Hinweis: Wir verstehen in dieser Serie unter der *Vektordarstellung* eines Punktes $P(x|y)$ den Spaltenvektor $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1

Die Spiegelung an der Abszisse ist eine lineare Abbildung, die mithilfe einer Matrix beschrieben werden kann. Dabei wird jeder Punkt $P(x|y)$ auf den Punkt $P'(x|-y)$ agebildet.

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass $A \cdot p = p'$.

(b) Bilden Sie den Punkt $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf seinen Spiegelpunkt p' ab.

(c) Entscheiden Sie begründet, ob die Matix A invertierbar ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die einen Punkt $P(x|y)$ auf einen anderen Punkt P' abbildet.

(a) Berechnen Sie, auf welchen Punkt $P(2|7)$ abgebildet wird.

(b) Bestimmen Sie, welcher Punkt auf das Bild $P'(-3|0)$ abgebildet wird.

(c) Beschreiben Sie die Wirkung der Abbildung A.

(d) Ermitteln Sie die Elemente der Menge $\mathcal{F}$, die die Fixpunkte der Abbildung A enthält.

Aufgabe 3

Sei $g(x) = 2x + 3$ eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Koeffizientenvektor $v_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie den Koeffizentenvektor $v_{g'}$ der ersten Ableitung von g an. (Er ist ebenfalls vom Typ 2×1.)

(b) Bestimmen Sie die Differentialmatrix D so, dass $D \cdot v_g = v_{g'}$.

(c) Weisen Sie nach, dass $D^T \cdot v_{g'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = v_g$.

(d) Sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Begründen Sie, dass G genau die Vektordarstellungen aller Punkte auf der Geraden g enthält.

(e) Sei $h(x) = mx + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}, m \neq 0$ eine lineare Funktion. Geben Sie die Menge H an, die genau die Vektordarstellungen aller Punkte auf der Geraden h enthält.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ der Vektor $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage entweder *wahr* oder *falsch* ist.

Aussage	K	F
$b \cdot A = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$		
$det(A) \neq 0$		
Das LGS $A \cdot x = b$ ist eindeutig lösbar. (x hat passenden Typ.)		
Die Inverse A^{-1} existiert.		
$rg(A) \neq 3$		
$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lösung des LGS $A \cdot x = b$.		

Aufgabe 5

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine stochastische Matrix. Zeigen Sie, dass dann auch M^2 stochastisch ist.

Aufgabe 6

Gegeben ist eine stochastische Matrix M mit der Eigenschaft: $M^2 = \begin{pmatrix} 0.2 & a \\ 0.8 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,44 & d \\ c & 0,65 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die fehlenden Matrixelemente a, b, c und d.

(b) Überprüfen Sie, ob die Matrix M^2 auch eine stochastische Matrix ist.

Aufgabe 7

Ein Unternehmen hat drei Niederlassungen N_1, N_2 und N_3, die nach dem Leontief-Modell $y = x - Ax$ mit dem Markt verflochten sind. Für die Technologiematrix A gilt dabei $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeichnen und beschriften Sie das zugehörige Übergangsdiagramm für eine Marktabnahme von $y = \begin{pmatrix} 18 & 36 & 54 \end{pmatrix}^T$.

(b) Bestimmen Sie den Produktionsvektor x für die genannte Marktabnahme.

(c) Das Verhältnis der Produktionsmengen zwischen N_1, N_2 und N_3 soll $2:3:3$ betragen. Ermitteln Sie die Marktabnahme, wenn in N_3 genau 180 ME produziert werden.