

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Curso 2021/2022  
Trabajo de Fin de Grado

---

## Fractales y Geometría Fractal

Fractales, geometría fractal y aplicaciones en la ciencia. Visualización de fractales con Ray-Tracing

Autor: Juan Antonio Villegas Recio

---

Autor: Juan Antonio Villegas Recio  
Tutor de Matemáticas: Manuel Ruiz Galán, Catedrático de Universidad  
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada  
Tutor de Informática: Carlos Ureña Almagro, Profesor Titular de Universidad  
Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos, Universidad de Granada

 AUTORÍA

I hereby affirm that this Master thesis was composed by myself, that the work contained herein is my own except where explicitly stated otherwise in the text. This work has not been submitted for any other degree or professional qualification except as specified; nor has it been published.

City, date

  
\_\_\_\_\_  
Juan Antonio Villegas Recio



## ABSTRACT

*(no more than 250-300 words)*

### **Background**

Describe background shortly

### **Aim**

Describe the aim of your study

### **Method**

Describe your methods

### **Results**

Describe the main results of your study

### **Conclusion**

State your conclusion

### ***Keywords:***

No more than six keywords, preferably MeSH terms

## ÍNDICE GENERAL

<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>II</b>
<b>Lista de Imágenes</b>	<b>IV</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>IV</b>
<b>1. El concepto de <i>fractal</i></b>	<b>2</b>
1.1. Ejemplos clásicos . . . . .	3
1.1.1. El conjunto de Cantor . . . . .	3
1.1.2. El triángulo de Sierpinski . . . . .	4
1.1.3. La alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger . . . . .	5
1.1.4. La curva de Koch . . . . .	5
1.1.5. El copo de nieve de Koch . . . . .	6
1.2. Conceptos de dimensión fractal . . . . .	7
1.2.1. Dimensión por cajas . . . . .	8
1.2.2. Medida y dimensión de Hausdorff . . . . .	11
1.2.3. Dimensión topológica . . . . .	12
1.2.4. Relación entre los distintos tipos de dimensión fractal . . . . .	13
<b>2. Iteración</b>	<b>15</b>
2.1. Iteración de funciones . . . . .	15
2.1.1. Convergencia a un punto fijo . . . . .	16
2.1.2. Velocidad de convergencia . . . . .	17
2.2. El método de Newton y cuencas de atracción . . . . .	18
2.2.1. Autosimilaridad . . . . .	21
<b>3. Conjuntos de Julia y Mandelbrot</b>	<b>23</b>
3.1. Iteración convergente y no convergente . . . . .	24
3.2. Conjuntos de Julia . . . . .	25
3.2.1. Representación gráfica de los conjuntos de Julia . . . . .	25
3.3. Distinción entre conjuntos de Julia conexos y polvaredas . . . . .	27
3.4. El conjunto de Mandelbrot . . . . .	28
3.4.1. Representación gráfica del conjunto de Mandelbrot . . . . .	28
3.5. Autosimilaridad de los conjuntos de Julia y Mandelbrot . . . . .	30
3.5.1. Autosimilaridad en conjuntos de Julia . . . . .	30
3.5.2. Autosimilaridad en el conjunto de Mandelbrot . . . . .	31

3.6.	Conjuntos de Julia y Mandelbrot generalizados . . . . .	31
3.6.1.	Familia $\{z^N + c\}_{c \in \mathbb{C}}$ . . . . .	31
3.6.2.	Conjuntos de Julia con funciones no polinómicas . . . . .	33
<b>4.</b>	<b>Sistemas de Funciones Iteradas</b>	<b>36</b>
4.1.	Transformaciones afines en el plano euclídeo y SFI . . . . .	36
4.2.	Convergencia de SFI . . . . .	39
4.2.1.	El Espacio de Fractales y la Métrica de Hausdorff . . . . .	39
4.2.2.	Aplicaciones contractivas en el espacio de fractales . . . . .	41
4.2.3.	El espacio de fractales y los SFI . . . . .	42
4.3.	SFI y conjuntos autosimilares . . . . .	44
4.4.	El problema inverso . . . . .	45
	<b>Appendices</b>	<b>51</b>
	<b>A. Appendix title</b>	<b>51</b>
	<b>B. Another Appendix</b>	<b>52</b>

## LISTA DE ABREVIATURAS

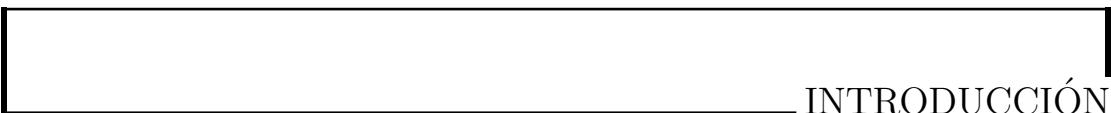
- SDF: Signed Distance Function
- SFI: Sistema de Funciones Iteradas

## LISTA DE IMÁGENES

1.1.	Objetos de la naturaleza con estructura fractal . . . . .	2
1.2.	Iteraciones del proceso de generación del conjunto de Cantor . . . . .	4
1.3.	Generación del triángulo de Sierpinski . . . . .	5
1.4.	Generación de la alfombra de Sierpinski . . . . .	5
1.5.	Esponja de Menger . . . . .	6
1.6.	Iteraciones del proceso de generación de la curva de Koch . . . . .	6
1.7.	Generación del copo de nieve de Koch . . . . .	7
1.8.	Curvas de Koch que componen el copo de Koch . . . . .	7
1.9.	Possible movimiento de un punto en posibles objetos de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	8
1.10.	Segmento, cuadrado y cubo recubiertos por objetos de lado $\frac{1}{2}$ . . . . .	9
1.11.	Una forma de calcular la dimensión por cajas de la curva de Koch .	10
1.12.	Figuras representativas de los ejemplos . . . . .	13
2.1.	Representación de dos órbitas en $\mathbb{C}$ . . . . .	16
2.2.	Cuencas de atracción de $f(z) = z^2 - 1$ . . . . .	19
2.3.	Cuencas de atracción de distintas funciones coloreadas. . . . .	20
2.4.	Evaluación de la velocidad de convergencia en cada punto . . . . .	21
2.5.	Cuencas de atracción de $f(z) = z^3 - 1$ . . . . .	21
2.6.	Diferentes regiones ampliadas de la figura 2.5 . . . . .	22
3.1.	Primeras imágenes de conjuntos de Julia . . . . .	23
3.2.	Primeras imágenes del conjunto de Mandelbrot . . . . .	24
3.3.	Conjuntos de Julia graficados con Mathematica . . . . .	27
3.4.	Resultados de la orden ‘JuliaSetPlot’ . . . . .	27
3.5.	Representación de $\mathcal{M}$ y detalle en $[-0.65, -0.4] \times [0.47, 0.72]$ . . . . .	30
3.6.	Diferentes regiones ampliadas de la figura 3.3 (b) . . . . .	31
3.7.	Detalles autosimilares de algunos conjuntos de Julia . . . . .	32
3.8.	Detalles autosimilares de $\mathcal{M}$ . . . . .	33
3.9.	Ampliaciones del bulbo principal de $\mathcal{M}$ . . . . .	34
4.1.	Ejemplos de aplicaciones de transformaciones lineales . . . . .	38
4.2.	Representación gráfica de $T$ y $w(T)$ . . . . .	39
4.3.	Otra posible semilla para iterar el SFI . . . . .	39
4.4.	Resultado de iterar 8 veces $w$ con distintas figuras iniciales . . . . .	40
4.5.	Contraejemplo a la distancia entre conjuntos . . . . .	40
4.6.	Atractores de los SFI definidos en las tablas 4.1 y 4.2. . . . .	44
4.7.	Imagen cuyo SFI debemos determinar . . . . .	47

## ÍNDICE DE TABLAS

4.1.	SFI para el árbol pitagórico . . . . .	44
4.2.	SFI para el helecho de Barnsley . . . . .	44
4.3.	SFI para la curva de Koch . . . . .	45
4.4.	SFI para la imagen 4.7 . . . . .	48



## INTRODUCCIÓN

TODO

# CAPÍTULO 1

## EL CONCEPTO DE *FRACTAL*

Las primeras preguntas que se pueden plantear son ¿qué es un fractal? ¿Qué tienen de especial estas figuras? ¿Qué las diferencia de un objeto no fractal? ¿Por qué es necesaria una geometría fractal? Trataremos de responder a cada una de estas preguntas a lo largo de este capítulo, comenzando por la primera de ellas. En realidad, hay distintas definiciones de *fractal*, pero todas utilizan dos conceptos como base: la **autosimilaridad** y la **dimensión**. La primera de ellas es más cercana para nosotros de lo que en un principio podemos pensar, fijémonos en los ejemplos de la imagen 1.1.



(a) Romanescu



(b) Rayo

Imagen 1.1: Objetos de la naturaleza con estructura fractal

Observemos que el romanescu, que es un tipo de coliflor, pareciera que está formado de pequeños trozos que recuerdan el objeto original, mientras que estos pequeños trozos a su vez también están formados de pequeños trozos similares al objeto inicial, y así sucesivamente. Por su parte, el rayo se compone de un destello principal del que salen ramificaciones de las que a su vez se originan otras divisiones, formando pequeños rayos semejantes al rayo primitivo.

Esta idea de objetos prácticamente iguales al original salvo cambios de escala es la subyacente al concepto de autosimilaridad.

**Definición 1.0.1** (Autosimilaridad). Una figura o subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  es **autosimilar** si está compuesto por copias de sí mismo reducidas mediante un

factor de escala y desplazadas por un movimiento rígido. Es decir,

$$A = \bigcup_{i=1}^n f_i \circ h_i(A),$$

donde cada  $h_i, i = 1, \dots, n$  es una homotecia de razón menor que 1 y  $f_i, i = 1, \dots, n$  es un movimiento rígido.

En futuras ocasiones se utilizarán indistintamente los términos de «reducción por un factor de escala» e «imagen vía una homotecia», evidenciando el movimiento rígido y queriendo en ambos casos referirnos a este concepto.

Para afianzar y formalizar conceptos y con el objetivo de introducir una definición de la dimensión, estudiaremos algunos ejemplos clásicos de objetos fractales.

## 1.1. Ejemplos clásicos

En adelante, y salvo que se indique lo contrario, cuando hablamos en términos topológicos de  $\mathbb{R}^n$  o subconjuntos suyos nos estaremos refiriendo al espacio topológico  $\mathbb{R}^n$  dotado de la topología usual o la topología inducida por la usual en el caso de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.1.1. El conjunto de Cantor

Creado por el célebre matemático *George Cantor*, este fractal se construye a partir de un segmento de línea recta aplicando el siguiente proceso iterativo:

1. Partimos del segmento de recta compuesto por el intervalo cerrado  $[0, 1]$ , aunque realmente es indiferente qué intervalo se escoja, pues el resultado final será el mismo salvo homotecia. Dividimos dicho segmento en tres segmentos iguales y extraemos el intervalo central, manteniendo los extremos. Es decir, extraemos el intervalo abierto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  y mantenemos el segmento  $[0, \frac{1}{3}]$  y el  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Nótese que obtenemos  $2 = 2^1$  segmentos, cada uno a escala  $\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$  del original.
2. Aplicamos el mismo proceso a los segmentos  $[0, \frac{1}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Esto es, se dividen ambos en tres partes iguales y se extrae el intervalo abierto central de cada uno de ellos, manteniendo los extremos. En este caso obtendríamos  $4 = 2^2$  segmentos iguales, cada uno de ellos a escala  $\frac{1}{3}$  de los dos obtenidos en el primer paso y a escala  $\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$  del original.
3. Repetimos este proceso de manera indefinida, de manera que en el  $n$ -ésimo paso se obtendrían  $2^n$  segmentos de recta a escala  $(\frac{1}{3})^n$ . Denotemos como  $C_n$  al conjunto unión de los  $2^n$  segmentos de recta que se generan en el paso  $n$  del proceso.

Los puntos del intervalo inicial  $[0, 1]$  que restan tras las infinitas iteraciones son los que conforman el *conjunto de Cantor*, que denotamos con  $\mathbf{C}$ , de forma que  $\mathbf{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ .

El conjunto de Cantor es además un conjunto compacto, pues cada  $C_n$  es una unión finita de intervalos cerrados y acotados de  $\mathbb{R}$ , y por tanto compactos, como



Imagen 1.2: Iteraciones del proceso de generación del conjunto de Cantor

sabemos gracias al *teorema de Heine-Borel*. Sabiendo que la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada, y que cada  $C_n$  está acotado, tenemos pues que  $\mathbf{C}$  es un conjunto compacto.

Observemos ahora que en la primera iteración eliminamos 1 segmento de longitud  $\frac{1}{3}$ , en la segunda iteración se eliminan 2 segmentos de longitud  $(\frac{1}{3})^2$  y en la  $n$ -ésima iteración extraemos  $2^{n-1}$  segmentos de longitud  $(\frac{1}{3})^n$ . Si sumamos las longitudes de todos los segmentos que son eliminados en cada paso se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 1,$$

donde hemos usado que la suma de una serie geométrica de razón  $|q| < 1$  es  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

Esto nos lleva a concluir que la longitud eliminada es igual a la longitud original, es decir, la longitud de  $\mathbf{C}$  es nula y aún así tenemos puntos, por ejemplo los extremos de los intervalos que se van generando. Es decir, los puntos de  $\mathbf{C}$  no están agrupados, sino que forman una especie de *polvareda*.

### 1.1.2. El triángulo de Sierpinski

Esta figura, original del polaco *Waclaw Sierpinski*, es creada de una manera que evoca al conjunto de Cantor, pero en dos dimensiones. Veamos detalladamente el proceso (ver imagen 1.3):

1. Se parte de un triángulo equilátero de lado 1 (de nuevo la longitud inicial es irrelevante). Uniendo los puntos medios de cada lado obtenemos una partición del triángulo inicial en 4 triángulos equiláteros, del cual extraemos el interior del triángulo central. Tenemos por tanto  $3 = 3^1$  triángulos a escala  $\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^1$  del original.
2. En cada uno de estos tres triángulos equiláteros se repite la operación anterior, obteniendo por tanto  $9 = 3^2$  triángulos, cada uno a escala  $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$  del original.
3. Repetimos este proceso indefinidamente, de forma que en el paso  $n$ -ésimo se tienen  $3^n$  triángulos, cada uno de ellos a escala  $(\frac{1}{2})^n$  del original.



Imagen 1.3: Generación del triángulo de Sierpinski

La figura a la que converge este proceso infinito se conoce como triángulo **S** de Sierpinski.

Si llamamos  $A$  al área del triángulo inicial, sabemos que en la primera iteración eliminamos un área de  $\frac{1}{4}A$ , en el segundo eliminamos  $3\left(\frac{1}{4}\right)^2 A$  y en el  $n$ -ésimo  $3^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n A$ , de forma que si sumamos todo el área que eliminamos en cada paso obtenemos:

$$A \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{A}{4} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{A}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{A}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) = A,$$

En este caso ocurre algo parecido a lo que vimos que sucedía con el conjunto de Cantor en la sección 1.1.1. El área eliminada es igual al área total, es decir, su área es 0 y seguimos teniendo puntos (por ejemplo los vértices de los triángulos originados en cada iteración). Es decir, los puntos que forman **S** no están agrupados formando un área.

### 1.1.3. La alfombra de Sierpinski y la esponja de Menger

El propio Sierpinski se dio cuenta que con el mismo patrón utilizado para generar **S** se pueden obtener otras formas. Por ejemplo, pensemos que en lugar de comenzar con un triángulo equilátero partimos de un cuadrado, lo subdividimos en 9 cuadrados de lado  $\frac{1}{3}$  y extraemos el cuadrado central. Repitiendo este proceso indefinidamente con cada uno de los cuadrados que se generan finalmente se obtiene la llamada alfombra de Sierpinski (ver imagen 1.4).

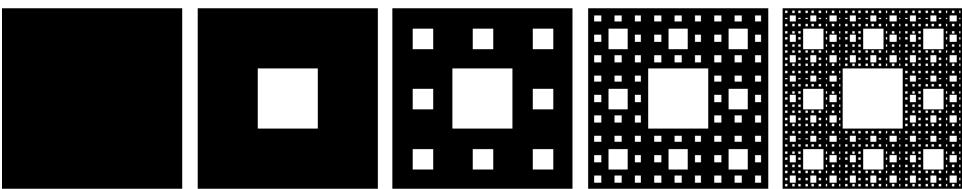


Imagen 1.4: Generación de la alfombra de Sierpinski

Este proceso también se puede modelar en 3D, obteniendo así la conocida como esponja de Menger o cubo de Magritte, que es una generalización en tres dimensiones de la alfombra de Sierpinski, la cual podemos ver en la imagen 1.5.

### 1.1.4. La curva de Koch

Esta figura fractal, creada por el sueco *N. F. Helge von Koch* sigue un proceso de construcción iterativo al igual que el conjunto de Cantor, pero en lugar de eliminar segmentos, se añaden de la siguiente manera (ver imagen 1.6):

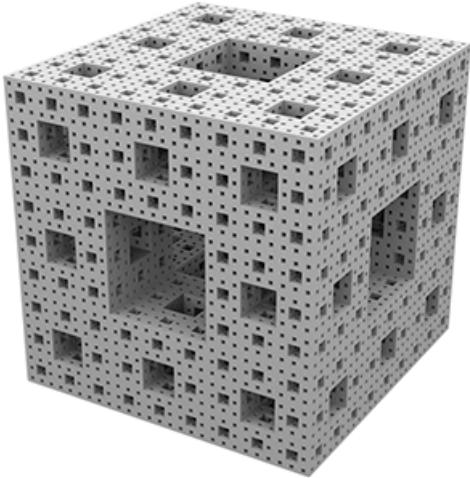


Imagen 1.5: Esponja de Menger

1. Partiendo de un segmento de recta de longitud 1 (al igual que en el conjunto de Cantor, la longitud del segmento inicial es irrelevante, pues la figura final es la misma salvo homotecia), se divide en tres partes iguales de longitud  $\frac{1}{3}$  y la parte central se sustituye por un triángulo equilátero al que se le elimina la base. Esto da lugar a  $4 = 4^1$  segmentos de recta de longitud  $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$ .
2. Repetimos este proceso en cada uno de los segmentos de recta obtenidos, colocando el triángulo siempre por encima de la recta, obteniendo así  $16 = 4^2$  segmentos de recta de longitud  $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ .
3. Aplicamos este proceso indefinidamente, obteniendo en el paso  $n$ -ésimo  $4^n$  segmentos de longitud  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

El resultado final del proceso es lo que llamamos la *curva de Koch*, que denotamos como **K**.

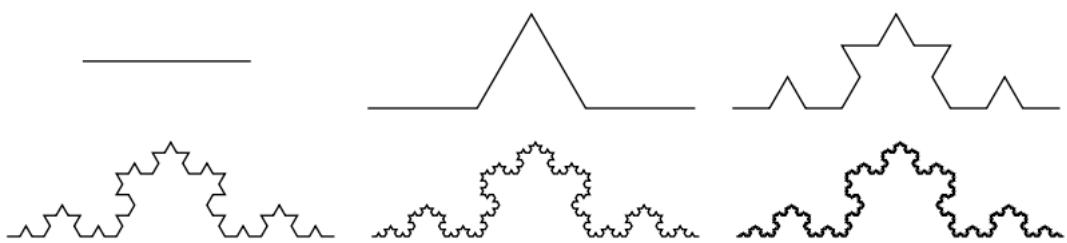


Imagen 1.6: Iteraciones del proceso de generación de la curva de Koch

### 1.1.5. El copo de nieve de Koch

A partir de la curva de Koch podemos generar un objeto matemático muy particular: el copo de nieve de Koch. Para crearlo, basta aplicar el proceso iterativo descrito para generar la curva de Koch a cada uno de los segmentos que componen un triángulo equilátero, de forma que los triángulos que se generan apunten hacia el exterior.

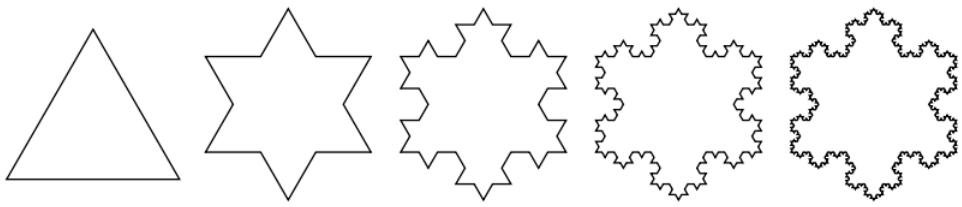


Imagen 1.7: Generación del copo de nieve de Koch

Esta curva posee la particularidad de tener longitud infinita y a su vez encerrar un área finita. Realmente el copo de Koch no es exactamente un fractal, pues no es totalmente autosimilar, aunque se compone de tres partes idénticas las cuales sí son autosimilares, como podemos ver en la imagen 1.8.

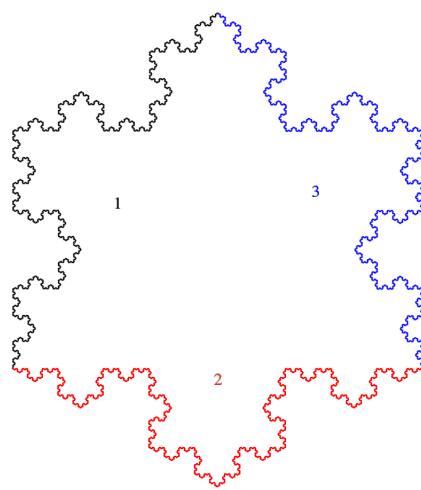


Imagen 1.8: Curvas de Koch que componen el copo de nieve de Koch

## 1.2. Conceptos de dimensión fractal

Al iniciar este capítulo mencionamos que las distintas definiciones de fractal utilizaban los conceptos de autosimilaridad y dimensión. Con los distintos ejemplos hemos entendido el primero de ellos, por lo que es momento de abordar el concepto de dimensión.

El concepto de dimensión más clara que tenemos es el de dimensión algebraica, esto es, la dimensión de un espacio vectorial. Sabemos que un espacio vectorial  $V$  se dice que tiene  $\dim(V) = n$ , con  $n \in \mathbb{N}$  si, y solo si existe una base de  $V$  constituida por  $n$  vectores, de forma que cualquier elemento de  $V$  puede ser expresado como una combinación lineal de los  $n$  vectores de la base. Otra manera de ver esto es que para construir los vectores de  $V$  tenemos hasta  $n$  parámetros de libertad, esto es,  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n \quad \forall v \in V$ , donde  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$  y  $a_1, \dots, a_n \in K$  siendo  $K$  el cuerpo sobre el que está construido el espacio vectorial.

En el caso de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  como puede ser una curva parametrizada, si seguimos la analogía del número de parámetros que define un punto en este caso de una curva, podemos decir que su dimensión es 1, ya que un punto de una curva

parametrizada puede expresarse en función de un único parámetro. La variación de este parámetro nos daría otro punto de la curva, por lo que podemos decir que un punto puede moverse por la curva con un grado de libertad (ver imagen 1.9 (a)). Por su lado, una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  puede localmente ser expresada como la imagen de una parametrización que depende de dos variables y la variación de estas mediante dicha parametrización resulta en otro punto de la superficie, pudiendo expresar esto como que un punto de una superficie regular tiene dos grados de libertad, lo que intuitivamente permite afirmar que una superficie regular tiene dimensión 2 (ver imagen 1.9 (b)).

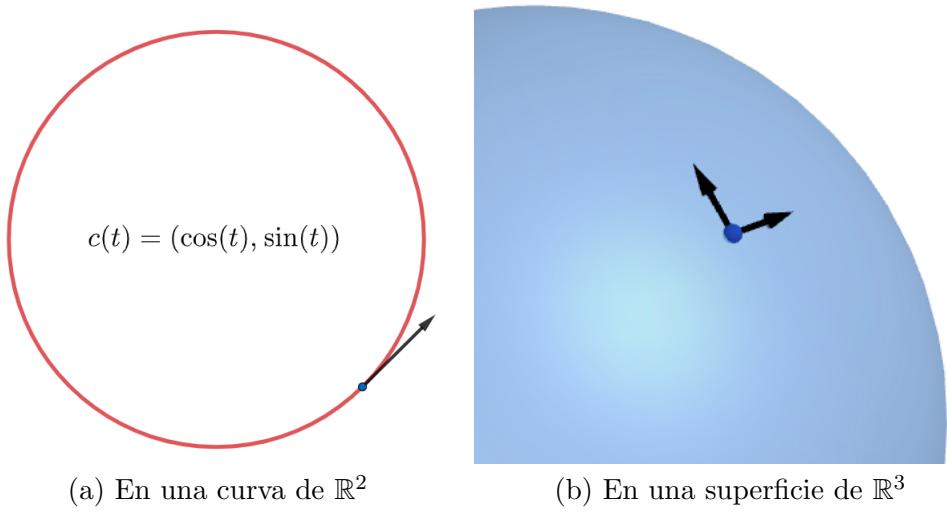


Imagen 1.9: Posible movimiento de un punto en posibles objetos de  $\mathbb{R}^n$

Un posible enfoque para definir la dimensión puede ser el recién presentado, el cual nos sugiere pensar en el número de parámetros que definen la libertad de movimiento de un punto. Sin embargo, pensemos ahora en el triángulo de Sierpinski y en su dimensión. Comprobamos en la sección 1.1.2 que su área 2-dimensional es nula, pero en el objeto final parecería que un punto se pudiera mover en varias direcciones. No se puede afirmar que  $S$  tenga dimensión 1 por la movilidad, pero tampoco dimensión 2 porque tiene área 0, pero sería un valor situado entre estos dos enteros.

### 1.2.1. Dimensión por cajas

Pensemos ahora en un segmento de recta, un cuadrado y un cubo, que son objetos indudablemente de 1, 2 y 3 dimensiones respectivamente. Ahora dividamos los lados de cada objeto en 2 tal y como indica la imagen 1.10. Entonces vemos que podemos recubrir el segmento con  $N(2) := 2 = 2^1$  segmentos de longitud  $\frac{1}{2}$ , el cuadrado se puede cubrir con  $N(2) := 4 = 2^2$  cuadrados de lado  $\frac{1}{2}$  y el cubo con  $N(2) := 8 = 2^3$  cubos, de nuevo cada uno de ellos de lado  $\frac{1}{2}$ .

Si en lugar de 2 tomamos cualquier número natural  $k \geq 1$ , los recubrimientos serían de  $N(k) = k^1$  segmentos de recta,  $N(k) = k^2$  cuadrados y  $N(k) = k^3$  cubos, en todos los casos de lado  $r = \frac{1}{k}$ . Estas igualdades se pueden reescribir como:

$$\frac{N(k)}{k^1} = 1 \quad \frac{N(k)}{k^2} = 1 \quad \frac{N(k)}{k^3} = 1 \quad (1.1)$$

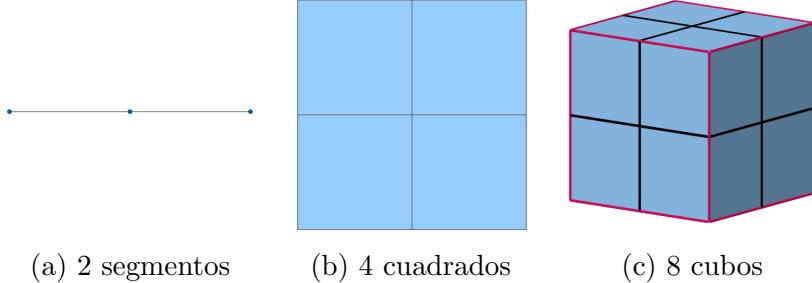


Imagen 1.10: Segmento, cuadrado y cubo recubiertos por objetos de lado  $\frac{1}{2}$

En este sentido, vemos que la dimensión de cada objeto es el *exponente* al que habría que elevar la longitud del lado  $1/k$  para obtener la relación (1.1). Por lo que si llamamos  $d$  a este valor y lo despejamos, nos quedaría

$$d = \frac{\log(N(k))}{\log(k)}.$$

De manera análoga al segmento, el cuadrado y el cubo podemos tomar cualquier figura o subconjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  que pueda ser recubierto por otros conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  más pequeños.

**Definición 1.2.1.** Dado un subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , definimos su **diámetro** como:

$$\text{diam}(U) = \sup \{d(x, y) : x, y \in U\}.$$

Dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  no vacío y acotado, sea  $N_\delta(A)$  el mínimo número de conjuntos de diámetro a lo sumo  $\delta$  necesario para recubrir  $A$ . La *dimensión por cajas superior* y la *dimensión por cajas inferior* se definen, respectivamente como

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_B(A) &:= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{\log(1/\delta)}, \\ \overline{\dim}_B(A) &:= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{\log(1/\delta)}.\end{aligned}$$

En caso de coincidir, se denomina *dimensión por cajas* de  $A$  al valor

$$\dim_B(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{\log(1/\delta)}. \quad (1.2)$$

También es conocida en literatura como *dimensión por conteo de cajas* o *dimensión de Minkowski-Bouligand*.

Hay varias definiciones equivalentes, generalmente más sencillas de utilizar. Por ejemplo, si tomamos en  $\mathbb{R}^n$  una cuadrícula de lado  $\delta$ , i.e., de la forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$$

donde  $m_1, \dots, m_n$  son enteros, tendríamos  $\mathbb{R}^n$  dividido en ‘cajas’, de diámetro  $\delta\sqrt{n}$  y contando el número de cajas que recubren a  $A$ , obtenemos el mismo resultado, puede comprobarse en [4, sección 3.1].

---

<sup>1</sup>Nótese la analogía con la notación de los límites superior e inferior como  $\underline{\lim}$  y  $\overline{\lim}$ .

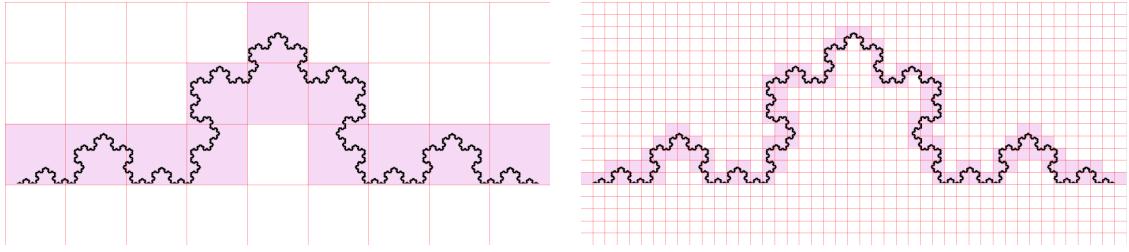
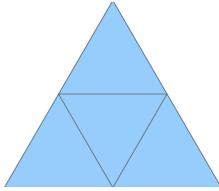


Imagen 1.11: Una forma de calcular la dimensión por cajas de la curva de Koch



Un ejemplo clarificador podría ser el de un triángulo equilátero  $T$  de lado 1, el cual podemos recubrir con 4 triángulos equiláteros de lado  $\frac{1}{2}$ . A su vez podríamos recubrir estos 4 triángulos con otros 4 triángulos de lado  $\frac{1}{4}$ , obteniendo así un recubrimiento de  $T$  con  $16 = 2^{2 \cdot 2}$  triángulos de lado  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ . Si repetimos este proceso y teniendo en cuenta que el diámetro de un triángulo equilátero es la longitud de sus lados, podemos tomar  $\delta = \frac{1}{2^n}$  y recubrir  $T$  con  $N_\delta(T) = 2^{2n}$  triángulos equiláteros. Aplicando (1.2), tenemos por tanto que

$$\dim_B(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^{2n})}{\log(2^n)} = \frac{2n \log(2)}{n \log(2)} = 2.$$

Concluimos entonces que la dimensión por cajas de un triángulo es 2, lo cual tampoco nos sorprende.

De manera similar podemos ya calcular la dimensión por cajas de algunos fractales clásicos. Retomemos ahora el triángulo  $S$  de Sierpinski, que por su génesis (véase sección 1.1.2) puede ser inicialmente cubierto por un triángulo equilátero de lado 1, el cual si lo dividimos en 4 triángulos equiláteros y sustraemos el central sigue recubriendo a  $S$ , de forma que tenemos un recubrimiento de 3 triángulos de lado  $\frac{1}{2}$ . Si repetimos esta operación con cada uno de los tres triángulos podríamos recubrir el triángulo de Sierpinski con 9 triángulos equiláteros de lado  $\frac{1}{4}$ , y así sucesivamente. Por tanto, tomando  $\delta = \frac{1}{2^n}$  obtenemos un recubrimiento de  $N_\delta(S) = 3^n$  triángulos. Por tanto, la dimensión por cajas del triángulo de Sierpinski es

$$\dim_B(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} = \frac{n \log(3)}{n \log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.58496.$$

Efectivamente y tal y como discutimos en el inicio de esta sección, es un valor situado entre 1 y 2.

Por su parte, el conjunto de Cantor  $C$  puede ser recubierto utilizando segmentos de recta, cuyo diámetro es precisamente la longitud de dicho segmento. Tomando  $\delta = \frac{1}{3^n}$  podemos recubrir a  $C$  con  $N_\delta(C) = 2^n$  segmentos de recta (véase sección 1.1.1). Por lo que podemos calcular la dimensión por cajas del conjunto de Cantor como

$$\dim_B(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{n \log(2)}{n \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.63093,$$

que es un valor situado entre 0 y 1.

### 1.2.2. Medida y dimensión de Hausdorff

La dimensión por cajas tiene el inconveniente de que no tenemos garantizada la existencia de límite en la ecuación (1.2) o hipotéticos problemas con conjuntos más generales, por ejemplo conjuntos densos. Así,  $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$  es un conjunto en el que cada punto por separado tiene obviamente dimensión por cajas igual a 0, pero al ser  $\mathbb{Q}$  un conjunto denso en  $\mathbb{R}$  la dimensión por cajas de  $F$  es 1. Por tanto, no se cumple en general que para una familia  $\{F_i\}$  de conjuntos  $\dim_B \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_i \dim_B F_i$ . Para solucionar estos problemas *Felix Hausdorff* publicó en 1919 un artículo que cambiaría la teoría de la medida tal y como la conocíamos [5].

Si ahora tomamos un conjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , un valor  $\varepsilon > 0$  y una familia numerable de conjuntos  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \quad 0 \leq \text{diam}(U_i) \leq \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

se dice que la familia  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un  $\varepsilon$ -recubrimiento de  $A$ . Si ahora consideramos un valor  $s > 0$ , definimos

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ es un } \varepsilon\text{-recubrimiento de } A \right\}$$

Si reducimos el valor de  $\varepsilon$  el número de posibles recubrimientos disminuye, por lo que  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$  aumenta. Por esto nos planteamos cuál será el límite cuando  $\varepsilon$  tienda a cero, aceptando posiblemente el infinito como posible valor del límite. Definimos así

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$$

En [4, Secciones 5.2 y 5.4] se comprueba que  $\mathcal{H}^s(A)$  es una medida definida en la  $\sigma$ -álgebra de Borel que llamamos *medida s-dimensional de Hausdorff* del conjunto  $A$ .

Veamos el comportamiento de  $\mathcal{H}^s(A)$  como función de  $s$ . Es claro que siempre que  $\varepsilon < 1$ ,  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$  decrece conforme  $s$  aumenta, por tanto  $\mathcal{H}^s(A)$  también es decreciente. Podemos de hecho probar el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.1.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t > s$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  y  $\{U_i\}$  un  $\varepsilon$ -recubrimiento de  $A$ . Entonces

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \varepsilon^{t-s} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$$

*Demostración.* Sabemos que  $\text{diam}(U_i)^{t-s} \leq \varepsilon^{t-s} \forall i \in \mathbb{N}$  y del hecho de que  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^{t-s} \text{diam}(U_i)^s$  deducimos que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t \leq \varepsilon^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s.$$

Tomando el ínfimo en la anterior desigualdad tenemos que

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t \leq \varepsilon^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^s,$$

por lo que

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \varepsilon^{t-s} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$$

□

Esta desigualdad nos será muy útil para probar el siguiente teorema que nos da la definición definitiva de lo que llamaremos dimensión de Hausdorff.

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces existe un único valor de  $s$  para el cual  $\mathcal{H}^s(A)$  no es ni 0 ni  $\infty$ . Este valor  $s = \dim_H(A)$  satisface que:*

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < D_H(A) \\ 0 & \text{si } s > D_H(A) \end{cases} \quad (1.3)$$

*Demostración.* Si tomamos  $0 < \varepsilon < 1$  y  $t > s$  dos valores reales, por la proposición 1.2.1 tenemos que  $\mathcal{H}_\varepsilon^t(A) \leq \varepsilon^{t-s} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A)$ . Por tanto, al hacer a  $\varepsilon$  tender a 0, siempre que  $\mathcal{H}^s(A)$  sea finito necesariamente  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ . Si aplicamos el contrarrecíproco ocurre que si  $\mathcal{H}^t(A) > 0$  entonces  $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ .

Por lo que necesariamente debe de existir un valor  $s_0 \in [0, \infty]$  tal que  $\mathcal{H}^s(A) = 0 \forall s < s_0$  y  $\mathcal{H}^s(A) = \infty \forall s > s_0$ . □

**Definición 1.2.2** (Dimensión de Hausdorff). Llamamos **dimensión de Hausdorff** de un conjunto  $A$  al único valor  $\dim_H(A)$  que satisface las condiciones del teorema 1.2.1.

### 1.2.3. Dimensión topológica

Por último estudiaremos un concepto de dimensión aplicable a espacios topológicos. La **dimensión topológica** se define inductivamente de la siguiente forma:

1. La dimensión del conjunto vacío es  $\dim_T(\emptyset) := -1$ .
2. Un espacio topológico  $X$  tiene dimensión 0 ( $\dim_T(X) = 0$ ) si para cualquier  $x \in V$  con  $V$  abierto en  $X$  existe un abierto  $U$  cuya frontera  $\partial(U)$  es vacía y se verifica que  $x \in U \subseteq V$ .
3. Un espacio topológico  $X$  tiene dimensión menor o igual que  $n$  ( $\dim_T(X) \leq n$ ) si para cualquier  $x \in X$  y cualquier  $V$  abierto que contiene a  $x$  existe un abierto  $U$  tal que  $\dim_T(\partial(U)) \leq n - 1$  y se verifica que  $x \in U \subseteq V$ .
4.  $X$  tiene dimensión  $n$  ( $\dim_T(X) = n$ ) si se verifica que  $\dim_T(X) \leq n$  pero es falso que  $\dim_T(X) \leq n - 1$

**Ejemplo 1.2.1.** (Véase imagen 1.12 (a)) En  $\mathbb{R}^2$  dotado de la topología usual consideramos un punto  $p$  cualquiera y el espacio topológico  $X = \{p\}$ . Por tanto la topología inducida por la topología usual  $\tau$  en  $X$  es  $\tau_X = \{X, \emptyset\}$ . Sea  $V$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contenga a  $p$ , por tanto  $\tilde{V} = V \cap X = \{p\}$  es un abierto en  $X$  que contiene a  $p$ . Podemos encontrar entonces un abierto  $U = \{p\}$  de  $X$  tal que su frontera  $\partial(U) = \emptyset$  y además  $p \in U \subseteq V$ . Por tanto concluimos que  $X$  tiene dimensión 0.



Imagen 1.12: Figuras representativas de los ejemplos

**Ejemplo 1.2.2.** (Véase imagen 1.12 (b)) En  $\mathbb{R}^2$  dotado de la topología usual, consideramos una recta cualquiera, llámémosla  $r$ , y el espacio topológico  $X = \{r\}$ . Sea  $x \in X$  y  $V$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  que contenga a  $x$ , de forma que  $\tilde{V} = r \cap V$  es un abierto de  $X$ . Podemos entonces tomar un abierto  $U$  dentro de  $\tilde{V}$  (un segmento abierto de recta), de forma que  $x \in U \subseteq \tilde{V}$ . Por otro lado,  $\partial(U) = \{p, q\}$ , y podemos comprobar fácilmente (con ayuda del ejemplo 1.2.1) que  $\dim_T(\partial(U)) = 0$ . Por todo esto podemos concluir que  $X = r$  es un espacio topológico de dimensión 1.

#### 1.2.4. Relación entre los distintos tipos de dimensión fractal

La dimensión por cajas, aunque útil en la práctica, al comienzo de la sección 1.2.2 hemos comprobado que tiene algunos problemas. No obstante, para muchos fractales, y en particular para los que cumplen la *condición de conjunto abierto* (véase sección 4.3), resulta más sencillo computacionalmente calcular su dimensión por cajas frente a su dimensión de Hausdorff.

En general, y como se puede comprobar en [4, Sección 3.1], ocurre que la dimensión por cajas acota superiormente a la dimensión de Hausdorff, esto es, dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_B(A) \leq \overline{\dim}_B(A),$$

donde, insistimos, es posible que se dé la igualdad.

Sobre la dimensión topológica, se tiene que si  $X$  es un espacio topológico separable<sup>2</sup>, entonces

$$\dim_T(X) \leq \dim_H(X).$$

Este resultado fue originalmente probado por *Edward Szpilrajn*, véase [6, Capítulo VII].

Por otro lado, si nos restringimos a conjuntos totalmente autosimilares, existe un resultado que relaciona la dimensión de Hausdorff y la dimensión por cajas para conjuntos totalmente autosimilares: el teorema de Moran (véase teorema 4.3.1).

---

<sup>2</sup>Recordamos que un espacio topológico es *separable* si contiene un conjunto denso numerable

Este resultado nos asegura que en estos casos la dimensión por cajas y la dimensión de Hausdorff coinciden.

En conclusión, para un conjunto no vacío y acotado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , se tiene que:

$$\dim_T(A) \leq \dim_H(A) \leq \dim_B(A) \leq n \quad (1.4)$$

A partir de esta cadena de desigualdades, en la que notamos que la dimensión fractal, entendiendo por esta la dimensión de Hausdorff que es la más general, y que siempre excede o iguala a la dimensión topológica, podemos enunciar nuestra primera definición de fractal, que fue formulada por *Benoit Mandelbrot* en [3].

**Definición 1.2.3** (Fractal). Un **fractal** es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que es autosimilar y cuya dimensión fractal excede a su dimensión topológica.

## CAPÍTULO 2

### ITERACIÓN

Como hemos podido comprobar en el capítulo anterior, muchos de los fractales clásicos son generados repitiendo indefinidamente un proceso. Iteración es el proceso de repetir una y otra vez un método, ocasionalmente sobre el resultado de la aplicación anterior. Este procedimiento es muy útil en muchas disciplinas matemáticas. Por ejemplo, existen métodos numéricos basados en la iteración como el método de *Jacobi* y *Gauss-Seidel* para resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el método de *Newton-Raphson* para encontrar soluciones de ecuaciones, el método de *Runge-Kutta* para resolución numérica de ecuaciones diferenciales, etc. Incluso en otras disciplinas como el aprendizaje automático los algoritmos de *K-Means* para “clustering” o los métodos de generación de árboles de decisión en problemas de clasificación hacen uso de procesos iterativos. Esta metodología aplicada sobre el plano complejo y sobre ciertas funciones complejas será la que nos proporcionará nuestros primeros ejemplos de imágenes fractales.

### 2.1. Iteración de funciones

**Definición 2.1.1.** Consideramos una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y un punto  $z \in \mathbb{C}$ . La aplicación sucesiva de  $f$  a  $z$  – i.e.  $z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \dots$  – produce las **iteradas** de la función  $f$  en el punto  $z$ . Al conjunto de dichas iteradas se le denomina **órbita**  $O_f(z)$  de  $f$  en  $z$ .

$$O_f(z) := \{z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots\}.$$

donde  $f^n$  denota a  $f \circ f^{n-1}$ .

Lo siguiente es plantearse la posible convergencia de la sucesión  $\{f^n(z)\}$ . Para ello, y a partir de este momento nos ayudaremos del software **Mathematica**® en su versión 12 (concretamente la versión 12.1)<sup>1</sup>. El comando **NestList[f,z,n]** itera una función **f**, comenzando en el punto **z** un total de **n** veces y devuelve una lista con los **n** valores.

Para saber qué ocurre a largo plazo podemos iterar un número grande de veces, fíjémonos lo que ocurre si utilizamos  $f(z) := z^2$  comenzando por  $z_0 = 0.9$ .

<sup>1</sup>Los códigos completos que generan cada una de las imágenes que se observan en este documento se pueden encontrar en <https://github.com/JAntonioVR/Geometria-Fractal/tree/main/Iteracion-y-Fractales>

```
In[1]:= f[z_] := z^2;
NestList[f, 0.9, 10]

Out[1]= {0.9, 0.81, 0.6561, 0.430467, 0.185302, 0.0343368,
0.00117902, 1.39008*10^-6, 1.93233*10^-12, 3.73392*10^-24,
1.39421*10^-47}
```

Como se puede observar, en cada iteración se acerca cada vez más a 0, lo cual denotamos con  $\{f^n(0.9)\} \rightarrow 0$ . En este caso todos los valores eran reales, pero aprovechando la correspondencia de  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ , de forma que un número complejo  $z = x + y \cdot i \in \mathbb{C}$  se corresponde con el par  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  podemos representar en el plano y de forma visual la tendencia de dichas sucesiones. Observemos los ejemplos de las imágenes 2.1.

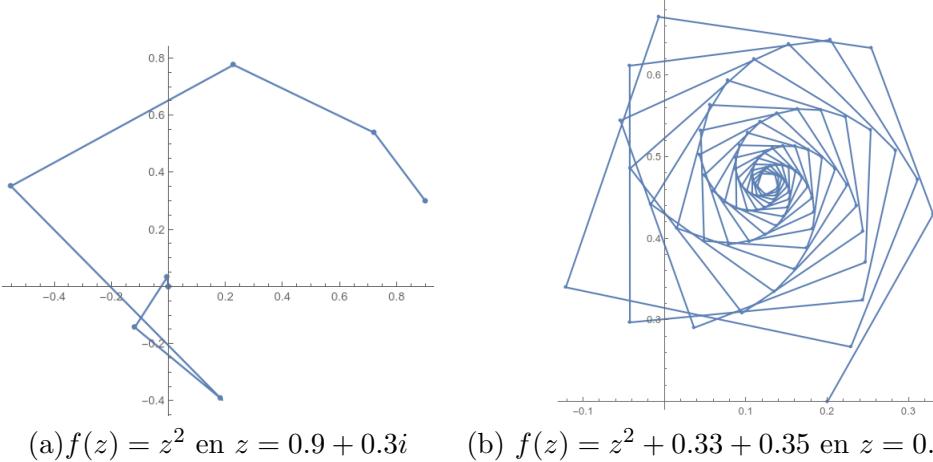


Imagen 2.1: Representación de dos órbitas en  $\mathbb{C}$

Los ejemplos expuestos hasta ahora son todos convergentes, pero esto no es siempre así. Nuestro objetivo ahora es poder conocer el comportamiento a largo plazo de la órbita de una función y un punto dados.

### 2.1.1. Convergencia a un punto fijo

Fijémonos que en el ejemplo anterior si en lugar de tomar  $z_0 = 0.9$  hubiésemos tomado cualquier valor con  $|z_0| < 1$  la convergencia habría sido igualmente a 0, pues elevamos al cuadrado cada vez números más pequeños. Justo al contrario ocurre si  $|z_0| > 1$ , en cuyo caso la sucesión diverge. Por último, en caso de que  $|z_0| = 1$ , esto es,  $z_0 \in S^1$ , la sucesión  $\{f^n(z_0)\}$  nunca saldrá de  $S^1$ , siendo este el conjunto que delimita la frontera entre el conjunto de puntos cuya sucesión converge o diverge. En particular,  $f^n(-1) = f^n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , por lo que  $z = 1$  es un punto fijo de  $f$ , es decir,  $f(z) = z$ .

Nos interesa particularmente saber qué sucesiones de iteradas convergen y a qué elemento convergen. En este sentido *Stephan Banach* demostró uno de los resultados más útiles y vigentes del análisis funcional:

**Teorema 2.1.1** (Punto fijo de Banach). *Sea  $X$  un espacio métrico completo y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva. Entonces  $f$  tiene un único punto fijo. Además, la sucesión de iteradas  $\{f^n(x_0)\}$  converge a dicho punto fijo para cualquier  $x_0 \in X$ .*

*Demostración.* Probaremos primero la existencia:

Sea  $x_0 \in X$  y sea la sucesión de iteradas  $\{x_n\} = \{f^n(x_0)\}$ . Por ser  $f$  contractiva, llamamos  $K < 1$  a su constante de Lipschitz. Probaremos por inducción que  $d(x_n, x_{n+1}) \leq K^n d(x_0, x_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . El caso base es cierto pues  $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq Kd(x_0, x_1)$ . Si suponemos que la hipótesis es cierta para cierto  $n$ , tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq Kd(x_n, x_{n+1}) \leq K^{n+1}d(x_0, x_1).$$

Ahora, para  $n, r \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+r}) &\leq \sum_{j=0}^{r-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{r-1} K^{n+j} \leq K^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} K^j \\ &= \frac{d(x_0, x_1)K^n}{1-K}. \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , como  $\{K^n\} \rightarrow 0$ , existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > m$  se tiene que  $d(x_0, x_1)K^n < \varepsilon(1 - K)$ . Si ahora tomamos dos naturales  $p, q \geq m$  con  $p < q$ , aplicando la desigualdad anterior tomando  $n = p$  y  $r = q - p$  obtenemos que:

$$d(x_p, x_q) = d(x_n, x_{n+r}) \leq \frac{d(x_0, x_1)K^n}{1-K} < \varepsilon$$

de donde deducimos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy, y como  $X$  es completo, tenemos que  $\{x_{n+1}\} = \{f(x_n)\} = \{f^n(x_0)\} \rightarrow x \in X$ . Pero  $f$  es continua, por lo que si  $\{x_n\} \rightarrow x$ , necesariamente  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$ , por lo que  $f(x) = x$ .

Para probar la unicidad, suponemos que  $y \in X$  es otro punto fijo de  $f$ , por lo que  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ . Tomando el primero y el tercer miembro de la desigualdad deducimos que  $(1 - K)d(x, y) \leq 0$ , luego  $d(x, y) = 0$ .  $\square$

Este teorema unido a que sabemos que  $\mathbb{C}$ , y por tanto todos sus subconjuntos cerrados, es completo, nos permite asegurar convergencia de las sucesiones  $f^n(x_0)$  a un punto fijo para cualquier  $x_0$  siempre que dicha función sea contractiva.

### 2.1.2. Velocidad de convergencia

Si recordamos el teorema del punto fijo de Banach (teorema 2.1.1), que nos decía que las funciones contractivas en un espacio métrico completo admiten un único punto fijo, el cual se puede hallar iterando la función. Recordemos que dada una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  contractiva, esta cumple que  $|f(z_1) - f(z_2)| \leq K|z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , siendo  $0 < K < 1$  la constante de Lipschitz de  $f$ , nombrada en este caso la constante de contractividad. Fijémonos que, si iteramos  $n$  veces la función  $f$

$$\begin{aligned} |f^n(z_0) - f^{n-1}(z_0)| &\leq K|f^{n-1}(z_0) - f^{n-2}(z_0)| \\ &\leq K^2|f^{n-2}(z_0) - f^{n-3}(z_0)| \\ &\leq \dots \leq K^{n-1}|f(z_0) - z_0| \end{aligned}$$

por lo que en realidad la constante  $K$  define de forma genérica la velocidad de convergencia en términos de la función. Cuanto más cercana a 0, más rápida será la convergencia al punto fijo. Sin embargo, vemos que realmente también depende

de la condición inicial fijada, y es este el aspecto que explotaremos para obtener imágenes fractales.

En los casos que tengamos asegurada la convergencia, es interesante saber cuántas iteraciones son necesarias en cada punto para saber si hemos alcanzado el valor al que converge la sucesión. Este alcance se toma como aproximado, pues generalmente nunca se llega a alcanzar el punto fijo, tan solo podemos reducir la diferencia tanto como queramos. En este sentido, *Mathematica* tiene dos comandos útiles:

- `FixedPointList[f,expr]` genera una lista de valores resultantes de aplicar `f` a `expr` repetidamente hasta que los dos últimos valores no cambian. Para parametrizar la precisión en la proximidad de los valores podemos utilizar el argumento opcional `SameTest`<sup>2</sup>.
- `FixedPoint[f,expr]` hace lo mismo pero produce como salida únicamente el valor último producido.

El siguiente código muestra un ejemplo de uso:

```
In[2]:= f[z_] = z/2 + 1/z;
          FixedPointList[f, 0.75 + 0.1 I, SameTest -> (Abs[#1 - #2] < 10^-4 &)]
          FixedPoint[f, 0.75 + 0.1 I]

Out[2]= {0.75 + 0.1 I, 1.68504 - 0.124672 I, 1.43275 - 0.0186668 I,
          1.41421 - 0.000241452 I, 1.41421 - 2.45537*10^-10 I,
          1.41421 + 3.57849*10^-18 I}

Out[3]= 1.41421 + 0. I
```

Y a partir de la longitud de la lista que nos devuelve `FixedPointList`, es decir, con el sencillo comando `Length[FixedPoint[f,x]]` podemos medir la velocidad de convergencia de cada punto.

## 2.2. El método de Newton y cuencas de atracción

Gracias a la iteración y al estudio de la convergencia de las sucesiones que definen las órbitas, podemos definir muchos métodos numéricos que nos ayuden a resolver numéricamente problemas que de forma teórica o analítica serían difíciles de abordar. Entre estos está el conocido **método de Newton**. Este es un procedimiento iterativo que nos permite adivinar con cierta precisión donde se anula una función derivable (al menos en un entorno de la raíz), pudiendo así utilizarlo como herramienta para la resolución de ecuaciones. Existen varias y distintas versiones del método de Newton, siendo la más sencilla la que busca las raíces de una función real de variable real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , conociéndose también en este caso como *método de Newton-Raphson*. Además, hay una generalización para aplicaciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la cual se apoya en la inversa del operador diferencial. Sin embargo, nosotros estamos trabajando con funciones complejas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , que aunque  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{R}^2$  sean isomorfos, la dinámica es distinta, pues si la función compleja es suficientemente buena, podemos usar su derivada  $f'(z)$  y no el operador diferencial (véase [12]).

---

<sup>2</sup>Más información en la documentación oficial <https://reference.wolfram.com/language/ref/FixedPointList.html>

Recordemos que dada una ecuación  $f(z) = 0$  para cierta función compleja y analítica  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , el método de Newton itera la función

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \quad (2.1)$$

comenzando por un punto  $z_0$  cercano a la raíz. Es decir, calcula la sucesión  $\{z_n\}$  definida como  $z_{n+1} = N_f(z_n) \forall n \in \mathbb{N}$ , la cual aplicando el teorema 2.1.1 podemos deducir que converge a un punto  $a \in \mathbb{C}$  que verifica  $f(a) = 0$  siempre que  $f'(a) \neq 0$ . Para mayor detalle acerca de la convergencia local ver [10, Capítulo 7] y [11, Sección 5.4].

Sin embargo, en muchas ecuaciones, comenzando por las polinómicas de grado mayor que 1, existen varias soluciones distintas, pero el método de Newton converge sólo a una de ellas, dependiendo de qué  $z_0$  fijemos. Nuestro objetivo ahora se sitúa en discernir, para cada punto  $z_0$  del plano, a qué solución de la ecuación  $f(z) = 0$  converge la sucesión  $\{z_n\}$  dada por el método de Newton utilizando a  $z_0$  como semilla. En las siguientes secciones veremos algunos ejemplos de esta distinción y su utilidad, llegando a las primeras imágenes fractales generadas por iteración.

**Ejemplo 2.2.1.** Consideramos la función compleja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = z^2 - 1$ , la cual tiene dos raíces: 1 y  $-1$ , las dos raíces cuadradas de 1. Una forma sencilla de comprobar a qué raíz converge cada sucesión utilizando como semilla cada  $z_0 \in \mathbb{C}$  es asociando un color a cada punto del plano dependiendo de la raíz a la que converja y pidiendo a *Mathematica* que coloree el plano complejo siguiendo este criterio.

```
In[4]:= iteracionN = #2 - #1[#2]/Derivative[1][#1][#2] &;
newtonArgumento =
Compile[{{z, _Complex}},
Arg[FixedPoint[iteracionNR[f, #] &, z, 50]]];
DensityPlot[newtonArgumento[x + I*y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
PlotPoints -> 100, Mesh -> False, ColorFunction -> "Rainbow"]
```

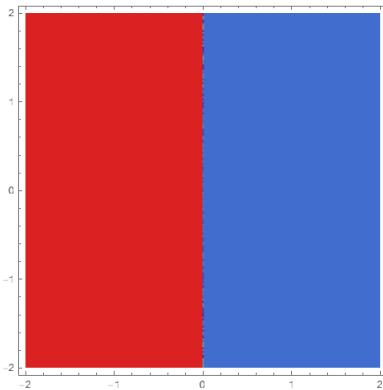


Imagen 2.2: Cuenca de atracción de  $f(z) = z^2 - 1$ .

Producido como resultado la imagen 2.2. La forma de deducir a qué raíz converge cada sucesión consiste en evaluar los argumentos de los valores a los que se acerca la misma. Como podemos ver, y teniendo en cuenta que la imagen solo

grafica el intervalo  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  y un número finito de puntos<sup>3</sup> la sucesión cuya semilla es un punto perteneciente al semiplano abierto de la derecha converge a la raíz 1. Por otro lado, si la sucesión comienza con un complejo del semiplano abierto de la izquierda, entonces esta converge a la raíz  $-1$ . Apoyándonos en este ejemplo, definimos el siguiente concepto.

**Definición 2.2.1** (Cuenca de atracción). Definimos como **cuenca de atracción** de una raíz  $a \in \mathbb{C}$  de una función compleja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (i.e.  $f(a) = 0$ ), y denotamos como  $A(a)$  al conjunto de puntos  $z_0 \in \mathbb{C}$  tales que la sucesión  $\{z_n\}$  dada por  $z_{n+1} = N_f(z_n)$  converge a  $a$  utilizando a  $z_0$  como primer valor de la sucesión.

En muchas de las funciones que trataremos ocurre que existen distintas cuencas de atracción y la distinción sobre a cuál de ellas pertenece cada punto del plano complejo es la que nos permitirá graficar imágenes fractales. Si aplicamos el mismo procedimiento antes descrito en el ejemplo 2.2.1 con otras funciones encontramos las imágenes 2.3.

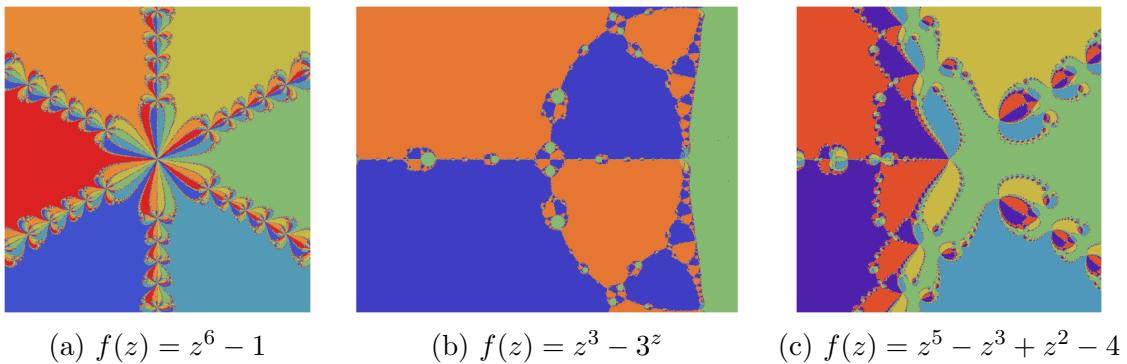


Imagen 2.3: Cuencas de atracción de distintas funciones coloreadas.

En estas imágenes podemos ahora sí ver los primeros ejemplos de estructuras fractales producidos por la iteración. Observemos que las sucesiones de dos puntos muy próximos pueden converger a raíces distintas, por lo que este es un ejemplo de *caos matemático*: pequeñas variaciones en las condiciones iniciales conducen a comportamientos muy diferentes. Además, en lugar de colorear el plano según la raíz a la que converja la sucesión también podemos fijarnos en la velocidad de convergencia. Esto es, asociar a cada punto del plano un color dependiendo del número de iteraciones necesarias para converger a la raíz. En este sentido, podemos revisitar las imágenes 2.3 y en función de la velocidad de convergencia de las sucesiones utilizar un color distinto. El código necesario es el siguiente y los resultados se pueden observar en las imágenes 2.4:

```
In[5]:= newtonVelocidad = Compile[{{z, _Complex}}, 
Length[FixedPointList[iteracionN[f, #] &, z, 50]]];

DensityPlot[newtonVelocidad[x + I*y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
PlotPoints -> 200, Mesh -> False, ColorFunction -> GrayLevel]
```

---

<sup>3</sup>El número de puntos que se grafica se puede parametrizar con el argumento opcional “PlotPoints” de las funciones “Plot”. A mayor valor mayor calidad de imagen y resolución, pero mayor tiempo de ejecución.

donde se puede cambiar el valor de  $f$ , la región del plano  $\{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$  o el valor del argumento `ColorFunction` para obtener distintas imágenes.

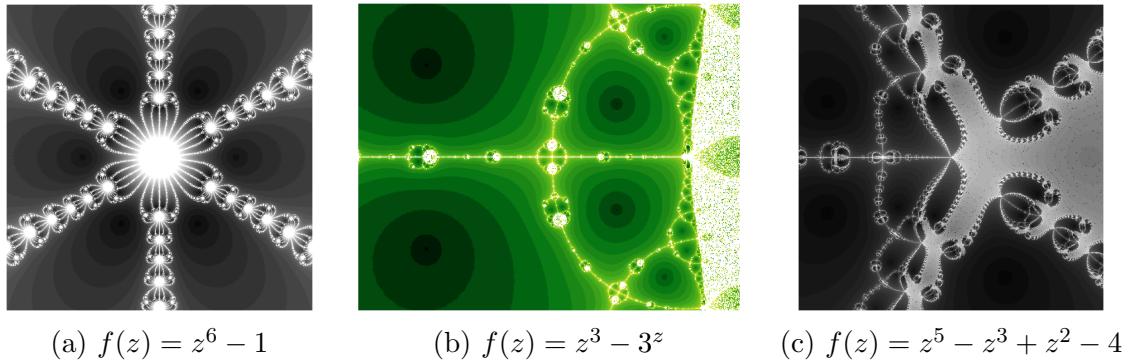


Imagen 2.4: Evaluación de la velocidad de convergencia en cada punto

Podemos jugar con estos parámetros como son la función a representar  $f$ , la región del plano que queremos visualizar  $\{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}$  o el valor del argumento `ColorFunction` para obtener distintas imágenes de diferentes colores.

### 2.2.1. Autosimilaridad

Consideramos ahora la representación de las cuencas de atracción de la función compleja  $f(z) = z^3 - 1$ , que podemos ver en la imagen 2.5

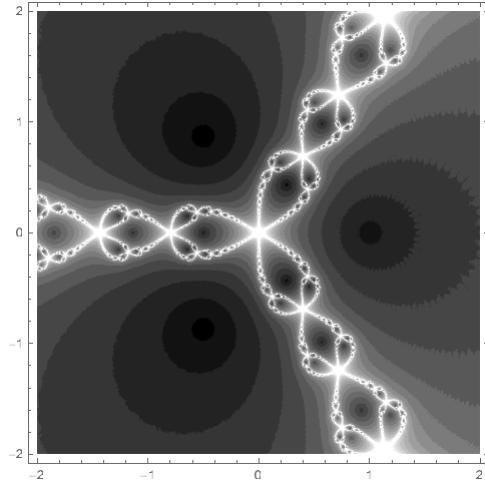


Imagen 2.5: Cuencas de atracción de  $f(z) = z^3 - 1$

Fijémonos además que si hacemos *zoom* en ciertas partes de la imagen, es decir, representamos una región más pequeña, encontramos estructuras que son iguales independientemente del zoom que se aplique. En la figura 2.6 podemos ver distintos detalles de la figura 2.5, cada una es una ampliación de la anterior, y podemos ver como esa estructura se repite en todas las escalas.

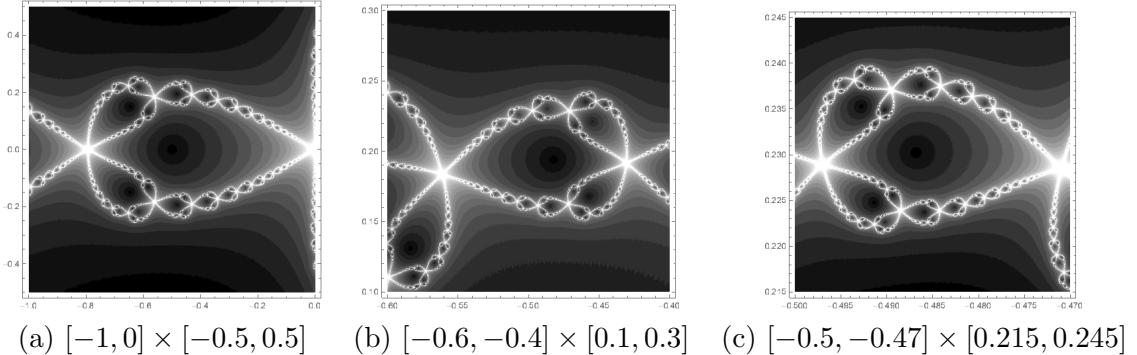


Imagen 2.6: Diferentes regiones ampliadas de la figura 2.5

Este aspecto es el que realmente nos define la naturaleza fractal de las cuencas de atracción, pues aunque las imágenes no son objetos totalmente autosimilares en el sentido de la definición 1.0.1 si que contienen regiones que sí lo son, como es el caso que acabamos de describir.

## CAPÍTULO 3

### CONJUNTOS DE JULIA Y MANDELBROT

Terminamos el capítulo 2 fijándonos en la autosimilaridad de las imágenes que nos proporcionaba la aplicación del método de Newton en ciertas funciones complejas para deducir las cuencas de atracción de las distintas funciones. Pudimos comprobar que a pesar de ser imágenes que no son totalmente autosimilares, por lo que no son fractales en el sentido estricto, contienen fragmentos que sí lo son. Este mismo hecho se produce en los conjuntos de Julia y en el conjunto de Mandelbrot. Podemos observar este hecho en las imágenes 3.1, que son nuestros primeros dos ejemplos de conjuntos de Julia.

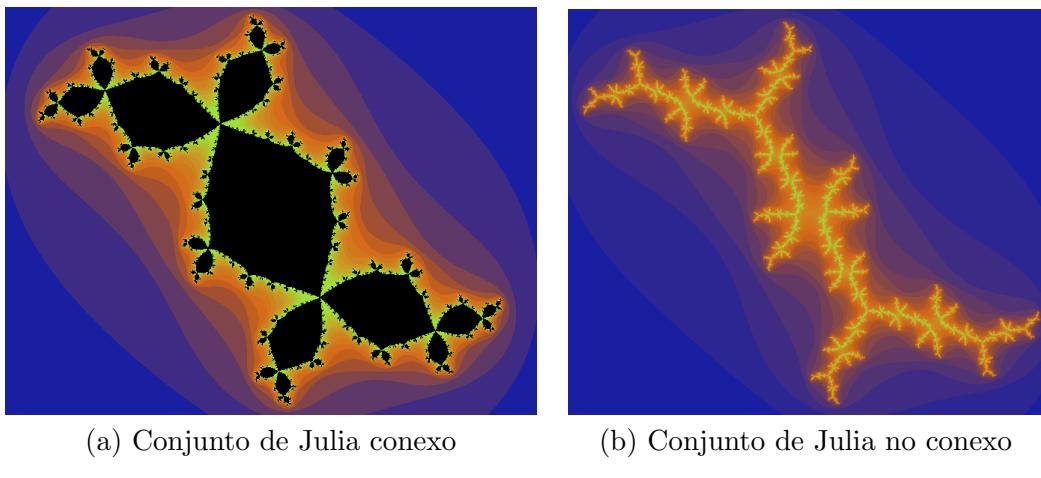
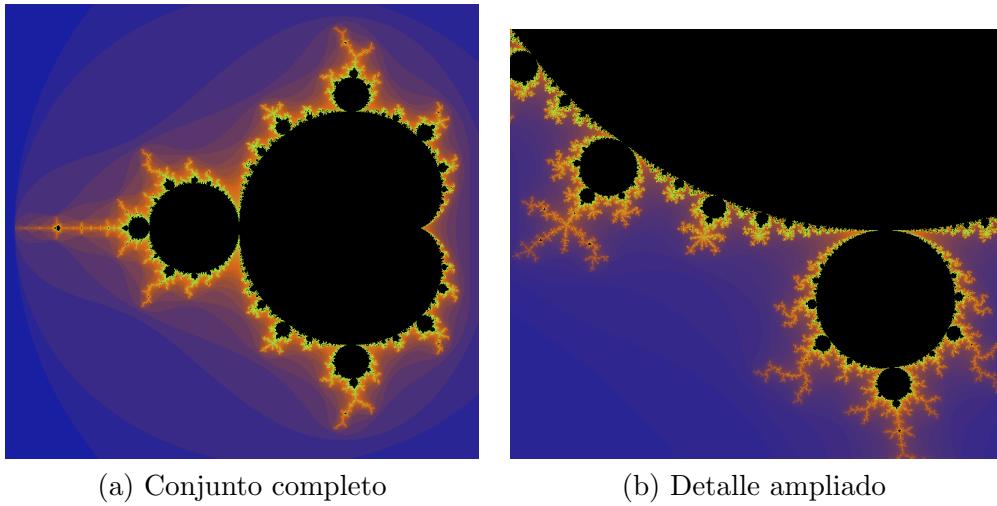


Imagen 3.1: Primeras imágenes de conjuntos de Julia

Una notable diferencia entre las imágenes 3.1 se encuentra en que mientras en la imagen (a) se puede percibir cierta conexión en el conjunto, esta desaparece en el caso de la imagen (b). Precisamente en esa distinción reside la génesis del conocido *conjunto de Mandelbrot*, que podemos también ver por primera vez, junto con algunas de sus autosimilaridades, en las imágenes 3.2.

En este capítulo aprenderemos qué elementos componen estos conjuntos, y cómo llegar a visualizar estas imágenes tan llamativas.



(a) Conjunto completo

(b) Detalle ampliado

Imagen 3.2: Primeras imágenes del conjunto de Mandelbrot

### 3.1. Iteración convergente y no convergente

Recordamos que en el capítulo 2, a partir de una función analítica  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , se le aplicaba una transformación  $N_f(z)$  de forma que en muchos casos la iteración de dicha función era convergente independientemente del término  $z_0 \in \mathbb{C}$  inicial. Sin embargo recordemos que la iteración de una función cualquiera  $f$  no siempre es convergente, como pudimos comprobar en el ejemplo situado al comienzo de la sección 2.1.1, en el que comprobamos que las iteradas de la función  $f(z) = z^2$  divergen siempre que  $|z_0| > 1$ , convergen a 0 si  $|z_0| < 1$  y quedan encerradas en  $S^1$  en caso de que  $|z_0| = 1$ . Otro posible comportamiento es el cíclico, como el que tienen las iteradas de la función  $g(z) = z \cdot i$  en  $z_0 = 1$ , que si nos fijamos,  $O_g(1) = \{1, i, -1, -i, 1, \dots\}$ .

Un último caso de posible comportamiento de una órbita son las órbitas caóticas, en las cuales no se percibe ningún patrón y además es muy sensible a las condiciones iniciales, fíjemonos en lo que ocurre en el caso de la función  $h(z) = z^2 - 1.9$  si miramos sus órbitas en  $z_0 = 0, 0.1$ :

```
In[6]:= h[z_] := z^2 - 1.9;
NestList[h, 0.1, 20]
NestList[h, 0.0, 20]

Out[6]= {0.1, -1.89, 1.6721, 0.895918, -1.09733, -0.695866,
-1.41577, 0.104404, -1.8891, 1.6687, 0.884552, -1.11757,
-0.651043, -1.47614, 0.279, -1.82216, 1.42026, 0.117148,
-1.88628, 1.65804, 0.849092}

Out[7]= {0., -1.9, 1.71, 1.0241, -0.851219, -1.17543, -0.518374,
-1.63129, 0.761102, -1.32072, -0.155688, -1.87576, 1.61848,
0.719477, -1.38235, 0.0109007, -1.89988, 1.70955, 1.02256,
-0.854379, -1.17004}
```

No se observa ningún patrón de convergencia y además, a pesar de ser semillas muy cercanas, las órbitas son muy diferentes.

La dicotomía existente entre qué  $z_0$  iniciales hacen que las iteradas de una función converga o no, restringida a cierta familia de funciones es la que define a los

distintos conjuntos de Julia. Presentamos por tanto, para cada  $c \in \mathbb{C}$ , la familia de funciones

$$P_c(z) = z^2 + c \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

Nuestro objetivo es entonces clasificar para qué  $z_0 \in \mathbb{C}$ , las iteradas  $\{P_c^n(z_0)\}$  convergen, divergen, ciclan, o tienen posiblemente un comportamiento caótico.

### 3.2. Conjuntos de Julia

Sin dejar de tener en cuenta la familia de funciones  $\{P_c(z)\}_{c \in \mathbb{C}}$  introducimos la siguiente definición.

**Definición 3.2.1.** Dado un número complejo  $c \in \mathbb{C}$  fijo consideramos  $P_c(z) = z^2 + c$ . Entonces:

- Se denomina **conjunto de puntos de escape**, y denotamos como  $E_c$  al conjunto de puntos cuyas iteradas divergen, es decir:

$$E_c = \{z_0 \in \mathbb{C} : \{|P_c^n(z_0)|\} \rightarrow \infty\}$$

- Se denomina **conjunto de puntos prisioneros**, y denotamos como  $P_c$  al conjunto de puntos cuyas iteradas no divergen, por lo que es el complemento de  $E_c$ .

A partir de estas dos definiciones, que insisten en clasificar los puntos del plano complejo entre de escape o prisioneros según su órbita, podemos introducir la definición que esperábamos.

**Definición 3.2.2** (Conjunto de Julia). Dado un número  $c \in \mathbb{C}$ , se define su **conjunto de Julia**, y se denota como  $J_c$  a la frontera de  $E_c$ . Es en este conjunto donde las iteradas tienen un comportamiento caótico. Se denomina **conjunto de Fatou** al complemento del conjunto de Julia.

**Ejemplo 3.2.1.** En el caso  $c = 0$ , es decir,  $P_0(z) = z^2$ , sabemos ya que  $J_c = S^1$ , pues precisamente es  $S^1$  la frontera entre los puntos cuyas iteradas divergen o convergen a 0.

**Observación 3.2.1.** Fijémonos por tanto que hay tantos conjuntos de Julia como números complejos, al poder asociar a cada número complejo un conjunto de puntos prisioneros, de escape, y por tanto un conjunto de Julia.

#### 3.2.1. Representación gráfica de los conjuntos de Julia

Tenemos entonces una definición de los conjuntos de Julia, pero aparentemente está muy alejada de las imágenes 3.1 que presentamos en la introducción. La forma de llegar a ellas es similar a la que utilizamos para graficar las imágenes que utilizaban la velocidad de convergencia en el capítulo 2. Sin embargo, y al contrario que al utilizar el método de Newton, ahora no tenemos ningún tipo de convergencia asegurada, por lo que el método de aplicar iteradas hasta encontrar un patrón no es el más correcto. Debemos por tanto encontrar una manera eficiente de clasificar cada punto del plano como prisionero o de escape.

Para ello podemos fijarnos en que la operación de elevar  $z_n$  al cuadrado prima sobre la de sumar una constante  $c$  siempre que el módulo  $|z_n|$  sea ‘suficientemente grande’. Procedemos entonces a enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.1.** Dado un  $c \in \mathbb{C}$ , consideramos la función  $P_c(z) = z^2 + c$ . Si un número  $z_0 \in \mathbb{C}$  verifica que  $|z_0| > \max\{|c|, 2\}$ , entonces  $z_0$  es un punto de escape. Al número  $e_c = \max\{|c|, 2\}$  se le denomina número de escape.

*Demostración.* Supongamos que  $|z_0| > e_c = \max\{|c|, 2\}$ , por tanto necesariamente debe existir un número  $\varepsilon > 0$  tal que  $|z_0| = 2 + \varepsilon$ . Aplicamos entonces la cadena de desigualdades siguiente:

$$\begin{aligned} |P_c(z_0)| = |z_0^2 + c| &\geq |z_0^2| - |c| \quad (\text{Propiedades del m\'odulo}) \\ &= |z_0|^2 - |c| \\ &\geq |z_0|^2 - |z_0| \quad (\text{Porque } |z_0| > |c|) \\ &= (|z_0| - 1)|z_0| \\ &= (1 + \varepsilon)|z_0| \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que  $|P_c(z_0)| \geq (1 + \varepsilon)|z_0|$ , por lo que en cada iteración el m\'odulo aumenta al menos  $1 + \varepsilon$  unidades, que es mayor que uno, es decir,  $|P_c^k(z_0)| \geq (1 + \varepsilon)^k|z_0|$ , por lo que la sucesión diverge y  $z_0$  es un punto de escape.  $\square$

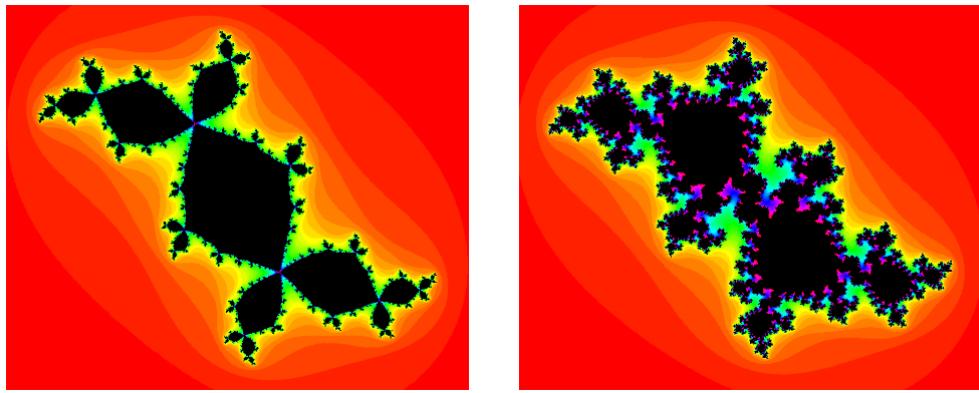
Podemos aplicar este teorema para programar un algoritmo que grafique conjuntos de Julia. Para ello, fijamos un número  $M \in \mathbb{N}$  que será el m\'aximo de iteraciones que se aplicar\'an en cada punto antes de decidir si el punto es prisionero o de escape. Si pasadas esas  $M$  iteraciones el m\'odulo de  $z_0$  no ha alcanzado el n\'umero de escape  $e_c$  entonces consideramos que  $z_0$  es un punto prisionero. En caso contrario, en el momento que se alcance el n\'umero de escape cesar\'an las iteraciones y se etiquetar\'a el punto como prisionero. El valor de  $M$  puede ser alto si queremos aumentar la precisi\'on a cambio de mayor tiempo de c\'omputo, y viceversa. Es posible que algunos de los puntos sean de escape pero alcancen  $e_c$  despu\'es de las  $M$  iteraciones, pero tomando un valor suficientemente alto el resultado es pr\'acticamente el mismo.

Para graficar un conjunto de Julia podemos asignar un color fijo a los puntos prisioneros y a los puntos de escape asignarle otro en funci\'on de las iteraciones necesarias antes de alcanzar el n\'umero de escape. Por ejemplo, si queremos representar en *Mathematica* el conjunto de la figura 3.1 (a), que era  $\mathcal{J}_{-0.12+0.75i}$  utilizar\'iamos el siguiente c\'odigo:

```
In[8]:= M = 50;
Julia[z_, c_] := Length[FixedPointList[#^2 + c &, z, M,
SameTest -> (Abs[#] > Max[2.0, Abs[c]] &)];

DensityPlot[
Julia[x + I y, -0.12 + 0.75 I], {x, -1.5, 1.5},
{y, -1.25, 1.25}, PlotPoints->200, AspectRatio->Automatic,
ColorFunction -> (If[# >= 1, RGBColor[0, 0, 0], Hue[#]] &)]
```

Fij\'emonos en que hemos utilizado el argumento `SameTest` para especificar cuando dejar de iterar, especificando que se haga cuando se alcance  $e_c$ . Hemos utilizado tambi\'en  $M = 50$  como m\'aximo n\'umero de iteraciones. Podemos variar el segundo argumento de la llamada a la funci\'on `Julia`, el rango de valores, el argumento `PlotPoints` o el n\'umero m\'aximo de iteraciones  $M$  para graficar distintos conjuntos y detalles de los mismos. Algunos ejemplos de resultados de estos c\'odigos se encuentran en la imagen 3.3.

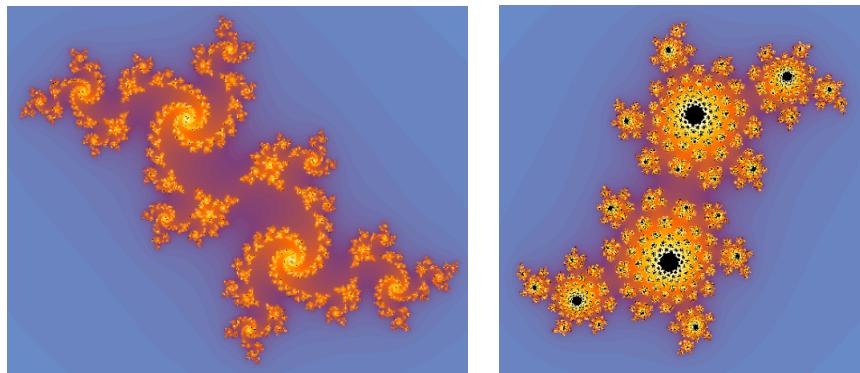


(a)  $J_{-0.12+0.75i}$

(b)  $J_{-0.23+0.65i}$

Imagen 3.3: Conjuntos de Julia graficados con Mathematica

Por sí solo Mathematica incluye una función `JuliaSetPlot[c]` que muestra una imagen del conjunto  $\mathcal{J}_c$ . Esta función permite modificar los mismos parámetros que el método que acabamos de programar por nuestra cuenta<sup>1</sup>, véanse las imágenes 3.4.



(a)  $J_{-0.23+0.69i}$

(b)  $J_{0.16-0.59i}$

Imagen 3.4: Resultados de la orden ‘JuliaSetPlot’

### 3.3. Distinción entre conjuntos de Julia conexos y polvaredas

Ya en la introducción de este capítulo y tras presentar las imágenes 3.1 prestamos atención a un detalle que, ahora que tenemos más ejemplos e imágenes de distintos conjuntos de Julia, se vuelve más evidente. Mientras algunos conjuntos de Julia se presentan conexos, como los de las imágenes 3.3, otros parecen no ser conexos y estar formados por trozos más pequeños, como los de las imágenes 3.4. Cabe recordar que en realidad los conjuntos de Julia son la frontera entre los puntos que se representan en negro y los que se representan de colores.

Para saber qué conjuntos de Julia son conexos y cuales no *Gaston Julia* y *Pierre Fatou* demostraron en 1918 el siguiente teorema, cuya prueba se puede encontrar

---

<sup>1</sup>Más información en la documentación oficial: <https://reference.wolfram.com/language/ref/JuliaSetPlot.html?q=JuliaSetPlot>

en [13, Theorem 9.5].

**Teorema 3.3.1** (Teorema de Fatou-Julia). *Si  $P_c$  contiene todos los puntos críticos de  $P_c(z)$ , entonces  $\mathcal{J}_c = \partial P_c$  es conexo. Si al menos un punto crítico de  $P_c(z)$  pertenece a  $E_c$ , entonces  $\mathcal{J}_c$  es isomorfo al conjunto de Cantor, es decir, tiene un conjunto no numerable de componentes conexas. En este último caso se conoce como «polvo de Fatou».*

En realidad el teorema en su versión original está enunciado para polinomios de grado mayor o igual que 2, entendiendo las extensiones naturales del conjunto de puntos de escape y prisioneros. Si nos restringimos entonces a la familia  $\{P_c(z)\}_{c \in \mathbb{C}}$ , es muy sencillo caracterizar qué conjuntos de Julia son conexos y cuales son polvaredas.

**Corolario 3.3.1.** *Dado  $c \in \mathbb{C}$ , el conjunto de Julia  $\mathcal{J}_c$  es conexo (resp. polvareda) si, y solo si, la sucesión de iteradas  $\{P_c^n(0)\}$  no diverge (resp. diverge), es decir, si  $0 \in P_c$  (resp.  $0 \in E_c$ ).*

*Demostración.* Es claro que  $P'_c(z) = (z^2 + c)' = 2z$ , por lo que los puntos críticos de  $P_c(z)$  se alcanzan cuando  $z = 0$ , por lo que aplicando el teorema 3.3.1 tenemos el resultado.  $\square$

Sobre la dicotomía entre qué conjuntos de Julia son conexos y cuales son polvareda surge el conocido **conjunto de Mandelbrot**, el cual adelantamos que está formado por los números complejos  $c$  tales que su conjunto de Julia  $\mathcal{J}_c$  es conexo.

### 3.4. El conjunto de Mandelbrot

Como ya veníamos anunciando al final de la sección 3.3, el conjunto de Mandelbrot está formado por los  $c \in \mathbb{C}$  tales que  $\mathcal{J}_c$  es conexo. La idea inicial de *Benoit Mandelbrot* para graficar el conjunto que denotaremos a partir de ahora como  $\mathcal{M}$  fue pintar de negro los puntos del plano cuyo conjunto de Julia fuese conexo y de blanco el resto. De entrada parece una tarea titánica graficar, para cada punto del plano (aunque realmente sería solo un subconjunto suficientemente representativo), su conjunto de Julia y decidir si éste es o no conexo, pues en algunos casos la decisión se torna muy complicada.

Afortunadamente, gracias al teorema 3.3.1 y al corolario 3.3.1 esta tarea se vuelve mucho más sencilla, tan solo habría que tomar las iteradas en el origen, es decir  $\{P_c^n(0)\} = \{c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots\}$  y decidir si la sucesión diverge o no mediante algún método similar al utilizado para graficar conjuntos de Julia.

Por resumir, de momento sabemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}_c \text{ es conexo}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : 0 \in P_c\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} : \{P_c^n(0)\} \not\rightarrow \infty\}\end{aligned}$$

#### 3.4.1. Representación gráfica del conjunto de Mandelbrot

Buscamos ahora obtener alguna figura similar a la imagen 3.2 a partir del conocimiento que tenemos de  $\mathcal{M}$ . Como ya viene siendo costumbre, la idea es dividir el plano en una cantidad finita de píxeles, asignando a cada uno un número

complejo  $c$  y evaluar en cada uno si la órbita en  $z = 0$  converge o diverge. Para tomar esta decisión nos podemos apoyar en el teorema 3.2.1 para probar este resultado.

**Proposición 3.4.1.** Dado un número complejo  $c \in \mathbb{C}$ , si  $|c| > 2$  entonces la sucesión de iteradas  $\{P_c^n(0)\}$  es divergente.

*Demuestra*ción. Consideramos la sucesión de iteradas  $z_0 = 0, z_n = P_c^n(0)$ . Partimos de que  $|c| > 2$ , por lo que buscamos encontrar un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_m| > e_c = \max\{|c|, 2\} = |c|$ .

Tenemos que  $z_1 = P_c(0) = c$ , pero  $|z_1| = |c| \not> |c|$ .

Si iteramos una vez más,  $z_2 = P_c^2(0) = P_c(c) = c^2 + c$ . Ayudándonos de una propiedad del módulo tenemos que:

$$\begin{aligned} |c^2 + c| &\geq ||c^2| - |c|| \\ &= ||c|^2 - |c|| \\ &= |c|^2 - |c| \text{ (Pues al ser } |c| > 2, |c|^2 > |c|) \\ &= (|c| - 1)|c| \end{aligned}$$

Y como  $|c| > 2 \Leftrightarrow |c| - 1 > 1$ , concluimos que

$$|z_2| = |c^2 + c| > |c| = \max\{|c|, 2\} = e_c$$

Por lo que aplicando el teorema 3.2.1, la sucesión  $\{z_n\}$  es divergente.  $\square$

Este resultado nos facilita mucho la elaboración de un algoritmo que grafique a  $\mathcal{M}$ , pues de entrada nos afirma que todo número complejo cuyo módulo sea superior a 2 no pertenece a  $\mathcal{M}$ . O dicho de otra forma,

$$\mathcal{M} \subseteq \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\} = \bar{D}(0, 2),$$

donde  $D(z, r)$  denota el disco abierto de centro  $z$  y radio  $r$  mientras que  $\bar{D}(z, r)$  denota el cierre del disco abierto, es decir, el disco cerrado de centro  $z$  y radio  $r$ .

Además, en el momento que una iterada se sitúe fuera de  $\bar{D}(0, 2)$ , podemos asegurar que esa sucesión va a diverger, por lo que podemos dejar de iterar. Para concluir que la sucesión no diverge, al igual que para graficar conjuntos de Julia, fijamos un número máximo de iteraciones  $M \in \mathbb{N}$ , de forma que si al calcular la  $M$ -ésima iterada el módulo del elemento  $P_c^M(0)$  no ha excedido a 2, podemos considerar que el número  $c$  pertenece a  $\mathcal{M}$ . En conclusión, el algoritmo consiste en, para cada píxel identificado con un punto del plano complejo  $c \in \mathbb{C}$ , calcular sus iteradas hasta un máximo de  $M$  iteraciones, en caso de exceder en módulo a 2 guardamos el mínimo valor  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|P_c^m(0)| > 2$  y asignamos un color en función; en caso de no exceder a 2 asignar un color fijo.

El código en *Mathematica* utilizado es por tanto el siguiente, muy similar al utilizado para graficar conjuntos de Julia:

```
In[9]:= M = 100;
Mandelbrot = Compile[{{c, _Complex}},
  Length[FixedPointList[#^2 + c &, 0, M,
    SameTest -> (Abs[#] > 2.0 &)]]];

DensityPlot[Mandelbrot[x + I y], {x, -2.1, .7}, {y, -1.2, 1.2},
  Mesh -> False, Frame -> False, PlotPoints -> 200,
  AspectRatio -> Automatic,
  ColorFunction -> (If[# >= 1, Hue[0, 0, 0], Hue[#]] &)]
```

Al igual que en el caso de los conjuntos de Julia, *Mathematica* tiene una función preprogramada que grafica el conjunto de Mandelbrot, llamada `MandelbrotSetPlot`, la cual admite varios argumentos opcionales, como la región a graficar, el máximo de iteraciones, resolución, etc.<sup>2</sup>.

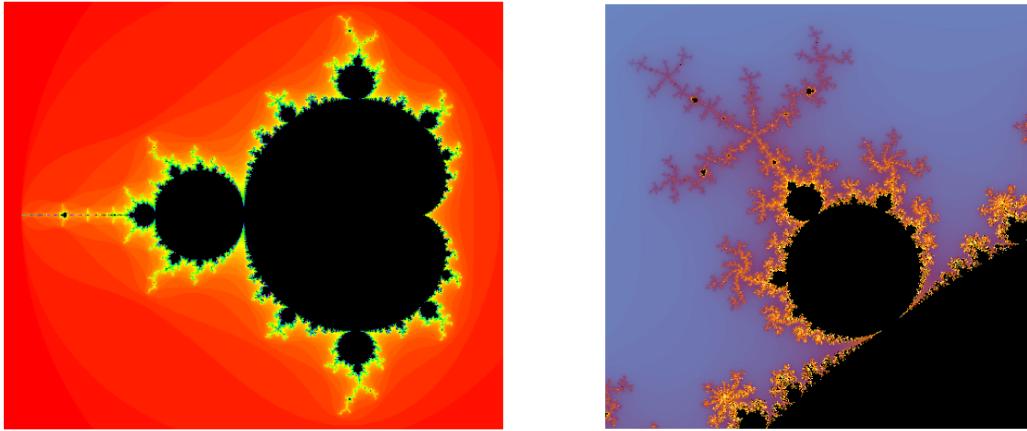


Imagen 3.5: Representación de  $\mathcal{M}$  y detalle en  $[-0.65, -0.4] \times [0.47, 0.72]$

El conjunto de Mandelbrot es considerado por muchos como el objeto más complejo de la matemática. Además de la belleza que muestra por sí solo, los detalles de  $\mathcal{M}$  esconden bonitas estructuras: bulbos, valles, antenas, copias reducidas del propio  $\mathcal{M}$ ...

### 3.5. Autosimilaridad de los conjuntos de Julia y Mandelbrot

Ya en el comienzo de este capítulo mencionamos, y en las propias imágenes presentadas se puede comprobar, que los conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot no son objetos autosimilares, no al menos en el sentido de la definición 1.0.1. Sin embargo, sí contienen regiones y detalles que son autosimilares. En esta sección presentaremos algunas de las mismas.

#### 3.5.1. Autosimilaridad en conjuntos de Julia

Recordemos el conjunto de Julia  $\mathcal{J}_{-0.23+0.65}$ , que podemos ver en la imagen 3.3 (b). En las imágenes 3.6 podemos ver distintos detalles, de forma que la primera es una ampliación de la original y las siguientes son cada una un ‘zoom’ de la anterior.

Obsérvese cómo efectivamente las imágenes, salvo giro, son prácticamente iguales, pudiendo ver así una de las regiones autosimilares de  $\mathcal{J}_{-0.23+0.65}$ . En las imágenes 3.7 podemos ver algunas regiones ampliadas de ciertos conjuntos de Julia, pudiendo observar regiones autosimilares.

---

<sup>2</sup>Más información en la documentación oficial <https://reference.wolfram.com/language/ref/MandelbrotSetPlot.html>

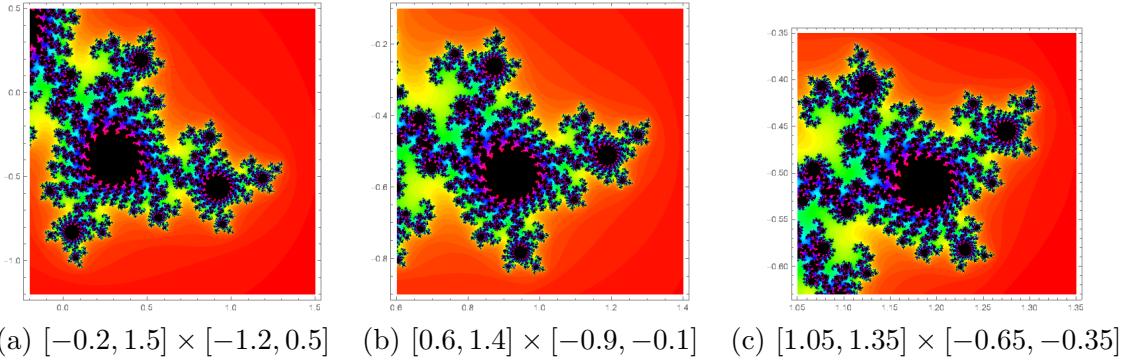


Imagen 3.6: Diferentes regiones ampliadas de la figura 3.3 (b)

### 3.5.2. Autosimilaridad en el conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot, el cual ya conocemos, está compuesto fundamentalmente de un cuerpo principal con forma de cardioide con gran cantidad de bulbos adosados al mismo (imagen 3.8 (a), (b) y (d)), siendo cada uno de estos autosimilar y terminando en una antena que se bifurca (imagen 3.8 (b) y (c)). Además, en el propio  $\mathcal{M}$  hay minúsculas copias de sí mismo, en las cuales se vuelve a repetir su estructura (imagen 3.8 (c)).

En la imagen 3.8 (b) podemos ver una representación del que se conoce como ‘bulbo principal’, pues es el más grande de todos los que están pegados al cuerpo principal. Podemos comprobar, observando los detalles que ofrecen las imágenes 3.9, que dicho bulbo muestra autosimilaridad.

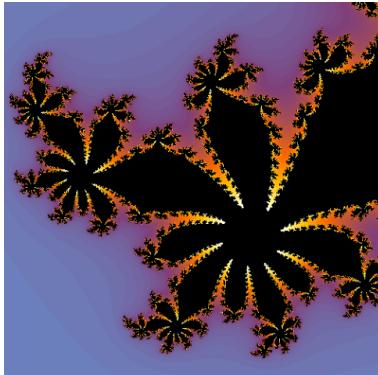
## 3.6. Conjuntos de Julia y Mandelbrot generalizados

Hasta el momento todo lo explicado y todas las imágenes obtenidas se han basado en la familia de funciones  $\{P_c(z)\}_{c \in \mathbb{C}} = \{z^2 + c\}_{c \in \mathbb{C}}$ . Sin embargo, y como cabe esperar, la definición de los conjuntos de Julia como conjuntos frontera entre el conjunto de puntos prisioneros y de escape es completamente válido para las iteradas de cualquier función, o mejor dicho, para cualquier familia de funciones. En esta sección trataremos de extender los conocimientos obtenidos hasta ahora a otras funciones.

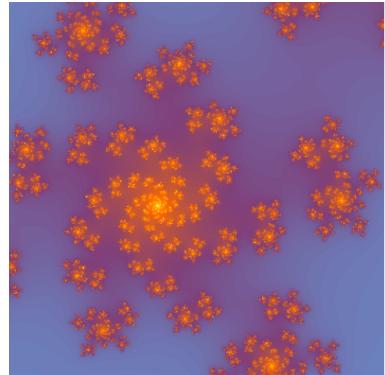
### 3.6.1. Familia $\{z^N + c\}_{c \in \mathbb{C}}$

La extensión más natural y la que nos proporcionará resultados más llamativos consiste en cambiar el exponente de la función polinómica  $P_c(z)$ , a la cual ahora denotaremos como  $P_{c,N}(z) = z^N + c$ , con  $N \geq 2$  natural para enfatizar el exponente. Es fácil comprobar que el teorema 3.2.1 es igual de válido con esta familia de funciones independientemente del exponente, por lo que el algoritmo sigue siendo el mismo, solo que en la función `Julia` debemos cambiar el exponente. Además, la orden `JuliaSetPlot` ya presentada en la sección 3.2.1 admite la posibilidad de indicarle una función arbitraria. Es esta la forma en la que hemos graficado las imágenes ??.

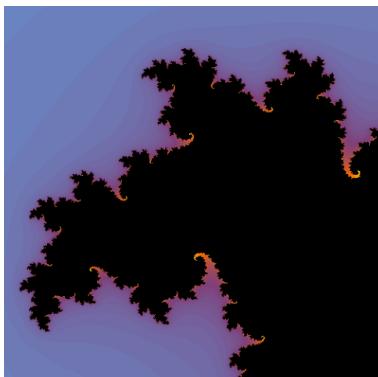
Fijémonos en que hemos fijado  $c = -0.55 + 0.48i$  y hemos variado el exponente de la función polinómica. Llama la atención lo distintos que son los conjuntos entre sí cuando realmente el  $c$  fijado es el mismo en todos los casos.



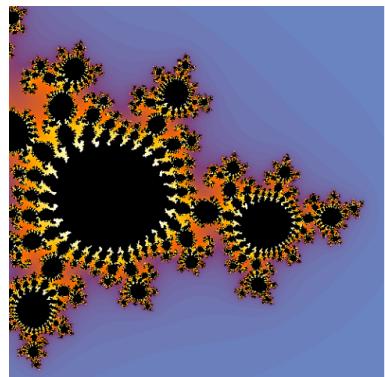
(a)  $\mathcal{J}_{0.33-0.41i}$  en  $[-1, -0.3] \times [-1.1, -0.4]$



(b)  $\mathcal{J}_{0.45-0.62i}$  en  $[-0.8, 0.2] \times [-0.8, 0.2]$



(c)  $\mathcal{J}_{0.23+0.51i}$  en  $[-1.1, -0.4] \times [0.4, 1.1]$



(d)  $\mathcal{J}_{-0.52+0.51i}$  en  $[0, 1.5] \times [-1, 0.5]$

Imagen 3.7: Detalles autosimilares de algunos conjuntos de Julia

Como ya comentamos en la sección 3.3, el teorema 3.3.1 (teorema de la dicotomía de Fatou-Julia) es válido para cualquier polinomio de grado mayor o igual que 2, en particular es válido para la familia de funciones  $\{P_{c,N}(z)\}_{c \in \mathbb{C}}$ . Tenemos por tanto que de la misma forma es válido el corolario, por lo que la distinción entre conjuntos de Julia conexos y polvaredas se vuelve a basar en buscar la convergencia o divergencia de la sucesión  $\{P_{c,N}^n(0)\}$ .

De esta forma, podemos hablar por tanto de conjuntos de Mandelbrot generalizados como representación gráfica de qué puntos tienen un conjunto de Julia conexo o polvareda utilizando la función  $P_{c,N}(z)$ , el cual denotamos como  $\mathcal{M}_N$ . De la misma forma que el resultado 3.2.1 es válido en la generalización, la proposición 3.4.1 también lo es, por lo que podemos también reutilizar el código que empleamos para representar el conjunto de Mandelbrot con tan solo variar el exponente, ver imágenes ???. Por su parte, la función de *Mathematica* `MandelbrotSetPlot` admite un argumento `n` que representa el exponente de  $P_{c,N}(z)$ . a la hora de iterar.

Obsérvese que a pesar de encontrar cierta similaridad en las formas de los distintos conjuntos de Mandelbrot generalizados, podemos encontrar puntos que para unos exponentes se encuentran dentro y en otros casos fuera de su respectivo  $\mathcal{M}_N$ . Este hecho explica lo ocurrido con  $c = -0.55 + 0.48i$ , que para ciertos exponentes el conjunto de Julia es conexo y para otros es polvareda.

Finalmente, invitamos al lector a visitar una web interactiva en la que poder visualizar tantos conjuntos de Julia y Mandelbrot estándar y generalizados como desee. La web forma parte del proyecto y su url es <https://jantoniov.github.io>.

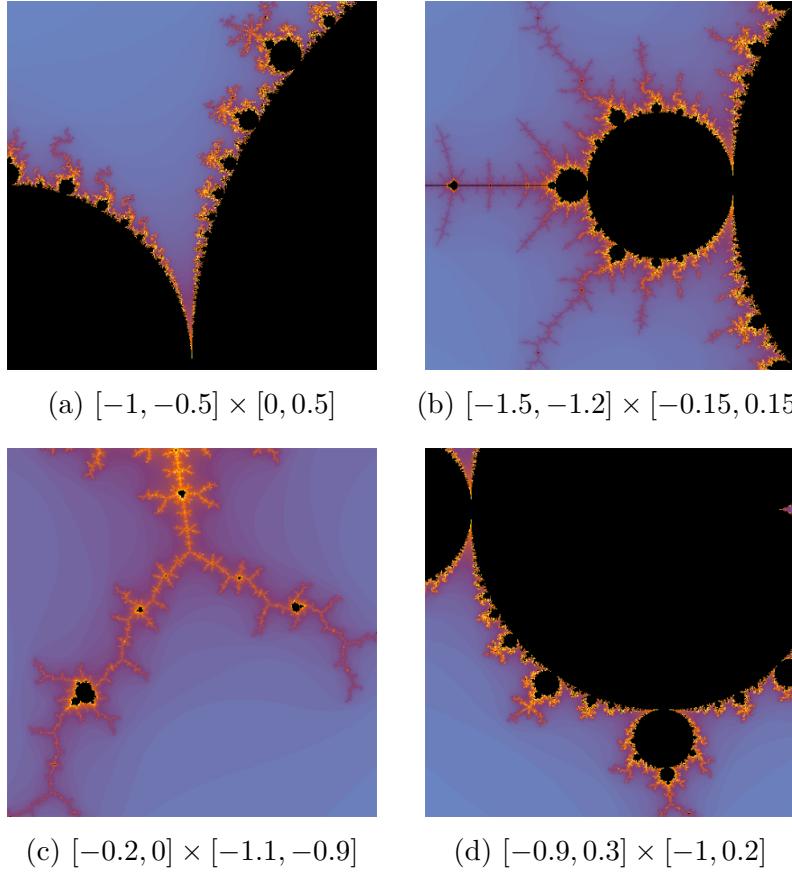


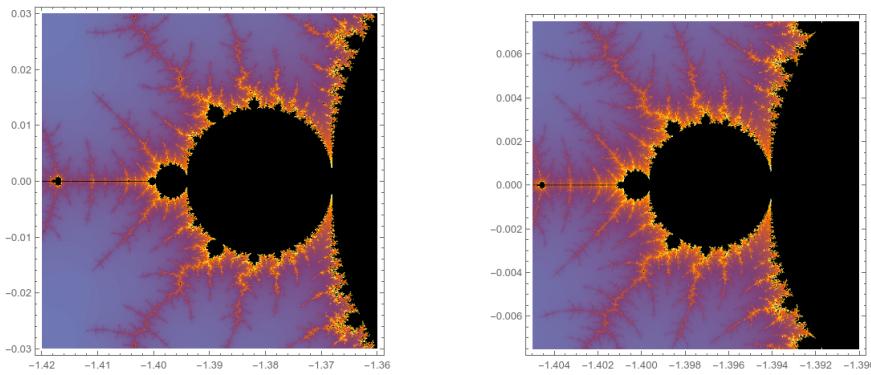
Imagen 3.8: Detalles autosimilares de  $\mathcal{M}$

[io/Geometria-Fractal/\(WIP\)](#).

### 3.6.2. Conjuntos de Julia con funciones no polinómicas

Además de todos los conjuntos de Julia ya tratados y visualizados, utilizando otras funciones no polinómicas como pueden ser las trigonométricas y las exponenciales (complejas) también se pueden graficar algunos conjuntos con formas distintas a las ya vistas y con hermosas propiedades. A continuación mostraremos tan solo algunos ejemplos:

- Con la familia  $f_c(z) = c \cdot \sin(z)$ :
- Con la familia  $f_c(z) = c \cdot \cos(z)$ :



(a)  $[-1.42, -1.36] \times [-0.03, 0.03]$    (b)  $[-1.405, -1.39] \times [-0.0075, 0.0075]$

Imagen 3.9: Ampliaciones del bulbo principal de  $\mathcal{M}$

- Con la familia  $f_c(z) = c \cdot e^z$ :

.....

## CAPÍTULO 4

---

### SISTEMAS DE FUNCIONES ITERADAS

Como venimos viendo ya en los dos últimos capítulos, la iteración es una poderosa herramienta en la generación de imágenes fractales. Sin embargo, hasta ahora siempre nos estamos basando en buscar convergencia y velocidad de convergencia de sucesiones de iteradas de funciones complejas, las cuales evalúan un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  para devolver otro número complejo  $f(z) \in \mathbb{C}$ . Si recuperamos la identificación  $z = x + y \cdot i \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2$  podemos ver las funciones complejas como campos vectoriales de  $\mathbb{R}^2$ , y si en lugar de aplicar una función a un único punto la aplicamos a un conjunto de puntos llegamos a la base de los *Sistemas de Funciones Iteradas*, en adelante SFI.

La matemática que explica los SFI se puede encontrar en el clásico libro *Fractals Everywhere*[14] de *Michael Barnsley*. Por su parte, la geometría fractal nació en 1977 con la publicación de *The fractal geometry of nature*[3] por parte de *Benoit Mandelbrot*. En general, gracias a la geometría fractal y ayudándonos de los SFI podemos recrear resultados de imágenes y objetos con un nivel de detalle que la geometría euclídea no puede conseguir. Sin embargo, el problema inverso también es interesante: ¿es posible, a partir de un objeto, describirlo matemáticamente mediante SFI? Este es un área de la matemática aún abierta y en la que a día de hoy se continua trabajando. Uno de los resultados más conocidos en este ámbito es el *teorema del collage*, del cual hablaremos más adelante.

#### 4.1. Transformaciones afines en el plano euclídeo y SFI

Si nos restringimos al plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  visto como espacio afín, previo a la definición formal de SFI necesitamos unas nociones sobre transformaciones afines y maneras de representarlas, ya que estas serán las que compongan fundamentalmente los SFI.

**Definición 4.1.1** (Transformación afín). Una transformación  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la forma

$$w(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

donde las constantes  $a, b, c, d, e, f$  son números reales es denominada una **transformación afín** del plano euclídeo.

Una forma equivalente de denotar  $w$  matricialmente es tomando la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  y el vector  $b = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  y expresar  $w$  como:

$$w(x) = w \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax + b = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (4.2)$$

La matriz  $A$  también puede ser expresada de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & -s \sin \beta \\ r \sin \alpha & s \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

donde el par  $(r, \alpha)$  son las coordenadas polares de  $(a, c)$  y  $(s, \beta + \frac{\pi}{2})$  son las coordenadas polares de  $(b, d)$ . De esta forma, una transformación afín puede verse representada por 6 números reales  $r, s, \alpha, \beta, e, f$ , de forma que:

- $r, s$  representan una homotecia o escalado de razón  $r$  en el eje  $X$  y razón  $s$  en el eje  $Y$ .
- $\alpha, \beta$  denotan una rotación de  $\alpha$  radianes en la componente  $X$  y  $\beta$  en la componente  $Y$ .
- $e, f$  simbolizan una traslación de vector  $b = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ .

Nótese que la transformación lineal  $x \mapsto Ax$  en  $\mathbb{R}^2$  lleva un paralelogramo con un extremo en el origen en otro paralelogramo con un extremo en el origen, como consecuencia de la linealidad de las aplicaciones *homotecia* y *rotación*. Por lo que la transformación afín  $w(x) = Ax + b$  es una composición de la aplicación lineal representada por  $A$ , la cual transforma el espacio relativo al origen, y de la *traslación* de vector  $b = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ . A continuación definimos un caso concreto de transformación afín más familiar.

**Definición 4.1.2.** Una transformación afín de  $\mathbb{R}^2$   $w(x) = Ax + b$ , para cualquier  $b \in \mathbb{R}^2$  se denomina **similitud** si la matriz  $A$  tiene alguna de las siguientes formas:

$$A = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & r \sin \alpha \\ r \sin \alpha & -r \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

para  $r \neq 0$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . A  $r$  se le llama **razón de la homotecia** o factor de escala y a  $\alpha$  se le llama **ángulo de rotación**.

Nótese que en caso  $\alpha = \pi, \beta = 0$  se consigue una reflexión respecto al eje  $Y$ , y viceversa.

Para aclarar todos estos conceptos en la figura 4.1 podemos ver cómo actúan distintas transformaciones lineales sobre una figura simple: el polígono formado al unir los vértices  $(0, 0), (1, 0), (1.5, 0.5), (1, 1)$  y  $(0, 1)$ . Las transformaciones lineales vienen representadas en cada caso por una sextupla  $w = (r, s, \alpha, \beta, e, f)$ , teniendo cada elemento el significado ya definido.

En el caso de (a) observamos una similitud con  $r = 0.5$  y  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . En (b) además de un escalado uniforme de razón  $r = s = 0.5$  podemos ver el efecto que tiene una rotación (no uniforme) en  $X$  de razón  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ . Por su parte, (c) simplemente aplica

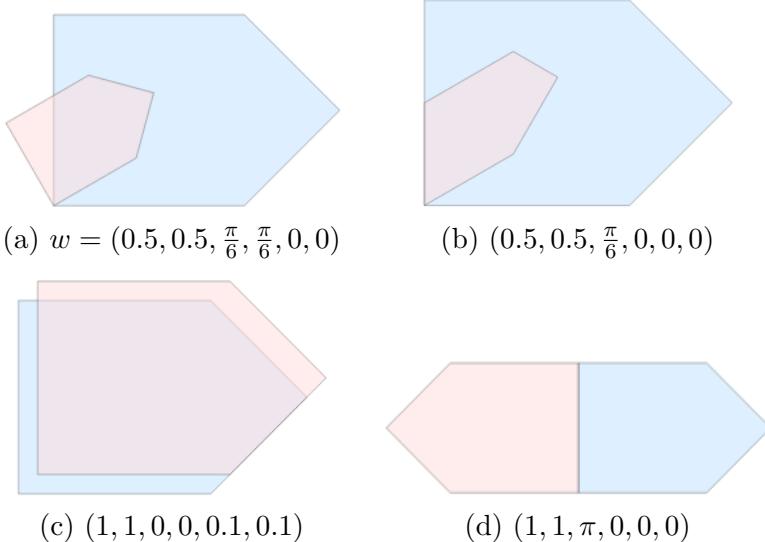


Imagen 4.1: Ejemplos de aplicaciones de transformaciones lineales

una traslación mediante el vector  $b = (0.1, 0.1)^t$ . Por último, en (d) vemos un caso de reflexión respecto al eje  $Y$ .

Un último detalle para la creación de SFI es la necesidad de que las transformaciones afines utilizadas sean *aplicaciones contractivas*. Procedemos por tanto a definir un SFI:

**Definición 4.1.3** (Sistema de Funciones Iteradas). Un **Sistema de Funciones Iteradas** se compone de un espacio métrico completo  $(X, d)$  y de un conjunto finito de aplicaciones contractivas  $w = \{w_i : i = 1, \dots, n\}$ .

Se denomina *constante de contractividad* del SFI a la mayor de las constantes de contractividad de las aplicaciones que lo forman,  $s = \max\{s_i : i = 1, \dots, n\}$ , siendo  $s_i$  la constante de contractividad de  $w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

Dado un subconjunto  $A \subseteq X$ , la imagen de  $A$  por medio de  $w$  es definida como

$$w(A) = \bigcup_{i=1}^n w_i(A).$$

Podemos utilizar como espacio métrico completo el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  y un conjunto finito de transformaciones lineales contractivas.

**Ejemplo 4.1.1.** Supongamos que tenemos un triángulo equilátero  $T$  cuyos vértices son los puntos  $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  y las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} w_1 &= (0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0) \\ w_2 &= \left(0.5, 0.5, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right) \\ w_3 &= \left(0.5, 0.5, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

Entonces en la imagen 4.2 podemos ver tanto  $T$  como el resultado de aplicar el SFI  $w = \{w_1, w_2, w_3\}$  a  $T$ .

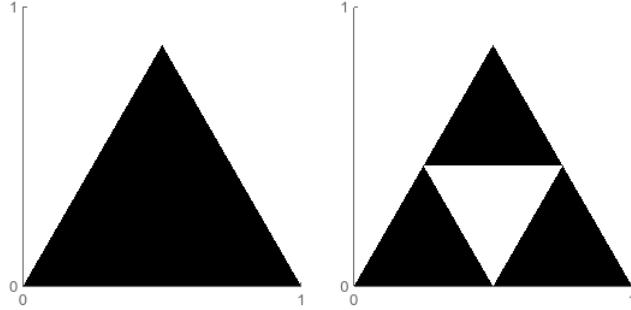


Imagen 4.2: Representación gráfica de  $T$  y  $w(T)$

## 4.2. Convergencia de SFI

Probablemente el resultado de aplicar el SFI  $w$  a un triángulo equilátero que vemos en el ejemplo 4.1.1 le recuerde al primer paso al generar el triángulo de Sierpinski, el cual vimos en la sección 1.1.2. De hecho, podemos volver a aplicar  $w$  a  $w(T)$ , a  $w(w(T))$ , y así sucesivamente, de forma que iterando infinitamente  $w$  en  $T$ , el resultado final que obtenemos es efectivamente el triángulo de Sierpinski  $S$ , véase de nuevo la imagen 1.3.

Este es sólo un ejemplo, pero a lo largo de esta sección veremos que todo SFI converge a una figura, que denominamos el atractor del sistema, independientemente de la figura inicial. Véase en la figura 4.4 cómo incluso tomando como semilla una figura totalmente distinta al triángulo equilátero el resultado de la iteración es el mismo. Esto es de hecho una consecuencia del Teorema del punto fijo de Banach (teorema 2.1.1).

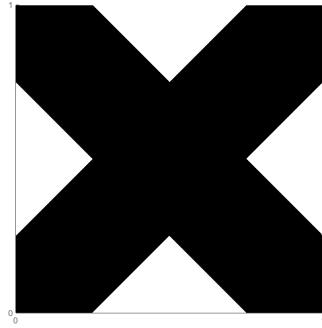


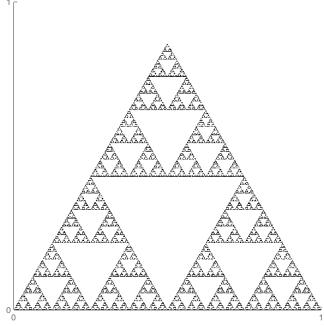
Imagen 4.3: Otra posible semilla para iterar el SFI

### 4.2.1. El Espacio de Fractales y la Métrica de Hausdorff

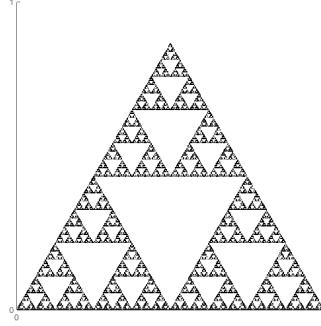
Consideramos un espacio métrico completo  $(X, d)$  y sea  $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}(X)$  el conjunto de todos los subconjuntos compactos de  $X$ , el cual también se denomina *espacio de fractales* de  $X$ . El objetivo ahora es dotar a  $\mathcal{H}(X)$  de una distancia, la cual nos permita cuantificar la similaridad entre conjuntos compactos.

Dado un punto  $x \in X$  y un subconjunto  $A \in \mathcal{H}(X)$  la distancia de un punto a un conjunto es definida como

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\} = \min\{d(x, a) : a \in A\},$$



(a) Iterando un triángulo equilátero



(b) Iterando la figura 4.3

Imagen 4.4: Resultado de iterar 8 veces  $w$  con distintas figuras iniciales

donde el ínfimo es un mínimo porque  $A$  es compacto. Si tomamos dos compactos  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , entonces la distancia de  $A$  a  $B$  se define como:

$$d(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}$$

El problema es que esta definición no nos basta para definir una distancia entre conjuntos, pues si  $A \subset B$  tenemos que  $d(A, B) = 0$ , pero si  $b \in B \setminus A$ , entonces  $d(b, A) > 0$ , por lo que necesariamente  $d(B, A) > 0$ . Y como sabemos, una auténtica distancia es commutativa. Véase el contraejemplo de la figura 4.5.

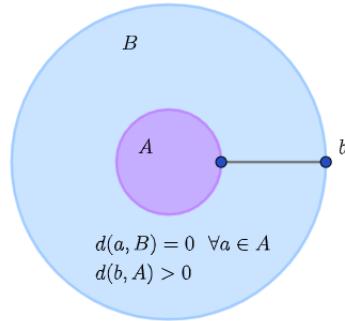


Imagen 4.5: Contraejemplo a la distancia entre conjuntos

Por suerte, a partir de estas definiciones no es difícil encontrar una definición que cumpla las propiedades de una distancia.

**Definición 4.2.1.** Dado un espacio métrico completo  $(X, d)$ , en el espacio de fractales  $\mathcal{H}(X)$  Se define la **distancia de Hausdorff** o **métrica de Hausdorff** como:

$$h(d)(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \quad \forall A, B \in \mathcal{H}(X).$$

En adelante denotaremos únicamente  $h(\cdot, \cdot)$ , omitiendo la dependencia de la distancia del espacio original.

Podemos comprobar en [14, Sección 2.6] que, en efecto,  $h$  es una distancia. Además, en [14, Sección 2.7] se prueba que el espacio métrico  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  es completo.

#### 4.2.2. Aplicaciones contractivas en el espacio de fractales

Consideramos un espacio métrico completo  $(X, d)$  y su espacio de fractales dotado de la métrica de Hausdorff  $(\mathcal{H}(X), h(d))$ , que también es completo, y tomamos una aplicación contractiva  $w : X \rightarrow X$ . Buscamos averiguar qué ocurre al iterar  $w$  sobre  $\mathcal{H}(X)$ , siendo esta contractiva sobre  $X$  y  $\mathcal{H}(X)$  un espacio métrico completo.

**Lema 4.2.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $w : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva, entonces

$$w(\mathcal{H}(X)) = \{w(A) : A \in \mathcal{H}(X)\} \subseteq \mathcal{H}(X),$$

es decir, la imagen por  $w$  de todo compacto de  $X$  es un conjunto compacto de  $X$ .

*Demostración.* Sabemos que  $w$  es continua en  $X$ , pues toda aplicación contractiva es lipschitziana y por tanto continua. Como la imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto, podemos afirmar que  $w$  lleva elementos de  $\mathcal{H}(X)$  a elementos de  $\mathcal{H}(X)$ .  $\square$

Ahora necesitamos alguna forma de construir aplicaciones contractivas en el espacio  $(\mathcal{H}(X), h)$  a partir de aplicaciones contractivas en  $(X, d)$ . Gracias al siguiente lema comprobamos que la forma más natural es suficiente.

**Lema 4.2.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $w : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva con constante de Lipschitz  $s$ . Entonces  $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definida naturalmente como

$$w(A) = \{w(a) : a \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{H}(X)$$

es una aplicación contractiva en  $(\mathcal{H}(X), h)$ .

*Demostración.* Si utilizamos el lema 4.2.1 podemos afirmar que la aplicación  $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  está bien definida, por lo que falta probar que en efecto es contractiva. Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} d(w(A), w(B)) &= \max \{ \min \{d(w(a), w(b)) : b \in B\} : a \in A\} \\ &\leq \max \{ \min \{s \cdot d(a, b) : b \in B\} : a \in A\} \\ &= s \cdot d(A, B). \end{aligned}$$

Análogamente,  $d(w(B), w(A)) \leq s \cdot d(B, A)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} h(w(A), w(B)) &= \max \{d(w(A), w(B)), d(w(B), w(A))\} \\ &\leq s \max \{d(A, B), d(B, A)\} \\ &= s \cdot h(A, B). \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que  $w$  es contractiva sobre  $\mathcal{H}(X)$ .  $\square$

Enunciamos una propiedad de la métrica de Hausdorff  $h$  que nos hará falta dentro de poco.

**Lema 4.2.3.** Sean  $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$ , entonces

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \max \{h(A, C), h(B, D)\}.$$

*Demostración.* La prueba se sigue de otra propiedad de la distancia  $d$ :

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= \max\{d(x, C) \mid \forall x \in A \cup B\} \\ &= \max\{\max\{d(x, C) : x \in A\}, \max\{d(x, C) : x \in B\}\} \\ &= \max\{d(A, C), d(B, C)\}. \end{aligned}$$

Y de esta igualdad se deduce la desigualdad pedida.  $\square$

Seguidamente presentamos un resultado que nos ayuda a construir aplicaciones contractivas en  $\mathcal{H}(X)$  a partir de no sólo una sino de varias aplicaciones contractivas en  $X$ , a través del cual enlazaremos, esta vez en un contexto más teórico y formal, con la definición de SFI como conjunto de aplicaciones contractivas en un espacio métrico completo.

**Proposición 4.2.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\{w_i : i = 1, \dots, n\}$  un conjunto finito de aplicaciones contractivas  $w_i : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , cada una con constante de contractividad  $s_i$ . Definimos la aplicación  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  como

$$W(A) := \bigcup_{i=1}^n w_i(A) \quad \forall A \in \mathcal{H}(X). \quad (4.5)$$

Entonces  $W$  es una aplicación contractiva en  $\mathcal{H}(X)$  y su constante de contractividad es  $s = \max\{s_i : i = 1, \dots, n\}$ .

*Demostración.* Demostraremos el caso  $n = 2$ , de forma que por inducción sería cierto para cualquier  $n \leq 1$ . Sean  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} h(W(A), W(B)) &= h(w_1(A) \cup w_2(A), w_1(B) \cup w_2(B)) \\ &\leq \max\{h(w_1(A), w_1(B)), h(w_2(A), w_2(B))\} \text{ (lema 4.2.3)} \\ &\leq \max\{s_1 \cdot h(A, B), s_2 \cdot h(A, B)\} \\ &\leq \max\{s_1, s_2\} h(A, B) \\ &= s \cdot h(A, B) \end{aligned}$$

Lo cual completa la demostración.  $\square$

#### 4.2.3. El espacio de fractales y los SFI

Hasta ahora hemos probado varios resultados que nos han servido para construir aplicaciones contractivas en el espacio de fractales de un espacio métrico a partir de un conjunto finito de aplicaciones contractivas. Si añadimos la hipótesis de la complitud, tendríamos con ese conjunto de aplicaciones contractivas un SFI, el cual podemos iterar bajo la seguridad de que no perdemos dicha contractividad. Por lo tanto, y recuperando la definición 4.1.3, ya podemos recopilar toda la información que tenemos y enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.1.** Consideramos el SFI formado por el espacio métrico completo  $(X, d)$  y el conjunto  $\{w_i : i = 1, \dots, N\}$  de aplicaciones contractivas, siendo  $s$  la constante de contractividad del SFI. Consideramos también el espacio de fractales  $(\mathcal{H}(X), h)$ , donde definimos la aplicación  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  como en (4.5):

$$W(A) := \bigcup_{i=1}^N w_i(A) \quad \forall A \in \mathcal{H}(X).$$

Entonces  $W$  es una aplicación contractiva de constante  $s$  y admite un único punto fijo  $A^* \in \mathcal{H}(X)$ , el cual está dado por

$$A^* = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X).$$

*Demostración.* Gracias a los resultados anteriores solo nos quedaría probar que  $W$  admite un único punto fijo dado por la iteración infinita de  $W$  e independientemente de qué  $B \in \mathcal{H}(X)$  inicial se tome. Sin embargo, teniendo en cuenta que  $W$  es contractiva y que  $\mathcal{H}(X)$  es un espacio métrico completo, simplemente aplicando el teorema del punto fijo de Banach (teorema 2.1.1) se tiene el resultado completo  $\square$

En resumen, tenemos que todo SFI admite un único punto fijo al que converge la iteración sucesiva de la aplicación  $W$  construida a partir de su conjunto de aplicaciones contractivas. Además, esta convergencia está asegurada sea cual sea el conjunto inicial en el que se comienzan las iteradas. Como veníamos anunciando al inicio de esta sección, podemos ponerle nombre al punto fijo del SFI:

**Definición 4.2.2** (Atractor). Dado un SFI, definimos que su único punto fijo como el **atractor** del SFI.

Recordamos ahora el SFI del ejemplo 4.1.1 y las imágenes 4.4, que nos permitirían comprobar que el triángulo de Sierpinski es el atractor del SFI y que independientemente de la figura inicial (siempre y cuando sea un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ ) la iteración conjunta de  $\{w_1, w_2, w_3\}$  converge a  $\mathbf{S}$  como resultado.

Ahora podemos aplicar esta teoría al espacio métrico completo  $\mathbb{R}^2$  y a las transformaciones afines, que para asegurar la convergencia necesitamos que sean contracciones. Afortunadamente, es sencillo probar esta condición.

**Proposición 4.2.2.** Sea  $w = (r, s, \alpha, \beta, e, f)$  una transformación afín de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\alpha = \beta$  y  $\max\{|r|, |s|\} \leq 1$ , entonces  $w$  es una aplicación contractiva.

*Demostración.* Por un lado, las rotaciones uniformes y las traslaciones son movimientos rígidos, en particular aplicaciones lipschitzianas de constante de Lipschitz igual a 1. Por tanto, por composición, para comprobar que  $w$  es contractiva, debemos probar que un escalado (uniforme o no) es una aplicación contractiva si  $\max\{|r|, |s|\} < 1$ . Supongamos que la aplicación  $s(x_1, x_2) = (r \cdot x_1, s \cdot x_2)$  verifica  $K = \max\{|r|, |s|\} \leq 1$ . Entonces, para cualesquiera  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \|s(x) - s(y)\| &= \|(s_1 x_1 - s_1 y_1, s_2 x_2 - s_2 y_2)\| \\ &= \|(s_1(x_1 - y_1), s_2(x_2 - y_2))\| \\ &\leq K \|x - y\| \end{aligned}$$

Por tanto  $s$  es contractiva.  $\square$

Y una vez que sabemos cómo hacer que una transformación afín sea contractiva, podemos, sin importar el conjunto de partida, obtener imágenes fractales a partir únicamente de una colección finita de sextuplas, cada una representando una transformación afín contractiva. Como posibles ejemplos, y para que se observe la diversidad que ofrece este método, en las tablas 4.1 y 4.2 se pueden observar los SFI cuyos atractores son el árbol pitagórico y el helecho de Barnsley (imágenes 4.6 (a) y (b) respectivamente), siendo este último una imagen cuya representación es ya bastante realista.

$w$	$r$	$s$	$\alpha$	$\beta$	$e$	$f$
1	1	1	0	0	0	0
2	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\pi/4$	0	1
3	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-\pi/4$	$-\pi/4$	$1/2$	$3/2$

Tabla 4.1: SFI para el árbol pitagórico

$w$	$r$	$s$	$\alpha$	$\beta$	$e$	$f$
1	0.85	0.85	$-\pi/72$	$-\pi/72$	0	1.6
2	0.3	0.34	$49\pi/180$	$49\pi/180$	0	1.6
3	0.3	0.34	$2\pi/3$	$2\pi/3$	0	0.44
4	0	0.3	0	0	0	0

Tabla 4.2: SFI para el helecho de Barnsley

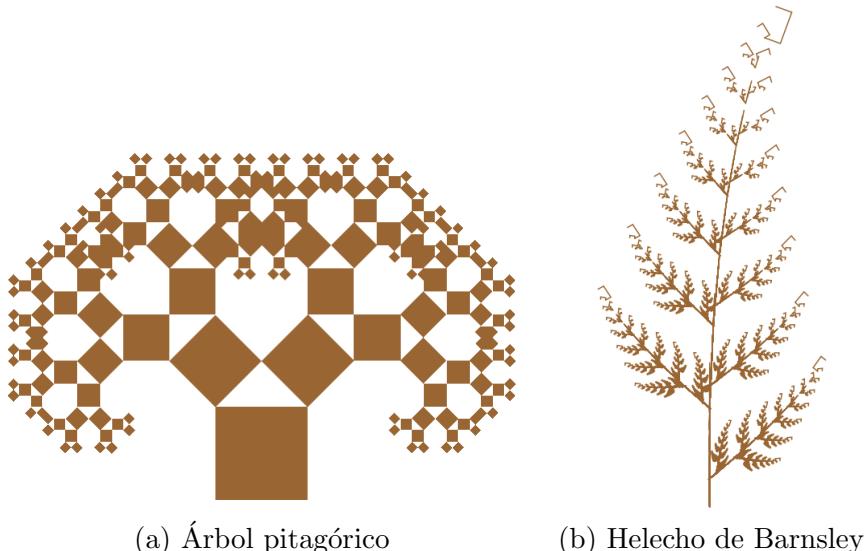


Imagen 4.6: Atractores de los SFI definidos en las tablas 4.1 y 4.2.

### 4.3. SFI y conjuntos autosimilares

En el capítulo 1 y concretamente en la sección 1.2.4 presentamos algunas relaciones entre los distintos tipos de dimensión, y en la sección 1.2.1 hablamos de la dimensión por cajas de un conjunto. Si nos restringimos a conjuntos autosimilares el cálculo de la dimensión por cajas se simplifica gracias a algunos resultados que le debemos a la teoría de los SFI. Para ello, previamente introducimos la siguiente definición.

**Definición 4.3.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y un SFI  $w = \{w_i : i = 1, \dots, n\}$  en  $X$ .  $w$  satisface la **condición de conjunto abierto** si existe un conjunto abierto  $\emptyset \neq U \subseteq X$  tal que las imágenes  $w_1(U), \dots, w_n(U) \subseteq U$  y son disjuntas.

Intuitivamente, esta condición nos afirma que podemos controlar el ‘tamaño’ del resultado de aplicar el SFI y que además las imágenes de cada aplicación que compone el SFI no se solapan unas con otras. Gracias a esta condición podemos

enunciar el siguiente teorema, que es el que nos proporcionará las herramientas esenciales para el cálculo de la dimensión en estos casos.

**Teorema 4.3.1.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo, un SFI  $w = \{w_i : i = 1, \dots, n\}$  en  $X$  que satisface la condición de conjunto abierto y  $\{c_i : i = 1, \dots, n\}$  las constantes de contractividad de las aplicaciones  $w_i$ . Entonces la dimensión por cajas del atractor de  $w$  es el único valor real positivo  $d$  que satisface la ecuación  $1 = c_1^d + \dots + c_n^d$  y esta coincide con la dimensión de Hausdorff.*

Podemos encontrar la prueba de este teorema en [7].

**Corolario 4.3.1.** *En caso de que todas las constantes de contractividad sean iguales a cierta constante  $0 < c < 1$ , entonces la dimensión  $d$  es*

$$d = \frac{\log(n)}{\log(1/c)}.$$

**Observación 4.3.1.** En  $\mathbb{R}^2$ , a partir de un conjunto autosimilar según la definición 1.0.1 podemos construir un SFI cuyo atractor sea el propio conjunto autosimilar.

Mediante el teorema de Moran y viendo ciertos fractales como atractores de SFI podemos rápidamente calcular su dimensión por cajas. Por ejemplo, el triángulo de Sierpinski es el atractor del SFI presentado en el ejemplo 4.1.1. El SFI cumple la condición de conjunto abierto tomando como  $U$  el interior del propio triángulo equilátero inicial y viendo, como podemos observar en la imagen 4.2 que las imágenes por cada una de las aplicaciones no salen del triángulo y además son disjuntas. En este caso tenemos tres similitudes, en todas ellas la constante de contractividad es  $\frac{1}{2}$ , por lo que aplicando el corolario su dimensión por cajas es  $\dim_B(\mathbf{S}) = \frac{\log(3)}{\log(2)}$ , como ya calculamos en la sección 1.2.1.

Es por tanto el momento de calcular la dimensión por cajas de la curva de Koch  $\mathbf{K}$ , la cual no hemos calculado aún. La curva de Koch es el atractor del SFI definido por las transformaciones especificadas en la tabla 4.3. Fijémonos que son 4 transformaciones afines, todas ellas similitudes cuya homotecia tiene la misma razón:  $\frac{1}{3}$ . Por tanto, aplicando el corolario, vemos que

$$\dim_B(\mathbf{K}) = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.2618,$$

que es un valor situado entre 1 y 2.

$w$	$r$	$s$	$\alpha$	$\beta$	$e$	$f$
1	$1/3$	$1/3$	0	0	0	0
2	$1/3$	$1/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$1/3$	0
3	$1/3$	$1/3$	$-\pi/3$	$-\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/6$
4	$1/3$	$1/3$	0	0	$2/3$	0

Tabla 4.3: SFI para la curva de Koch

#### 4.4. El problema inverso

Como ya hemos podido ver, los SFI nos abren un mundo de posibilidades para crear imágenes fractales, ya que todos convergen a un atractor. Sin embargo,

podemos también plantearnos el problema inverso. A partir de una imagen, ¿es posible determinar un SFI tal que su atractor sea la imagen inicial? Este es el punto clave de la teoría de la compresión por imágenes fractales. Pensemos que es mucho más ligero almacenar en memoria un conjunto finito de números en coma flotante que una imagen (viéndose esta como una colección de píxeles).

En este contexto, la mejor herramienta que tenemos es el conocido como *teorema del collage*, que enunciamos a continuación.

**Teorema 4.4.1** (El teorema del collage). *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo,  $L \in \mathcal{H}(X)$  y  $\varepsilon \geq 0$ . Si  $\{w_i : i = 1, \dots, N\}$  es un SFI en  $X$  con constante de contractividad  $0 \leq s < 1$  cumpliendo que*

$$h\left(L, \bigcup_{i=1}^N w_i(L)\right) \leq \varepsilon,$$

donde  $h(d)$  es la métrica de Hausdorff, entonces

$$h(L, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$$

donde  $A$  es el atractor del SFI. Equivalentemente,

$$h(L, A) \leq (1-s)^{-1} h\left(L, \bigcup_{i=1}^N w_i(L)\right) \quad \forall L \in \mathcal{H}(X).$$

Para probar el teorema del collage primero probamos el siguiente lema, que nos deja la mayor parte del trabajo hecho.

**Lema 4.4.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva con constante de contractividad  $0 \leq s < 1$  y consideramos  $x^* \in X$  el punto fijo de  $f$ . Entonces

$$d(x, x^*) \leq (1-s)^{-1} d(x, f(x)) \quad \forall x \in X.$$

*Demostración.* Fijado  $x \in X$ , la función distancia  $d(x, \cdot)$  es continua, por tanto:

$$\begin{aligned} d(x, x^*) &= d(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n d(f^{i-1}(x), f^i(x)) \quad (\text{desigualdad triangular}) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f(x)) \sum_{i=1}^n s^{i-1} \\ &= (1-s)^{-1} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que la suma de los elementos de una serie geométrica de razón  $0 \leq \alpha < 1$  es  $(1-\alpha)^{-1}$ .  $\square$

Aplicando el lema 4.4.1 al espacio métrico  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  y a la aplicación contractiva  $W$  generada por  $\{w_i : i = 1, \dots, N\}$  como en (4.5) tenemos probado el teorema del collage.

Intuitivamente, este teorema nos dice que para encontrar un SFI cuyo atractor es similar a un conjunto dado, debemos buscar un conjunto finito de aplicaciones contractivas (transformaciones afines contractivas en  $\mathbb{R}^2$ ) tales que la unión (el collage) formada por las imágenes del conjunto dado vía dichas aplicaciones se parezca a sí mismo. La forma de medir esta similaridad de manera cuantitativa es mediante la métrica de Hausdorff.

**Ejemplo 4.4.1.** Vamos a aplicar el teorema del collage para encontrar un SFI que nos ayude a replicar la imagen 4.7 (a).

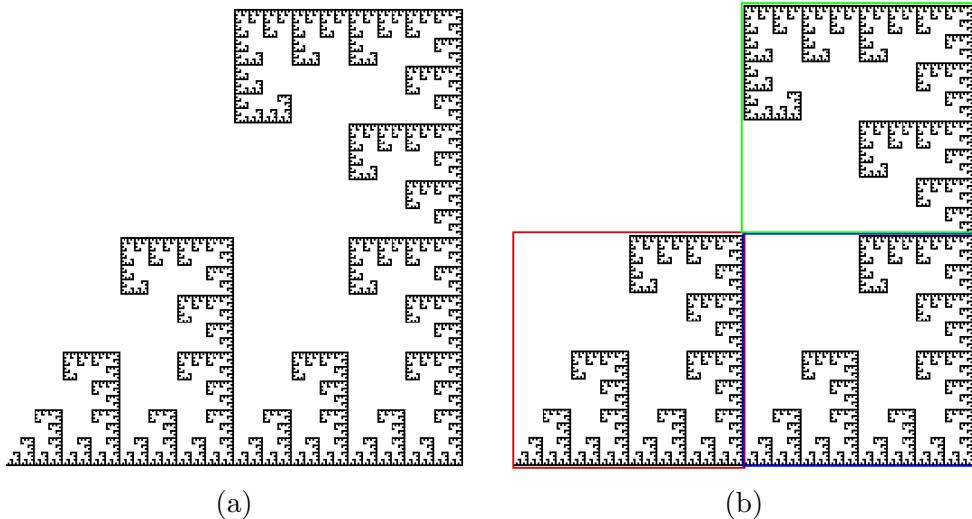


Imagen 4.7: Imagen cuyo SFI debemos determinar

Para ello, siguiendo lo que nos sugiere el teorema del collage debemos encontrar transformaciones afines tales que la unión de las imágenes de este conjunto sea lo más parecida posible al conjunto original. Llámese  $L$  al subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que representa este fractal.

Fijémonos, tal y como se puede ver en la imagen 4.7 (b) que  $L$  está compuesto por tres copias reducidas de sí mismo. Por lo que trataremos de buscar tres transformaciones afines tales que cada una genere una de las copias del propio  $L$ , de forma que al unirlas obtendríamos de nuevo el mismo conjunto.

- La copia **roja** es simplemente el propio  $L$  contraído a la mitad en ambos ejes, por lo que utilizamos la aplicación  $w_1 = (0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0)$ .
- La copia **azul** es, al igual que la **roja**, el resultado de aplicar una homotecia de razón 0.5, pero esta vez también se desplaza 0.5 unidades a la derecha. La aplicación que buscamos es por tanto  $w_2 = (0.5, 0.5, 0, 0, 0.5, 0)$ .
- Por último, la copia **verde** debemos fijarnos que además de escalada y desplazada, está girada. Por lo que es el resultado de aplicar una similitud de razón de homotecia 0.5 y ángulo de rotación  $\frac{\pi}{2}$ , para posteriormente colocar este resultado encima de la copia **azul**. Es decir, usamos la transformación  $w_3 = (0.5, 0.5, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1, 0.5)$ .

Por tanto,  $L$  es el atractor del siguiente SFI:

Para una mayor cantidad y variedad de ejemplos invitamos al lector a consultar [14, Sección 3.10], donde puede encontrar gran cantidad de ejercicios y explicaciones prácticas y más complejas.

$w$	$r$	$s$	$\alpha$	$\beta$	$e$	$f$
1	0.5	0.5	0	0	0	0
2	0.5	0.5	0	0	0.5	0
3	0.5	0.5	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	1	0.5

Tabla 4.4: SFI para la imagen 4.7

En conclusión, los SFI en  $\mathbb{R}^2$  a pesar de ser herramientas muy simples como lo son las transformaciones afines, nos permiten originar complejas y bellas imágenes basadas en la iteración. Además, gracias al teorema del collage podemos aproximar una imagen simplemente a partir de las transformaciones afines que definen un SFI que converge a dicha aproximación. Toda esta teoría está además basada en una densa teoría que gira en torno al teorema del punto fijo de Banach.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Rubiano, G. (2020). *Iteración y fractales (con mathematica ®)*. Universidad Nacional de Colombia.
- [2] Edgar, G.A. (2008). *Measure, Topology, and Fractal Geometry* (2nd ed. 2008.). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-74749-1>
- [3] Mandelbrot, B. (1983). *The Fractal geometry of nature*. Freeman.
- [4] Falconer, K. (1990). *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley.
- [5] Hausdorff, F. *Dimension und ausseres Mass*. Mathematische Annalen 79 (1919): 157-179. <http://eudml.org/doc/158784>.
- [6] Hurewicz, W.; Wallman, H. (1948). *Dimension Theory*. Princeton University Press.
- [7] Moran, P.A. (1946). *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 42, No. 1, pp. 15-23). Cambridge University Press.
- [8] Wagon, S. (2010). *Mathematica in Action*. Springer Publishing. p. 223
- [9] Payá, R (2008). *Apuntes de Análisis Matemático I...*
- [10] Ostrowski, A.M. (1973). *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces*. (3rd ed.). Academic Press.
- [11] Atkinson, K; Han, W. (2009). *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework* (3rd ed. 2009). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0458-4>
- [12] Dubeau, F.; Gnang, C. (2018). Fixed Point and Newton's Methods in the Complex Plane. *Journal of Complex Analysis*, 2018, 1-11. <https://doi.org/10.1155/2018/7289092>
- [13] Milnor, J. (2006). *Dynamics in one complex variable*. (3rd ed.). Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400835539>

- [14] Barnsley, M; Rising, H. (1993). *Fractals everywhere* (2nd ed.). Academic Press.
- [15] *Pythagorean Tree*. (s. f.). Agness Scott College. <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/pythagorean/pythTree.htm>
- [16] Snyder, S.S. (2006). Fractals and the Collage Theorem. *MAT Expository Papers*. 49. <https://digitalcommons.unl.edu/mathmidexpap/49>.
- [17] Dummit, E. (2015). *Dynamics, Chaos, and Fractals (part 4): Fractals*. Rochester MTH 215. [https://web.northeastern.edu/dummit/docs/dynamics\\_4\\_fractals.pdf](https://web.northeastern.edu/dummit/docs/dynamics_4_fractals.pdf).
- [18] Bandt, C., Nguyen Viet Hung, Rao, H. (2006). On the Open Set Condition for Self-Similar Fractals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(5), 1369–1374. <http://www.jstor.org/stable/4097989>
- [19] Foroutan-pour, K., Dutilleul, P., Smith, D. (1999). Advances in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation. *Applied Mathematics and Computation*, 105(2–3), 195–210. [https://doi.org/10.1016/s0096-3003\(98\)10096-6](https://doi.org/10.1016/s0096-3003(98)10096-6).

APÉNDICE A

APPENDIX TITLE

APÉNDICE B \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ ANOTHER APPENDIX