Aufgabe 1

Lösen Sie die Matrizengleichung $A \cdot X \cdot B = C$ nach X auf. Alle Matrizen sind invertierbar und vom gleichen Typ.

Aufgabe 2

Sei $A_n = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Entscheiden Sie begründet, ob A_n eine stochastische Matrix ist.

(b) Geben Sie die Inverse A_n^{-1} an.

(c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Determinante von A_n von n unabhängig ist.

Aufgabe 3

Gegeben sei die stochastische Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ und die Anfangsverteilung $v_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(a) Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

(b) Berechnen Sie die Verteilung nach einem Übergang.

(c) Zeigen Sie, dass $w_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Fixvektor zu A ist.

(d) [schwer] Zeigen Sie, dass die stabile Verteilung bei einer beliebigen Anfangsverteilung bereits nach einem Übergang erreicht wird.

Aufgabe 4

In einem Produktionsprozess seien die Matrizen $ZE = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $RE = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Matrix RZ.

(b) Zeigen Sie, dass für die Produktion von 10 E_1 und 5 E_2 insgesamt 35 R_1 und 80 R_2 an Rohstoffen benötigt werden.

(c) Eine Einheit R_1 kostet eine GE, eine Einheit R_2 kostet 2 GE. Berechnen Sie die Rohstoffkosten für die Produktion aus der vorherigen Teilaufgabe.

Aufgabe 5

In einem Produktionsprozess seien die Matrizen $RZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $ZE = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

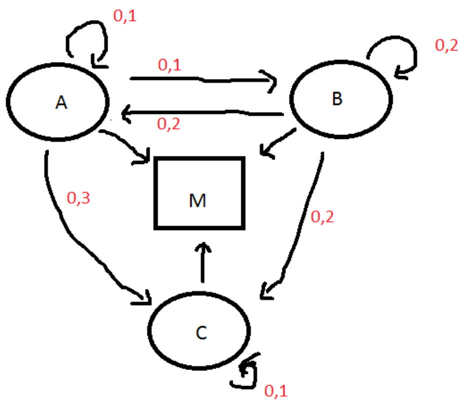
(a) Zeichnen Sie den zugehörigen Gozintographen.

(b) Berechnen Sie die Matrix RE.

(c) Ermitteln Sie den Rohstoffbedarf für die Produktion von 10 E_1 und 5 E_2.

Aufgabe 6

Drei Unternehmen seien untereinander und mit dem Markt durch das LEONTIEF-Modell $x - Tx = y$ verflochten. Gegeben sei dazu das folgende Verflechtungsdiagramm.



(a) Stellen Sie die Outputmatrix T auf. (Oben *von*, links *zu*.)

(b) Begründen Sie, dass T nicht stochastisch ist.

(c) Berechnen Sie die Marktabnahme y bei einer Produktion von $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

(d) Zeigen Sie, dass $(E - T)^{-1} = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 72 & 18 & 0 \\ 9 & 81 & 0 \\ 26 & 24 & 70 \end{pmatrix}$ die zugehörige LEONTIEF-Inverse ist.

(e) Ermitteln Sie die benötigte Produktion x für eine Marktabnahme von $y = \begin{pmatrix} 1530 \\ 4590 \\ 3060 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7

Drei Unternehmen seien untereinander und mit dem Markt durch das LEONTIEF-Modell $x - Tx = y$ verflochten. Die zugehörige Outputmatrix ist $T_r = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & r \end{pmatrix}$ mit einem Technologieparameter $r \in \mathbb{R}$, für den $0 \leq r \leq 0,8$ gilt.

(a) Erstellen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm.

(b) Begründen Sie im Sachzusammenhang, warum für den Technologieparameter r die Restriktion $0 \leq r \leq 0,8$ gilt.

(c) Berechnen Sie die Marktabnahme y für eine Produktion von $x = \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$.

(d) [schwer] Zeigen Sie, dass für alle Produktionsvektoren $x = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die zugehörige Marktabnahme durch $y = \frac{7}{10}x$ beschrieben wird, wenn $r = 0,1$ ist.

Aufgabe 8

Die Erwachsenen in Deutschland wird in einem Modell gemäß ihrem Personenstand in Verheiratete (V) und Singles (S) aufgeteilt. Die Singles enthalten hier alle Personen, die derzeit nicht (mehr) verheiratet sind. Insgesamt heiraten 10% der Singles innerhalb eines Jahres, wohingegen 30% aller Verheirateten wieder zu Singles werden, da sie sich scheiden lassen oder ihre Ehepartner versterben. Prozentual betrachtet sind genau 50% der betrachteten Erwachsenen momentan verheiratet.

(a) Stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix M auf. (Oben *von*, links *zu*.) Geben Sie auch den Übergangsgraphen an.

(b) Berechnen Sie die Verteilung der V und S nach einem und nach zwei Jahren.

(c) Die Grenzmatrix M_G dieses Prozesses ist $M_G = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ 0,75 & 0,75 \end{pmatrix}$. Geben Sie den zugehörigen Fixvektor mit der prozentualen Verteilung an und interpretieren Sie diesen.

Aufgabe 9

In einem verbesserten Modell von Aufgabe 8 werden die ehemals Verheirateten (E), die aktuell Single sind, weil sie geschieden oder verwitwet sind, gesondert betrachtet. Die Übergangsraten für die Singles sind identisch. Die 30% beendeten Ehen gehen aber in den Zustand E über. Von den ehemalig Verheirateten finden 10% innerhalb eines Jahres einen neuen Ehepartner. Zu Beginn gehen wir neben 50% Verheirateter von 30% Singles und 20% Ehemaligen aus.

(a) Erstellen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

(b) Berechnen Sie die prozentuale Verteilung nach einem Jahr. Geben Sie auch die Formel zur Berechnung der Verteilung nach fünf Jahren an. (Eine konkrete Berechnung ist hier nicht gefordert.)

(c) Der prozentuale Fixvektor dieses Prozesses ist $q_f = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 75 \end{pmatrix}$. Stellen Sie die Grenzmatrix auf und diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur Grenzmatrix in Aufgabe 8.

Lösungen

Aufgabe 1

Es gilt $A \cdot X\dot{B} = C \iff X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Aufgabe 2

(a) A_n ist nicht stochastisch, da weder die Zeilen- noch die Spaltensumme gleich eins ist.

(b) $A_n^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & n \end{pmatrix}$.

(c) Es gilt $\det(A_n) = n$. Also ist die Determinante *nicht* unabhängig von n. (Sie ist also abhängig von n.)

Aufgabe 3

(a) Trivial.

(b) $v_1 = A \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(c) Nachrechnen zeigt $A \cdot w_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = w_0$. Damit ist w_0 nach Definition ein Fixvektor.

(d) Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine Anfangsverteilung. Dann gilt $w = A \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x+y) \end{pmatrix}$. Nach Teil c) ist w eine stabile Verteilung.

Aufgabe 4

(a) Es gilt $RZ \cdot ZE = RE \iff RZ = RE \cdot ZE^{-1}$. Somit $RZ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Für die benötigten Rohstoffe r gilt $r = RE \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 80 \end{pmatrix}$.

(c) Rohstoffkosten $k = k_R \cdot r = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 80 \end{pmatrix} = (195)$. Die Kosten betragen also 20 GE.

Aufgabe 5

(a) Trivial.

(b) $RE = RZ \cdot ZE = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

(c) Für die benötigten Rohstoffe r gilt $r = RE \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 90 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6

(a) $T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$.

(b) Weder die Zeilen- noch die Spaltensumme ist gleich eins.

(c) $y = x - Tx = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}$.

(d) Nachrechnen zeigt, dass $(E-T)^{-1} \cdot (E-T) = E$ gilt. Also ist die Inverse korrekt.

(e) $x = (E-T)^{-1} \cdot y = \begin{pmatrix} 3060 \\ 6120 \\ 5780 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7

(a) Trivial. (Pfeil von C zu C hat die Beschriftung r.)

(b) $r \geq 0$, weil nicht weniger als 0 ME abgegeben werden können. Weiter $r \leq 0,8$, da nicht mehr als 100% der Produktion verteilt werden können.

(c) $y = x - T_{0,1} \cdot x = \begin{pmatrix} 16 \\ 78 \\ 52 - 60r \end{pmatrix}$.

(d) Mit $r = 0,1$ folgt $T_{0,1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$. Sei x wie gefordert, dann gilt $y = x - T_{0,1} \cdot x = \frac{7}{10}x$.

Aufgabe 8

(a) $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$. Graph trivial.

(b) Nach einem Jahr gilt: $p_1 = M \cdot p_0 = M \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$. Nach zwei Jahren gilt $p_2 = M \cdot p_1 = \begin{pmatrix} 34 \\ 66 \end{pmatrix}$.

(c) Die Spalten der Grenzmatrix entsprechen im Verhältnis den Einträgen in den Fixvektoren. Normiert auf 100% ergibt sich $p_f = 100 \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \end{pmatrix}$. Langfristig wird nach diesem Modell also nur noch ein Viertel der Deutschen verheiratet sein, während drei Viertel entweder niemals heiraten oder gerade geschieden bzw. verwitwet sind.

Aufgabe 9

(a) Trivial.

(b) Nach einem Jahr gilt $p_1 = M \cdot p_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,9 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 27 \\ 33 \end{pmatrix}$. Für die Verteilung nach fünf Jahren gilt $p_5 = M^5 \cdot p_0$ bzw. $p_5 = M \cdot p_4$.

(c) Für die Grenzmatrix gilt $M_G = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,75 & 0,75 \end{pmatrix}$. Die Grenzmatrizen bzw. langfristigen Verteilung in beiden Aufgaben haben gemein, dass jeweils ein Viertel der Bevölkerung verheiratet ist. Im ersten, einfachen Modell sind die übrigen drei Viertel Singles (allerdings inklusive der Geschiedenen und Verwitweten). Im komplizierteren Modell stellt sich heraus, dass langfristig gar keine echten Singles, d.h. Personen, die niemals heiraten, übrig bleiben. Die gesamten restlichen drei Viertel der Bevölkerung gehören zur Gruppe derjenigen, die geschieden oder verwitwet ist, also schon (mindestens) ein Mal verheiratet gewesen ist.