Guia de Estudo Detalhado: Congruência de Triângulos

---

1 | Conceito-chave

Dizemos que dois triângulos são **congruentes** ($\Delta ABC \cong \Delta DEF$) quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices que preserva comprimentos e medidas de ângulos. Em termos práticos, um triângulo pode ser movido (translação, rotação, reflexão) até coincidir exatamente com o outro.

Por que isso importa?

- Permite justificar construções geométricas (ex.: mediatriz, bissetriz).
- Garante igualdade de segmentos/ângulos ocultos em problemas.
- Serve de base a critérios de semelhança e trigonometria.

---

2 | Critérios de Congruência

2 | Critérios de Congruência

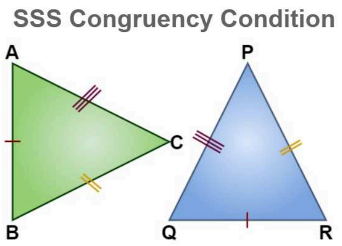
Abrev.	Nome (PT/EN)	Dados exigidos	Esboço da prova*	Exemplo numérico (esboçado)
LLL / SSS	Lado-Lado-Lado	3 lados correspondentes iguais	Constrói-se ΔABC; com mesmo compasso traça-se ΔDEF. Só há uma forma de fechar o triângulo ⇒ congruência.	$AB = 5,\ BC = 6,\ CA = 7$ e $DE = 5,\ EF = 6,\ FD = 7$ ⇒ ΔABC≅ΔDEF
LAL / SAS	Lado-Ângulo-Lado	2 lados e Ângulo **entre** eles	Pela Lei do Cosseno o 3.º lado fica fixado ⇒ único triângulo.	$AB = 4,\ AC = 6,\ \widehat{A} = 50^\circ \Rightarrow$ congruente a qualquer outro Δ com mesmos dados
ALA / ASA	Ângulo-Lado-Ângulo	2 ângulos e lado **entre** eles	Como a soma interna é 180°, o 3.º ângulo é forçado; Lei dos Senos fixa os outros lados.	$\widehat{B} = 30^\circ,\ \widehat{C} = 80^\circ,\ BC = 7$
AAL / AAS	Ângulo-Ângulo-Lado	2 ângulos + lado **não** incluído	É variação do ASA (o ângulo incluído pode ser obtido).	$\widehat{A} = 40^\circ,\ \widehat{B} = 60^\circ,\ AC = 10$
LLR / RHS (Hip-Cat.)	Lado-Lado em Triâng. Ret.	Hipotenusa + 1 cateto	Teorema de Pitágoras fixa o 2.º cateto, logo Δ único.	$\text{hip} = 13,\ \text{cateto} = 5$

⚠️ **Não** são critérios válidos isoladamente: SSA (Lado-Lado-Ângulo não incluído) e AAA (apenas semelhança).

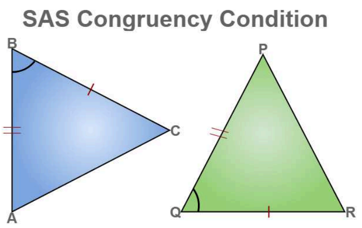
3 | Construções Clássicas com Régua e Compasso

A seguir, instruções passo a passo (teste no GeoGebra ou em papel):

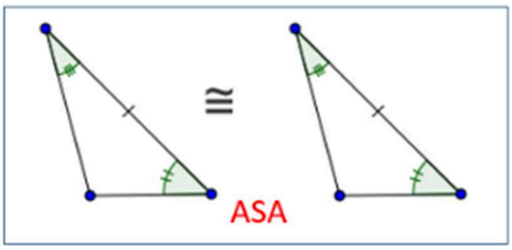
3.1 SSS (LLL) – "Fechando três lados"

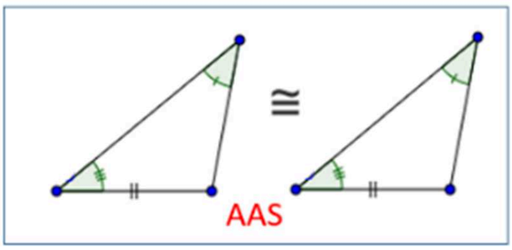


3.2 SAS (LAL) – "Dois lados e ângulo"

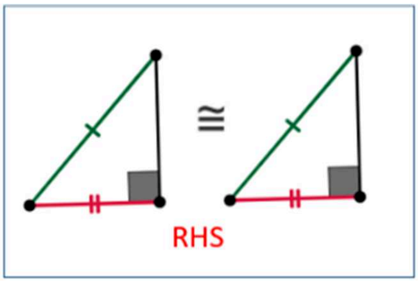


3.3 ASA / AAS (ALA / AAL) – "Dois ângulos e um lado"





3.4 RHS – "Retângulo com hipotenusa"



Justificativa: cada construção utiliza exatamente um dos critérios; assim, qualquer outro triângulo obtido pelos mesmos dados é congruente ao primeiro.

---

4 | Aplicações Típicas e Exemplos Resolvidos

Exemplo 1 – Uso de LAL

Num terreno, dois marcos A e B distam 50 m. Um terceiro marco C deve ser colocado de modo que AC = 40m e o ângulo CAB^ = 65°. Determine a posição única de C.

Estratégia: construir ΔABC pelo procedimento SAS; qualquer outra localização que satisfaça os dados resultará no mesmo Δ (congruência).

Exemplo 2 – Uso de AAL

Em ΔPQR sabe-se P^ = 42°, Q^ = 76° e PR = 9. Calcule PQ.

Passos:

1. Encontre R^ = 180° − 42° − 76° = 62°.
2. Aplique Lei dos Senos:

$$\frac{PQ}{\sin 62^\circ} = \frac{9}{\sin 76^\circ} \;\Rightarrow\; PQ \approx 8.46.$$

PQ é determinado unicamente → congruência assegura resultado.

Exemplo 3 – Prova de Igualdade de Segmentos

Num triângulo isósceles AB = AC, a bissetriz do ângulo A encontra BC em D. Mostre que BD=DC.

Demonstração:

- ΔABD e ΔACD têm AB = AC (dados),
- BAD^=DAC^ (bissetriz) e AD comum ⇒ **LAL**.
- Logo ΔABD ≅ ΔACD ⇒ BD = DC.

---

5 | Lista de Verificação

- Cito de memória todos os critérios válidos (LLL, LAL, …, LLR).
- Construo qualquer triângulo dado SSS, SAS, ASA ou RHS.
- Diferencio imediatamente quando um problema pede semelhança vs. congruência.
- Escrevo provas curtas e claras usando justificativas formais.