Tema 2: Superficies

Resumen y formulario

Juan Antonio Villegas

12 de junio de 2024

Superficies en forma implícita y explícita

Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Entonces se define una superficie S como

$$S = \ker(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}.$$

- Superficies en forma explícita: Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Sea $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

- Vector normal a la superficie S en p:

$$\vec{n}(p) = \vec{\nabla} F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

- Plano tangente a la superficie S en p:

$$\{q \in \mathbb{R}^3 : \langle q - p, \vec{n}(p)\rangle = 0\} =$$

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0\right\}$$

Superficies en forma paramétrica

Sea $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

entonces se define la superficie S como

$$S = \mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(u, v) : (u, v) \in D\}.$$

Sea $p = (x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0) \in S$.

- Vector normal a la superficie S en p:

$$\vec{n}(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(p) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(p)$$

  (producto **vectorial** de las derivadas parciales de la parametrización con respecto a cada uno de los parámetros evaluado en el punto p.)

- Plano tangente a la superficie S en p:

$$\{q \in \mathbb{R}^3 : \langle q - p, \vec{n}(p)\rangle = 0\} =$$

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\langle q - p, \frac{\partial \varphi}{\partial u}(p) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(p)\right\rangle = 0\right\}$$

Tipos especiales de superficies

Superficies de revolución

- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.
  - La superficie engendrada al revolucionar la gráfica de la curva $z = f(y), x = 0$ (plano YZ) alrededor del eje Z admite la parametrización
  $$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), f(\rho)), \quad \rho \in U \subseteq \text{Dom}(f),\ \theta \in [0, 2\pi[$$
  - La superficie engendrada al revolucionar la gráfica de la curva $y = f(x), z = 0$ (plano XY) alrededor del eje Y admite la parametrización
  $$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), f(\rho), \rho \sin(\theta)), \quad \rho \in U \subseteq \text{Dom}(f),\ \theta \in [0, 2\pi[$$
  - La superficie engendrada al revolucionar la gráfica de la curva $x = f(z), y = 0$ (plano XZ) alrededor del eje X admite la parametrización
  $$\varphi(\rho, \theta) = (f(\rho), \rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)), \quad \rho \in U \subseteq \text{Dom}(f),\ \theta \in [0, 2\pi[$$
- Sea $\alpha(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$ una curva de $\mathbb{R}^2$. Podemos inscribir esta curva en uno de los planos coordenados ($x = 0, y = 0$ ó $z = 0$) y revolucionar respecto a uno de los ejes.
  - Inscribimos la curva en el plano $x = 0$ (plano YZ) y revolucionamos respecto al eje Z:
  $$\varphi(t, \theta) = (\tilde{x}(t) \cos(\theta), \tilde{x}(t) \sin(\theta), \tilde{y}(t)), \quad t \in I,\ \theta \in [0, 2\pi[$$
  - Inscribimos la curva en el plano $z = 0$ (plano XY) y revolucionamos respecto al eje Y:
  $$\varphi(t, \theta) = (\tilde{x}(t) \cos(\theta), \tilde{y}(t), \tilde{x}(t) \sin(\theta)), \quad t \in I,\ \theta \in [0, 2\pi[$$
  - Inscribimos la curva en el plano $y = 0$ (plano XZ) y revolucionamos respecto al eje X:
  $$\varphi(t, \theta) = (\tilde{y}(t), \tilde{x}(t) \cos(\theta), \tilde{x}(t) \sin(\theta)), \quad t \in I,\ \theta \in [0, 2\pi[$$

Superficies de traslación

- Dadas dos curvas $\alpha_1 : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\alpha_2 : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con un punto en común $p_0 = \alpha_1(u_0) = \alpha_2(v_0)$, se considera la parametrización
$$\varphi(u, v) = \alpha_1(u) + \alpha_2(v) - p_0, \quad u \in I, v \in J.$$

Superficies regladas

Sean una curva $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (directriz o curva base) y sea $\vec{v} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (generatriz), consideramos la parametrización.
$$\varphi(t, \lambda) = \alpha(t) + \lambda \vec{v}(t), \quad t \in I, \lambda \in J \subseteq \mathbb{R}.$$

Curvas coordenadas. Curvas de nivel. Curvas en superficies

Sea $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S.
$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

Fijamos $p = \varphi(u_0, v_0)$.

- Curvas coordenadas de S que pasan por p:
$$\varphi_1(u) = \varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$
$$\varphi_2(v) = \varphi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$
- Curvas de nivel para $C \in \mathbb{R}$: $\{(u, v) : z(u, v) = C\}$
- Curvas en superficies. Sea $\tilde{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ una curva de $\mathbb{R}^2$. Consideramos la curva
$$\alpha(t) = \varphi(\tilde{\alpha}(t)) = \varphi(u(t), v(t)), \quad t \in I.$$

Áreas y volúmenes

Sea $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S.

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

- Elemento diferencial de Área

$$d\vec{S}(u,v) = \vec{n}(u,v)\ du\ dv = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\ du\ dv.$$

- Área de una superficie

$$A = \int_S d\vec{S} = \int_D \|d\vec{S}\| = \int_D \|\vec{n}(u,v)\|\ du\ dv$$

  Si $u \in [a,b], v \in [c,d]$ (si los parámetros toman ambos valores en intervalos)

$$A = \int_S d\vec{S} = \int_a^b \int_c^d \|\vec{n}(u,v)\|\ du\ dv = \int_a^b \left(\int_c^d \|\vec{n}(u,v)\|\ dv \right) du = \int_c^d \left(\int_a^b \|\vec{n}(u,v)\|\ du \right) dv$$

  (no importa el orden en el que se integre)

- **Área de superficies de revolución**: Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y consideramos la superficie de revolución

$$\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), f(\rho)), \quad \rho \in [a,b],\ \theta \in [0, 2\pi[$$

  Entonces podemos calcular su área mediante la integral de una variable

$$A = 2\pi \int_a^b \rho\sqrt{1 + (f'(\rho))^2} d\rho.$$

Curvaturas media y gaussiana

Sea $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S.

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

Sea $p \in S = \varphi(u,v)$

- Curvatura gaussiana: $K(p)$
- Curvatura media: $H(p)$
- Curvaturas principales: $k_1(p) \leq k_2(p)$
- Primera forma fundamental: $M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$
- Segunda forma fundamental: $\Sigma = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$
- Matriz de Weingarten: $W_p = M^{-1}\Sigma$

1. Parametrización $\varphi \rightarrow$ Primera y segunda forma fundamental M, Σ.

$$E(u,v) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \right\rangle, \qquad F(u,v) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \right\rangle,$$

$$G(u,v) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \right\rangle$$

- Aplicación de Gauss (vector normal unitario)

$$n(u,v) = \frac{\vec{n}(u,v)}{\|\vec{n}(u,v)\|} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)}{\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\right\|}$$

$$e(u,v) = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(u,v), n(u,v) \right\rangle, \qquad f(u,v) = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}(u,v), n(u,v) \right\rangle,$$

$$g(u,v) = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(u,v), n(u,v) \right\rangle$$

2. Primera y segunda forma fundamental $M, \Sigma \to$ Curvaturas y gaussiana y media K, H.

$$K(p) = K(u,v) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H(p) = H(u,v) = \frac{1}{2}\frac{eG + Eg - 2fF}{EG - F^2}$$

3. Curvaturas gaussiana y media $K, H \to$ Curvaturas principales k_1, k_2.

   Soluciones de la ecuación de segundo grado

$$k_i^2 - 2H(p)k_i + K(p) = 0,$$

   donde la incógnita es k_i. La ecuación tiene dos soluciones, que serán las dos curvaturas principales, o una, en cuyo caso las dos curvaturas principales coinciden y el punto es umbilical.

4. Curvaturas principales k_1, k_2 Curvaturas gaussiana y media K, H

$$K(p) = K(u,v) = k_1 k_2, \qquad H(p) = H(u,v) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

5. Primera y segunda forma fundamental $M, \Sigma \to$ Matriz de Weingarten W_p

$$W_p = M^{-1}\Sigma = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

6. Matriz de Weingarten $W_p \to$ Curvaturas principales k_1, k_2.

   Las curvaturas principales k_1, k_2 son los valores propios de la matriz

$$A_p = -W_p = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

7. Matriz de Weingarten $W_p \to$ Curvaturas gaussiana y media K, H

$$K(p) = K(u,v) = \det(A_p) = \det(-W_p), \qquad H(p) = H(u,v) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_p) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(-W_p)$$

8. Siempre se cumple $K(p) \leq H(p)^2$