

Guia de Estudo Detalhado: Ângulos e Relações Métricas

Objetivo: reconhecer, classificar e calcular ângulos em configurações básicas, aplicar as somas de ângulos internos e externos de polígonos e dominar vocabulário e propriedades essenciais para resolver problemas de nível vestibular / olimpíada.

1 | Tipos de Ângulos

Tipo	Medida (°)	Propriedades & Observações	Exemplo rápido
Nulo	0	coincidente com a semirreta de origem	ponteiro de relógio às 12 h
Agudo	$0 < \theta < 90$	"menor que reto"	$30^\circ, 45^\circ$
Reto	90	dois segmentos perpendiculares	canto de um papel
Obtuso	$90 < \theta < 180$	"maior que reto"	120°
Raso	180	em linha reta	meia-volta
Côncavo / Reentrante	$180 < \theta < 360$	interior maior que semiplano	270°
Completo	360	volta inteira	rotação completa

Dica de fixação: desenhe um círculo graduado (ou use um transferidor) e marque exemplos de cada tipo. Depois, peça a um colega que aponte um ângulo qualquer para você nomear.

2 | Bissetriz, Ângulos Relacionados

1. Bissetriz de um ângulo

- Definição:** semirreta que divide o ângulo em duas partes congruentes.
- Construção clássica (régua e compasso):**
 - Com centro no vértice A, trace um arco que intercepte as duas semirretas em B e C.

2. Com centros B e C, mesmo raio, trace dois arcos que se cortam em D.

3. A reta AD é a bissetriz.

- **Teorema da bissetriz interna do triângulo:** num $\triangle ABC$, se AD é bissetriz de $\angle A$, então

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

- **Exemplo:** num triângulo com lados 6 cm, 8 cm e 10 cm (hipotenusa), a bissetriz do ângulo reto divide o lado oposto em segmentos BD e DC. Calcule BD e DC.

Solução: $BD/DC = 6/8 \Rightarrow BD = 3x, DC = 4x$ e

$$BD + DC = 10 \Rightarrow 3x + 4x = 10 \Rightarrow x = 10/7.$$

Logo, $BD = 30/7$ cm e $DC = 40/7$ cm.

2. Ângulos opostos pelo vértice

- **Definição:** dois ângulos cujos lados são extensões um do outro (formam um X).
- **Propriedade:** são sempre congruentes (mesma medida).
- **Exemplo:** se um dos ângulos mede $(5x + 16)^\circ$ e o oposto mede $(7x - 8)^\circ$, determine xx.

$$\text{Igualando: } 5x + 16 = 7x - 8 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12. \text{ Medida} = 76^\circ.$$

3. Ângulos complementares e suplementares

Relação	Soma	Situações típicas
Complementares	90°	problemas com triângulo retângulo, bússola, relógio
Suplementares	180°	retas paralelas cortadas por transversal, poligonais

Exemplo complementar: um ângulo agudo mede $(3y-5)^\circ$. O complementar mede $(y+41)^\circ$.

Ache y.

$$3y - 5 + y + 41 = 90 \Rightarrow 4y = 54 \Rightarrow y = 13.53.$$

Exemplo suplementar: em uma reta, dois ângulos adjacentes são $2z^\circ$ e $(z+30)^\circ$. Encontre z.

$$2z + z + 30 = 180 \Rightarrow 3z = 150 \Rightarrow z = 50.$$

3 | Soma dos Ângulos Internos de Polígonos

1. Fórmula geral

$$\sum \hat{\text{Ang. Internos}} = (n - 2) \times 180^\circ, \quad n \geq 3.$$

Derivação rápida: parta do vértice de um polígono convexo, trace diagonais até todos os outros vértices; obtêm-se $n-2$ triângulos, cada um somando 180° .

2. Ângulos externos (um por vértice, orientados no mesmo sentido)

$$\sum \hat{\text{Ang. Externos}} = 360^\circ \quad (\text{válido para qualquer polígono convexo}).$$

3. Aplicações comuns

- **Triângulo:** 3 lados $\Rightarrow (3 - 2) \times 180 = 180^\circ$.
- **Quadrilátero:** 4 lados $\Rightarrow 360$.
- **Pentágono:** 5 lados $\Rightarrow 540^\circ$.
- **Ângulo interno regular:** $\alpha = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$.
- **Ângulo externo regular:** $\varepsilon = \frac{360^\circ}{n}$.

4. Exemplos resolvidos

a) Quanto mede cada ângulo interno de um octógono regular?

$$\alpha = \frac{(8-2)180}{8} = \frac{6 \times 180}{8} = 135^\circ.$$

b) Num hexágono convexo, cinco ângulos medem 110° , 120° , 95° , 135° , 125° . Calcule o sexto.

Soma esperada: $(6 - 2) \times 180 = 720^\circ$.

Soma fornecida: $110 + 120 + 95 + 135 + 125 = 585^\circ$.

Sexto = $720 - 585 = 135^\circ$.

4 | Conexão entre Tópicos & Problemas de Fixação

1. Rede de relações:

- Ângulos suplementares + opostos pelo vértice aparecem juntos em retas paralelas cortadas por transversal.
- Complementaridade surge em triângulos retângulos: os catetos formam dois ângulos complementares.
- Bissetriz liga-se à soma de ângulos: em um triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo do vértice é também mediana e altura.

2. Problema-desafio (nível OBMEP):

Em um quadrilátero convexo ABCD, prolongue o lado AB além de B até E de forma que $\angle CBE = 45^\circ$. Sabendo que $\angle ABC = 70^\circ$ e $\angle BCD = 110^\circ$, calcule $\angle BAD$.

Solução-guia:

- Construir todos os ângulos dados.
 - Usar que $\angle CBE = \angle CBA + \angle ABE$ ($70^\circ + ?$).
 - Empregar soma dos internos do quadrilátero (360°) para achar $\angle BAD$.
 - Resultado final: **135°** .
-

5 | Check-list de domínio

- Nomeio corretamente qualquer ângulo apresentado.
- Traço a bissetriz com régua e compasso e aplico o Teorema da Bissetriz.
- Calculo ângulos opostos, complementares e suplementares sem erro.

- Aplico fórmulas de soma de internos/externos para qualquer polígono.
- Resolvo problemas em que vários conceitos aparecem combinados.