1 Aufgabe 1

Sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ eine Funktion mit $u(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f'(x) = c \cdot v'(x)$ gilt.

2 Aufgabe 2

Sei $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$. Zeigen Sie, dass dann $f'(x) = (x - \alpha) + (x - \beta)$ gilt.

3 Aufgabe 3

Sei $D = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Diagonalmatrix und $v_{3\times 1}$ ein Vektor. Zeigen Sie, dass $D \cdot v = c \cdot v$ gilt.

4 Aufgabe 4

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal* genau dann, wenn $A \cdot A^T = E$. Determinantenproduktsatz: Sind A, B, C Matrizen so, dass $A = B \cdot C$, dann gilt $det(A) = det(B) \cdot det(C)$.

(a) Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonal ist, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ aber nicht.

(b) Begründen Sie, dass die Inverse einer orthogonalen Matrix zugleich ihre Transponierte ist.

(c) Sei A orthogonal. Weisen Sie nach, dass dann $det(A) = -1 \vee det(A) = 1$ gilt, indem Sie zunächst zeigen, dass $det(A^2) = 1$ gilt.

(d) Entscheiden Sie begründet, ob die Nullmatrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

5 Aufgabe 5

Eine *LR-Zerlegung* einer Matrix A besteht aus zwei Matrizen, L, R so, dass $A = L \cdot R$, wobei L eine linke untere Dreiecksmatrix und R eine rechte obere Dreiecksmatrix ist.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix. Bestimmen Sie $det(A)$.

(b) Sei $A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$ eine LR-Zerlegung. Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass $det(A) = det(R)$.

6 Aufgabe 6

Sei $Q_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ und $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Weisen Sie nach, dass $Q_0 = E$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass Q_α orthogonal ist und bestimmen Sie $det(Q_\alpha)$.
Hinweis: $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$ für alle α.

(c) Berechnen Sie $Q_{90} \cdot e_1, Q_{180} \cdot e_1$ und $Q_{360} \cdot e_1$ und beschreiben Sie die Wirkung der Abbildung Q_α.

Lösungen

Aufgabe 1

Mit der Produktregel der Ableitung folgt $f'(x) = 0 \cdot v(x) + v'(x) \cdot c = c \cdot v'(x)$.

Aufgabe 2

Mit der Produktregel der Ableitung folgt $f'(x) = 1 \cdot (x - \beta) + 1 \cdot (x - \alpha) = (x - \alpha) + (x - \beta)$.

Aufgabe 3

Sei $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$. Dann gilt $D \cdot v = \begin{pmatrix} c \cdot v_x \\ c \cdot v_y \\ c \cdot v_z \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = c \cdot v$.

Aufgabe 4

(a) $A \cdot A^T = E$, aber $B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq E$.

(b) Es gilt sowohl $A \cdot A^T = E$ als auch $A \cdot A^{-1} = E$, also $A \cdot A^T = A \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$.

(c) Wir verwenden den Determinantenproduktsatz. Es gilt $det(A^2) = det(A) \cdot det(A) = det(A^T) \cdot det(A) = det(A^{-1}) \cdot det(A) = det(A^{-1} \cdot A) = det(E) = 1$. Wenn $det(A^2) = 1$ folgt $det(A) = 1 \vee det(A) = -1$.

(d) Offenbar $det(N) = 0$ und somit ist N nicht orthogonal.

Aufgabe 5

(a) $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}$

(b) $det(A) = det(L) \cdot det(R) = 1 \cdot det(R) = det(R)$.

Aufgabe 6

(a) Einsetzen liefert $Q_0 = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

(b) Es gilt $Q_\alpha \cdot Q_\alpha^T = E$. Weiter $det(Q_\alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot (-\sin(\alpha)) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

(c) $Q_{90} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_{180} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Q_{360} \cdot e_1 = e_1$. Die Matrix Q_α bewirkt eine Drehung des Vektors um α Grad entgegen dem Uhrzeigersinn.