

THEODOR-LITT-SCHULE NEUMÜNSTER

MATHEMATIK-PROJEKT

Geogebra Handbuch

Version 1.2

Leon und Finn Heinitz

beaufsichtigt von
Herrn Julius ANGRES

23. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	4
2.1	Erstellen einer Funktion in Geogebra	4
2.2	Erstellung eines Schiebereglers	4
2.3	Eine Funktion ausrechnen	5
3	Wichtige Eingabefunktionen für Geogebra	7
3.1	Analysis	7
3.1.1	Ableitung	7
3.1.2	n-te Ableitung einer Funktion	8
3.1.3	Partielle Ableitung einer Funktion	9
3.1.4	n-te partielle Ableitung einer Funktion	9
3.1.5	Andere Möglichkeit zur Ableitung bei Geogebra	10
3.1.6	Lösen einer Gleichung	11
3.1.7	Lösen einer Gleichung anhand einer Variable	11
3.1.8	Lösung eines Gleichungssystems	12
3.1.9	Unbestimmtes Integral	13
3.1.10	Partielle Integration	14
3.1.11	Bestimmtes Integral	14
3.1.12	Integral zwischen (bestimmt)	15
3.1.13	Funktion der Buttons	15
3.1.14	Manuelle Punktbestimmung	16
3.1.15	Schnittpunkt	18
3.1.16	Extremum	20
3.1.17	Nullstellen	22
3.1.18	Strecke	24
3.2	Lineare Algebra	25
3.2.1	Matrix/Vektor erstellen	25
3.2.2	Einheitsmatrix erzeugen	27
3.2.3	Matrizen multiplizieren	27

3.2.4	Transponiere	28
3.2.5	Invertiere	29
3.2.6	Determinante	29
3.2.7	Rang einer Matrix	30
3.2.8	Matrix/Vektor erstellen in Derive	31
3.2.9	Matrizen multiplizieren in Derive	31
3.3	Statistik	32
3.3.1	Regressionsmodell	32
3.3.2	Boxplot	33
3.3.3	Histogramm	34
3.4	Stochastik	35
3.4.1	Binomialverteilung	35
3.4.2	Normalverteilung	35
3.5	Quelle	36

Kapitel 1

Einleitung

In der folgenden Ausarbeitung ist ein Geogebra-Handbuch mit den wichtigsten Eingabefunktionen für die drei Themenbereiche Analysis, lineare Algebra und Stochastik angefertigt worden. Dieses Handbuch soll vor allem unterstützend als Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik sein. Die Eingabefunktionen sind an Beispielen anschaulich dargestellt.

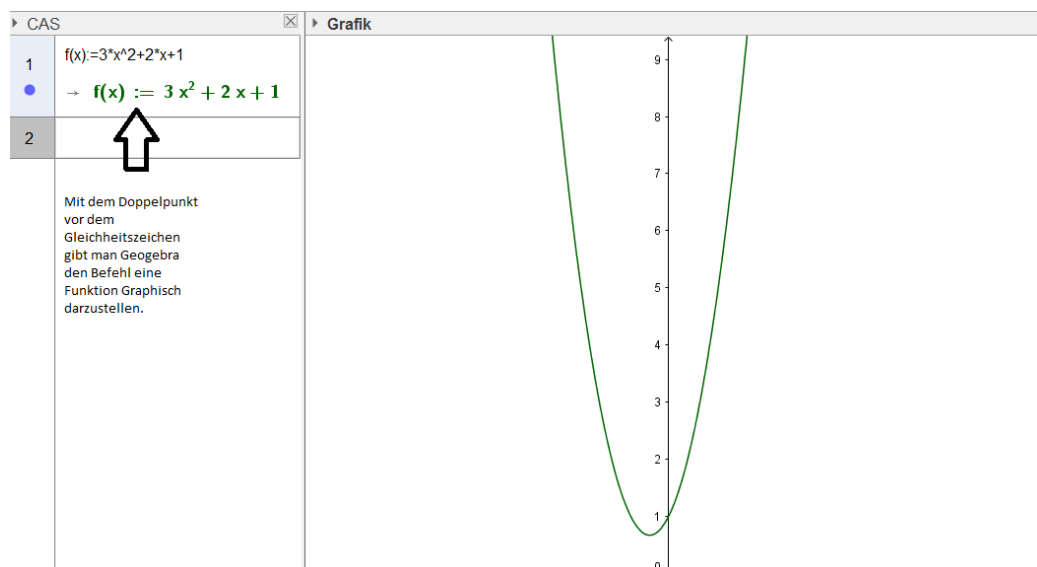
Version	Autoren
1.0	Finn Heinitz, Leon Heinitz
1.1	Julius Angres
1.2	Shirin Händel, Zeynep Polat, Djarmila Rerich, Jaqueline Stüben, Jochen Ulrich

Kapitel 2

Grundlagen

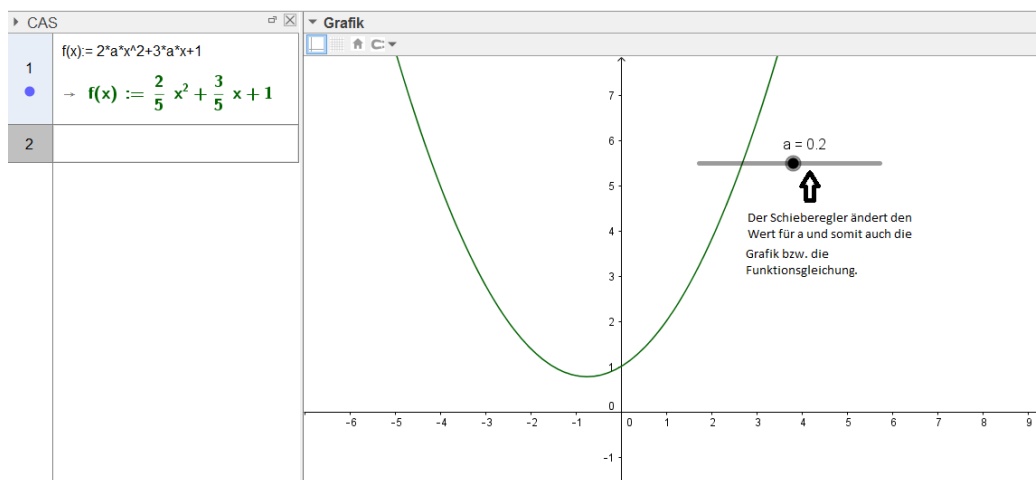
2.1 Erstellen einer Funktion in Geogebra

Eine Funktion, die auch als Graphik dargestellt werden soll, wird folgendermaßen erstellt:



2.2 Erstellung eines Schiebereglers

Um die Parameter in einer Funktion zu verändern und die Veränderung graphisch darzustellen wird häufig ein Schieberegler verwendet:



Es ist zu beachten, dass der Schieberegler *vor* dem Erstellen der Funktion angelegt wird, da sie erst dann den Funktionswert (beliebige Variable, im Bsp. a) verändert. Den Schieberegler kann man erstellen, indem man in GeoGebra auf die Grafik klickt und dann in der Menüleiste den Schieberegler auswählt. Zum Schluss muss man nur noch einmal auf die Graphik klicken um den Regler anzulegen.

2.3 Eine Funktion ausrechnen

In der folgenden Grafik wird dargestellt, wie eine Funktion berechnet wird:

CAS	
1	$f(x) := 3x^2 + 2x + 5$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := 3x^2 + 2x + 5$
2	$f(3)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 38$
3	<p>Man setzt einen Wert für x bei $f(x)$ ein und erhält die Lösung.</p>

Kapitel 3

Wichtige Eingabefunktionen für Geogebra

Nach den Grundlagen der Geogebra Eingabefunktionen kommen wir nun zu den 3 (bzw. 4) großen Themengebieten der Mathematik im BG. Diese sind Analysis, lineare Algebra und Stochastik.

3.1 Analysis

3.1.1 Ableitung

Ableitung [`<Funktion>`]:

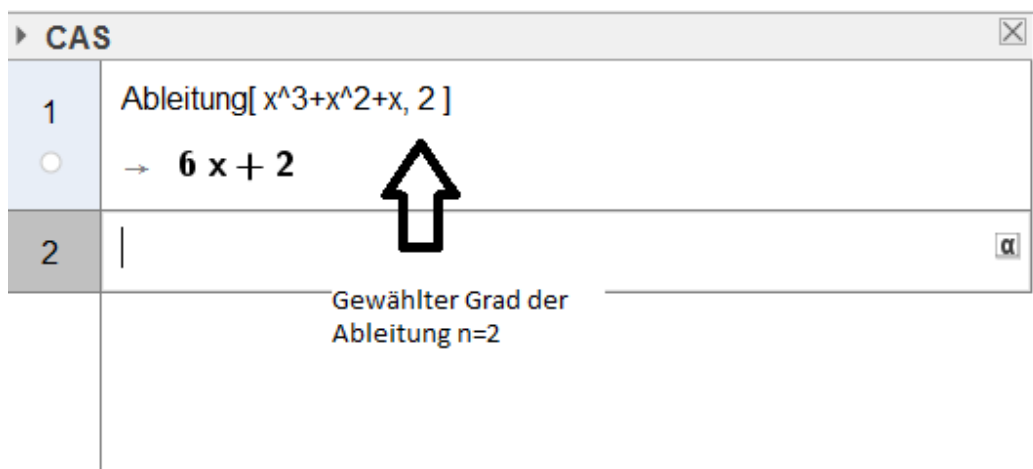
Mit diesem Befehl wird die Funktion genau einmal abgeleitet.

CAS	
1	Ableitung[x^3+x^2+x]
<input type="radio"/>	→ $3x^2 + 2x + 1$
2	<input type="text"/>

3.1.2 n-te Ableitung einer Funktion

Ableitung[<Funktion>,<Grad der Ableitung>]:

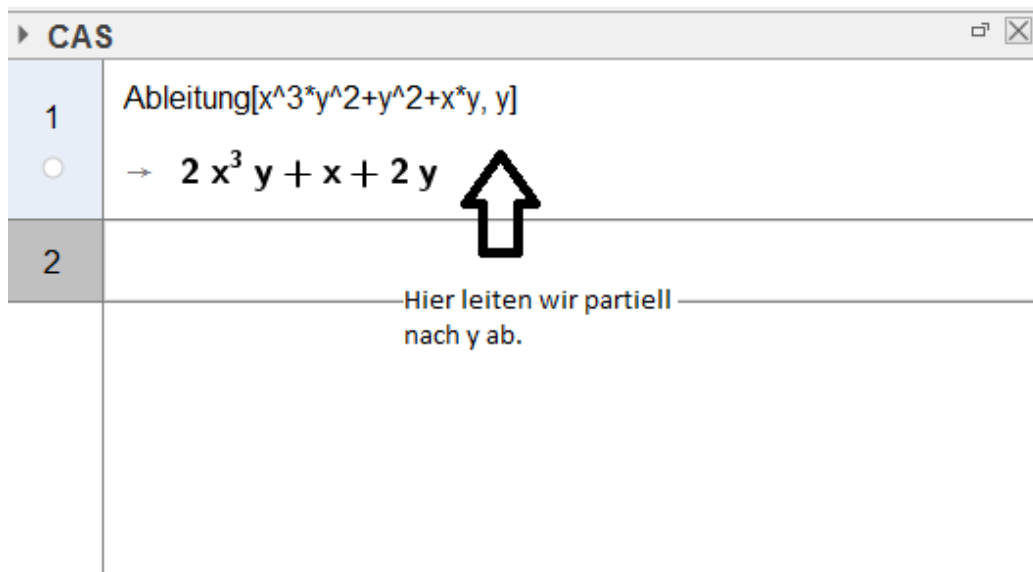
Mit diesem Befehl kann man bestimmen, wie oft die Funktion abgeleitet werden soll. Die Zahl n stellt also den Grad der Ableitung dar.



3.1.3 Partielle Ableitung einer Funktion

Ableitung[<Funktion>,<Variable>]:


Bei diesem Befehl wird partiell nach einer Variable abgeleitet, wenn 2 oder mehrere Variable in einer Funktion vorkommen (z.B. x,y).



3.1.4 n-te partielle Ableitung einer Funktion

Ableitung[<Funktion>,<Variable>,<Grad der Ableitung>]:

Bei diesem Befehl kann man den Grad der Ableitung bestimmen und nach welcher Variablen abgeleitet werden soll.

CAS	
1	Ableitung[x^3+3*x*y, x, 2]
<input type="radio"/>	→ 6 x
2	
	 <p>Es wird partiell nach x abgeleitet und der gewählte Grad der Ableitung ist n=2.</p>

3.1.5 Andere Möglichkeit zur Ableitung bei Geogebra

Ebenfalls ist auch noch eine andere Möglichkeit vorhanden um bei Geogebra abzuleiten. Diese ist in der folgenden Grafik zu sehen.

CAS	
1	f(x):=3*x^3+2*x^2+x
<input checked="" type="radio"/>	→ f(x) := 3 x³ + 2 x² + x
2	f'(X)
	→ 9 X² + 4 X + 1
3	f''(x)
<input type="radio"/>	→ 18 x + 4
4	f'''(x)
<input type="radio"/>	→ 18
	Der ' steht für den Grad der Ableitung.

3.1.6 Lösen einer Gleichung

Der Befehl `Löse` löst eine Gleichung oder ein System von Gleichungen symbolisch über den reellen Zahlen. Um Gleichungen numerisch zu lösen wird `NLöse` verwendet. Man erhält einen dezimalen Näherungswert für alle Ergebnisse.

`Löse[<Gleichung in x>]:`

Löst die angegebene Gleichung für die Variable x und erzeugt eine Liste mit allen Lösungen.

The screenshot shows the CAS (Computer Algebra System) interface. The menu bar includes 'Datei', 'Bearbeiten', 'Ansicht', 'Einstellungen', 'Werkzeuge', and 'Fenster'. The toolbar contains various mathematical symbols and functions. The main window is divided into two panes: 'CAS' and 'Grafik'. The 'CAS' pane shows a list of commands and their results. The first command is `Löse[x^2=4*x]`, which results in $\{x = 0, x = 4\}$. The second command is `NLöse[x^2=4*x]`, which also results in $\{x = 0, x = 4\}$. A third command is shown but is empty. A text box on the right explains that the `Löse` command solves the equation for the variable x and creates a list of results.

1	<code>Löse[x^2=4*x]</code>	$\rightarrow \{x = 0, x = 4\}$
2	<code>NLöse[x^2=4*x]</code>	$\rightarrow \{x = 0, x = 4\}$
3		

Löst die Variable x für die gegebene Gleichung und erstellt eine Liste der Ergebnisse.

3.1.7 Lösen einer Gleichung anhand einer Variable

`Löse[<Gleichung>, <Variable>]:`

Löst eine Gleichung, die abhängig von einer anderen Variablen und nicht nur

von x abhängig ist (im Bsp. a).

The screenshot shows a software interface with a menu bar (Datei, Bearbeiten, Ansicht, Einstellungen, Werkzeuge, Fenster) and a toolbar with various mathematical symbols. The main window is divided into two panes: 'CAS' and 'Grafik'. In the 'CAS' pane, the command 'Löse[4*a=x*a^2,a]' is entered in line 1. The result is displayed as $\rightarrow \left\{ a = \frac{4}{x}, a = 0 \right\}$. In line 2, there is a large black arrow pointing upwards towards the variable 'a' in the command. Below the arrow, the text reads: 'Löst die Gleichung für die angegebene, unbekannte Variable. Erstellt eine Liste von Ergebnissen.'

3.1.8 Lösung eines Gleichungssystems

`Löse[<Liste von Gleichungen>,<Liste von Variablen>]:`

Lösung eines Gleichungssystems für die vorhandenen Variablen (im Bsp. x, y).

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster

= \approx \checkmark $\frac{15}{3 \cdot 5}$ $(())$ $\frac{7}{\square}$ $x =$ $x \approx$ f'


CAS		Grafik
1	$\text{Löse}[\{x=4*x+y, 2=x+y\}, \{x, y\}]$ $\rightarrow \{\{x = -1, y = 3\}\}$	
2	$\text{NLöse}[\{x=4*x+y, 2=x+y\}, \{x, y\}]$ $\rightarrow \{x = -1, y = 3\}$	
3		

Löst ein Gleichungssystem gegen die gegebenen Variablen und erstellt eine Liste mit den Ergebnissen.

3.1.9 Unbestimmtes Integral

`Integral[<Funktion>]:`


Dieser Befehl berechnet das unbestimmte Integral der Funktion nach ihrer Hauptvariablen. Es wird dementsprechend die Stammfunktion ermittelt (inklusive Integrationskonstante).

1	$\text{Integral}[x^3]$ $\rightarrow \frac{1}{4} x^4 + c_1$
2	 Dies ist die Stammfunktion eines unbestimmten Integrals. Funktion wurde also aufgeleitet.

3.1.10 Partielle Integration

$\text{Integral}[\langle \text{Funktion} \rangle, \langle \text{Variable} \rangle]$:

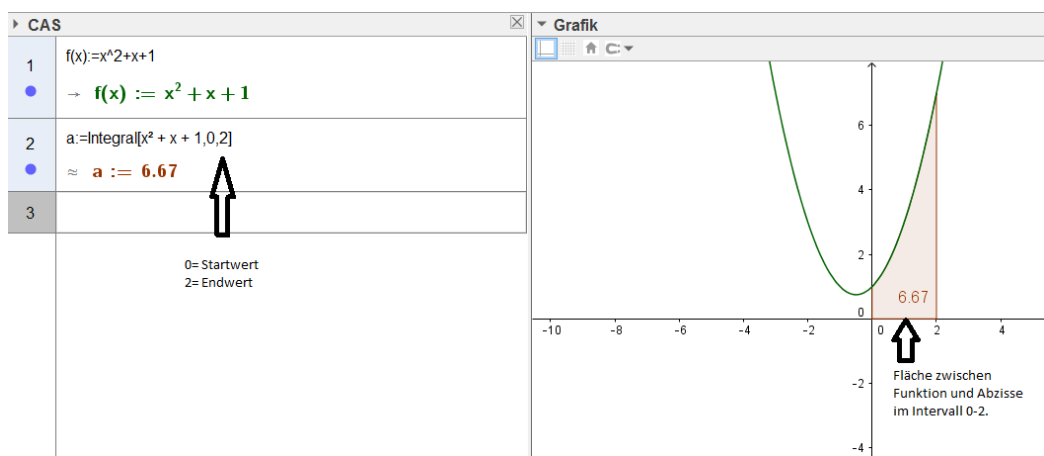
Bestimmt die partielle Integration nach der angegebenen Variable eines unbestimmten Integrals.

▶ CAS	
1	$\text{Integral}[x^3+3*x*y, x]$ $\rightarrow \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 y + c_1$
2	 Dies ist die Stammfunktion und wurde nach der Variablen x aufgeleitet.

3.1.11 Bestimmtes Integral

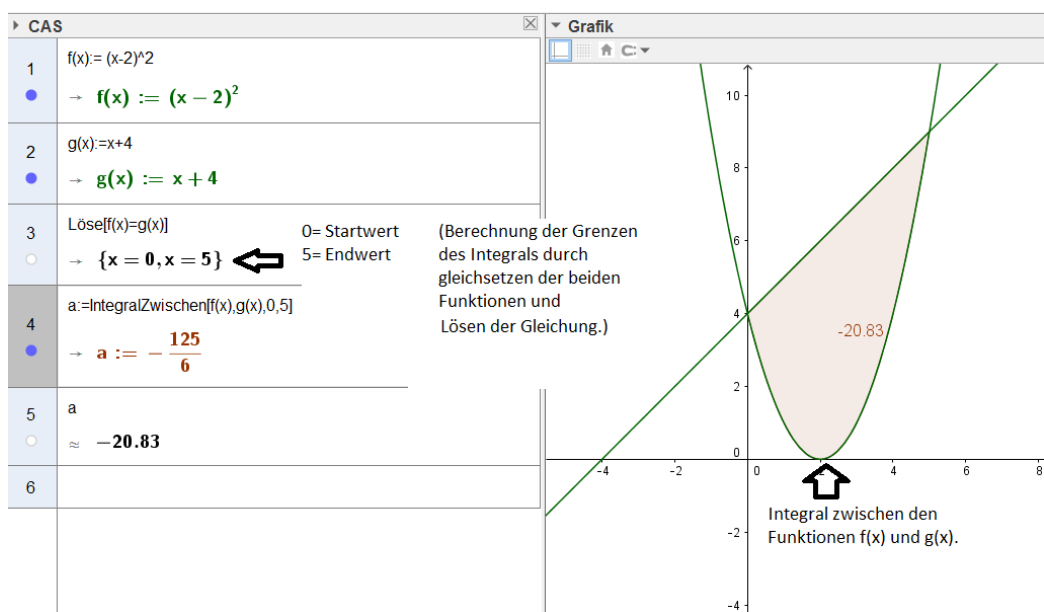
$\text{Integral}[\langle \text{Funktion} \rangle, \langle \text{Startwert} \rangle, \langle \text{Endwert} \rangle]$:

Dieser Befehl berechnet das bestimmte Integral einer gegebenen Funktion nach der Hauptvariablen. Es ist ein Intervall gegeben, welches sich in Form des Startwertes und Endwertes äußert.



3.1.12 Integral zwischen (bestimmt)

IntegralZwischen[<Funktion>, <Funktion>, <Startwert>, <Endwert>]:
 Dieser Befehl gibt das bestimmte Integral der Differenz zweier Funktionen in einem Intervall an. Hierbei wird das Intervall wieder in Form des Startwertes und Endwertes dargestellt.



3.1.13 Funktion der Buttons

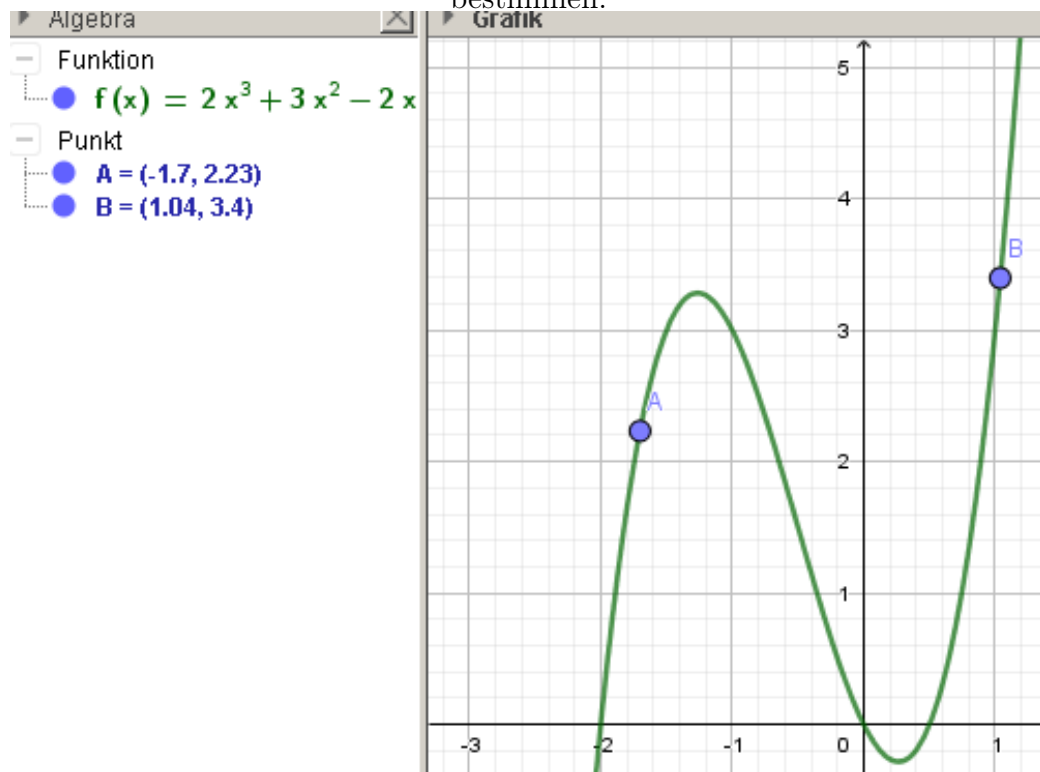
Bestimmung eines Punktes, Schnidepunktes, Extremum, Nullstellen und einer Strecke im Koordinatensystem.

3.1.14 Manuelle Punktbestimmung




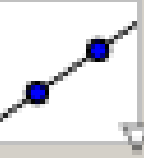
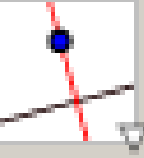


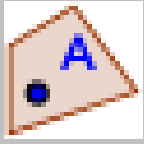
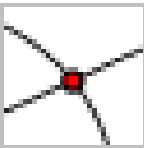

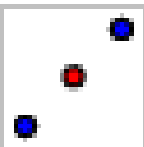

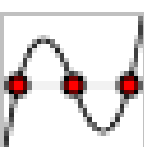
Mit der manuellen Punktbestimmung kann man einen beliebigen Punkt

bestimmen.

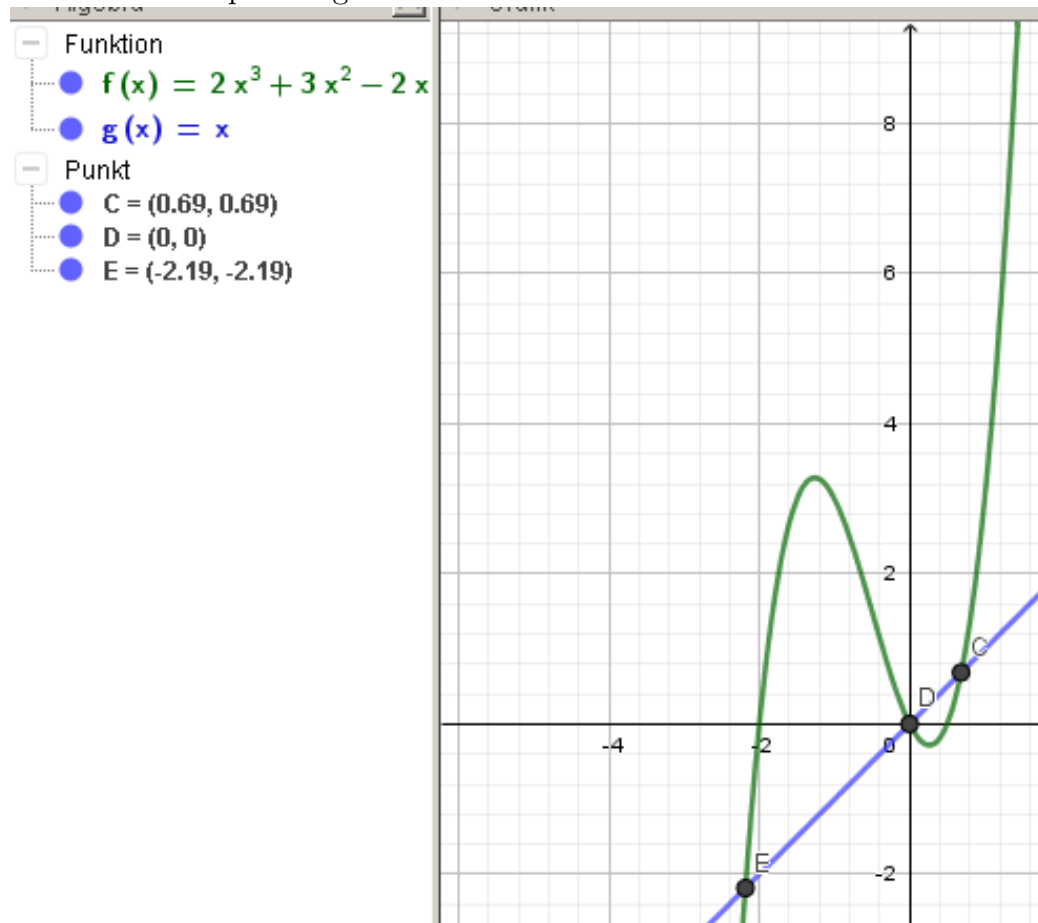


Möglich auch mit mehreren Punkten.

3.1.15 Schnittpunkt

				
 <p>Punkt</p>	 <p>Punkt auf Objekt</p>	 <p>Punkt anhängen / loslösen</p>		
 <p>Schneide</p>				
 <p>Mittelpunkt</p>				
 <p>Komplexe Zahl</p>				
 <p>Extremum</p>				
 <p>Nullstellen</p>				

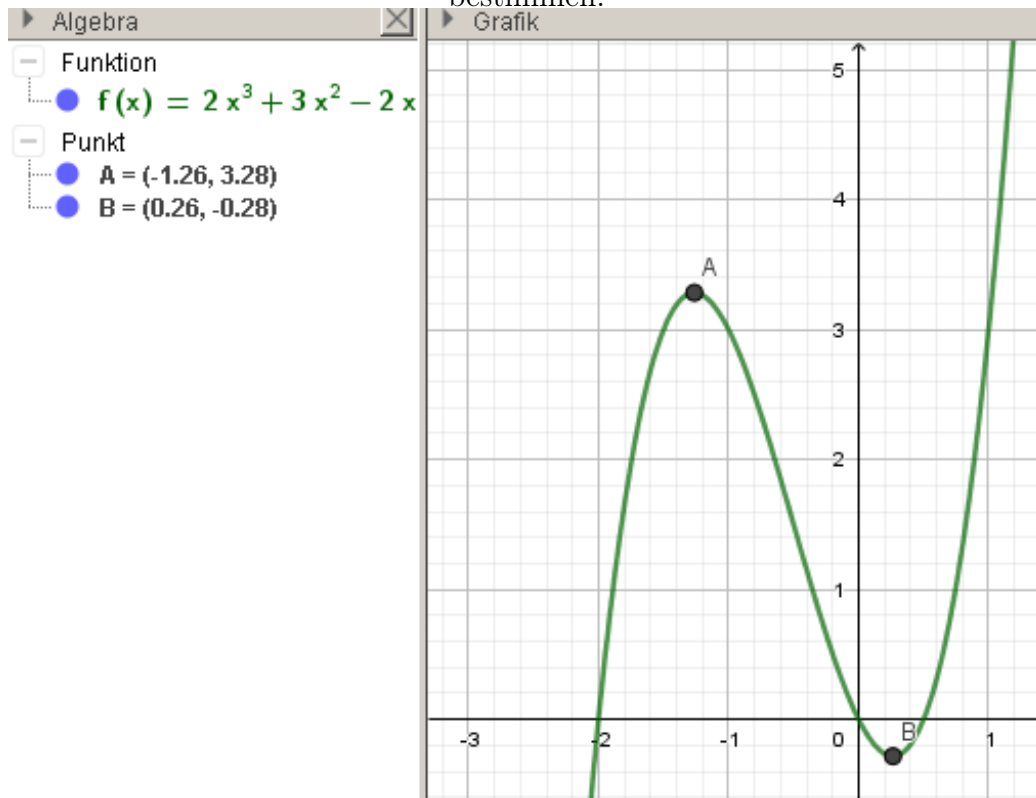
Schneidepunkte geben an wo sich zwei Funktionen schneiden.



3.1.16 Extremum

				
 <p>Punkt</p>	 <p>Punkt auf Objekt</p>	 <p>Punkt anhängen / loslösen</p>		
 <p>Schneide</p>	 <p>Mittelpunkt</p>			
 <p>Komplexe Zahl</p>	 <p>Extremum</p>			
 <p>Nullstellen</p>				

Mit dem Extremum kann man die Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion bestimmen.

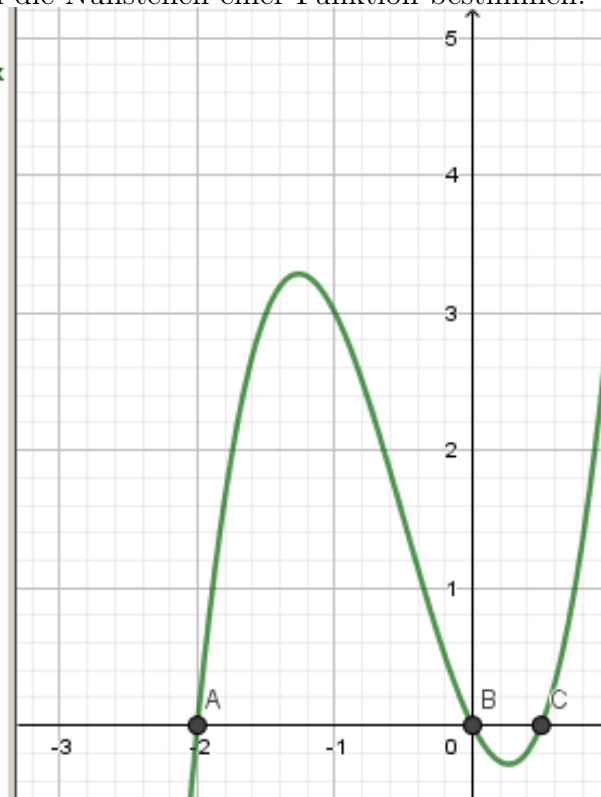


3.1.17 Nullstellen

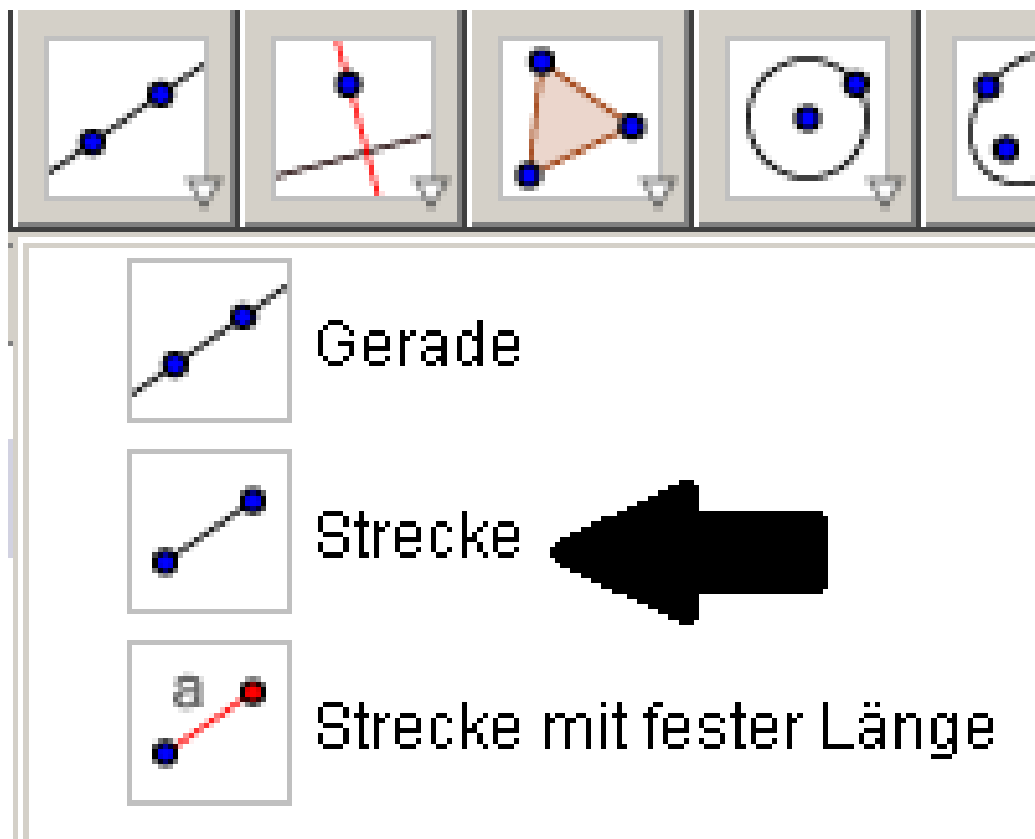
				
 <p>Punkt</p>	 <p>Punkt auf Objekt</p>	 <p>Punkt anhängen / loslösen</p>		
 <p>Schneide</p>	 <p>Mittelpunkt</p>			
 <p>Komplexe Zahl</p>	 <p>Extremum</p>	 <p>Nullstellen²⁾</p>		

Mit den Nullstellen kann man die Nullstellen einer Funktion bestimmen.

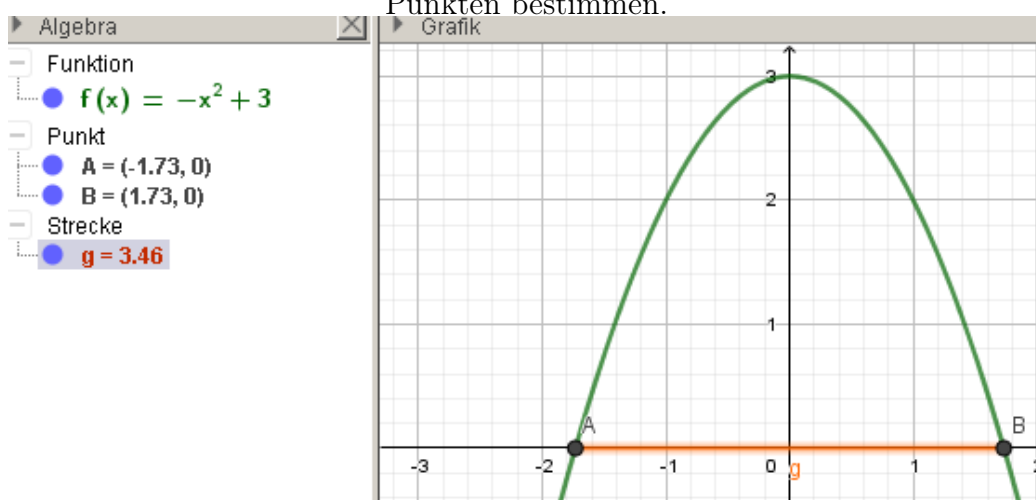
- ☐ Funktion
 - $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$
- ☐ Punkt
 - $A = (-2, 0)$
 - $B = (0, 0)$
 - $C = (0.5, 0)$



3.1.18 Strecke



Mit Hilfe der Strecke kann man einen gewissen Abstand zwischen zwei Punkten bestimmen.



3.2 Lineare Algebra

3.2.1 Matrix/Vektor erstellen

Eine Matrix bzw. ein Vektor kann mithilfe der Tabellenfunktion erstellt werden.:

The screenshot shows the TI-Nspire interface with two views: Algebra and Tabelle (Table).

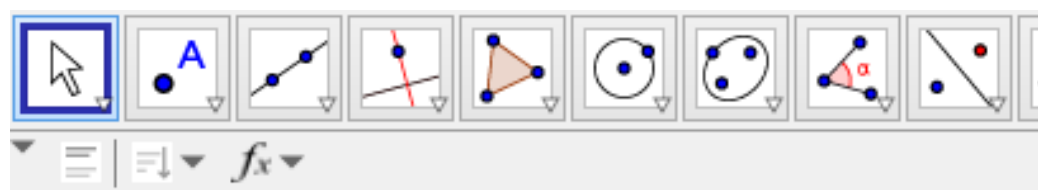
Algebra View:

- Matrix1** is defined as a 3x3 matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 13 & 11 & 7 \\ 98 & 70 & 9 \end{pmatrix}$. It is labeled "Matrix".
- Matrix2** is defined as a 3x1 vector: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. It is labeled "Vektor".

Tabelle View:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	1	4	5			
4	13	11	7			
5	98	70	9			
6						
7	1	Erstellen der Matrix:				
8	2	- Felder Makieren				
9	3	- Rechtsklick				
10		- Auf "Erzeugen" klicken				
11		- Auf "Matrix" klicken				
12						
13						
14						
15						

Ebenfalls kann man eine Matrix oder einen Vektor auch in der Eingabeleiste erstellen:



Liste

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$M=\{\{1,1,0\},\{0,0,1\},\{2,2,2\}\}$
in das Eingabefenster
eingeben.



Eingabe:

3.2.2 Einheitsmatrix erzeugen

Einheitsmatrix[<Zahl>]:

Dieser Befehl gibt eine Einheitsmatrix einer gegebenen Größe (Dimension) an.

The screenshot shows a software interface with a menu bar at the top: 'Datei', 'Bearbeiten', 'Ansicht', 'Einstellungen', 'Werkzeuge', 'Fenster', 'Hilfe'. Below the menu is a toolbar with various mathematical symbols and functions. The main window is titled 'CAS' and contains a command input area and a result area. In the command input area, the text 'Einheitsmatrix[3]' is entered. The result area displays the 3x3 identity matrix:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
. Below the result, there is a text box containing the message: 'Der Befehl erzeugt eine Matrix mit der Größe 3x3.' An arrow points from the text box to the result area.

3.2.3 Matrizen multiplizieren

Bevor man Matrizen multiplizieren kann, müssen die jeweiligen Matrizen erstellt werden.

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe

CAS

1 Matrix1*Matrix2
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 36 & 30 & 23 \\ 48 & 54 & 37 \\ 78 & 72 & 53 \end{pmatrix}$

2

Die erzeugten Matrizen Matrix1, Matrix2 werden miteinander multipliziert.

Algebra

Liste

- Matrix1 = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
- Matrix2 = $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.2.4 Transponiere

Transponiere[<Matrix>]:

Dieser Befehl transponiert, d.h. vertauscht Zeilen und Spalten in der gegebenen Matrix.

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe

CAS

1 Transponiere[Matrix1]
 $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2

Die transponierte Matrix1

Algebra

Liste

- Matrix1 = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3.2.5 Invertiere

Invertiere[<Matrix>]:

Dieser Befehl invertiert die gegebene Matrix. In der folgenden Graphik sind zwei verschiedene Möglichkeiten zum Invertieren einer Matrix aufgezeigt.

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe

= **≈** ✓ 15 3.5 (()) 7 x = x ≈ f'

CAS Algebra

1	Invertiere[{{1,2},{3,4}}]	
	$\approx \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$	<p>Bestimmung der Inverse von Matrix1 mithilfe der beiden hierfür vorgesehenen Möglichkeiten.</p>
2	Matrix1^-1	
	$\approx \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$	
3		

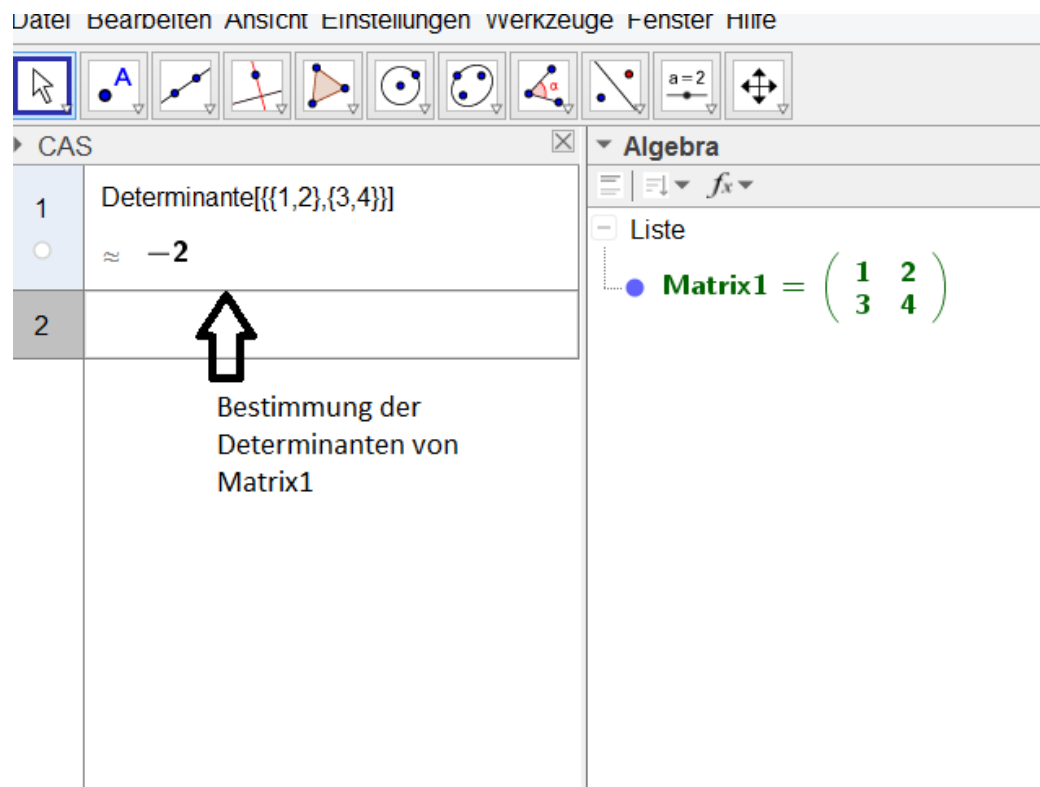
Liste

Matrix1 = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.2.6 Determinante

Determinante[<Matrix>]:

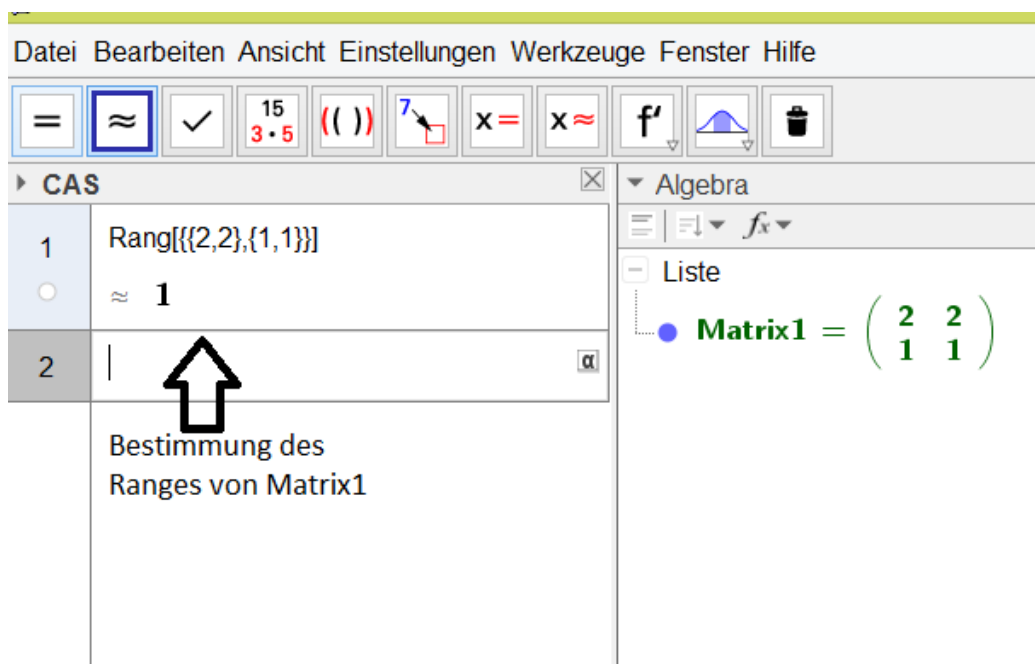
Dieser Befehl berechnet die Determinante einer Matrix.



3.2.7 Rang einer Matrix

`Rang[<Matrix>]:`

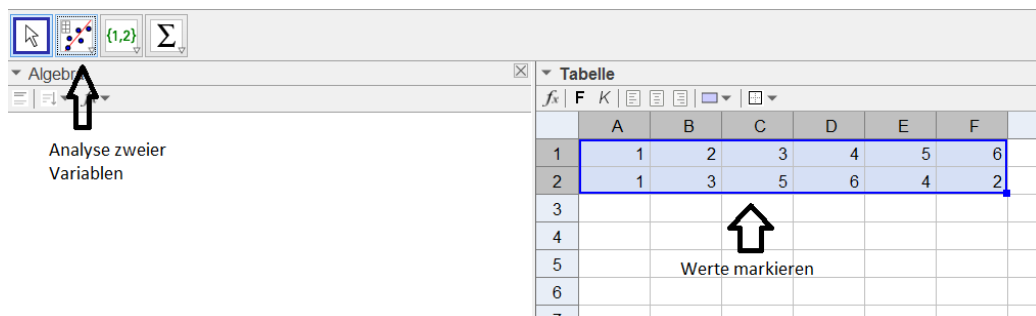
Dieser Befehl wird benötigt um den Rang einer Matrix zu bestimmen.



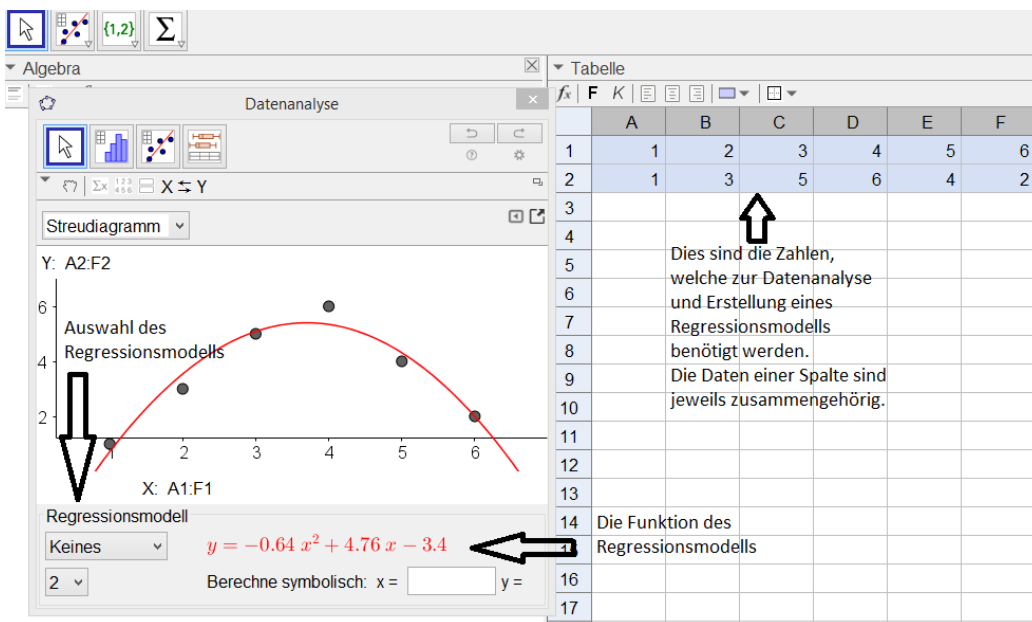
3.3 Statistik

3.3.1 Regressionsmodell

Ein Regressionsmodell stellt den funktionalen Zusammenhang verschiedener Werte dar. Um ein solches Modell zu erstellen muss man die Werte, die man in einen Zusammenhang setzen möchte, in einer Tabelle markieren. Dann muss der Button *Analyse zweier Variablen* im Menüband ausgewählt werden. Als Hilfestellung zur Erstellung des Modelles ist hier eine weitere Graphik:



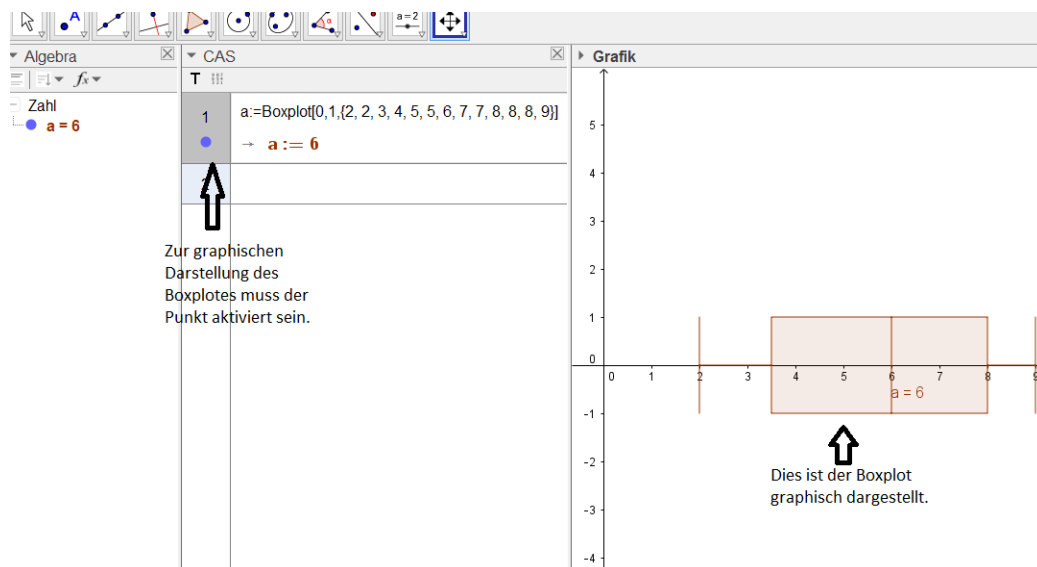
In der folgenden Graphik ist ein fertiges Regressionsmodell zu sehen:



3.3.2 Boxplot

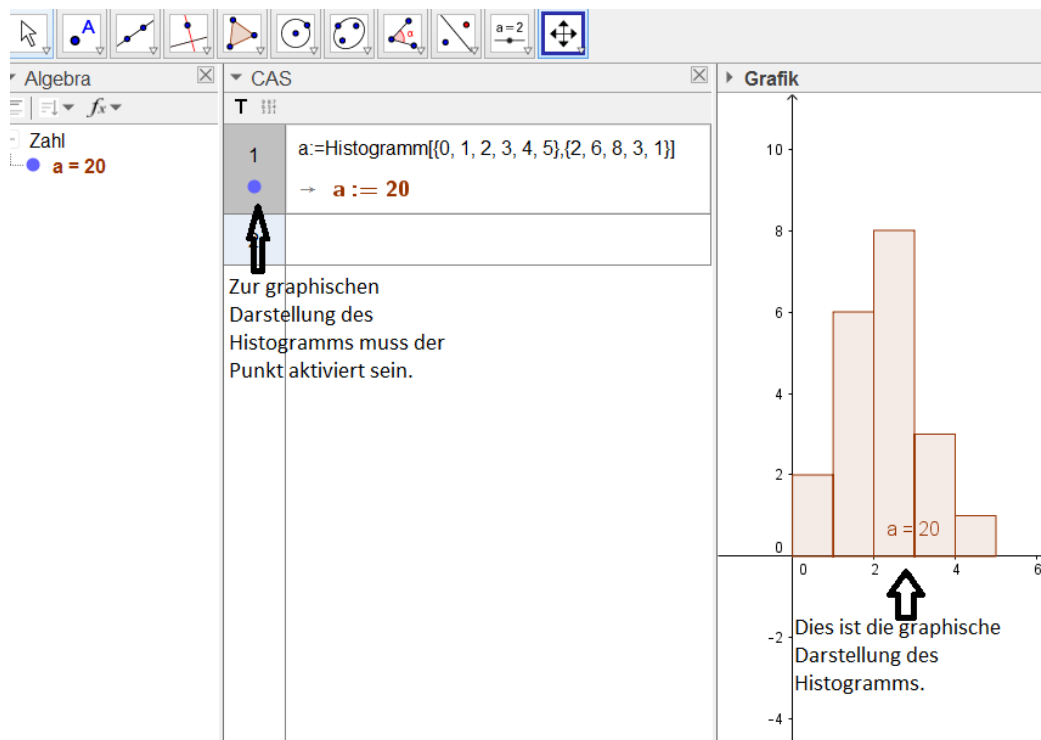
Boxplot[<y Abstand>, <y Skalierung>, <Liste von Rohdaten>]:

Dieser Befehl erstellt einen Boxplot mit den vorhandenen Rohdaten. Seine vertikale Position im Koordinatensystem wird durch den "y Abstand" und den Faktor "y Skalierung", der die Höhe reguliert, beeinflusst.



3.3.3 Histogramm

`Histogramm[<Liste von Klassenbereichen>,<Liste von Balkenhöhen>]`:
Dieser Befehl erzeugt ein Histogramm mit Balken der gegebenen Höhe. Die Klassenbereiche bestimmen die Breite und die Position jedes Balkens.



3.4 Stochastik

3.4.1 Binomialverteilung

`Binomial[<Anzahl der Versuche>,<Erfolgswahrscheinlichkeit>,<Anzahl der Erfolge>,<Wahrheitswert Verteilungsfunktion>]`:

Wenn X eine Binomial-Zufallsvariable und v die Anzahl der Erfolge sind, wird $P(X = v)$ bei dem Wahrheitswert `false` berechnet und $P(X \leq v)$ bei dem Wahrheitswert `true`.

Bsp.: Es wird eine fehlerhafte Produktion von Datenchips betrachtet. Hierbei sind $\frac{2}{10}$ der produzierten Chips beschädigt. Dementsprechend liegt die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreich hergestellten Chip bei $\frac{8}{10}$. Im Beispiel wird die Situation anhand der Produktion von 4 Datenchips überprüft.

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe

= \approx \checkmark $\frac{15}{3.5}$ $(())$ $\frac{7}{\square}$ $x =$ $x \approx$ f'

CAS Graf

T		
1	Binomial[4, 0.8, 1, false] $\rightarrow \frac{16}{625}$	Es ergibt eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{16}{625}$, dass genau einer der 4 Datenchips erfolgreich produziert wurde.
2	Binomial[4, 0.8, 1, true] $\rightarrow \frac{17}{625}$	Es ergibt eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{17}{625}$, dass höchstens einer von 3 Datenchips erfolgreich produziert wurde.
3		

-4

3.4.2 Normalverteilung

Normal[<Mittelwert>, <Standardabweichung>, <Wert der Variablen v>]:
 Der Befehl berechnet die Funktion $\Phi((x - \mu)/\sigma)$ an der Stelle v . Hierzu wird der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ verwendet.

CAS	
T	
1	Normal[3, 0.6, 1]
<input type="radio"/>	\approx 0.0004
2	Normal[3, 0.6, 1]
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{\text{erf}\left(-5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + 1}{2}$
3	
	Der Befehl berechnet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Zufallsvariable $x <$ bzw. $=$ dem Wert der Variablen v ist (in diesem Bsp. $v=1$).

3.5 Quelle

<https://wiki.geogebra.org/de/Kategorie:Befehle>