



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIANA AVELLA ALAMINOS

ALGEBRA LINEAL I

ALUMNO:

BARRIENTOS SÁNCHEZ JOSÉ ANTONIO

AUTORA DEL CURSO:

DIANA AVELLA ALAMINOS



Índice general

1	Espacios vectoriales	3
1.1	Sección 1 (Espacios vectoriales)	3
1.2	Sección 2 (Subespacios)	7
1.3	Sección 3	9
1.4	Sección 4	11
2	Transformaciones lineales	15
2.1	Seccion 1	15
2.2	Seccion 2	17
3	Transformaciones lineales y matrices	21
3.1	Seccion 1	21
3.2	Seccion 2	23
3.3	Seccion 3	24
4	Producto Interno	27
4.1	Sección 1	27
4.2	Sección 2	31
4.3	Seccion 3	33

Capítulo 1

Espacios vectoriales

1.1. Sección 1 (Espacios vectoriales)

Definición 1.1: Campo

Sea K un conjunto no vacío con dos operaciones binarias:

$+: K \times K \rightarrow K$ y $\cdot: K \times K \rightarrow K$. Se dice que K es un campo si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $+$ es asociativa.
2. $+$ es conmutativa.
3. Existe un elemento $0_K \in K$ tal que $a + 0_K = a$ para todo $a \in K$.
4. Para cada $a \in K$ existe un elemento $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$.
5. \cdot es asociativa.
6. \cdot es conmutativa.
7. Existe un elemento $1 \in K$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in K$.
8. Para cada $a \in K - \{0_K\}$ existe un elemento $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo $a, b, c \in K$.

Llamaremos a los elementos de K escalares.

Ejemplo 1.1.1

- \mathbb{R} es un campo con las operaciones usuales.
- \mathbb{Q} es un campo con las operaciones usuales.
- \mathbb{Z} no es un campo pues no cumple 8.
- \mathbb{Z}_p con p primo es un campo.

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un campo.

Definición 1.2: Subcampo

Sean K un campo, $\tilde{K} \subseteq K$. Decimos que \tilde{K} es un subcampo de K si \tilde{K} con las operaciones restringidas de K es por sí mismo un campo.

Ejemplo 1.1.2

- \mathbb{Q} es un subcampo de \mathbb{R} .
- \mathbb{R} es un subcampo de \mathbb{C} .

Definición 1.3: Espacio Vectorial

Sea V un conjunto no vacío, K un campo y $+$: $V \times V \rightarrow V$ y \cdot : $K \times V \rightarrow V$ dos operaciones. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$. Asociatividad.
2. $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$. Conmutatividad.
3. Existe un elemento $0_V \in V$ tal que $v + 0_V = v$ para todo $v \in V$. Elemento neutro.
4. Para todo $v \in V$ existe $\hat{v} \in V$ tal que $v + \hat{v} = \hat{v} + v = 0_V$. Inverso aditivo.
5. $1_K \cdot v = v$ para todo $v \in V$.
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$ para todo $\lambda, \mu \in K$ y para todo $v \in V$. Distributividad.
7. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ para todo $\lambda, \mu \in K$ y para todo $v \in V$. Distributividad.
8. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ para todo $\lambda \in K$ y para todo $u, v \in V$. Distributividad.

Decimos que $V, +, \cdot$ es un espacio vectorial sobre el campo K o un K -espacio vectorial. A los elementos de V los llamaremos vectores.

Ejemplo 1.1.3

- \mathbb{R}^n es un \mathbb{R} -espacio vectorial con las operaciones usuales.
- K campo, K^n es un K -espacio vectorial con las operaciones usuales.

$$\begin{aligned}
 K^n &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K\} \\
 (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) &\in K^n \\
 (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\
 \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)
 \end{aligned}$$

- K campo:

$$\begin{aligned} K^\infty &= \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in K \ \forall i \in \mathbb{N}^+\} \\ (x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) &\in K^\infty \\ (x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) \end{aligned}$$

Es un K -espacio vectorial.

- K campo, $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ con m renglones y n columnas con las operaciones usuales de suma y producto por escalar es un K -espacio vectorial.
- K campo, $K[x]$ polinomios en x con coeficientes en K con las operaciones usuales es un K -espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.4

K campo:

$$V = \{f \mid f : K \rightarrow K\}$$

Demostración. Sean $f, g, h \in V$. P.D. $(f + g) + h = f + (g + h)$.

Por construcción $(f + g) + h$

□

Proposición 1.1.1

En un espacio vectorial el neutro es único.

Proposición 1.1.2

En un espacio vectorial los inversos aditivos son únicos.

Proposición 1.1.3

[Propiedades de cancelación] Sean K un campo y V un K -espacio vectorial. Sean $u, v, w \in V$. Entonces:

1. Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.
2. Si $u + v = w + v$, entonces $u = w$.

Proposición 1.1.4

Sean K un campo y V un K -espacio vectorial. Entonces:

1. $0_K \cdot v = \theta_V$ para todo $v \in V$.
2. $\lambda \cdot \theta_V = \theta_V$ para todo $\lambda \in K$.

Proposición 1.1.5

Sea K un campo y V un K -espacio vectorial.
Para todo $v \in V$, $(-1_K)v$ es el inverso aditivo de v .

Corolario 1.1.1

Sean K un campo y V un K -espacio vectorial. Entonces: $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$ para todo $\lambda \in K$ y para todo $v \in V$.

Notación 1.1.1

Dado $v \in V$ denotaremos por $-v$ a su inverso aditivo.

Notación 1.1.2

K denotará siempre un campo.

1.2. Sección 2 (Subespacios)

Definición 1.4: Subespacio

Sea V un K -espacio vectorial y W un subconjunto de V . Decimos que W es un subespacio de V si:

- a) $\theta_V \in W$.
- b) Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.
- c) Si $\lambda \in K$ y $v \in W$, entonces $\lambda v \in W$.

Notación 1.2.1

$W \leq V$ denotará que W es un subespacio de V .

Proposición 1.2.1

Sea V un K -espacio vectorial y W un subconjunto de V . W es un subespacio de V si y solo si W con las operaciones restringidas de V es un K -espacio vectorial.

Observación 1.2.1

Si V es un K -espacio vectorial, W subconjunto de V , $W \leq V$ si y solo si se cumple:

- 1. $W \neq \emptyset$.
- 2. $\lambda u + v \in W$ para todo $u, v \in W$ y para todo $\lambda \in K$.

Proposición 1.2.2 L

intersección de una familia no vacía de subespacios es un subespacio.

Demostración. Sea V un K -espacio vectorial y $\{W_i \mid i \in I\}$ una familia no vacía de subespacios de V . □

Definición 1.5: Combinación Lineal

Sea V un K espacio vectorial. Consideremos $m \in \mathbb{N}^+$ y $v_1, \dots, v_m \in V$. Una **combinación lineal** de v_1, \dots, v_m es una expresión de la forma:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$$

De modo más general, si S es un subconjunto de V , una **combinación lineal de vectores de S** es un vector de la forma:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K, v_1, \dots, v_m \in S, m \in \mathbb{N}^+$$

Observación 1.2.2

Aunque el conjunto S sea infinito, una combinación lineal de vectores de S es una suma **finita** de vectores de S .

Proposición 1.2.3

a V un K -espacio vectorial, $S \neq \emptyset$ un subconjunto de V . El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de S cumple lo siguiente:

- a) Es un subespacio de V .
- b) Contiene a S .
- c) Está contenido en cualquier subespacio de V que contenga a S .

1.3. Sección 3

Definición 1.6

Sea V un K espacio vectorial, S un subconjunto de V . El **subespacio de V generado por S** es el conjunto de combinaciones lineales de S , si $S \neq \emptyset$, o $\{\theta_V\}$ si $S = \emptyset$. Lo denotaremos por $\langle S \rangle$ ($\text{span}(S)$ en algunos libros). Decimos que S **genera** a $\langle V \rangle$ o que S es un **conjunto generador** de $\langle V \rangle$ si $\langle S \rangle = V$.

Notación 1.3.1

Sean $v_1, \dots, v_n \in V$, a $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ se le denota por:
 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Observación 1.3.1

Si $W \subseteq \langle S \rangle$, pero $W \neq \langle S \rangle$, entonces S no genera a W .

Definición 1.7

Sea V un K -espacio vectorial. Una lista v_1, \dots, v_m de vectores en V es una **lista linealmente dependiente** si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

Decimos que es una **lista linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, es decir si:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \theta_V \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0_K$$

Nota: Abreviaremos **lista linealmente independiente** por **lista l.i.** y **lista linealmente dependiente** por **lista l.d.**

Definición 1.8

Sea V un K -espacio vectorial. Un subconjunto de S de V es un **conjunto linealmente dependiente** si podemos encontrar $m \in \mathbb{N}^+$ y $v_1, \dots, v_m \in S$ **distintos** y $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

Decimos que S es un **conjunto linealmente independiente** si no es linealmente dependiente, es decir, si para cualquier $m \in \mathbb{N}^+$ y cualesquiera $v_1, \dots, v_m \in S$ **distintos** y $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, se tiene que:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \theta_V \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0_K$$

Observación 1.3.2

Si S es un conjunto finito con m vectores distintos, digamos $S = \{v_1, \dots, v_m\}$, para ver si

S es l.d. o l.i. debemos ver si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \theta_V$$

ó si la única forma en que se cumple lo anterior es que $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0_K$.

Lema 1.3.1 Dependencia lineal

Sea V un K espacio vectorial, v_1, \dots, v_m una lista de vectores en V . Si v_1, \dots, v_m es una lista l.d. y $v_1 \neq \theta_V$, existe $j \in \{2, \dots, m\}$ tal que:

- a) $v_j \in \langle v_1, \dots, v_{j-1} \rangle$
- b) $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m \rangle$

Notación 1.3.2

$\langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m \rangle$ se denota por $\langle v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m \rangle$

Teorema 1.3.1

Sea V un K -espacio vectorial. Si v_1, \dots, v_m es una lista de vectores en V l.i., entonces todo conjunto generador de V tiene al menos m elementos.

Corolario 1.3.1

Sea V un K -espacio vectorial. Si existe S un subconjunto finito de V generador con l elementos, entonces todo conjunto linealmente independiente tiene a lo más l elementos. En consecuencia no existen conjuntos linealmente independientes infinitos en V .

1.4. Sección 4

Definición 1.9

Sea V un K -espacio vectorial, B subconjunto de V . Decimos que B es una **base** de V si genera a V y es linealmente independiente. Decimos que V es de **dimensión finita** si tiene una base finita.

Proposición 1.4.1

Sea V un K -espacio vectorial. Si V tiene un conjunto generador finito, entonces V tiene una base finita.

Corolario 1.4.1

Sea V un K -espacio vectorial. V tiene un conjunto generador finito si y solo si V es de dimensión finita.

Observación 1.4.1

Si V es de dimensión finita, todo conjunto l.i. es finito.

Teorema 1.4.1

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita. Todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de elementos.

Definición 1.10

Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita, la **dimensión** de V es el número de elementos de una base de V .

Notación 1.4.1

Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita, denotaremos por $\dim_K(V)$ a la dimensión de V .

Teorema 1.4.2 S

a V un K -espacio vectorial de dimensión finita.

- a) Todo conjunto generador finito se puede reducir a una base.
- b) Todo conjunto l.i. se puede completar a una base.

Corolario 1.4.2

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita, $\dim_K(V) = n$. Entonces:

- a) Cualquier conjunto generador con n elementos es una base de V .
- b) Cualquier conjunto l.i. con n elementos es una base de V .

Teorema 1.4.3 S

a V un K -espacio vectorial de dimensión finita. Sea W un subespacio de V .

1. W es de dimensión finita.
2. Toda base de W se puede completar a una base de V .
3. $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$.
4. Si $\dim_K(W) = \dim_K(V)$, entonces $W = V$.

Definición 1.11

Sea V un K -espacio vectorial. Sean U, W subespacios de V . La suma de U y W es el conjunto:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Generalizando, si $U_1, \dots, U_m \leq V$, la suma de U_1, \dots, U_m es el conjunto:

$$U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m \mid u_i \in U_i \forall i\}$$

Observación 1.4.2

1. $U + W \leq V$.
2. $U \subseteq U + W$ y $W \subseteq U + W$.
3. Si U' es otro subespacio que contiene a U y a W , entonces contiene a $U + W$.

Teorema 1.4.4 S

a V un K -espacio vectorial de dimensión finita. Sean U, W subespacios de V . Entonces:

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W)$$

Definición 1.12

Sea V un K -espacio vectorial. U, W subespacios de V . Decimos que $U + W$ es una **suma directa** si cada $v \in U + W$ se puede escribir de manera única como $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$. En general si U_1, \dots, U_m son subespacios de V , $U_1 + U_2 + \dots + U_m$ es una suma directa si cada $v \in U_1 + U_2 + \dots + U_m$ se puede escribir de manera única como $v = u_1 + u_2 + \dots + u_m$ con $u_i \in U_i$ para todo i .

Notación 1.4.2

La suma directa de subespacios se denota por:

$$U \oplus W, U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

Proposición 1.4.2

Sea V un K -espacio vectorial. U, W subespacios de V .
 $U + W$ es una suma directa si y solo si $U \cap W = \{\theta_V\}$.

Capítulo 2

Transformaciones lineales

2.1. Seccion 1

Definición 2.1

Sean V y W k -espacios vectoriales. Una función $T : V \rightarrow W$ es una **transformación lineal de V en W** si:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in V$.
2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ para todo $v \in V$ y $\lambda \in k$.

Observación 2.1.1

Si T es lineal, ent. $T(\theta_V) = \theta_W$.

Proposición 2.1.1

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T : V \rightarrow W$. T es lineal si y solo si $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in V$ y $\lambda \in K$.

Notación 2.1.1

V, W K -espacios vectoriales. Denotamos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W .

$$\mathcal{L}(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ es lineal}\}$$

Definición 2.2

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Definimos el **núcleo** de T como:

$$\ker T = Nuc(T) = \{v \in V \mid T(v) = \theta_W\}$$

La **imagen** de T como:

$$Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$$

Nota: Si $\text{Nuc}(T)$ es de dimensión finita, su dimensión es la **Nulidad** de T . Si $\text{Im}(T)$ es de dimensión finita, su dimensión es el **Rango** de T .

Proposición 2.1.2

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces:

1. $\ker T$ es un subespacio de V .
2. $\text{Im}(T)$ es un subespacio de W .

Teorema 2.1.1 Teorema de la dimensión

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si V es de dimensión finita, entonces $\text{Nuc}(T)$ y $\text{Im}(T)$ son de dimensión finita y:

$$\dim(V) = \dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Im}(T))$$

Teorema 2.1.2

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces T es inyectiva si y solo si $\text{Nuc}(T) = \{\theta_V\}$.

Corolario 2.1.1

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si V y W son de dimensión finita y $\dim_K(V) = \dim_K(W)$, entonces T es inyectiva si y solo si T es suprayectiva.

2.2. Seccion 2

Teorema 2.2.1

Sean V, W K -espacios vectoriales, V de dimensión finita n . Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Para cualesquiera $w_1, \dots, w_n \in W$, existe una única $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Corolario 2.2.1

Sean V, W K -espacios vectoriales con V de dimensión finita n , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Si $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$ son tales que $T(v_i) = S(v_i)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces $T = S$.

Definición 2.3

Sean V, W K -espacios vectoriales.

Dados $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, la **suma** de T y S :

$$T +_{\mathcal{L}} S : V \rightarrow W$$

$$(T +_{\mathcal{L}} S)(v) = T(v) +_W S(v)$$

Dados $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in K$, el **producto por escalares** de T y λ :

$$\lambda \cdot_{\mathcal{L}} T : V \rightarrow W$$

$$(\lambda \cdot_{\mathcal{L}} T)(v) = \lambda \cdot_W T(v)$$

Proposición 2.2.1

Sean V, W K -espacios vectoriales $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda \in K$. Entonces $T + S \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \cdot T \in \mathcal{L}(V, W)$.

Teorema 2.2.2

Sean V, W K -espacios vectoriales. $\mathcal{L}(V, W)$ con la suma y el producto escalar definidos es un K -espacio vectorial.

Definición 2.4

Sean V, W, U K -espacios vectoriales $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $S \in \mathcal{L}(W, U)$ Definimos $S \circ T : V \rightarrow U$ como $(S \circ T)(v) = S(T(v))$ para todo $v \in V$.

Nota: La composición de funciones es asociativa

Teorema 2.2.3

La composición de transformaciones lineales es lineal.

Observación 2.2.1

La composición de transformaciones lineales no es conmutativa.

Proposición 2.2.2

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(W, U)$. Entonces:

1. $(S_1 + S_2) \circ T_1 = S_1 \circ T_1 + S_2 \circ T_1$
2. $S_1 \circ (T_1 + T_2) = S_1 \circ T_1 + S_1 \circ T_2$

Observación 2.2.2

Sea V un K -espacio vectorial. Definimos $Id_V : V \rightarrow V$ como $Id_V(v) = v$ para todo $v \in V$. $Id_V \in \mathcal{L}(V, V)$.

Observación 2.2.3

V, W K -espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $T \circ Id_V = T = Id_W \circ T$.

Definición 2.5

A, B conjuntos, $f : A \rightarrow B$ f es invertible si existe $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $f^{-1} \circ f = Id_A$ y $f \circ f^{-1} = Id_B$. f es invertible si y solo si f es biyectiva.

Proposición 2.2.3

Sean V, W K -espacios vectoriales, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es invertible entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

Teorema 2.2.4

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita con $\dim_K(V) = \dim_K(W)$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. T es invertible
2. T es inyectiva
3. T es suprayectiva
4. Para toda $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es una base de W .
5. Existe una $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , tal que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es una base de W .

Teorema 2.2.5

Sean V, W K -espacios vectoriales, V de dimensión finita. Si existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ invertible, entonces W es de dimensión finita y $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

Definición 2.6

Sean V, W K -espacios vectoriales. Decimos que V **es isomorfo a** W si existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ invertible. En tal caso, decimos que T es un **isomorfismo** de V en W .

Notación 2.2.1

$$V \cong W$$

Teorema 2.2.6

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita. $V \cong W$ si y solo si $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

Corolario 2.2.2

Si V es un K -espacio vectorial de dimensión finita n , entonces $V \cong K^n$.

Capítulo 3

Transformaciones lineales y matrices

3.1. Sección 1

Definición 3.1

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita n . Una **base ordenada de V** es una n -ada de vectores de V (v_1, \dots, v_n) tal que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V .

Nota: En ocasiones (v_1, \dots, v_n) y $\{v_1, \dots, v_n\}$ se usan indistintamente y algunos autores hacen la convención de que los subíndices indican el orden de la base.

Definición 3.2

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita n . Dada $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada de V , $v \in V$ el **vector de coordenadas de v respecto a B** es:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$$

donde $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Observación 3.1.1

$u, v \in V$ y $\lambda \in K$. $[u + \lambda v]_B = [u]_B + \lambda[v]_B$.

Notación 3.1.1

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, la **columna j -ésima de A** es:

$$\text{col}_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

Definición 3.3

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita, $B = (v_1, \dots, v_n)$ $\Gamma = (w_1, \dots, w_m)$ bases ordenadas de V y W respectivamente, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. La **matriz de T respecto a B y Γ** es una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ tal que:

$$\text{col}_j(A) = [T(v_j)]_\Gamma$$

Se denotará por $[T]_B^\Gamma$

Observación 3.1.2

Si

$$[T]_B^\Gamma = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,j} & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

entonces $T(v_j) = a_{1,j}w_1 + \cdots + a_{m,j}w_m$.

Proposición 3.1.1

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente. Entonces:

Para todo $v \in V$

$$[T(v)]_\Gamma = [T]_B^\Gamma [v]_B$$

3.2. Seccion 2

Proposición 3.2.1

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita, $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente y $\lambda \in K$. Entonces:

$$[\lambda S + T]_B^\Gamma = \lambda[S]_B^\Gamma + [T]_B^\Gamma$$

Proposición 3.2.2

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita, $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente.

Si $[T]_B^\Gamma = [S]_B^\Gamma$ entonces $T = S$.

Proposición 3.2.3

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente. Para toda $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ existe $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $[T]_B^\Gamma = A$.

Teorema 3.2.1

Sean V y W K -espacios vectoriales de dimensión finita, n y m respectivamente.

$$\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

Corolario 3.2.1

Sean V y W K -espacios vectoriales de dimensión finita, n y m respectivamente.

$$\dim(\mathcal{L}(V, W)) = nm$$

Proposición 3.2.4

Sean V, W, U K -espacios vectoriales de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $S \in \mathcal{L}(W, U)$, B, Γ, Δ bases ordenadas de V, W, U respectivamente. Entonces:

$$[S \circ T]_B^\Delta = [S]_\Gamma^\Delta [T]_B^\Gamma$$

Corolario 3.2.2

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita $\dim(V) = \dim(W) = n$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, B, Γ bases ordenadas de V y W respectivamente. Entonces:

T es invertible si y solo si $[T]_B^\Gamma$ es invertible. En este caso:

$$[T^{-1}]_\Gamma^B = \left([T]_B^\Gamma\right)^{-1}$$

3.3. Seccion 3

Definición 3.4

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita n , B y Γ bases ordenadas de V . La **matriz de cambio de base de B a Γ** es:

$$[id_V]_B^\Gamma \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$$

Observación 3.3.1

$[id_V]_B^\Gamma$ es invertible pues id_V es una transformación lineal invertible.

$$([id_V]_B^\Gamma)^{-1} = [id_V]_\Gamma^B$$

Observación 3.3.2

Para todo $v \in V$:

$$[v]_\Gamma = [id_V(v)]_\Gamma = [id_V]_\Gamma^B [v]_B$$

Teorema 3.3.1

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m , B y B' bases ordenadas de V y Γ y Γ' bases ordenadas de W respectivamente. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces: Existen $P \in \mathcal{M}_{m \times m}(K), Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ invertibles tales que:

$$[T]_{B'}^{\Gamma'} = P^{-1} [T]_B^\Gamma Q$$

Corolario 3.3.1

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita n , B y B' bases ordenadas de V , $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

Existe $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ invertible tal que:

$$[T]_{B'}^{B'} = P^{-1} [T]_B^B P$$

Decimos que $[T]_B^B$ y $[T]_{B'}^{B'}$ son **matrices conjugadas**.

Teorema 3.3.2

Sea V un K -espacio vectorial de dimensión finita n . Si $A, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ son tales que:

$$A = P^{-1} C P$$

Para alguna $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ invertible, entonces existen $T \in \mathcal{L}(V, V)$ y bases ordenadas B

y B' de V tales que:

$$\begin{aligned} A &= [T]_B^B \\ C &= [T]_{B'}^{B'} \end{aligned}$$

Proposición 3.3.1

Sean V, W K -espacios vectoriales de dimensión finita, n y m respectivamente, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Existen B y Γ bases ordenadas de V y W respectivamente tales que:

$$[T]_B^\Gamma = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$$

Con $r = \dim(\text{Im}(T))$.

Capítulo 4

Producto Interno

4.1. Sección 1

Definición 4.1: producto-escalar

Sea K un campo, V un K -espacio vectorial. Un producto escalar en V es:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$$

tal que:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K$

Observación 4.1.1

Sea $w \in V$. Consideremos la función $T = \langle \cdot, w \rangle$ es decir $T : V \rightarrow K$ tal que $T(v) = \langle v, w \rangle$. Entonces T es lineal.

Demostración. Demostraremos que T es lineal, es decir, que T cumple:

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$$

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) \quad \forall u \in V, \lambda \in K$$

Para el primer punto, sean $u, v \in V$:

$$\begin{aligned} T(u + v) &= \langle u + v, w \rangle \quad \text{por def. de la imagen de } T \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 2} \\ &= T(u) + T(v) \quad \text{por def. de la imagen de } T \end{aligned}$$

Para probar el segundo punto, sea $v \in V$ y $\lambda \in K$:

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= \langle \lambda v, w \rangle \quad \text{por def. de la imagen de } T \\ &= \lambda \langle v, w \rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 3} \\ &= \lambda T(v) \quad \text{por def. de la imagen de } T \end{aligned}$$

□

Observación 4.1.2

También abre sumas y saca escalares en la segunda entrada.

$$\begin{aligned}\langle u, v + w \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V \\ \langle u, \lambda v \rangle &= \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K\end{aligned}$$

Demostración. Para la parte de abrir sumas en la segunda entrada:

$$\begin{aligned}\langle w, u + v \rangle &= \langle v + u, w \rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 1} \\ &= \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 2}\end{aligned}$$

Para la parte de sacar escalares en la segunda entrada:

$$\begin{aligned}\langle w, \lambda u \rangle &= \langle \lambda u, w \rangle \quad \text{por ?? de prod. escalar punto 1} \\ &= \lambda \langle u, w \rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 3}\end{aligned}$$

□

Observación 4.1.3

$$\langle \theta, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

Demostración. Sea $v \in V$:

$$\begin{aligned}\langle \theta, v \rangle &= \langle 0 \cdot \theta, v \rangle \quad \text{por prop. de espacio vectorial} \\ &= 0 \cdot \langle \theta, v \rangle \quad \text{por def. ?? de prod. escalar punto 3} \\ &= 0 \quad \text{por def. de } 0_K\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.1

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n$ $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Demostración. Veremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en \mathbb{R}^n . Procederemos a verificar la def. ?? de producto escalar: Para el punto 1:

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{por def. de } \langle \cdot, \cdot \rangle \\ &= y_1 x_1 + \dots + y_n x_n \quad \text{por conmutatividad de } \mathbb{R} \\ &= \langle v, u \rangle \quad \text{por def. de } \langle \cdot, \cdot \rangle\end{aligned}$$

□

2. $K = \mathbb{R}, V = C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ con:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \forall f, g \in V$$

3.

Definición 4.2

Sean K un campo, V un K -espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en V .
 Dados $u, v \in V$ decimos que u es ortogonal a v si $\langle u, v \rangle = 0$ y lo denotamos por $u \perp v$.
 Dado $S \subseteq V$ definimos el ortogonal a S como:

$$S^\perp = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\}$$

Observación 4.1.4

A, B subconjuntos de V con $A \subseteq B$ entonces $B^\perp \subseteq A^\perp$.

Proposición 4.1.1

Sean K un campo, V un K -espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en V . Sea S subconjunto de V .

- S^\perp es un subespacio de V .
- $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

Notación 4.1.1

A S^\perp se le llama el **subespacio ortogonal** de S .

Definición 4.3

Sea K un campo, V un K -espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en V .
 Decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es **no degenerado** si $V^\perp = \{\theta_V\}$, es decir, si $v \in V$ es tal que $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V$ implica que $v = \theta_V$.
 En caso contrario decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es **degenerado**.

Definición 4.4

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto escalar en V . Decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es **positivo definido** si:

1. $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$.
2. $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = \theta_V$.

Definición 4.5

Sea $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , V un K -espacio vectorial. Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ es un **producto interno** si:

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \forall u, v \in V$.

2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V.$
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K.$
4. $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$ y además $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = \theta_V.$

Un espacio vectorial real o complejo con un producto interno se llama un **espacio con producto interno**.

Observación 4.1.5

$$\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle \quad \forall u, v, w \in V.$$

Observación 4.1.6

$$\langle v, \lambda u \rangle = \overline{\lambda} \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V, \lambda \in K.$$

4.2. Sección 2

Definición 4.6

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, $v, w \in V, w \neq \theta_V$. El **coeficiente de fourier de v respecto a w** es:

$$\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$

Observación 4.2.1

Si $\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$ entonces $v - \lambda w \perp w$.

Definición 4.7

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, S subconjunto de V . Decimos que S es **ortogonal** si $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v, w \in S, v \neq w$.

Proposición 4.2.1

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, S subconjunto de V . Si S es ortogonal y $\theta_V \in S$, entonces S es linealmente independiente.

Observación 4.2.2

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base ortogonal de V , con $n = \dim(V)$. Si $v \in V$ se tiene que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ con λ_j el coeficiente de Fourier de v con respecto a v_j .

Definición 4.8

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno. Dado $v \in V$ la **norma de v** es

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Lema 4.2.1 CAUCHY SCHWARZ

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno. Entonces:

$$|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v|| \quad \forall u, v \in V$$

Proposición 4.2.2

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno.

1. $||v|| \geq 0 \quad \forall v \in V$ y además $||v|| = 0$ si y solo si $v = \theta_V$.
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \quad \forall v \in V, \lambda \in K$.
3. $||u + w|| \leq ||u|| + ||w|| \quad \forall u, w \in V$.

Lema 4.2.2 Pitágoras

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, $u, v \in V$ con $u \perp v$.

1. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
2. $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Definición 4.9

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, $v \in V$. Decimos que v es **unitario** si $\|v\| = 1$.

Teorema 4.2.1 Gran Schmidt

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Entonces V tiene una base ortogonal.

4.3. Seccion 3

Observación 4.3.1

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ es una base y $\{v_1, \dots, v_m\}$ es un ortogonal, entonces $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_m, v'_{m+1}, \dots, v'_n\}$.

Corolario 4.3.1

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, W subespacio de V , Γ base ortogonal de W . Entonces existe \mathcal{B}' base ortogonal de V tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{B}'$.

Definición 4.10

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno. \mathcal{B} subconjunto de V es una **base ortonormal** de V si es una base ortogonal de V tal que $\|v\| = 1 \quad \forall v \in \mathcal{B}$.

Corolario 4.3.2

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Entonces V tiene una base ortonormal.

Corolario 4.3.3

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, W subespacio de V , Γ base ortonormal de W . Entonces existe \mathcal{B}' base ortonormal de V tal que $\Gamma \subseteq \mathcal{B}'$.

Definición 4.11

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, dado W un subespacio de V de dimensión finita y $\Gamma = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base ortonormal de W , $v \in V$. Definimos la **proyección de v en W con respecto a Γ** como:

$$\pi_W(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, w_i \rangle w_i = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle v, w_m \rangle w_m$$

Observación 4.3.2

$v - \pi_W(v) \in W^\perp$.

Observación 4.3.3

Se verá después que $\pi_W(v)$ no depende de la base Γ .

Teorema 4.3.1

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, W un subespacio de V de dimensión

finita. Entonces:

$$V = W \oplus W^\perp$$

Observación 4.3.4

$\pi_W^\Gamma(v)$ no depende de la base Γ .

Corolario 4.3.4

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, W un subespacio de V de dimensión finita.

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$$

Más aún, si $\Gamma = \{w_1, \dots, w_m\}$ es una base ortogonal de W y $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de V , entonces $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de W^\perp .

Teorema 4.3.2

Sea V un K -espacio vectorial con producto interno, W un subespacio de V de dimensión finita. Dado $v \in V$

$$\|v - \pi_W(v)\| \leq \|v - w\| \quad \forall w \in W$$

($\pi_W(v)$ es la mejor aproximación de v en W).