Aufgabe 1

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = (x^4 - 4x^3)^5$

(b) $g(x) = 2 \cdot e^{-3x+1}$

(c) $h(x) = -4x \cdot e^{-x^2}$

(d) $j(x) = \frac{1}{x} \cdot e^x$

(e) $k(x) = e^x - 2x - 2$

Aufgabe 2

Der prozentuale Anteil des Sonnenlichts im Ozean abhängig von der Tiefe werde beschrieben durch die Funktion $L(d) = 100 \cdot 0,9^d$, wobei d die Tiefe in 100-Meter-Schritten angibt, d.h. $d = 2$ entspricht beispielsweise 200 Metern. An der Oberfläche beträgt der Sonnenlichtanteil genau 100 %, alle 100 Meter nimmt der Anteil des Sonnenlichts um 10 % ab.

(a) Beschreiben Sie, warum $L(d)$ die Situation geeignet modelliert.

(b) Geben Sie den Lichtanteil in 300 Metern Tiefe an.

(c) Bestimmen Sie, in welcher Tiefe d_H noch genau die Hälfte des Sonnenlichts ankommt.

(d) Ermitteln Sie, in welcher Tiefe noch 1 % des Sonnenlichts ankommt.

(e) Erläutern Sie, inwiefern das mathematische Modell von der Realität abweicht.

(f) Ab einer Wassertiefe von 2000 Metern soll der Anteil des Sonnenlichts durch eine lineare Funktion $g(d)$ modelliert werden, die sprung- und knickfrei in die Funktion L übergeht. Bestimmen Sie den Term von g und berechnen Sie, in welcher Tiefe absolute Finsternis herrscht, d.h. überhaupt kein Sonnenlicht mehr ankommt.

Lösungen

Aufgabe 1

(a) $f'(x) = (4x^3 - 12x^2) \cdot 5 \cdot (x^4 - 4x^3)^4$

(b) $g'(x) = 2 \cdot (-3) \cdot e^{-3x+1}$

(c) $h'(x) = -4 \cdot e^{-x^2} + (-2x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-4x)$

(d) $j'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^x + e^x \cdot \frac{1}{x}$

(e) $k'(x) = e^x - 2$

Aufgabe 2

(a) Es gilt $L(0) = 100$, d.h. der Anfangswert von 100 % wird korrekt modelliert. Eine Abnahme von 10 % pro Einheit d ergibt einen Wachstumsfaktor von 0,9.

(b) $L(3) = 72,9$ %.

(c) Im CAS `SOLVE(1/2*L(0)=L(d),d,REAL` $\longrightarrow d \approx 6.5788$. Die Tiefe d_H beträgt also ca. 658 Meter.

(d) Im CAS `SOLVE(0.01*L(0)=L(d),d,REAL` $\longrightarrow d \approx 87.417$. Die gesuchte Tiefe beträgt also ca. 8742 Meter.

(e) Im Modell bleibt immer ein Rest Sonnenlicht übrig (siehe auch c)). In der Realität ist schon ab ca. 200 Metern Tiefe die sogenannte aphotische Zone erreicht, in die überhaupt kein Licht mehr durchdringt. Damit ist auch der Wachstumsfaktor im Modell stark unrealistisch.

(f) Entweder anlegen von $g(d) = m \cdot d + b$. Dann lösen eines linearen Gleichungssystems `SOLVE([L(20)=g(20),L'(20)=g'(20)],[m,b]` $\longrightarrow m \approx -1.2809379, b \approx 37.7764235$. Oder anlegen einer Tangente an der Stelle $d = 20$ mit `TANGENT(L(d),d,20`. Dann lösen von $g(d)$ mit `SOLVE(g(d)=0,d` $\longrightarrow d \approx 29.49$. Also ist im Modell nach ca. 2950 Metern die lichtlose Zone erreicht.