Mathematik

KA 17

Informationen zu kubischen Funktionen

ANR

Allgemeines

Bei den sogenannten *kubischen* Funktionen handelt es sich um ganzrationale Funktionen dritten Grades. Das heißt, dass die abhängige Variable der Funktion (höchstens) in dritter Potenz in der Funktionsgleichung vorkommt.
Die allgemeine Form einer kubischen Funktion ist $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Die folgende Liste enthält Beispiele für kubische Funktionen. Man beachte, dass einer oder mehrere der Koeffizienten b, c, d dabei den Wert 0 annehmen können:

- $f(x) = 2x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 3$
- $g(x) = -\frac{1}{10}x^2(x-1)$
- $h(x) = x^3 - x^2 + x$
- $i(x) = -x^3 + 3x$
- $j(x) = 3x^3 + 81$
- $k(x) = x^3$

Graphen

Die Graphen kubischer Funktionen haben die charakteristische Form eines liegenden S. Deshalb werden sie häufig auch als *S-förmig* bezeichnet. Abhängig von den Werten der Koeffizienten a, b, c, d gibt es mindestens eine und höchstens drei Nullstellen. Das Verhalten der Funktion im Unendlichen hängt wie bei linearen und quadratischen Funktionen auch ausschließlich vom Wert des führenden Koeffizienten a ab. Insgesamt gilt dabei für die y-Richtung des Graphen:

	$a < 0$	$a > 0$
$lim_{x \to +\infty} f(x)$	$-$	$+$
$lim_{x \to -\infty} f(x)$	$+$	$-$

Da der Graph also entweder aus dem negativen Bereich (von *unten*) kommt und in den positiven Bereich verläuft (nach *oben*) oder umgekehrt, muss er die x-Achse mindestens einmal durchqueren, sodass es mindestens eine Nullstelle geben muss.

Lösung

Mit den Werkzeugen und Methoden der Schulmathematik ist eine direkte Lösung kubischer Funktionen nur in Spezialfällen möglich. Je nach Gestalt der konkreten Funktionsgleichung kommen Ausklammern (meistens) oder direktes Wurzelziehen (selten) in Betracht. Beim Ausklammern wird der Term der kubischen Funktion auf einen linearen und einen quadratischen Rest reduziert, die getrennt voneinander gelöst werden können. (Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist.) Wir zeigen Lösungsmöglichkeiten für die Beispiel aus dem ersten Abschnitt.

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & 2x^3 - x^2 + \tfrac{1}{2}x + 3 = 0 & \text{ohne TR nicht loesbar}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & -\tfrac{1}{10}x^2(x-1) = 0 & \text{Faktoren getrennt loesen} \\
\Leftrightarrow\ & -\tfrac{1}{10}x^2 = 0 \ \underline{\text{oder}}\ x - 1 = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \underline{\text{oder}}\ x = 1 & \text{doppelte Nullstelle bei 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& h(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x^3 - x^2 + x = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x(x^2 - x + 1) = 0 & \text{ausklammern} \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \underline{\text{oder}}\ x^2 - x + 1 = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \underline{\text{oder}}\ \ \underline{\text{falsch}} & \text{zweiter Faktor hat keine Nullstelle} \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& i(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & -x^3 + 3x = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & -x(x^2 - 3) = 0 & \text{ausklammern} \\
\Leftrightarrow\ & -x = 0 \ \underline{\text{oder}}\ x^2 - 3 = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \underline{\text{oder}}\ x = \sqrt{3} \ \underline{\text{oder}}\ x = -\sqrt{3} & \text{direktes Wurzelziehen}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& j(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & 3x^3 + 81 = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -27 & \text{umsortieren} \\
\Leftrightarrow\ & x = -3 & \text{3. Wurzel ziehen}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& k(x) = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 & \text{3. Wurzel ziehen}
\end{aligned}
$$