Aufgabe 1 (Wertverlust)

Ein Auto kostet als Neuwagen 50 GE, nach vier Jahren ist es als Gebrauchtwagen noch genau die Hälfte wert. Der Restwert des Fahrzeuges soll zunächst durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

(a) Geben Sie die Gleichung für die Restwertfunktion an.

(b) Ermitteln Sie den Restwert nach 10 Jahren und geben Sie den Wertverlust bis zu diesem Zeitpunkt in Prozent an.

(c) Begründen Sie, dass der Wertverlust, d.h. die Änderung des Restwertes zum Zeitpunkt der Erstzulassung maximal ist.

In einem verbesserten Restwertmodell wird davon ausgegangen, dass mit dem Erreichen des Youngtimer-Alters (20 Jahre nach Erstzulassung) der geringste Restwert erreicht ist und der Wert danach wieder ansteigt. Aus diesem Grund soll der Restwert ab einem Alter von 15 Jahren durch eine quadratische Funktion modelliert werden. Diese soll neben der korrekten Abbildung des Punktes des geringsten Restwertes näherungsweise sprung- und knickfrei in die Exponentialfunktion übergehen.

(a) Ermitteln Sie die Gleichung der gesuchten quadratischen Funktion.

(b) Bestimmen Sie den Restwert zu Beginn des Oldtimer-Alters (30 Jahre nach Erstzulassung).

(c) Berechnen Sie, wie lange das Fahrzeug theoretisch von einem Neuwagenkäufer gehalten werden müsste, damit der Restwert wieder dem Neupreis entspricht.

Lösung

(a) Ansatz ist entweder $w(t) = a \cdot b^t$, dann folgt mit `NLöse({w(0)=50, w(4)=1/2*w(0)},{a,b})`, dass $w(t) = 50 \cdot -0,8409^t$. Da es sich um eine Zerfallsfunktion handelt, kann alternativ der Ansatz $y(t) = a \cdot e^{-\lambda t}$ verwendet werden. Da für die Halbwertszeit $t_H = 4$ gilt, kann a als Startwert (50 GE) bestimmt werden und λ über die Formel der Halbwertszeit $\lambda = \frac{ln(2)}{t_H} = \frac{ln(2)}{4} \approx -0,1732$. Es ergibt sich $y(t) = 50 \cdot e^{-0,1732 \cdot t}$.

(b) Es gilt $y(10) \approx 8.8465$ und der Wertverlust beträgt somit $1 - \frac{w(10)}{w(0)} \approx 0.8231 = 82,31\%$.

(c) Der Wert der zweiten Ableitung $y''(t)$ ist an der Stelle $t = 0$ maximal im Bereich $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(a) Sei $d(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ der Ansatz für die gesuchte Parabel. Löse dann das LGS mit $d(15) = y(15), d'(15) = y'(15)$ und $d'(20) = 0$. Es ergibt sich $d(x) = 0.0644x^2 - 2.578x + 27.8897$.

(b) $d(30) \approx 8,5097$.

(c) Mit GeoGebra z.B. `NLöse(d(x)=50)`. Man erhält $x \approx 47,291$ Jahre. (Die negative Lösung entfällt im Sachzusammenhang.)