



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS
TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Polinomios Ortogonales

Fundamentos y aplicación a Procesos de Nacimiento
y Muerte

Autor: Juan Antonio Villegas Recio

Tutora: Lidia Fernández Rodríguez
Departamento de Matemática Aplicada

Cotutora: Antonia María Delgado Amaro
Departamento de Matemática Aplicada

CURSO 2022–2023
GRANADA, A 9 DE MARZO DE 2023

AGRADECIMIENTOS

Ya veremos a quién hay que agradecerle qué.

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

Yo, D. Juan Antonio Villegas Recio, autor de este TFM,

Declaro explícitamente que el trabajo aquí presentado como Trabajo de Fin de Máster de mis estudios en el Máster Interuniversitario en Matemáticas, correspondiente al curso académico 2022-2023, es original. Es decir, no se han utilizado para el desarrollo del trabajo fuentes sin haberlas citado debidamente.

Granada, a 9 de marzo de 2023.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Juan Antonio', is written over a horizontal line.

Juan Antonio Villegas Recio

El resumen

Palabras clave

Las, palabras, clave.

--

ABSTRACT

The abstract

Keywords

The, abstract.

Lista de Abreviaturas	13
Lista de Imágenes	15
Introducción	17
Objetivos	19
1. Introducción a los Polinomios Ortogonales	21
1.1. Introducción	21
1.2. Ortogonalidad y función peso	22
1.3. Funcional de momentos	23
1.4. Estandarizaciones de las SPO	27
1.5. Existencia de SPO	28
1.6. La relación de recurrencia a tres términos	30
1.7. Propiedades de los ceros	34
2. Polinomios Ortogonales Clásicos	37
2.1. La ecuación de Pearson	37
2.2. Deducción de las familias de polinomios ortogonales clásicos	39
2.2.1. Caso I: Polinomios de Hermite	40
2.2.2. Caso II: Polinomios de Laguerre	40
2.2.3. Caso III: Polinomios de Jacobi	41
3. Polinomios Ortogonales y Procesos de Nacimiento y Muerte	43
Conclusiones	45
Bibliografía	45

Apéndices	49
A. Apéndice 1	49

LISTA DE ABREVIATURAS

- PO: Polinomios Ortogonales

LISTA DE IMÁGENES

1.1. Polinomios de Tchebichef de tipo I y sus ceros 36

2.1. Polinomios Ortogonales Clásicos 37

La introducción

OBJETIVOS

Los objetivos

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

1.1. Introducción

La *Ortogonalidad* es una propiedad que a menudo se ha relacionado con la geometría, siendo común pensar en la analogía con la *perpendicularidad*. Por ejemplo, es claro que en el plano vectorial \mathbb{R}^2 se tiene que los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son ortogonales, y es que estos forman un ángulo recto, y por ello también se dice que son perpendiculares. Sin embargo, este hecho no es más que una consecuencia de la ortogonalidad, y es que en el espacio vectorial \mathbb{R}^d , y en particular en \mathbb{R}^2 , dos vectores se dicen ortogonales si, al dotar a \mathbb{R}^d de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, el resultado de operar estos dos vectores es 0.

El producto escalar mayormente utilizado en \mathbb{R}^d es el usual, el cual, si $u = (u_1, \dots, u_d)$ y $v = (v_1, \dots, v_d)$ se define como

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle = u \cdot v^t = \sum_{i=1}^d u_i \cdot v_i. \end{aligned}$$

Y dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^d$ se dicen ortogonales siempre que $\langle u, v \rangle = 0$.

Sin embargo, en realidad la ortogonalidad va mucho más allá de \mathbb{R}^d y del producto escalar usual. Se puede utilizar cualquier espacio vectorial siempre que esté dotado de un producto escalar. En particular, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ pensemos en el espacio de Lebesgue $L^1(\Omega)$, el cual está dotado del producto vectorial

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^1 \times L^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx. \end{aligned}$$

Por ejemplo, si tomamos $\Omega = [0, \pi]$, tenemos que las funciones $\cos(n\theta), \cos(m\theta)$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$) son ortogonales siempre que $n \neq m$, pues

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = 0 \quad (n \neq m). \quad (1.1)$$

Si hacemos el cambio de variable $x = \cos(\theta)$, tenemos que $dx = -\sin(\theta)d\theta = \sin(-\theta)d\theta$, por lo que aplicando que $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) = 1$ y que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, tenemos que la ecuación (1.1) se expresa como

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (1.2)$$

donde hemos denotado $T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(n \arccos(\theta))$ con $-1 \leq x \leq 1$.

Y tenemos que $T_0 = 1, T_1 = \cos(\theta) = x$, y aplicando identidades trigonométricas se puede deducir que $T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x$, etc.

Por lo tanto, si definimos en $\mathbb{P}[x]$ el producto escalar

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P}[x] \times \mathbb{P}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)\rho(x)dx, \end{aligned}$$

con $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, tenemos que las funciones (polinomios) T_n , $n \in \mathbb{N}_0$ son ortogonales entre sí en el espacio $(\mathbb{P}[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ siempre que $n \neq m$.

De acuerdo a este ejemplo, decimos que los polinomios T_n son *ortogonales*, o que la sucesión $\{T_n\}$ es una *Sucesión de Polinomios Ortogonales* con respecto a la *función peso* $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en el intervalo $(-1, 1)$. Los polinomios T_n recién presentados son los *Polinomios de Tchebichef de tipo I*, y conforman nuestra primera familia de polinomios ortogonales conocida.

1.2. Ortogonalidad y función peso

En la sección 1.1 pudimos ampliar el concepto generalmente conocido de ortogonalidad, restringido a espacios como \mathbb{R}^d , a otros tipos de espacios. Además, introdujimos la primera familia de polinomios ortogonales: los polinomios de Tchebichef de tipo I. En esta sección daremos definiciones más formales y genéricas sobre la ortogonalidad.

Sea μ una función no decreciente y no constante definida en un intervalo (a, b) tal que si $a = -\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) > -\infty$ y si $b = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) < \infty$. Se define el espacio de funciones $L_\mu^p[a, b]$ como el conjunto de funciones tales que

$$\int_a^b |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$$

En $L_\mu^2[a, b]$, se define un producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L_\mu^2[a, b] \times L_\mu^2[a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\mu(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

A partir del espacio $L_\mu^2[a, b]$ podemos dar una definición de ortogonalidad.

Definición 1.1 (Ortogonalidad). Fijada una función μ no decreciente y no constante definida en un intervalo (a, b) tal que si $a = -\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) > -\infty$ y si $b = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) < \infty$ y dadas $f, g \in L^2_\mu[a, b]$, se dice que las funciones **f y g son ortogonales** o que **f es ortogonal a g** respecto a la distribución $d\mu$ si

$$\langle f, g \rangle = 0. \quad (1.4)$$

No obstante, en la mayoría de los casos y por simplicidad en lugar de utilizar una función μ y su medida inducida, si μ es absolutamente continua podemos reescribir (1.3) como una integral de Lebesgue

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \quad (1.5)$$

siendo ρ una función medible no negativa tal que $0 < \int_a^b \rho(x)dx < \infty$ denominada **función peso**.

Definición 1.2 (Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto a una función peso). Dada una función peso ρ , si existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ con P_n de grado n tal que

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = 0 \quad (n \neq m)$$

entonces decimos que $\{P_n\}$ es una **Sucesión de Polinomios Ortogonales (SPO) respecto a la función peso $\rho(x)$** en el intervalo (a, b) .

1.3. Funcional de momentos

Tenemos ya por tanto una definición rigurosa de lo que es la ortogonalidad de funciones de $L^2_\mu[a, b]$. Podemos reescribir esta propiedad mediante el uso de funcionales lineales aprovechando la linealidad de la integral. Se define el funcional \mathcal{L} como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^2_\mu[a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)d\mu(x). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por tanto, vemos que la propiedad de ortogonalidad (1.4) es equivalente a $\mathcal{L}[f \cdot g] = 0$.

Observación 1.1. El funcional \mathcal{L} es lineal, pues por la linealidad del operador integral se tiene que

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g], \quad (1.7)$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$ y $f, g \in L^2_\mu[a, b]$.

Ejemplo 1. $\{T_n\}$, la sucesión de polinomios de Tchebichef de tipo I, es una Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto de la función peso $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en el intervalo $(-1, 1)$. También podemos establecer la ortogonalidad de los respectivos $\{T_n\}$ no mediante un producto escalar sino a través del funcional

$$\mathcal{L}[f] := \int_{-1}^1 f(x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx \quad (1.8)$$

Por lo que podemos definir ortogonalidad indistintamente mediante un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o mediante un funcional integral \mathcal{L} .

A partir de este momento consideraremos el espacio vectorial de los polinomios \mathbb{P} . Denotaremos como \mathbb{P}_n al subespacio de \mathbb{P} formado por los polinomios de grado menor o igual que n .

Definición 1.3 (Momentos de un funcional). Dado un funcional \mathcal{L} , definimos los **momentos** del funcional, y los denotamos con μ_n , como

$$\mu_n = \mathcal{L}[x^n], \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.9)$$

Gracias a los momentos de un funcional y considerando que cualquier polinomio de grado n puede escribirse como $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ podemos entonces combinar (1.7) y (1.9) para escribir la acción de un funcional \mathcal{L} sobre $p(x)$ como

$$\mathcal{L}[p] = \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^n c_k x^k \right] = \sum_{k=0}^n c_k \mu_k$$

Por lo que, de esta forma, únicamente conociendo la sucesión de momentos $\{\mu_n\}$ podríamos conocer el resultado de aplicar \mathcal{L} a cualquier polinomio. Por tanto, es posible dar una nueva definición de ortogonalidad respecto a funcionales lineales que en este caso estén definidos no mediante una integral como en el caso de (1.6), sino a partir de una sucesión de momentos $\{\mu_n\}$.

Definición 1.4 (Funcional de momentos). Dada una sucesión de números complejos $\{\mu_n\}$, diremos que \mathcal{L} es un **funcional de momentos** determinado por la sucesión $\{\mu_n\}$, donde μ_n se denomina **momento de orden n**, si \mathcal{L} es lineal en \mathbb{P} y $\mathcal{L}[x^n] = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}_0$

Daremos ahora una nueva definición de SPO, en este caso con respecto a un funcional lineal y no respecto a una función peso como hicimos en la definición 1.2.

Definición 1.5 (Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto a un funcional lineal). Dado un funcional lineal \mathcal{L} definido como en (1.6), una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ es una **Sucesión de Polinomios Ortogonales (SPO) respecto al funcional \mathcal{L}** si:

1. P_n es de grado n .
2. $\mathcal{L}[P_n P_m] = 0$ si $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.
3. $\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

La sucesión $\{P_n\}$ se llamará **ortonormal** si $\mathcal{L}[P_n^2] = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

La sucesión $\{P_n\}$ se llamará **Sucesión de Polinomios Ortogonales Mónicos (SPOM)** si P_n es mónico para cada n , es decir, si $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.

En general, las condiciones (2) y (3) se suelen abreviar como

$$\mathcal{L}[P_n P_m] = K_n \delta_{mn}, \quad K_n \neq 0,$$

donde δ_{mn} denota la función delta de Kronecker.

En el caso de que $d\mu(x) = \rho(x)dx$, es decir, en el caso de trabajar con funciones peso, la condición (3) se satisface de manera automática.

Ejemplo 2. Extraído de [Chi11, Capítulo 1, sección 1] Consideramos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

$\{P_n\}$ son los llamados *Polinomios de Charlier*. Como

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!} x(x-1) \cdots (x-n+1)$$

tenemos que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n . En [Chi11] pueden encontrarse los cálculos rigurosos mediante los cuales, si definimos

$$\mathcal{L}[x^n] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

y extendemos \mathcal{L} a \mathbb{P} por linealidad, tenemos que

$$\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Al estar definido el funcional mediante sumatorias y no mediante integrales podría parecer que, aunque $\{P_n\}$ satisfaga la definición 1.5 mediante un funcional de momentos, no satisface la ortogonalidad respecto a (1.6). Sin embargo, si denotamos como ϕ a una función escalonada que es constante en cada intervalo $(-\infty, 0)$ y $(k, k+1)$ con $k \in \mathbb{N}_0$ y tiene saltos de magnitud $\frac{a^k}{k!}$ en cada k , entonces utilizando la integral de Riemann-Stieltjes los polinomios $\{P_n\}$ verifican

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x)P_n(x)d\phi(x) = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.10)$$

Evidentemente ϕ no es una función absolutamente continua, por lo que no se puede escribir (1.10) en términos de (1.5).

Observación 1.2. No cualquier sucesión $\{\mu_n\}$ da lugar a una SPO. Por ejemplo, si $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, tendríamos que

$$P_0(x) = a \neq 0, \quad P_1(x) = bx + c, \quad b \neq 0.$$

Por la propiedad (2) de la definición 1.5

$$\mathcal{L}[P_0(x)P_1(x)] = a(b\mu_1 + c\mu_0) = a(b+c),$$

luego $b = -c$, y en este caso

$$\mathcal{L}[P_1(x)^2] = b^2(\mu_2 - 2\mu_1 + \mu_0) = 0,$$

lo cual contradice la propiedad (3).

Gracias a la observación 1.2 sabemos que no es válida cualquier sucesión de momentos para encontrar una SPO, por lo que necesitamos además probar y dar condiciones para la existencia de la susodicha SPO.

Previamente, introduciremos un resultado para la caracterización de SPO respecto a un funcional \mathcal{L} .

Teorema 1.1. Sea \mathcal{L} un funcional de momentos y $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\{P_n\}$ es una SPO respecto al funcional \mathcal{L} .
2. $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ para cualquier polinomio $\pi(x)$ de grado $m < n$ y $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$ si $\pi(x)$ tiene grado n .
3. $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{nm}$, con $K_n \neq 0$, $m = 0, 1, \dots, n$

Demostración. Probaremos $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

■ $(1) \Rightarrow (2)$

Supongamos que $\{P_n\}$ es una SPO respecto al funcional \mathcal{L} . Como P_k tiene grado k , entonces $\{P_0, \dots, P_m\}$ forma una base de \mathbb{P}_m . Por lo que si $\pi(x)$ es un polinomio de grado m , existen constantes c_1, \dots, c_m , con $c_m \neq 0$ tales que $\pi(x) = \sum_{i=0}^m c_i P_i(x)$. Como \mathcal{L} es lineal,

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = \sum_{k=0}^m c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)] = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ c_n \mathcal{L}[P_n^2(x)] & \text{si } m = n \end{cases}$$

■ $(2) \Rightarrow (3)$ es trivial, basta con utilizar $\pi(x) = x^m$ y aplicar (2).

■ $(3) \Rightarrow (1)$ también es trivial, pudiendo reconstruir $P_m(x)$ por linealidad.

□

En la prueba de este último teorema, hemos hecho uso de que mediante una SPO podemos obtener bases de \mathbb{P}_n . Sacaremos provecho de este hecho en el siguiente resultado.

Teorema 1.2. Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal \mathcal{L} . Entonces, cualquier polinomio $\pi(x)$ de grado n se puede expresar en la base $\{P_0, \dots, P_n\}$ de la forma

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x), \quad \text{con } c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Demostración. Ya es claro que si $\pi(x)$ es un polinomio de grado n , entonces $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$. Por tanto, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $P_m(x)$ y aplicando el funcional \mathcal{L} se obtiene

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_m(x)] = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_m(x)] = c_m \mathcal{L}[P_m^2(x)],$$

donde hemos aplicado la ortogonalidad. De esta igualdad se deduce claramente la expresión de c_k .

□

Este resultado nos proporciona una consecuencia muy importante: la unicidad salvo constante multiplicativa de las SPO respecto a un funcional.

Corolario 1.3. Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal \mathcal{L} . Entonces cada P_n está unívocamente determinado salvo constante multiplicativa no nula. Esto es, si $\{Q_n\}$ es otra SPO respecto a \mathcal{L} , entonces existen constantes $c_n \neq 0$ tales que

$$Q_n(x) = c_n P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Utilizaremos el teorema 1.2 con $\pi(x) = Q_n(x)$, de modo que

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]} P_k(x)$$

Por el teorema 1.1, $\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)] = 0$ siempre que $k < n$ y $\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)] = r_n \neq 0$ si $k = n$, por lo que, tomando $c_n = \frac{r_n}{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}$, se tiene $Q_n(x) = c_n P_n(x)$, como queríamos probar. \square

1.4. Estandarizaciones de las SPO

El corolario 1.3 nos afirma que si tenemos una SPO $\{P_n\}$ respecto a un funcional \mathcal{L} , entonces $\{c_n P_n\}$ también es una SPO para cualquier sucesión $\{c_n\}$ de constantes no nulas. Existen varias formas de estandarizar una SPO de forma que esta esté unívocamente determinada a partir de un funcional. En esta sección presentaremos algunas de las más comunes.

Una primera posibilidad es imponer el valor del coeficiente líder de cada polinomio de la sucesión. Por ejemplo, la estandarización más común de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$ consiste en obligar a que el término líder a_n verifique $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

En particular, podemos exigir que todos los polinomios que conforman la SPO sean mónicos. De esta forma, podemos afirmar que si tenemos una SPO $\{P_n\}$ para un funcional \mathcal{L} , entonces existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM) respecto a \mathcal{L} . De hecho, si denotamos como a_n al coeficiente líder de P_n , entonces los polinomios

$$\hat{P}_n = a_n^{-1} P_n$$

forman una SPOM respecto a \mathcal{L} .

Otra forma de estandarizar una SPO $\{P_n\}$ respecto a un funcional \mathcal{L} es tomando los polinomios

$$p_n = (-1)^{\text{sgn}(a_n)} (\mathcal{L}[P_n^2])^{-1/2} P_n,$$

siempre que $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$ y donde $\text{sgn}(a_n)$ denota el signo de a_n . Esta normalización no siempre es posible de aplicar, ya que no todos los funcionales lineales verifican $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$, aunque existe una clase de funcionales, los definidos positivos (ver definición 1.8), que aseguran esta condición.

Con esta operación conseguimos que $\mathcal{L}[p_n^2] = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, es decir, la sucesión $\{p_n\}$ es una SPO ortonormal. Por tanto, dada una SPO $\{P_n\}$ para un funcional \mathcal{L} tal que $\mathcal{L}[P_n^2] > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$, existe una única SPO ortonormal $\{p_n\}$ respecto a \mathcal{L} .

Por último, es común exigirle a cada polinomio P_n de la sucesión que verifique $P_n(x_0) = K_n$ para cierto $x_0 \in [a, b]$. Es decir, se exige un valor concreto al evaluar

P_n en un punto del intervalo $[a, b]$, que en ocasiones coincide con alguno de los extremos a, b cuando estos son finitos.

Por ejemplo, los polinomios de Tchebichef de tipo I, ortogonales en $(-1, 1)$ suelen ser presentados verificando $T_n(1) = 1$. Por su parte, los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$, que también son ortogonales en $(-1, 1)$, se busca que verifiquen $P_n^{(\alpha, \beta)} = \binom{n+\alpha}{n}$.

En conclusión, no existe una única forma de estandarizar una SPO, sino que en realidad cada familia de polinomios ortogonales acepta una, o en ocasiones varias, estandarizaciones concretas dependiendo de la aplicación que se le dé y del contexto del problema.

1.5. Existencia de SPO

Recordemos que con anterioridad hemos comentado en la observación 1.2 que no cualquier sucesión de números complejos $\{\mu_n\}$ da lugar a una SPO. Es necesario por tanto exigir alguna condición sobre dicha sucesión si realmente queremos asegurar la existencia la correspondiente SPO.

Para ello, introducimos el siguiente concepto.

Definición 1.6 (Matriz de momentos). Llamaremos **matriz de momentos** a la matriz $(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n$, y **determinante de momentos** a su determinante

$$\Delta_n = \det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

Este determinante está directamente relacionado con la existencia de una SPO.

Teorema 1.4. Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión de números complejos y sea \mathcal{L} un funcional de momentos cuya sucesión de momentos es $\{\mu_n\}$. \mathcal{L} admite una sucesión de polinomios ortogonales si, y solo si el determinante de momentos $\Delta_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Comprobamos la doble implicación.

\Rightarrow Supongamos que los polinomios $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk} x^k$ conforman una SPO para \mathcal{L} . Fijemos ahora $n \in \mathbb{N}_0$ arbitrario. Por el teorema 1.1 (caracterización de una SPO), obsérvese que la condición de ortogonalidad

$$\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^n c_{nk} \mu_{k+m} = K_n \delta_{nm}, \quad K_n \neq 0, m \leq n \quad (1.12)$$

equivale al sistema

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Por tanto, si esta sucesión existe, necesariamente este sistema debe tener solución única determinada por K_n . Para ello ha de verificarse que $\Delta_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

⇐ Recíprocamente, supongamos ahora que $\Delta_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$. En ese caso el sistema (1.13) tiene solución única para cualquier $K_n \neq 0$, por lo que podemos crear polinomios $P_n(x)$ que cumplan (1.12) para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. Por otro lado, aplicando la regla de Cramer, tenemos que

$$c_{nn} = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad n \geq 1, \quad (1.14)$$

expresión que también es válida para $n = 0$ sin más que tomar $\Delta_{-1} = 1$. Por tanto, el polinomio $P_n(x)$ tiene coeficiente líder no nulo, es decir, es de grado n , por lo que $\{P_n(x)\}$ es una SPO para \mathcal{L} .

□

Con esta notación, podemos ponerle nombre a aquellos funcionales para los cuales existe una SPO.

Definición 1.7 (Funcional cuasi-definido). Un funcional \mathcal{L} es **cuasi-definido** si, y solo si admite una sucesión de polinomios ortogonales. Equivalentemente, si $\Delta_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Un concepto muy relacionado con el de funcional cuasi-definido es el de definido positivo, que introducimos a continuación.

Definición 1.8 (Funcional definido positivo). Un funcional de momentos \mathcal{L} se dice que es **definido positivo** si $\mathcal{L}[\pi] > 0$ para cualquier polinomio π no nulo y no negativo en todo el eje real.

Presentamos ahora un sencillo lema que nos ayudará a encontrar una definición alternativa utilizada con bastante frecuencia.

Lema 1.1. Sea $\pi(x)$ un polinomio no negativo en todo el eje real. Entonces existen polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que

$$\pi(x) = p^2(x) + q^2(x).$$

Demostración. Si $\pi(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $\pi(x)$ es un polinomio cuyos ceros reales tienen multiplicidad par y cuyos ceros complejos son pares conjugados. Por lo que podemos escribir

$$\pi(x) = r^2(x) \prod_{k=1}^m (x - a_k - b_k i)(x - a_k + b_k i),$$

donde $r(x)$ es un polinomio real y $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Si ahora denotamos

$$\prod_{k=1}^m (x - a_k - b_k i) = A(x) + iB(x),$$

siendo $A(x)$ y $B(x)$ polinomios reales, podemos expresar $\pi(x)$ como

$$\pi(x) = r^2(x)(A^2(x) + B^2(x)) = \underbrace{(r(x)A(x))^2}_{p^2(x)} + \underbrace{(r(x)B(x))^2}_{q^2(x)}.$$

□

Una consecuencia directa de este lema es una definición alternativa y equivalente de funcional definido positivo.

Corolario 1.5. *Un funcional de momentos \mathcal{L} es definido positivo si, y solo si $\mathcal{L}[\pi^2(x)] > 0$ para cualquier polinomio $\pi(x)$.*

Finalmente, introducimos la relación entre el concepto de funcional definido positivo y los determinantes (1.11).

Teorema 1.6. *Un funcional \mathcal{L} es definido positivo si, y solo si sus momentos $\{\mu_n\}$ son todos reales y $\Delta_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$*

Demostración. La prueba de este resultado puede encontrarse en [Chi11, Teorema 3.4]. \square

Obsérvese que gracias a este teorema podemos entonces afirmar que los funcionales definidos positivos son, en particular, funcionales cuasi-definidos. Esto es, admiten una SPO.

1.6. La relación de recurrencia a tres términos

Las SPO respecto a un funcional siempre cumplen una ecuación que es la denominada ‘relación de recurrencia a tres términos’, en adelante también referida como ‘RRTT’.

Teorema 1.7 (Relación de Recurrencia a Tres Términos). *Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal \mathcal{L} . Entonces, $\{P_n\}$ satisface la relación de recurrencia*

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.15)$$

Normalmente se impone que $P_{-1} = 0, P_0 = 1$, por lo que una SPO queda determinada unívocamente a partir de las sucesiones $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$.

Además, si la SPO es mónica, los polinomios $\{P_n\}$ verifican la ecuación equivalente

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.16)$$

Demostración. Como $xP_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$, este puede ser expresado como

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{k,n} P_k(x), \quad \text{con } a_{k,n} = \frac{\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Pero $\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)] = 0$ para $k = 0, \dots, n-2$, por lo que necesariamente debe cumplirse

$$xP_n(x) = \underbrace{a_{n-1,n}}_{\gamma_n} P_{n-1}(x) + \underbrace{a_{n,n}}_{\beta_n} P_n(x) + \underbrace{a_{n+1,n}}_{\alpha_n} P_{n+1}(x),$$

de donde se deduce (1.15). Si además $P_n(x)$ es mónico, $xP_n(x)$ también lo es, por lo que $a_{n+1,n} = 1$, luego se tiene que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1},$$

que es equivalente a (1.16). \square

De esta demostración podemos deducir además la expresión de las constantes α_n, β_n y γ_n :

$$\alpha_n = \frac{\mathcal{L}[xP_nP_{n+1}]}{\mathcal{L}[P_{n+1}^2]}, \quad \beta_n = \frac{\mathcal{L}[xP_n^2]}{\mathcal{L}[P_n^2]}, \quad \gamma_n = \frac{\mathcal{L}[xP_nP_{n-1}]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2]}, \quad (1.17)$$

donde la expresión de α_n y la de β_n son válidas para $n \geq 0$ y la de γ_n para $n \geq 1$.

Sin embargo, este cálculo puede complicarse bastante, por lo que presentaremos un algoritmo alternativo. Para ello, desarrollaremos los polinomios como

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + c_n x^{n-2} + \dots$$

Si sustituimos esta expresión en la RRTT (1.15) e igualamos los coeficientes de los monomios x^{n+1}, x^n y x^{n-1} llegamos a las expresiones

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{1}{a_{n-1}} (c_n - \alpha_n c_{n+1} - \beta_n b_n). \quad (1.18)$$

donde de nuevo la expresión de α_n y la de β_n son válidas para $n \geq 0$ y la de γ_n para $n \geq 1$.

Con las ecuaciones (1.17) podemos construir la SPO utilizando la RR3T si conocemos el funcional, deduciendo simultáneamente los coeficientes de la RR3T y los polinomios que conforman la sucesión. Por su parte, utilizando (1.18) podemos calcular de una manera sencilla los coeficientes de la RR3T sin utilizar el funcional ni integrales, en ocasiones complejas. Sin embargo, en este último caso necesitamos conocer los polinomios P_{n-1}, P_n y P_{n+1} para obtener dichos coeficientes, no pudiendo construir la SPO como sí podíamos hacer si aplicábamos (1.17). Comprobemos este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Vamos a clarificar estas ideas con un ejemplo práctico. En el archivo `software/Hermite.ipynb`¹ se ha implementado, utilizando el software matemático ‘SageMath’, el cálculo de una SPO mediante la RR3T. También se ha realizado una estimación de los tiempos de ejecución para distintos valores de n . En este ejemplo únicamente se recogen los resultados arrojados por el software, pero en dicho archivo se puede consultar e incluso modificar el código fuente.

En particular, se ha trabajado con los polinomios de Hermite, (TODO Incluir referencia cuando hable de los polinomios de Hermite) que son aquellos que conforman la SPO con respecto a la función peso $\rho(x) = e^{-x^2}$ en todo \mathbb{R} . Por tanto, tenemos el funcional

$$\mathcal{L}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} dx.$$

Calculemos la SPOM correspondiente al funcional \mathcal{L} . Si tomamos $P_{-1} = 0, P_0 = 1$, podemos calcular a partir de (1.17) las constantes β_n, γ_n para $n \leq 1$ y mediante (1.16) obtenemos los polinomios P_n para $n \geq 1$, véase la tabla 1.1.

Sin embargo, comprobamos que este método es lento, pues los tiempos de cálculo² se incrementan considerablemente con n . De hecho, para $n = 15$, que es un valor aún bajo y cercano a 10, el tiempo de ejecución ya es de 58.9024 segundos, casi un minuto.

¹Puede ser consultado en la URL <https://github.com/JAntonioVR/Polinomios-Ortogonales/blob/main/software/Hermite.ipynb>

²Estos tiempos han sido obtenidos mediante la media de los tiempos de ejecución de 10 ejecuciones independientes.

n	$P_n(x)$	Tiempo de cálculo (s)
0	1	1.1897×10^{-5}
1	x	0.0133
2	$x^2 - \frac{1}{2}$	0.0449
3	$x^3 - \frac{3}{2}x$	0.1073
4	$x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$	0.2161
5	$x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}x$	0.4162
6	$x^6 - \frac{15}{2}x^4 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{15}{8}$	0.6752
7	$x^7 - \frac{21}{2}x^5 + \frac{105}{4}x^3 - \frac{105}{8}x$	1.2009
8	$x^8 - 14x^6 + \frac{105}{2}x^4 - \frac{105}{2}x^2 + \frac{105}{16}$	2.0665
9	$x^9 - 18x^7 + \frac{189}{2}x^5 - \frac{315}{2}x^3 + \frac{945}{16}x$	3.5725
10	$x^{10} - \frac{45}{2}x^8 + \frac{315}{2}x^6 - \frac{1575}{4}x^4 + \frac{4725}{16}x^2 - \frac{945}{32}$	5.5059

Tabla 1.1: 10 primeros polinomios de Hermite mónicos

Por otro lado, existe un resultado recíproco al teorema 1.7. Este resultado es el conocido como teorema de Favard.

Teorema 1.8 (Favard). *Sean $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ dos sucesiones de números reales y sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios mónicos definida mediante la relación (1.16):*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

con $P_{-1} = 0$ y $P_0 = 1$. Entonces existe un único funcional de momentos \mathcal{L} tal que

$$\mathcal{L}[1] = \gamma_0, \quad \mathcal{L}[P_n P_m] = \delta_{n,m} K_n, \quad K_n \neq 0.$$

Este funcional es cuasi-definido y $\{P_n\}$ es su correspondiente SPOM si, y solo si $\gamma_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Además, \mathcal{L} es definido positivo si y solo si $\gamma_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Definamos el funcional \mathcal{L} por inducción en \mathbb{P} . Sea

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[P_0] = \mu_0 := \gamma_0,$$

$$\mathcal{L}[P_n] = \mathcal{L}[1 \cdot P_n] = \mathcal{L}[P_0 P_n] := 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Así, aplicando (1.16) podemos calcular los momentos del funcional. Si tomamos $n = 0$ en (1.16) obtenemos

$$P_1(x) = x - \beta_0,$$

luego, como $\mathcal{L}[P_1] = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}[P_1] &= \mathcal{L}[x - \beta_0] \\ &= \mu_1 - \beta_0 \mathcal{L}[1] \\ &= \mu_1 - \beta_0 \gamma_0, \end{aligned}$$

de donde $\mu_1 = \beta_0 \gamma_0$. Si $n = 1$ en (1.16) obtenemos

$$P_2(x) = (x - \beta_1)P_1 - \gamma_1,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[P_2] = \mathcal{L}[(x - \beta_1)P_1 - \gamma_1] \\ &= \mathcal{L}[(x - \beta_1)(x - \beta_0) - \gamma_1] \\ &= \mu_2 - (\beta_0 + \beta_1)\mu_1 + (\beta_1\beta_0 - \gamma_1)\gamma_0, \end{aligned}$$

de donde $\mu_2 = (\beta_0 + \beta_1)\mu_1 - (\beta_1\beta_0 - \gamma_1)\gamma_0$. Continuando este proceso se pueden obtener todos los momentos μ_n , y una vez se tienen todos los momentos podemos extender el funcional por linealidad.

Utilizando (1.15) sucesivamente obtenemos que

$$x^k P_n = \sum_{i=n-k}^{n+k} d_{n,i} P_i(x),$$

y aplicando que $\mathcal{L}[P_n] = 0$ se deduce que $\mathcal{L}[x^k P_n] = 0$ para todo $k = 1, \dots, n-1$. Comprobemos qué ocurre cuando $k = n$. De nuevo, por (1.15):

$$\mathcal{L}[x^n P_n] = \mathcal{L}[x^{n-1}(P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1})] = \mathcal{L}[\gamma_n x^{n-1} P_{n-1}] = \gamma_n \mathcal{L}[x^{n-1} P_{n-1}].$$

Aplicando este razonamiento sucesivamente llegamos a que

$$\mathcal{L}[x^n P_n] = \gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.19)$$

Por tanto, el funcional es cuasi-definido y $\{P_n\}$ es su SPOM si, y solo si $\gamma_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Por último, véamos que \mathcal{L} es definido positivo si y solo si $\gamma_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$. Sea $\pi(x)$ un polinomio y m su grado. Podemos entonces escribir $\pi(x) = \sum_{i=1}^m c_i P_i(x)$. De esta forma

$$\mathcal{L}[\pi^2(x)] = \mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^m c_i^2 P_i^2(x)\right] = \sum_{i=1}^m c_i^2 \mathcal{L}[P_i^2(x)],$$

donde hemos utilizado la ortogonalidad de $\{P_n\}$. Por tanto, la condición $\mathcal{L}[\pi^2(x)] > 0$ es equivalente a $\mathcal{L}[P_n^2(x)] > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$. Aplicando de nuevo la ortogonalidad de la sucesión, tenemos que

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \mathcal{L}[P_n \cdot P_n] = \mathcal{L}[x^n P_n],$$

que por (1.19) es positivo si y solo si $\gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_0 > 0$, que es equivalente a que $\gamma_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$. \square

Observación 1.3. Nótese que el teorema de Favard está descrito partiendo de una sucesión de polinomios ortogonales *mónicos*. Sin embargo, una vez es calculado el funcional, se puede utilizar cualquier otra estandarización sin cambiar el funcional.

Si partimos de una sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}$ y dos sucesiones de números reales $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ verificando las condiciones del teorema de Favard, entonces existe un funcional \mathcal{L} para el cual $\{P_n\}$ es una SPOM. Si $\{Q_n\} = \{c_n P_n\}$ es otra SPO para \mathcal{L} , podemos sustituir $P_n = \frac{1}{c_n} Q_n$ en (1.17) para obtener la relación

$$x Q_n(x) = \frac{c_n}{c_{n+1}} Q_{n+1} + \beta_n Q_n + \frac{\gamma_n}{c_{n-1}} Q_{n-1}.$$

1.7. Propiedades de los ceros

Los ceros o raíces de los polinomios ortogonales tienen propiedades y comportamientos que guardan cierta regularidad cuando el funcional que los define es definido positivo. En esta sección conoceremos estas peculiaridades de los ceros. Comencemos con una definición que refina en cierto modo la definición de funcional definido positivo.

Definición 1.9 (Funcional definido positivo en un conjunto). Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que un funcional \mathcal{L} es **definido positivo en E** si $\mathcal{L}[\pi] > 0$ para cualquier polinomio $\pi(x)$ real, no negativo y no idénticamente nulo en E . En este contexto, se dice que E es un **soporte** de \mathcal{L} .

Por ejemplo, el funcional de momentos (1.8) de los polinomios de Tchebichef de tipo I es definido positivo en $(-1, 1)$, el de los polinomios de Charlier definido en el ejemplo 2 lo es en \mathbb{N} y el de los polinomios de Hermite en \mathbb{R} . Respecto a este último caso, es claro que ser ‘definido positivo en \mathbb{R} ’ equivale a ser ‘definido positivo’ según la definición 1.8.

A partir de este concepto y los siguientes teoremas podremos conocer la dinámica que siguen los ceros de los polinomios ortogonales. En adelante, \mathcal{L} es un funcional definido positivo y $\{P_n(x)\}$ su correspondiente SPO.

Teorema 1.9. *Sea I un intervalo que es un soporte de \mathcal{L} . Entonces los ceros de P_n ($n \geq 1$) son todos simples, reales y se encuentran en el interior de I (denotado en adelante como $\overset{\circ}{I}$).*

Demostración. Supongamos que $P_0 = 1$, entonces $\mathcal{L}[P_n] = \mathcal{L}[P_0 P_n] = 0$, $n \geq 1$. Por tanto, P_n tiene que cambiar de signo al menos una vez en $\overset{\circ}{I}$. Esto es, P_n tiene al menos un cero con multiplicidad impar en $\overset{\circ}{I}$. Sean $x_1, \dots, x_k \in \overset{\circ}{I}$ los ceros de multiplicidad impar de P_n que están en $\overset{\circ}{I}$. Consideramos entonces el polinomio

$$q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k).$$

Entonces $q(x)P_n(x)$ es un polinomio que no tiene ceros de multiplicidad impar en $\overset{\circ}{I}$, por lo que $q(x)P_n(x) \geq 0 \ \forall x \in I$. Por tanto, $\mathcal{L}[q(x)P_n(x)] > 0$, pero esto contradice el teorema 1.1 salvo que $k = n$, luego necesariamente $P_n(x)$ tiene n ceros simples en $\overset{\circ}{I}$. \square

A partir de este teorema, podemos denotar los ceros del polinomio $P_n(x)$ como

$$x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{nn}, \quad n \geq 1.$$

Observación 1.4. Si tomamos P_n con coeficiente líder positivo, entonces tenemos que

1. $P_n(x) > 0 \ \forall x > x_{nn}$ y
2. $\text{sgn} P_n(x) = (-1)^n \ \forall x < x_{n1}$.

Observación 1.5. P'_n tiene exactamente un cero en cada intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$, por lo que $P'_n(x_{nk})$ alterna su signo con $k = 1, \dots, n$. Como el signo de $P'_n(x)$ también es positivo, concluimos que

$$\text{sgn} P'_n(x_{nk}) = (-1)^{n-k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.20)$$

Estas dos observaciones relacionan en cierto modo los ceros de P_n con el comportamiento de P'_n . El siguiente lema relaciona directamente la SPO $\{P_n\}$ con la sucesión de las derivadas de los polinomios ortogonales $\{P'_n\}$.

Lema 1.2. Si \mathcal{L} es un funcional definido positivo y $\{P_n\}$ es su SPO, entonces se verifica la desigualdad

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$

Esta desigualdad es una consecuencia de la conocida *Identidad de Christoffel-Darboux* (véase [Chi11, Theorem 4.5]), y nos será de gran utilidad para probar el siguiente teorema.

Teorema 1.10 (Serparación de los ceros). *Los ceros de P_n y de P_{n+1} están mutuamente separados. Es decir,*

$$x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Demostración. A partir de la desigualdad (1.21) obtenemos que $P'_{n+1}(x)P_n(x) > 0$, y si evaluamos en $x = x_{n+1,k}$ se tiene que

$$P'_{n+1}(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0, \quad k = 1, \dots, n+1$$

Si aplicamos (1.20), tenemos que $\text{sgn}P'_{n+1}(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$, por lo que para que se cumpla la desigualdad necesariamente $\text{sgn}P_n(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$. Esto es, $P_n(x)$ tiene que cambiar de signo un número de impar de veces en el intervalo $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$, y como esto ocurre para todo k , necesariamente P_n tiene un único cero en cada uno de los n intervalos $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$, $k = 1, \dots, n$. \square

Este teorema tiene una consecuencia inmediata

Corolario 1.11. *Para cada $k \geq 1$, la sucesión $\{x_{nk}\}$ es estrictamente decreciente y la sucesión $\{x_{n,n-k+1}\}$ es estrictamente creciente.*

De hecho, los límites

$$\xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}, \quad \eta_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n-k+1}$$

existen para todo $k = 1, \dots, n$, pudiendo tomar los valores $\pm\infty$.

Estos límites nos llevan a la siguiente definición

Definición 1.10 (Verdadero Intervalo de Ortogonalidad). El intervalo cerrado $[\xi_1, \eta_1]$ es conocido como el **Verdadero Intervalo de Ortogonalidad** de la SPO asociada al funcional \mathcal{L} .

Este intervalo recién presentado es el intervalo cerrado más pequeño que contiene todos los ceros de todos los polinomios de la SPO $\{P_n\}$. Es posible probar que el conjunto de todos los ceros de todos los P_n , llamémoslo I , es un soporte de \mathcal{L} , por lo que el verdadero intervalo de ortogonalidad es además el intervalo cerrado más pequeño que es un soporte de \mathcal{L} .

En muchos casos se presenta una familia de polinomios ortogonales mediante un funcional y un intervalo (a, b) en el cual se verifica la ortogonalidad. El conjunto I de

todos los ceros es un conjunto denso en (a, b) , de forma que su adherencia, $[\xi_1, \eta_1]$, coincide con el intervalo de ortogonalidad.

Sin embargo, recordemos que mediante el teorema de Favard también podemos obtener funcionales definidos positivos a partir de una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ y sucesiones de números reales $\{\beta_n\}, \{\gamma\}$ verificando ciertas condiciones. Dicho funcional no especifica el intervalo de ortogonalidad, el cual se puede obtener entonces mediante los ceros de los polinomios $\{P_n\}$.

TODO Demostraciones de todo y preguntar si esto está bien o entendí seriamente mal

Ejemplo 4. Como ejemplo, véamos los ceros de los polinomios de Tchebichef de tipo I, que están todos situados en el intervalo $[-1, 1]$. En la imagen 1.1 hemos representado³ gráficamente los polinomios de Tchebichef para $n = 2, 3, 4, 5$, asignando los colores rojo, verde, azul y negro respectivamente, señalando los ceros de cada polinomio con su color correspondiente.

Obsérvese que en efecto estos ceros están entrelazados, de forma que un cero rojo está entre dos ceros verdes; uno verde entre dos azules y uno azul entre dos negros.

Además, el primer cero de cada polinomio es cada vez menor, de forma que el primer cero negro es el más pequeño. Análogamente, el último cero es cada vez mayor, siendo el negro el más pequeño de todos. Este hecho ejemplifica el corolario 1.11 con $k = 1$.



Imagen 1.1: Polinomios de Tchebichef de tipo I y sus ceros

Los ceros de los polinomios ortogonales tienen un papel importante, por ejemplo, en fórmulas de integración numérica, ya que tomar los nodos en los ceros de los polinomios ortogonales reduce considerablemente el error en la integración. Una aplicación bastante directa podrían ser las fórmulas de cuadratura gaussiana (véase [Chi11, Ch. I, Sección 6]). También serán relevantes en los próximos capítulos al jugar ξ_1 un papel importante en el soporte de la medida. Incluso tienen una interpretación en el campo del equilibrio electrostático (véase [Ste18]).

³En el archivo `software/ceros.ipynb`, también disponible en la URL <https://github.com/JAntonioVR/Polinomios-Ortogonales/blob/main/software/ceros.ipynb>, puede encontrarse el código con el cual se han generado las imágenes, pudiendo ser ejecutado o incluso modificado para visualizar las gráficas con grados superiores a 5 u otras familias de polinomios.

CAPÍTULO 2

POLINOMIOS ORTOGONALES CLÁSICOS

En el capítulo 1 hemos mostrado una amplia introducción a la ortogonalidad y presentado ejemplos concretos de polinomios ortogonales. En este capítulo presentaremos las familias concretas de polinomios ortogonales más importantes: los *polinomios ortogonales clásicos*. Estos son los polinomios de Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel. Estas familias presentan la peculiaridad de ser las únicas que verifican ciertas propiedades, entre las que destaca la *ecuación diferencial de Pearson*. Estos polinomios, entre otras disciplinas pueden ser encontrados en problemas de Sturm-Liouville cuando se utilizan ecuaciones diferenciales hipergeométricas.

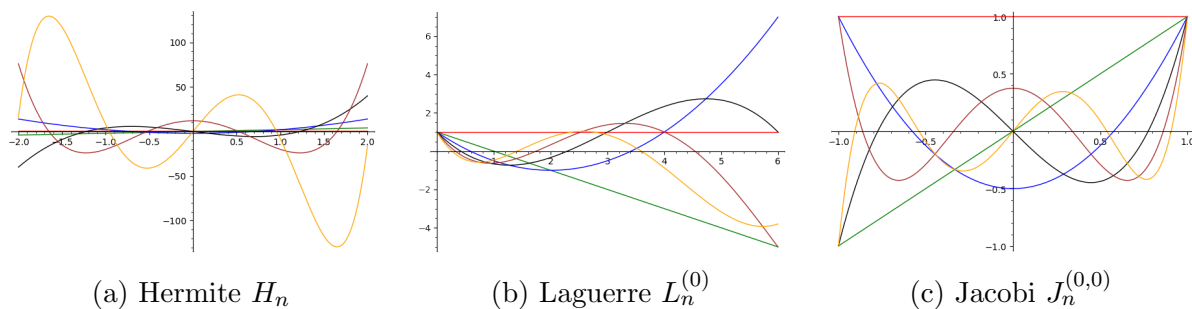


Imagen 2.1: Polinomios Ortogonales Clásicos

En las imágenes 2.1 podemos ver la representación gráfica, para parámetros concretos que definiremos próximamente, de los polinomios ortogonales de Hermite, Laguerre y Jacobi. Estas tres son las familias que mayor atención recibirán de nuestra parte al ser aquellas cuya ortogonalidad se manifiesta en intervalos reales.

2.1. La ecuación de Pearson

Para empezar, introduciremos una nueva notación para los funcionales de momentos que también se suele utilizar. Sea \mathbf{u} un funcional de momentos y $\{\mu_n\}$ su sucesión de

momentos, entonces denotamos

$$\begin{aligned}\mathbf{u} : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x^n &\longmapsto \langle \mathbf{u}, x^n \rangle = \mu_n\end{aligned}\tag{2.1}$$

A lo largo de este capítulo denotaremos como $\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle$ a la aplicación del funcional \mathbf{u} a un polinomio $\pi(x)$.

Definimos a continuación dos operadores que actúan sobre los funcionales.

Definición 2.1 (Producto por un polinomio). Para cada polinomio π , definimos un nuevo funcional de momentos a partir de \mathbf{u} como

$$\begin{aligned}\pi \mathbf{u} : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle \pi \mathbf{u}, \phi \rangle = \langle \mathbf{u}, \pi \phi \rangle\end{aligned}\tag{2.2}$$

Definición 2.2 (Derivada). Definimos el funcional derivada como

$$\begin{aligned}D(\mathbf{u}) : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle D(\mathbf{u}), \phi \rangle = -\langle \mathbf{u}, \phi' \rangle\end{aligned}\tag{2.3}$$

A partir de estos dos operadores y esta nueva notación daremos una primera definición de lo que es una SPO clásica.

Definición 2.3 (SPO Clásica). La SPO $\{P_n\}$ para el funcional \mathbf{u} se dice que es **clásica** (Hermite, Laguerre, Jacobi o Bessel) si existen polinomios $\sigma(x), \tau(x)$ con $\deg(\sigma) \leq 2$ y $\deg(\tau) = 1$ tales que el funcional \mathbf{u} verifica la ecuación diferencial

$$D(\sigma \mathbf{u}) = \tau \mathbf{u}\tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) es conocida como la **ecuación de Pearson**.

En el caso de que la SPO sea ortogonal respecto a una función peso ρ , esto es, \mathbf{u} es de la forma

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_a^b \pi(x) \rho(x) dx,\tag{2.5}$$

donde (a, b) es cierto intervalo de la recta real donde $\rho > 0$, podemos deducir una condición equivalente.

Lema 2.1. Sean $\rho(x)$ una función peso positiva en el intervalo (a, b) , \mathbf{u} el funcional definido como en (2.5) y $\{P_n\}$ la SPO respecto a \mathbf{u} . Si la función peso $\rho(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x)\tag{2.6}$$

y además verifica las condiciones de frontera

$$\lim_{x \rightarrow a} \sigma(x)\rho(x)x^n = \lim_{x \rightarrow b} \sigma(x)\rho(x)x^n, \quad n \geq 0,\tag{2.7}$$

entonces la SPO $\{P_n\}$ es clásica, *i.e.* \mathbf{u} verifica la ecuación de Pearson (2.4).

Demostración. Queremos comprobar la igualdad de funcionales $D(\sigma \mathbf{u}) = \tau \mathbf{u}$. Para ello, tengamos en cuenta que dos funcionales lineales son iguales si, y solo si actúan igual sobre una base de \mathbb{P} . Escogemos la base $\{x^n\}_{n \geq 0}$. Entonces tenemos que

$$\langle D(\sigma \mathbf{u}), x^n \rangle = -\langle \sigma \mathbf{u}, nx^{n-1} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \sigma(x)nx^{n-1} \rangle,$$

aplicando (2.5) e integración por partes, llegamos a

$$\begin{aligned} \langle D(\sigma \mathbf{u}), x^n \rangle &= -\int_a^b \sigma(x)nx^{n-1}\rho(x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sigma(x)\rho(x) & du = [\sigma(x)\rho(x)]'dx \\ dv = nx^{n-1}dx & v = x^n \end{array} \right\} \\ &= -\underbrace{[\sigma(x)\rho(x)x^n]_a^b}_{=0 \text{ por (2.7)}} + \int_a^b x^n[\sigma(x)\rho(x)]'dx \quad (\text{aplicando (2.6)}) \\ &= \int_a^b x^n\tau(x)\rho(x)dx = \langle \mathbf{u}, \tau(x)x^n \rangle = \langle \tau \mathbf{u}, x^n \rangle \end{aligned}$$

□

[REVIEW El recíproco tiene que ser cierto, pero no tengo la demostración](#)

2.2. Deducción de las familias de polinomios ortogonales clásicos

A partir del lema 2.1 podremos obtener las principales familias de polinomios ortogonales. Hemos impuesto que $\tau(x) = Ax + B$ sea un polinomio de grado exactamente 1, por lo que tenemos cuatro grados de libertad a partir de las posibilidades de $\sigma(x)$, que supondremos mónico:

1. **Caso I:** $\sigma(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. En este caso obtendremos los llamados polinomios de Hermite.
2. **Caso II:** $\sigma(x) = x - a$, $x \in [a, \infty)$. Haciendo el cambio de variable lineal $t = -(x - a)/A$ se tiene $\sigma(x) = x$ y $\tau(x) = -x + B$, $x \in [0, \infty)$. Con estos valores calcularemos los polinomios de Laguerre.
3. **Caso III:** $\sigma(x) = (x - a)(b - x)$, $x \in [a, b]$. Con el cambio de variable $x = (b - a)/2t + (a + b)/2$ podemos escribir $\sigma(x) = 1 - x^2$ y $\tau = Ax + B$, $x \in [-1, 1]$. Y así deduciremos los polinomios de Jacobi.
4. **Caso IV:** $\sigma(x) = (x - a)^2$. En este último caso se obtienen los polinomios de Bessel.

De acuerdo al lema 2.1, si resolvemos la ecuación diferencial (2.6) asegurándonos de que las soluciones calculadas verifiquen las condiciones de frontera (2.7), habremos hallado las funciones peso $\rho(x)$ para las cuales el funcional (2.5) genera una SPO clásica. Veremos seguidamente los casos I, II y III, obviando los polinomios de Bessel.

2.2.1. Caso I: Polinomios de Hermite

Supongamos que $\sigma(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. El caso puede ser reducido a $\tau(x) = -2x$. Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$\rho'(x) = -2x\rho(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación es de variables separadas, por lo que podemos tomar

$$\int \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} dx = \int -2x dx \Leftrightarrow \log(\rho(x)) = -x^2 + \log(C) \Leftrightarrow \rho(x) = Ce^{-x^2} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tomamos $C = 1$ y llegamos a

$$\sigma(x) = 1, \quad \tau(x) = -2x, \quad \rho(x) = e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Sobre las condiciones de frontera, tenemos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Por tanto, la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al funcional

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x) e^{-x^2} dx \quad (2.9)$$

es clásica, y sus elementos son los **polinomios de Hermite**.

2.2.2. Caso II: Polinomios de Laguerre

Supongamos que $\sigma(x) = x$ y $\tau(x) = -x + B$ con $x \in [0, +\infty)$. La ecuación (2.6) queda entonces como

$$(x\rho(x))' = (-x + B)\rho(x),$$

que si derivamos el primer producto y agrupamos equivale a $x\rho'(x) = (B - x - 1)\rho(x)$, que es de nuevo una ecuación de variables separadas, de manera que

$$\int \frac{\rho'(x)}{\rho(x)} dx = \int \frac{B - x - 1}{x} dx \Leftrightarrow \log(\rho(x)) = B \log(x) - x - \log(x) + \log(C) \Leftrightarrow$$

$$\rho(x) = Ce^{-x} x^{B-1} \neq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

Tomamos $C = 1$ y definimos $\alpha = B - 1$, de forma que

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = -x + \alpha + 1, \quad \rho(x) = x^\alpha e^{-x} \quad \forall x \in [0, +\infty), \quad \alpha > -1. \quad (2.10)$$

La condición $\alpha > -1$ nos asegura que los momentos del funcional serán finitos, es decir, $\mu_n = \int_0^\infty x^n x^\alpha e^{-x} dx < \infty \quad \forall n \geq 0$.

En este caso, las condiciones de frontera también se cumplen, pues $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot x^\alpha e^{-x} \cdot x^n = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot x^\alpha \cdot e^{-x} x^n = 0$. Así, la SPO con respecto al funcional

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_0^\infty \pi(x) x^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha > -1 \quad (2.11)$$

es clásica, y sus elementos son los **polinomios de Laguerre**.

2.2.3. Caso III: Polinomios de Jacobi

Por último, consideremos $\sigma(x) = 1 - x^2$ y $\tau(x) = Ax + B$ con $x \in [-1, 1]$. Aplicado a la ecuación (2.6) tenemos

$$((1 - x^2)\rho(x))' = (Ax + B)\rho(x),$$

Derivando el primer miembro y agrupando obtenemos a $(1 - x^2)\rho'(x) = (Ax + B + 2x)\rho(x)$. Si dividimos y multiplicamos el segundo miembro por $\sigma(x)$ y dividimos la ecuación por $\sigma(x)\rho(x)$ obtenemos la ecuación

$$\frac{\sigma(x)\rho'(x)}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{Ax + B}{1 - x^2}.$$

Resolveremos esta ecuación en la que $(\sigma\rho)$ es la incógnita. Una vez resuelta podremos deducir la solución de (2.6).

$$\begin{aligned} \int \frac{\sigma(x)\rho'(x)}{\sigma(x)\rho(x)} dx &= \int \frac{Ax + B}{1 - x^2} dx \Leftrightarrow \\ \log(\sigma(x)\rho(x)) &= -\frac{A+B}{2} \log(1-x) - \frac{A-B}{2} \log(1+x) + \log(C) \Leftrightarrow \\ \sigma(x)\rho(x) &= C(1-x)^{-\frac{A+B}{2}}(1+x)^{-\frac{A-B}{2}} \Leftrightarrow \\ \rho(x) &= C(1-x)^{-\frac{A+B}{2}-1}(1+x)^{-\frac{A-B}{2}-1} \neq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Tomamos $C = 1$ y definimos $\alpha = -\frac{A+B}{2} - 1$ y $\beta = -\frac{A-B}{2} - 1$, obteniendo

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 - x^2, & \tau(x) &= -(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - \alpha), \\ \rho(x) &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \alpha, \beta > -1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Al igual que en el caso anterior, las condiciones $\alpha, \beta > -1$ nos aseguran que los momentos del funcional serán finitos, es decir, $\mu_n = \int_{-1}^1 x^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx < \infty$ $\forall n \geq 0$.

Las condiciones de frontera se verifican nuevamente, pues

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} (1 - x^2) \cdot (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta \cdot x^n = 0.$$

Así, la SPO con respecto al funcional

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_{-1}^1 \pi(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > -1 \tag{2.13}$$

es clásica, y sus elementos son los **polinomios de Jacobi**.

CAPÍTULO 3

POLINOMIOS ORTOGONALES Y PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

Ejemplo 5 (Procesos de nacimiento y muerte lineales). Sea el proceso de nacimiento y muerte dado por los parámetros

$$\lambda_n = (n + \beta)\kappa \qquad \mu_n = n\kappa,$$

donde $\beta, \kappa > 0$. Comprobaremos que los polinomios asociados a este proceso guardan una estrecha relación con los polinomios de Laguerre (TODO referencia a Laguerre).

Con estos parámetros, los polinomios de nacimiento y muerte $Q_n(x)$ siguen la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} -xQ_n(x) &= \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x) \Leftrightarrow \\ -xQ_n(x) &= (n + \beta)\kappa Q_{n+1}(x) - (2n + \beta)\kappa Q_n(x) + n\kappa Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Si dividimos la ecuación entre κ , obtenemos

$$-\frac{x}{\kappa}Q_n(x) = (n + \beta)Q_{n+1}(x) - (2n + \beta)Q_n(x) + nQ_{n-1}(x) \quad (3.1)$$

Recordemos que los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ obedecen a una relación de recurrencia a tres términos dada por

$$-xL_n^\alpha = (n + 1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n + \alpha + 1)L_n^\alpha(x) + (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \quad (3.2)$$

con $\alpha > -1$. Tomamos entonces

$$Q_n(x) = \frac{n!}{(\beta)_n} L_n^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right), \quad (3.3)$$

Si tomamos $\alpha = \beta - 1$, evaluamos (3.2) en x/κ y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $\frac{n!}{(\beta)_n}$, podemos aplicar las siguientes igualdades en los términos en $n + 1$ y en $n - 1$:

$$(n + 1) \left[\frac{n!}{(\beta)_n} \right] L_{n+1}^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) = (n + \beta) \frac{(n + 1)!}{(\beta)_{n+1}} L_{n+1}^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) = (n + \beta) Q_{n+1}(x),$$

y

$$(\beta + n - 1) \left[\frac{n!}{(\beta)_n} \right] L_{n-1}^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) = n \frac{(n-1)!}{(\beta)_{n-1}} L_{n-1}^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) = n Q_{n-1}(x).$$

Aplicando estas igualdades, tenemos que (3.2) es equivalente a (3.1).

Por tanto, los polinomios asociados al proceso de nacimiento y muerte de este ejemplo son los presentados en (3.3). Por tanto, $Q_i(x)$ son ortogonales en $[0, +\infty)$ con respecto a la función peso

$$\rho(x) = ce^{-x/\kappa} x^{\beta-1},$$

donde c es una constante de estandarización.

Por tanto, podemos calcular las probabilidades de transición aplicando la ecuación (TODO referencia) y teniendo en cuenta que

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} = \frac{\beta(\beta+1) \cdots (\beta+i-1)}{i!} = \frac{(\beta)_i}{i!}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P[X_t = j / X_0 = i] \\ &= \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) \rho(x) dx \\ &= c \frac{(\beta)_j}{j!} \int_0^\infty e^{-xt} \left[\frac{i!}{(\beta)_i} L_i^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) \right] \left[\frac{j!}{(\beta)_j} L_j^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) \right] e^{-\frac{x}{\kappa}} x^{\beta-1} dx \\ &= c \frac{(\beta)_i}{i!} \int_0^\infty e^{-x(t+\frac{1}{\kappa})} x^{\beta-1} L_i^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) L_j^{\beta-1} \left(\frac{x}{\kappa} \right) dx. \end{aligned}$$

CONCLUSIONES

Las conclusiones

- [Alv03] Renato Alvarez Nodarse. *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios (Monografías del Seminario matematico)*. Ene. de 2003.
- [AS64] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. New York: Dover, 1964.
- [Chi11] Theodore Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Dover Publications, feb. de 2011.
- [DX14] Charles Dunkl y Yuan Xu. *Orthogonal Polynomials of Several Variables: 155*. 2nd Revised ed. Cambridge University Press, ago. de 2014.
- [KM58] Samuel Karlin y James McGregor. “Linear Growth, Birth and Death Processes”. En: *Journal of Mathematics and Mechanics* 7.4 (1958), págs. 643-662. ISSN: 00959057, 19435274. URL: <http://www.jstor.org/stable/24900526> (visitado 03-03-2023).
- [Kul12] V. Kulkarni. *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. New York, Estados Unidos: Springer Publishing, 2012.
- [MBP94] F. Marcellán, A. Branquinho y J Petronilho. “Classical orthogonal polynomials: A functional approach”. En: *Acta Applicandae Mathematica* 34 (1994), págs. 283-303. DOI: [10.1007/BF00998681](https://doi.org/10.1007/BF00998681). URL: <https://doi.org/10.1007/BF00998681>.
- [Sch00] Wim Schoutens. *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*. New York, Estados Unidos: Springer Publishing, 2000.
- [Ste18] Stefan Steinerberger. *Electrostatic Interpretation of Zeros of Orthogonal Polynomials*. 2018. DOI: [10.48550/ARXIV.1804.09697](https://arxiv.org/abs/1804.09697). URL: <https://arxiv.org/abs/1804.09697> (visitado 07-03-2023).
- [Tea23a] The Sage Development Team. *2D Graphics. Release 9.8*. 2023. URL: <https://doc.sagemath.org/pdf/en/reference/plotting/plotting.pdf> (visitado 07-03-2023).
- [Tea23b] The Sage Development Team. *Orthogonal polynomials - Functions*. 2023. URL: https://doc.sagemath.org/html/en/reference/functions/sage/functions/orthogonal_polys.html (visitado 07-03-2023).

APÉNDICE A

APÉNDICE 1

Un apéndice