Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Diana Avella Alaminos

Algebra Lineal I

Alumno:
Barrientos Sánchez José Antonio

Autora del Curso:
Diana Avella Alaminos

.

Índice general

Capítulo 1

Espacios vectoriales

1.1. Campos y espacios vectoriales

Definición 1.1: Campo

Sea K un conjunto no vacío con dos operaciones binarias:
$+ : K \times K \to K$ y $\cdot : K \times K \to K$. Se dice que K es un campo si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $+$ es asociativa.
2. $+$ es conmutativa.
3. Existe un elemento $0_K \in K$ tal que $a + 0_K = a$ para todo $a \in K$.
4. Para cada $a \in K$ existe un elemento $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$.
5. $\cdot$ es asociativa.
6. $\cdot$ es conmutativa.
7. Existe un elemento $1 \in K$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in K$.
8. Para cada $a \in K - \{0_K\}$ existe un elemento $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo $a, b, c \in K$.

Llamaremos a los elementos de K escalares.

Ejemplo 1.1.1

- $\mathbb{R}$ es un campo con las operaciones usuales.
- $\mathbb{Q}$ es un campo con las operaciones usuales.
- $\mathbb{Z}$ no es un campo pues no cumple 8.
- $\mathbb{Z}_p$ con p primo es un campo.

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo.

Definición 1.2: Subcampo

Sean K un campo, $\tilde{K} \subseteq K$. Decimos que $\tilde{K}$ es un subcampo de K si $\tilde{K}$ con las operaciones restringidas de K es por sí mismo un campo.

Ejemplo 1.1.2

- $\mathbb{Q}$ es un subcampo de $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$.

Definición 1.3: Espacio Vectorial

Sea V un conjunto no vacío, K un campo y $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : K \times V \to V$ dos operaciones. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$. Asociatividad.
2. $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$. Conmutatividad.
3. Existe un elemento $0_V \in V$ tal que $v + \theta_V = v$ para todo $v \in V$. Elemento neutro.
4. Para todo $v \in V$ existe $\hat{v} \in V$ tal que $v + \hat{v} = \hat{v} + v = \theta_V$. Inverso aditivo.
5. $1_K \cdot v = v$ para todo $v \in V$.
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$ para todo $\lambda, \mu \in K$ y para todo $v \in V$. Distributividad.
7. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ para todo $\lambda, \mu \in K$ y para todo $v \in V$. Distributividad.
8. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ para todo $\lambda \in K$ y para todo $u, v \in V$. Distributividad.

Decimos que $V, +, \cdot$ es un espacio vectorial sobre el campo K o un K-espacio vectorial. A los elementos de V los llamaremos vectores.

Ejemplo 1.1.3

- $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones usuales.
- K campo, K^n es un K-espacio vectorial con las operaciones usuales.

$$\begin{aligned} K^n &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K\} \\ (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) &\in K^n \\ (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

- K campo:

$$\begin{aligned} K^\infty &= \{(x_1, x_2, \cdots) \mid x_i \in K \ \forall i \in \mathbb{N}^+\} \\ &(x_1, x_2, \cdots), (y_1, y_2, \cdots) \in K^\infty \\ (x_1, x_2, \cdots) + (y_1, y_2, \cdots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \cdots) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots) \end{aligned}$$

  Es un K-espacio vectorial.

- K campo, $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ con m renglones y n columnas con las operaciones usuales de suma y producto por escalar es un K-espacio vectorial.

- K campo, $K[x]$ polinomios en x con coeficientes en K con las operaciones usuales es un K-espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.4

K campo, $V = \{f \mid f : K \to K\}$ con las operaciones:

$$\begin{aligned} f, g \in V &\quad \lambda \in K \\ f +_V g :&K \to K \\ &x \mapsto f(x) +_K g(x) \\ \lambda \cdot_V f :&K \to K \\ &x \mapsto \lambda \cdot_K f(x) \end{aligned}$$

Es un K-espacio vectorial.

Demostración.

1. Sean $f, g, h \in V$. P.D. Por construcción $(f+g)+h$, $f+(g+h)$ son funciones que van de $K \to K$. Veamos que tienen la misma regla de correspondencia.

   P.D. $((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x) \quad \forall x \in K$.

   Sea $x \in K$.

$$\begin{aligned} ((f +_V g) +_V h)(x) &= (f +_V g)(x) +_K h(x) && \text{Por def. de suma en } V \\ &= (f(x) +_K g(x)) +_K h(x) && \text{Por def. de suma en } V \\ &= f(x) +_K (g(x) +_K h(x)) && \text{Por def. de Campo punto 1 asociatividad} \\ &= f(x) +_K (g +_V h)(x) && \text{Por def. de suma en } V \\ &= (f +_V (g +_V h))(x) && \text{Por def. de suma en } V \end{aligned}$$

   Por lo tanto $(f+g)+h = f+(g+h)$.

2. Sean $f, g \in V$. P.D. $f +_V g = g +_V f$. Sabemos que $f +_V g : K \to K$ y $g +_V f : K \to K$. Veamos que tienen la misma regla de correspondencia.

$$\begin{aligned} (f +_V g)(x) &= f(x) +_K g(x) && \text{Por def. de suma en } V \\ &= g(x) +_K f(x) && \text{Por def. de Campo punto 2 conmutatividad} \\ &= (g +_V f)(x) && \text{Por def. de suma en } V \end{aligned}$$

Por lo tanto $f +_V g = g +_V f$.

3. Proponemos θ_V como elemento neutro de V, tal que:

$$\begin{aligned} \theta_V : K &\to K \\ x &\mapsto 0_K \end{aligned}$$

P.D. $f +_V \theta_V = \theta_V +_V f = f \quad \forall f \in V$.

Sea $f \in V$, sabemos que $f +_V \theta_V : K \to K$ y $\theta_V +_V f : K \to K$. Sea $x \in K$.

$$\begin{aligned} (f +_V \theta_V)(x) &= f(x) +_K \theta_V(x) && \text{Por def. de suma en } V \\ &= f(x) +_K 0_K && \text{Por def. de } \theta_V \\ &= f(x) && \text{Por def. de Campo punto 3 elemento neutro} \\ &= 0_K +_K f(x) && \text{Por def. de Campo punto 3 elemento neutro} \\ &= \theta_V(x) +_K f(x) && \text{Por def. de } \theta_V \\ &= (\theta_V +_V f)(x) && \text{Por def. de suma en } V \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $f +_V \theta_V = \theta_V +_V f = f$.

4. Sea $f \in V$. Proponemos $\tilde{f}$ como inverso aditivo de f, tal que:

$$\begin{aligned} \tilde{f} :&K \to K \\ &x \mapsto -f(x) \end{aligned}$$

P.D. $f +_V \tilde{f} = \tilde{f} +_V f = \theta_V$. Sabemos que $f +_V \tilde{f} : K \to K$ y $\tilde{f} +_V f : K \to K$. Sea $x \in K$.

P.D. $(f +_V \tilde{f})(x) = \theta_V(x)$.

$$\begin{aligned} (f +_V \tilde{f})(x) &= f(x) +_K \tilde{f}(x) && \text{Por def. de suma en } V \\ &= f(x) +_K (-f(x)) && \text{Por def. de } \tilde{f} \\ &= 0_K && \text{Por def. de Campo punto 4 inverso aditivo} \\ &= \theta_V(x) && \text{Por def. de } \theta_V \end{aligned}$$

Por lo tanto $f +_V \tilde{f} = \theta_V$. Analogamente se prueba que $\tilde{f} +_V f = \theta_V$.

5. Sea $f \in V$. P.D. $1_K \cdot_V f = f$.
Sabemos que $1_K \cdot_V f : K \to K$, y $f : K \to K$. Sea $x \in K$.

$$\begin{aligned} (1_K \cdot_V f)(x) &= 1_K \cdot_K f(x) && \text{Por def. de producto por escalar en } V \\ &= f(x) && \text{Por def. de Campo punto 7 elemento neutro mult.} \end{aligned}$$

Por lo tanto $1_K \cdot_V f = f$.

6. Sea $f \in V$, $\lambda, \mu \in K$. P.D. $\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V f) = (\lambda \cdot_K \mu) \cdot_V f$.
Sabemos que por construcción $\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V f) : K \to K$ y $(\lambda \cdot_K \mu) \cdot_V f : K \to K$. Sea $x \in K$.

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V f))(x) &= \lambda \cdot_K (\mu \cdot_V f)(x) && \text{Por def. de producto por escalar en } V\\ &= \lambda \cdot_K (\mu \cdot_K f(x)) && \text{Por def. de producto por escalar en } V\\ &= (\lambda \cdot_K \mu) \cdot_K f(x) && \text{Por def. de Campo punto 5 asociatividad}\\ &= ((\lambda \cdot_K \mu) \cdot_V f)(x) && \text{Por def. de producto por escalar en } V\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V f) = (\lambda \cdot_K \mu) \cdot_V f$.

7. Sea $f \in V$, $\lambda, \mu \in K$. P.D. $(\lambda +_K \mu) \cdot_V f = \lambda \cdot_V f +_V \mu \cdot_V f$.
Sabemos que por construcción $(\lambda +_K \mu) \cdot_V f : K \to K$ y $\lambda \cdot_V f +_V \mu \cdot_V f : K \to K$. Sea $x \in K$.

$$\begin{aligned}((\lambda +_K \mu) \cdot_V f)(x) &= (\lambda +_K \mu) \cdot_K f(x) && \text{Por def. de producto por escalar en } V\\ &= (\lambda +_K \mu) \cdot_K f(x) && \text{Por def. de producto por escalar en } V\\ &= \lambda \cdot_K f(x) +_K \mu \cdot_K f(x) && \text{Por def. de Campo punto 9 distributividad}\\ &= (\lambda \cdot_V f +_V \mu \cdot_V f)(x) && \text{Por def. de suma en } V\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\lambda +_K \mu) \cdot_V f = \lambda \cdot_V f +_V \mu \cdot_V f$.

8. Sea $f, g \in V$, $\lambda \in K$.
P.D. $\lambda \cdot_V (f +_V g) = \lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g$.

Sabemos que por construcción $\lambda \cdot_V (f +_V g) : K \to K$ y $\lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g : K \to K$. Sea $x \in K$.

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot_V (f +_V g))(x) &= \lambda \cdot_K (f +_V g)(x) && \text{Por def. de producto por escalar en } V\\ &= \lambda \cdot_K (f(x) +_K g(x)) && \text{Por def. de suma en } V\\ &= \lambda \cdot_K f(x) +_K \lambda \cdot_K g(x) && \text{Por def. de Campo punto 9 distributividad}\\ &= (\lambda \cdot_V f)(x) +_K (\lambda \cdot_V g)(x) && \text{Por def. de producto en } V\\ &= (\lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g)(x) && \text{Por def. de suma en } V\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda \cdot_V (f +_V g) = \lambda \cdot_V f +_V \lambda \cdot_V g$.

Al cumplir las 8 propiedades, V es un K-espacio vectorial. □

Proposición 1.1.1

En un espacio vectorial el neutro es único.

Demostración. Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Sean θ_V, θ'_V elementos neutros de V. P.D. $\theta_V = \theta'_V$.
Note que:

$$\begin{aligned}\theta_V &= \theta_V + \theta'_V && \text{Por def. de elemento neutro}\\ &= \theta'_V + \theta_V && \text{Por conmutatividad en Campo}\\ &= \theta'_V && \text{Por def. de elemento neutro}\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\theta_V = \theta'_V$. □

Proposición 1.1.2
En un espacio vectorial los inversos aditivos son únicos.

Demostración. Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Sean $v, \hat{v}, \hat{\hat{v}}$ inversos aditivos de v. P.D. $\hat{v} = \hat{\hat{v}}$.
Note que:

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= \hat{v} + \theta_V && \text{Por def. de elemento neutro}\\
&= \hat{v} + (v + \hat{\hat{v}}) && \text{Por def. de inverso aditivo}\\
&= (\hat{v} + v) + \hat{\hat{v}} && \text{Por asociatividad en Campo}\\
&= \theta_V + \hat{\hat{v}} && \text{Por def. de inverso aditivo}\\
&= \hat{\hat{v}} && \text{Por def. de elemento neutro}
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.3 Propiedades de cancelación
Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Sean $u, v, w \in V$. Entonces:

1. Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.
2. Si $u + v = w + v$, entonces $u = w$.

Demostración.

1. Supongamos que $u + v = u + w$. P.D. $v = w$.

$$\begin{aligned}
v &= \theta_V + v && \text{Por def. de elemento neutro}\\
&= (\hat{u} + u) + v && \text{Por def. de inverso aditivo}\\
&= \hat{u} + (u + v) && \text{Por asociatividad en Campo}\\
&= \hat{u} + (u + w) && \text{Por hipótesis}\\
&= (\hat{u} + u) + w && \text{Por asociatividad en Campo}\\
&= \theta_V + w && \text{Por def. de inverso aditivo}\\
&= w && \text{Por def. de elemento neutro}
\end{aligned}$$

2. Supongamos que $u + v = w + v$. Por la conmutatividad en Campo y por la propiedad anterior y se sigue que $v = u$.

□

Proposición 1.1.4
Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Entonces:

1. $0_K \cdot v = \theta_V$ para todo $v \in V$.
2. $\lambda \cdot \theta_V = \theta_V$ para todo $\lambda \in K$.

Demostración. 1. Sea $v \in V$. Entonces:

$$\begin{aligned} \theta_V + 0_K \cdot v &= 0_K \cdot v && \text{Por def. de elemento neutro} \\ &= (0_K + 0_K) \cdot v && \text{Por def. de Campo punto 3 elemento neutro} \\ &= 0_K \cdot v + 0_K \cdot v && \text{Por def. distributividad Campo} \end{aligned}$$

Y por Propiedades de cancelación se sigue que $0_K \cdot v = \theta_V$.

2. Sea $\lambda \in K$. Entonces:

$$\begin{aligned} \theta_V + \lambda \cdot_V \theta_V &= \lambda \cdot_V \theta_V && \text{Por def. de elemento neutro} \\ &= \lambda \cdot_V (\theta_V + \theta_V) && \text{Por def. de elemento neutro} \\ &= \lambda \cdot_V \theta_V + \lambda \cdot_V \theta_V && \text{Por def. distributividad Campo} \end{aligned}$$

Y por Propiedades de cancelación se sigue que $\lambda \cdot_V \theta_V = \theta_V$.

□

Proposición 1.1.5

Sea K un campo y V un K-espacio vectorial.
Para todo $v \in V, (-1_K)v$ es el inverso aditivo de v.

Demostración. Sea $v \in V$. Veamos que $(-1_K) \cdot_V v$ es su inverso aditivo.

$$\begin{aligned} v + ((-1_K) \cdot_V v) &= 1_K \cdot_V v + ((-1_K) \cdot_V v) && \text{Por def. de Campo punto 7 elemento neutro} \\ &= (1_K + (-1_K)) \cdot_V v && \text{Por def. distributividad Campo} \\ &= 0_K \cdot_V v && \text{Por def. de Campo punto 4 inverso aditivo} \\ &= \theta_V && \text{Por prop. 1.1.4} \end{aligned}$$

Por lo tanto $(-1_K) \cdot_V v$ es el inverso aditivo de v. □

Notación 1.1.1

Dado $v \in V$ denotaremos por $-v$ a su inverso aditivo.

Corolario 1.1.1

Sean K un campo y V un K-espacio vectorial. Entonces: $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$ para todo $\lambda \in K$ y para todo $v \in V$.

Demostración. Sean $\lambda \in K$ y $v \in V$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot_V (-v) &= \lambda \cdot_V ((-1_K) \cdot_V v) && \text{Por prop. 1.1.4} \\
&= (\lambda \cdot_K (-1_K)) \cdot_V v && \text{Por def. Espacio Vectorial punto 6} \\
&= (-\lambda) \cdot_V v && \text{Por def. de Campo punto 8 inverso mult.} \\
&= ((-1_K) \cdot_K \lambda) \cdot_V v && \text{Por prop del campo} \\
&= (-1_K) \cdot_V (\lambda \cdot_V v) && \text{Por def. Espacio Vectorial punto 6} \\
&= -1(\lambda v) && \text{Por prop. 1.1.5}
\end{aligned}$$

$\square$

Notación 1.1.2

K denotará siempre un campo.

1.2. Subespacioes vectoriales

Definición 1.4: Subespacio

Sea V un K-espacio vectorial y W un subconjunto de V. Decimos que W es un subespacio de V si:

a) $\theta_V \in W$.

b) Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.

c) Si $\lambda \in K$ y $v \in W$, entonces $\lambda v \in W$.

Notación 1.2.1

$W \leq V$ denotará que W es un subespacio de V.

Ejemplo 1.2.1

1. $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \leq \mathbb{R}^3$
2. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\} \leq \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

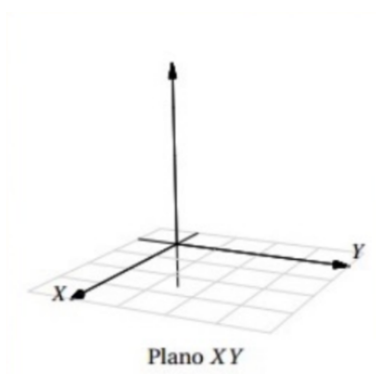

Figura 1.1: Ejemplo de subespacio.

Proposición 1.2.1

Sea V un K-espacio vectorial y W un subconjunto de V. W es un subespacio de V si y solo si W con las operaciones restringidas de V es un K-espacio vectorial.

Demostración. Sea V un K-espacio vectorial y W un subconjunto de V. $\Rightarrow$
Supongamos que W es un subespacio de V. Por el punto b) y c) de la definición Subespacio la suma y el producto por escalar son cerradas en W, entonces las operaciones restringidas de V dan una suma y un producto por escalar en W.

Como $u+v=v+u\ \forall u,v\in V$, en particular $u+v=v+u\ \forall u,v\in W$, entonces la suma en W es conmutativa. Decimos en este caso que la conmutatividad de la suma se hereda de V. Análogamente, se hereda la asociatividad y las propiedades 5,6,7 y 8 de espacio vectorial.

Por hipótesis, $\theta_V\in W$, así θ_V funciona como neutro en W. Además para cada $w\in W$, $-w=(-1)w\in W$ ya que el producto es cerrado en W, por lo tanto se cumple la propiedad 4 de espacio vectorial.

$\therefore W$ con las operaciones restringidas de V es un K-espacio vectorial.

$\Leftarrow$
Supongamos que W es un K-espacio vectorial con las operaciones restringidas de V, entonces la suma y el producto por escalar son cerradas en W y se tienen b) y c) de la definición Subespacio. Además W tiene un neutro, digamos θ_W

$$\begin{aligned}\theta_V+\theta_W&=\theta_W && \text{porque } \theta_V \text{ es neutro en } V\\ &=\theta_W+\theta_W && \text{porque } \theta_W \text{ es neutro en } W\end{aligned}$$

Por 1.1.3 de espacio vectorial, $\theta_V=\theta_W$, por lo tanto $\theta_V\in W$.
$\therefore W$ es un subespacio de V. □

Observación 1.2.1
Si V es un K-espacio vectorial, W subconjunto de V, $W\leq V$ si y solo si se cumple:

1. $W\neq\varnothing$.
2. $\lambda u+v\in W$ para todo $u,v\in W$ y para todo $\lambda\in K$.

Ejemplo 1.2.2
1. $V=\mathcal{M}_{n\times1}(K),\ A\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$

$$W=\{X\in V\mid AX=0\}$$

Las soluciones del sistema homogéneo dado por A.

Demostración. P.D. $W\leq V$

1. $\theta_V\in W$
   $0\in W$ ya que $A0=0$, por lo que $0\in W$.

2. $\lambda u+v\in W$ para todo $u,v\in W$.

Sean $X_1, X_2 \in W$ veamos que $X_1 + X_2 \in W$.

$$\begin{aligned} A(X_1 + X_2) &= AX_1 + AX_2 && \text{por dist. de matrices} \\ &= 0 + 0 && \text{porque } X_1, X_2 \in W \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $X_1 + X_2 \in W$.

3. $\lambda u \in W$ para todo $u \in W$ y para todo $\lambda \in K$.
   Sean $X \in W, \lambda \in K$ veamos que $\lambda X \in W$.

$$\begin{aligned} A(\lambda X) &= \lambda(AX) && \text{por prop. de matrices} \\ &= \lambda 0 && \text{porque } X \in W \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Por lo tanto $\lambda X \in W$. Por lo tanto $W \leq V$.

□

Proposición 1.2.2
La intersección de una familia no vacía de subespacioes es un subespacio.

Demostración. Sea V un K-espacio vectorial y $\{W_i \mid i \in I\}$ una familia no vacía de subespacios de V. P.D. $\bigcap_{i \in I} W_i \leq V$

1. Como $W_i \leq V$ $\forall i \in I$, entonces $\theta_V \in W_i$ $\forall i \in I$, por lo tanto $\theta_V \in \bigcap_{i \in I} W_i$.
2. Sean $u, v \in \bigcap_{i \in I} W_i$, veamos que $u + v \in \bigcap_{i \in I} W_i$.

□

Definición 1.5: Combinación Lineal

Sea V un K espacio vectorial. Considereamos $m \in \mathbb{N}^+$ y $v_1, \ldots, v_m \in V$. Una **combinación lineal** de $v_1, \ldots, v_m$ es una expresión de la forma:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$$

De modo más general, si S es un subconjunto de V, una **combinación lineal de vectores de** S es un vector de la forma:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K, v_1, \ldots, v_m \in S, m \in \mathbb{N}^+$$

Observación 1.2.2

Aunque el conjunto S sea infinito, una combinación lineal de vectores de S es una suma **finita** de vectores de S.

Proposición 1.2.3 S

a V un K-espacio vectorial, $S \neq \varnothing$ un subconjunto de V. El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S cumple lo siguiente:

a) Es un subespacio de V.

b) Contiene a S.

c) Está contenido en cualquier subespacio de V que contenga a S.

1.3. Sección 3

Definición 1.6

Sea V un K espacio vectorial, S un subconjunto de V. **El subespacio de V generado por S** es el conjunto de combinaciones lineales de S, si $S \neq \varnothing$, o $\{\theta_V\}$ si $S = \varnothing$. Lo denotaremos por $\langle S \rangle$ ($span(S)$ en algunos libros). Decimos que S **genera** a $\langle V \rangle$ o que S es un **conjunto generador** de $\langle V \rangle$ si $\langle S \rangle = V$.

Notación 1.3.1

Sean $v_1, \ldots, v_n \in V$, a $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$ se le denota por:
$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$

Observación 1.3.1

Si $W \subseteq \langle S \rangle$, pero $W \neq \langle S \rangle$, entonces S no genera a W.

Definición 1.7

Sea V un K-espacio vectorial. Una lista $v_1, \cdots, v_m$ de vectores en V es una **lista linealmente dependiente** si existen escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

Decimos que es una **lista linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, es decir si:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0_K$$

Nota: Abreviaremos **lista linealmente independiente** por **lista l.i.** y **lista linealmente dependiente** por **lista l.d.**

Definición 1.8

Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto de S de V es un **conjunto linealmente dependiente** si podemos encontrar $m \in \mathbb{N}^+$ y $v_1, \cdots, v_m \in S$ **distintos** y $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

Decimos que S es un **conjunto linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, es decir, si para cualquier $m \in \mathbb{N}^+$ y cualesquiera $v_1, \cdots, v_m \in S$ **distintos** y $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$, se tiene que:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0_K$$

Observación 1.3.2

Si S es un conjunto finito con m vectores distintos, digamos $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$, para ver si

S es l.d. o l.i. debemos ver si existen escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

ó si la única forma en que se cumple lo anterior es que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0_K$.

Lema 1.3.1 Dependencia lineal

ea V un K espacio vectorial, $v_1, \cdots, v_m$ una lista de vectores en V. Si $v_1, \cdots, v_m$ es una lista l.d. y $v_1 \neq \theta_v$, existe $j \in \{2, \cdots, m\}$ tal que:

a) $v_j \in \langle v_1, \cdots, v_{j-1} \rangle$

b) $\langle v_1, \cdots, v_m \rangle = \langle v_1, \cdots, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_m \rangle$

Notación 1.3.2

$\langle v_1, \cdots, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_m \rangle$ se denota por $\langle v_1, \cdots, \hat{v}_j, \cdots, v_m \rangle$

Teorema 1.3.1

Sea V un K-espacio vectorial. Si $v_1, \cdots, v_m$ es una lista de vectores en V l.i., entonces todo conjunto generador de V tiene al menos m elementos.

Corolario 1.3.1

Sea V un K-espacio vectorial. Si existe S un subconjunto finito de V generador con l elementos, entonces todo conjunto linealmente independiente tiene a lo más l elementos. En consecuencia no existen conjuntos linealmente independientes infinitos en V.

1.4. Sección 4

Definición 1.9

Sea V un K-espacio vectorial, B subconjunto de V. Decimos que B es una **base** de V si genera a V y es linealmente independiente. Decimos que V es de **dimensión finita** si tiene una base finita.

Proposición 1.4.1

Sea V un K-espacio vectorial. Si V tiene un conjunto generador finito, entonces V tiene una base finita.

Corolario 1.4.1

Sea V un K-espacio vectorial. V tiene un conjunto generador finito si y solo si V es de dimensión finita.

Observación 1.4.1

Si V es de dimensión finita, todo conjunto l.i. es finito.

Teorema 1.4.1

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de elementos.

Definición 1.10

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, la **dimensión** de V es el número de elementos de una base de V.

Notación 1.4.1

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita, denotaremos por $\dim_K(V)$ a la dimensión de V.

Teorema 1.4.2 S

a V un K-espacio vectorial de dimensión finita.

a) Todo conjunto generador finito se puede reducir a una base.

b) Todo conjunto l.i. se puede completar a una base.

Corolario 1.4.2

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, $dim_K(V) = n$. Entonces:

a) Cualquier conjunto generador con n elementos es una base de V.

b) Cualquier conjunto l.i. con n elementos es una base de V.

Teorema 1.4.3 S
a V un K- espacio vectorial de dimensión finita. Sea W un subespacio de V.

1. W es de dimensión finita.
2. Toda base de W se puede completar a una base de V.
3. $dim_K(W) \leq dim_K(V)$.
4. Si $dim_K(W) = dim_K(V)$, entonces $W = V$.

Definición 1.11

Sea V un K-espacio vectorial. Sean U, W subespacios de V. La suma de U y W es el conjunto:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Generalizando, si $U_1, \cdots, U_m \leq V$, la suma de $U_1, \cdots, U_m$ es el conjunto:

$$U_1 + \cdots + U_m = \{u_1 + \cdots + u_m \mid u_i U_i \forall i\}$$

Observación 1.4.2

1. $U + W \leq V$.
2. $U \subseteq U + W$ y $W \subseteq U + W$.
3. Si U' es otro subespacio que contiene a U y a W, entonces contiene a $U + W$.

Teorema 1.4.4 S
a V un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sean U, W subespacios de V. Entonces:

$$dim_K(U + W) = dim_K(U) + dim_K(W) - dim_K(U \cap W)$$

Definición 1.12

Sea V un K-espacio vectorial. U, W subespacios de V. Decimos que $U + W$ es una **suma directa** si cada $v \in U + W$ se puede escribir de manera única como $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$. En general si $U_1, \cdots, U_m$ son subespacios de V, $U_1 + U_2 + \cdots + U_m$ es una suma directa si cada $v \in U_1 + U_2 + \cdots + U_m$ se puede escribir de manera única como $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ con $u_i \in U_i$ para todo i.

Notación 1.4.2
La suma directa de subespacios se denota por:

$$U \oplus W, U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

Proposición 1.4.2

Sea V un K-espacio vectorial. U, W subespacios de V.
$U + W$ es una suma directa si y solo si $U \cap W = \{\theta_V\}$.

Capítulo 2

Transformaciones lineales

2.1. Seccion 1

Definición 2.1

Sean V y W k-espaacios vectoriales. Una función $T : V \to W$ es una **transformación lineal de V en W** si:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in V$.
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ para todo $v \in V$ y $\lambda \in k$.

Observación 2.1.1

Si T es lineal, ent. $T(\theta_V) = \theta_W$.

Proposición 2.1.1

Sean V, W K-espacios vectoriales, $T : V \to W$. T es lineal si y solo si $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in V$ y $\lambda \in K$.

Notación 2.1.1

V, W K-espacios vectoriales. Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W.

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}$$

Definición 2.2

Sean V, W K-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Definimos el **núcleo** de T como:

$$\ker T = Nuc(T) = \{v \in V \mid T(v) = \theta_W\}$$

La **imagen** de T como:

$$Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$$

Nota: Si $Nuc(T)$ es de dimensión finita, su dimensión es la **Nulidad** de T. Si $Im(T)$ es de dimensión finita, su dimensión es el **Rango** de T.

Proposición 2.1.2

Sean V, W K-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

1. $\ker T$ es un subespacio de V.
2. $Im(T)$ es un subespacio de W.

Teorema 2.1.1 Teorema de la dimensión

Sean V, W K-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si V es de dimensión finita, entonces $Nuc(T)$ y $Im(T)$ son de dimensión finita y:

$$dim(V) = dim(Nuc(T)) + dim(Im(T))$$

Teorema 2.1.2

Sean V, W K-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces T es inyectiva si y solo si $Nuc(T) = \{\theta_V\}$.

Corolario 2.1.1

Sean V, W K-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si V y W son de dimensión finita y $dim_K(V) = dim_K(W)$, entonces T es inyectiva si y solo si T es suprayectiva.

2.2. Seccion 2

Teorema 2.2.1

Sean V, W K-espacios vectoriales, V de dimensión finita n. Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V. Para cualesquiera $w_1, \cdots, w_n \in W$, existe una única $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \cdots, n$.

Corolario 2.2.1

Sean V, W K-espacios vectoriales con V de dimensión finita n, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V. Si $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ son tales que $T(v_i) = S(v_i)$ para $i = 1, \cdots, n$, entonces $T = S$.

Definición 2.3

Sean V, W K-espacios vectoriales.
Dados $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, la **suma** de T y S:

$$T +_{\mathcal{L}} S : V \to W$$

$$(T +_{\mathcal{L}} S)(v) = T(v) +_W S(v)$$

Dados $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in K$, el **producto por escalares** de T y λ:

$$\lambda \cdot_{\mathcal{L}} T : V \to W$$

$$(\lambda \cdot_{\mathcal{L}} T)(v) = \lambda \cdot_W T(v)$$

Proposición 2.2.1

Sean V, W K-espacios vectoriales $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda, \in K$. Entonces $T + S \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \cdot T \in \mathcal{L}(V, W)$.

Teorema 2.2.2

Sean V, W K-espacios vectoriales. $\mathcal{L}(V, W)$ con la suma y el producto escalar definidos es un K-espacio vectorial.

Definición 2.4

Sean V, W, U K-espacios vectoriales $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $S \in \mathcal{L}(W, U)$ Definimos $S \circ T : V \to U$ como $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ para todo $v \in V$.
Nota: La composición de funciones es asociativa

Teorema 2.2.3

La composición de transformaciones lineales es lineal.

Observación 2.2.1
La composición de transformaciones lineales no es conmutativa.

Proposición 2.2.2
Sean V, W K-espacios vectoriales, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(W, U)$. Entonces:

1. $(S_1 + S_2) \circ T_1 = S_1 \circ T_1 + S_2 \circ T_1$
2. $S_1 \circ (T_1 + T_2) = S_1 \circ T_1 + S_1 \circ T_2$

Observación 2.2.2
Sea V un K-espacio vectorial. Definimos $Id_V : V \to V$ como $Id_V(v) = v$ para todo $v \in V$. ${}_Id_V \in \mathcal{L}(V, V)$.

Observación 2.2.3
V, W K-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $T \circ Id_V = T = Id_W \circ T$.

Definición 2.5
A, B conjuntos, $f : A \to B$ f es invertible si existe $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f = Id_A$ y $f \circ f^{-1} = Id_B$. f es invertible si y solo si f es biyectiva.

Proposición 2.2.3
Sean V, W K-espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es invertible entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Teorema 2.2.4
Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita con $dim_K(V) = dim_K(W)$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es invertible
2. T es inyectiva
3. T es suprayectiva
4. Para toda $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V, $\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ es una base de W.
5. Existe una $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V, tal que $\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ es una base de W.

Teorema 2.2.5
Sean V, W K-espacios vectoriales, V de dimensión finita. Si existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ invertible, entonces W es de dimensión finita y $dim_K(V) = dim_K(W)$.

Definición 2.6

Sean V, W K-espacios vectoriales. Decimos que V **es isomorfo a** W si existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ invertible. En tal caso, decimos que T es un **isomorfismo** de V en W.

Notación 2.2.1

$V \cong W$

Teorema 2.2.6

Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita. $V \cong W$ si y solo si $dim_K(V) = dim_K(W)$.

Corolario 2.2.2

Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita n, entonces $V \cong K^n$.

Capítulo 3

Transformaciones lineales y matrices

3.1. Seccion 1

Definición 3.1

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n. Una **base ordenada de V** es una n-ada de vectores de V $(v_1, \cdots, v_n)$ tal que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de V.
Nota: En ocasiones $(v_1, \cdots, v_n)$ y $\{v_1, \cdots, v_n\}$ se usan indistintamente y algunos autores hacen la convención de que los subíndices indican el orden de la base.

Definición 3.2

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n. Dada $B = (v_1, \cdots, v_n)$ una base ordenada de V, $v \in V$ el **vector de coordenadas de** v **respecto a** B **es**:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$$

donde $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Observación 3.1.1

$u, v \in V$ y $\lambda \in K$. $[u + \lambda v]_B = [u]_B + \lambda [v]_B$.

Notación 3.1.1

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, la **columna** j**-ésima de** A es:

$$col_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

Definición 3.3

Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, $B = (v_1, \cdots, v_n)$ $\Gamma = (w_1, \cdots, w_m)$ bases ordenadas de V y W respectivamente, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. La **matriz de T respecto a B y Γ** es una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tal que:

$$col_j(A) = [T(v_j)]_\Gamma$$

Se denotará por $[T]_B^\Gamma$

Observación 3.1.2

Si

$$[T]_B^\Gamma = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,j} & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

entonces $T(v_j) = a_{1,j}w_1 + \cdots + a_{m,j}w_m$.

Proposición 3.1.1

Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente. Entonces:
Para todo $v \in V$

$$[T(v_j)]_\Gamma = [T]_B^\Gamma [v]_B$$

3.2. Seccion 2

Proposición 3.2.1
Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente y $\lambda \in K$. Entonces:

$$[\lambda S + T]_B^\Gamma = \lambda [S]_B^\Gamma + [T]_B^\Gamma$$

Proposición 3.2.2
Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente.
Si $[T]_B^\Gamma = [S]_B^\Gamma$ entonces $T = S$.

Proposición 3.2.3
Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente. Para toda $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $[T]_B^\Gamma = A$.

Teorema 3.2.1
Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita, n y m respectivamente.

$$\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

Corolario 3.2.1
Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita, n y m respectivamente.

$$dim(\mathcal{L}(V, W)) = nm$$

Proposición 3.2.4
Sean V, W, U K-espacios vectoriales de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $S \in \mathcal{L}(W, U)$, B, Γ, Δ bases ordenadas de V, W, U respectivamente. Entonces:

$$[S \circ T]_B^\Delta = [S]_\Gamma^\Delta [T]_B^\Gamma$$

Corolario 3.2.2
Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita $dim(V) = dim(W) = n$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente. Entonces:
T es invertible si y solo si $[T]_B^\Gamma$ es invertible. En este caso:

$$[T^{-1}]_\Gamma^B = \left([T]_B^\Gamma\right)^{-1}$$

3.3. Seccion 3

Definición 3.4

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, B y Γ bases ordenadas de V. La **matriz de cambio de base de B a** Γ es:

$$[id_V]_B^\Gamma \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$$

Observación 3.3.1

$[id_V]_B^\Gamma$ es invertible pues id_V es una transformación lineal invertible.

$$([id_V]_B^\Gamma)^{-1} = [id_V]_\Gamma^B$$

Observación 3.3.2

Para todo $v \in V$:

$$[v]_\Gamma = [id_V(v)]_\Gamma = [id_V]_B^\Gamma [v]_B$$

Teorema 3.3.1

Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m, B y B' bases ordenadas de V y Γ y Γ' bases ordenadas de W respectivamente. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces: Existen $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(K), Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ invertibles tales que:

$$[T]_{B'}^{\Gamma'} = P^{-1}[T]_B^\Gamma Q$$

Corolario 3.3.1

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, B y B' bases ordenadas de V, $T \in \mathcal{L}(V, V)$.
Existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ invertible tal que:

$$[T]_{B'}^{B'} = P^{-1}[T]_B^B P$$

Decimos que $[T]_B^B$ y $[T]_{B'}^{B'}$ son **matrices conjugadas**.

Teorema 3.3.2

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n. Si $A, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ son tales que:

$$A = P^{-1}CP$$

Para alguna $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ invertible, entonces existen $T \in \mathcal{L}(V, V)$ y bases ordenadas B

y B' de V tales que:

$$A = [T]_B^B$$
$$C = [T]_{B'}^{B'}$$

Proposición 3.3.1

Sean V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, n y m respectivamente, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Existen B y Γ bases ordenadas de V y W respectivamente tales que:

$$[T]_B^\Gamma = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

Con $r = dim(Im(T))$.

Capítulo 4

Producto Interno

4.1. Sección 1

Definición 4.1: producto-escalar

Sea K un campo, V un K-espacio vectorial. Un producto escalar en V es:

$$\langle \quad , \quad \rangle : V \times V \to K$$

tal que:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in V$
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V$
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K$

Observación 4.1.1

Sea $w \in V$. Consideremos la función $T = \langle \quad , w\rangle$ es decir $T : V \to K$ tal que $T(v) = \langle v, w\rangle$. Entonces T es lineal.

Demostración. Demostraremos que T es lineal, es decir, que T cumple:

$$\begin{aligned} T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V \\ T(\lambda u) = \lambda T(u) \quad \forall u \in V, \lambda \in K \end{aligned}$$

Para el primer punto, sean $u, v \in V$:

$$\begin{aligned} T(u + v) &= \langle u + v, w\rangle \quad \text{por def. de la imagen de T} \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \text{por def. \textbf{??} de prod. escalar punto 2} \\ &= T(u) + T(v) \quad \text{por def. de la imagen de T} \end{aligned}$$

Para probar el segundo punto, sea $v \in V$ y $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= \langle \lambda v, w\rangle \quad \text{por def. de la imagen de T} \\ &= \lambda\langle v, w\rangle \quad \text{por def. \textbf{??} de prod. escalar punto 3} \\ &= \lambda T(v) \quad \text{por def. de la imagen de T} \end{aligned}$$

□

Observación 4.1.2
También abre sumas y saca escalares en la segunda entrada.

$$\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V$$
$$\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K$$

Demostración. Para la parte de abrir sumas en la segunda entrada:

$$\begin{aligned}\langle w, u+v\rangle &= \langle v+u, w\rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 1}\\ &= \langle v, w\rangle + \langle u, w\rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 2}\end{aligned}$$

Para la parte de sacar escalares en la segunda entrada:

$$\begin{aligned}\langle w, \lambda u\rangle &= \langle \lambda u, w\rangle \quad \text{por ?? de prod. escalar punto 1}\\ &= \lambda\langle u, w\rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 3}\end{aligned}$$

□

Observación 4.1.3
$\langle \theta, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V$

Demostración. Sea $v \in V$:

$$\begin{aligned}\langle \theta, v\rangle &= \langle 0\cdot\theta, v\rangle \quad \text{por prop. de espacio vectorial}\\ &= 0\cdot\langle \theta, v\rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 3}\\ &= 0 \quad \text{por def. de } 0_K\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.1

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}$ $u = (x_1, \cdots, x_n), v = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$

   Demostración. Veremos que $\langle \quad , \quad \rangle$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Procederemos a verificar la def. **??** de producto escalar: Para el punto 1:

   Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$:

   $$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \quad \text{por def. de } \langle \quad , \quad \rangle\\ &= y_1x_1 + \cdots + y_nx_n \quad \text{por conmutatividad de } \mathbb{R}\\ &= \langle v, u\rangle \quad \text{por def. de } \langle \quad , \quad \rangle\end{aligned}$$

   □

2. $K = \mathbb{R}, V = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ con:

   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \forall f, g \in V$$

3.

Definición 4.2

Sean K un campo, V un K-espacio vectorial, $\langle \quad , \quad \rangle$ un producto escalar en V.
Dados $u, v \in V$ decimos que u es ortogonal a v si $\langle u, v\rangle = 0$ y lo denotamos por $u \perp v$.
Dado $S \subseteq V$ definimos el ortogonal a S como:

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, s\rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$$

Observación 4.1.4

A, B subconjuntos de V con $A \subseteq B$ entonces $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

Proposición 4.1.1

Sean K un campo, V un K-espacio vectorial, $\langle , \rangle$ un producto escalar en V. Sea S subconjunto de V.

- $S^{\perp}$ es un subespacio de V.
- $S^{\perp} = \langle S\rangle^{\perp}$.

Notación 4.1.1

A $S^{\perp}$ se le llama el **subespacio ortogonal** de S.

Definición 4.3

Sea K un campo, V un K-espacio vectorial, $\langle , \rangle$ un producto escalar en V.
Decimos que $\langle , \rangle$ es **no degenerado** si $V^{\perp} = \{\theta_V\}$, es decir, si $v \in V$ es tal que $\langle v, w\rangle = 0 \quad \forall w \in V$ implica que $v = \theta_V$.
En caso contrario decimos que $\langle , \rangle$ es **degenerado**.

Definición 4.4

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $\langle \quad , \quad \rangle$ un producto escalar en V. Decimos que $\langle \quad , \quad \rangle$ es **positivo definido** si:

1. $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$.
2. $\langle v, v\rangle = 0$ si y solo si $v = \theta_V$.

Definición 4.5

Sea $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}, V$ un K-espacio vectorial. Una función $\langle \quad , \quad \rangle : V \times V \to K$ es un **producto interno** si:

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \quad \forall u, v \in V$.

2. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in V$.
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K$.
4. $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$ y además $\langle v, v\rangle = 0$ si y solo si $v = \theta_V$.

Un espacio vectorial real o complejo con un producto interno se llama un **espacio con producto interno**.

Observación 4.1.5

$\langle w, u+v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle \quad \forall u, v, w \in V$.

Observación 4.1.6

$\langle v, \lambda u\rangle = \overline{\lambda}\langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K$.

4.2. Sección 2

Definición 4.6

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, $v, w \in V, w \neq \theta_V$. El **coeficiente de fourier de v respecto a w** es:

$$\lambda = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$

Observación 4.2.1

Si $\lambda = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ entonces $v - \lambda w \perp w$.

Definición 4.7

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, S subconjunto de V. Decimos que S es **ortogonal** si $\langle v, w\rangle = 0 \quad \forall v, w \in S, v \neq w$.

Proposición 4.2.1

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, S subconjunto de V. Si S es ortogonal y $\theta_V \in S$, entonces S es linealmente independiente.

Observación 4.2.2

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_m\}$ una base ortogonal de V, con $n = dim(V)$. Si $v \in V$ se tiene que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ con λ_j el coeficiente de Fourier de v con respecto a v_j.

Definición 4.8

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno. Dado $v \in V$ la **norma de v** es

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Lema 4.2.1 CAUCHY SCHWARZ

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno. Entonces:

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v|| \quad \forall u, v \in V$$

Proposición 4.2.2

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno.

1. $||v|| \geq 0 \quad \forall v \in V$ y además $||v|| = 0$ si y solo si $v = \theta_V$.
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \quad \forall v \in V, \lambda \in K$.
3. $||u + w|| \leq ||u|| + ||w|| \quad \forall u, w \in V$.

Lema 4.2.2 Pitágoras

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, $u, v \in V$ con $u \perp v$.

1. $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.
2. $||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Definición 4.9

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, $v \in V$. Decimos que v es **unitario** si $||v|| = 1$.

Teorema 4.2.1 Gran Schmidt

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Entonces V tiene una base ortogonal.

4.3. Seccion 3

Observación 4.3.1
Si $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_m, \cdots, v_n\}$ es una base y $\{v_1, \cdots, v_m\}$ es un ortogonal, entonces $\mathcal{B}' = \{v_1, \cdots, v_m, v'_{m+1}, \cdots, v'_n\}$.

Corolario 4.3.1
Sea V un K-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, W subespacio de V, Γ base ortogonal de W. Entonces existe $\mathcal{B}'$ base ortogonal de V tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{B}'$.

Definición 4.10
Sea V un K-espacio vectorial con producto interno. $\mathcal{B}$ subconjunto de V es una **base ortonormal de** V si es una base ortogonal de V tal que $||v|| = 1 \quad \forall v \in \mathcal{B}$.

Corolario 4.3.2
Sea V un K-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Entonces V tiene una base ortonormal.

Corolario 4.3.3
Sea V un K-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, W subespacio de V, Γ base ortonormal de W. Entonces existe $\mathcal{B}'$ base ortonormal de V tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{B}'$.

Definición 4.11
Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, dado W un subespacio de V de dimensión finita y $\Gamma = \{w_1, \cdots, w_m\}$ una base ortonormal de W, $v \in V$. Definimos la **proyección de** v **en** W **con respecto a** Γ como:

$$\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, w_i \rangle w_i = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_m \rangle w_m$$

Observación 4.3.2
$v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$.

Observación 4.3.3
Se verá después que $\pi_W(v)$ no depende de la base Γ.

Teorema 4.3.1
Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, W un subespacio de V de dimensión

finita. Entonces:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Observación 4.3.4

$\pi_W^{\Gamma}(v)$ no depende de la base Γ.

Corolario 4.3.4

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, W un subespacio de V de dimensión finita.

$$dim(V) = dim(W) + dim(W^{\perp})$$

Más aún, si $\Gamma = \{w_1, \cdots, w_m\}$ es una base ortogonal de W y $\mathcal{B} = \{w_1, \cdots, w_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ es una base ortogonal de V, entonces $\{v_{m+1}, \cdots, v_n\}$ es una base ortogonal de $W^{\perp}$.

Teorema 4.3.2

Sea V un K-espacio vectorial con producto interno, W un subespacio de V de dimensión finita. Dado $v \in V$

$$||v - \pi_W(v)|| \leq ||v - w|| \quad \forall w \in W$$

($\pi_W(v)$ es la mejor aproximación de v en W).