

Guia de Estudo Detalhado: Propriedades Métricas dos Triângulos

1 | Panorama da Semana

- Foco:** compreender relações métricas fundamentais dos triângulos e dominar os quatro pontos notáveis clássicos.
 - Aplicar Teorema de Pitágoras (TP) e suas extensões.
 - Usar o Teorema das Medianas para análises de comprimento.
 - Localizar e explorar **baricentro**, **incentro**, **circuncentro** e **ortocentro** em qualquer triângulo.
 - Resolver problemas envolvendo alturas, medianas e bissetrizes.

2 | Teorema de Pitágoras

Item	Conteúdo-chave
Enunciado	Em um triângulo retângulo com catetos a, b e hipotenusa c : $a^2 + b^2 = c^2$.
Conversa	Se um triângulo possui lados que satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$, então ele é retângulo.
Números pitagóricos	Conjuntos inteiros (a, b, c) : (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17)... Dica: gerados por $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ (com $m > n$).
Extensões	<ul style="list-style-type: none">Triângulo obtuso: $a^2 + b^2 < c^2$.Lei dos Cossenos: generaliza para qualquer triângulo.
Exemplo-fixação	Determine a diagonal de um terreno retangular $30\text{m} \times 40\text{m}$. $\rightarrow d = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\text{m}$.

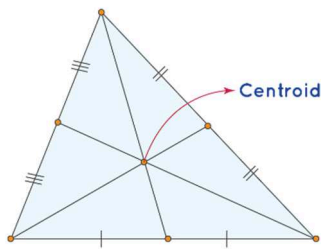
3 | Teorema das Medianas & Baricentro (Centroid)

3.1 Fatos fundamentais

- Mediana:** segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

- **Baricentro (G) ou Centróide:** ponto de encontro das 3 medianas.
 - Divide cada mediana na razão **2 : 1** (contada do vértice).
 - Centro de gravidade do triângulo.

Centroid of a Triangle



3.2 Teorema das Medianas

Para lados a, b, c opostos a A, B, C e medianas m_a, m_b, m_c :

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad (\text{análogas para } m_b, m_c).$$

3.3 Exemplo

Num Δ com lados 7 cm, 8 cm e 9 cm, calcule m_a (mediana relativa ao lado 7 cm).

$$m_a^2 = \frac{2(8^2 + 9^2) - 7^2}{4} = \frac{2(64 + 81) - 49}{4} = \frac{290 - 49}{4} = \frac{241}{4} \Rightarrow m_a \approx 7.76 \text{ cm}.$$

4 | Demais Pontos Notáveis

Ponto	Definição	Construção (passos-base)	Propriedades relevantes
Incentro (I)	Interseção das 3 bissetrizes internas	(1) Traçar duas bissetrizes; (2) Centro do incírculo é o encontro delas.	<ul style="list-style-type: none"> • Sempre dentro do Δ. • Distância r (raio do incírculo) = área / semiperímetro.
Circuncentro (O)	Interseção das 3 mediatrizes	(1) Mediatriz de dois lados; (2) Encontro = centro da circunferência circunscrita.	<ul style="list-style-type: none"> • Pode ficar dentro, sobre ou fora do Δ (agudo, reto, obtuso). • Distância R usa fórmula $R = \frac{a}{2 \sin A}$.
Ortcentro (H)	Interseção das 3 alturas	(1) Por um vértice trace reta \perp ao lado oposto; repita.	<ul style="list-style-type: none"> • Dentro (agudo), sobre (reto) ou fora (obtusos). • O, G, H colineares na reta de Euler.



5 | Construções Clássicas (Régua + Compasso)

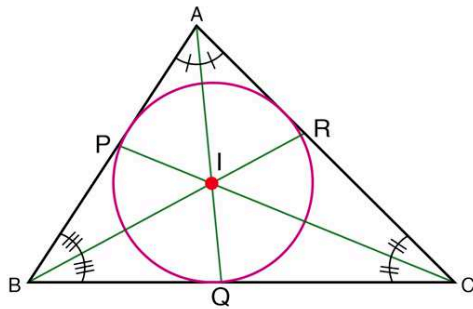
1. Incírculo:

a) Bissetrizes de A e B \rightarrow I.

b) Perpendicular a um lado passando por I \rightarrow ponto de tangência \rightarrow raio.

Properties of the Incenter of a Triangle

MATH
MONKS

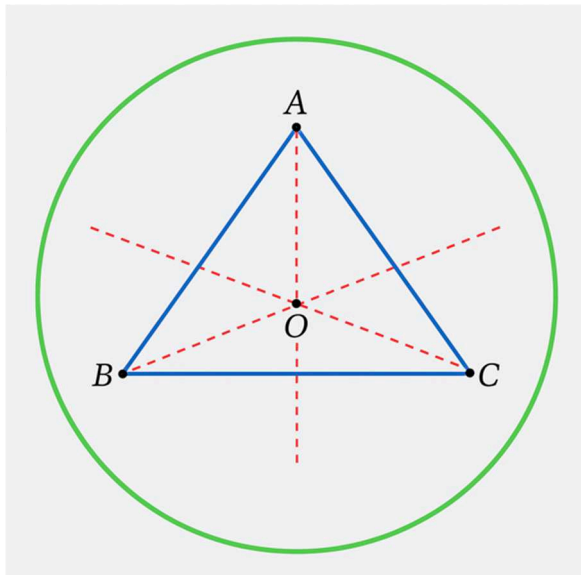


- ① Found inside the triangle
- ② Formed at the intersection point of 3 angle bisectors
- ③ It is the center of the triangle's incircle

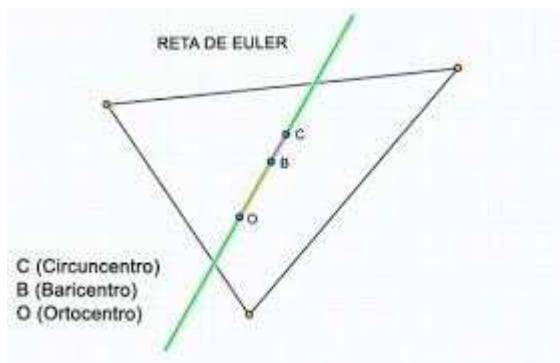
2. Circunferência circunscrita:

a) Mediatrizes de AB e AC \rightarrow O.

b) Raio = OA; trace circunferência.



3. Reta de Euler: marque O, G, H; verifique colinearidade medindo ângulos.



6 | Problemas de Fixação (seleção)

#	Enunciado	Dica / Resultado
1	Num $\triangle ABC$, $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$. Calcule o raio r do incírculo.	Área via Heron; depois $r = \frac{2\Delta}{a+b+c} \rightarrow r = 4$.
2	Mostre que $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.	Use vetores ou coordenadas baricêntricas.
3	Prove que $AH : HG = 2 : 1$ na reta de Euler.	Divida mediana, use semelhança de triângulos.
4	Altura h_a de $\triangle ABC$ forma, com $a = 10$ e $\angle B = 30^\circ$, qual valor de h_a ?	$h_a = b \sin C$; encontre b por Lei dos Senos.

7 | Checklist de Domínio

- Aplico TP para reconhecer triângulos retângulos e calcular distâncias.
- Uso o Teorema das Medianas para determinar comprimentos desconhecidos.
- Localizo G, I, O, H com régua e compasso (ou GeoGebra) sem consultar notas.
- Relaciono incírculo e circunferência circunscrita a r e R .
- Resolvo problemas que combinam alturas, medianas e bissetrizes com segurança.