UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Trabajo Fin de Máster

Máster en Matemáticas

Polinomios Ortogonales

Autor
Juan Antonio Villegas Recio

Tutoras: Lidia Fernández Rodríguez
Departamento de Matemática Aplicada

Antonia María Delgado Amaro
Departamento de Matemática Aplicada

19 de marzo de 2023

AGRADECIMIENTOS

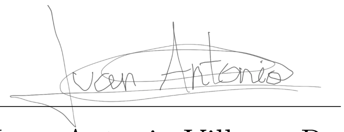
Ya veremos a quién hay que agradecerle qué.

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

Yo, D. Juan Antonio Villegas Recio, autor de este TFM,

Declaro explícitamente que el trabajo aquí presentado como Trabajo de Fin de Máster de mis estudios en el Máster Interuniversitario en Matemáticas, correspondiente al curso académico 2022–2023, es original. Es decir, no se han utilizado para el desarrollo del trabajo fuentes sin haberlas citado debidamente.

Granada, a 19 de marzo de 2023.



Juan Antonio Villegas Recio

RESUMEN

El resumen

Palabras clave

Las, palabras, clave.

ABSTRACT

The abstract

Keywords

The, abstract.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE ABREVIATURAS

- PO: Polinomios Ortogonales

LISTA DE IMÁGENES

INTRODUCCIÓN

La introducción

OBJETIVOS

Los objetivos

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

1.1. Introducción

La *Ortogonalidad* es una propiedad que a menudo se ha relacionado con la geometría, siendo común pensar en la analogía con la *perpendicularidad*. Por ejemplo, es claro que en el plano vectorial $\mathbb{R}^2$ se tiene que los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ son ortogonales, y es que estos forman un ángulo recto, y por ello también se dice que son perpendiculares. Sin embargo, este hecho no es más que una consecuencia de la ortogonalidad, y es que en el espacio vectorial $\mathbb{R}^d$, y en particular en $\mathbb{R}^2$, dos vectores se dicen ortogonales si, al dotar a $\mathbb{R}^d$ de un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, el resultado de operar estos dos vectores es 0.

El producto escalar mayormente utilizado en $\mathbb{R}^d$ es el usual, el cual, si $u = (u_1, \ldots, u_d)$ y $v = (v_1, \ldots, v_d)$ se define como

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (u,v) &\longmapsto \langle u,v\rangle = u \cdot v^t = \sum_{i=1}^{d} u_i \cdot v_i.\end{aligned}$$

Y dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^d$ se dicen ortogonales siempre que $\langle u,v\rangle = 0$.

Sin embargo, en realidad la ortogonalidad va mucho más allá de $\mathbb{R}^d$ y del producto escalar usual. Se puede utilizar cualquier espacio vectorial siempre que esté dotado de un producto escalar. En particular, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ pensemos en el espacio de Lebesgue $L^1(\Omega)$, el cual está dotado del producto vectorial

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : L^1 \times L^1 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (f,g) &\longmapsto \langle f,g\rangle = \int_\Omega f(x)\cdot g(x)dx.\end{aligned}$$

Por ejemplo, si tomamos $\Omega = [0,\pi]$, tenemos que las funciones $\cos(n\theta), \cos(m\theta)$ $(n, m \in \mathbb{N}_0)$ son ortogonales siempre que $n \neq m$, pues

$$\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = 0 \quad (n \neq m). \tag{1.1}$$

Si hacemos el cambio de variable $x = \cos(\theta)$, tenemos que $dx = -\sin(\theta)d\theta = \sin(-\theta)d\theta$, por lo que aplicando que $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) = 1$ y que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, tenemos que la ecuación (1.1) se expresa como

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0 \quad (n \neq m). \tag{1.2}$$

donde hemos denotado $T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(n \operatorname{arc}\cos(\theta))$ con $-1 \leq x \leq 1$.

Y tenemos que $T_0 = 1, T_1 = \cos(\theta) = x$, y aplicando identidades trigonométricas se puede deducir que $T_2 = 2x^2 - 1$, $T_3 = 4x^3 - 3x$, etc.

Por lo tanto, si definimos en $\mathbb{P}[x]$ el producto escalar

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P}[x] \times \mathbb{P}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\rho(x)dx, \end{aligned}$$

con $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, tenemos que las funciones (polinomios) $T_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ son ortogonales entre sí en el espacio $(\mathbb{P}[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ siempre que $n \neq m$.

De acuerdo a este ejemplo, decimos que los polinomios T_n son *ortogonales*, o que la sucesión $\{T_n\}$ es una *Sucesión de Polinomios Ortogonales* con respecto a la *función peso* $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en el intervalo $(-1, 1)$. Los polinomios T_n recién presentados son los *Polinomios de Tchebichef de tipo I*, y conforman nuestra primera familia de polinomios ortogonales conocida.

1.2. Ortogonalidad y función peso

En la sección 1.1 pudimos ampliar el concepto generalmente conocido de ortogonalidad, restringido a espacios como $\mathbb{R}^d$, a otros tipos de espacios. Además, introdujimos la primera familia de polinomios ortogonales: los polinomios de Tchebichef de tipo I. En esta sección daremos definiciones más formales y genéricas sobre la ortogonalidad.

Sea μ una función no decreciente y no constante definida en un intervalo (a, b) tal que si $a = -\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} \mu(x) > -\infty$ y si $b = \infty$ entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \mu(x) < \infty$. Se define el espacio de funciones $L^p_\mu[a, b]$ como el conjunto de funciones tales que

$$\int_a^b |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$$

En $L^2_\mu[a, b]$, se define un producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^2_\mu[a, b] \times L^2_\mu[a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\mu(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

A partir del espacio $L^2_\mu[a, b]$ podemos dar una definición de ortogonalidad.

Definición 1.1 (Ortogonalidad)**.** Fijada una función μ no decreciente y no constante definida en un intervalo (a,b) tal que si $a=-\infty$ entonces $\lim_{x\to-\infty}\mu(x)>-\infty$ y si $b=\infty$ entonces $\lim_{x\to\infty}\mu(x)<\infty$ y dadas $f,g\in L^2_\mu[a,b]$, se dice que las funciones **f y g son ortogonales** o que **f es ortogonal a g** respecto a la distribución $d\mu$ si

$$\langle f,g\rangle = 0. \tag{1.4}$$

No obstante, en la mayoría de los casos y por simplicidad en lugar de utilizar una función μ y su medida inducida, si μ es absolutamente continua podemos reescribir (1.3) como una integral de Lebesgue

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \tag{1.5}$$

siendo ρ una función medible no negativa tal que $0<\int_a^b \rho(x)dx<\infty$ denominada **función peso**.

Definición 1.2 (Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto a una función peso)**.** Dada una función peso ρ, si existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ con P_n de grado n tal que

$$\langle P_n,P_m\rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = 0 \qquad (n\neq m)$$

entonces decimos que $\{\mathbf{P_n}\}$ **es una Sucesión de Polinomios Ortogonales (SPO) respecto a la función peso** $\rho(x)$ en el intervalo (a,b).

1.3. Funcional de momentos

Tenemos ya por tanto una definición rigurosa de lo que es la ortogonalidad de funciones de $L^2_\mu[a,b]$. Podemos reescribir esta propiedad mediante el uso de funcionales lineales aprovechando la linealidad de la integral. Se define el funcional $\mathcal{L}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: L^2_\mu[a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)d\mu(x). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Por tanto, vemos que la propiedad de ortogonalidad (1.4) es equivalente a $\mathcal{L}[f\cdot g]=0$.

Observación 1.1. El funcional $\mathcal{L}$ es lineal, pues por la linealidad del operador integral se tiene que

$$\mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f]+b\mathcal{L}[g], \tag{1.7}$$

para cualesquiera $a,b\in\mathbb{C}$ y $f,g\in L^2_\mu[a,b]$.

Ejemplo 1. $\{T_n\}$, la sucesión de polinomios de Tchebichef de tipo I, es una Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto de la función peso $\rho(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en el intervalo $(-1,1)$. También podemos establecer la ortogonalidad de los respectivos $\{T_n\}$ no mediante un producto escalar sino a través del funcional

$$\mathcal{L}[f] := \int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx \tag{1.8}$$

Por lo que podemos definir ortogonalidad indistintamente mediante un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o mediante un funcional integral $\mathcal{L}$.

A partir de este momento consideraremos el espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{P}$. Denotaremos como $\mathbb{P}_n$ al subespacio de $\mathbb{P}$ formado por los polinomios de grado menor o igual que n.

Definición 1.3 (Momentos de un funcional)**.** Dado un funcional $\mathcal{L}$, definimos los **momentos** del funcional, y los denotamos con μ_n, como

$$\mu_n = \mathcal{L}[x^n], \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.9}$$

Gracias a los momentos de un funcional y considerando que cualquier polinomio de grado n puede escribirse como $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ podemos entonces combinar (1.7) y (1.9) para escribir la acción de un funcional $\mathcal{L}$ sobre $p(x)$ como

$$\mathcal{L}[p] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k$$

Por lo que, de esta forma, únicamente conociendo la sucesión de momentos $\{\mu_n\}$ podríamos conocer el resultado de aplicar $\mathcal{L}$ a cualquier polinomio. Por tanto, es posible dar una nueva definición de ortogonalidad respecto a funcionales lineales que en este caso estén definidos no mediante una integral como en el caso de (1.6), sino a partir de una sucesión de momentos $\{\mu_n\}$.

Definición 1.4 (Funcional de momentos)**.** Dada una sucesión de números complejos $\{\mu_n\}$, diremos que $\mathcal{L}$ es un **funcional de momentos** determinado por la sucesión $\{\mu_n\}$, donde μ_n se denomina **momento de orden n**, si $\mathcal{L}$ es lineal en $\mathbb{P}$ y $\mathcal{L}[x^n] = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}_0$

Daremos ahora una nueva definición de SPO, en este caso con respecto a un funcional lineal y no respecto a una función peso como hicimos en la definición 1.2.

Definición 1.5 (Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto a un funcional lineal)**.** Dado un funcional lineal $\mathcal{L}$ definido como en (1.6), una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ es una **Sucesión de Polinomios Ortogonales (SPO) respecto al funcional $\mathcal{L}$** si:

1. P_n es de grado n.
2. $\mathcal{L}[P_n P_m] = 0$ si $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.
3. $\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

La sucesión $\{P_n\}$ se llamará **ortonormal** si $\mathcal{L}[P_n^2] = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

La sucesión $\{P_n\}$ se llamará **Sucesión de Polinomios Ortogonales Mónicos (SPOM)** si P_n es mónico para cada n, es decir, si $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

En general, las condiciones (2) y (3) se suelen abreviar como

$$\mathcal{L}[P_n P_m] = K_n \delta_{mn}, \qquad K_n \neq 0,$$

donde δ_{mn} denota la función delta de Kronecker.

En el caso de que $d\mu(x) = \rho(x)dx$, es decir, en el caso de trabajar con funciones peso, la condición (3) se satisface de manera automática.

Ejemplo 2. Extraído de [Chi11, Capítulo 1, sección 1] Consideramos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

$\{P_n\}$ son los llamados *Polinomios de Charlier*. Como

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!} x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

tenemos que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. En [Chi11] pueden encontrarse los cálculos rigurosos mediante los cuales, si definimos

$$\mathcal{L}[x^n] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

y extendemos $\mathcal{L}$ a $\mathbb{P}$ por linealidad, tenemos que

$$\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}, \qquad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Al estar definido el funcional mediante sumatorias y no mediante integrales podría parecer que, aunque $\{P_n\}$ satisfaga la definición 1.5 mediante un funcional de momentos, no satisface la ortogonalidad respecto a (1.6). Sin embargo, si denotamos como ϕ a una función escalonada que es constante en cada intervalo $(-\infty, 0)$ y $(k, k+1)$ con $k \in \mathbb{N}_0$ y tiene saltos de magnitud $\frac{a^k}{k!}$ en cada k, entonces utilizando la integral de Riemann-Stieltjes los polinomios $\{P_n\}$ verifican

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x)P_n(x)d\phi(x) = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}, \qquad m, n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.10}$$

Evidentemente ϕ no es una función absolutamente continua, por lo que no se puede escribir (1.10) en términos de (1.5).

Observación 1.2. No cualquier sucesión $\{\mu_n\}$ da lugar a una SPO. Por ejemplo, si $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, tendríamos que

$$P_0(x) = a \neq 0, \qquad\qquad P_1(x) = bx + c, \quad b \neq 0.$$

Por la propiedad (2) de la definición 1.5

$$\mathcal{L}[P_0(x)P_1(x)] = a(b\mu_1 + c\mu_0) = a(b + c),$$

luego $b = -c$, y en este caso

$$\mathcal{L}[P_1(x)^2] = b^2(\mu_2 - 2\mu_1 + \mu_0) = 0,$$

lo cual contradice la propiedad (3).

Gracias a la observación 1.2 sabemos que no es válida cualquier sucesión de momentos para encontrar una SPO, por lo que necesitamos además probar y dar condiciones para la existencia de la susodicha SPO.

Previamente, introduciremos un resultado para la caracterización de SPO respecto a un funcional $\mathcal{L}$.

Teorema 1.1. *Sea $\mathcal{L}$ un funcional de momentos y $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{P_n\}$ es una SPO respecto al funcional $\mathcal{L}$.*

2. *$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ para cualquier polinomio $\pi(x)$ de grado $m < n$ y $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$ si $\pi(x)$ tiene grado n.*

3. *$\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n\delta_{nm}$, con $K_n \neq 0$, $\quad m = 0, 1, \ldots, n$*

Demostración. Probaremos (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

- (1) $\Rightarrow$ (2)

  Supongamos que $\{P_n\}$ es una SPO respecto al funcional $\mathcal{L}$. Como P_k tiene grado k, entonces $\{P_0, \ldots, P_m\}$ forma una base de $\mathbb{P}_m$. Por lo que si $\pi(x)$ es un polinomio de grado m, existen constantes $c_1, \ldots, c_m$, con $c_m \neq 0$ tales que $\pi(x) = \sum_{i=0}^{m} c_k P_k(x)$. Como $\mathcal{L}$ es lineal,

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = \sum_{k=0}^{m} c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m < n \\ c_n\mathcal{L}[P_n^2(x)] & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) es trivial, basta con utilizar $\pi(x) = x^m$ y aplicar (2).

- (3) $\Rightarrow$ (1) también es trivial, pudiendo reconstruir $P_m(x)$ por linealidad.

□

En la prueba de este último teorema, hemos hecho uso de que mediante una SPO podemos obtener bases de $\mathbb{P}_n$. Sacaremos provecho de este hecho en el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal $\mathcal{L}$. Entonces, cualquier polinomio $\pi(x)$ de grado n se puede expresar en la base $\{P_0, \ldots, P_n\}$ de la forma*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x), \qquad \text{con } c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Demostración. Ya es claro que si $\pi(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$. Por tanto, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $P_m(x)$ y aplicando el funcional $\mathcal{L}$ se obtiene

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_m(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_m(x)] = c_m\mathcal{L}[P_m^2(x)],$$

donde hemos aplicado la ortogonalidad. De esta igualdad se deduce claramente la expresión de c_k.

□

Este resultado nos proporciona una consecuencia muy importante: la unicidad salvo constante multiplicativa de las SPO respecto a un funcional.

Corolario 1.3. *Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal $\mathcal{L}$. Entonces cada P_n está unívocamente determinado salvo constante multiplicativa no nula. Esto es, si $\{Q_n\}$ es otra SPO respecto a $\mathcal{L}$, entonces existen constantes $c_n \neq 0$ tales que*

$$Q_n(x) = c_n P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Utilizaremos el teorema 1.2 con $\pi(x) = Q_n(x)$, de modo que

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]} P_k(x)$$

Por el teorema 1.1, $\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)] = 0$ siempre que $k < n$ y $\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)] = r_n \neq 0$ si $k = n$, por lo que, tomando $c_n = \frac{r_n}{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}$, se tiene $Q_n(x) = c_n P_n(x)$, como queríamos probar. □

1.4. Estandarizaciones de las SPO

El corolario 1.3 nos afirma que si tenemos una SPO $\{P_n\}$ respecto a un funcional $\mathcal{L}$, entonces $\{c_n P_n\}$ también es una SPO para cualquier sucesión $\{c_n\}$ de constantes no nulas. Existen varias formas de estandarizar una SPO de forma que esta esté unívocamente determinada a partir de un funcional. En esta sección presentaremos algunas de las más comunes.

Una primera posibilidad es imponer el valor del coeficiente líder de cada polinomio de la sucesión. Por ejemplo, la estandarización más común de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$ consiste en obligar a que el término líder a_n verifique $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

En particular, podemos exigir que todos los polinomios que conforman la SPO sean mónicos. De esta forma, podemos afirmar que si tenemos una SPO $\{P_n\}$ para un funcional $\mathcal{L}$, entonces existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM) respecto a $\mathcal{L}$. De hecho, si denotamos como a_n al coeficiente líder de P_n, entonces los polinomios

$$\hat{P}_n = a_n^{-1} P_n$$

forman una SPOM respecto a $\mathcal{L}$.

Otra forma de estandarizar una SPO $\{P_n\}$ respecto a un funcional $\mathcal{L}$ es tomando los polinomios

$$p_n = (-1)^{\mathrm{sgn}(a_n)} \left(\mathcal{L}[P_n^2]\right)^{-1/2} P_n,$$

siempre que $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$ y donde $\mathrm{sgn}(a_n)$ denota el signo de a_n. Esta normalización no siempre es posible de aplicar, ya que no todos los funcionales lineales verifican $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$, aunque existe una clase de funcionales, los definidos positivos (ver definición 1.8), que aseguran esta condición.

Con esta operación conseguimos que $\mathcal{L}[p_n^2] = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, es decir, la sucesión $\{p_n\}$ es una SPO ortonormal. Por tanto, dada una SPO $\{P_n\}$ para un funcional $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}[P_n^2] > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, existe una única SPO ortonormal $\{p_n\}$ respecto a $\mathcal{L}$.

Por último, es común exigirle a cada polinomio P_n de la sucesión que verifique $P_n(x_0) = K_n$ para cierto $x_0 \in [a, b]$. Es decir, se exige un valor concreto al evaluar

P_n en un punto del intervalo $[a, b]$, que en ocasiones coincide con alguno de los extremos a, b cuando estos son finitos.

Por ejemplo, los polinomios de Tchebichef de tipo I, ortogonales en $(-1, 1)$ suelen ser presentados verificando $T_n(1) = 1$. Por su parte, los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, que también son ortogonales en $(-1, 1)$, se busca que verifiquen $P_n^{(\alpha,\beta)} = \binom{n+\alpha}{n}$.

En conclusión, no existe una única forma de estandarizar una SPO, sino que en realidad cada familia de polinomios ortogonales acepta una, o en ocasiones varias, estandarizaciones concretas dependiendo de la aplicación que se le dé y del contexto del problema.

1.5. Existencia de SPO

Recordemos que con anterioridad hemos comentado en la observación 1.2 que no cualquier sucesión de números complejos $\{\mu_n\}$ da lugar a una SPO. Es necesario por tanto exigir alguna condición sobre dicha sucesión si realmente queremos asegurar la existencia la correspondiente SPO.

Para ello, introducimos el siguiente concepto.

Definición 1.6 (Matriz de momentos)**.** Llamaremos **matriz de momentos** a la matriz $(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n$, y **determimante de momentos** a su determinante

$$\Delta_n = \det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

Este determinante está directamente relacionado con la existencia de una SPO.

Teorema 1.4. *Sea $\{\mu_n\}$ una sucesión de números complejos y sea $\mathcal{L}$ un funcional de momentos cuya sucesión de momentos es $\{\mu_n\}$. $\mathcal{L}$ admite una sucesión de polinomios ortogonales si, y solo si el determinante de momentos $\Delta_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Comprobamos la doble implicación.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que los polinomios $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk}x^k$ conforman una SPO para $\mathcal{L}$. Fijemos ahora $n \in \mathbb{N}_0$ arbitario. Por el teorema 1.1 (caracterización de una SPO), obsérvese que la condición de ortogonalidad

$$\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = \sum_{k=0}^n c_{nk}\mu_{k+m} = K_n\delta_{nm}, \quad K_n \neq 0, m \leq n \tag{1.12}$$

equivale al sistema

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Por tanto, si esta sucesión existe, necesariamente este sistema debe tener solución única determinada por K_n. Para ello ha de verificarse que $\Delta_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, supongamos ahora que $\Delta_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. En ese caso el sistema (1.13) tiene solución única para cualquier $K_n \neq 0$, por lo que podemos crear polinomios $P_n(x)$ que cumplan (1.12) para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. Por otro lado, aplicando la regla de Cramer, tenemos que

$$c_{nn} = \frac{K_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad n \geq 1, \tag{1.14}$$

expresión que también es válida para $n = 0$ sin más que tomar $\Delta_{-1} = 1$. Por tanto, el polinomio $P_n(x)$ tiene coeficiente líder no nulo, es decir, es de grado n, por lo que $\{P_n(x)\}$ es una SPO para $\mathcal{L}$.

□

Con esta notación, podemos ponerle nombre a aquellos funcionales para los cuales existe una SPO.

Definición 1.7 (Funcional cuasi-definido)**.** Un funcional $\mathcal{L}$ es **cuasi-definido** si, y solo si admite una sucesión de polinomios ortogonales. Equivalentemente, si $\Delta_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Un concepto muy relacionado con el de funcional cuasi-definido es el de definido positivo, que introducimos a continuación.

Definición 1.8 (Funcional definido positivo)**.** Un funcional de momentos $\mathcal{L}$ se dice que es **definido positivo** si $\mathcal{L}[\pi] > 0$ para cualquier polinomio π no nulo y no negativo en todo el eje real.

Presentamos ahora un sencillo lema que nos ayudará a encontrar una definición alternativa utilizada con bastante frecuencia.

Lema 1.1. Sea $\pi(x)$ un polinomio no negativo en todo el eje real. Entonces existen polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que

$$\pi(x) = p^2(x) + q^2(x).$$

Demostración. Si $\pi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $\pi(x)$ es un polinomio cuyos ceros reales tienen multiplicidad par y cuyos ceros complejos son pares conjugados. Por lo que podemos escribir

$$\pi(x) = r^2(x) \prod_{k=1}^{m} (x - a_k - b_k i)(x - a_k + b_k i),$$

donde $r(x)$ es un polinomio real y $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Si ahora denotamos

$$\prod_{k=1}^{m} (x - a_k - b_k i) = A(x) + iB(x),$$

siendo $A(x)$ y $B(x)$ polinomios reales, podemos expresar $\pi(x)$ como

$$\pi(x) = r^2(x)(A^2(x) + B^2(x)) = \underbrace{(r(x)A(x))^2}_{p^2(x)} + \underbrace{(r(x)B(x))^2}_{q^2(x)}.$$

□

Una consecuencia directa de este lema es una definición alternativa y equivalente de funcional definido positivo.

Corolario 1.5. *Un funcional de momentos $\mathcal{L}$ es definido positivo si, y solo si $\mathcal{L}[\pi^2(x)] > 0$ para cualquier polinomio $\pi(x)$.*

Finalmente, introducimos la relación entre el concepto de funcional definido positivo y los determinantes (1.11).

Teorema 1.6. *Un funcional $\mathcal{L}$ es definido positivo si, y solo si sus momentos $\{\mu_n\}$ son todos reales y $\Delta_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$*

Demostración. La prueba de este resultado puede encontrarse en [Chi11, Teorema 3.4]. □

Obsérvese que gracias a este teorema podemos entonces afirmar que los funcionales definidos positivos son, en particular, funcionales cuasi-definidos. Esto es, admiten una SPO.

1.6. La relación de recurrencia a tres términos

Las SPO respecto a un funcional siempre cumplen una ecuación que es la denominada 'relación de recurrencia a tres términos', en adelante también referida como 'RRTT'.

Teorema 1.7 (Relación de Recurrencia a Tres Términos)**.** *Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal $\mathcal{L}$. Entonces, $\{P_n\}$ satisface la relación de recurrencia*

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.15}$$

Normalmente se impone que $P_{-1} = 0, P_0 = 1$, por lo que una SPO queda determinada unívocamente a partir de las sucesiones $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$.

Además, si la SPO es mónica, los polinomios $\{P_n\}$ verifican la ecuación equivalente

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.16}$$

Demostración. Como $xP_n(x)$ es un polinomio de grado $n + 1$, este puede ser expresado como

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{k,n} P_k(x), \qquad \text{con } a_{k,n} = \frac{\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Pero $\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)] = 0$ para $k = 0, \ldots, n-2$, por lo que necesariamente debe cumplirse

$$xP_n(x) = \underbrace{a_{n-1,n}}_{\gamma_n} P_{n-1}(x) + \underbrace{a_{n,n}}_{\beta_n} P_n(x) + \underbrace{a_{n+1,n}}_{\alpha_n} P_{n+1}(x),$$

de donde se deduce (1.15). Si además $P_n(x)$ es mónico, $xP_n(x)$ también lo es, por lo que $a_{n+1,n} = 1$, luego se tiene que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1},$$

que es equivalente a (1.16). □

De esta demostración podemos deducir además la expresión de las constantes α_n, β_n y γ_n:

$$\alpha_n = \frac{\mathcal{L}[xP_nP_{n+1}]}{\mathcal{L}[P_{n+1}^2]}, \qquad \beta_n = \frac{\mathcal{L}[xP_n^2]}{\mathcal{L}[P_n^2]}, \qquad \gamma_n = \frac{\mathcal{L}[xP_nP_{n-1}]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2]}, \tag{1.17}$$

donde la expresión de α_n y la de β_n son válidas para $n \geq 0$ y la de γ_n para $n \geq 1$.

Sin embargo, este cálculo puede complicarse bastante, por lo que presentaremos un algoritmo alternativo. Para ello, desarrollaremos los polinomios como

$$P_n(x) = a_nx^n + b_nx^{n-1} + c_nx^{n-2} + \cdots .$$

Si sustituimos esta expresión en la RRTT (1.15) e igualamos los coeficientes de los monomios x^{n+1}, x^n y x^{n-1} llegamos a las expresiones

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \qquad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \qquad \gamma_n = \frac{1}{a_{n-1}}\left(c_n - \alpha_n c_{n+1} - \beta_n b_n\right). \tag{1.18}$$

donde de nuevo la expresión de α_n y la de β_n son válidas para $n \geq 0$ y la de γ_n para $n \geq 1$.

Con las ecuaciones (1.17) podemos construir la SPO utilizando la RR3T si conocemos el funcional, deduciendo simultáneamente los coeficientes de la RR3T y los polinomios que conforman la sucesión. Por su parte, utilizando (1.18) podemos calcular de una manera sencilla los coeficientes de la RR3T sin utilizar el funcional ni integrales, en ocasiones complejas. Sin embargo, en este último caso necesitamos conocer los polinomios P_{n-1}, P_n y P_{n+1} para obtener dichos coeficientes, no pudiendo construir la SPO como sí podíamos hacer si aplicábamos (1.17). Comprobemos este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Vamos a clarificar estas ideas con un ejemplo práctico. En el archivo `software/Hermite.ipynb`[1] se ha implementado, utilizando el software matemático 'SageMath', el cálculo de una SPO mediante la RR3T. También se ha realizado una estimación de los tiempos de ejecución para distintos valores de n. En este ejemplo únicamente se recogen los resultados arrojados por el software, pero en dicho archivo se puede consultar e incluso modificar el código fuente.

En particular, se ha trabajado con los polinomios de Hermite, (véase sección 2.2.1) que son aquellos que conforman la SPO con respecto a la función peso $\rho(x) = e^{-x^2}$ en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, tenemos el funcional

$$\mathcal{L}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx.$$

Calculemos la SPOM correspondiente al funcional $\mathcal{L}$. Si tomamos $P_{-1} = 0, P_0 = 1$, podemos calcular a partir de (1.17) las constantes β_n, γ_n para $n \leq 1$ y mediante (1.16) obtenemos los polinomios P_n para $n \geq 1$, véase la tabla 1.1.

Sin embargo, comprobamos que este método es lento, pues los tiempos de cálculo[2] se incrementan considerablemente con n. De hecho, para $n = 15$, que es un valor aún bajo y cercano a 10, el tiempo de ejecución ya es de 58.9024 segundos, casi un minuto.

[1]Puede ser consultado en la URL `https://github.com/JAntonioVR/Polinomios-Ortogonales/blob/main/software/Hermite.ipynb`

[2]Estos tiempos han sido obtenidos mediante la media de los tiempos de ejecución de 10 ejecuciones independientes.

n	$P_n(x)$	Tiempo de cálculo (s)
0	1	1.1897×10^{-5}
1	x	0.0133
2	$x^2 - \frac{1}{2}$	0.0449
3	$x^3 - \frac{3}{2}x$	0.1073
4	$x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$	0.2161
5	$x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}x$	0.4162
6	$x^6 - \frac{15}{2}x^4 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{15}{8}$	0.6752
7	$x^7 - \frac{21}{2}x^5 + \frac{105}{4}x^3 - \frac{105}{8}x$	1.2009
8	$x^8 - 14 * x^6 + \frac{105}{2}x^4 - \frac{105}{2}x^2 + \frac{105}{16}$	2.0665
9	$x^9 - 18x^7 + \frac{189}{2}x^5 - \frac{315}{2}x^3 + \frac{945}{16}x$	3.5725
10	$x^{10} - \frac{45}{2}x^8 + \frac{315}{2}x^6 - \frac{1575}{4}x^4 + \frac{4725}{16}x^2 - \frac{945}{32}$	5.5059

Tabla 1.1: 10 primeros polinomios de Hermite mónicos

Por otro lado, existe un resultado recíproco al teorema 1.7. Este resultado es el conocido como teorema de Favard.

Teorema 1.8 (Favard)**.** *Sean $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ dos sucesiones de números reales y sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios mónicos definida mediante la relación (1.16):*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n - \gamma_n P_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

con $P_{-1} = 0$ y $P_0 = 1$. Entonces existe un único funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que

$$\mathcal{L}[1] = \gamma_0, \qquad\qquad \mathcal{L}[P_n P_m] = \delta_{n,m} K_n, \quad K_n \neq 0.$$

Este funcional es cuasi-definido y $\{P_n\}$ es su correspondiente SPOM si, y solo si $\gamma_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Además, $\mathcal{L}$ es definido positivo si y solo si $\gamma_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Definamos el funcional $\mathcal{L}$ por inducción en $\mathbb{P}$. Sea

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[P_0] = \mu_0 := \gamma_0,$$

$$\mathcal{L}[P_n] = \mathcal{L}[1 \cdot P_n] = \mathcal{L}[P_0 P_n] := 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Así, aplicando (1.16) podemos calcular los momentos del funcional. Si tomamos $n = 0$ en (1.16) obtenemos

$$P_1(x) = x - \beta_0,$$

luego, como $\mathcal{L}[P_1] = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}[P_1] &= \mathcal{L}[x - \beta_0] \\ &= \mu_1 - \beta_0 \mathcal{L}[1] \\ &= \mu_1 - \beta_0 \gamma_0, \end{aligned}$$

de donde $\mu_1 = \beta_0 \gamma_0$. Si $n = 1$ en (1.16) obtenemos

$$P_2(x) = (x - \beta_1)P_1 - \gamma_1,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}[P_2] &= \mathcal{L}[(x-\beta_1)P_1 - \gamma_1] \\ &= \mathcal{L}[(x-\beta_1)(x-\beta_0) - \gamma_1] \\ &= \mu_2 - (\beta_0+\beta_1)\mu_1 + (\beta_1\beta_0 - \gamma_1)\gamma_0, \end{aligned}$$

de donde $\mu_2 = (\beta_0+\beta_1)\mu_1 - (\beta_1\beta_0-\gamma_1)\gamma_0$. Continuando este proceso se pueden obtener todos los momentos μ_n, y una vez se tienen todos los momentos podemos extender el funcional por linealidad.

Utilizando (1.15) sucesivamente obtenemos que

$$x^k P_n = \sum_{i=n-k}^{n+k} d_{n,i} P_i(x),$$

y aplicando que $\mathcal{L}[P_n] = 0$ se deduce que $\mathcal{L}[x^k P_n] = 0$ para todo $k = 1, \dots, n-1$. Comprobemos qué ocurre cuando $k = n$. De nuevo, por (1.15):

$$\mathcal{L}[x^n P_n] = \mathcal{L}[x^{n-1}(P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1})] = \mathcal{L}[\gamma_n x^{n-1} P_{n-1}] = \gamma_n \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}].$$

Aplicando este razonamiento sucesivamente llegamos a que

$$\mathcal{L}[x^n P_n] = \gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.19}$$

Por tanto, el funcional es cuasi-definido y $\{P_n\}$ es su SPOM si, y solo si $\gamma_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Por último, véamos que $\mathcal{L}$ es definido positivo si y solo si $\gamma_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Sea $\pi(x)$ un polinomio y m su grado. Podemos entonces escribir $\pi(x) = \sum_{i=1}^m c_i P_i(x)$. De esta forma

$$\mathcal{L}[\pi^2(x)] = \mathcal{L}[\sum_{i=1}^m c_i^2 P_i^2(x)] = \sum_{i=1}^m c_i^2 \mathcal{L}[P_i^2(x)],$$

donde hemos utilizado la ortogonalidad de $\{P_n\}$. Por tanto, la condición $\mathcal{L}[\pi^2(x)] > 0$ es equivalente a $\mathcal{L}[P_n^2(x)] > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Aplicando de nuevo la ortogonalidad de la sucesión, tenemos que

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \mathcal{L}[P_n \cdot P_n] = \mathcal{L}[x^n P_n],$$

que por (1.19) es positivo si y solo si $\gamma_n\gamma_{n-1}\cdots\gamma_0 > 0$, que es equivalente a que $\gamma_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. □

Observación 1.3. Nótese que el teorema de Favard está descrito partiendo de una sucesión de polinomios ortogonales *mónicos*. Sin embargo, una vez es calculado el funcional, se puede utilizar cualquier otra estandarización sin cambiar el funcional.

Si partimos de una sucesión de polinomios mónicos $\{P_n\}$ y dos sucesiones de números reales $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ verificando las condiciones del teorema de Favard, entonces existe un funcional $\mathcal{L}$ para el cual $\{P_n\}$ es una SPOM. Si $\{Q_n\} = \{c_n P_n\}$ es otra SPO para $\mathcal{L}$, podemos sustituir $P_n = \dfrac{1}{c_n} Q_n$ en (1.17) para obtener la relación

$$xQ_n(x) = \frac{c_n}{c_{n+1}} Q_{n+1} + \beta_n Q_n + \frac{\gamma_n}{c_{n-1}} Q_{n-1}.$$

1.7. Propiedades de los ceros

Los ceros o raíces de los polinomios ortogonales tienen propiedades y comportamientos que guardan cierta regularidad cuando el funcional que los define es definido positivo. En esta sección conoceremos estas peculiaridades de los ceros. Comencemos con una definición que refina en cierto modo la definición de funcional definido positivo.

Definición 1.9 (Funcional definido positivo en un conjunto)**.** Sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que un funcional $\mathcal{L}$ es **definido positivo en E** si $\mathcal{L}[\pi] > 0$ para cualquier polinomio $\pi(x)$ real, no negativo y no idénticamente nulo en E. En este contexto, se dice que E es un **soporte** de $\mathcal{L}$.

Por ejemplo, el funcional de momentos (1.8) de los polinomios de Tchebichef de tipo I es definido positivo en $(-1, 1)$, el de los polinomios de Charlier definido en el ejemplo 2 lo es en $\mathbb{N}$ y el de los polinomios de Hermite en $\mathbb{R}$. Respecto a este último caso, es claro que ser 'definido positivo en $\mathbb{R}$' equivale a ser 'definido positivo' según la definición 1.8.

A partir de este concepto y los siguientes teoremas podremos conocer la dinámica que siguen los ceros de los polinomios ortogonales. En adelante, $\mathcal{L}$ es un funcional definido positivo y $\{P_n(x)\}$ su correspondiente SPO.

Teorema 1.9. *Sea I un intervalo que es un soporte de $\mathcal{L}$. Entonces los ceros de P_n $(n \geq 1)$ son todos simples, reales y se encuentran en el interior de I (denotado en adelante como $\mathring{I}$).*

Demostración. Supongamos que $P_0 = 1$, entonces $\mathcal{L}[P_n] = \mathcal{L}[P_0 P_n] = 0$, $n \geq 1$. Por tanto, P_n tiene que cambiar de signo al menos una vez en $\mathring{I}$. Esto es, P_n tiene al menos un cero con multiplicidad impar en $\mathring{I}$. Sean $x_1, \ldots, x_k \in \mathring{I}$ los ceros de multiplicidad impar de P_n que están en $\mathring{I}$. Consideramos entonces el polinomio

$$q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k).$$

Entonces $q(x)P_n(x)$ es un polinomio que no tiene ceros de multiplicidad impar en $\mathring{I}$, por lo que $q(x)P_n(x) \geq 0 \; \forall x \in I$. Por tanto, $\mathcal{L}[q(x)P_n(x)] > 0$, pero esto contradice el teorema 1.1 salvo que $k = n$, luego necesariamente $P_n(x)$ tiene n ceros simples en $\mathring{I}$. □

A partir de este teorema, podemos denotar los ceros del polinomio $P_n(x)$ como

$$x_{n1} < x_{n2} < \cdots < x_{nn}, \quad n \geq 1.$$

Observación 1.4. Si tomamos P_n con coeficiente líder positivo, entonces tenemos que

1. $P_n(x) > 0 \;\; \forall x > x_{nn}$ y
2. $\operatorname{sgn} P_n(x) = (-1)^n \;\; \forall x < x_{n1}$.

Observación 1.5. P_n' tiene exactamente un cero en cada intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$, por lo que $P_n'(x_{nk})$ alterna su signo con $k = 1, \ldots, n$. Como el signo de $P_n'(x)$ también es positivo, concluimos que

$$\operatorname{sgn} P_n'(x_{nk}) = (-1)^{n-k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

Estas dos observaciones relacionan en cierto modo los ceros de P_n con el comportamiento de P_n'. El siguiente lema relaciona directamente la SPO $\{P_n\}$ con la sucesión de las derivadas de los polinomios ortogonales $\{P_n'\}$.

Lema 1.2. Si $\mathcal{L}$ es un funcional definido positivo y $\{P_n\}$ es su SPO, entonces se verifica la desigualdad

$$P_{n+1}'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_{n+1} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Esta desigualdad es una consecuencia de la conocida *Identidad de Christoffel-Darboux* (véase [Chi11, Theorem 4.5]), y nos será de gran utilidad para probar el siguiente teorema.

Teorema 1.10 (Serparación de los ceros)**.** *Los ceros de P_n y de P_{n+1} están mutuamente separados. Es decir,*

$$x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Demostración. A partir de la desigualdad (1.21) obtenemos que $P_{n+1}'(x)P_n(x) > 0$, y si evaluamos en $x = x_{n+1,k}$ se tiene que

$$P_{n+1}'(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0, \quad k = 1, \dots n+1$$

Si aplicamos (1.20), tenemos que $\operatorname{sgn} P_{n+1}'(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$, por lo que para que se cumpla la desigualdad necesariamente $\operatorname{sgn} P_n(x_{n+1,k}) = (-1)^{n+1-k}$. Esto es, $P_n(x)$ tiene que cambiar de signo un número de impar de veces en el intervalo $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$, y como esto ocurre para todo k, necesariamente P_n tiene un único cero en cada uno de los n intervalos $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$, $k = 1, \dots, n$. □

Este teorema tiene una consecuencia inmediata

Corolario 1.11. *Para cada $k \geq 1$, la sucesión $\{x_{nk}\}$ es estrictamente decreciente y la sucesión $\{x_{n,n-k+1}\}$ es estrictamente creciente.*

De hecho, los límites

$$\xi_k = \lim_{n\to\infty} x_{nk}, \qquad \eta_k = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-k+1}$$

existen para todo $k = 1, \dots, n$, pudiendo tomar los valores $\pm\infty$.

Estos límites nos llevan a la siguiente definición

Definición 1.10 (Verdadero Intervalo de Ortogonalidad)**.** El intervalo cerrado $[\xi_1, \eta_1]$ es conocido como el **Verdadero Intervalo de Ortogonalidad** de la SPO asociada al funcional $\mathcal{L}$.

Este intervalo recién presentado es el intervalo cerrado más pequeño que contiene todos los ceros de todos los polinomios de la SPO $\{P_n\}$. Es posible probar que el conjunto de todos los ceros de todos los P_n, llamémoslo I, es un soporte de $\mathcal{L}$, por lo que el verdadero intervalo de ortogonalidad es además el intervalo cerrado más pequeño que es un soporte de $\mathcal{L}$.

En muchos casos se presenta una familia de polinomios ortogonales mediante un funcional y un intervalo (a, b) en el cual se verifica la ortogonalidad. El conjunto I de todos los ceros es un conjunto denso en (a, b), de forma que su adherencia, $[\xi_1, \eta_1]$, coindice con el intervalo de ortogonalidad.

Sin embargo, recordemos que mediante el teorema de Favard también podemos obtener funcionales definidos positivos a partir de una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ y sucesiones de números reales $\{\beta_n\}, \{\gamma\}$ verificando ciertas condiciones. Dicho funcional no especifica el intervalo de ortogonalidad, el cual se puede obtener entonces mediante los ceros de los polinomios $\{P_n\}$.

TODO Demostraciones de todo y preguntar si esto está bien o entendí seriamente mal

Ejemplo 4. Como ejemplo, véamos los ceros de los polinomios de Tchebichef de tipo I, que están todos situados en el intervalo $[-1, 1]$. En la imagen 1.1 hemos representado[3] gráficamente los polinomios de Tchebichef para $n = 2, 3, 4, 5$, asignando los colores rojo, verde, azul y negro respectivamente, señalando los ceros de cada polinomio con su color correspondiente.

Obsérvese que en efecto estos ceros están entrelazados, de forma que un cero rojo está entre dos ceros verdes; uno verde entre dos azules y uno azul entre dos negros.

Además, el primer cero de cada polinomio es cada vez menor, de forma que el primer cero negro es el más pequeño. Análogamente, el último cero es cada vez mayor, siendo el negro el más pequeño de todos. Este hecho ejemplifica el corolario 1.11 con $k = 1$.

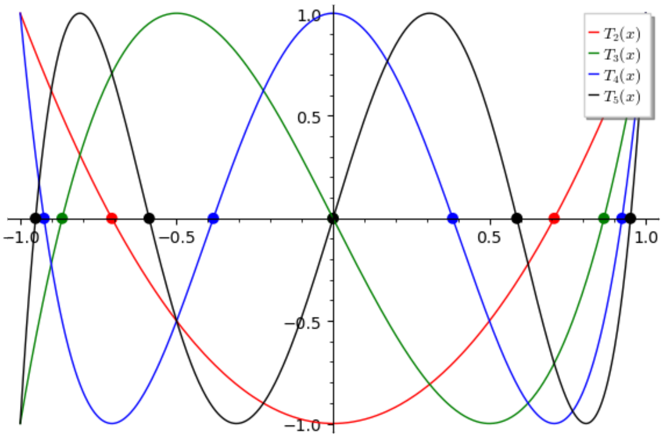


Imagen 1.1: Polinomios de Tchebichef de tipo I y sus ceros

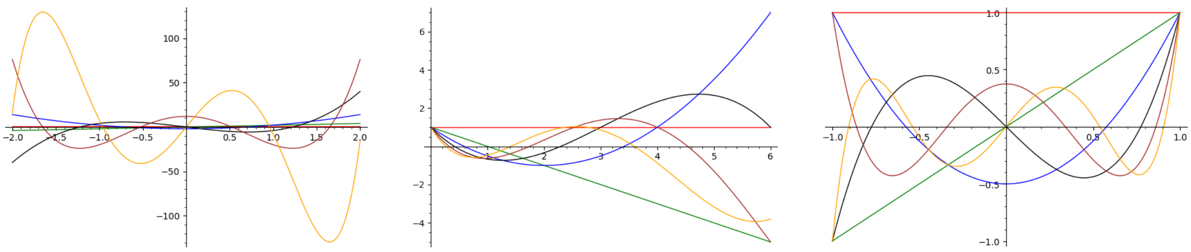
Los ceros de los polinomios ortogonales tienen un papel importante, por ejemplo, en fórmulas de integración numérica, ya que tomar los nodos en los ceros de los polinomios ortogonales reduce considerablemente el error en la integración. Una aplicación bastante directa podrían ser las fórmulas de cuadratura gaussiana (véase [Chi11, Ch. I, Sección 6]). También serán relevantes en los próximos capítulos al jugar ξ_1 un papel importante en el soporte de la medida. Incluso tienen una interpretación en el campo del equilibrio electrostático (véase [Ste18]).

[3]En el archivo `software/ceros.ipynb`, también disponible en la URL https://github.com/JAntonioVR/Polinomios-Ortogonales/blob/main/software/ceros.ipynb, puede encontrarse el código con el cual se han generado las imágenes, pudiendo ser ejecutado o incluso modificado para visualizar las gráficas con grados superiores a 5 u otras familias de polinomios.

CAPÍTULO 2

POLINOMIOS ORTOGONALES CLÁSICOS

En el capítulo 1 hemos mostrado una amplia introducción a la ortogonalidad y presentado ejemplos concretos de polinomios ortogonales. En este capítulo presentaremos las familias concretas de polinomios ortogonales más importantes: los *polinomios ortogonales clásicos*. Estos son los polinomios de Hermite, Laguerre, Jacobi y Bessel. Estas familias presentan la peculiaridad de ser las únicas que verifican ciertas propiedades, entre las que destaca la *ecuación diferencial de Pearson*. Estos polinomios, entre otras disciplinas pueden ser encontrados en problemas de Sturm-Liouville cuando se utilizan ecuaciones diferenciales hipergeométricas.



(a) Hermite H_n (b) Laguerre $L_n^{(0)}$ (c) Jacobi $P_n^{(0,0)}$

Imagen 2.1: Polinomios Ortogonales Clásicos

En las imágenes 2.1 podemos ver la representación gráfica, para parámetros concretos que definiremos próximamente, de los polinomios ortogonales de Hermite, Laguerre y Jacobi. Estas tres son las familias que mayor atención recibirán de nuestra parte al ser aquellas cuya ortogonalidad se manifiesta en intervalos reales.

2.1. La ecuación de Pearson

Para empezar, introduciremos una nueva notación para los funcionales de momentos que también se suele utilizar. Sea $\mathbf{u}$ un funcional de momentos y $\{\mu_n\}$ su sucesión de momentos, entonces denotamos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x^n &\longmapsto \langle \mathbf{u}, x^n \rangle = \mu_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

A lo largo de este capítulo denotaremos como $\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle$ a la aplicación del funcional $\mathbf{u}$ a un polinomio $\pi(x)$.

Definimos a continuación dos operadores que actuán sobre los funcionales.

Definición 2.1 (Producto por un polinomio)**.** Para cada polinomio π, definimos un nuevo funcional de momentos a partir de $\mathbf{u}$ como

$$\begin{aligned} \pi\mathbf{u} : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle \pi\mathbf{u}, \phi \rangle = \langle \mathbf{u}, \pi\phi \rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definición 2.2 (Derivada)**.** Definimos el funcional derivada como

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}) : \mathbb{P} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \langle D(\mathbf{u}), \phi \rangle = - \langle \mathbf{u}, \phi' \rangle \end{aligned} \tag{2.3}$$

A partir de estos dos operadores y esta nueva notación daremos una primera definición de lo que es una SPO clásica.

Definición 2.3 (SPO Clásica)**.** La SPO $\{P_n\}$ para el funcional $\mathbf{u}$ se dice que es **clásica** (Hermite, Laguerre, Jacobi o Bessel) si existen polinomios $\sigma(x), \tau(x)$ con $\deg(\sigma) \leq 2$ y $\deg(\tau) = 1$ tales que el funcional $\mathbf{u}$ verifica la ecuación diferencial

$$D(\sigma\mathbf{u}) = \tau\mathbf{u} \tag{2.4}$$

La ecuación (2.4) es conocida como la **ecuación de Pearson**.

En el caso de que la SPO sea ortogonal respecto a una función peso ρ, esto es, $\mathbf{u}$ es de la forma

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_a^b \pi(x)\rho(x)dx, \tag{2.5}$$

donde (a, b) es cierto intervalo de la recta real donde $\rho > 0$, podemos deducir una condición equivalente.

Lema 2.1. Sean $\rho(x)$ una función peso positiva en el intervalo (a, b),$\mathbf{u}$ el funcional definido como en (2.5) y $\{P_n\}$ la SPO respecto a $\mathbf{u}$. Si la función peso $\rho(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x) \tag{2.6}$$

y además verifica las condiciones de frontera

$$\lim_{x\to a} \sigma(x)\rho(x)x^n = \lim_{x\to b} \sigma(x)\rho(x)x^n, \quad n \geq 0, \tag{2.7}$$

entonces la SPO $\{P_n\}$ es clásica, *i.e.* $\mathbf{u}$ verifica la ecuación de Pearson (2.4). REVIEW Tengo que incluir en algún lugar que ρ tiene momentos finitos, pero lo pongo aquí como una condición extra, lo incluyo en la definición de función peso, en el apartado de funcional de momentos...??

Demostración. Queremos comprobar la igualdad de funcionales $D(\sigma\mathbf{u}) = \tau\mathbf{u}$. Para ello, tengamos en cuenta que dos funcionales lineales son iguales si, y solo si actuán igual sobre una base de $\mathbb{P}$. Escogemos la base $\{x^n\}_{n\geq 0}$. Entonces tenemos que

$$\langle D(\sigma\mathbf{u}), x^n\rangle = -\left\langle \sigma\mathbf{u}, nx^{n-1}\right\rangle = -\left\langle \mathbf{u}, \sigma(x)nx^{n-1}\right\rangle,$$

aplicando (2.5) e integración por partes, llegamos a

$$\begin{aligned}
\langle D(\sigma\mathbf{u}), x^n\rangle &= -\int_a^b \sigma(x)nx^{n-1}\rho(x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sigma(x)\rho(x) & du = [\sigma(x)\rho(x)]'dx \\ dv = nx^{n-1}dx & v = x^n \end{array} \right\} \\
&= -\underbrace{[\sigma(x)\rho(x)x^n]_a^b}_{=0 \text{ por } (2.7)} + \int_a^b x^n[\sigma(x)\rho(x)]'dx \qquad \text{(aplicando (2.6))} \\
&= \int_a^b x^n\tau(x)\rho(x)dx = \langle \mathbf{u}, \tau(x)x^n\rangle = \langle \tau\mathbf{u}, x^n\rangle
\end{aligned}$$

□

REVIEW El recíproco tiene que ser cierto, pero no tengo la demostración

2.2. Deducción de las familias de polinomios ortogonales clásicos

A partir del lema 2.1 podremos obtener las principales familias de polinomios ortogonales. Hemos impuesto que $\tau(x) = Ax + B$ sea un polinomio de grado exactamente 1, por lo que tenemos cuatro grados de libertad a partir de las posibilidades de $\sigma(x)$, que supondremos mónico:

1. **Caso I**: $\sigma(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. En este caso obtendremos los llamados polinomios de Hermite.

2. **Caso II**: $\sigma(x) = x - a$, $x \in [a, \infty)$. Haciendo el cambio de variable lineal $t = -(x-a)/A$ se tiene $\sigma(x) = x$ y $\tau(x) = -x + B$, $x \in [0, \infty)$. Con estos valores calcularemos los polinomios de Laguerre.

3. **Caso III**: $\sigma(x) = (x-a)(b-x)$, $x \in [a, b]$. Con el cambio de variable $x = (b-a)/2t + (a+b)/2$ podemos escribir $\sigma(x) = 1 - x^2$ y $\tau = Ax + B$, $x \in [-1, 1]$. Y así deduciremos los polinomios de Jacobi.

4. **Caso IV**: $\sigma(x) = (x-a)^2$. En este último caso se obtienen los polinomios de Bessel.

REVIEW Pongo algún parrafito explicando por qué se eligen esos dominios?

De acuerdo al lema 2.1, si resolvemos la ecuación diferencial (2.6) asegurándonos de que las soluciones calculadas verifiquen las condiciones de frontera (2.7), habremos hayado las funciones peso $\rho(x)$ para las cuales el funcional (2.5) genera una SPO clásica.Veremos seguidamente los casos I, II y III, obviando (REVIEW No me gusta la palabra 'obviando' porque parece que los estoy ignorando) los polinomios de Bessel.

2.2.1. Caso I: Polinomios de Hermite

Supongamos que $\sigma(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces la ecuación diferencial

$$\rho'(x) = (Ax + B)\rho(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esta ecuación es de variables separadas, por lo que podemos tomar

$$\int \frac{\rho'(x)}{\rho(x)}dx = \int (Ax+B)dx \Leftrightarrow \log(\rho(x)) = \frac{A}{2}x^2 + Bx + log(C) \Leftrightarrow$$

$$\rho(x) = Ce^{\frac{A}{2}x^2 + Bx} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si queremos que los momentos sean finitos, necesariamente debemos imponer $A < 0$. Por su parte, B es indiferente para la convergencia de los momentos una vez se fija A. Por este motivo, podemos reducir el caso genérico mediante un cambio de variable lineal al caso $A = -2, B = 0$. Tomamos $C = 1$ y llegamos a

$$\sigma(x) = 1, \quad \tau(x) = -2x, \quad \rho(x) = e^{-x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Sobre las condiciones de frontera, tenemos que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-x^2}x^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Por tanto, la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al funcional

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)e^{-x^2}dx \tag{2.9}$$

es clásica, y sus elementos son los **polinomios de Hermite**, normalmente denotados como $\{H_n(x)\}_{n\geq 0}$.

2.2.2. Caso II: Polinomios de Laguerre

Supongamos que $\sigma(x) = x$ y $\tau(x) = Ax + B$ con $x \in [0, +\infty)$. La ecuación (2.6) queda entonces como

$$(x\rho(x))' = (Ax + B)\rho(x),$$

que si derivamos el primer producto y agrupamos equivale a $x\rho'(x) = (Ax + B - 1)\rho(x)$, que es de nuevo una ecuación de variables separadas, de manera que

$$\int \frac{\rho'(x)}{\rho(x)}dx = \int \frac{Ax + B - 1}{x}dx \Leftrightarrow \log(\rho(x)) = Ax + (B-1)\log(x) + \log(C) \Leftrightarrow$$

$$\rho(x) = Ce^{Ax}x^{B-1} \neq 0 \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

De nuevo, para que los momentos resulten finitos exigimos $A < 0$ y $B > 0$, y salvo cambio de escala podemos reducir el problema al caso $A = -1$. Tomamos $C = 1$ y definimos $\alpha = B - 1$, de forma que

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = -x + \alpha + 1, \quad \rho(x) = x^\alpha e^{-x} \quad \forall x \in [0, +\infty), \quad \alpha > -1. \tag{2.10}$$

En este caso, las condiciones de frontera también se cumplen, pues $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot x^\alpha e^{-x} \cdot x^n = \lim\limits_{x \to \infty} x \cdot x^\alpha \cdot e^{-x}x^n = 0$. Así, la SPO con respecto al funcional

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_0^{\infty} \pi(x)x^\alpha e^{-x}dx, \quad \alpha > -1 \tag{2.11}$$

es clásica, y sus elementos son los **polinomios de Laguerre**, que son denotados con $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n\geq 0}$.

2.2.3. Caso III: Polinomios de Jacobi

Por último, consideremos $\sigma(x) = 1 - x^2$ y $\tau(x) = Ax + B$ con $x \in [-1, 1]$. Aplicado a la ecuación (2.6) tenemos

$$((1 - x^2)\rho(x))' = (Ax + B)\rho(x),$$

Derivando el primer miembro y agrupando obtenemos a $(1-x^2)\rho'(x) = (Ax+B+2x)\rho(x)$. Si dividimos y multiplicamos el segundo miembro por $\sigma(x)$ y dividimos la ecuación por $\sigma(x)\rho(x)$ obtenemos la ecuación

$$\frac{\sigma(x)\rho(x)}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{Ax + B}{1 - x^2}.$$

Resolveremos esta ecuación en la que $(\sigma\rho)$ es la incógnita. Una vez resuelta podremos deducir la solución de (2.6).

$$\int \frac{\sigma(x)\rho(x)}{\sigma(x)\rho(x)} dx = \int \frac{Ax + B}{1 - x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\log(\sigma(x)\rho(x)) = -\frac{A + B}{2}\log(1 - x) - \frac{A - B}{2}\log(1 + x) + \log(C) \Leftrightarrow$$

$$\sigma(x)\rho(x) = C(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}}(1 + x)^{-\frac{A-B}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\rho(x) = C(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}-1}(1 + x)^{-\frac{A-B}{2}-1} \neq 0 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Para que los momentos del funcional sean finitos, exigimos que A, B verifiquen $\frac{A+B}{2} < 0$, $\frac{A-B}{2} < 0$. Tomamos $C = 1$ y definimos $\alpha = -\frac{A+B}{2} - 1$ y $\beta = -\frac{A-B}{2} - 1$, obteniendo

$$\begin{gathered} \sigma(x) = 1 - x^2, \qquad\qquad \tau(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + (\beta - \alpha), \\ \rho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \alpha, \beta > -1. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Las condiciones de frontera se verifican nuevamente, pues

$$\lim_{x \to \pm 1}(1 - x^2) \cdot (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta \cdot x^n = 0.$$

Así, la SPO con respecto al funcional

$$\langle \mathbf{u}, \pi(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \pi(x)(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > -1 \tag{2.13}$$

es clásica, y sus elementos son los **polinomios de Jacobi**, denotados como $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\geq 0}$.

Resumiendo, tenemos tres familias de polinomios ortogonales clásicos además de la Bessel: Hermite, Laguerre y Jacobi. En la tabla 2.1 recogemos los datos más importantes sobre cada una de ellas: la notación, el intervalo de ortogonalidad y las funciones $\sigma(x)$, $\tau(x)$ y $\rho(x)$ involucradas en las ecuaciones de Pearson.

Familia	Notación	Intervalo	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$\rho(x)$
Hermite	$H_n(x)$	$(-\infty,\infty)$	1	$-2x$	e^{-x^2}
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$[0,\infty)$	x	$-x+\alpha+1$	$x^\alpha e^{-x}$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$[-1,1]$	$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x+(\beta-\alpha)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$

Tabla 2.1: Resumen sobre las SPO clásicas

2.3. Caracterizaciones

Hasta el momento hemos podido conocer las distintas familias de polinomios ortogonales clásicos y su peculiaridad respecto a las distintas formas de presentar la ecuación de Pearson. Sin embargo, estos polinomios cumplen varias propiedades destacables que además los caracterizan como clásicos. Es decir, son los únicos polinomios ortogonales que las verifican. En esta sección estudiaremos algunas de estas propiedades.

Previamente, presentaremos un resultado que nos ahorrará el tener que probar las condiciones de frontera (2.7) cuando queramos comprobar que una SPO es clásica.

Proposición 2.1. Sean $\rho(x)$ una función peso positiva en el intervalo (a,b),$\mathbf{u}$ el funcional definido como en (2.5) y $\{P_n\}$ la SPO respecto a $\mathbf{u}$. Entonces $\{P_n\}$ es clásica si, y sólo si la función peso $\rho(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x).$$

Demostración. Notemos que por el lema 2.1 esta proposición es cierta siempre que se cumplan las condiciones de frontera 2.7. Véamos que para cualquiera de los posibles valores de $\sigma(x)$ y siendo $\tau(x)$ un polinomio de grado 1 estas condiciones se verifican incluso antes de resolver la ecuación diferencial. En el caso III tenemos que $\sigma(-1)=\sigma(1)=0$, por lo que la igualdad se verifica trivialmente. Sobre el caso II, tenemos $\sigma(x)=x$, de tal forma que $\lim\limits_{x\to 0} x\rho(x)x^n = 0$. Véamos que ocurre cuando $x\to\infty$. Fijamos $k\geq 0$.

Consideramos la siguiente integral, en la que aplicamos en la primera igualdad el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow y en la segunda derivamos el integrando y aplicamos la ecuación de Pearson (2.6).

$$\int_0^t [x^k\sigma(x)\rho(x)]'dx = \left[x^k\sigma(x)\rho(x)\right]_{x=0}^{x=t} = \int_0^t [kx^{k-1}\sigma(x)\rho(x) + x^k\tau(x)\rho(x)]dx$$

Fijémonos en que si expandimos la última integral esta se reduce al cálculo de momentos, los cuales son finitos, por lo que si aplicamos límite cuando $t\to\infty$ la última integral es finita. De esto deducimos que

$$\lim_{t\to\infty}\left[x^k\sigma(x)\rho(x)\right]_{x=0}^{x=t} = \lim_{t\to\infty} x^k\sigma(x)\rho(x) =: A_k \Rightarrow |A_k| < \infty.$$

Por otro lado,

$$A_{k+1} = \lim_{t\to\infty} x^{k+1}\sigma(x)\rho(x) = \lim_{t\to\infty} xA_k.$$

La única forma de que exista A_{k+1} y sea finito es que ese último límite también lo sea, lo cual únicamente se verifica si $A_k = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x\rho(x)x^n = 0$, $k\geq 0$. Por tanto, las condiciones de frontera también se verifican en el caso II. Por último, el caso I, en el que $\sigma(x) = 1$ es análogo al caso II:

$$\int_{-t}^{t} [x^k \rho(x)]' dx = \left[x^k \rho(x)\right]_{x=-t}^{x=t} = \int_{-t}^{t} [kx^{k-1}\rho(x) + x^k \tau(x)\rho(x)] dx$$

Como los momentos son finitos, al tomar límite en la última integral esta es finita. Esto es

$$\left| \lim_{t\to\infty} \left[x^k \rho(x)\right]_{x=-t}^{x=t} \right| =: B_k < \infty.$$

Como $B_{k+1} = \lim_{t\to\infty} x B_k < \infty$, necesariamente $B_k = 0$, $k \geq 0$, de donde $\lim_{t\to-\infty} x^k \rho(x) = \lim_{t\to-\infty} x^k \rho(x)$. □

Este resultado afirma que el hecho de que un funcional $\mathbf{u}$ definido a partir de una función peso ρ verifique (2.4) es equivalente a que ρ sea una solución de (2.6). De esta forma, tan sólo con comprobar que una función peso verifica la ecuación de Pearson podemos concluir que una SPO es clásica.

Con esta nueva herramienta presentamos la primera de las propiedades.

2.3.1. Ortogonalidad de las derivadas

La primera de estas caracterizaciones atiende a la sucesión $\{P_n'\}$ formada por las derivadas de los elementos de una SPO $\{P_n\}$, que en el caso de los polinomios ortogonales clásicos resulta no sólo ser también una SPO, sino que además también es clásica.

Teorema 2.1. *Sea $\{P_n\}$ una SPO clásica respecto a la función peso $\rho(x)$. Entonces la sucesión $\{P_n'\}$ es una SPO respecto a $\sigma(x)\rho(x)$.*

Demostración. Al ser $\{P_n\}$ una SPO y $\tau(x)$ un polinomio de grado 1, tenemos que para $k < n$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b P_n(x) x^{k-1} \tau(x) \rho(x) dx \\ &= \int_a^b P_n(x) x^{k-1} [\sigma(x)\rho(x)]' dx \quad \text{(por (2.6).)} \end{aligned}$$

Si aplicamos integración por partes tomando

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = P_n(x) x^{k-1} & du = P_n'(x) x^{k-1} + (k-1) P_n(x) x^{k-2} dx \\ dv = [\sigma(x)\rho(x)]' dx & v = \sigma(x)\rho(x) \end{array} \right\},$$

tenemos

$$0 = \underbrace{\left[P_n(x) x^{k-1} \sigma(x)\rho(x)\right]_a^b}_{=0 \text{ por } (2.7)} - \int_a^b P_n'(x) x^{k-1} \sigma(x)\rho(x) dx - (k-1) \underbrace{\int_a^b P_n(x) x^{k-2} \sigma(x)\rho(x) dx}_{=0 \text{ por la ortogonalidad de } \{P_n\}}.$$

Por tanto $\int_a^b P_n'(x) x^{k-1} [\sigma(x)\rho(x)] dx = 0$ para $k < n$. Comprobemos ahora que $\int_a^b P_n'(x) x^{n-1} [\sigma(x)\rho(x)] dx \neq 0$.

Si procedemos análogamente para $k = n$ llegamos a

$$\int_a^b P_n(x)x^{n-1}\tau(x)\rho(x)dx = -\int_a^b P_n'(x)x^{n-1}\sigma(x)\rho(x)dx$$
$$- (n-1)\int_a^b P_n(x)x^{n-2}\sigma(x)\rho(x)dx.$$

De esta igualdad deducimos

$$\int_a^b P_n'(x)x^{n-1}\sigma(x)\rho(x)dx = -\int_a^b P_n(x)[x^{n-1}\tau(x) + (n-1)x^{n-2}\sigma(x)]\rho(x)dx.$$

Y esta integral no es cero únicamente si $x^{n-1}\tau(x) + (n-1)x^{n-2}\sigma(x)$ tiene grado n, o equivalentemente si $\Delta(x) := x\,\tau(x) + (n-1)\sigma(x)$ tiene grado 2. Si $\sigma(x)$ tiene grado 0 o 1 es claro que $\Delta(x)$ tendrá grado 2. Si $\sigma(x)$ tiene grado 2 entonces estamos en el caso III, en el que $\sigma(x) = 1 - x^2$ y $\tau(x) = -(\alpha+\beta+2)x + \beta - \alpha$. Con esta asunción, $x\,\tau(x)$ tiene coeficiente líder negativo y $(n-1)\sigma(x)$ también, por lo que el coeficiente de grado 2 de $\Delta(x)$ será no nulo y por tanto $\deg(\Delta) = 2$. Es decir, $\int_a^b P_n'(x)x^{n-1}\sigma(x)\rho(x)dx \neq 0$.

Esto es, $\{P_n'\}$ es una SPO respecto a $\sigma(x)\rho(x)$. □

A partir de este último resultado ya podemos probar la consecuencia que ya adelantábamos: la sucesión de las derivadas también es clásica.

Corolario 2.2. *Si la sucesión $\{P_n\}$ una SPO clásica respecto a la función peso $\rho(x)$, entonces la sucesión $\{P_n'\}$ también es clásica respecto $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$, que es solución de la ecuación de Pearson*

$$[\sigma(x)\rho_1(x)]' = \tau_1(x)\rho_1(x), \tag{2.14}$$

donde $\tau_1(x) = \tau(x) + \sigma'(x)$.

Demostración. Tenemos que $\{P_n'\}$ es una SPO respecto a $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$. Tenemos además que

$$\begin{aligned}
[\sigma(x)\rho_1(x)]' &= \sigma(x)[\sigma(x)\rho(x)]' + \sigma'(x)[\sigma(x)\rho(x)] \\
&= \sigma(x)\tau(x)\rho(x) + \sigma'(x)[\sigma(x)\rho(x)] \quad \text{(por (2.6) para } \rho(x)) \\
&= \underbrace{(\tau(x) + \sigma'(x))}_{\tau_1(x)}\rho_1(x).
\end{aligned}$$

Nótese que $\tau_1(x) = \tau(x) + \sigma'(x)$ es de nuevo un polinomio de grado 1. Por tanto, ρ_1 es solución de la ecuación de Pearson, por lo que $\{P_n'\}$ es una SPO clásica. □

Por inducción en las sucesivas derivadas $\{P_n^{(k)}\}$ podemos deducir el siguiente resultado:

Corolario 2.3. *Si la sucesión $\{P_n\}$ una SPO clásica entonces la sucesión $\{P_n^{(k)}\}$ es una SPO clásica respecto a la función peso $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$, que es solución de la ecuación*

$$[\sigma(x)\rho_k(x)]' = \tau_k(x)\rho_k(x), \tag{2.15}$$

donde $\tau_k(x) = \tau(x) + k\sigma'(x)$.

2.3.2. Ecuación diferencial hipergeométrica

A partir de la ortogonalidad de las derivadas podemos encontrar una interesante ecuación diferencial que veremos también caracteriza a las familias clásicas de polinomios ortogonales.

Teorema 2.4. *Sea $\{P_n\}$ una SPO clásica respecto a la función peso $\rho(x)$. Entonces cada polinomio $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ es solución de la ecuación diferencial*

$$\sigma(x)P_n''(x) + \tau(x)P_n'(x) + \lambda_n P_n(x) = 0, \tag{2.16}$$

con $\lambda_n = -n\left(\tau' + (n-1)\frac{\sigma''}{2}\right) \in \mathbb{R}$.

Demostración. Al ser $\{P_n\}$ una SPO clásica, por el corolario 2.2 $\{P_n'\}$ es ortogonal y clásica respecto a $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$. Esto es, para $k < n$:

$$0 = \int_a^b P_n'(x)(x^k)'\rho_1(x)dx. \tag{2.17}$$

Si aplicamos integración por partes y las condiciones de frontera (2.7), tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b x^k (P_n'(x)\rho_1(x))' dx \\
&= \int_a^b x^k (P_n''(x)\rho_1(x) + P_n'(x)\rho_1'(x))dx \\
&= \int_a^b x^k (P_n''(x)\sigma(x)\rho(x) + P_n'(x)\tau(x)\rho(x))dx \quad \text{(por (2.6))} \\
&= \int_a^b x^k (P_n''(x)\sigma(x) + P_n'(x)\tau(x))\rho(x)dx
\end{aligned}$$

para todo $k < n$. Análogamente, teniendo en cuenta que para $k = n$ la integral (2.17) no se anula, podemos comprobar que

$$\int_a^b x^n (P_n''(x)\sigma(x) + P_n'(x)\tau(x))\rho(x)dx \neq 0.$$

Por el teorema 1.1, esto significa que la sucesión de polinomios $\{P_n''(x)\sigma(x)+P_n'(x)\tau(x)\}$ es ortogonal respecto a la función peso ρ. Pero por el corolario 1.3, la SPO respecto a ρ es única salvo constante multiplicativa, de forma que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ existe una constante $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_n''(x)\sigma(x) + P_n'(x)\tau(x) = -\lambda_n P_n(x).$$

Esto es, $P_n(x)$ es solución de (2.16).

Comprobemos ahora la expresión de λ_n igualando las potencias x^n en (2.16). Si consideramos $\sigma(x)$ un polinomio de grado 2 (considerando que $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_2$), tendríamos que su coeficiente líder es $\sigma''(x)/2$. Análogamente, el coeficiente líder de $\tau(x)$ es τ'. Denotamos $\sigma'' \equiv \sigma(x), \tau' \equiv \tau(x)$ ya que ambas son constantes. Por otro lado, si $c_n \neq 0$ es el coeficiente líder de $P_n(x)$, igualando los términos líderes de (2.16) obtenemos

$$\frac{\sigma''}{2}n(n-1)c_n + \tau' n c_n + \lambda_n c_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_n = -n\left(\tau' + (n-1)\frac{\sigma''}{2}\right)$$

□

Naturalmente, al ser la sucesión de derivadas sucesivas $\{P_n^{(k)}\}$ una SPO clásica, también verificarán su propia ecuación diferencial.

Corolario 2.5. *Si la sucesión $\{P_n\}$ una SPO clásica, entonces cada polinomio $P_n^{(k)}(x)$, $k \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$ es solución de la ecuación diferencial*

$$\sigma(x)[P_n^{(k)}(x)]'' + \tau_k(x)[P_n^{(k)}(x)]' + \lambda_n P_n^{(k)}(x) = 0, \tag{2.18}$$

con $\lambda_n \in \mathbb{R}$ y donde $\tau_k(x) = \tau(x) + k\sigma'(x)$.

De forma general, la ecuación (2.16) es normalmente conocida como la **ecuación diferencial hipergeométrica**:

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{2.19}$$

donde $\deg(\sigma) \leq 2, \deg(\tau) \leq 1$.

Esta ecuación veremos próximamente que es de hecho equivalente a la ecuación de Pearson.

Supongamos ahora que la ecuación (2.19) admite una solución polinómica de grado n, digamos $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, con coeficiente líder $c_n \neq 0$. Por otro lado, sea $\rho(x)$ una solución de la ecuación de Pearson (2.6):

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x). \tag{2.6}$$

Entonces podemos escribir la ecuación (2.19) en su forma **simétrica** o **conjugada**:

$$[\rho(x)\sigma(x)y']' + \lambda\rho(x)y = 0. \tag{2.20}$$

Como vemos, las soluciones de la ecuación de Pearson y las soluciones de la ecuación hipergeométrica están íntimamente relacionadas. Benjamin Olinde Rodrigues (1795–1851) demostró que las soluciones polinómicas de la EDO (2.19) pueden escribirse de una peculiar y compacta forma hoy llamada fórmula de Rodrigues, que veremos que también caracteriza a los polinomios ortogonales clásicos.

2.3.3. Fórmula de Rodrigues

Originalmente, Olinde Rodrigues (1816), James Ivory (1824) y Carl Gustav Jacobi (1827) introdujeron una fórmula inicialmente definida para los polinomios de Legendre, posteriormente extendida a todas las soluciones polinómicas de la ecuación hipergeométrica. El nombre de fórmula de Rodrigues fue propuesto por Eduard Heine en 1878, después de que Hermite recuperara en 1860 el trabajo original de Rodrigues y señalara que fue él el primero en descubrir esta fórmula. Ya anunciada la peculiaridad de esta fórmula, presentamos su aspecto y demostración en el siguiente resultado.

Teorema 2.6 (Fórmula de Rodrigues). *Las soluciones polinómicas de la ecuación hipergeométrica (2.19) pueden ser expresadas como*

$$y_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}(\rho(x)\sigma^n(x)), \tag{2.21}$$

donde $\rho(x)$ es una solución de la ecuación de Pearson (2.6).

Demostración. Por simplicidad en la notación, en esta demostración será omitida y asumida la dependencia de x en las distintas funciones. Al ser ρ una solución de la ecuación de Pearson (2.6), tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma(\rho\sigma^n)' &= \sigma(\sigma^{n-1}\cdot\sigma\,\rho)'\\ &= \sigma((n-1)\sigma^{n-2}\sigma'\sigma\rho+\sigma^{n-1}\tau\rho)\\ &= \rho\sigma^n((n-1)\sigma'+\tau),\end{aligned}$$

$$\sigma(\rho\sigma^n)' = \rho\sigma^n((n-1)\sigma'+\tau) \tag{2.22}$$

Derivamos ahora la ecuación (2.22) $n+1$ veces y dividimos entre la función peso $\rho(x)$. Para dividir la ecuación (2.22) $n+1$ veces aplicamos la fórmula de Leibniz[1] y tenemos en cuenta que, como σ tiene grado a lo sumo 2 el miembro de la izquierda se anularía a partir de la tercera derivada. Análogamente, como σ', τ tienen grado a lo sumo 1 el miembro derecho se anularía a partir de la segunda derivada. Así:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\sigma(\rho\sigma^n)'\right) = \sigma\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(\rho\sigma^n\right)+(n+1)\sigma'\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\rho\sigma^n\right)+\frac{(n+1)n}{2}\sigma''\frac{d^n}{dx^n}\left(\rho\sigma^n\right),$$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\rho\sigma^n((n-1)\sigma'+\tau)\right) = ((n-1)\sigma'+\tau)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\rho\sigma^n\right)+(n+1)\left((n-1)\sigma''+\tau'\right)\frac{d^n}{dx^n}\left(\rho\sigma^n\right)$$

Igualando los segundos miembros de ambas igualdades y dividiendo entre ρ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{\rho}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(\rho\sigma^n\right)+\frac{(n+1)\sigma'}{\rho}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\rho\sigma^n\right)+\frac{(n+1)n\sigma''}{2\rho}\frac{d^n}{dx^n}\left(\rho\sigma^n\right) &=\\ \frac{(n-1)\sigma'+\tau}{\rho}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\rho\sigma^n\right)+\frac{(n+1)\left((n-1)\sigma''+\tau'\right)}{\rho}\frac{d^n}{dx^n}\left(\rho\sigma^n\right)&\end{aligned} \tag{2.23}$$

Nuestro objetivo ahora es manipular (2.23) de forma que podamos comprobar que una función y_n dada como en (2.21) es una solución de la ecuación hipergeométrica (2.19). Si en (2.23) agrupamos términos y teniendo en cuenta la definición de y_n, tenemos la ecuación

$$\frac{\sigma}{\rho}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(\rho\sigma^n\right)+\frac{2\sigma'-\tau}{\rho}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\rho\sigma^n\right)-\left(\frac{n^2-n-2}{2}\sigma''+(n+1)\tau'\right)y_n=0 \tag{2.24}$$

seguidamente, debemos ajustar la ecuación de manera que los factores $1/\rho$ solo tengan n derivadas a su derecha. Para ello nos ayudamos de la siguiente identidad:

$$\frac{\sigma}{\rho}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left(\rho\sigma^n\right)=\sigma\left(\frac{1}{\rho}\frac{d^n}{dx^n}(\rho\sigma^n)\right)''-2\sigma(1/\rho)'\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(\rho\sigma^n\right)-\sigma(1/\rho)''\frac{d^n}{dx^n}(\rho\sigma^n). \tag{2.25}$$

Esta igualdad se puede deducir sin más que derivar dos veces el producto $\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\left(\frac{d^n}{dx^n}(\rho\sigma^n)\right)$ utilizando la fórmula de Leibniz e intercambiando miembros en la igualdad. Si calculamos explícitamente las derivadas primera y segunda de $1/\rho$ y aplicamos

[1]Fórmula de Leibniz: Sean $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales n-veces derivables en $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces se verifica en I que $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$.

que, como consecuencia de la ecuación de Pearson (2.6), $\rho' = \rho\frac{\tau-\sigma'}{\sigma}$, la ecuación (2.25) puede reducirse a

$$\frac{\sigma}{\rho}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(\rho\sigma^n) = \sigma y_n'' + \frac{2(\tau-\sigma')}{\rho}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\rho\sigma^n) - \left(\sigma'' - \tau' - \frac{\tau-\sigma'}{\rho}\right) y_n. \tag{2.26}$$

Si ahora sustituimos (2.26) en (2.24), con algunas simplificaciones obtenemos

$$\sigma y_n'' + \frac{\tau}{\rho}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\rho\sigma^n) - \left(\frac{n^2-n}{2}\sigma'' + n\tau' - \frac{\tau(\tau-\sigma')}{\sigma}\right) y_n = 0. \tag{2.27}$$

El último paso es aplicar la identidad

$$\frac{\tau}{\rho}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\rho\sigma^n) = \tau y_n' - \frac{\tau(\tau-\sigma')}{\sigma} y_n. \tag{2.28}$$

De forma similar a la ecuación (2.26), esta expresión se obtiene al derivar una sola vez el producto $\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\left(\frac{d^n}{dx^n}(\rho\sigma^n)\right)$, intercambiando miembros de la igualdad y teniendo en cuenta el valor de ρ' deducido de la ecuación de Pearson.

Sustituyendo (2.28) en (2.26) llegamos finalmente a

$$\sigma y_n'' + \tau y_n' - \left(\frac{n^2-n}{2}\sigma'' + n\tau'\right) y_n = 0. \tag{2.29}$$

Como $\deg\sigma \leq 2, \deg\tau \leq 1$, tenemos que $\frac{n^2-n}{2}\sigma'' + n\tau'$ es una constante, por lo que concluimos que y_n en efecto es una solución de (2.19).

Para finalizar, tenemos que probar que la solución y_n dada por la fórmula de Rodrigues (2.21) es un polinomio de grado n. Observemos que, aplicando de nuevo la fórmula de Leibniz para la derivada, tendríamos

$$y_n = \frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k\rho}{dx^k}\frac{d^{n-k}\sigma^n}{dx^{n-k}}.$$

Las derivadas $(n-k)$-ésimas de σ^n resultan en σ^k multiplicado por un polinomio de grado n. Por su parte, derivar k veces ρ, si aplicamos sucesivamente $\rho' = \rho\frac{\tau-\sigma'}{\sigma}$ obtenemos un polinomio de grado n multiplicado por ρ/σ^k. Así, al multiplicar los σ^k se cancelan, obteniendo finalmente una suma de polinomios multiplicada por ρ, que es cancelada por el término $1/\rho$ que queda fuera de la sumatoria.

REVIEW el último párrafo tiene lagunas

□

Como ya anunciamos en el teorema 2.4, los polinomios clásicos son soluciones polinómicas de la ecuación diferencial hipergeométrica. De acuerdo con este último resultado, podemos escribir los polinomios ortogonales clásicos mediante la fórmula de Rodrigues (2.21). Lo habitual es multiplicar la fórmula de Rodrigues por una constante B_n, la cual depende de la familia y de la estandarización que se desee. De esta forma, si $\{P_n\}$ es una SPO clásica respecto a la función peso $\rho(x)$, entonces

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}(\rho(x)\sigma^n(x)). \tag{2.30}$$

Y como ya anunciamos anteriormente, la fórmula de Rodrigues caracteriza a los polinomios ortogonales clásicos.

Teorema 2.7. *Si una SPO $\{P_n\}$ respecto a una función peso $\rho(x)$ se puede expresar mediante la fórmula de Rodrigues (2.30), entonces $\{P_n\}$ es una SPO clásica.*

Demostración. Si tomamos $n = 1$ en (2.30), obtenemos

$$\frac{P_1(x)}{B_1}\rho(x) = [\rho(x)\sigma(x)]'.$$

Si denotamos $\tau(x) := \frac{1}{B_1}P_1(x)$, que es claramente un polinomio de grado 1, tenemos que $\rho(x)$ verifica la ecuación de Pearson (2.6), por lo que $\{P_n\}$ es clásica. □

El conjunto completo de teoremas e implicaciones demostradas hasta el momento conforma el siguiente teorema de caracterización.

Teorema 2.8. *Sea $\{P_n\}$ una SPO reales respecto a un funcional* **u** *definido como en (2.5) a partir de la función peso $\rho(x)$. Sean $\sigma(x), \tau(x)$ dos polinomios de grado a lo sumo 2 y exactamente 1 respectivamente. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{P_n\}$ es una SPO clásica respecto a la función peso $\rho(x)$, solución de la EDO (2.6).*

2. *La sucesión de derivadas $\{P_n'\}$ es una SPO clásica respecto a la función peso $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$, solución de la EDO (2.14).*

3. *La sucesión de derivadas k-ésimas $\{P_n^{(k)}\}$ es una SPO clásica respecto a la función peso $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$, solución de la EDO (2.15).*

4. *Cada polinomio $P_n(x)$ es solución de la ecuación diferencial hipergeométrica (2.19).*

5. *$\{P_n\}$ puede ser expresado mediante la fórmula de Rodrigues (2.30).*

Ejemplo 5 (Fórmula de Rodrigues de los polinomios de Jacobi)**.** Pongamos en práctica lo aprendido a partir de un ejemplo en el que emplearemos lo que sabemos hasta el momento de los polinomios de Jacobi. Atendiendo a la tabla 2.1, sabemos que

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \qquad \tau(x) = -(\alpha+\beta+2)x + (\beta-\alpha) \qquad \rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$

con $x \in [-1, 1], \alpha, \beta > -1$. Con estos datos, tenemos que los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ son soluciones de la ecuación hipergeométrica

$$(1-x^2)y'' - ((\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

Y la fórmula de Rodrigues, teniendo en cuenta que se suele tomar $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, sería:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}.$$

n	$H_n(x)$	RR3T	Rodrigues	Nativa
0	1	1.1897×10^{-5}	0.0086	0.00019
1	$2x$	0.0133	0.0104	0.00028
2	$4x^2 - 2$	0.0449	0.0136	0.00035
3	$8x^3 - 12x$	0.1073	0.0133	0.00037
4	$16x^4 - 48x^2 + 12$	0.2161	0.0162	0.00041
5	$32x^5 - 160x^3 + 120x$	0.4162	0.0182	0.00051
6	$64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$	0.6752	0.0186	0.0186
7	$128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$	1.2009	0.0196	0.00054
8	$256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$	2.0665	0.0305	0.00061
9	$512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$	3.5725	0.0229	0.00064

Tabla 2.2: Polinomios de Hermite y tiempos de cálculo de distintos métodos

Ejemplo 6 (Cálculo de la SPO de Hermite mediante la fórmula de Rodrigues)**.** Recordemos el ejemplo 3, en el cual utilizamos la versión más primitiva de la RR3T para calcular de forma explícita los polinomios mónicos de Hermite. La fórmula de Rodrigues nos proporciona un nuevo método de cálculo explícito de polinomios, que es el que pondremos en práctica en este caso. En el archivo `software/Rodrigues.ipynb` se ha implementado el código necesario para este ejemplo.

De manera análoga a lo realizado en el ejemplo 5 y sabiendo que, por convenio, lo usual en los polinomios de Hermite es tomar $B_n = (-1)^n$, podemos deducir la siguiente fórmula de Rodrigues.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^{-2}}$$

Así, obtenemos los polinomios de Hermite estándar, los cuales se pueden consultar en la segunda columna de la tabla 2.2. En este caso se ha hecho también un análisis de tiempos de ejecución siguiendo la misma metodología que en el ejemplo 3. Es decir, se han realizado 10 ejecuciones independientes de cada polinomio y el dato presentado en la cuarta columna de la tabla es la media de estas diez ejecuciones. Como puede observarse, el cálculo mediante la fórmula de Rodrigues mejora considerablemente los tiempos de ejecución de la RR3T, de forma que para ninguno de estos grados alcanza media décima de ejecución, mientras que la RR3T alcanzaba el orden de segundos a partir de grado 7.

De hecho, con la fórmula de Rodrigues se ha conseguido calcular el polinomio de Hermite de grado 500 en tan sólo 15 segundos, lo cual contrasta con los casi 60 segundos que tardó la RR3T en calcular el polinomio de grado 15.

REVIEW Qué hago ahora? Puedo con el programita hartarme a poner gráficas, comparar las variaciones que hacen los parámetros en un grado fijo, las variaciones al aumentar el grado, etc.

O no hacer nada y dar por finalizado el capítulo que tiene ya 13 páginas.

CAPÍTULO 3

POLINOMIOS ORTOGONALES Y PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

Ejemplo 7 (Procesos de nacimiento y muerte lineales)**.** Sea el proceso de nacimiento y muerte dado por los parámetros

$$\lambda_n = (n+\beta)\kappa \qquad\qquad \mu_n = n\kappa,$$

donde $\beta, \kappa > 0$. Comprobaremos que los polinomios asociados a este proceso guardan una estrecha relación con los polinomios de Laguerre (TODO referencia a Laguerre).

Con estos parámetros, los polinomios de nacimiento y muerte $Q_n(x)$ siguen la relación de recurrencia

$$\begin{gathered} -xQ_n(x) = \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x) \Leftrightarrow \\ -xQ_n(x) = (n+\beta)\kappa Q_{n+1}(x) - (2n+\beta)\kappa Q_n(x) + n\kappa Q_{n-1}(x) \end{gathered}$$

Si dividimos la ecuación entre κ, obtenemos

$$-\frac{x}{\kappa}Q_n(x) = (n+\beta)Q_{n+1}(x) - (2n+\beta)Q_n(x) + nQ_{n-1}(x) \tag{3.1}$$

Recordemos que los polinomios de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ obedecen a una relación de recurrencia a tres términos dada por

$$-xL_n^\alpha = (n+1)L_{n+1}^\alpha(x) - (2n+\alpha+1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_n^\alpha(x), \tag{3.2}$$

con $\alpha > -1$. Tomamos entonces

$$Q_n(x) = \frac{n!}{(\beta)_n} L_n^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right), \tag{3.3}$$

Si tomamos $\alpha = \beta - 1$, evaluamos (3.2) en x/κ y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $\dfrac{n!}{(\beta)_n}$, podemos aplicar las siguientes igualdades en los términos en $n+1$ y en $n-1$:

$$(n+1)\left[\frac{n!}{(\beta)_n}\right] L_{n+1}^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right) = (n+\beta)\frac{(n+1)!}{(\beta)_{n+1}} L_{n+1}^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right) = (n+\beta)Q_{n+1}(x),$$

y
$$(\beta+n-1)\left[\frac{n!}{(\beta)_n}\right]L_{n-1}^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right)=n\frac{(n-1)!}{(\beta)_{n-1}}L_{n-1}^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right)=nQ_{n-1}(x).$$

Aplicando estas igualdades, tenemos que (3.2) es equivalente a (3.1).

Por tanto, los polinomios asociados al proceso de nacimiento y muerte de este ejemplo son los presentados en (3.3). Por tanto, $Q_i(x)$ son ortogonales en $[0,+\infty)$ con respecto a la función peso

$$\rho(x)=ce^{-x/\kappa}x^{\beta-1},$$

donde c es una constante de estandarización.

Por tanto, podemos calcular las probabilidades de transición aplicando la ecuación (TODO referencia) y teniendo en cuenta que

$$\pi_i=\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\cdots\mu_i}=\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+i-1)}{i!}=\frac{(\beta)_i}{i!}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t)&=P[X_t=j/X_0=i]\\
&=\pi_j\int_0^\infty e^{-xt}Q_i(x)Q_j(x)\rho(x)dx\\
&=c\,\frac{(\beta)_j}{j!}\int_0^\infty e^{-xt}\left[\frac{i!}{(\beta)_i}L_i^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right)\right]\left[\frac{j!}{(\beta)_j}L_j^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right)\right]e^{-\frac{x}{\kappa}}x^{\beta-1}dx\\
&=c\,\frac{(\beta)_i}{i!}\int_0^\infty e^{-x(t+\frac{1}{\kappa})}x^{\beta-1}L_i^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right)L_j^{\beta-1}\left(\frac{x}{\kappa}\right)dx.
\end{aligned}$$

CONCLUSIONES

Las conclusiones

BIBLIOGRAFÍA

[Alv03] Renato Alvarez Nodarse. *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios (Monografias del Seminario matematico)*. Ene. de 2003.

[AS64] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. ninth Dover printing, tenth GPO printing. New York: Dover, 1964.

[AWH13] George B. Arfken, Hans J. Weber y Frank E. Harris. "Chapter 12 - Further Topics in Analysis". En: *Mathematical Methods for Physicists (Seventh Edition)*. Ed. por George B. Arfken, Hans J. Weber y Frank E. Harris. Seventh Edition. Boston: Academic Press, 2013, págs. 551-598. ISBN: 978-0-12-384654-9. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384654-9.00012-8. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123846549000128.

[Chi11] Theodore Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Dover Publications, feb. de 2011.

[Dom22] Manuel Domínguez de la Iglesia. *Orthogonal polynomials in the spectral analysis of Markov processes : birth-death models and diffusion*. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. ISBN: 9781316516553.

[DX14] Charles Dunkl y Yuan Xu. *Orthogonal Polynomials of Several Variables: 155*. 2nd Revised ed. Cambridge University Press, ago. de 2014.

[KM58] Samuel Karlin y James McGregor. "Linear Growth, Birth and Death Processes". En: *Journal of Mathematics and Mechanics* 7.4 (1958), págs. 643-662. ISSN: 00959057, 19435274. URL: http://www.jstor.org/stable/24900526 (visitado 03-03-2023).

[Kul12] V. Kulkarni. *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. New York, Estados Unidos: Springer Publishing, 2012.

[MBP94] F. Marcellán, A. Branquinho y J Petronilho. "Classical orthogonal polynomials: A functional approach". En: *Acta Applicandae Mathematica* 34 (1994), págs. 283-303. DOI: 10.1007/BF00998681. URL: https://doi.org/10.1007/BF00998681.

[Sch00] Wim Schoutens. *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*. New York, Estados Unidos: Springer Publishing, 2000.

[Ste18] Stefan Steinerberger. *Electrostatic Interpretation of Zeros of Orthogonal Polynomials*. 2018. DOI: 10.48550/ARXIV.1804.09697. URL: https://arxiv.org/abs/1804.09697 (visitado 07-03-2023).

[Tea23a] The Sage Development Team. *2D Graphics. Release 9.8*. 2023. URL: https://doc.sagemath.org/pdf/en/reference/plotting/plotting.pdf (visitado 07-03-2023).

[Tea23b] The Sage Development Team. *Orthogonal polynomials - Functions*. 2023. URL: https://doc.sagemath.org/html/en/reference/functions/sage/functions/orthogonal_polys.html (visitado 07-03-2023).

APÉNDICE A

APÉNDICE 1

Un apéndice