Aufgabe 1 (oHimi)

Seien $f(x) = -3x + 45$ und $g(x) = 4x + 10$.

(a) Lösen Sie $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie x so, dass $50 = g(x)$.

(c) Berechnen Sie den Schnittpunkt von f und g.

Aufgabe 2 (oHimi)

(a) Lösen Sie $63 = -3x^2 + 30x$.

(b) Berechnen Sie die Extrempunkte von $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$.

(c) Ermitteln Sie den Wendepunkt von $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$.

Aufgabe 3

Ein Unternehmen verkauft ein Produkt zum konstanten Preis von 10 GE. Die Gesamtkosten werden beschrieben durch die Funktion $K(x) = x^2 + 21$ mit $D_K = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(a) Geben Sie die Erlösfunktion $E(x)$ an.

(b) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass $G(x) = -x^2 + 10x - 21$ die zugehörige Gewinnfunktion ist.

(c) Berechnen Sie den Break-Even-Point.

(d) Bestimmen Sie den Grenzgewinn bei einer Produktion von 3 ME.

(e) Geben Sie die Gesamtkosten bei einer Produktion von 4 ME.

(f) Ermitteln Sie die Produktionsmenge x so, dass die Grenzkosten 6 $\frac{GE}{ME}$ betragen.

(g) Berechnen Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze (LPU).

Aufgabe 4

Sei $K(x) = x^3 - 5x^2 + 15x + 10$ mit $D_K = \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Kostenfunktion.

(a) Geben Sie begründet die Produktionsmenge mit den geringsten Gesamtkosten an.

(b) Ermitteln Sie die Produktionsmenge mit den geringsten Grenzkosten.

(c) Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preiuntergrenze (KPU).

Aufgabe 5 (schwer)

Sei $N(p) = 40 - p$ eine Nachfragefunktion, die die Nachfrage in ME abhängig vom Preis in GE darstellt. Weiter gebe $\epsilon(p) = N'(p) \cdot \frac{p}{N(p)}$ die sogenannte Preiselastiztät der Nachfrage an. Einen Wert von $\epsilon = 0$ bezeichnen wir dabei als *vollkommen unelastisch*.

(a) Berechnen Sie die Preiselastizität bei einem Preis von 8 GE.

(b) Weisen Sie nach, dass die Nachfrage bei einem Preis von 0 GE vollkommen unelastisch ist.

(c) Bestimmen Sie den Preis p so, dass $\epsilon(p) = -1$.

(d) Begründen Sie, dass die Sättigungsmenge 40 ME beträgt.

(e) Beschreiben Sie wie sich $\epsilon(p)$ verhält, wenn p gegen die Sättigungsmenge strebt.

Aufgabe 6

Seien eine Nachfrage-Preis-Funktion $N(p) = -\frac{1}{4}(p+1)^2 + 4$ und eine Angebots-Preis-Funktion $A(p) = 2p^2 + 1$ mit $D_N = D_A = \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben.

(a) Geben Sie Höchstpreis und Sättigungsmenge an.

(b) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht.

Lösungen

Aufgabe 1

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$

(b) $50 = g(x) \Leftrightarrow 50 = 4x + 10 \Leftrightarrow x = 10$

(c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -3x + 45 = 4x + 10 \Leftrightarrow x = 5$. Also Schnittpunkt $S(5|30)$.

Aufgabe 2

(a) $63 = -3x^2 + 30x \Leftrightarrow -3x^2 + 30x - 63 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 7$.

(b) $f'(x) = -x^2 + 4x$. Also $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$. $f''(x) = -2x + 4$, also $f''(0) = 4 > 0$, Tiefpunkt $T(0|0)$ und $f''(4) = -4 < 0$, Hochpunkt $H(4|\frac{32}{3})$.

(c) $f'(x) = -x^2 + 3$, $f''(x) = -2x$. ALso $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Hinreichende Bedingung kann entfallen, da kubische Funktionen stets genau einen Wendepunkt besitzen. Wendepunkt $W(0|0)$.

Aufgabe 3

(a) $E(x) = 10x$

(b) $G(x) = E(x) - K(x) = 10x - (x^2 + 21) = -x^2 + 10x - 21$

(c) $G(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 7$. Der BEP liegt also bei $x = 3$ ME.

(d) Grenzgewinn entspricht erster Ableitungsfunktion, also $G'(3) = -2 \cdot 3 + 10 \cdot 3 = 24$ GE.

(e) $K(4) = 4^2 + 21 = 37$ GE.

(f) Grenzkosten entspricht erster Ableitungsfunktion. $K'(x) = 2x$. Also $6 = 2x \Leftrightarrow x = 3$ ME.

(g) Betriebsoptimum ist Tiefpunkt der Stückkostenfunktion $k(x) = x + \frac{21}{x}$. Dann $k'(x) = 1 - \frac{21}{x^2}$. Somit $k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{21}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{21} \vee x = -\sqrt{21}$. (Negative Lösung entfällt wegen des Definitionsbereiches bzw. Sachzusammenhangs.) Betriebsoptimum $x_{BO} = \sqrt{21} \approx 4.58$. LPU ist $k(\sqrt{21}) = 2\sqrt{21} \approx 9.17$ GE.

Aufgabe 4

(a) Da die Kosten stetig steigen, entstehen die geringsten Gesamtkosten genau dann, wenn so wenig wie möglich, d.h 0 ME produziert werden. Diese geringsten Kosten entsprechen den Fixkosten; diese können niemals unterschritten werden.

(b) $K'(x) = 3x^2 - 10x + 15$ und $K''(x) = 6x - 10$. Lösen von K'' liefert $x = \frac{5}{3}$.

(c) Betriebsminimum ist Tiefpunkt der variablen Stückkostenfunktion $k_v(x) = x^2 - 5x + 15$. Dann $k_v'(x) = 2x - 5$ und somit $k_v'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$. Betriebsminimum $x_{BM} = \frac{5}{2}$. KPU ist $k_v(\frac{5}{2}) = \frac{35}{4}$ GE.

Aufgabe 5 (nicht relevant für Klassenarbeit)

(a) $\epsilon(8) = -1 \cdot \frac{8}{40-8} = -\frac{1}{4}$

(b) $\epsilon(0) = -1 \cdot \frac{0}{40-0} = 0$

(c) $-1 = -1\frac{p}{40-p} \Leftrightarrow p = 20$

(d) Es gilt $N(40) = 0$.

(e) $\lim\limits_{p \to 40} \epsilon(p) = -\infty$

Aufgabe 6

(a) Sättigungsmenge $N(0) = \frac{15}{4}$ ME, Höchstpreis $N(p) = 0 \Leftrightarrow p = 4$ GE.

(b) $N(p) = A(p) \Leftrightarrow 1$ GE (Gleichgewichtspreis). Gleichgewichtsmenge $N(1) = 3$ ME. Also Marktgleichgewicht bei $MGG(1|3)$.