



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICAS
TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Polinomios Ortogonales

Fundamentos y aplicación a Procesos de Nacimiento
y Muerte

Autor: Juan Antonio Villegas Recio

Tutora: Lidia Fernández Rodríguez
Departamento de Matemática Aplicada

Cotutora: Antonia María Delgado Amaro
Departamento de Matemática Aplicada

CURSO 2022–2023
GRANADA, A 16 DE ENERO DE 2023

AGRADECIMIENTOS

Ya veremos a quién hay que agradecerle qué.

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

Yo, D. Juan Antonio Villegas Recio, autor de este TFM,

Declaro explícitamente que el trabajo aquí presentado como Trabajo de Fin de Máster de mis estudios en el Máster Interuniversitario en Matemáticas, correspondiente al curso académico 2022-2023, es original. Es decir, no se han utilizado para el desarrollo del trabajo fuentes sin haberlas citado debidamente.

Granada, a 16 de enero de 2023.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Juan Antonio', is written over a horizontal line.

Juan Antonio Villegas Recio

El resumen

Palabras clave

Las, palabras, clave.

ABSTRACT

The abstract

Keywords

The, abstract.

Lista de Abreviaturas	13
Lista de Imágenes	15
Introducción	17
Objetivos	19
1. Introducción a los Polinomios Ortogonales	21
1.1. Introducción	21
1.2. Ortogonalidad y función peso	22
1.3. Funcional de momentos	23
Conclusiones	29
Bibliografía	29
Apéndices	33
A. Apéndice 1	33

LISTA DE ABREVIATURAS

- PO: Polinomios Ortogonales

LISTA DE IMÁGENES

La introducción

OBJETIVOS

Los objetivos

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

1.1. Introducción

La *Ortogonalidad* es una propiedad que a menudo se ha relacionado con la geometría, siendo común pensar en la analogía con la *perpendicularidad*. Por ejemplo, es claro que en el plano vectorial \mathbb{R}^2 se tiene que los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son ortogonales, y es que estos forman un ángulo recto, y por ello también se dice que son perpendiculares. Sin embargo, este hecho no es más que una consecuencia de la ortogonalidad, y es que en el espacio vectorial \mathbb{R}^d , y en particular en \mathbb{R}^2 , dos vectores se dicen ortogonales si, al dotar a \mathbb{R}^d de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, el resultado de operar estos dos vectores es 0.

El producto escalar mayormente utilizado en \mathbb{R}^d es el usual, el cual, si $u = (u_1, \dots, u_d)$ y $v = (v_1, \dots, v_d)$ se define como

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle = u \cdot v^t = \sum_{i=1}^d u_i \cdot v_i. \end{aligned}$$

Y dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^d$ se dicen ortogonales siempre que $\langle u, v \rangle = 0$.

Sin embargo, en realidad la ortogonalidad va mucho más allá de \mathbb{R}^d y del producto escalar usual. Se puede utilizar cualquier espacio vectorial siempre que esté dotado de un producto escalar. En particular, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ pensemos en el espacio de Lebesgue $L^1(\Omega)$, el cual está dotado del producto vectorial

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^1 \times L^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx. \end{aligned}$$

Por ejemplo, si tomamos $\Omega = [0, \pi]$, tenemos que las funciones $\cos(n\theta), \cos(m\theta)$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$) son ortogonales siempre que $n \neq m$, pues

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = 0 \quad (n \neq m). \quad (1.1)$$

Si hacemos el cambio de variable $x = \cos(\theta)$, tenemos que $dx = -\sin(\theta)d\theta = \sin(-\theta)d\theta$, por lo que aplicando que $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) = 1$ y que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, tenemos que la ecuación (1.1) se expresa como

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = 0 \quad (n \neq m). \quad (1.2)$$

donde hemos denotado $T_n(x) = \cos(n\theta) = \cos(n \arccos(\theta))$ con $-1 \leq x \leq 1$.

Y tenemos que $T_0 = 1, T_1 = \cos(\theta) = x$, y aplicando identidades trigonométricas se puede deducir que $T_2 = 2x^2 - 1, T_3 = 4x^3 - 3x$, etc.

Por lo tanto, si definimos en $\mathbb{P}[x]$ el producto escalar

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{P}[x] \times \mathbb{P}[x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)\rho(x)dx, \end{aligned}$$

con $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, tenemos que las funciones (polinomios) T_n , $n \in \mathbb{N}_0$ son ortogonales entre sí en el espacio $(\mathbb{P}[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ siempre que $n \neq m$.

De acuerdo a este ejemplo, decimos que los polinomios T_n son *ortogonales*, o que la sucesión $\{T_n\}$ es una *Sucesión de Polinomios Ortogonales* con respecto a la *función peso* $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en el intervalo $(-1, 1)$. Los polinomios T_n recién presentados son los *Polinomios de Tchebichef de tipo I*, y conforman nuestra primera familia de polinomios ortogonales conocida.

1.2. Ortogonalidad y función peso

En la sección 1.1 pudimos ampliar el concepto generalmente conocido de ortogonalidad, restringido a espacios como \mathbb{R}^d , a otros tipos de espacios. Además, introdujimos la primera familia de polinomios ortogonales: los polinomios de Tchebichef de tipo I. En esta sección daremos definiciones más formales y genéricas sobre la ortogonalidad.

Sea α una función no decreciente y no constante definida en un intervalo (a, b) tal que si $a = -\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) > -\infty$ y si $b = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) < \infty$. Se define el espacio de funciones $L_\alpha^p[a, b]$ como el conjunto de funciones tales que

$$\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x) < +\infty$$

En $L_\alpha^2[a, b]$, se define un producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L_\alpha^2[a, b] \times L_\alpha^2[a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

A partir del espacio $L_\alpha^2[a, b]$ podemos dar una definición de ortogonalidad.

Definición 1.1 (Ortogonalidad). Fijada una función α no decreciente y no constante definida en un intervalo (a, b) tal que si $a = -\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) > -\infty$ y si $b = \infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) < \infty$ y dadas $f, g \in L^2_\alpha[a, b]$, se dice que las funciones **f y g son ortogonales** o que **f es ortogonal a g** respecto a la distribución $d\alpha$ si

$$\langle f, g \rangle = 0. \quad (1.4)$$

No obstante, en la mayoría de los casos y por simplicidad en lugar de utilizar una función α y su medida inducida, si α es absolutamente continua podemos reescribir (1.3) como una integral de Lebesgue

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx, \quad (1.5)$$

siendo ρ una función medible no negativa tal que $0 < \int_a^b \rho(x)dx < \infty$ denominada **función peso**.

Definición 1.2 (Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto a una función peso). Dada una función peso ρ , si existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ con P_n de grado n tal que

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)\rho(x)dx = 0 \quad (n \neq m)$$

entonces decimos que $\{P_n\}$ es una **Sucesión de Polinomios Ortogonales (SPO) respecto a la función peso $\rho(x)$** en el intervalo (a, b) .

1.3. Funcional de momentos

Tenemos ya por tanto una definición rigurosa de lo que es la ortogonalidad de funciones de $L^2_\alpha[a, b]$. Podemos reescribir esta propiedad mediante el uso de funcionales lineales aprovechando la linealidad de la integral. Se define el funcional \mathcal{L} como

TODO: Preguntar a Lidia qué espacio cojo como base porque en cada párrafo dice uno distinto.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^1_\alpha[a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)d\alpha(x). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por tanto, vemos que la propiedad de ortogonalidad (1.4) es equivalente a $\mathcal{L}[f \cdot g] = 0$.

Observación 1.1. El funcional \mathcal{L} es lineal, pues por la linealidad del operador integral se tiene que

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g], \quad (1.7)$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$ y $f, g \in L^1_\alpha[a, b]$.

Ejemplo 1. $\{T_n\}$, la sucesión de polinomios de Tchebichef de tipo I, es una Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto de la función peso $\rho(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ en el intervalo $(-1, 1)$. También podemos establecer la ortogonalidad de los respectivos $\{T_n\}$ no mediante un producto escalar sino a través del funcional

$$\mathcal{L}[f] := \int_{-1}^1 f(x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Por lo que podemos definir ortogonalidad indistintamente mediante un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o mediante un funcional integral \mathcal{L} .

A partir de este momento consideraremos el espacio vectorial de los polinomios \mathbb{P} . Denotaremos como \mathbb{P}_n al subespacio de \mathcal{P} formado por los polinomios de grado menor o igual que n .

Definición 1.3 (Momentos de un funcional). Dado un funcional \mathcal{L} , definimos los **momentos** del funcional, y los denotamos con μ_n , como

$$\mu_k = \mathcal{L}[x^k], \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.8)$$

Gracias a los momentos de un funcional y considerando que cualquier polinomio de grado n puede escribirse como $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ podemos entonces combinar (1.7) y (1.8) para escribir la acción de un funcional \mathcal{L} sobre $p(x)$ como

$$\mathcal{L}[p] = \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^n c_k x^k \right] = \sum_{k=0}^n c_k \mu_k$$

Por lo que, si combinamos únicamente conociendo la sucesión de momentos $\{\mu_n\}$ podríamos conocer el resultado de aplicar \mathcal{L} a cualquier polinomio. Por tanto, podríamos de nuevo dar una nueva definición de ortogonalidad respecto a funcionales lineales que en este caso estén definidos no mediante una integral como en el caso de (1.6), sino a partir de una sucesión de momentos $\{\mu_n\}$.

Definición 1.4 (Funcional de momentos). Dada una sucesión de números complejos $\{\mu_n\}$, diremos que \mathcal{L} es un **funcional de momentos** determinado por la sucesión $\{\mu_n\}$, donde μ_n se denomina **momento de orden n**, si \mathcal{L} es lineal en \mathbb{P} y $\mathcal{L}[x^n] = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}_0$

Daremos ahora una nueva definición de SPO, en este caso con respecto a un funcional lineal y no respecto a una función peso como hicimos en la definición 1.2.

Definición 1.5 (Sucesión de Polinomios Ortogonales respecto a un funcional lineal). Dado un funcional lineal \mathcal{L} definido como en (1.6), una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ es una **Sucesión de Polinomios Ortogonales (SPO) respecto al funcional \mathcal{L}** si:

1. P_n es de grado n .
2. $\mathcal{L}[P_n P_m] = 0$ si $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.
3. $\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

La sucesión $\{P_n\}$ se llamará **ortonormal** si $\mathcal{L}[P_n^2] = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

La sucesión $\{P_n\}$ se llamará **Sucesión de Polinomios Ortogonales Mónicos (SPOM)** si P_n es mónico para cada n , es decir, si $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.

En general, las condiciones (2) y (3) se suelen abreviar como

$$\mathcal{L}[P_n P_m] = K_n \delta_{mn}, \quad K_n \neq 0,$$

donde δ_{mn} denota la función delta de Kronecker.

En el caso de que $d\alpha(x) = \rho(x)dx$, es decir, en el caso de trabajar con funciones peso, la condición (3) se satisface de manera automática.

Ejemplo 2. Extraído de [Chihara, 2011, Capítulo 1, sección 1] Consideramos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

$\{P_n\}$ son los llamados *Polinomios de Charlier*. Como

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!} x(x-1) \cdots (x-n+1)$$

tenemos que $P_n(x)$ es un polinomio de grado n . En [Chihara, 2011] pueden encontrarse los cálculos rigurosos mediante los cuales, si definimos

$$\mathcal{L}[x^n] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

y extendemos \mathcal{L} a \mathbb{P} por linealidad, tenemos que

$$\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Al estar definido el funcional mediante sumatorias y no mediante integrales podría parecer que, aunque $\{P_n\}$ satisfaga la definición 1.5 mediante un funcional de momentos, no satisface la ortogonalidad respecto a (1.6). Sin embargo, si denotamos como ϕ a una función escalonada que es constante en cada intervalo $(-\infty, 0)$ y $(k, k+1)$ con $k \in \mathbb{N}_0$ y tiene saltos de magnitud $\frac{a^k}{k!}$ en cada k , entonces utilizando la integral de Riemann-Stieltjes los polinomios $\{P_n\}$ verifican

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) P_n(x) d\phi(x) = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.9)$$

Evidentemente ϕ no es una función absolutamente continua, por lo que no se puede escribir (1.9) en términos de (1.5).

Observación 1.2. No cualquier sucesión $\{\mu_n\}$ da lugar a una SPO. Por ejemplo, si $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, tendríamos que

$$P_0(x) = a \neq 0, \quad P_1(x) = bx + c, \quad b \neq 0.$$

Por la propiedad (2) de la definición 1.5

$$\mathcal{L}[P_0(x)P_1(x)] = a(b\mu_1 + c\mu_0) = a(b + c),$$

luego $b = -c$, y en este caso

$$\mathcal{L}[P_1(x)^2] = b^2(\mu_2 - 2\mu_1 + \mu_0) = 0,$$

lo cual contradice la propiedad (3).

Gracias a la observación 1.2 sabemos que no es válida cualquier sucesión de momentos para encontrar una SPO, por lo que necesitamos además probar y dar condiciones para la existencia de la susodicha SPO.

Previamente, introduciremos un resultado para la caracterización de SPO respecto a un funcional \mathcal{L} .

Teorema 1.1. *Sea \mathcal{L} un funcional de momentos y $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. $\{P_n\}$ es una SPO respecto al funcional \mathcal{L} .
2. $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = 0$ para cualquier polinomio $\pi(x)$ de grado $m < n$ y $\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] \neq 0$ si $\pi(x)$ tiene grado n .
3. $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{nm}$, con $K_n \neq 0$, $m = 0, 1, \dots, n$

Demostración. Probaremos $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

- $(1) \Rightarrow (2)$

Supongamos que $\{P_n\}$ es una SPO respecto al funcional \mathcal{L} . Como P_k tiene grado k , entonces $\{P_0, \dots, P_m\}$ forma una base de \mathbb{P}_m . Por lo que si $\pi(x)$ es un polinomio de grado m , existen constantes c_1, \dots, c_m , con $c_m \neq 0$ tales que $\pi(x) = c_k P_k(x)$. Como \mathcal{L} es lineal,

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_n(x)] = \sum_{k=0}^m c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_n(x)] = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ c_n \mathcal{L}[P_n^2(x)] & \text{si } m = n \end{cases}$$

- $(2) \Rightarrow (3)$ es trivial, basta con utilizar $\pi(x) = x^m$ y aplicar (2).
- $(3) \Rightarrow (1)$ también es trivial, pudiendo reconstruir $P_m(x)$ por linealidad.

□

En la prueba de este último teorema, hemos hecho uso de que mediante una SPO podemos obtener bases de \mathbb{P}_n . Sacaremos provecho de este hecho en el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal \mathcal{L} . Entonces, cualquier polinomio $\pi(x)$ de grado n es posible expresarlo en la base $\{P_0, \dots, P_n\}$ de forma que*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x), \quad \text{con } c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Demostración. Ya es claro que si $\pi(x)$ es un polinomio de grado n , entonces $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$. Por tanto, multiplicando ambos miembros de la igualdad por $P_m(x)$ y aplicando el funcional \mathcal{L} se obtiene

$$\mathcal{L}[\pi(x)P_m(x)] = \sum_{k=0}^n c_k \mathcal{L}[P_k(x)P_m(x)] = c_m \mathcal{L}[P_m^2(x)],$$

donde hemos aplicado la ortogonalidad. De esta igualdad se deduce claramente la expresión de c_k . □

Este resultado nos proporciona una consecuencia muy importante: la unicidad salvo constante multiplicativa de las SPO respecto a un funcional.

Corolario 1.3. *Sea $\{P_n\}$ una SPO respecto a un funcional lineal \mathcal{L} . Entonces cada P_n está unívocamente determinado salvo constante multiplicativa no nula. Esto es, si $\{Q_n\}$ es otra SPO respecto a \mathcal{L} , entonces existen constantes $c_n \neq 0$ tales que*

$$Q_n(x) = c_n P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Utilizaremos el teorema 1.2 con $\pi(x) = Q_n(x)$, de modo que

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]} P_k(x)$$

Por el teorema 1.1, $\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)] = 0$ siempre que $k < n$ y $\mathcal{L}[Q_n(x)P_k(x)] = c_n \neq 0$ si $k = n$, por lo que $Q_n(x) = c_n P_n(x)$, como queríamos probar. □

Este resultado nos afirma que si tenemos una SPO $\{P_n\}$ respecto a un funcional \mathcal{L} , entonces $\{c_n P_n\}$ también es una SPO para cualquier sucesión $\{c_n\}$ de constantes no nulas. Una forma de estandarizar una SPO de forma que esta esté unívocamente determinada es exigiendo que todos los polinomios que la conforman sean mónicos. De esta forma, podemos afirmar que si tenemos una SPO $\{P_n\}$ para un funcional \mathcal{L} , entonces existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos (SPOM) respecto a \mathcal{L} . De hecho, si denotamos como a_n al coeficiente líder de P_n , entonces los polinomios

$$\hat{P}_n(x) = a_n^{-1} P_n$$

forman una SPOM respecto a \mathcal{L} .

CONCLUSIONES

Las conclusiones

- [Alvarez Nodarse, 2003] Alvarez Nodarse, R. (2003). *Polinomios hipergeométricos y q -polinomios (Monografías del Seminario matematico)*.
- [Chihara, 2011] Chihara, T. (2011). *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Dover Publications.
- [Dunkl and Xu, 2014] Dunkl, C. and Xu, Y. (2014). *Orthogonal Polynomials of Several Variables: 155*. Cambridge University Press, 2nd revised ed. edition.
- [Kulkarni, 2012] Kulkarni, V. (2012). *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Springer Publishing, New York, Estados Unidos.
- [Schoutens, 2000] Schoutens, W. (2000). *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*. Springer Publishing, New York, Estados Unidos.

APÉNDICE A

APÉNDICE 1

Un apéndice