Fakultätsfunktion

Wir betrachten die sogenannte Fakultätsfunktion $fac : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, fac(n) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 0 \\ n \cdot fac(n-1) & \text{, sonst} \end{cases}$.

Wir schreiben zur Abkürzung manchmal auch $n!$ statt $fac(n)$.

(a) Berechnen Sie $0!, 1!, 3!$ und $10!$.

(b) Geben Sie mithilfe des Produktzeichens Π eine alternative Definition von fac an, die ohne Rekursion (Selbstaufruf) auskommt.

(c) Bestimmen Sie die letzten drei Ziffern der Zahl $1000!$.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(n) = 2^{n^2}$ schneller wächst als die Funktion fac. Weisen Sie dazu nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $f(n) \geq fac(n)$ gilt.
Hinweis: Potenzierung ist rechtsassoziativ, also $2^{3^2} = 2^9 = 512$.

(e) Konstruieren Sie eine weitere Funktion $g(n)$, die schneller als die Funktion fac, aber langsamer als die Funktion f wächst. Begründen Sie jeweils, dass die beiden geforderten Eigenschaften von Ihrer Funktion $g(n)$ erfüllt werden.

(f) Für alle $n \geq 1$ definieren wir den Ausdruck $s(n) = \frac{(n+1)!}{2 \cdot (n-1)!}$. Beschreiben Sie möglichst kurz und präzise was der Ausdruck $s(n)$ angibt.

(g) Die Summe der ersten n Quadratzahlen wird beschrieben durch $qs(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Zeigen Sie, dass $qs(n) = s(n) \cdot \frac{(2n+1)!}{3 \cdot (2n)!}$ gilt.

(h) Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert $m \in \mathbb{N}$ so, dass $m!$ durch alle Zahlen von 1 bis einschließlich 10 ohne Rest teilbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort. (Bonus: geben Sie eine formale Definition des gesuchten Wertes m an.)

(i) Definieren Sie eine Funktion $pfac$, die jeder natürlichen Zahl n das Produkt aller Primzahlen kleiner gleich n zuordnet. Begründen Sie dann, dass $pfac(n) \leq fac(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(j) Sei $k(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ die Kehrwertsumme der Fakultätswerte bis n. Ermitteln Sie näherungsweise den Grenzwert $lim_{n \to +\infty} k(n)$.

Lösungen

(a) $0! = 1, 1! = 1, 3! = 6, 10! = 3628800$.

(b) Die Fakultät von n ist das Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner gleich n. Also z.B. $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

(c) Die Zahl 1000! enthält unter anderem die Faktoren $2^3 \cdot 5^3 = 1000$. Das heißt 1000! ist ein Vielfaches von 1000 und daher müssen die letzten drei Ziffern alle Nullen sein.

(d) Es gilt folgende Abschätzung $n! = \prod_{i=1}^{n} i \leq \prod_{i=1}^{n} n = n^n \leq (2^n)^n = 2^{n^2}$.

(e) Setze z.B. $g(n) = n^n$. Mit der Abschätzung aus der vorherigen Teilaufgabe folgt sofort $fac(n) \leq g(n) \leq f(n)$.
Für den Fall $n \geq 4$ liefert z.B. $a(n) = 2^{\frac{1}{8}n(n+10)}$ eine noch genauere Abschätzung von fac.

(f) Vereinfachen (kürzen) liefert $s(n) = \frac{(n+1)!}{2\cdot(n-1)!} = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n} i$. Also gibt $s(n)$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen an.

(g) Einsetzen und kürzen liefert $qs(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(h) Damit $m!$ durch alle Zahlen von 1 bis 10 teilbar ist, muss $m!$ die Primfaktorzerlegung aller dieser Zahlen enthalten. Klar ist $m \leq 10$, da 10! alle geforderten Zahlen als ganze Faktoren enthält. Die Primfaktoren von $10 = 2\cdot 5, 9 = 3\cdot 3$ und $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ sind aber bereits in 7! enthalten. Klarerweise kann aber 7 frühenstens in 7! enthalten sein, da 7 eine Primzahl ist. Somit ist $7! = 5040$ die gesuchte Zahl, also $m = 7$.
Bonus: $m = min\{n \in \mathbb{N} \mid \forall i \in [1;10] : fac(n) \equiv 0 \ (mod\ i)\ \}$.

(i) $pfac(n) = \prod_{i\in\mathbb{P}_n} i$, wobei $\mathbb{P}_n$ die Menge aller Primzahlen kleiner gleich n ist. Formaler definiert gilt $\mathbb{P}_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leq n \wedge k \text{ prim}\}$. Sei analog $\mathbb{N}_n$ die Menge aller natürlichen Zahlen kleiner gleich n. Offenbar gilt $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{N}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $pfac(n) = \prod_{i\in\mathbb{P}_n} i \leq \prod_{i\in\mathbb{N}_n} i = fac(n)$.

(j) Evaluation mit CAS. Auswerten (numerisch) von `Sum(1/(i!), i, 0, Infinity` in Geogebra liefert ≈ 2.718281828459. Der Grenzwert der Summe ist also die Eulersche Zahl e.