

# Guia de Estudo Detalhado: Quadriláteros e Polígonos Especiais

---

## 1 | Visão-geral & Taxonomia

Todo **quadrilátero** (4 lados) pode ser classificado por simetria, paralelismo e congruência de lados.

### Quadrilátero

- ├ Paralelogramas (2 pares de lados  $\parallel$ )
  - | └ Retângulos (todos ângulos retos)
  - | └ Losangos (todos lados iguais)
  - | └ Quadrados (retângulo + losango)
- ├ Trapézios ( $\geq 1$  par de lados  $\parallel$ )
  - | └ Isósceles (lados não paralelos  $\cong$ )
  - | └ Deltoides / Kites (2 pares adjacentes de lados  $\cong$ )

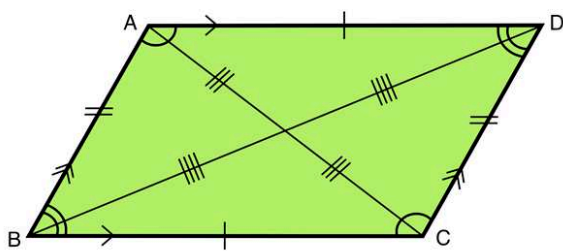
**Ideia-chave:** propriedades “herdam” de cima para baixo; p.ex. um quadrado possui *todas* as propriedades de losangos, retângulos e paralelogramos.

---

## 2 | Paralelogramos

### Properties of a Parallelogram

MATH  
MONKS



- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| ① Opposite sides are equal    | ④ Adjacent angles add up to $180^\circ$ |
| ② Opposite sides are parallel | ⑤ Diagonals bisect each other           |
| ③ Opposite angles are equal   |   |

Propriedade	Demonstração-padrão
Lados opostos são <b>paralelos &amp; congruentes</b>	Teorema de ângulos alternos + pares de transversais
Ângulos opostos <b>congruentes</b>	Soma dos ângulos internos (360°)
Ângulos adjacentes <b>suplementares</b>	Mesma lógica que acima
<b>Diagonais</b> bissetam-se	Triângulos opostos $\cong$ (caso LAL)

## Fórmulas

- **Área:**  $A = b h$  (base  $\times$  altura) ou  $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$ .
- **Diagonal:**  $d_{1,2}^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab \cos \theta$  (Lei dos Cossenos).

## Exemplo 1

Num paralelogramo ABCD, AB = 10, BC = 6 e  $\angle A = 60^\circ$ . Calcule a diagonal maior.

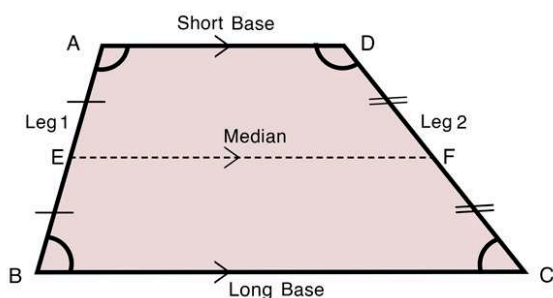
$$d_{AC}^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cos 60^\circ = 100 + 36 - 60 = 76 \Rightarrow d_{AC} = 2\sqrt{19}.$$

## 3 | Trapézios

**Definição (Brasil):** quadrilátero com **pelo menos** um par de lados paralelos.

### Properties of a Trapezoid

MATH  
MONKS



- ① Has four sides and four angles
- ② One pair of opposite sides are parallel (short & long base)
- ③ Adjacent angles add up to  $180^\circ$
- ④ The median is parallel to the bases, & divides the non-parallel sides (the legs) equally

Fato	Consequência
Bases $a$ e $b \parallel$	Alturas perpendiculares às bases
Média das bases $m = \frac{a+b}{2}$	Comprimento do segmento médio (liga pontos médios dos lados não paralelos)
Em trapézio <b>isósceles</b> : <ul style="list-style-type: none"> <li>• lados não paralelos <math>\cong</math></li> <li>• ângulos da base <math>\cong</math></li> <li>• diagonais <math>\cong</math></li> </ul>	Permite resolver problemas de congruência; a circunferência circunscrita existe somente nesse caso.

## Área

$$A = \frac{(a+b)h}{2}, \quad \text{onde } h \text{ é a altura.}$$

### Exemplo 2

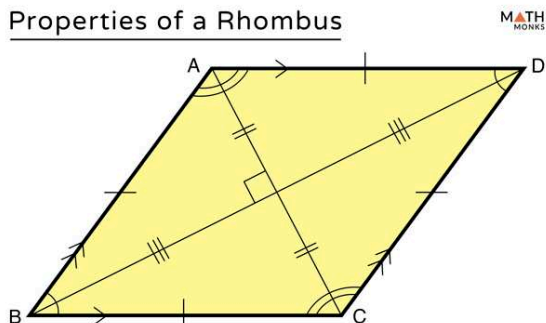
Um trapézio isósceles tem bases 8 cm e 14 cm; sua altura mede 5 cm.

- "Área:  $A = \frac{(8+14)5}{2} = 55 \text{ cm}^2$ ."
- "Diagonal: use Pitágoras em meia-diferença das bases (3 cm) + 5 cm  $\rightarrow$   
 $d = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ cm}$ ."

## 4 | Losangos

**Conceito:** paralelogramo em que **todos os lados são congruentes**.

### Properties of a Rhombus



- ① All four sides are equal
- ② Opposite sides are parallel
- ③ Opposite angles are equal
- ④ Diagonals are perpendicular and bisect each other
- ⑤ Adjacent angles add up to  $180^\circ$

Propriedade extra	Prova curta
Diagonais <b>perpendiculares</b>	Triângulos formados são isósceles → círculo circunscrito de diâmetro diagonal
Diagonais <b>bissectam ângulos internos</b>	Congruência LAL nos triângulos adjacentes

### Fórmulas

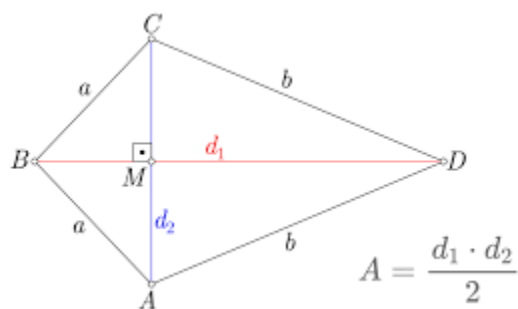
- **Área 1:**  $A = a h$  (como no paralelogramo).
- **Área 2 (mais útil):**  $A = \frac{d_1 d_2}{2}$ .

### Exemplo 3

Losango ABCD com diagonal maior 12 cm e área  $60 \text{ cm}^2 \rightarrow d_2 = \frac{2A}{d_1} = 10 \text{ cm}$ .

## 5 | Deltoides (Kites)

**Definição:** quadrilátero com **dois pares de lados adjacentes congruentes** e lados opostos diferentes.



Propriedade	Nota
Uma diagonal é <b>eixo de simetria</b>	Une os vértices onde os lados iguais se encontram
Diagonais <b>perpendiculares</b>	Mas somente uma é bissectada pela outra
Único par de ângulos opostos <b>congruentes</b>	Aqueles entre os lados de comprimentos distintos

Área

Mesma dos losangos:  $A = \frac{d_1 d_2}{2}$ .

Exemplo 4

Se um deltoide tem diagonais 9 cm e 12 cm, sua área = 54 cm².

6 | Resumo Comparativo

Quadrilátero	Lados paralelos	Lados ≅	Diagonais	Ângulos
Paralelogramo	2 pares	opostos	bissetam-se	opostos ≅, adjacentes sup.
Retângulo	2 pares	opostos	<b>congruentes &amp; bissetam-se</b>	<b>todos 90°</b>
Losango	2 pares	<b>todos</b>	⊥ & bissetam-se	opostos ≅
Quadrado	2 pares	<b>todos</b>	⊥, ≅, bissetam-se	<b>todos 90°</b>
Trapézio	≥ 1 par	livre	nenhum padrão	adjacentes à mesma base sup.
Trap.isósceles	1 par	não    ≅	<b>congruentes</b>	bases ≅
Deltoide	0 pares	2 + 2 adj.	⊥ & uma bissetada	1 par opostos ≅

7 | Checklist de Domínio

- Identifico rapidamente o tipo de quadrilátero por propriedades dadas.
- Provo que as diagonais de um losango são perpendiculares e bissetam-se.
- Aplico fórmula da área do trapézio e do deltoide sem hesitar.
- Reconheço quais quadriláteros admitem circunferência circunscrita.
- Resolvo problemas que combinam paralelismo, congruência e propriedades de diagonais.