógica para Programação
LEIC-Tagus
2º Semestre, 2020/2021

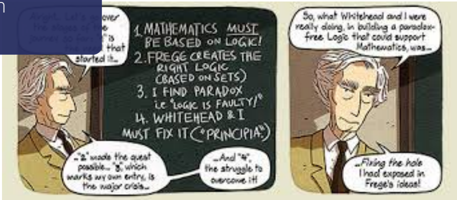
Lógica de Primeira Ordem – sistema dedutivo

Luísa Coheur

(estes slides são fortemente baseados nos slides gentilmente cedidos pela Professora Inês Lynce. Qualquer gralha é da minha responsabilidade)

Pré-aula: sugestões de leitura





Programa

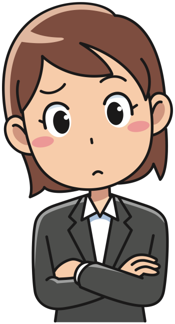
- ~~Conceitos Básicos (Livro: 1.1)~~
- ~~Lógica Proposicional (ou Cálculo de Predicados) – sistema dedutivo (2.1, 2.2.1, 2.2.2~~ e 2.2.4)
- ~~Lógica Proposicional (ou Cálculo de Predicados) – resolução (3.1)~~
- Lógica de Primeira Ordem – sistema dedutivo (4.1, 4.2)
- Lógica de Primeira Ordem – resolução (5.1 e 5.2)
- Programação em Lógica (6)
- Prolog (7 + Apêndice A: manual de sobrevivência em Prolog)
- Lógica Proposicional (ou de Predicados) – sistema semântico (2.3, 2.4, 3.2)
- Lógica de Primeira Ordem – sistema semântico (4.3 e 4.4)

Lógica de Primeira Ordem

- Em lógica clássica existem duas alternativas para a definição de uma linguagem
  - Lógica Proposicional
  - Lógica de Primeira Ordem
- Lógica Proposicional é baseada em proposições
  - Proposições são frases declarativas que fazem afirmações sobre qualquer coisa (até agora, representadas por P, Q, R, ...)
- Lógica de Primeira Ordem permite criar fórmulas mais ricas, com estrutura interna

Limitações da lógica proposicional

- Como representar: "O João tem o número 53118", "A Maria tem o número 89999" e "Todos os alunos têm exactamente um número"?
  - Conjunção de símbolos proposicionais: Aluno_João $\wedge$ Número_53118 $\wedge$ TemNúmero_João_ 53118
  - Como referir "todos" e "exactamente um"?
  - Como generalizar para todos os alunos e qualquer número?



Linguagem da Lógica de Primeira Ordem ($\mathcal{L}_{LPO}$)

- Necessidade de uma nova definição de fórmula bem formada (fbf) e da introdução de novos símbolos e novas regras de formação

Alfabeto básico

- Símbolos de pontuação: , ( ) [ ]
- Símbolos lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$
  - O símbolo $\neg$ lê-se "não" e corresponde ao operador de negação
  - O símbolo $\wedge$ lê-se "e" e corresponde ao operador de conjunção
  - O símbolo $\vee$ lê-se "ou" e corresponde ao operador de disjunção
  - O símbolo $\rightarrow$ lê-se "implica" e corresponde ao operador de implicação
  - O símbolo $\forall$ lê-se "para todo" e corresponde ao operador de quantificação universal
  - O símbolo $\exists$ lê-se "existe" e corresponde ao operador de quantificação existencial

Alfabeto básico (cont.) – voltaremos aqui

- Letras de função com n argumentos (aridade n), para $n \geq 0$ e $i \geq 1$: f_i^n
- Letras de predicado com aridade n, para $n \geq 0$ e $i \geq 1$: P_i^n
- Variáveis individuais para $i \geq 1$: x_i
- Termos (que representam objectos – constantes, variáveis e letras de função aplicadas a termos são termos)

Fórmulas bem formadas (fbfs) – voltaremos aqui

- Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $P_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma fbf (atómica)
- Se α é uma fbf então $(\neg\alpha)$ é uma fbf
- Se α e β são fbfs então $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ e $(\alpha \rightarrow \beta)$ são fbfs
- Se α é uma fbf contendo zero ou mais ocorrências da variável x então $\forall x[\alpha]$ e $\exists x[\alpha]$ são fbfs
- Nada mais é uma fbf

E também existe um sistema de dedução natural para a LPO?

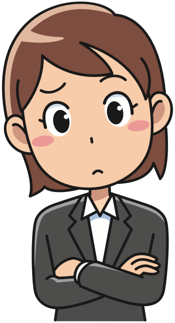
- Of course!

Sistema de dedução natural

- Regras para lógica proposicional continuam válidas
- 4 regras novas: introdução/eliminação de quantificadores

Mas (há sempre um mas)...

- Mas antes temos de perceber bem os conceitos de:
  - domínio de um quantificador
  - substituição (e termo livre)



Domínio dos quantificadores

$\forall x \; p(y) \equiv p(y)$

$\forall x \; p(x) \leftarrow x$ é ligada

- Nas expressões $\forall x[\alpha]$ e $\exists x[\alpha]$ a fbf α é chamada domínio do quantificador ($\forall$ ou $\exists$)
- α não tem de conter a variável x; nesse caso $\forall x[\alpha]$ e $\exists x[\alpha]$ são equivalentes a α
- [illegible] livre em α se não for quantificada; caso contrário é variável ligada
- fbf sem variáveis livres diz-se fechada

Domínio dos quantificadores – exemplos

- $\forall x[A(x)]$ contém a variável ligada x
- $A(x) \to \exists x[B(x)]$ contém:
  - uma ocorrência de x livre (em $A(x)$)
  - uma ocorrência de x ligada (em $B(x)$)

Substituição

com substituir
x for t_1

- Uma substituição s é um conjunto finito de pares ordenados $\{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$, em que:
  - t_i $(1 \leq i \leq n)$ é um termo (lembrar que um termo pode ser uma variável)
  - x_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma variável

a/x ✓

x/a ✗

Aplicação de uma substituição a uma fórmula

$t_1 / x_1 , \dots , t_n / x_n$

- A aplicação da substituição s à fbf α (denotado por $\alpha \circ s$) corresponde à fbf obtida a partir de α substituindo todas as ocorrências da variável livre x_i por t_i $(1 \leq i \leq n)$

Aplicação de uma substituição a uma fórmula – exemplos

- $\overbrace{P(x, f(a, y))}^{\alpha} \circ \overbrace{\{a/x, f(a, b)/y\}}^{\beta} = P(a, f(a, f(a, b)))$
- $P(x, f(a, y)) \circ \{a/x, f(a, b)/y, c/z\} = P(a, f(a, f(a, b)))$
- $A(x) \to \forall_x[B(x)] \circ \{a/x, f(a, b)/y, c/z\} = A(a) \to \forall_x[B(x)]$

Atenção:

- Nenhuma das variáveis pode ser igual ao termo correspondente
  - Sejam x, y, z variáveis e f função
  - OK: $\{f(x)/x, z/y\}$
  - KO: $\{x/x, z/y\}$
- Todas as variáveis têm de ser diferentes
  - Sejam x, y, z variáveis e f, g, h funções de um argumento
  - OK: $\{a/x, g(y)/y, f(g(h(b)))/z\}$
  - KO: $\{a/x, g(y)/y, b/x, f(g(h(b)))/z\}$

Problema com as substituições

- $\forall_x[P(x, f(a, y))] \circ \{x/y\} = \forall_x[P(x, f(a, x)))]$
  - Efeito colateral indesejável
    - Alteração do significado da fbf: y era variável livre e o termo que a substitui inclui a variável x que não é livre

Solução para o problema com as substituições

- Nova abordagem: nem todas as substituições de variáveis livres fazem sentido
- Novo conceito: termo livre para uma variável numa fbf

Termo livre para uma variável numa fbf

- Se α for uma fbf e t um termo, dizemos que t é livre para a variável x em α se nenhuma ocorrência livre de x em α ocorrer dentro do domínio do quantificador $\forall y$ (ou $\exists y$) em que y é uma variável em t.

Substituição (cont.)

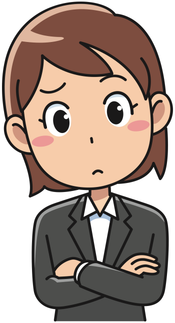
- $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ indica que a fbf α tem $x_1, \ldots, x_n$ como variáveis livres (pode ter outras além destas)
- Se ocorrências de x_i foram substituídas por t livre para x_i em α então nenhuma ocorrência de uma variável em t deixa de ser livre em $\alpha(t)$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) \circ \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\} = \alpha(t_1, \ldots, t_n)$$

Termo livre para uma variável

- Exemplo: termo $\overbrace{g(y, f(b))}^{t}$
  - É livre para x na fbf $P(x, y)$ (se substituir x por $g(y, f(b))$, tudo ok)
  - Não é livre para x na fbf $\forall y[P(x, y)]$ (se substituir x por $g(y, f(b))$, a variável y, livre no termo $g(y, f(b))$, passa a estar ligada após a substituição)

Podemos avançar para o sistema dedutivo da LPO? (suspiro)



Eliminação de ∀

$$
\begin{array}{lll}
n & \forall x[\alpha(x)] & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \alpha(t) & \mathrm{E}\forall, n
\end{array}
$$

- Se $\forall_x[\alpha(x)]$ é verdadeiro, então podemos substituir x em α por qualquer termo t, desde que t seja livre para x em α, e concluir que t é livre para x em α

Exemplo: $\{P(t), \forall_x[P(x) \to \neg Q(x)]\} \vdash \neg Q(t)$

α

$\alpha \to \beta$

$\therefore \beta$

1. $P(t)$ Prem
2. $\forall_x [P(x) \to \neg Q(x)]$ Prem
3. $P(t) \to \neg Q(t)$ $E\forall$ 2
4. $\neg Q(t)$ $E\to$ 1, 3

Introdução de $\forall$

não é uma hipótese Hip

I$\forall$

$$
\begin{array}{lll|l}
n & x_0 & & \\
\vdots & & & \vdots \\
m & & & \alpha(x_0) \\
m+1 & \forall x[\alpha(x)] & & \text{I}\forall, (n, m)
\end{array}
$$

- x_0 é uma variável nova, que nunca apareceu anteriormente;
- Se a partir de uma variável x_0 conseguimos derivar $\alpha(x_0)$ então, pelo facto de x_0 ser uma variável que representa qualquer objecto, podemos derivar $\forall_x[\alpha(x)]$

Exemplo: $\{\forall_x[P(x) \to Q(x)], \forall_x[Q(x) \to R(x)]\} \vdash \forall_x[P(x) \to R(x)]$

1.		$\forall x\, [P(x) \to Q(x)]$	Prem
2.		$\forall x\, [Q(x) \to R(x)]$	Prem
3	x_0	$P(x_0)$	hip
4		$\forall x\, [P(x) \to Q(x)]$	Reit 1
5		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$E\forall$ 4
6		$\forall x\, [Q(x) \to R(x)]$	Reit 2
7		$Q(x_0) \to R(x_0)$	$E\forall$ 6
8		$Q(x_0)$	$E\to$ 3, 5
9		$R(x_0)$	$E\to$ 8, 7
10		$P(x_0) \to R(x_0)$	$I\to$ 3 – 9
		$\forall x\, [P(x) \to R(x)]$	$I\forall$ 3 – 10

Introdução de $\exists$

$$\begin{array}{lll} n & \alpha(t) & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \exists x[\alpha(x)] & \mathrm{I}\exists,\ n \end{array}$$

- Podemos inferir $\exists_x[\alpha(x)]$ a partir de $\alpha(t)$
- Nota: $\alpha(t)$ contém mais informação do que $\exists_x[\alpha(x)]$, pois:
  - $\exists_x[\alpha(x)]$ significa que $\alpha(x)$ se verifica para um valor de x não especificado
  - $\alpha(t)$ significa que $\alpha(x)$ se verifica para um termo específico t

Exemplo: $\{\forall_x[P(x)]\} \vdash \exists_x[P(x)]$

1. $\forall x[P(x)]$ Prem

2. $P(t)$ E$\forall$ 1

3. $\exists x[P(x)]$ I$\exists$ 2

Eliminação de $\exists$

E$\exists$

n		$\exists x[\alpha(x)]$	
m	x_0	$\alpha(x_0)$	Hip
$\vdots$		$\vdots$	
k		β	
$k+1$	β		E$\exists$, $(n, (m, k))$

α

c

errado

- Se $\exists_x[\alpha(x)]$ é verdadeiro então $\alpha(x)$ é verdadeiro para pelo menos um valor de x
- Se ao assumir $\alpha(x_0)$ para uma variável nova x_0 conseguimos obter β que não inclui x_0 então podemos inferir β independentemente do valor x_0 que satisfaz $\alpha(x)$

Exemplo: $\exists_x[P(x)] \rightarrow \neg\forall_x[\neg P(x)]$ Teorema

1	$\exists x\,[P(x)]$	hip
2	$x_0 \mid P(x_0)$	hip
3	$\forall x\,[\neg P(x)]$	hip
4	$\neg P(x_0)$	E$\forall$ 3
5	$P(x_0)$	Reit 2
6	$\neg\forall x\,[\neg P(x)]$	I$\neg$ 3, (4, 5)
7	$\neg\forall x\,[\neg P(x)] = \beta$	E$\exists$ 1, 2-6
8	$\exists x\,[P(x)] \rightarrow \neg\forall x\,[\neg P(x)]$	I$\rightarrow$ 1-7

cont.

Momento de Aprendizagem Activa

Representação em Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- Há muito a dizer sobre a LPO como linguagem de representação do conhecimento!

Alfabeto básico – disse que voltaríamos aqui

- Letras de função com n argumentos (aridade n), para $n \geq 0$ e $i \geq 1$: f_i^n
- Letras de predicado com aridade n, para $n \geq 0$ e $i \geq 1$: P_i^n
- Variáveis individuais para $i \geq 1$: x_i
- Termos (que representam objectos – constantes, variáveis e letras de função aplicadas a termos são termos)

Alfabeto básico (cont.)

- Letras de função com n argumentos (aridade n), para $n \geq 0$ e $i \geq 1$: f_i^n
  - Representam funções sobre os elementos da linguagem
  - f_i^0 corresponde a funções de aridade zero que representam constantes
  - Índice i fornece uma capacidade ilimitada para criar novos nomes
  - Se não for confuso, usamos $a, b, c, \ldots$ para representar constantes e $f, g, h, \ldots$ para representar as letras de função que não são constantes

Alfabeto básico (cont.)

- Letras de predicado com aridade n, para $n \geq 0$ e $i \geq 1$: P_i^n
  - Representam relações sobre elementos da linguagem, produzindo valores lógicos
  - Se não for confuso, usamos $P, Q, R, \ldots$ para representar as letras de predicado

Alfabeto básico (cont.)

- Variáveis individuais para $i \geq 1$: x_i
  - Têm como domínio os objectos da conceptualização
  - Se não for confuso, usamos $x, y, z, \ldots$ para representar as variáveis

Exemplos

- Consideremos
  - P letra de predicado com aridade 2
  - Q letra de predicado com aridade 1
  - A e B letras de predicado com aridade 0
  - f letra de função com aridade 1
  - g letra de função com aridade 3
  - a, b, c constantes
  - x variável
- Então são fbfs
  - $(\neg P(a, g(a, b, c)))$
  - $(P(a, b) \to \forall_x[(\neg Q(f(x)))])$
  - $(A \wedge B)$
- Parêntesis redundantes podem ser eliminados

Exemplos

- Funções
  - $capital(x) =$ capital de x
  - $soma(x, y) = x + y$
- Relações
  - $Fronteira(x, y) =$ verdade se x tem fronteira com y

Termos

- Termos representam objectos; correspondem a sintagmas nominais em linguagem natural
- São definidos recursivamente
  - Cada letra de função com aridade zero (letra de constante) é um termo
  - Cada variável é um termo
  - Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo
  - Nada mais é um termo
- Termo sem variáveis é chamado um termo chão (do Inglês ground term)

Exemplos

- Termos (com letras de função)
  - Portugal
  - capital(Portugal)
  - pai(Maria)
  - pai(pai(pai(Maria)))
  - x
  - capital(x)
  - pai(x)
- Fbf atómica (com letras de relação)
  - capital(x, y): verdade se x é a capital de y
  - pai(x, y): verdade se x é o pai de y
  - pai(João, Maria): verdade se João é o pai da Maria

Representação em LPO – vamos lá fazer uns exercícios

Exercício 1

Constantes:
Pedro, Cálculo (Cal), Álgebra (AL)
Predicados:
Aluno(x) = x é aluno
Freq(x, y) = x frequenta a cadeira y

1. O Pedro é um aluno.
2. O Pedro não frequenta Cálculo.
3. O Pedro frequenta Cálculo e Álgebra.
4. O Pedro frequenta Cálculo ou Álgebra (ou ambos).
5. O Pedro frequenta Cálculo ou Álgebra (mas não ambos).

Representação em LPO – dica

- $\forall$ é usado com $\rightarrow$
- $\exists$ é usado com $\land$
- Exemplos (usar diagramas de Venn)
  - Todas as pessoas são inteligentes
  - Existem pessoas inteligentes

Exercício 2

Predicados: Aluno(x), Inteligente(x), Gosta(x,y), Diferente (x,y)

1. Existe um aluno.
2. Existe um aluno inteligente.
3. Todos os alunos são inteligentes.
4. Todos os alunos gostam de algum aluno.
5. Todos os alunos gostam de algum outro aluno.
6. Existe um aluno de quem gostam todos os outros alunos.
7. Nenhum aluno gosta do Pedro.

Exercício 3

Predicados: Irmã(x,y), Aluno(x), Frequenta(x,y), Reprovou(x,y), Diferente (x,y)

1. O Pedro tem pelo menos uma irmã.
2. O Pedro tem exactamente uma irmã.
3. O Pedro tem pelo menos duas irmãs.
4. Todos os alunos que frequentam Cálculo também frequentam Álgebra.
5. Nenhum aluno reprovou a Álgebra.
6. Pelo menos um aluno reprovou a Cálculo.
7. Só um aluno reprovou a Cálculo.

Momento de Aprendizagem Activa