Aufgabe 1

Seien $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1-k^2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $A_k \cdot B$.

(b) Bestimmen Sie k so, dass $A_k \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 99 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) Geben Sie B^{-1}, die Inverse von B an.

(d) Bestimmen Sie, für welche Werte von k die Matrix A_k invertierbar ist.

(e) Geben Sie begründet eine Matrix M_{2x2} so an, dass $M^2 = M^{-1}$ gilt.

Aufgabe 2

Gegeben sei die stochastische Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ und eine Anfangsverteilung $v_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm.

(b) Berechnen Sie die Verteilung v_1 nach einem Übergang.

(c) Geben Sie begründet die langfristige Verteilung v_L für eine beliebige Anfangsverteilung an.

(d) Jemand behauptet, dass selbst bei maximal ungünstiger Anfangsverteilung $v_0 = \begin{pmatrix} n & 0 \end{pmatrix}$ von insgesamt n Objekten, nach 2 Übergängen näherungsweise (Unterschied <3%) eine Gleichverteilung zwischen den beiden Zuständen vorliegt. Überprüfen Sie die Behauptung hinsichtlich ihres Wahrheitsgehaltes.

Aufgabe 3

Sei $M = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 \\ 0,75 & 0,5 \end{pmatrix}$ eine Übergangsmatrix.

(a) Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm.

(b) Begründen Sie, dass M stochastisch ist.

(c) Ermitteln Sie $v = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $M \cdot v = v$ gilt.

Aufgabe 4

Es gelte $M^2 = \begin{pmatrix} 0,1 & a \\ 0,9 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,73 & 0,24 \\ c & d \end{pmatrix}$, wobei M stochastisch ist.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

(b) Überprüfen Sie, ob die Matrix M^2 ebenfalls stochastisch ist.

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8^3 & 2^9 \\ 4^3 & 2^6 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist.

(b) Sei A_{2x2} stochastisch. Zeigen Sie, dass dann auch A^2 stochastisch ist.

Lösungen

Aufgabe 1

(a) $A_k \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ k^2-1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Mit vorheriger Teilaufgabe ergibt sich $k^2 - 1 = 99 \Leftrightarrow k = 10$ oder $k = -10$.

(c) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $det(A) = 1 \cdot (1-k^2) - (-2) \cdot 4$. Also $det(A) = 0 \Leftrightarrow k = 3$ oder $k = -3$. Also ist A_k invertierbar für alle $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

(e) Zum Beispiel $M = E$. Dann gilt $E^2 = E = E^{-1}$.

Aufgabe 2

(a) folgt

(b) $v_1 = M \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 4,9 \\ 5,1 \end{pmatrix}$.

(c) Es gilt $v_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, da der zweite Zustand eine Senke ist und nach und nach alle Objekte in diesen Zustand übergehen.

(d) Es gilt $v_2 = M^2 \cdot v_0 = \begin{pmatrix} 0,49n \\ 0,51n \end{pmatrix} \approx n \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Die Behauptung ist also wahr.

Aufgabe 3

(a) folgt

(b) Die Spaltensumme beträgt jeweils 1.

(c) Da M stochastisch ist, folgt $v = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$. Dann gilt $M \cdot v = v \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

(a) Lösen des LGS liefert $a = 0,8; b = 0,2; c = 0,27; d = 0,76$.

(b) Auch M^2 ist stochastisch, da die Spaltensumme jeweils 1 beträgt.

Aufgabe 5

(a) Es gilt $det(A) = 8^3 \cdot 2^6 - 4^3 \cdot 2^9 = 2^9 \cdot 2^6 - 2^6 \cdot 2^9 = 0$. Also ist A nicht invertierbar.

(b) Sei A_{2x2} eine stochastische Matrix, also $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$.

Dann gilt $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+b-ab & ab+b-b^2 \\ 1-a^2-b+ab & 1-ab-b+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b-ab & ab+b-b^2 \\ 1-(a^2+b-ab) & 1-(ab+b-b^2) \end{pmatrix}$.
Die Spaltensumme beträgt nun jeweils 1, also ist A^2 stochastisch.