

Name des Prüflings:	
Bearbeitungszeit:	80 Minuten
Hilfsmittel:	Taschenrechner, CAS

Aufgabe 1: Armbanduhren

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	3	3	4	4	3	5	22
Korrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Trotz der rapide voranschreitenden Digitalisierung und der Tatsache, dass mittlerweile mehr als 98 % der Deutschen im Alter von 16 bis 49 Jahren ein Smartphone besitzen, erfreuen sich hochwertige, klassische analoge Armbanduhren nach wie vor großer Beliebtheit. Ein wichtiger Bestandteil der Feinmechanik in diesen Uhren besteht aus Fadenpendeln, die mit kleinen Gewichten versehen sind, und dafür sorgen, dass die Uhr möglichst genau geht. Die Firma „Timeless“ stellt solche hochwertigen Armbanduhren in Handarbeit her.

Die Auslenkung eines Fadenpendel in einer Uhr von „Timeless“ kann vereinfacht mit der Funktion $y(t) = \hat{y} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei gibt $t \geq 0$ die Zeit in Sekunden (s), $y(t)$ die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage in Millimetern (mm) und f die Frequenz (in s^{-1}) der Schwingung an. Positive Werte von $y(t)$ geben eine Auslenkung nach rechts und negative Werte eine Auslenkung nach links aus der Ruhelage an.

Ein Pendel P_1 hat eine Auslenkung \hat{y} von 3 mm und einer Frequenz $f = 3 \text{ s}^{-1}$.

- a) **Berechnen** Sie die Auslenkung $y_1(t)$ des Pendels P_1 jeweils nach einer und nach drei Sekunden.

Ein zweites Pendel P_2 , das in anderen Uhren verbaut wird, hat ebenfalls eine Auslenkung \hat{y} von 3 mm, aber eine Frequenz von $f = 4 \text{ s}^{-1}$. Der Entwicklungschef von „Timeless“ findet die folgende unbeschriftete Abbildung 1.1 eines der beiden Pendel.

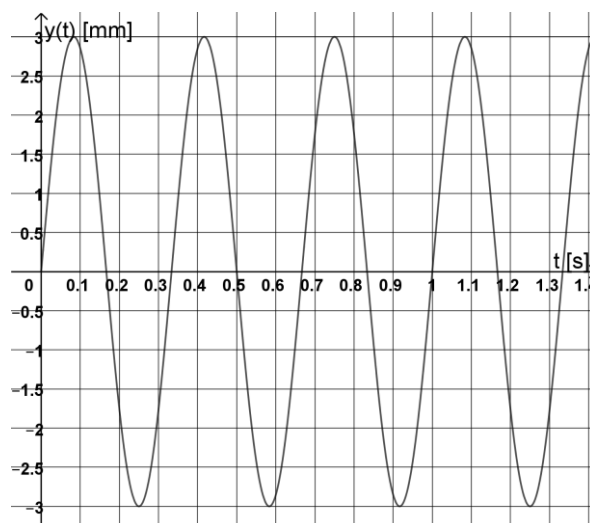


Abbildung 1.1

- b) **Entscheiden** Sie begründet, die Auslenkungsfunktion welches der beiden Pendel in der Abbildung dargestellt ist.
- c) **Berechnen** Sie für das Pendel P_2 die Zeitpunkte innerhalb der ersten halben Sekunde, an denen die Auslenkung genau 1 mm betrug.

In alten Konstruktionszeichnungen zum Pendel P_2 findet der Entwicklungschef zusätzlich zur Auslenkungsfunktion $y_2(t)$ die Funktion $Y(t) = -\frac{3}{8\pi} \cdot \cos(8\pi \cdot t)$.

- d) **Zeigen** Sie, dass $Y(t)$ eine Stammfunktion der Auslenkungsfunktion des Pendels P_2 ist.

Im Rahmen der Qualitätssicherung vergleicht der Entwicklungschef verschiedene Uhrenmodelle im Hinblick auf ihre Zuverlässigkeit. In Tabelle 1.1 ist für zehn Uhrenmodelle x_1, x_2, \dots, x_{10} von „Timeless“ dargestellt, wie häufig diese im letzten Jahr von Kunden als defekt reklamiert wurden. Leider ist der Wert für das Uhrenmodell x_{10} in den Aufzeichnungen nicht enthalten. Dafür ist jedoch aus einer anderen Tabelle ersichtlich, dass das arithmetische Mittel der Defekthäufigkeit bei $\bar{x} = 2,5$ liegt.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
3	3	1	4	3	2	1	5	3	

Tabelle 1.1

- e) **Ermitteln** Sie die Anzahl der Defekte für das Uhrenmodell x_{10} .

Ein Mitarbeiter von „Timeless“ betrachtet die Datenreihe und behauptet, dass der Median x_{Med} größer sei als das arithmetische Mittel \bar{x} und dass dies grundsätzlich bei allen Datenreihen der Fall sei.

- f) **Beurteilen** Sie die beiden Behauptungen des Mitarbeiters.