Basiswissen trigonometrische Funktionen, MAT, ANR

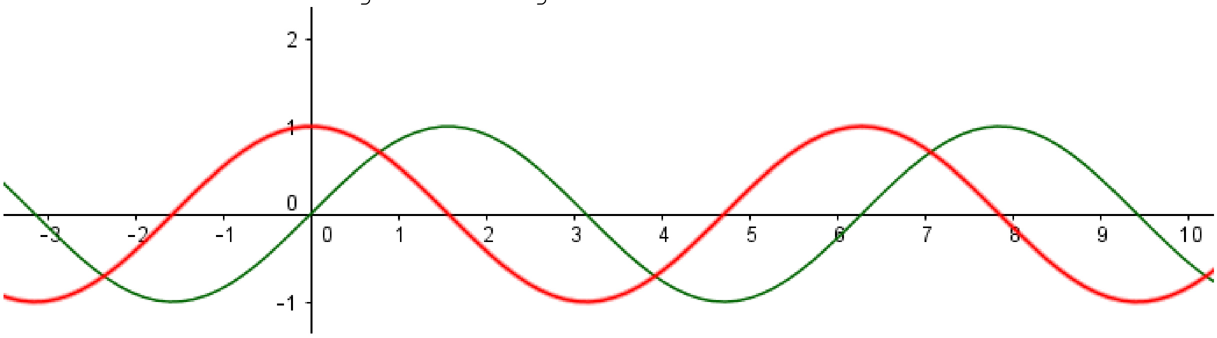
Trigonometrische Funktionen modellieren alle Arten von periodischen Vorgängen in Theorie, Technik und Natur.

Die Grundfunktion ist die Sinus-Funktion $f: \mathbb{R} \to [-1; 1], f(x) = \sin(x)$. Die Werte im Definitionsbereich sind in der Analysis üblicherweise nicht in Altgrad von 0° bis 360° sondern in Radiant angegeben. Die Umrechnung erfolgt per $r = \frac{\pi}{180} g$. Die folgende Tabelle zeigt die Umrechnung einiger ausgewählter wichtiger Winkel und die Werte der Sinus- und Cosinusfunktion, wobei $g(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

In °	0	30	45	60	90	180	270	360
In rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Zur Lösung trigonometrischer Gleichungen ist manchmal der Zusammenhang $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$ nützlich. Er entspricht dem Satz des Pythagoras am Einheitskreis.

Die Abbildung zeigt $f(x) = \sin(x)$ (grün) und $g(x) = \cos(x)$ (rot). Beide Funktionen sind periodisch mit der Periodendauer $p = 2\pi$. Man beachte auch, dass das Integral über die Grundfunktion mit einer Größe von einer Periodendauer genau 0 ergibt.



Die allgemeine Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin\big(b(x + c)\big) + d$ hat vier Parameter, die die Grundfunktion verzerren und verschieben. Alle Sinusfunktionen haben unendlich viele Extremstellen und Wendestellen, die sich ebenfalls periodisch wiederholen. Ob es Nullstellen gibt oder nicht, hängt von den Werten der Parameter a und d ab; wenn Nullstellen vorhanden sind, dann gibt es unendlich viele.

Paramater a heißt Amplitude und bestimmt den maximalen und minimalen Funktionswert.

Parameter b heißt Frequenz und bestimmt den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen. Es gilt $b = \frac{2\pi}{p}$ für die Periodendauer p.

Basiswissen trigonometrische Funktionen, MAT, ANR

Parameter c heißt Phasenverschiebung und bestimmt die horizontale Verschiebung ausgehend von der Grundfunktion. Für $c < 0$ wird nach links verschoben.

Parameter d heißt Vertikalverschiebung und gibt den Mittelwert der Schwingung an.

Die Parameter können wie folgt z.B. aus einem Graphen bestimmt werden. Bezeichne dazu t den kleinsten (tiefsten) und h den größten (höchsten) Funktionswert.
$a = \frac{h-t}{2}$.
$b = \frac{2\pi}{p}$, die Periodendauer p kann abgelesen werden.
$d = \frac{h+t}{2}$.
Der Parameter c entspricht dem -1-fachen der Entfernung der ersten Wendestelle mit positiver Steigung rechts von der Ordinate. Diese Wendestelle kann abgelesen werden.

Allgemein hat der Sinus die erste positive Wendestelle bei $0 \cdot p$, d.h. zu Beginn einer Periode. Der erste Hochpunkt liegt bei $\frac{p}{4}$, der erste Tiefpunkt bei $\frac{p}{2}$. Alle diese Punkte können benutzt werden, um die Phasenverschiebung c zu bestimmen.

Für die ersten Ableitungen bei trigonometrischen Funktionen gilt:
$(\sin x)' = \cos(x)$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(-\sin x)' = -\cos\ x$; $(-\cos x)' = \sin\ x$.

Für die Ableitung der allgemeinen Funktion und für die Stammfunktionen wird zur Berechnung i.d.R. die Kettenregel benötigt, d.h. im gA ist eigenständiges Ableiten und Integrieren nicht prüfungsrelevant. Es gilt:

$$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x+c)\big) + d$$
$$f'(x) = a \cdot b \cdot \cos\big(b(x+c)\big) + d$$
$$F(x) = \frac{a}{b} \cdot (-\cos\big(b(x+c)\big) + dx + e$$

Zu beachten ist, dass die Integrationskonstante hier häufig mit e benannt wird, da die Phasenverschiebung klassischerweise c heißt.

Obwohl alle Schwingungen nur durch die Sinusfunktion ausgedrückt werden können, gibt es weitere Schwingungsfunktionen, die in bestimmten Fällen zu einfacheren Gleichungen führen. Neben der Cosinusfunktion ist die vor allem die Tangensfunktion $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Die Tangensfunktion ist an den Nullstellen der Cosinusfunktion nicht definiert. Man verwendet sie zum Beispiel um die Steigung m einer Geraden zu bestimmen, indem man den Winkel α der Geraden mit der Abszisse misst. Dann gilt $m = \tan\alpha$.