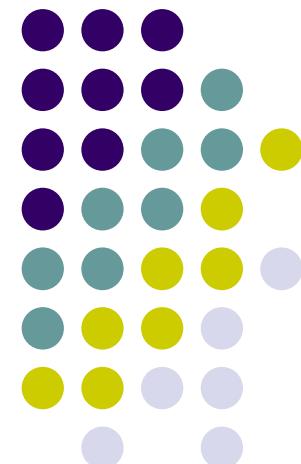


数字图像处理

第四讲
频率域滤波





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现





图像变换

- 空间域 (spatial domain)
 - 直接对图像的像素进行操作
- 变换域 (transform domain)
 - 将图像从空间域变换到新的域
 - 在变换域对图像进行操作
 - 利用反变换返回空间域
- 频率域 (frequency domain)
 - 一种特殊的变换域
 - 以傅里叶变换为基础

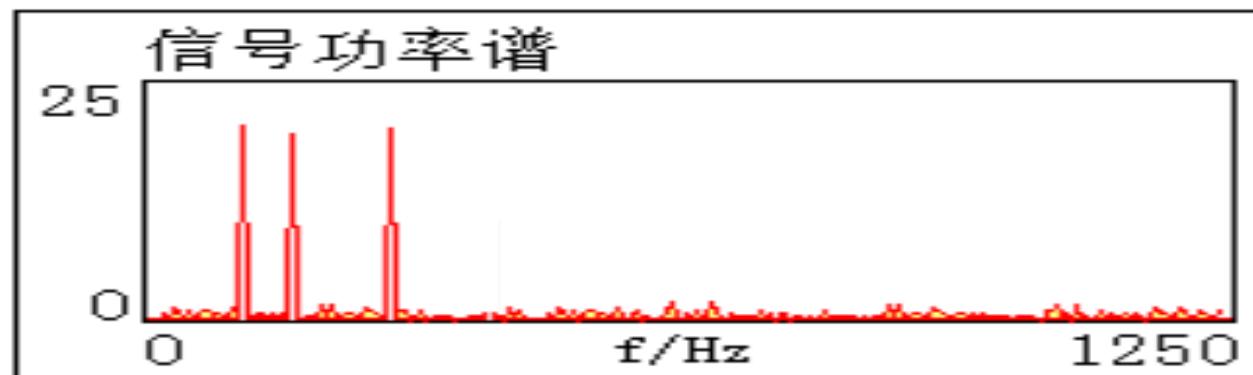
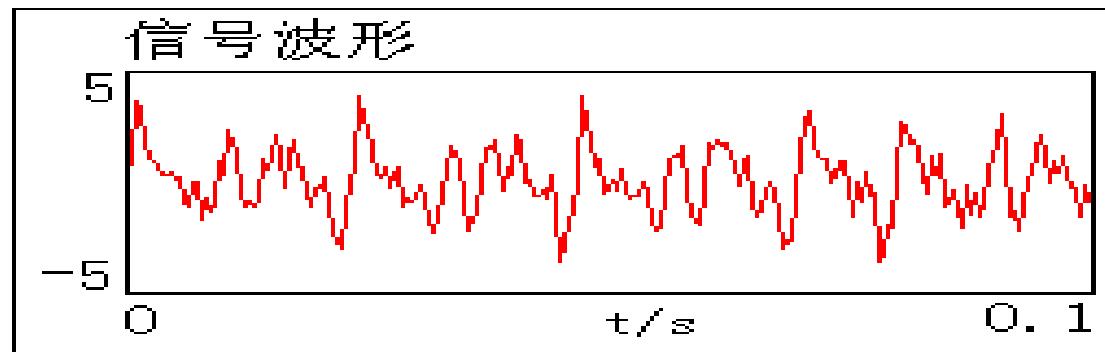




图像是连续信号的量化采样

- 信号通常包括丰富的频域信息

图例：受噪声干扰的多频率成分信号





怎么把信号投影到频域空间？

- 傅里叶，法国数学家、物理学家（1768-1830）
- 《热分析理论》



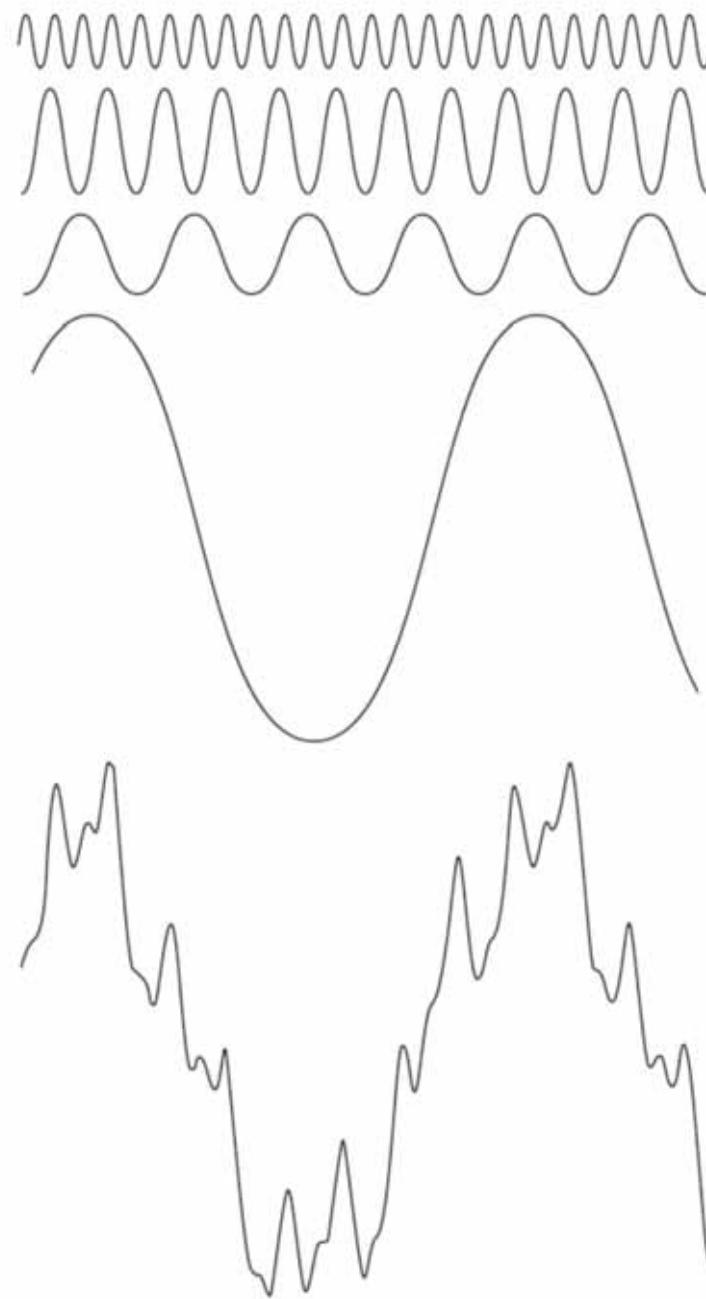
傅里叶级数

任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦函数和/或余弦函数加权之和



示例

四个波形
的叠加





怎么把信号投影到频域空间？

- 傅里叶，法国数学家、物理学家（1768-1830）
- 《热分析理论》



傅里叶变换

非周期函数也可以表示为不同频率的正弦函数和/或余弦函数加权之后的积分





傅里叶变换的意义

- 解决了频域信息如何表示
 - 没有信息损失
- 最早用于热扩散领域
 - 推广到整个工业界和学术界
- 带来了“信号处理领域”的一场革命
 - 1960 计算机、快速傅里叶变换





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现



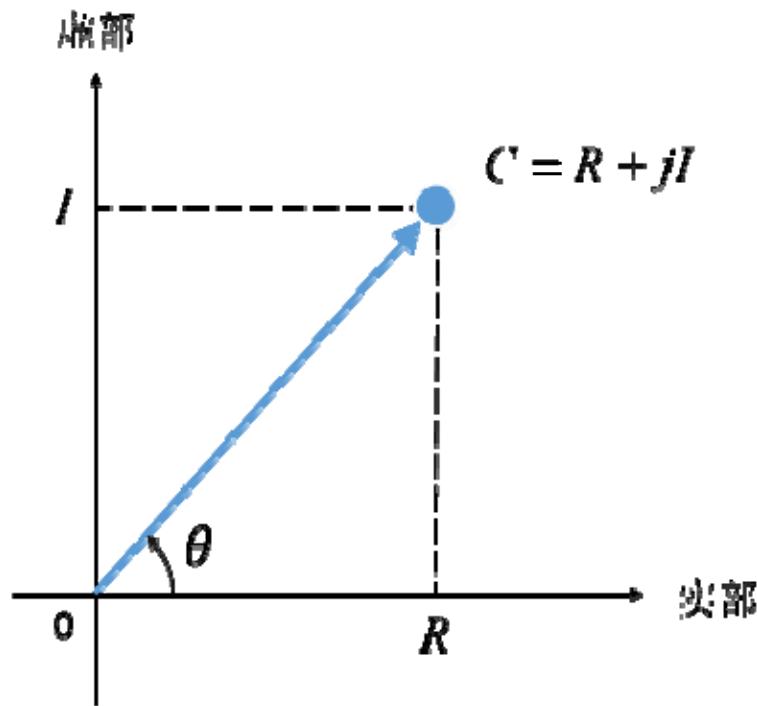


复数

- 复数 C

$$C = R + jI$$

- R 和 I 是实数、 $j = \sqrt{-1}$ 是虚数





复数

- 复数 C

$$C = R + jI$$

- R 和 I 是实数、 $j = \sqrt{-1}$ 是虚数

- 极坐标表示

$$C = |C|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

- $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$ 为长度
- θ 为夹角





复数

- 欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula

- 极坐标表示

$$\begin{aligned} C &= |C|(\cos \theta + j \sin \theta) \\ &= |C|e^{j\theta} \end{aligned}$$

- $1 + j2 = \sqrt{5}e^{j\theta}, \theta = 1.1$
- C 的共轭 C^*

$$C^* = R - jI$$





复函数

- 复函数

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

- 幅值 $|F(u)| = \sqrt{R(u)^2 + I(u)^2}$
- 角度 $\theta = \arctan[I(u)/R(u)]$, $[-\pi, \pi]$

- 复共轭函数

$$F(u) = R(u) - jI(u)$$





连续冲激与采样

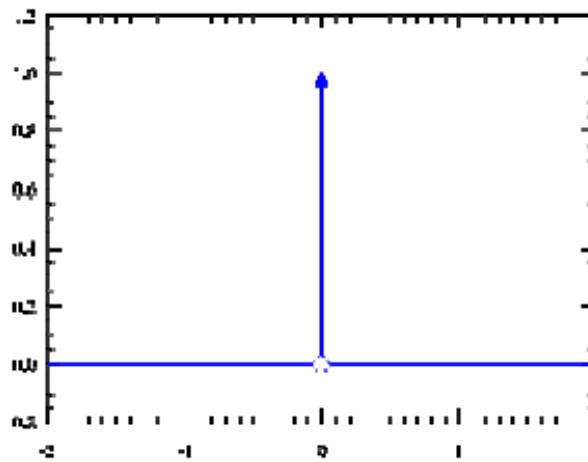
- 在0处的连续单位冲激

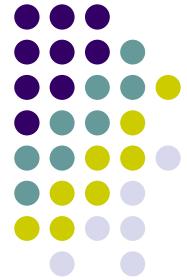
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- 长度为0
- 高度为 ∞
- 面积为1





连续冲激与采样

- 在0处的连续单位冲激

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$





连续冲激与采样

- 在 t_0 处的连续单位冲激

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = t_0 \\ 0 & \text{if } t \neq t_0 \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$





离散冲激与采样

- 在0处的离散单位冲激

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

- 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) = f(0)$$





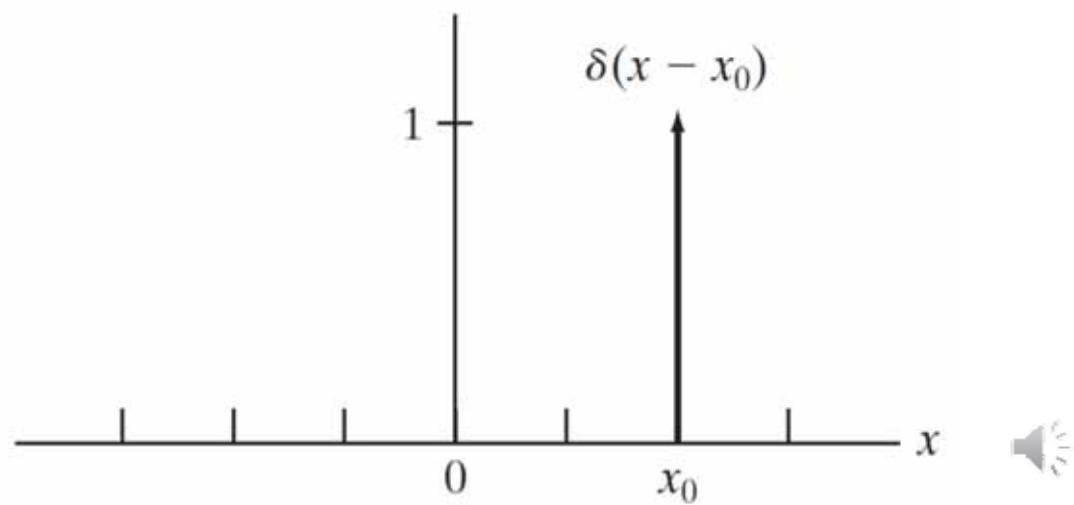
离散冲激与采样

- 在 x_0 处的离散单位冲激

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0 \\ 0 & \text{if } x \neq x_0 \end{cases}$$

- 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) = 1$$





离散冲激与采样

- 在 x_0 处的离散单位冲激

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0 \\ 0 & \text{if } x \neq x_0 \end{cases}$$

- 并且满足 $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) = 1$

- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$$



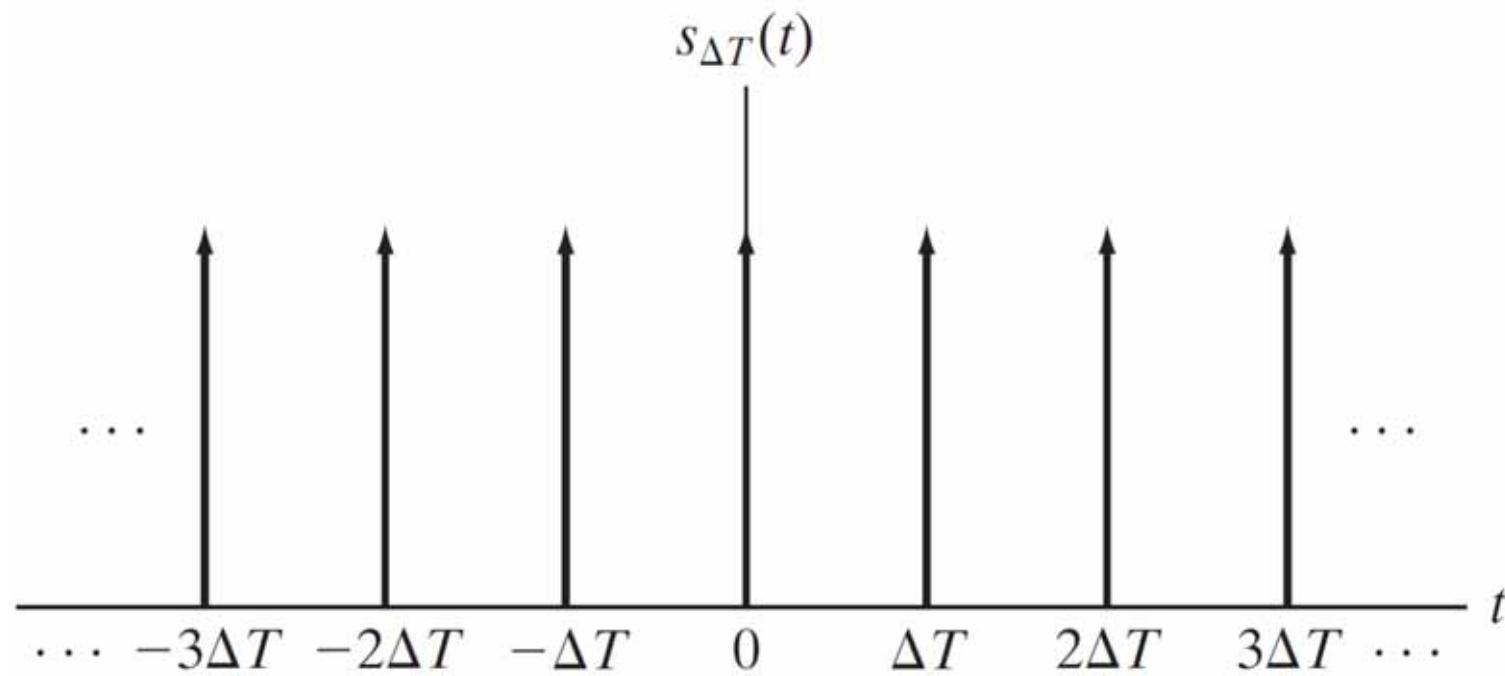


冲激串

- 无穷个以 ΔT 为间距的冲激之和

- 连续
- 离散

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现





连续傅里叶变换

- 连续函数 $f(t)$ 的傅里叶变换

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- 其中 μ 是连续变量
- 表示成 μ 的函数

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- 欧拉公式

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)] dt$$





连续傅里叶变换

- 傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)] dt$$

- 通常是复数
- μ 出现在三角函数内，代表频率
- t 是秒、 μ 是周/秒（赫兹）
- t 是米、 μ 是周/米





傅里叶变换对

- 傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- 傅里叶反变换

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

- 对比：傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$





举例

- 盒状函数的傅里叶变换

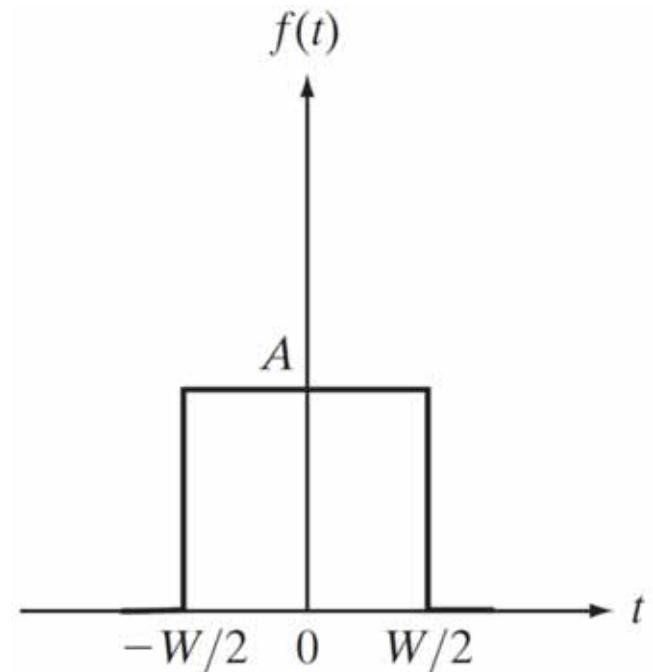
$$\begin{aligned} F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[e^{-j2\pi\mu t} \right]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W} \right] \\ &= \frac{A}{j2\pi\mu} \left[e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W} \right] \\ &= AW \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \end{aligned}$$

- $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$

- sinc 函数

$$\text{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)}$$

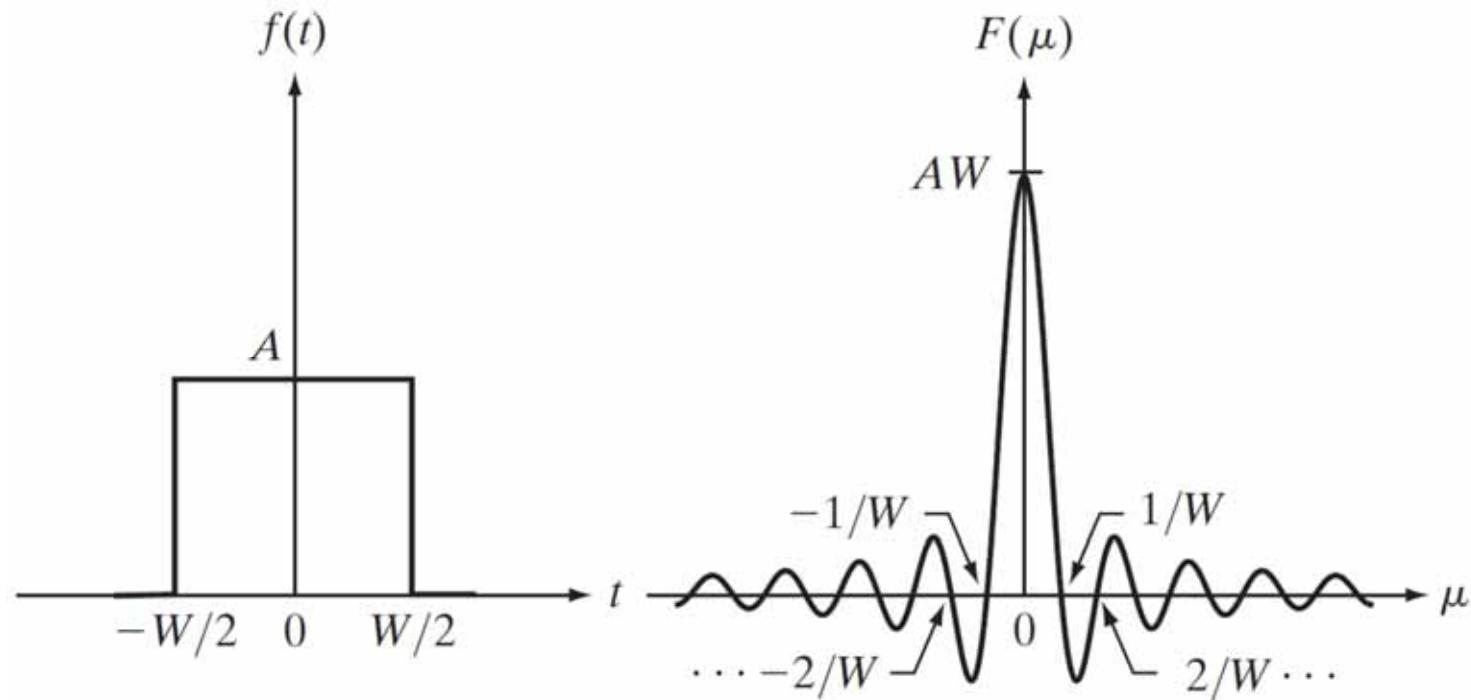
- 实数





举例

- 盒状函数的傅里叶变换

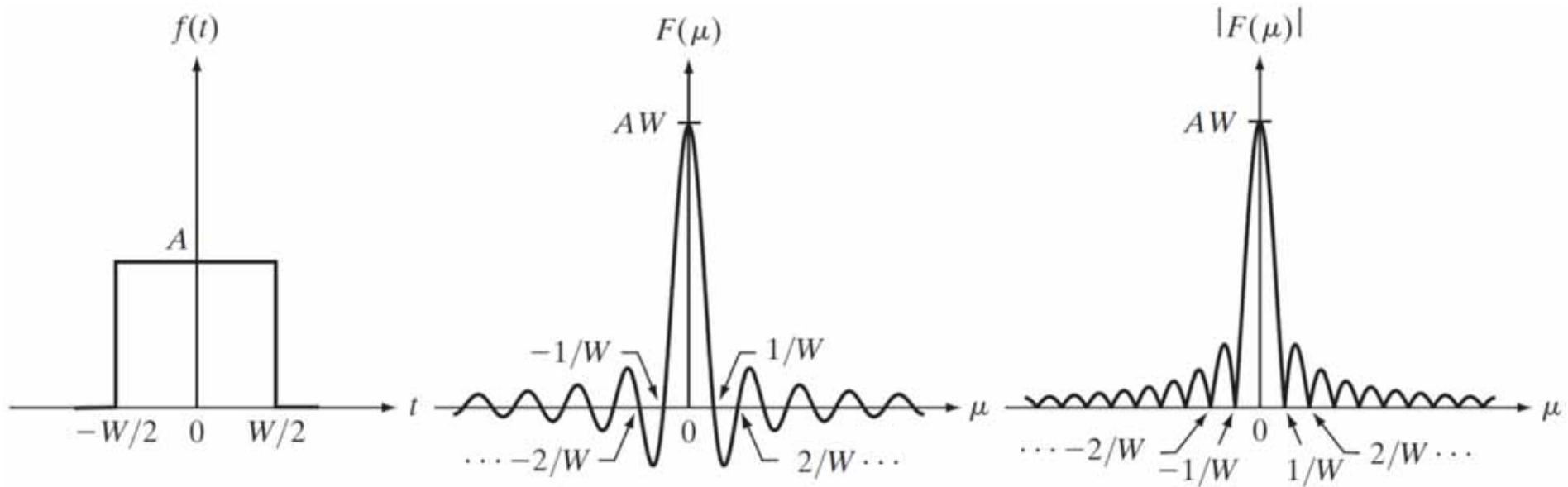




傅里叶谱/频谱

- 傅里叶变换的幅值

$$|F(\mu)| = AW \left| \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \right|$$



- 零的位置与 W 成反比、逐渐降低、无限延伸





举例

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

- 连续单位冲激的傅里叶变换

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t} \delta(t) dt \\ &= e^{-j2\pi\mu 0} = e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- t_0 处连续单位冲激的傅里叶变换

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t} \delta(t - t_0) dt \\ &= e^{-j2\pi\mu t_0} \\ &= \cos(2\pi\mu t_0) - j \sin(2\pi\mu t_0) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$





对称性

- $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mu)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu \quad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- $F(t)$ 的傅里叶变换为 ?





对称性

- $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mu)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu \quad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- $F(t)$ 的傅里叶变换为 $f(-\mu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = f(-\mu)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi u t} du$$





对称性

- $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mu)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu \quad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- $F(t)$ 的傅里叶变换为 $f(-\mu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = f(-\mu)$$

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} e^{-j2\pi\mu t_0} \quad e^{-j2\pi t_0 t} \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} \delta(-\mu - t_0)$$





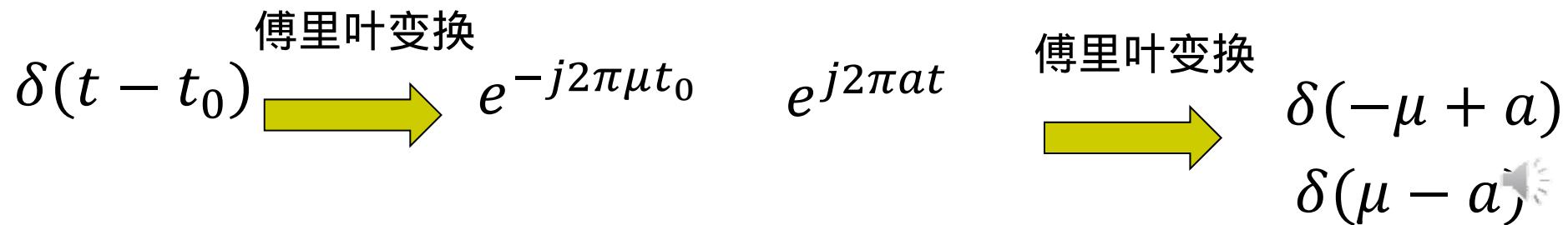
对称性

- $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mu)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu \quad F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- $F(t)$ 的傅里叶变换为 $f(-\mu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = f(-\mu)$$



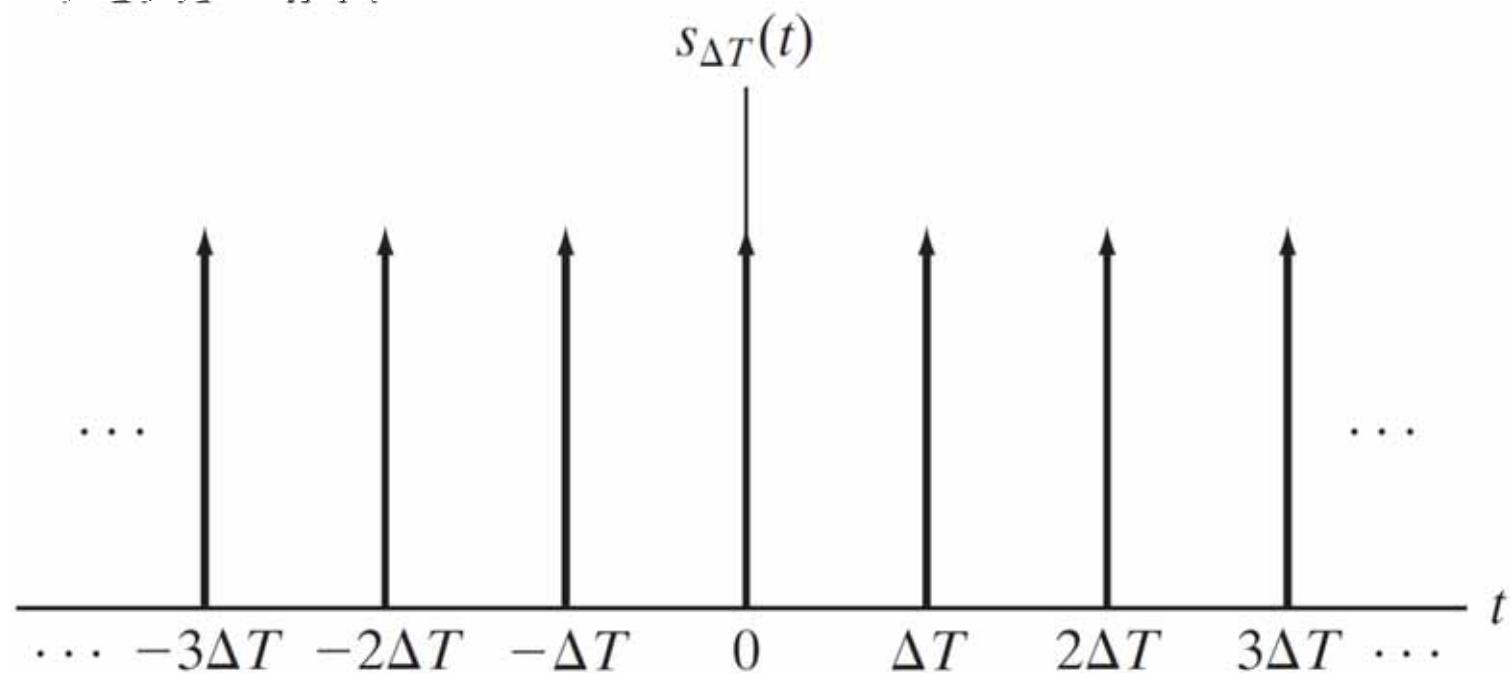


举例

- 冲激串

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

- 周期函数





举例

- 冲激串

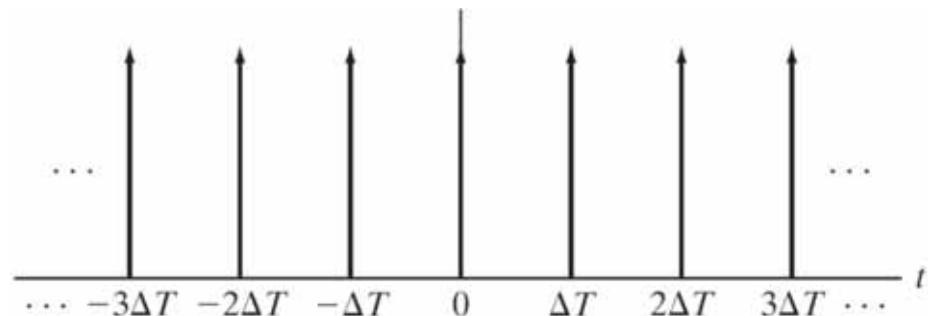
$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

- 傅里叶级数

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t}$$

- 其中

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} s_{\Delta T}(t) e^{-j \frac{2\pi n}{\Delta T} t} dt$$





举例

- 冲激串

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

- 傅里叶级数

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t}$$

- 其中

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \delta(t) e^{-j \frac{2\pi n}{\Delta T} t} dt$$

$$= \frac{1}{\Delta T} e^0$$

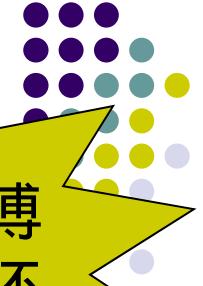
$$= \frac{1}{\Delta T}$$



举例

- 冲激串

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



冲激串的傅里叶变换还是冲激串

- 傅里叶级数

$$s_{\Delta T}(t) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t}$$

- 傅里叶变换

$$S(\mu) = \Im\{s_{\Delta T}(t)\}$$

$$= \Im\left\{ \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t} \right\}$$

$$\Im\left\{ e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t} \right\} = \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right) \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{\Delta T} \Im\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \frac{2\pi n}{\Delta T} t} \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$





离散卷积

● 旋转、补零、计算、滑动、裁剪

Origin f
0 0 0 1 0 0 0

w rotated 180°
8 2 3 2 1

(i)

0 0 0 1 0 0 0 0
8 2 3 2 1

(j)

0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (m)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (n)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (k)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (l)
8 2 3 2 1

Full convolution result
0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0 (o)

Cropped convolution result
0 1 2 3 2 8 0 0 (p)





连续卷积

- 连续函数的卷积

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- t 是位移、负号表示反转
- 傅里叶变换

$$\Im\{f(t) \star h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{-j2\pi\mu t} dt \right] d\tau$$





连续卷积

- 平移性质

$$\Im\{h(t - \tau)\} = H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}$$

- 化简

$$\Im\{f(t) \star h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}] d\tau$$

$$= H(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j2\pi\mu\tau} d\tau$$

$$= H(\mu) F(\mu)$$





卷积定理

- 空间域卷积的傅里叶变换 \Leftrightarrow 傅里叶变换在频率域的乘积

$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow H(\mu) F(\mu)$$

- 空间域乘积的傅里叶变换 \Leftrightarrow 傅里叶变换在频率域的卷积

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

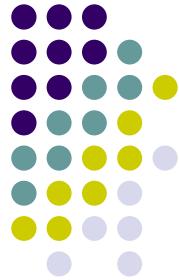




提纲

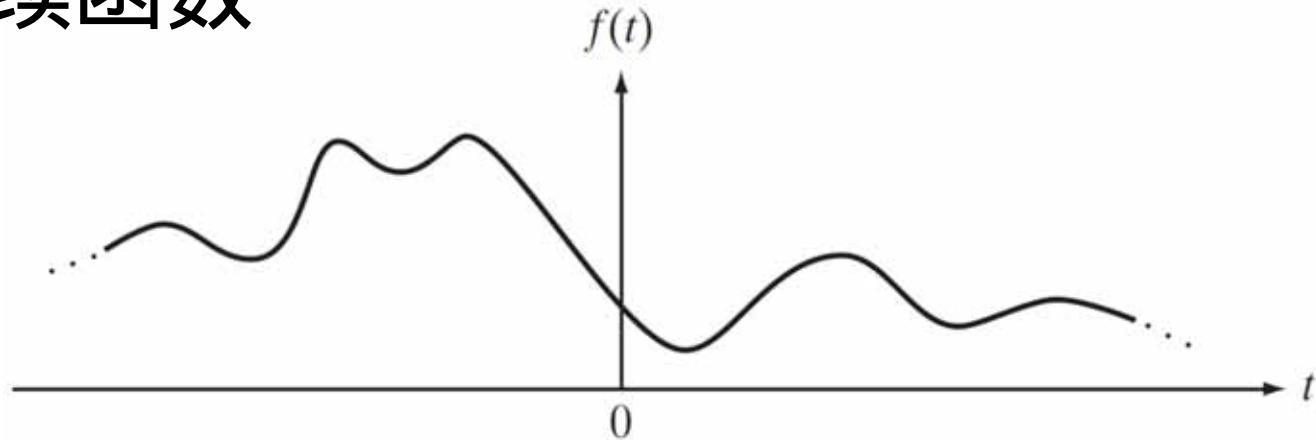
- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现



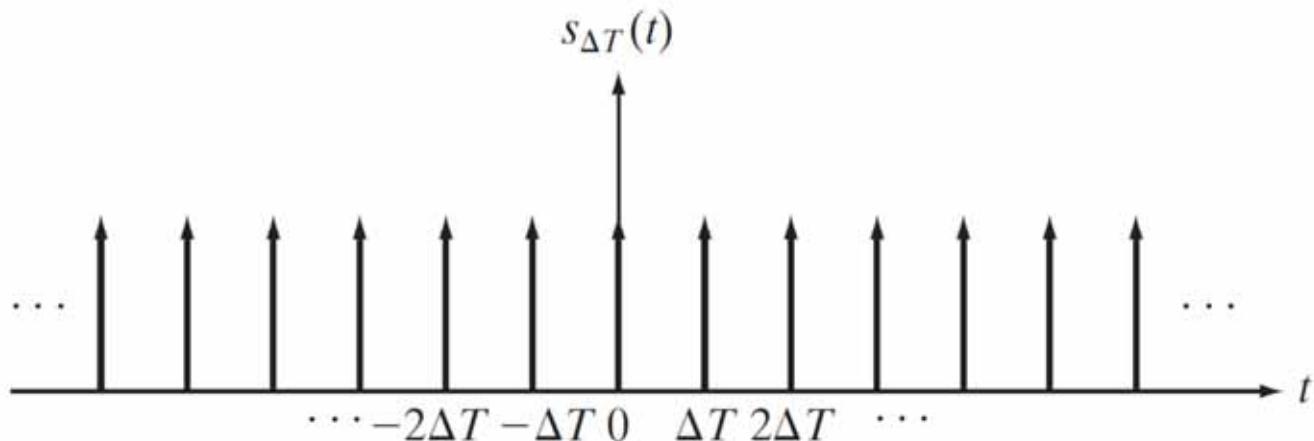


连续函数采样

- 连续函数



- ΔT 为间隔的冲激串

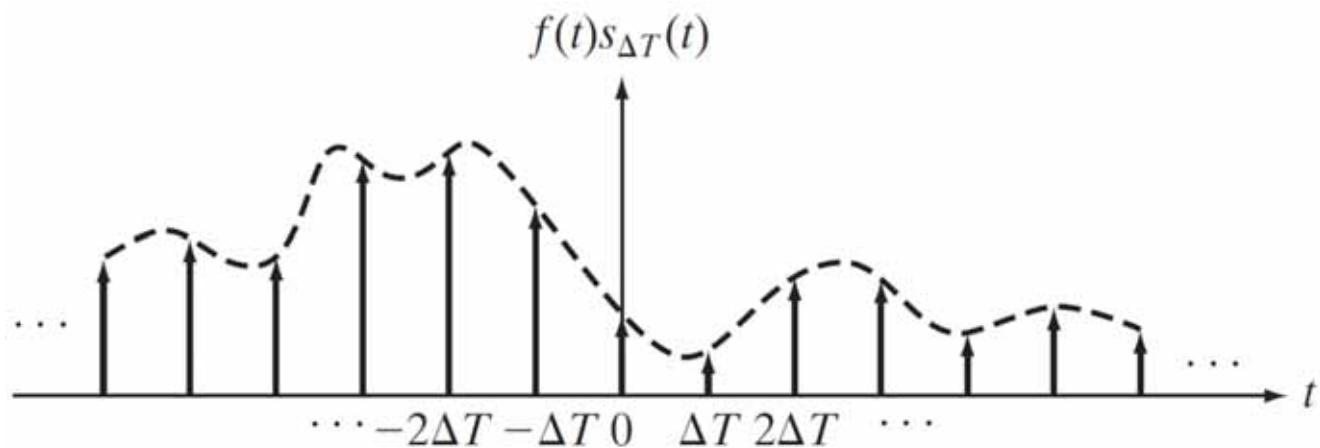




连续函数采样

● 函数相乘

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

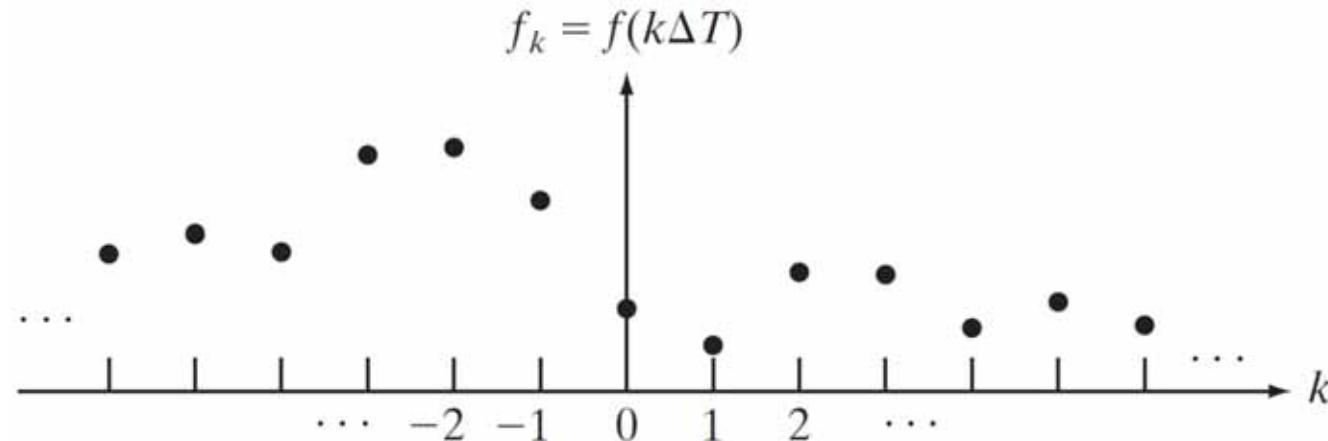




连续函数采样

- 采样值 $\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T)$

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - k\Delta T) dt = f(k\Delta T)$$



思考：能否通过离散的采样点，恢复连续函数？





采样后函数的傅里叶变换

- 采样后函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 卷积定理

$$\tilde{F}(\mu) = \Im\{\tilde{f}(t)\} = \Im\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(\mu) \star S(\mu)$$

- 其中

$$S(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$





采样后函数的傅里叶变换

- 化简

- 无限、周期性拷贝

$$\tilde{F}(\mu) = F(\mu) \star S(\mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu - \tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau$$

- 间隔 $1/\Delta T$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau$$

- 连续

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

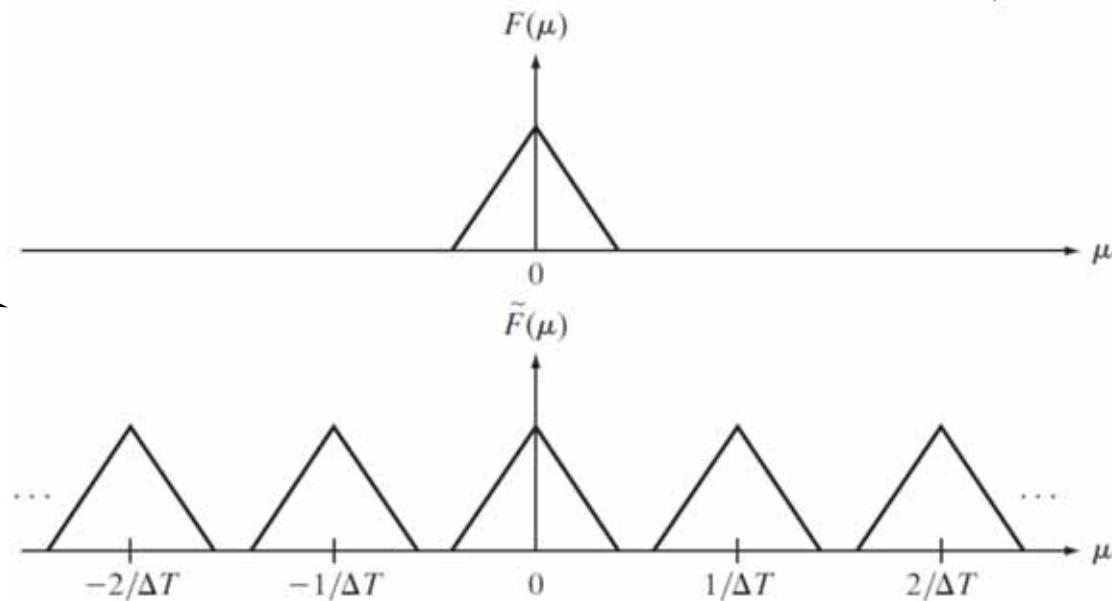




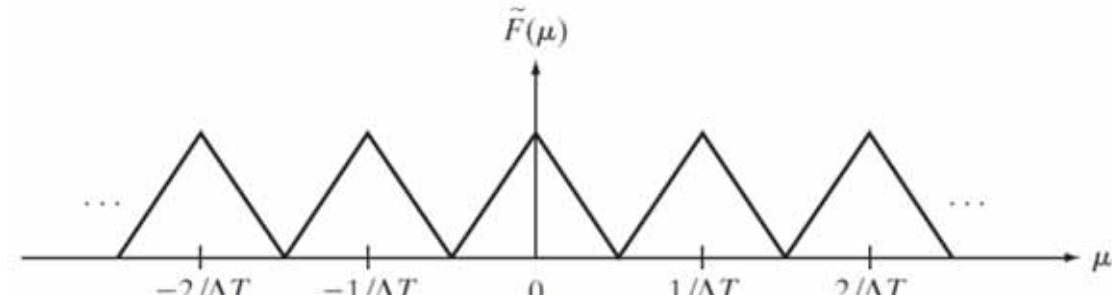
示例

能否恢复原
函数 $f(t)$?

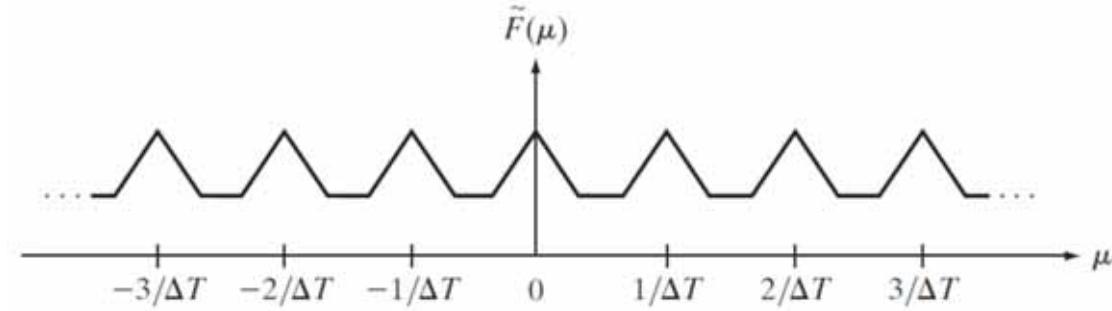
过采样



临界采样



欠采样

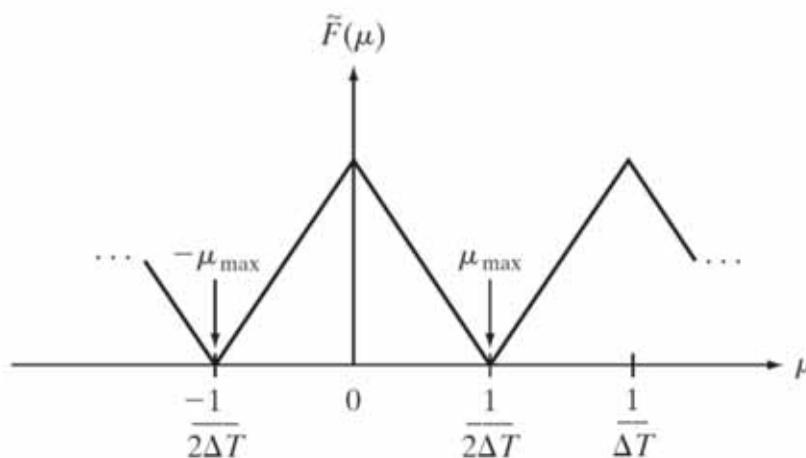
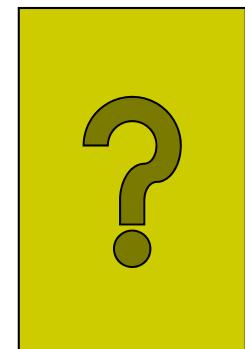
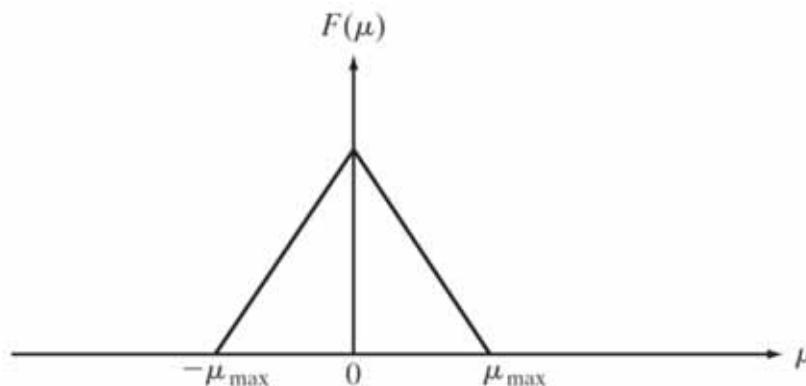




采样定理

- 带限函数 $f(t)$
 - 傅里叶变换后非零频率属于 $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$

如果可以从
 $\tilde{F}(\mu)$ 中分离
出 $F(\mu)$ ，那
么就可以恢
复 $f(t)$ ！





采样定理

- 如果

$$\frac{1}{2\Delta T} > \mu_{\max} \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max}$$

就可以从 $\tilde{F}(\mu)$ 中分离出 $F(\mu)$

- 注意等号不可以！

采样定理

如果以超过函数最高频率的两倍采样率来获得样本，
连续的带限函数可以完美地从它的样本集来恢复。

- 奈奎斯特频率(Nyquist Frequency)

$$2\mu_{\max}$$



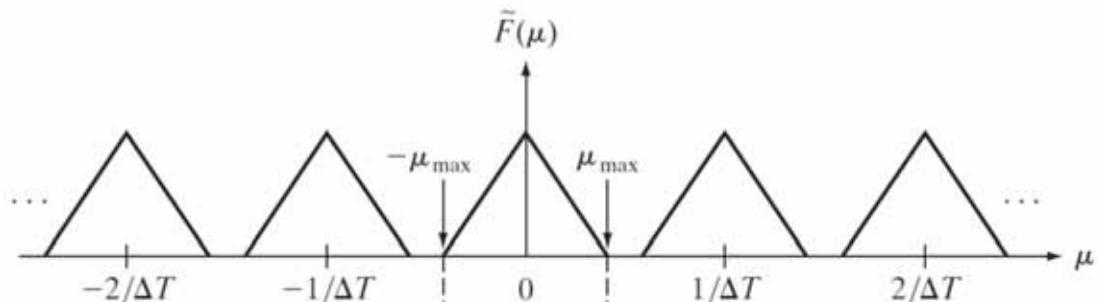


示例

- 略高于奈奎斯特频率采样

- 定义函数

$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & -\mu_{\max} \leq \mu \leq \mu_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



- 理想低通滤波器

- 相乘 $F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$

- 恢复 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$



$$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$$



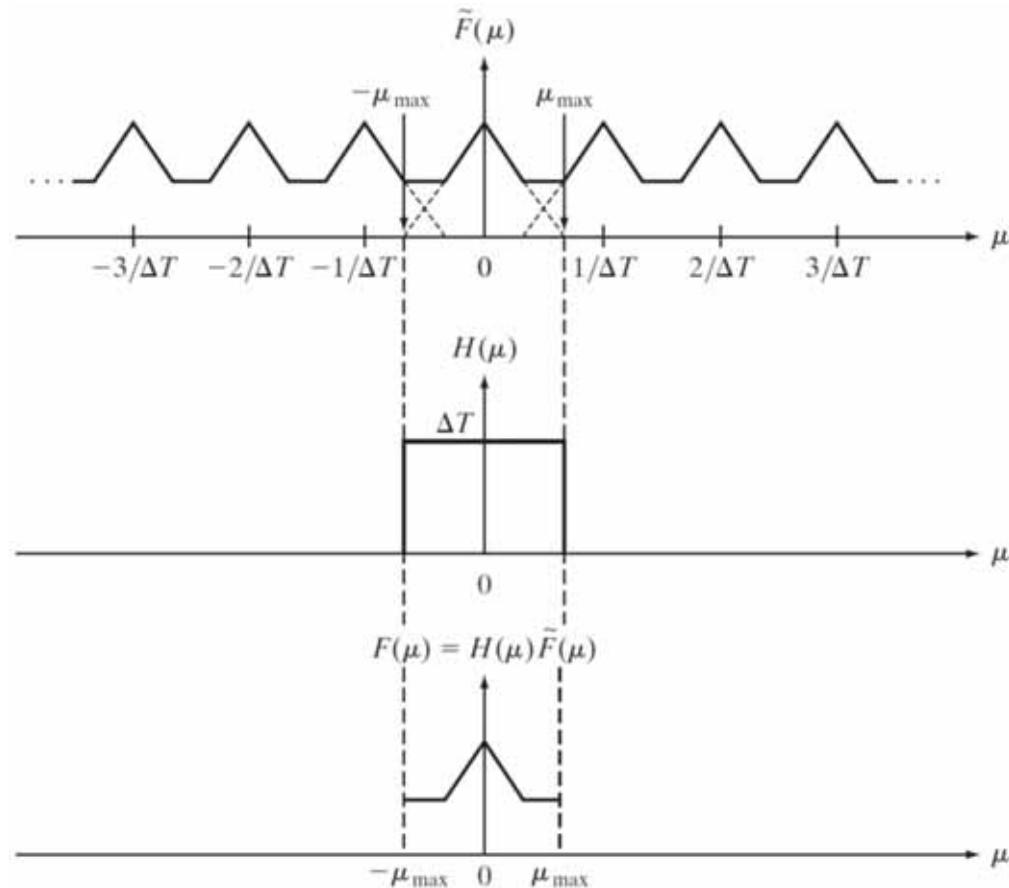


混淆

- 欠采样
 - 带限函数以低于奈奎斯特频率采样

- 无法分离

- 无法补救





混淆

- 在实际中，可以避免吗？

采样定理

如果以超过函数最高频率的两倍采样率来获得样本，连续的带限函数可以完美地从它的样本集来恢复。

- 即使原函数是带限的，仍然难以避免！
 - 采样是有限的
- 有限长度采样
 - 引入无限频率分量





有限长度采样

- 采样时间限制在 $[0, T]$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 函数已经发生变换

$$f(t) \Rightarrow f(t)h(t)$$

- $f(t)h(t)$ 通常是无限带宽

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

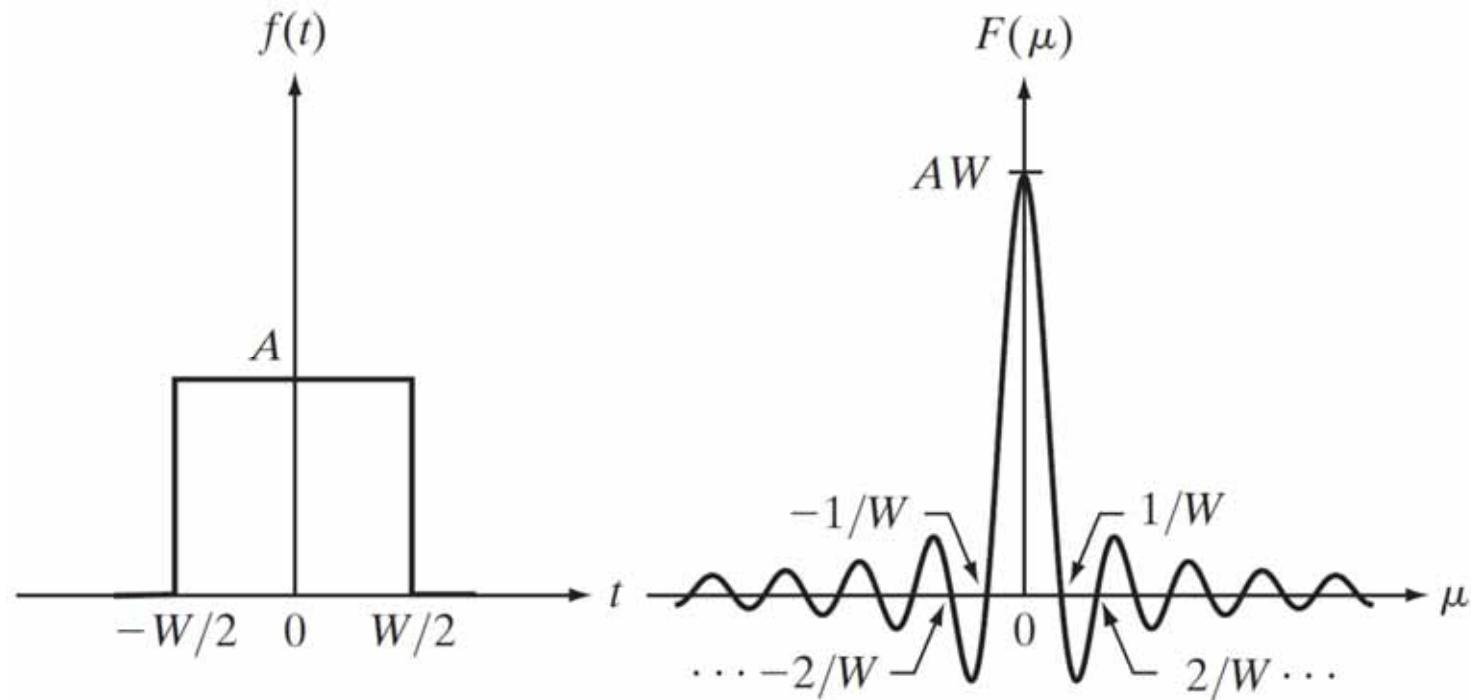
- $H(\mu)$ 有无限频率 (?)





举例

- 盒状函数的傅里叶变换





抗混淆

- 没有有限持续时间的函数是带限的。
- 一个带限函数一定是从 $-\infty$ 扩展到 ∞ 。
- 有限长度的采样，混淆是不可避免的。
- 抗混淆
 - 事先防止或减轻混淆
 - 平滑输入函数，减少高频分量
 - 图像散焦



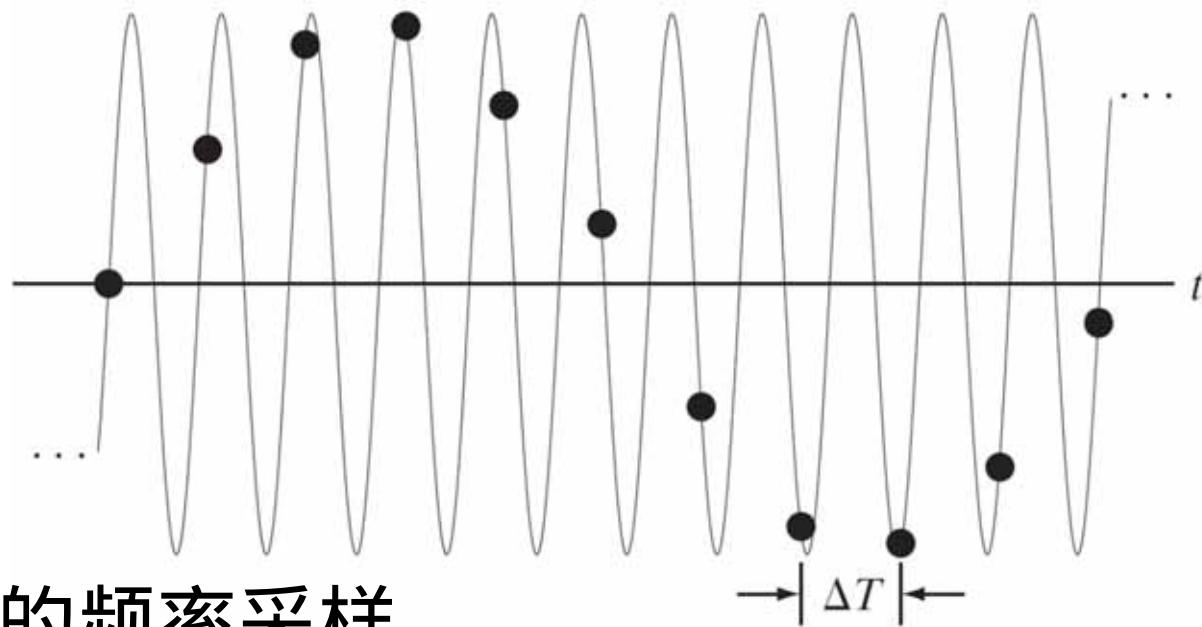


示例

- 带限函数——正弦波 $\sin(\pi t)$

- 周期是 $2s$ ，频率为 $1/2$ 赫兹

- 欠采样



- 以1赫兹的频率采样
 - $\cdots \sin(-\pi), \sin(0), \sin(\pi), \sin(2\pi), \cdots$



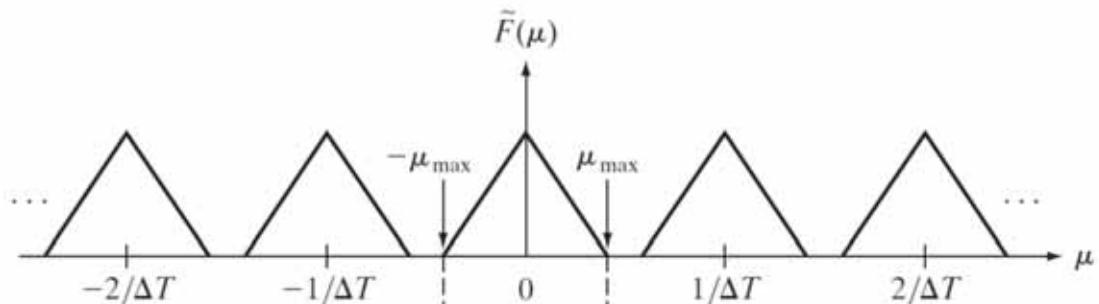


示例

- 略高于奈奎斯特频率采样

- 定义函数

$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & -\mu_{\max} \leq \mu \leq \mu_{\max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



- 理想低通滤波器

- 相乘 $F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$

- 恢复 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$



$$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$$





由样本恢复原函数

- 频率域操作

$$F(\mu) = H(\mu) \tilde{F}(\mu)$$

- 空间域操作

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\mu)\}$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}\{H(\mu) \tilde{F}(\mu)\}$$

$$= h(t) \star \tilde{f}(t)$$





由样本恢复原函数

- 化简

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\delta(t - n\Delta T)$$

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/\Delta T)}{\pi t/\Delta T}$$

- 函数内插

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \text{sinc}\left[(t - n\Delta T)/\Delta T\right]$$

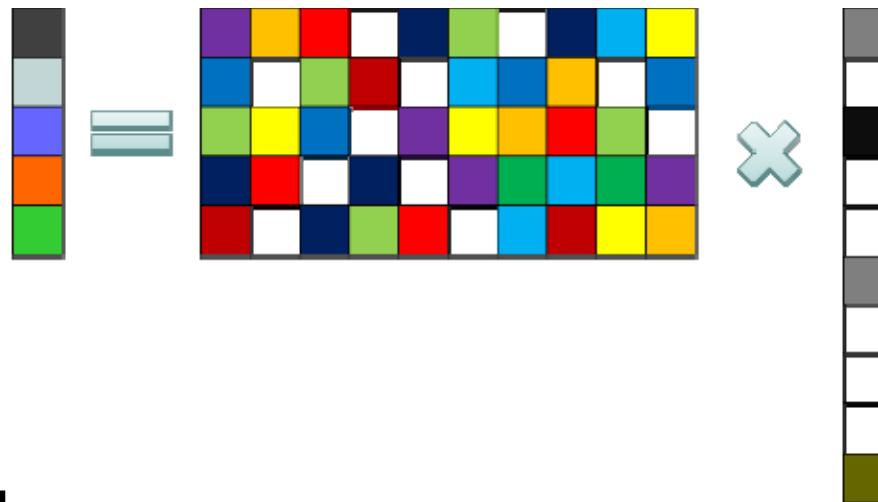
- $t = k\Delta T, f(t) = f(k\Delta T)$
- 无限个样本的内插（实际中只能近似，如灰度内插）





扩展：超越采样定理

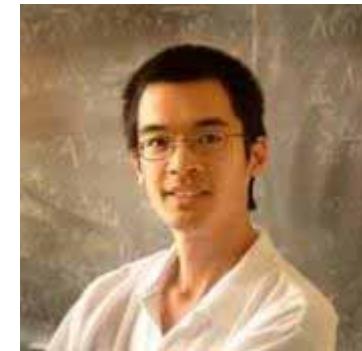
- 压缩感知
 - 稀疏
 - d 维
 - s 个非零项
 - $s \log d$ 个测量



David Donoho



Emmanuel Candès



Terence Tao





扩展：超越采样定理

- 矩阵补全

- 低秩

- 秩为 r

- $rn \log^2 n$ 个观测

$$M = \begin{bmatrix} \blacksquare & & \blacksquare & & & \blacksquare & \\ & \blacksquare & & & & & \\ \blacksquare & & \blacksquare & & \blacksquare & & \blacksquare \\ & & \blacksquare & & \blacksquare & & \\ & & & \blacksquare & & & \\ & & & & \blacksquare & & \\ & & & & & \blacksquare & \\ & & & & & & \blacksquare \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$



Emmanuel Candès





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现





采样后函数的傅里叶变换

- 采样后函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 卷积定理

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) &= \Im\{\tilde{f}(t)\} = \Im\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} = F(\mu) \star S(\mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu - \tau) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)\end{aligned}$$

- 周期函数、连续函数





采样后函数的傅里叶变换

- 采样后函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

- 傅里叶变换

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

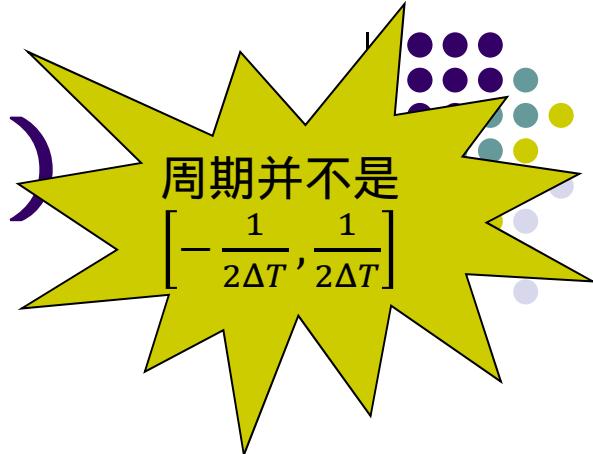
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T} \quad [f_n = f(n\Delta T)]$$



离散傅里叶变换 (DFT)

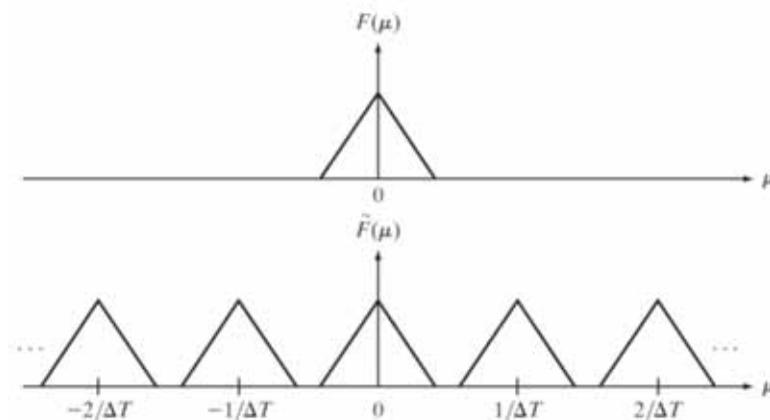


- 考虑 M 个样本构造的 $\tilde{F}(\mu)$

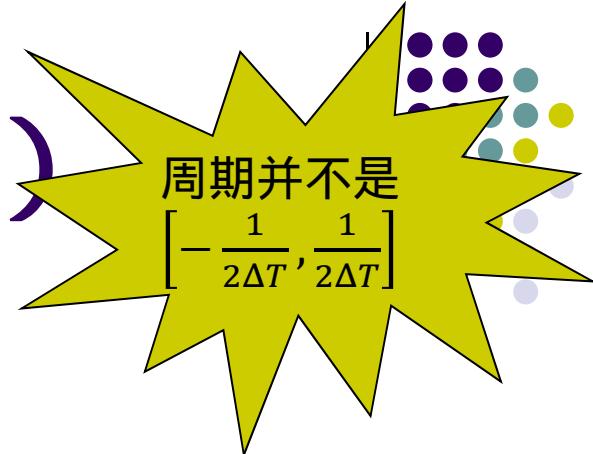
$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\mu\Delta T}$$

- 对 $\tilde{F}(\mu)$ 的一个周期 $[0, 1/\Delta T]$ 采样

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$



离散傅里叶变换 (DFT)



- 考虑 M 个样本构造的 $\tilde{F}(\mu)$

$$\tilde{F}(\mu) = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\mu\Delta T}$$

- 对 $\tilde{F}(\mu)$ 的一个周期 $[0, 1/\Delta T]$ 采样

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- 离散傅里叶变换 (DFT)

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$





离散傅里叶变换对

- 离散傅里叶变换 (DFT)

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- 离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M} \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- 表达式不依赖采样间隔、频率间隔
- 适用于任何**均匀取样**的有限离散样本集





离散傅里叶变换对（新符号）

- 离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- u 是整数
- 离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- x 是整数





离散傅里叶变换

- 无限周期、周期为 M

$$F(u) = F(u + kM) \quad f(x) = f(x + kM)$$

- 离散卷积

$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x-m)$$

- $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$
- 周期函数，也被称为**循环卷积**
- 与之前的卷积不一样，主要区别是 x
- 卷积定理**依然成立





卷积定理

- 空间域卷积的傅里叶变换 \Leftrightarrow 傅里叶变换在频率域的乘积

$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow H(\mu) F(\mu)$$

- 空间域乘积的傅里叶变换 \Leftrightarrow 傅里叶变换在频率域的卷积

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$





采样间隔和频率间隔

- 对连续函数 $f(t)$ 采样
 - 以 ΔT 为间隔采 M 个样本

$$\{f(x)|x = 0, 1, \dots, M - 1\}$$

- 总时间长度为

$$T = M\Delta T$$

- 离散频域中的间隔

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T}$$

} 反转关系





采样间隔和频率间隔

- 对连续函数 $f(t)$ 采样
 - 以 ΔT 为间隔采 M 个样本

$$\{f(x)|x = 0, 1, \dots, M - 1\}$$

- 总时间长度为

$$T = M\Delta T$$

- 离散频域中的间隔

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T}$$

- 离散频域范围

$$\Omega = M\Delta u = \frac{1}{\Delta T}$$

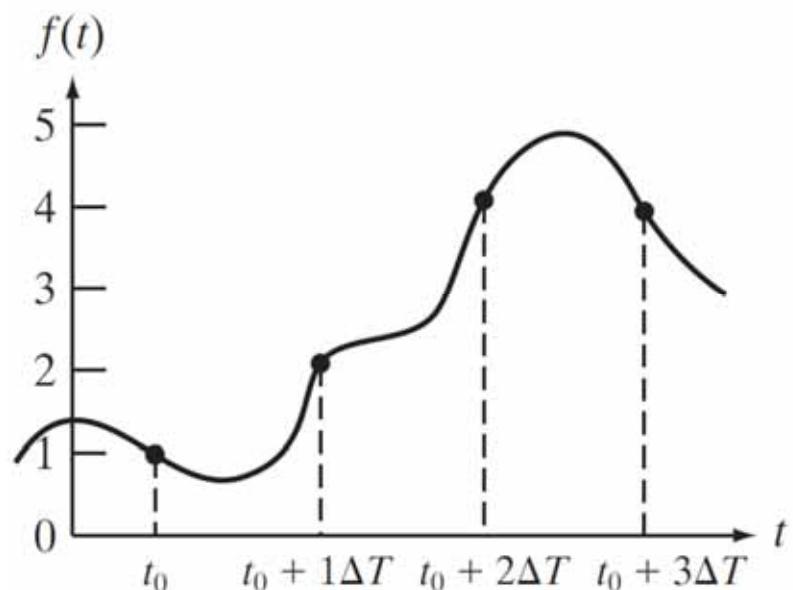
反转关系



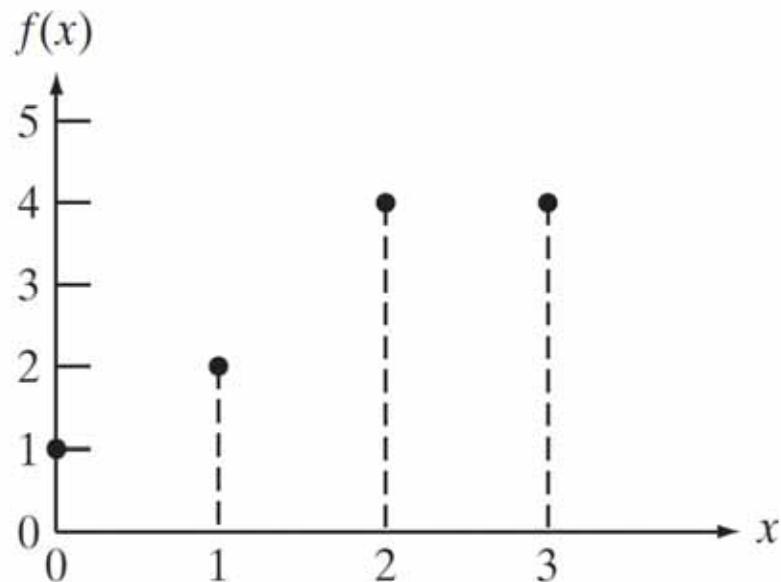


举例

- 离散傅里叶变换



对连续函数采样



离散集合





举例

● 离散傅里叶变换

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)]$$

$$= 1 + 2 + 4 + 4 = 11$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi(1)x/4}$$

$$= 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j$$

$$F(2) = -(1 + 0j) \text{ and } F(3) = -(3 + 2j)$$





举例

- 离散傅里叶反变换

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$$f(0) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{j2\pi u(0)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u)$$

$$= \frac{1}{4} [11 - 3 + 2j - 1 - 3 - 2j]$$

$$= \frac{1}{4} [4] = 1$$





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- **连续傅里叶变换（二维）**
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现





二维连续冲激与采样

- 两个连续变量的冲激

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = z = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, z) dt dz = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t, z) dt dz = f(0, 0)$$





二维连续冲激与采样

- 在 (t_0, z_0) 处的连续冲激

$$\delta(t - t_0, z - z_0) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = t_0, z = z_0 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = 1$$

- 采样性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = f(t_0, z_0)$$





二维离散冲激与采样

- 两个离散变量的冲激

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \delta(x, y) = 1$$

- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) = f(0, 0)$$

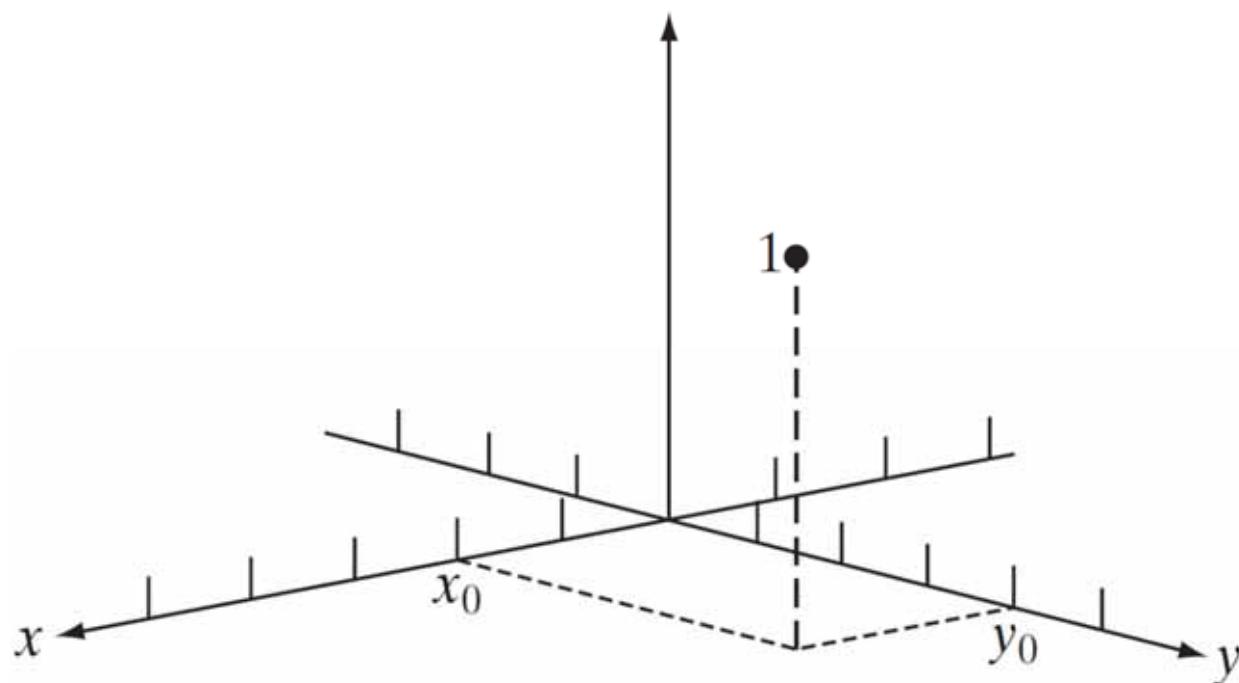




二维离散冲激与采样

- 在 (x_0, y_0) 处的离散冲激

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0, y = y_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$





二维离散冲激与采样

- 在 (x_0, y_0) 处的离散冲激

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_0, y = y_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 并且满足

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) = 1$$

- 采样性质

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0)$$



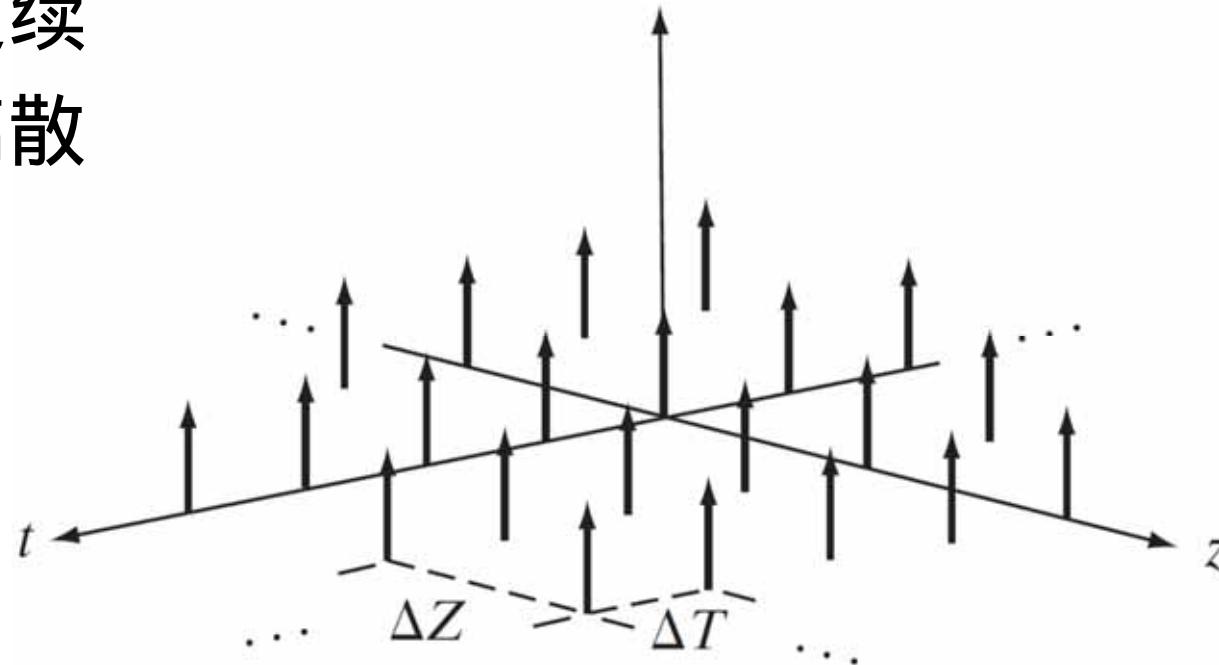


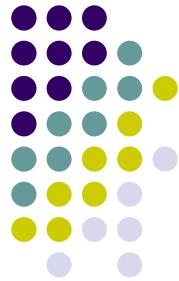
二维冲激串

- 沿 t 轴以 ΔT 为间隔，沿 z 轴以 ΔZ 为间隔

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

- 连续
- 离散





二维连续傅里叶变换对

- 二维傅里叶变换

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

- 二维傅里叶反变换

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

- 对比：一维傅里叶变换

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

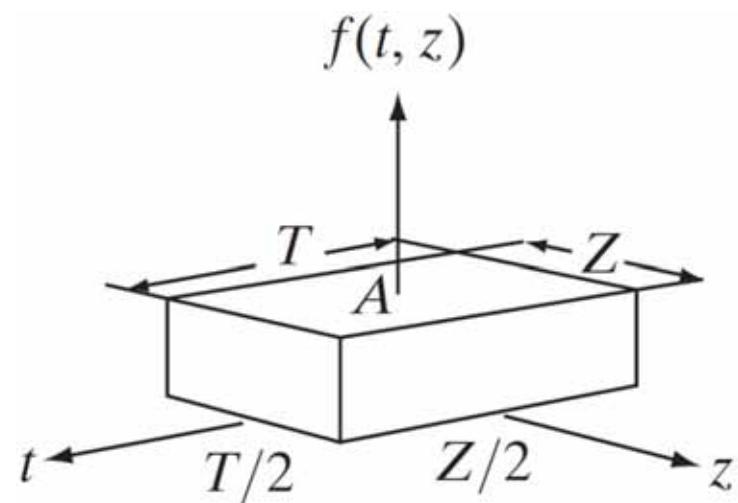




举例

- 二维盒状函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned}F(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz \\&= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-Z/2}^{Z/2} A e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz \\&= ATZ \left[\frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)} \right] \left[\frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)} \right]\end{aligned}$$

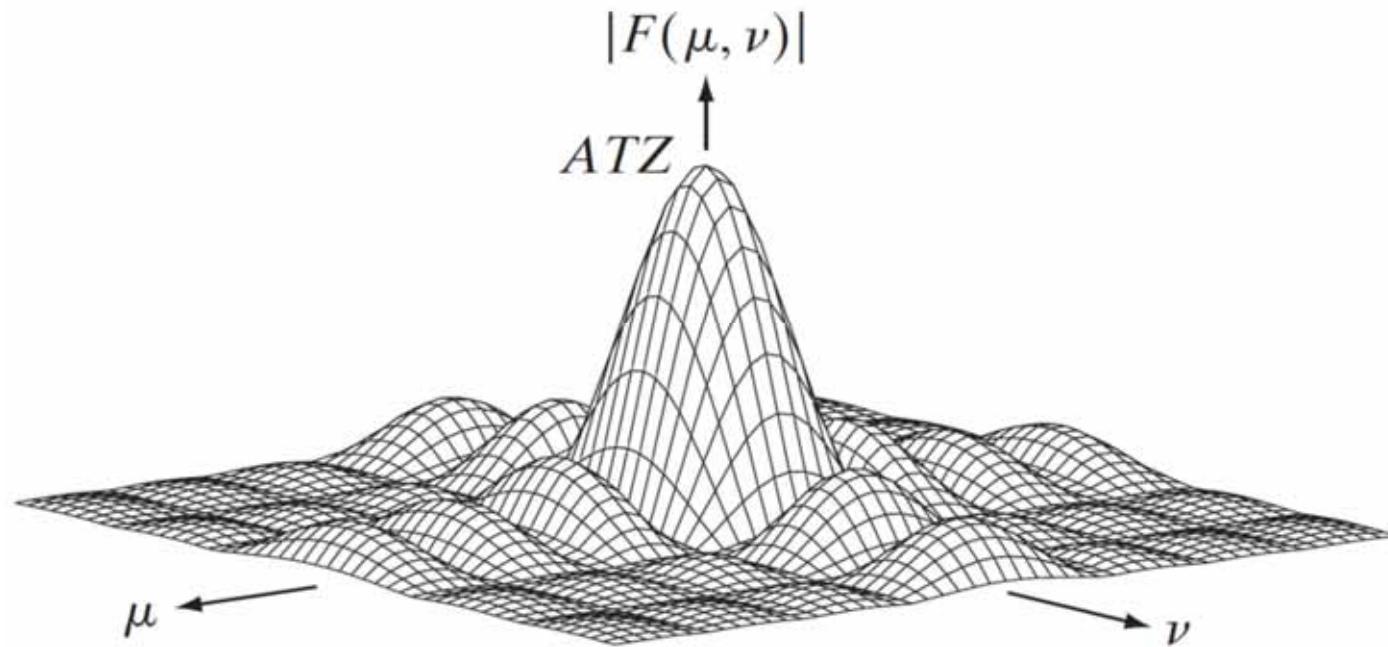




举例

- 幅值

$$|F(\mu, \nu)| = ATZ \left| \frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)} \right| \left| \frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)} \right|$$



- 零的位置与 T, Z 成反比、逐渐降低、无限延伸





二维采样

- 二维冲激串

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$

- 通过相乘，对连续函数 $f(t, z)$ 采样

$$\tilde{f}(t, z) = f(t, z)s_{\Delta T \Delta Z}(t, z)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t, z)\delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z)$$





二维采样定理

- 带限函数 $f(t, z)$

- 区间 $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$ 和 $[-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$ 之外频率分量为 0

$$F(\mu, \nu) = 0 \quad \text{for } |\mu| \geq \mu_{\max} \quad \text{or} \quad |\nu| \geq \nu_{\max}$$

- 如果采样间隔满足

$$\Delta T < \frac{1}{2\mu_{\max}} \quad \Delta Z < \frac{1}{2\nu_{\max}}$$

- 或采样频率满足

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max} \quad \frac{1}{\Delta Z} > 2\nu_{\max}$$

- 则连续带限函数可以由一组样本完美恢复。





二维采样定理

- 带限函数 $f(t, z)$

- 区间 $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$ 和 $[-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$ 之外频率分量为0

$$F(\mu, \nu) = 0 \quad \text{for } |\mu| \geq \mu_{\max} \quad \text{or} \quad |\nu| \geq \nu_{\max}$$

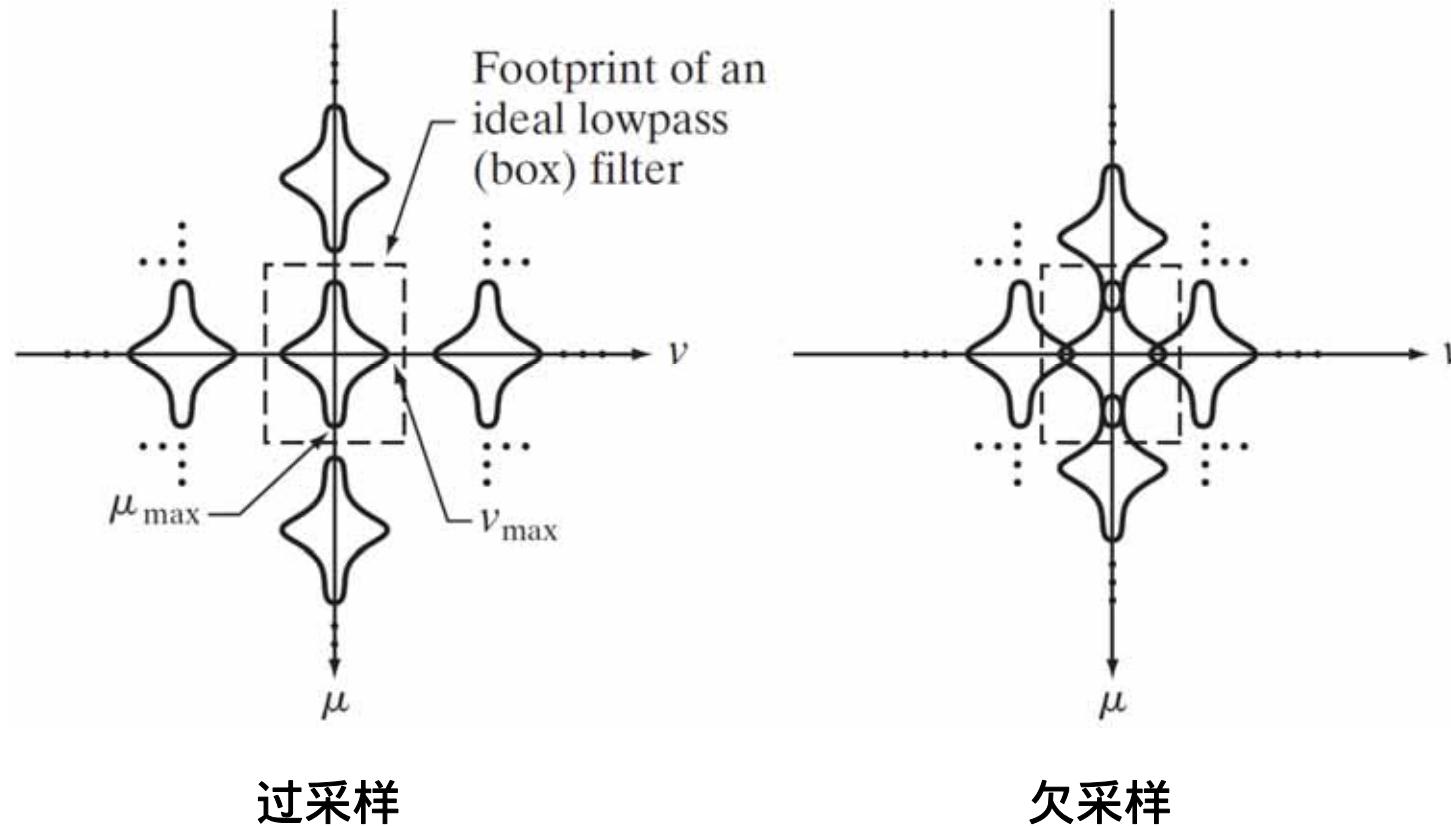
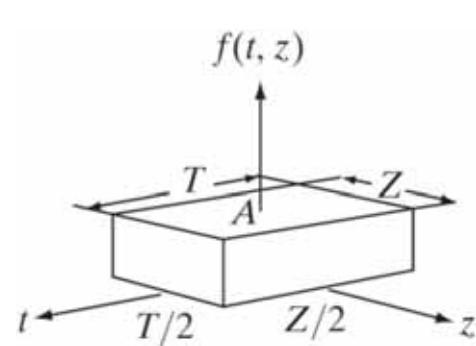
二维采样定理

如果一个二维带限连续函数在两个方向上均以大于最高频率的两倍采样率来获得样本，则该函数可以完美地从它的样本集来恢复。



举例

- 采样后函数的傅里叶变换





图像中的混淆

- 有限长度的采样，混淆是不可避免的
 - 一维、二维.....
- 空间混淆
 - 欠采样
 - 锯齿、伪高光、虚假模式
- 时间混淆
 - 图像系列中的时间间隔有关
 - 例如电影中车轮倒转

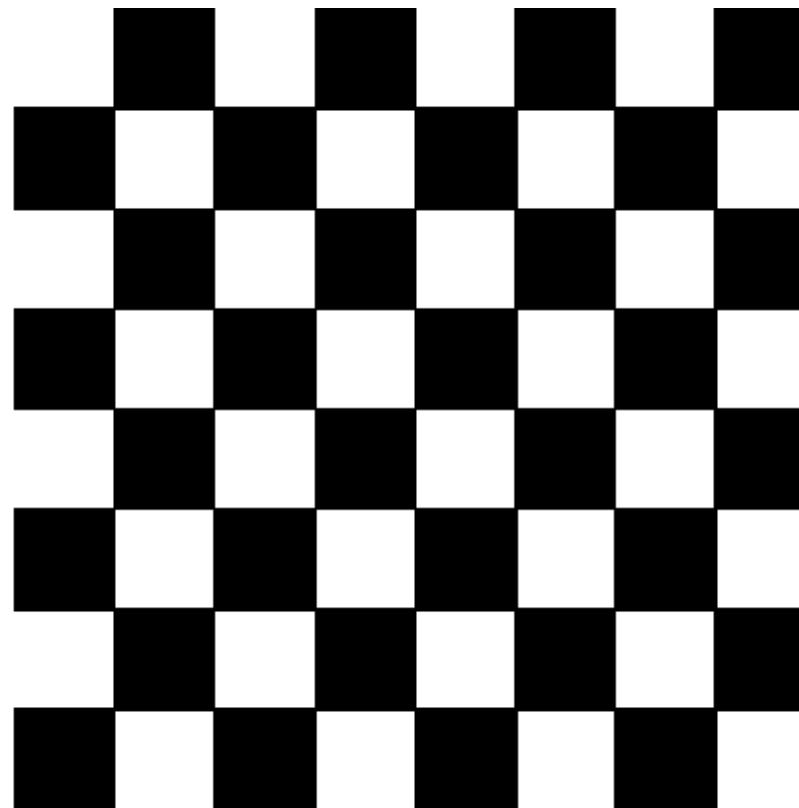




举例

- 用 96×96 的成像系统去数字化棋盘模式
 - 96×96 像素

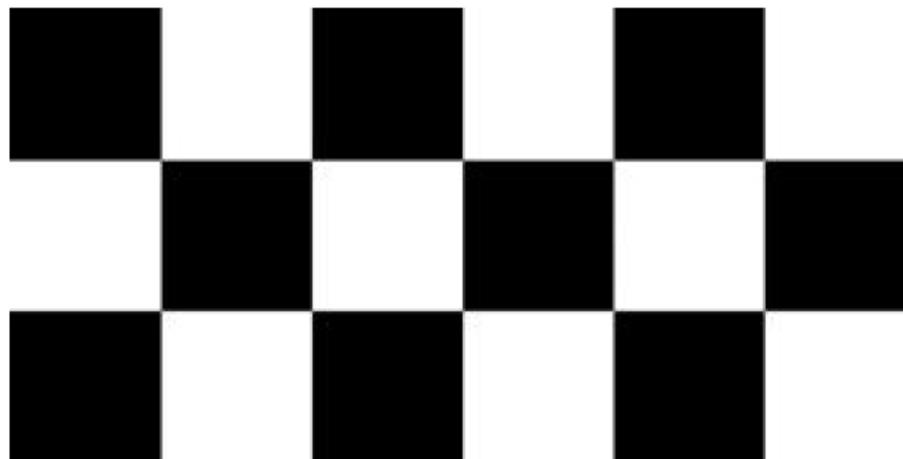
- 棋盘模式



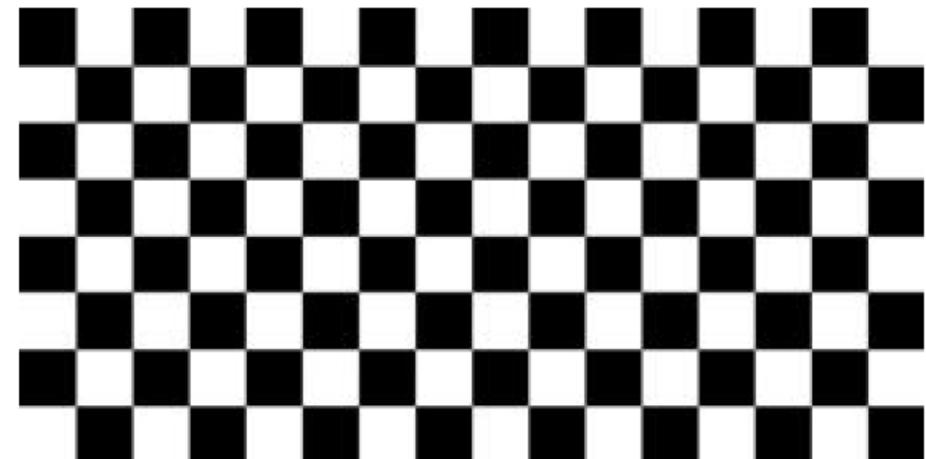


举例

- 用 96×96 的成像系统去数字化棋盘模式
 - 96×96 像素



实际边长为16个像素



实际边长为6个像素





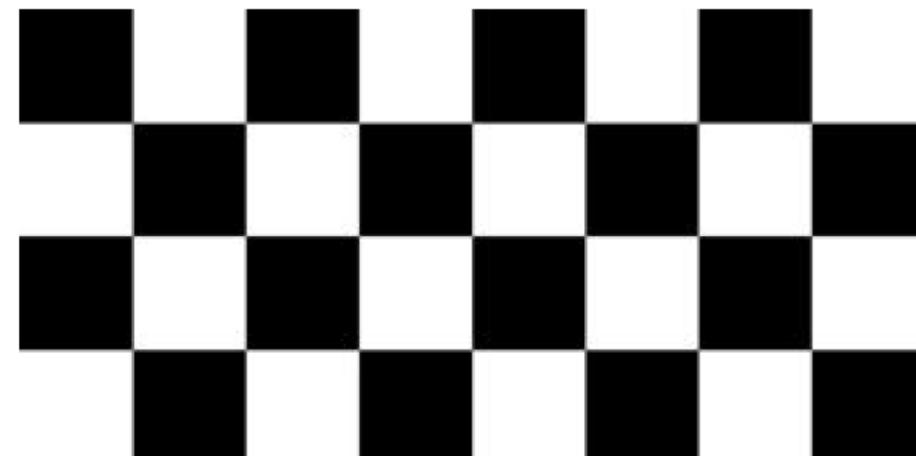
举例

- 用 96×96 的成像系统去数字化棋盘模式
 - 96×96 像素

看起来像是边长为12
像素的棋盘！



实际边长为0.9174个像素



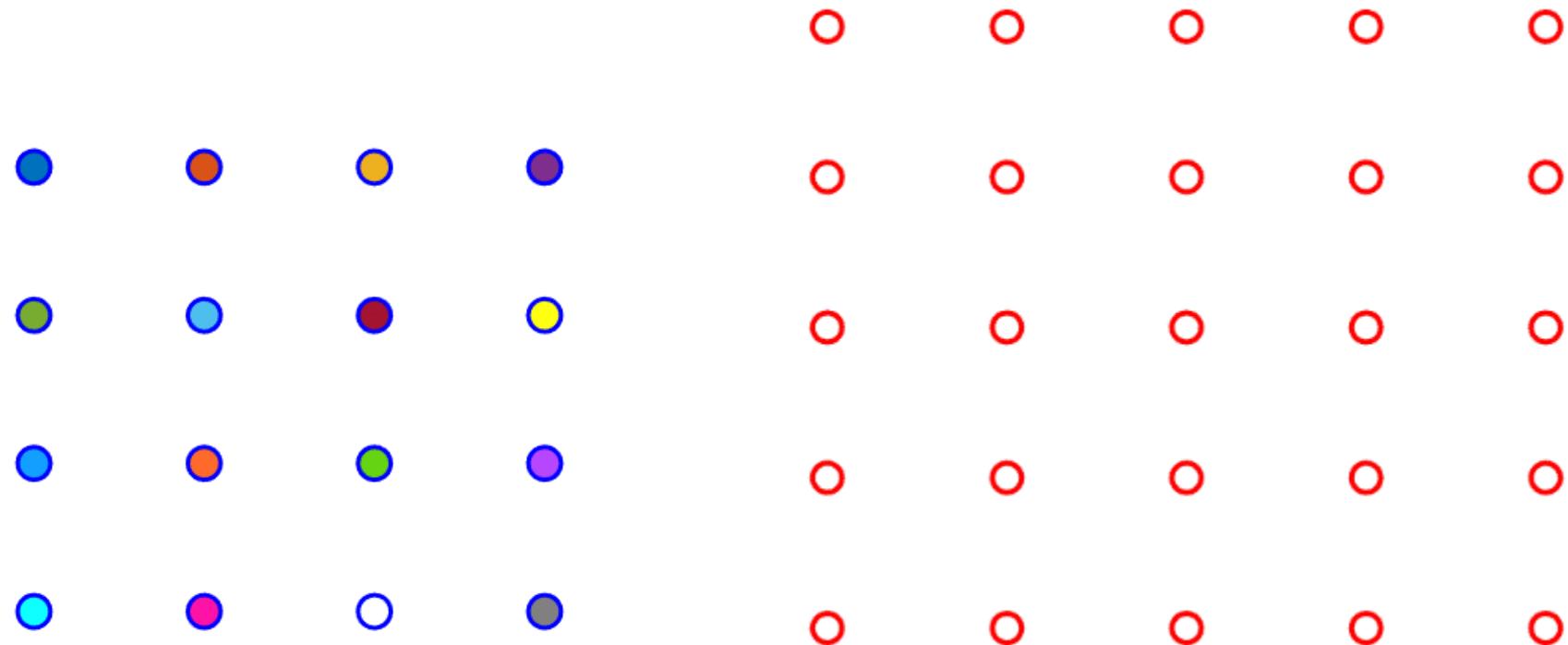
实际边长为0.4798个像素





图像内插

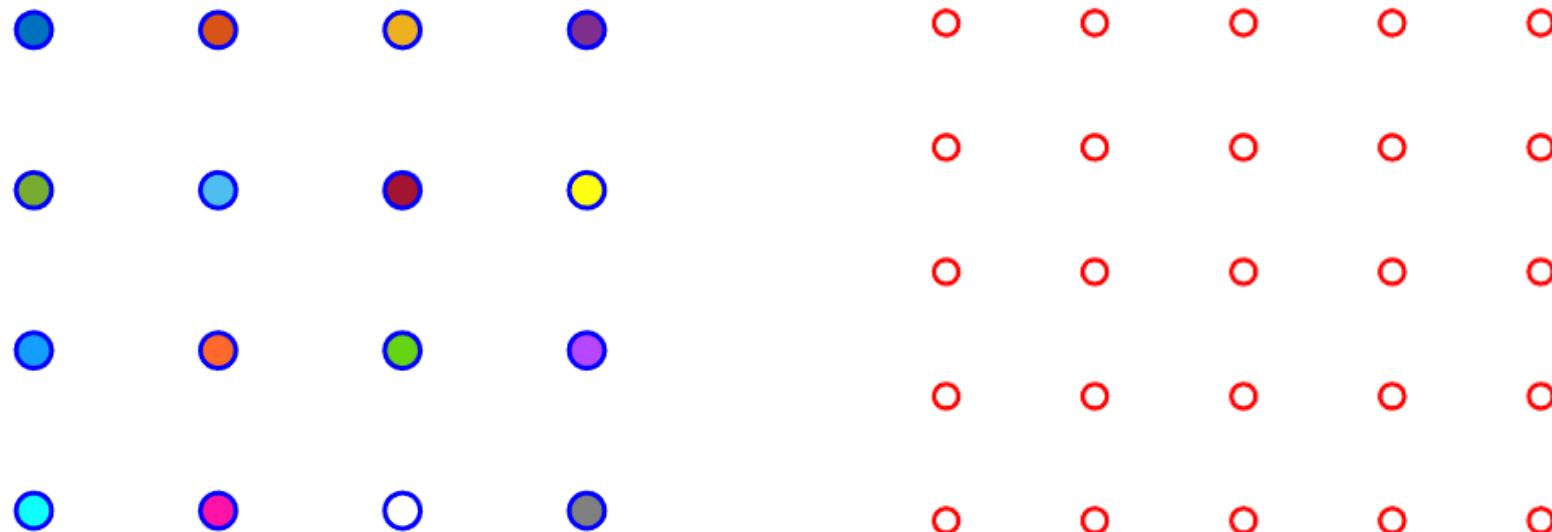
- 用已知数据来估计未知位置的数值
 - 放大、缩小、旋转、几何校正





图像内插

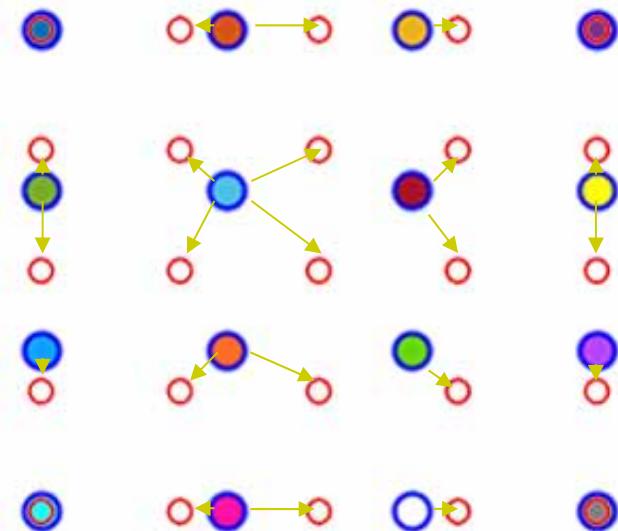
- 用已知数据来估计未知位置的数值
 - 放大、缩小、旋转、几何校正





图像内插

- 用已知数据来估计未知位置的数值
 - 放大、缩小、旋转、几何校正





由样本恢复原函数

- 化简

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\delta(t - n\Delta T)$$

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/\Delta T)}{\pi t/\Delta T}$$

- 函数内插

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \text{sinc}\left[(t - n\Delta T)/\Delta T\right]$$

- $t = k\Delta T, f(t) = f(k\Delta T)$
- 无限个样本的内插（实际中只能近似，如灰度内插）





图像采样

- 图像放大

- 可以理解为过采样
- 整数倍放大：水平和垂直方向**像素复制**
- 一般情况：图像缩小→灰度内插

- 图像缩小

- 可以理解为欠采样
- 整数倍缩小：水平和垂直方向**行列删除**
- 一般情况：图像放大→灰度内插





图像缩小后的混淆



原图



通过行列删除缩小一半
再通过像素复制放大



图像缩小后的混淆



原图



通过行列删除缩小一半
再通过像素复制放大

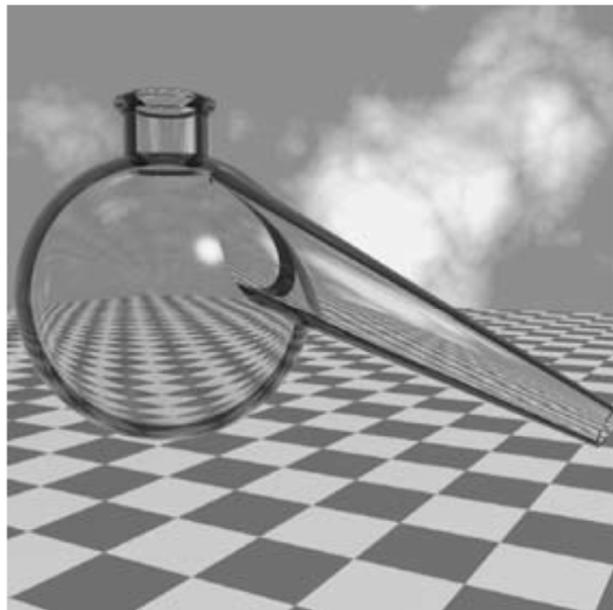


先用均值滤波器平滑
通过行列删除缩小一半
再通过像素复制放大

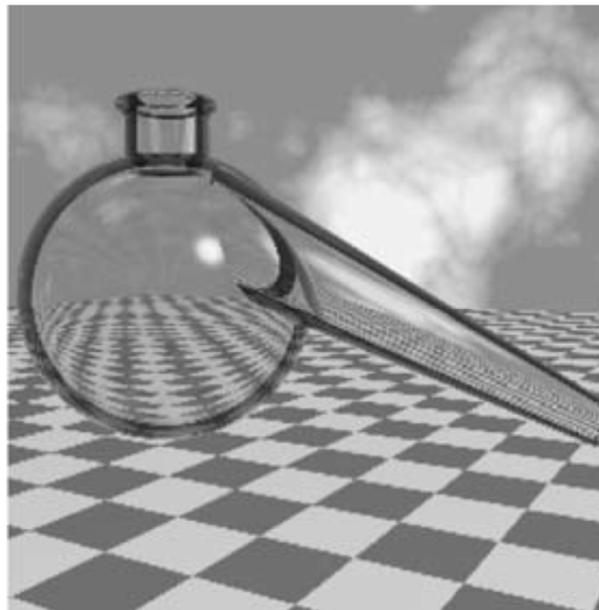




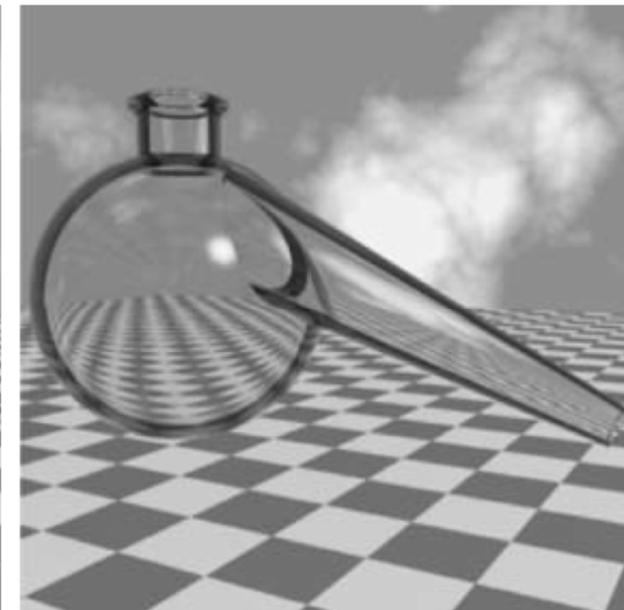
图像缩小后的锯齿



原图



通过双线性内插缩小到25%
再通过像素复制放大

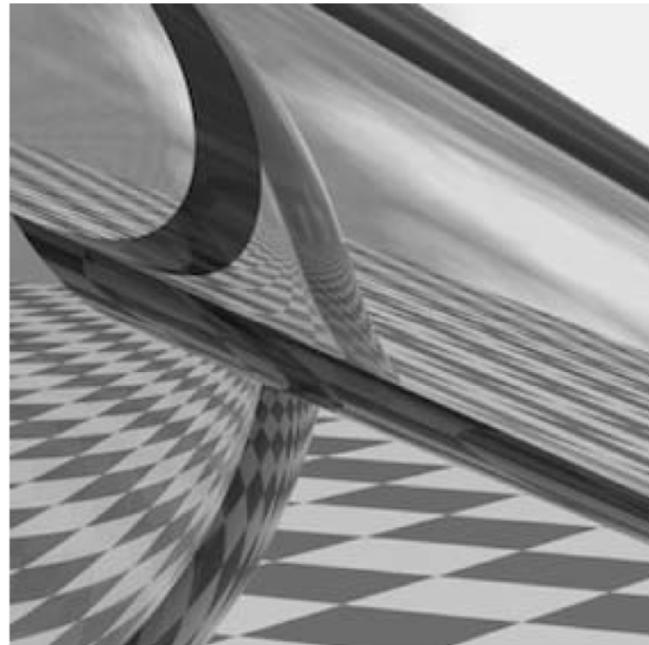


先用均值滤波器平滑
通过双线性内插缩小到25%
再通过像素复制放大

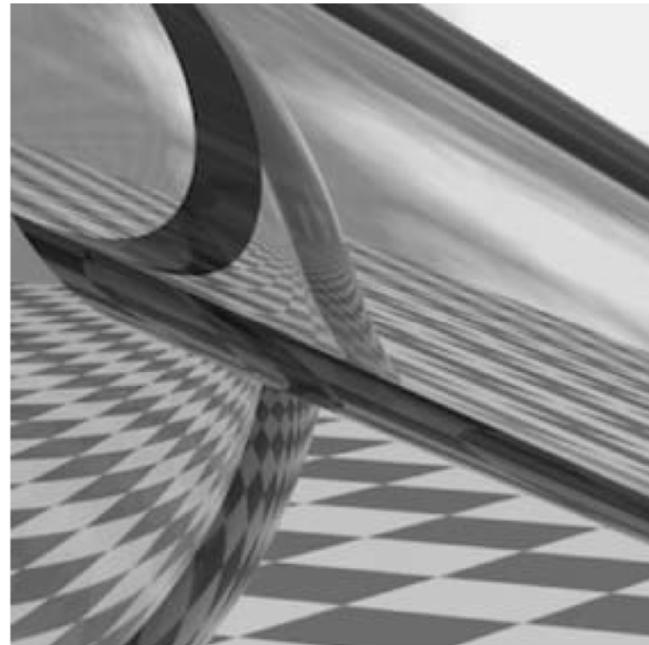




图像放大后的锯齿



通过像素复制放大4倍



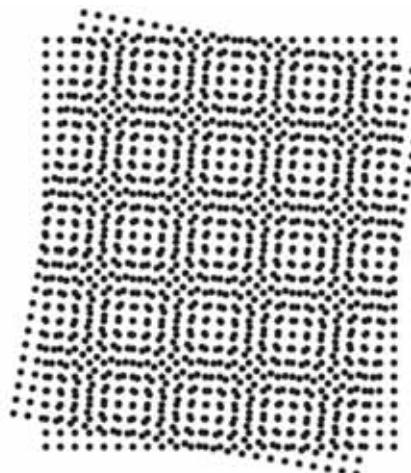
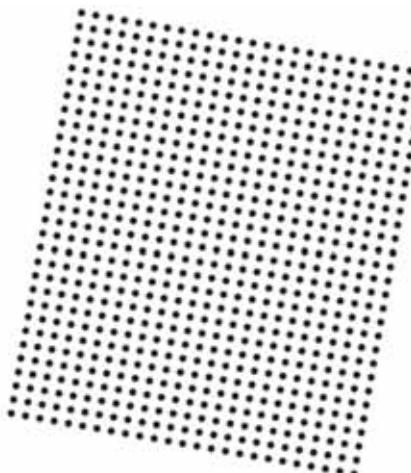
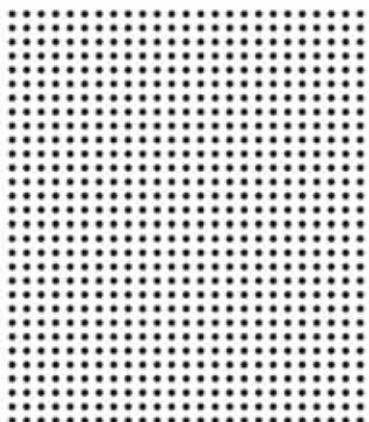
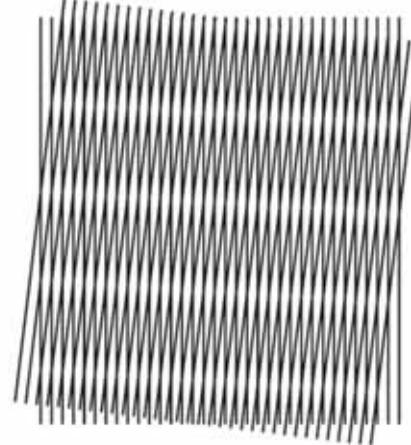
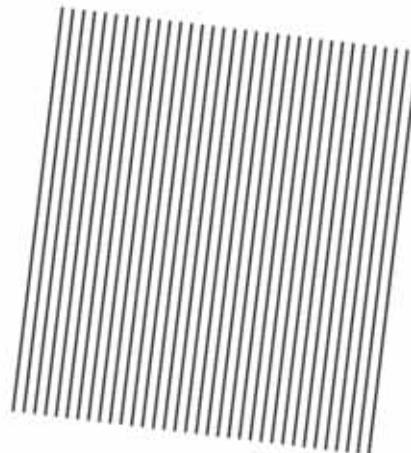
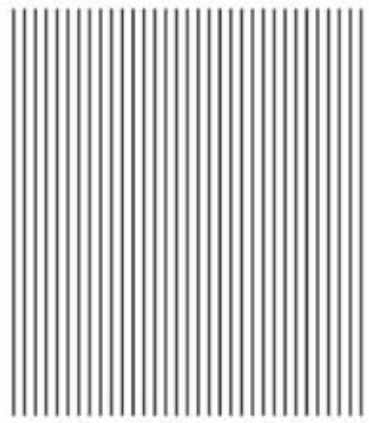
通过双线性内插放大4倍





莫尔模式

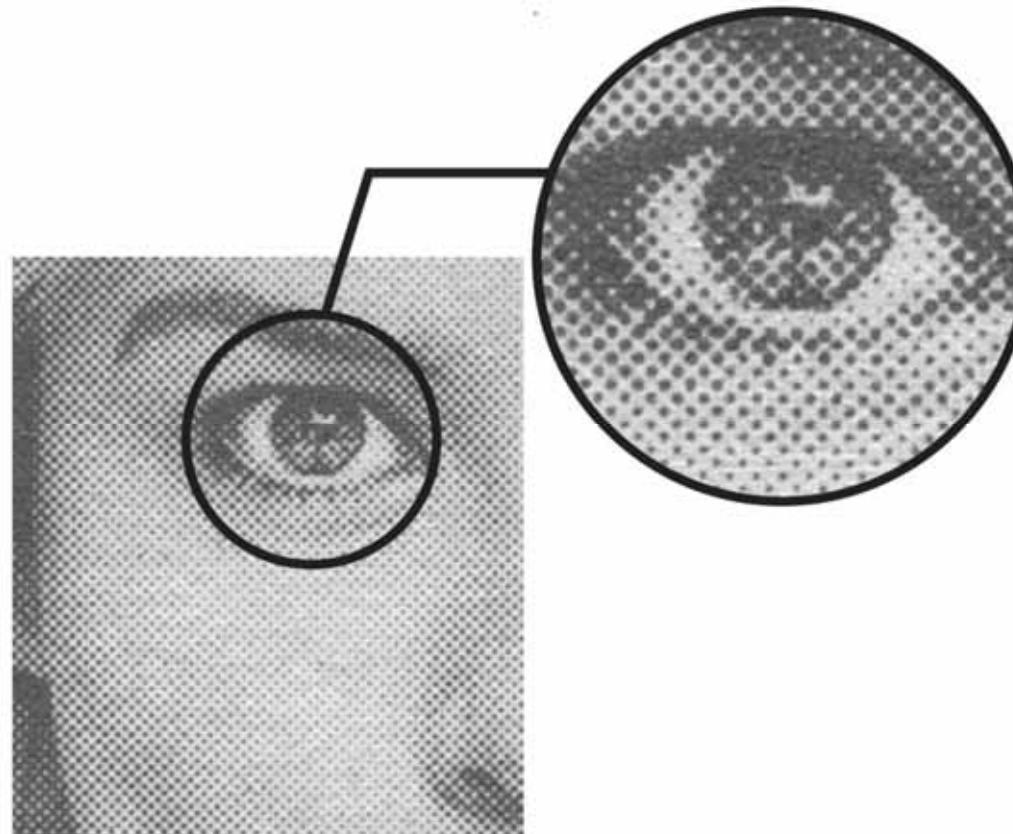
- 两个近似等间隔的光栅产生的差拍模式





报纸印刷

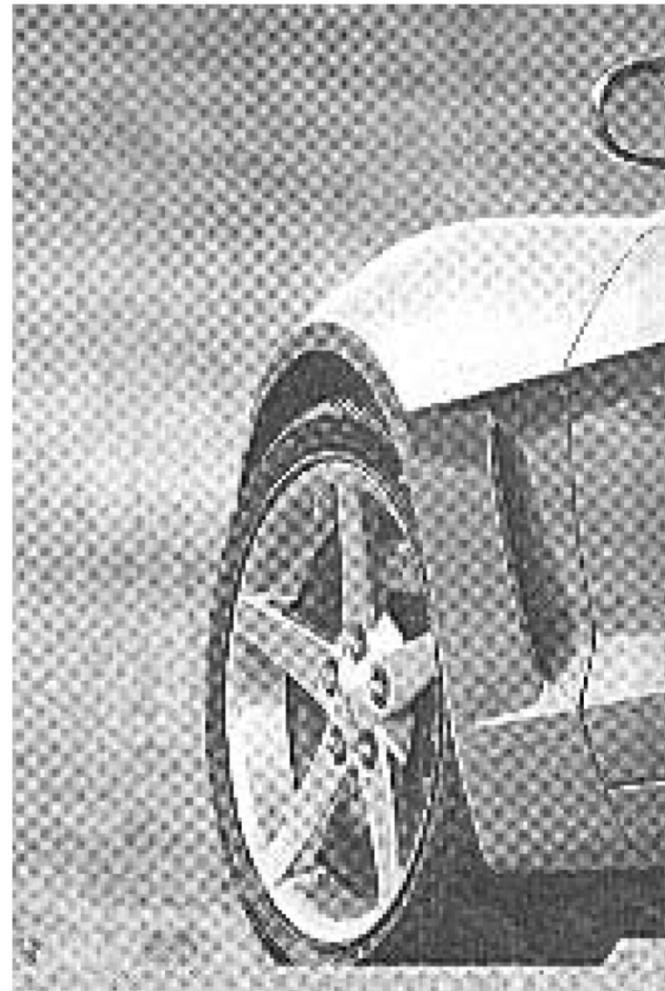
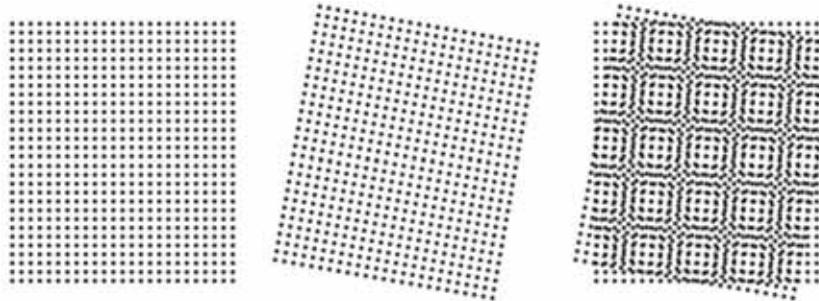
- 半色调
 - 通过调整黑点的大小和连接方式模拟色调





莫尔模式

- 扫描报纸
 - 报纸上的模式（ ± 45 度）
 - 扫描模式（水平和垂直）





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现





离散傅里叶变换（二维）

- 定义
- 基本性质
- 傅里叶谱和相角
- 二维卷积定理





离散傅里叶变换对（新符号）

- 离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- u 是整数
- 离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- x 是整数





二维离散傅里叶变换对

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像
- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$





离散傅里叶变换（二维）

- 定义
- 基本性质
- 傅里叶谱和相角
- 二维卷积定理





采样间隔和频率间隔

- 对连续函数 $f(t, z)$ 采样
 - t 方向上以 ΔT 为间隔采 M 个样本
 - z 方向上以 ΔZ 为间隔采 N 个样本
 - 两个方向上的总时间

$$T = M\Delta T \quad Z = N\Delta Z$$

- 离散频域中的间隔

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta Z}$$

- 离散频域范围

$$\frac{1}{\Delta T} \quad \frac{1}{\Delta Z}$$





平移和旋转

- 平移性

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0u/M + y_0v/N)}$$

- 平移不影响幅值
- 旋转性

- 极坐标 : $x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

- $f(x, y)$ 旋转 θ_0 ，则 $F(u, v)$ 旋转相同的角度





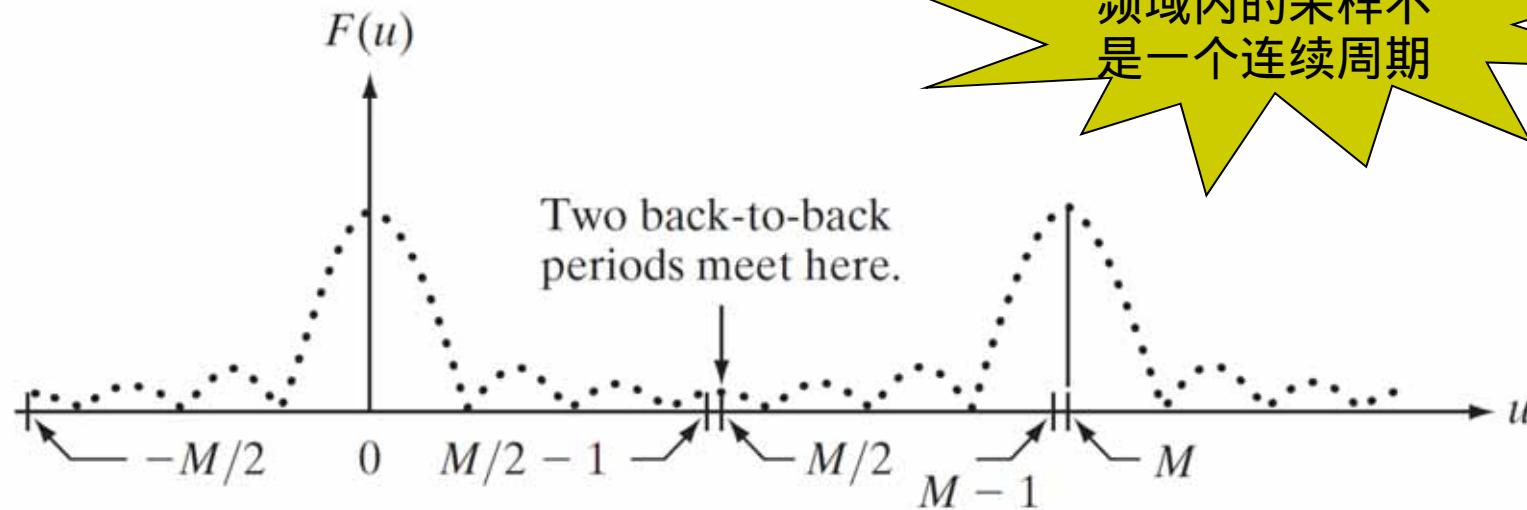
周期性

- 在两个方向上是无限周期的

$$F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N)$$

$$f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) = f(x + k_1 M, y + k_2 N)$$

- 其中 k_1, k_2 为整数



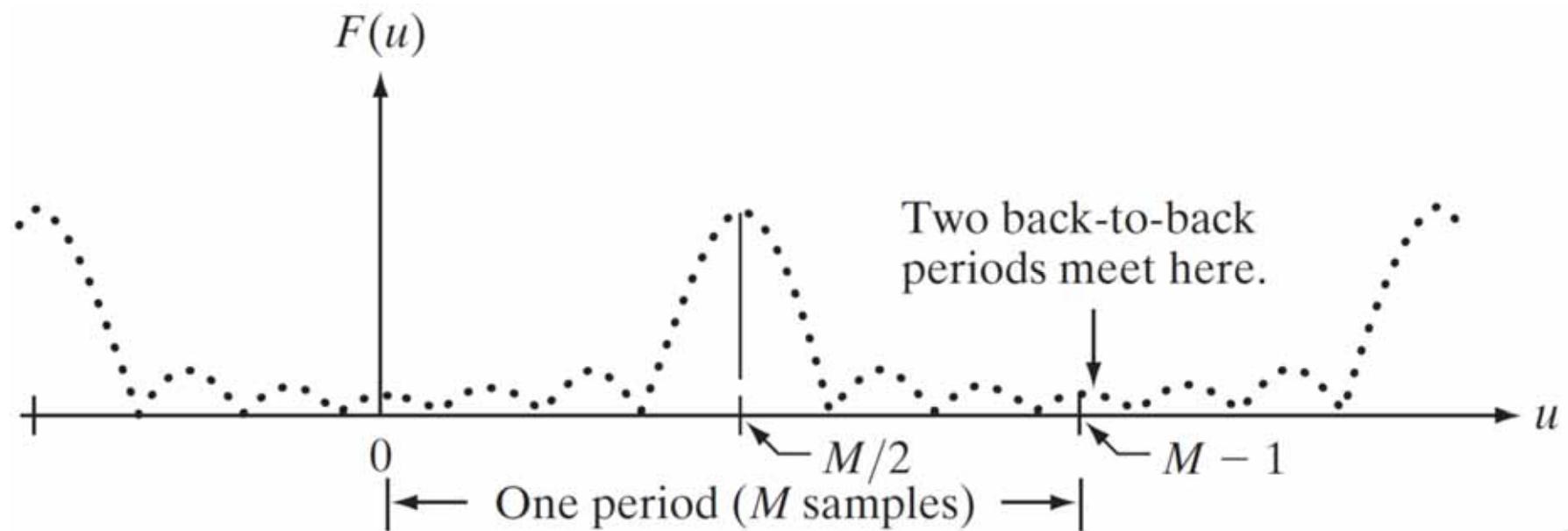


平移傅里叶变换

- 平移性

$$f(x) e^{j2\pi(u_0x/M)} \Leftrightarrow F(u - u_0)$$

- 令 $u_0 = M/2$

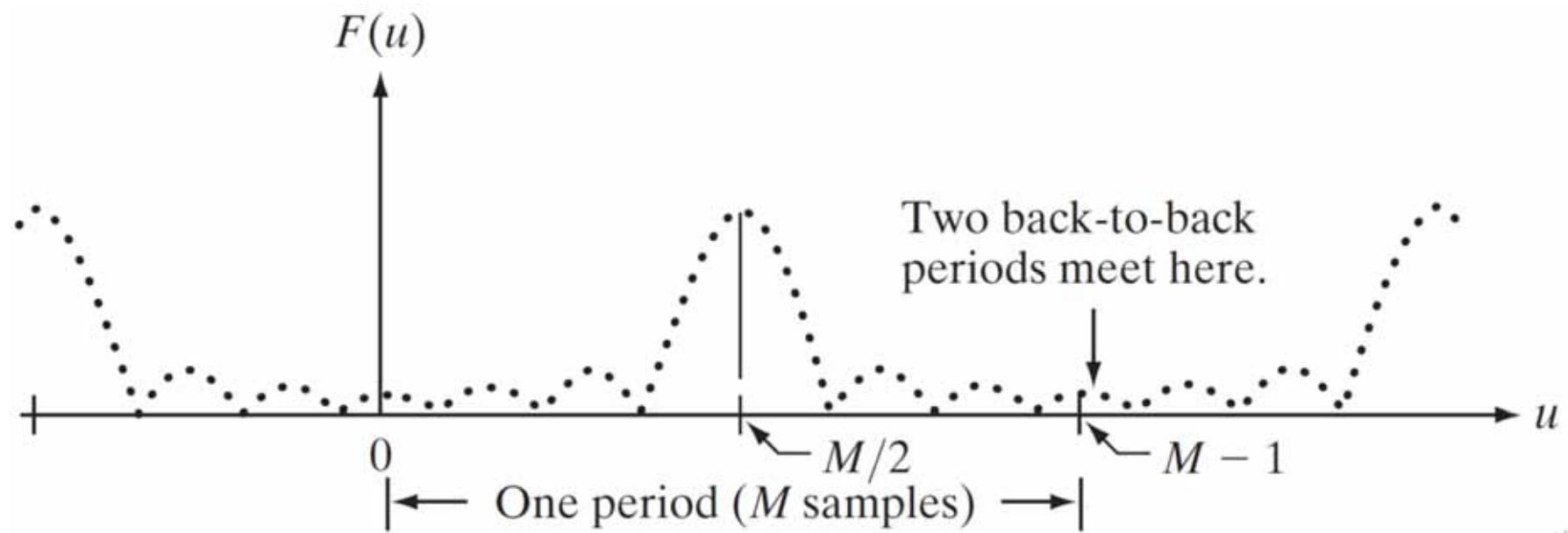




平移傅里叶变换

- 平移性

$$f(x)(-1)^x \Leftrightarrow F(u - M/2)$$

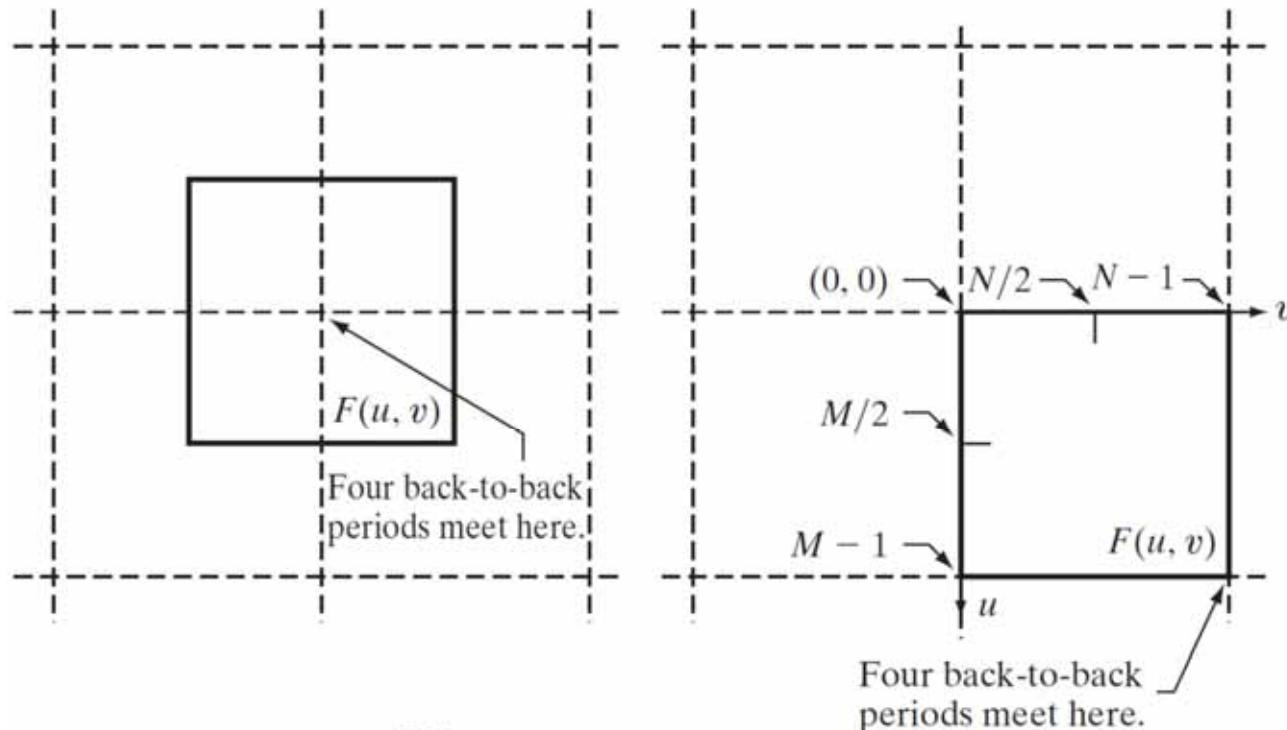




平移傅里叶变换

● 平移性

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$



$\boxed{}$ = Periods of the DFT.

\square = $M \times N$ data array, $F(u, v)$.





对称性

- 任意函数 $w(x, y)$

$$w(x, y) = w_e(x, y) + w_o(x, y)$$

- 偶数部分

$$w_e(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) + w(-x, -y)}{2}$$

$$w_e(x, y) = w_e(-x, -y)$$

- 奇数部分

$$w_o(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) - w(-x, -y)}{2}$$

$$w_o(x, y) = -w_o(-x, -y)$$





傅里叶变换中的对称性

- DFT和IDFT中的索引都是正的
- 该情况下，对称性是相对于序列中心而言
- 对称性

$$w_e(x, y) = w_e(M - x, N - y)$$

$$w_o(x, y) = -w_o(M - x, N - y)$$





对称性

- 偶函数之积是偶函数
- 奇函数之积是偶函数
- 偶函数和奇函数之积是奇函数
- 离散奇函数的样本之和为零

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} w_e(x, y) w_o(x, y) = 0$$





举例

- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$f = \{f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3)\} = \{2 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$$

偶函数还是
奇函数？





举例

- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$f = \{f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3)\} = \{2 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$$

- 检验偶性 $f(x) = f(4 - x)$

$$f(0) = f(4), \quad f(2) = f(2), \quad f(1) = f(3), \quad f(3) = f(1)$$

- $f(4)$ 可以忽略、偶序列

- 任意4个点的偶序列

$$\{a \quad b \quad c \quad b\}$$





举例

- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$g = \{g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)\} = \{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$$

偶函数还是
奇函数？





举例

- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$g = \{g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)\} = \{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$$

- 检验奇性 $g(x) = -g(4 - x)$

$$g(0) = -g(4), g(2) = -g(2), g(1) = -g(3)$$

- $g(4)$ 可以忽略、 $g(0) = 0$ 、奇序列

$$w_o(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) - w(-x, -y)}{2}$$





举例

- 考虑一维序列

- 其中 $M = 4$

$$g = \{g(0) \ g(1) \ g(2) \ g(3)\} = \{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$$

- 检验奇性 $g(x) = -g(4 - x)$

$$g(0) = -g(4), g(2) = -g(2), g(1) = -g(3)$$

- $g(4)$ 可以忽略、 $g(0) = 0$ 、奇序列

- 任意4个点的奇序列

$$\{0 \ -b \ 0 \ b\}$$





序列的奇偶性

- 受序列的长度影响

- 奇序列 $\{0 \ -1 \ 0 \ 1\}$

- 非奇非偶 $\{0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0\}$

- 奇序列

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	1	0
0	0	-2	0	2	0
0	0	-1	0	1	0
0	0	0	0	0	0





对称性

- 实函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭对称

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

$$\begin{aligned} F^*(u, v) &= \left[\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)} \right]^* \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x, y) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi([-u]x/M + [-v]y/N)} \\ &= F(-u, -v) \end{aligned}$$





对称性

- 实函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭对称

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

- 虚函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭反对称

$$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$$





更多的性质

	Spatial Domain [†]		Frequency Domain [†]
1)	$f(x, y)$ real	\Leftrightarrow	$F^*(u, v) = F(-u, -v)$
2)	$f(x, y)$ imaginary	\Leftrightarrow	$F^*(-u, -v) = -F(u, v)$
3)	$f(x, y)$ real	\Leftrightarrow	$R(u, v)$ even; $I(u, v)$ odd
4)	$f(x, y)$ imaginary	\Leftrightarrow	$R(u, v)$ odd; $I(u, v)$ even
5)	$f(-x, -y)$ real	\Leftrightarrow	$F^*(u, v)$ complex
6)	$f(-x, -y)$ complex	\Leftrightarrow	$F(-u, -v)$ complex
7)	$f^*(x, y)$ complex	\Leftrightarrow	$F^*(-u - v)$ complex
8)	$f(x, y)$ real and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ real and even
9)	$f(x, y)$ real and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ imaginary and odd
10)	$f(x, y)$ imaginary and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ imaginary and even
11)	$f(x, y)$ imaginary and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ real and odd
12)	$f(x, y)$ complex and even	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ complex and even
13)	$f(x, y)$ complex and odd	\Leftrightarrow	$F(u, v)$ complex and odd



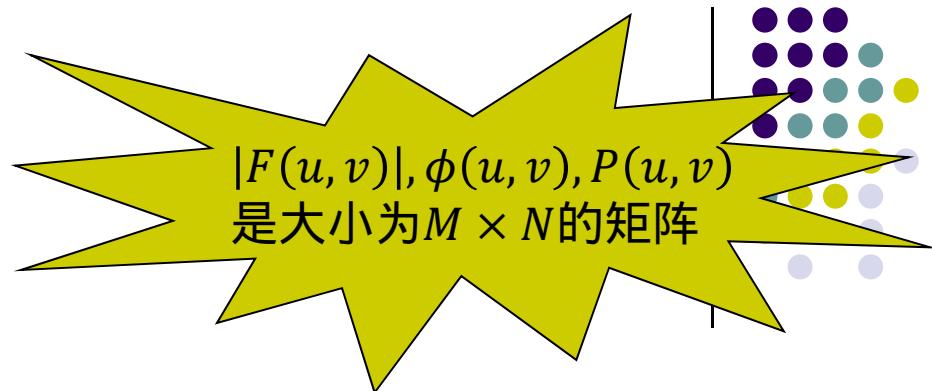


离散傅里叶变换（二维）

- 定义
- 基本性质
- 傅里叶谱和相角
- 二维卷积定理



傅里叶谱和相角



- 二维DFT的极坐标

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{j\phi(u, v)}$$

- 幅度（傅里叶谱）

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

- 相角 $[-\pi, \pi]$

$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

- 功率谱

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$





傅里叶谱和相角

- 实函数 $f(x, y)$ 的傅里叶变换是共轭对称

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

- 傅里叶谱是关于原点偶对称

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

- 相角是关于原点奇对称

$$\phi(u, v) = -\phi(-u, -v)$$





傅里叶谱和相角

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- 因此

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \\ &= MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = MN \bar{f}(x, y) \end{aligned}$$

- $|F(0,0)|$ 通常为谱的最大分量

$$|F(0, 0)| = MN |\bar{f}(x, y)|$$

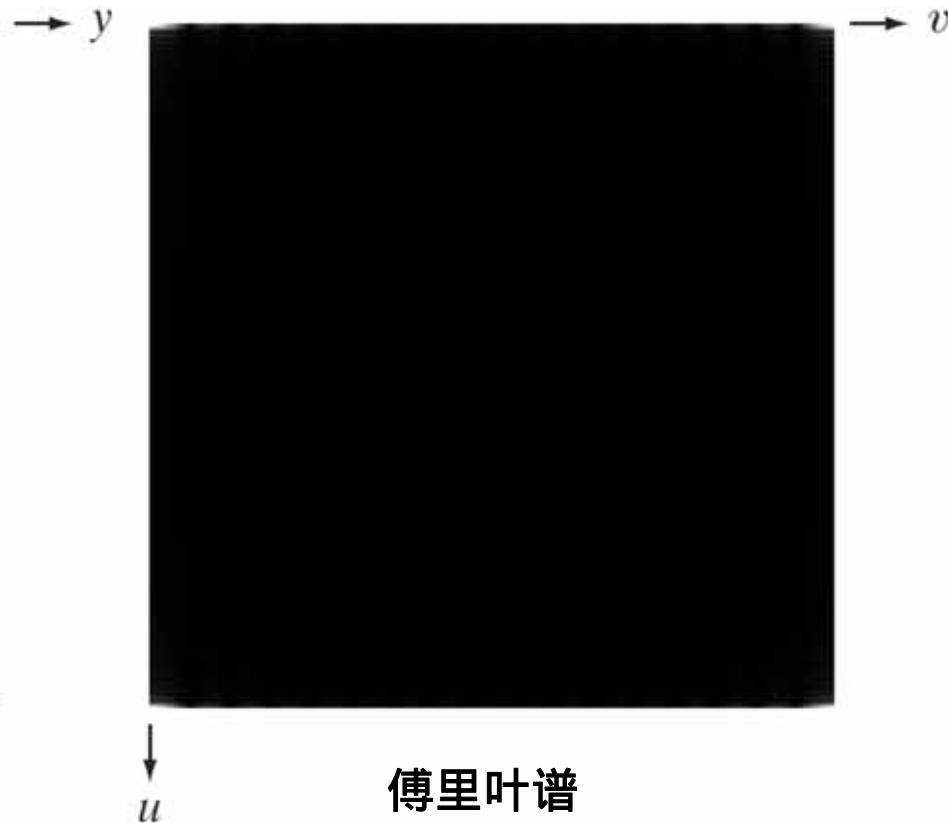
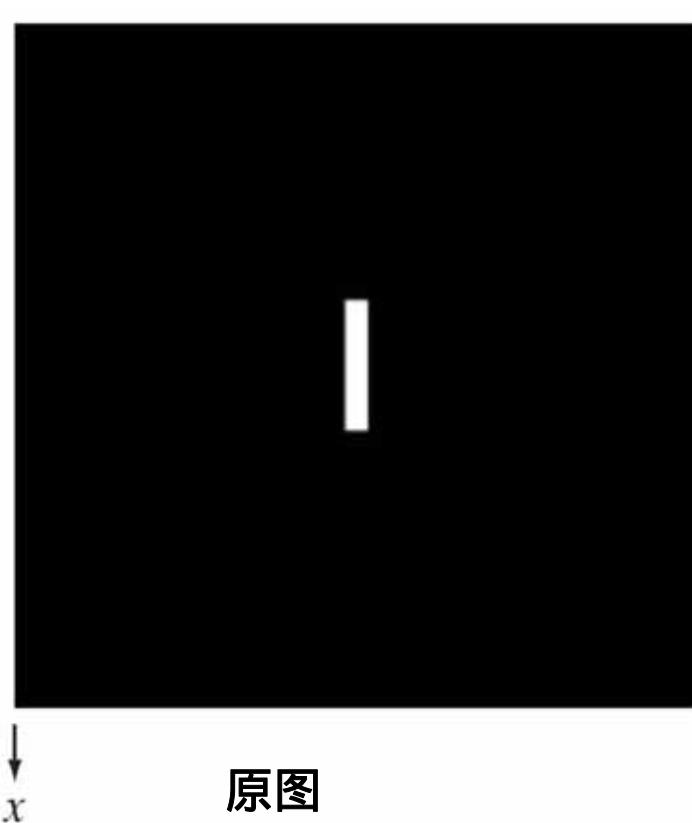
- $F(0,0)$ 被称为直流分量 (频率为0)



举例



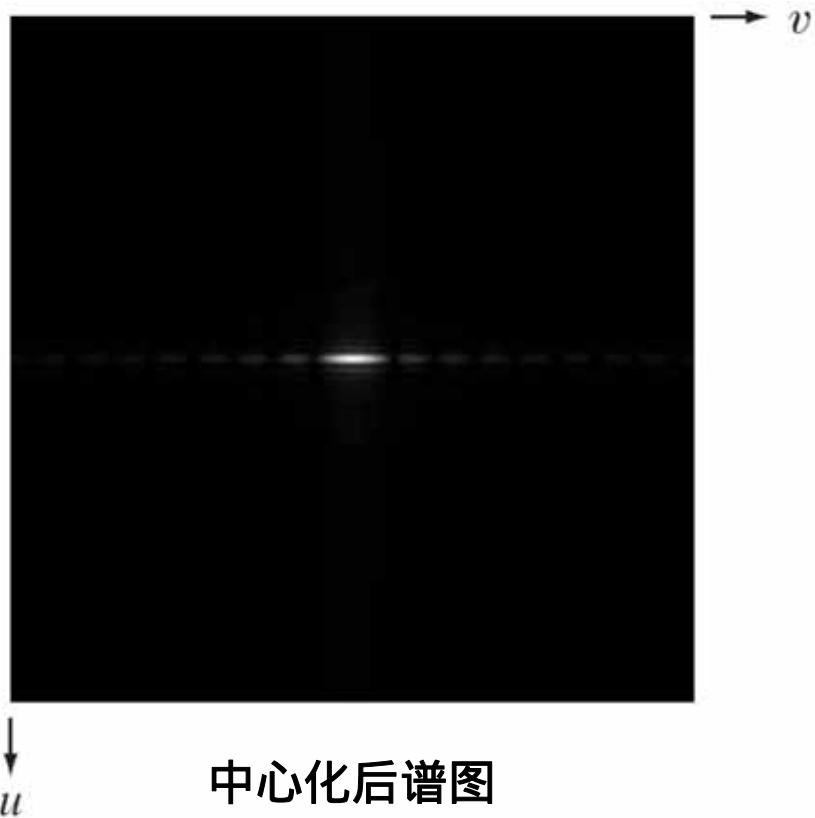
- 为什么谱图四个角都亮？





举例

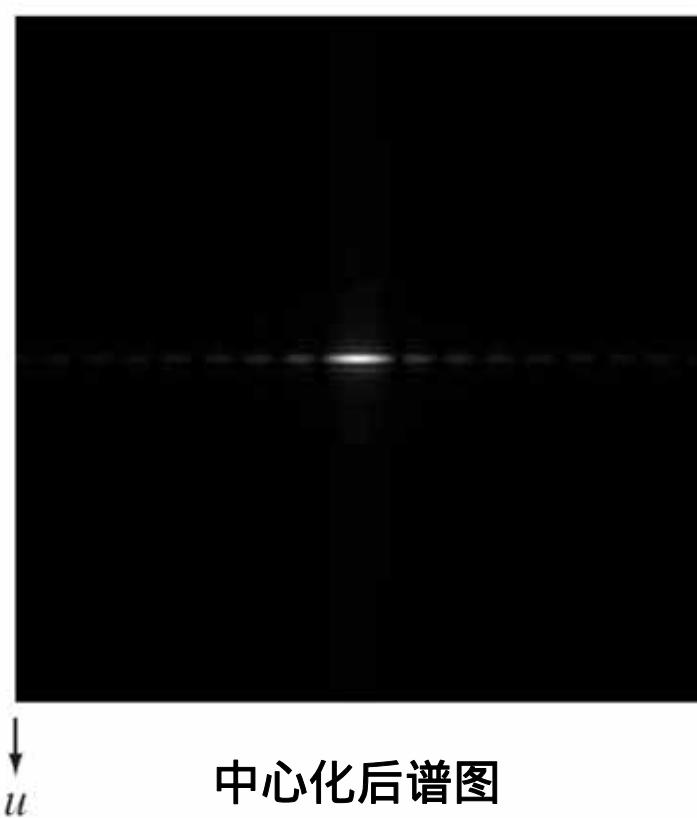
$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$



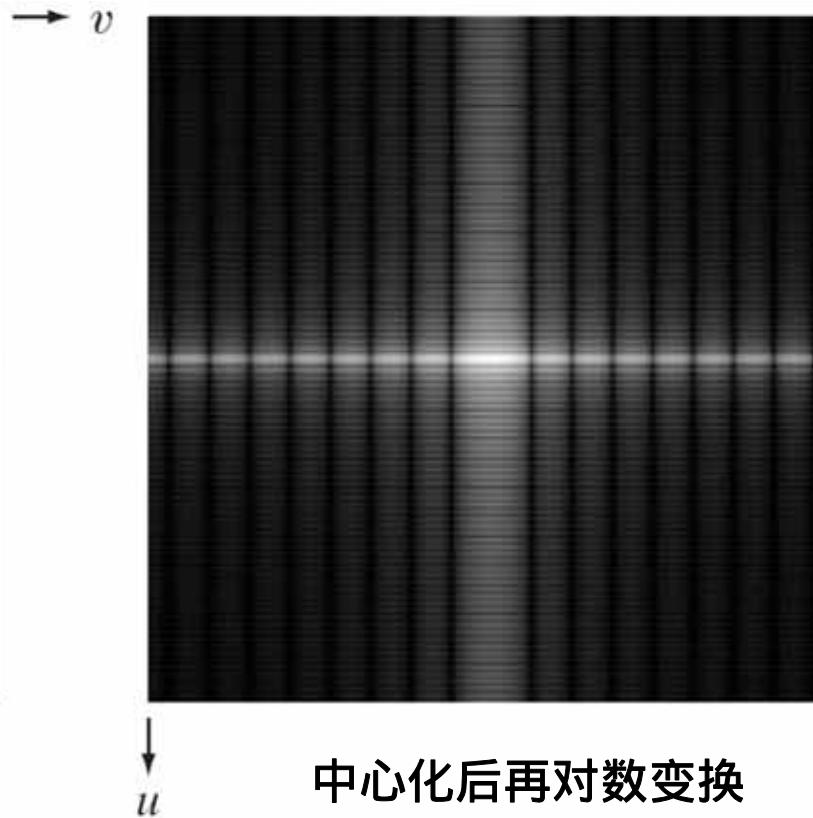
举例



$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$



中心化后谱图



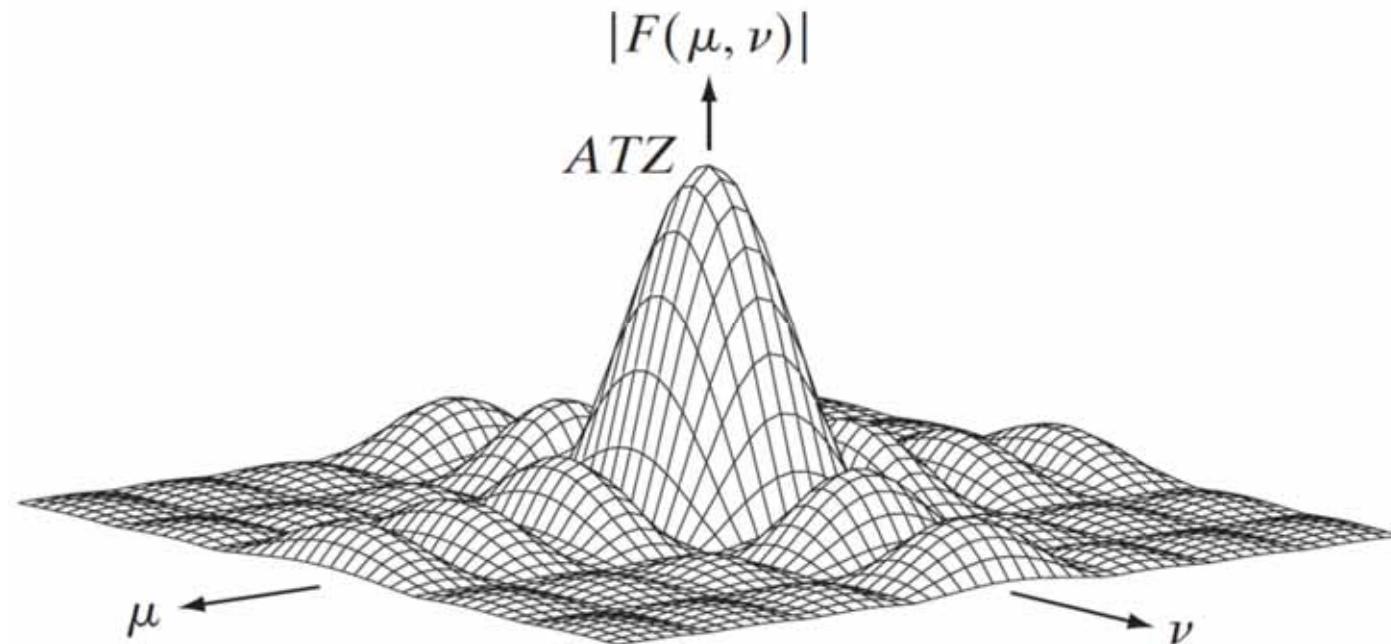
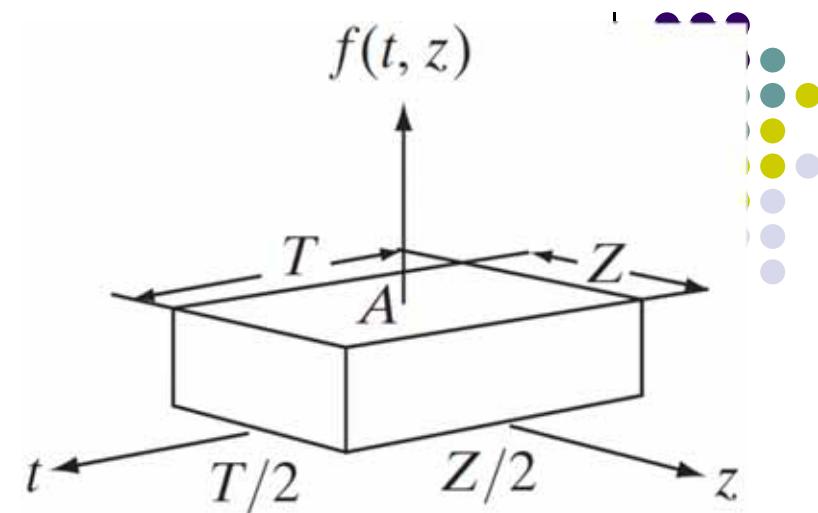
中心化后再对数变换

$$\log(1 + |F(u, v)|)$$



举例

- 二维盒状函数的傅里叶变换



- 零的位置与 T, Z 成反比、逐渐降低、**无限**延伸

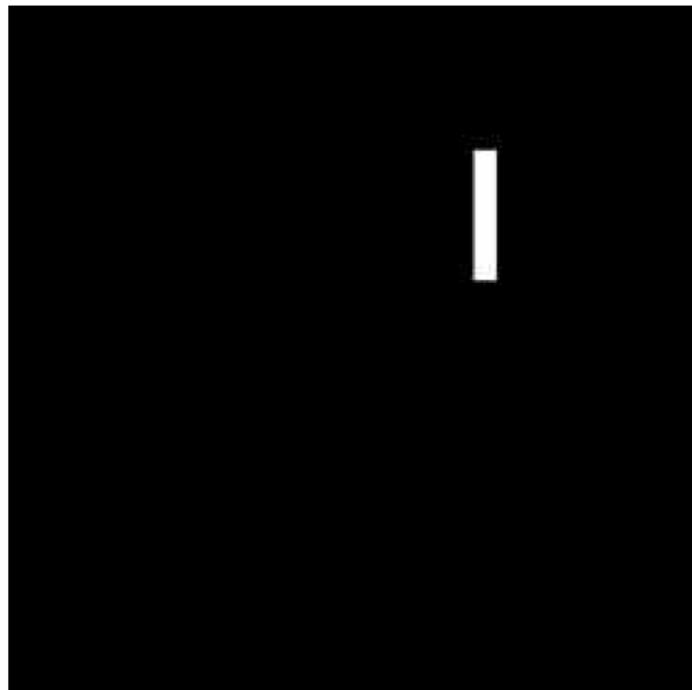




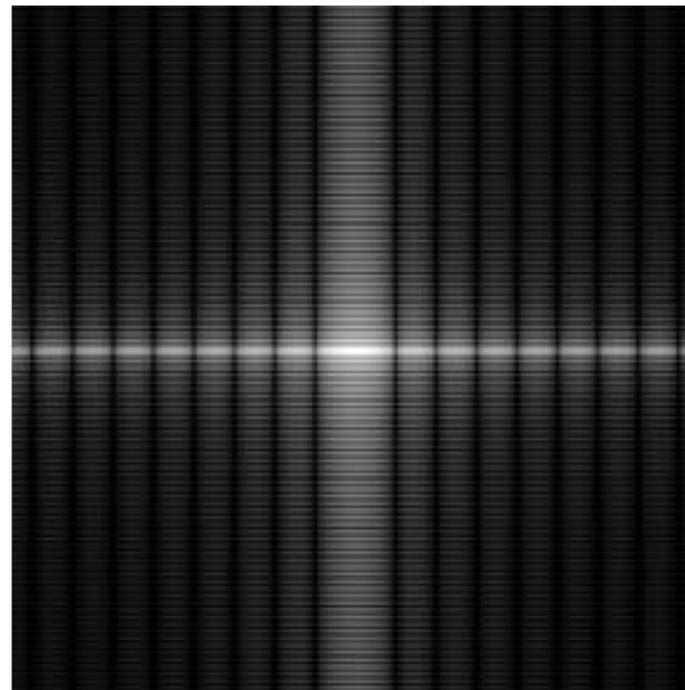
举例

- 图像平移不改变傅里叶谱

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0 u/M + y_0 v/N)}$$



平移后图像



傅里叶谱

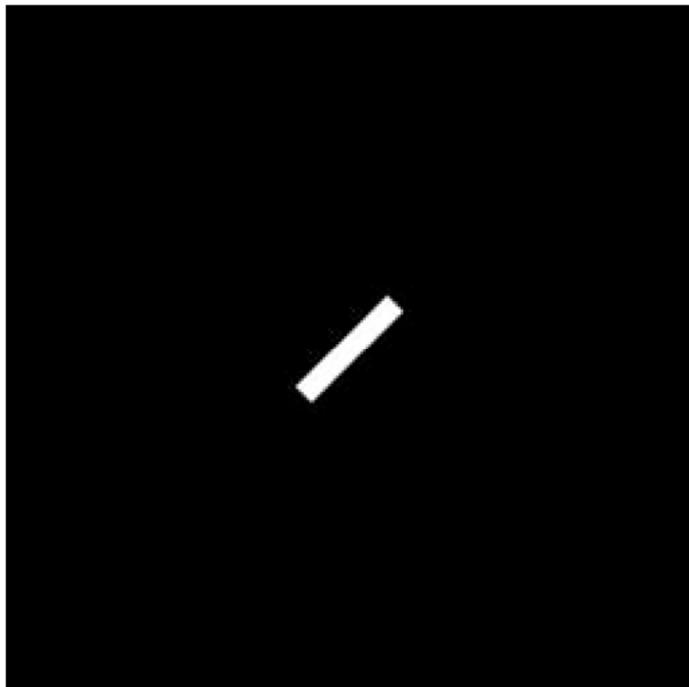




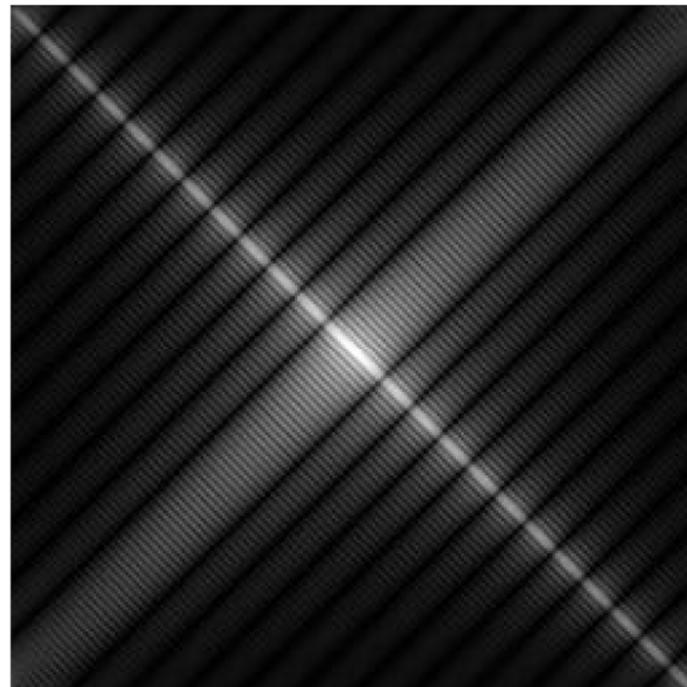
举例

- 图像旋转 θ_0 ，谱图旋转同样的角度

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$



旋转后图像



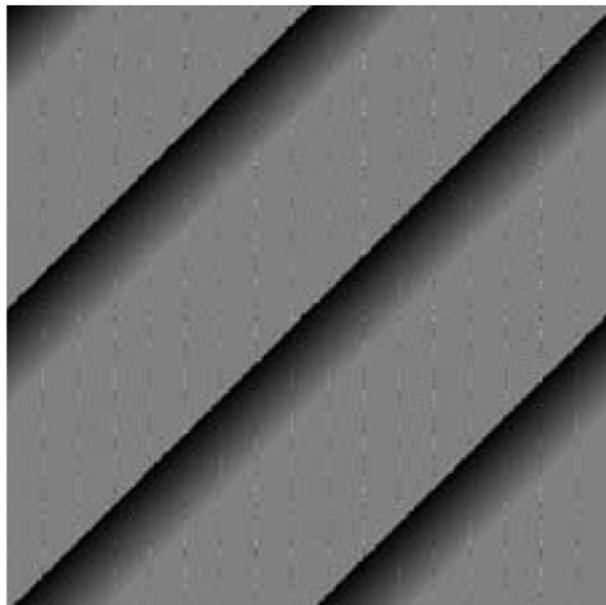
傅里叶谱



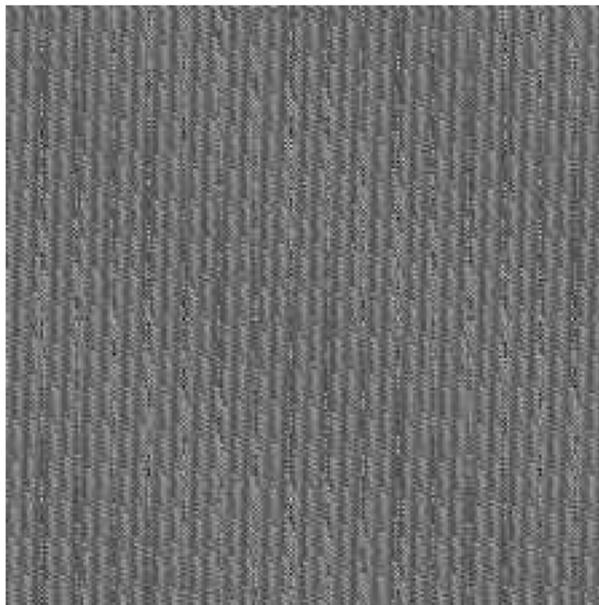


举例

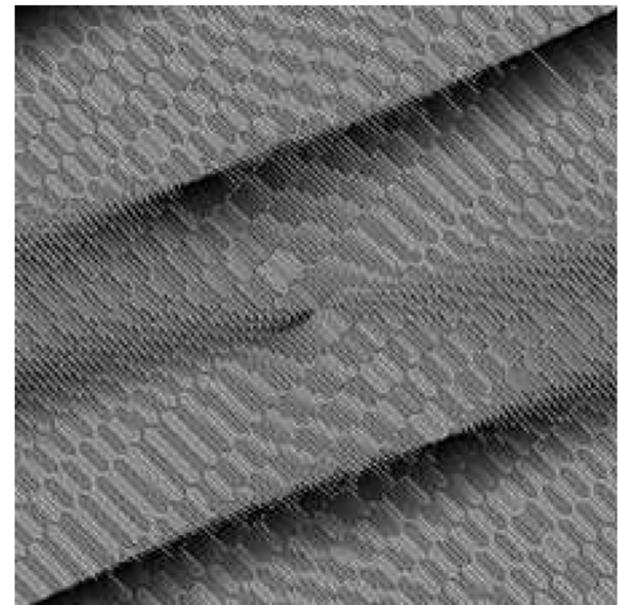
- 相角差异巨大，可视信息少



原图相角



平移后图像相角



旋转后图像相角





举例

- 傅里叶谱决定了正弦波的幅度，表示灰度
- 相角表示正弦波的位移，携带了定位信息

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$



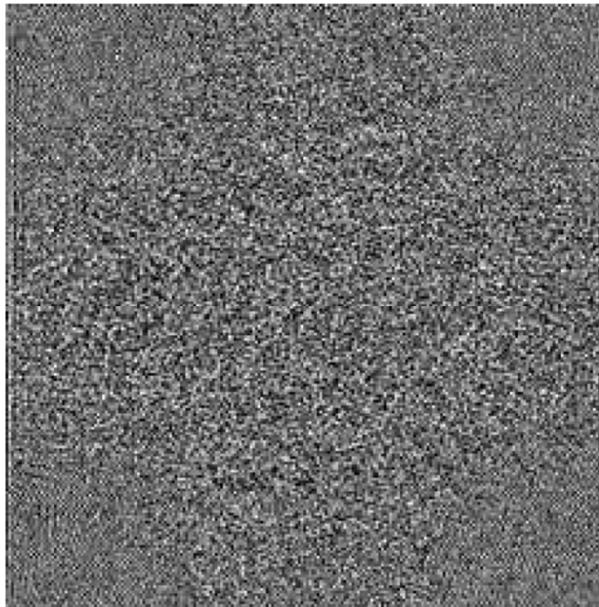


举例

- 傅里叶谱决定了正弦波的幅度，表示灰度
- 相角表示正弦波的位移，携带了定位信息



原图



相角



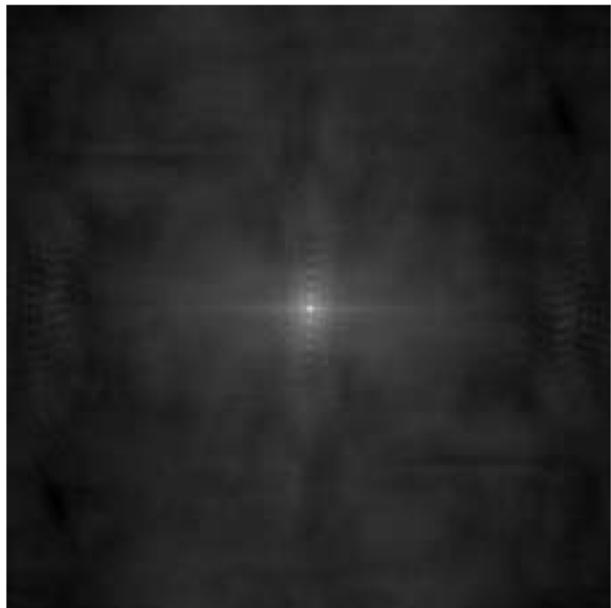
仅用相角信息重构





举例

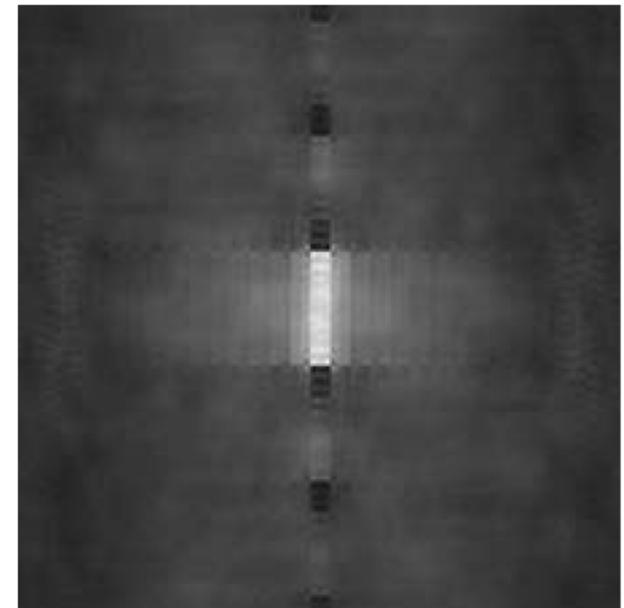
- 傅里叶谱决定了正弦波的幅度，表示灰度
- 相角表示正弦波的位移，携带了定位信息



仅用傅里叶谱重构



妇女相角+矩形谱



妇女谱+矩形相角





离散傅里叶变换（二维）

- 定义
- 基本性质
- 傅里叶谱和相角
- 二维卷积定理





二维卷积定理

- 二维离散卷积

$$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$
- 周期函数，也被称为**循环卷积**
- 二维卷积定理

频域滤波的
理论依据

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$$



离散卷积

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$



● 旋转、补零、计算、滑动、裁剪

Origin f
0 0 0 1 0 0 0

w rotated 180°
8 2 3 2 1

(i)

0 0 0 1 0 0 0 0
8 2 3 2 1

(j)

0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (m)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (n)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (k)
8 2 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 (l)
8 2 3 2 1

Full convolution result
0 0 0 1 2 3 2 8 0 0 0 0 (o)

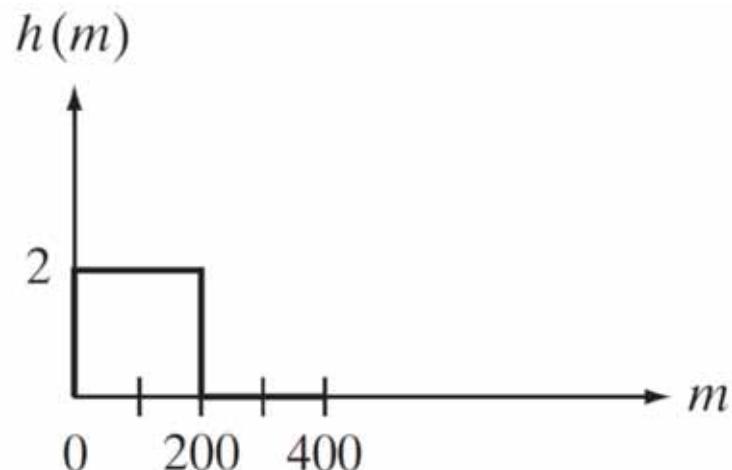
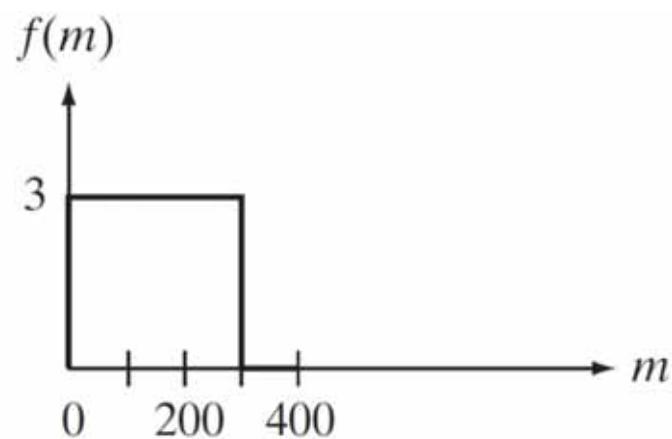
Cropped convolution result
0 1 2 3 2 8 0 0 (p)





举例

- 直接计算二维离散卷积



$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{399} f(x)h(x - m)$$

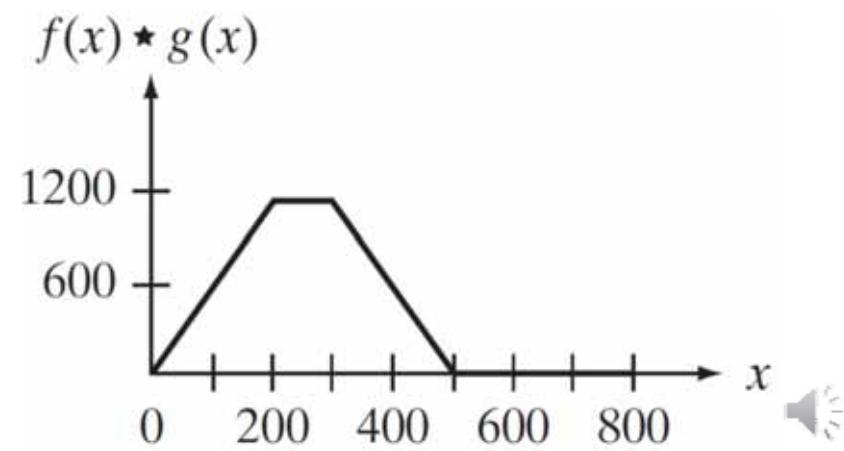
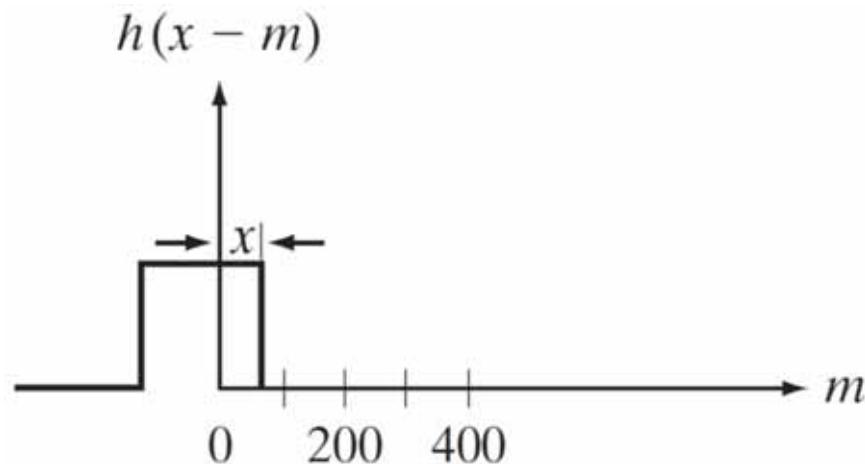
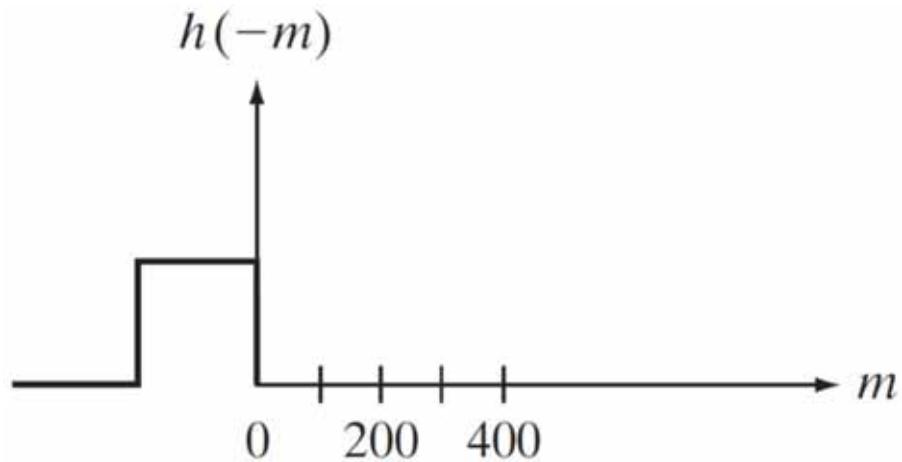
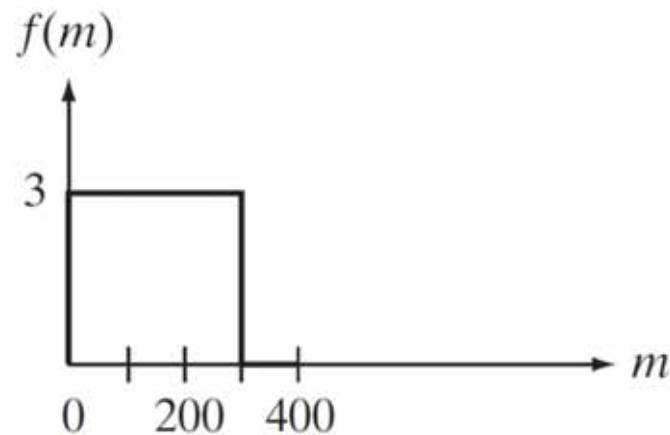
- $x = 0, 1, \dots, 799$





举例

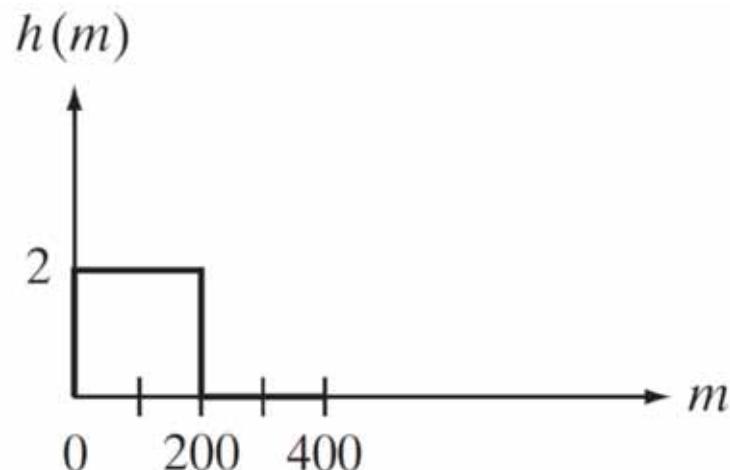
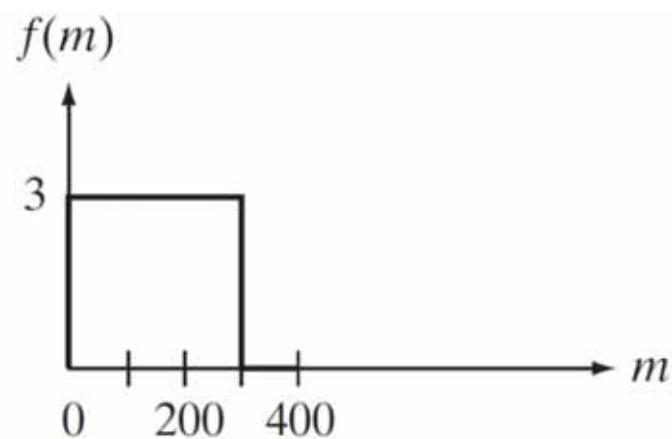
- 直接计算二维离散卷积





举例

- 依据卷积定理，计算二维循环卷积



$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

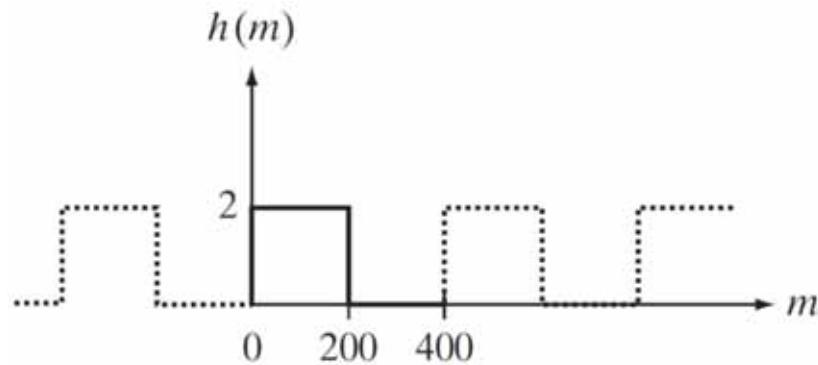
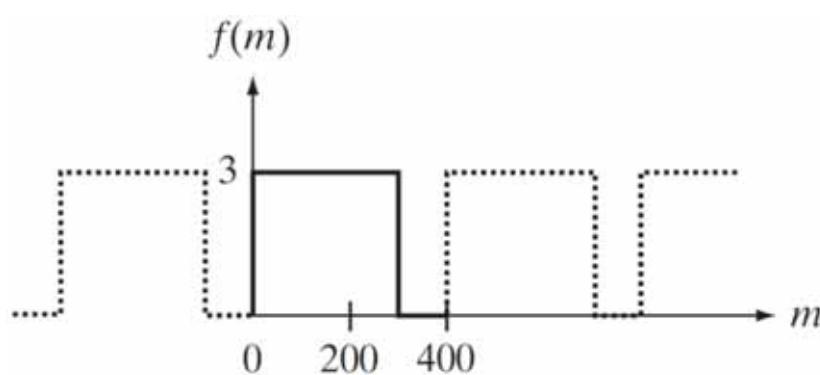
$$f(x, y) \star h(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$





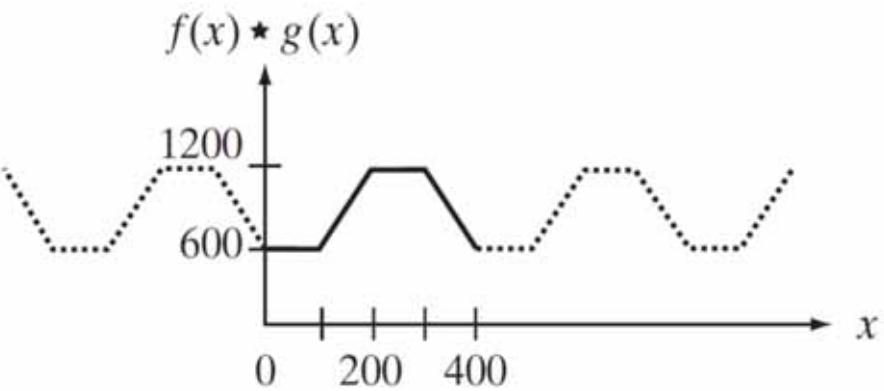
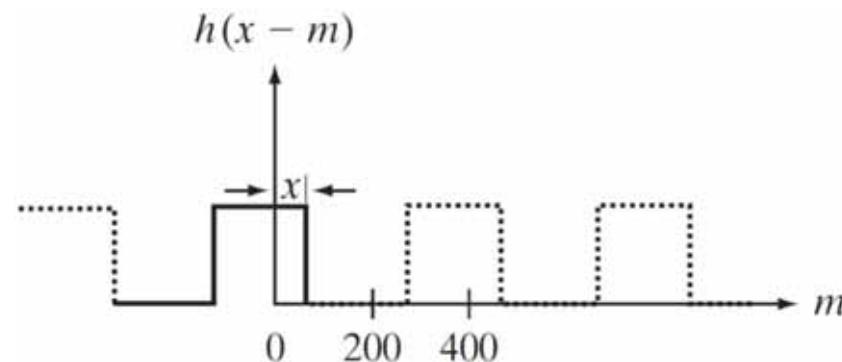
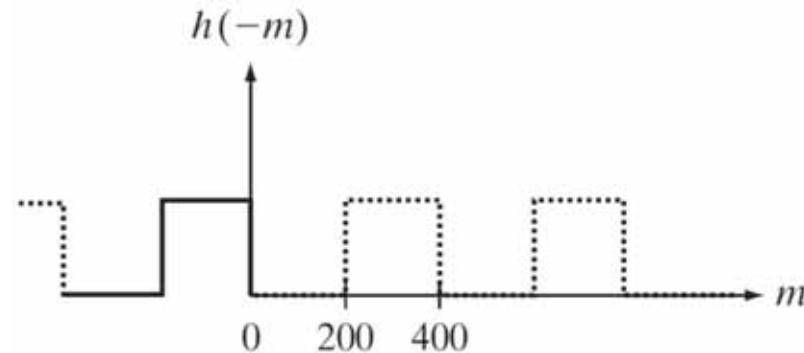
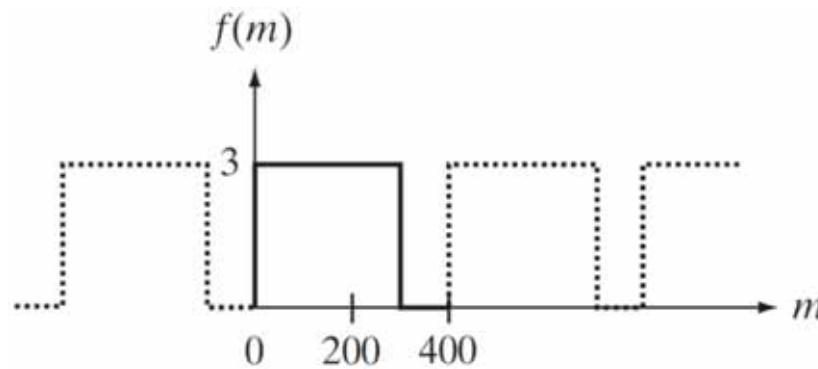
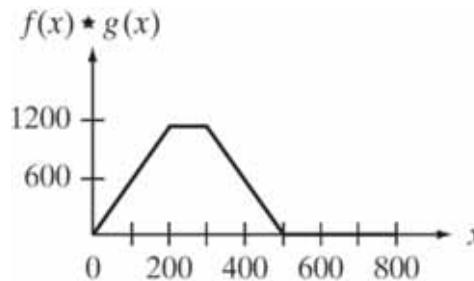
举例

- 依据卷积定理，计算二维循环卷积



举例

- 依据卷积定理，计算二维循环卷积





0填充

- $f(x)$ 有 A 个样本、 $g(x)$ 有 B 个样本
- 对样本后面补0，使其长度为 P
- 缠绕错误可以避免，如果

$$P \geq A + B - 1$$

- 前面的例子，补399个0

要让卷积定理和直接卷积一致，需要0填充。





二维0填充

- $f(x, y)$ 是 $A \times B$ 大小的图像
- $h(x, y)$ 是 $C \times D$ 大小的图像
- 缠绕错误可以避免，如果

$$f_p(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq B - 1 \\ 0 & A \leq x \leq P \quad \text{or} \quad B \leq y \leq Q \end{cases}$$

$$h_p(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq D - 1 \\ 0 & C \leq x \leq P \quad \text{or} \quad D \leq y \leq Q \end{cases}$$

- 其中 $P \geq A + C - 1 \quad Q \geq B + D - 1$
- 选择偶数会让计算更快





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现





频率域滤波

- 频率域滤波基础
- 平滑图像
- 锐化图像
- 选择性滤波





频率域滤波基础

- 频域率性质
- 频率域滤波步骤
- 空间和频域率对应关系





频率域性质

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像
- 一般而言，难以将图像内容和频域对应起来
- 图像空间特征和频率分量的一般性关系
 - 变化最慢的分量，与平均灰度成正比

$$F(0, 0) = MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = M \bar{f}(x, y)$$





频率域性质

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

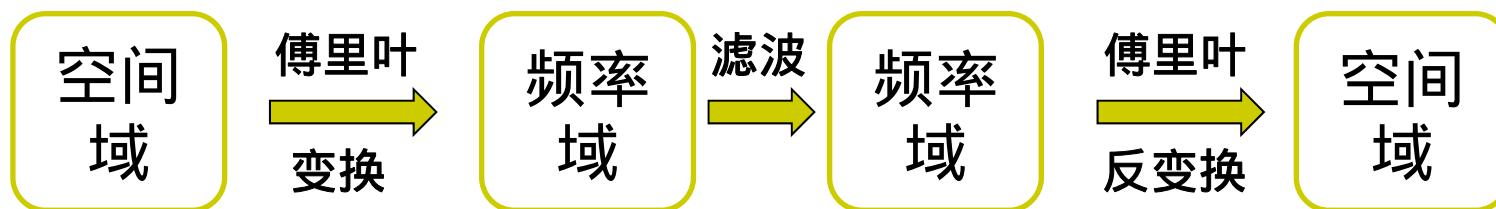
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像
- 一般而言，难以将图像内容和频域对应起来
- 图像空间特征和频率分量的一般性关系
 - 变化最慢的分量，与平均灰度成正比
 - 低频对应于图像中缓慢变化的灰度（墙）
 - 高频对应于图像中剧烈变化的灰度（边缘）





频率域性质

- 频域率滤波



- 傅里叶变换

$$F(u, v) = |F(u, v)|e^{j\phi(u, v)}$$

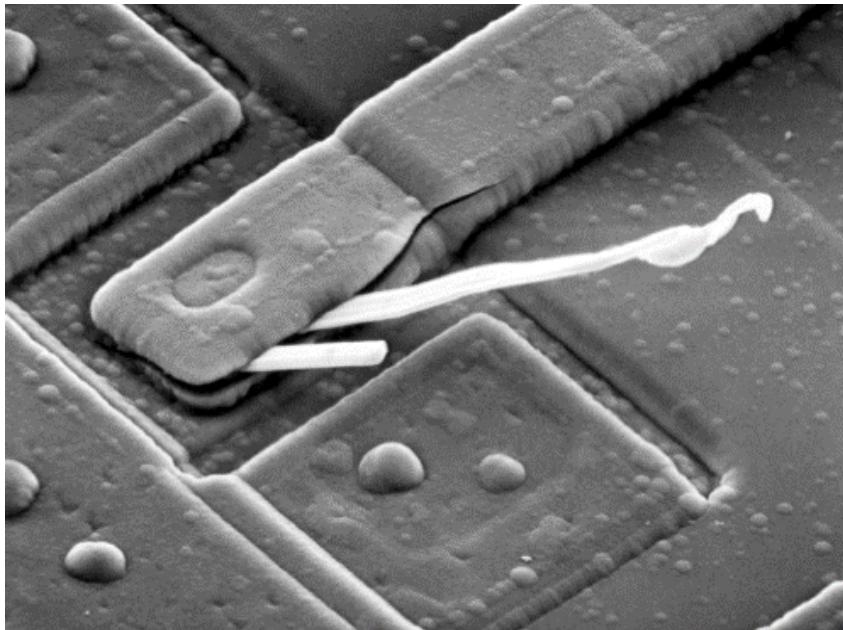
- 幅度（傅里叶谱） $|F(u, v)|$ 、相角 $\phi(u, v)$
- 视觉分析难以利用相角
- 傅里叶谱可以大致刻画图像



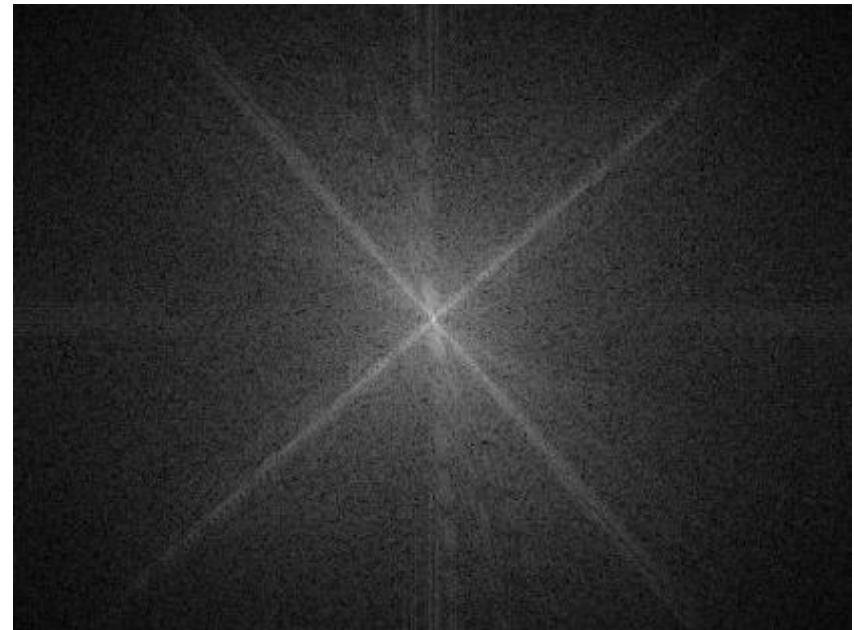


举例

- 集成电路的电子扫描图像



±45度的边缘
白色突出物



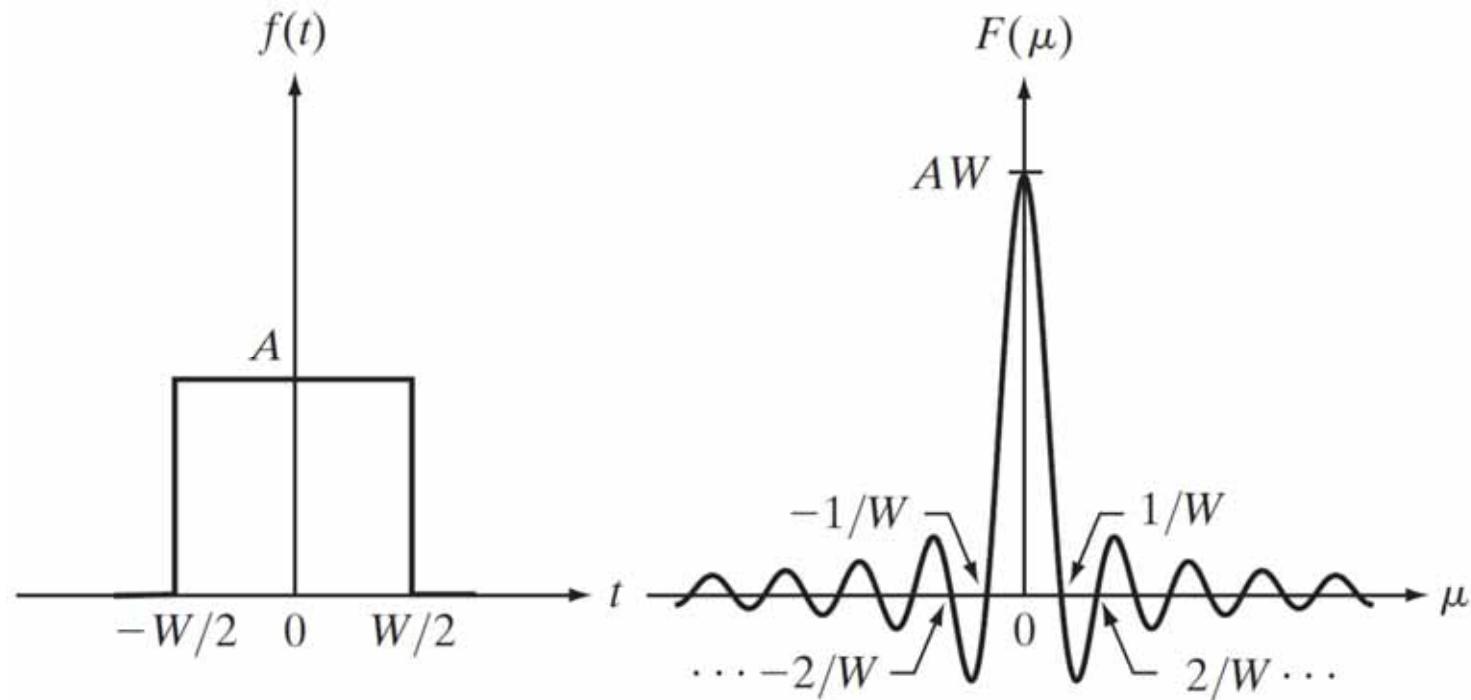
±45度方向的分量
垂直略靠左的分量
垂直靠左分量中的0





举例

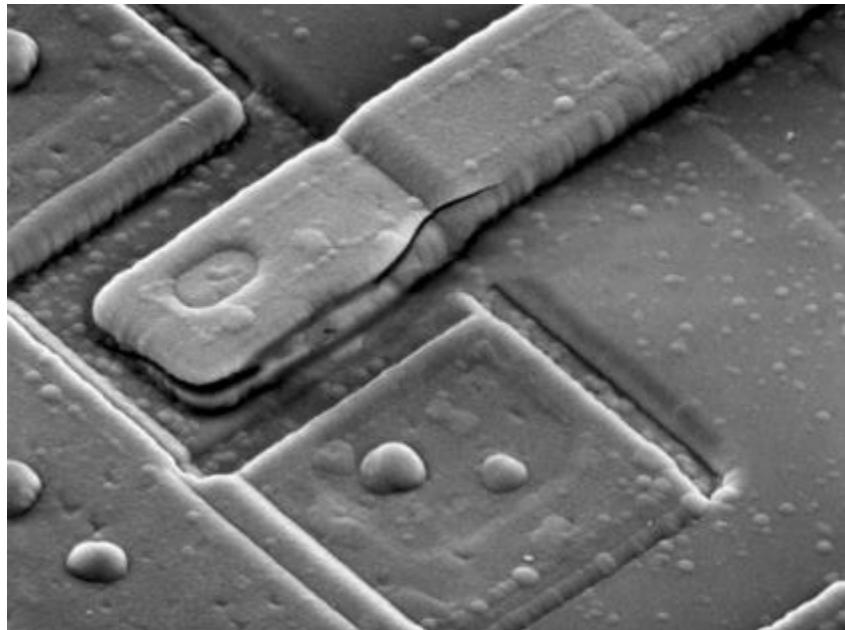
- 盒状函数的傅里叶变换



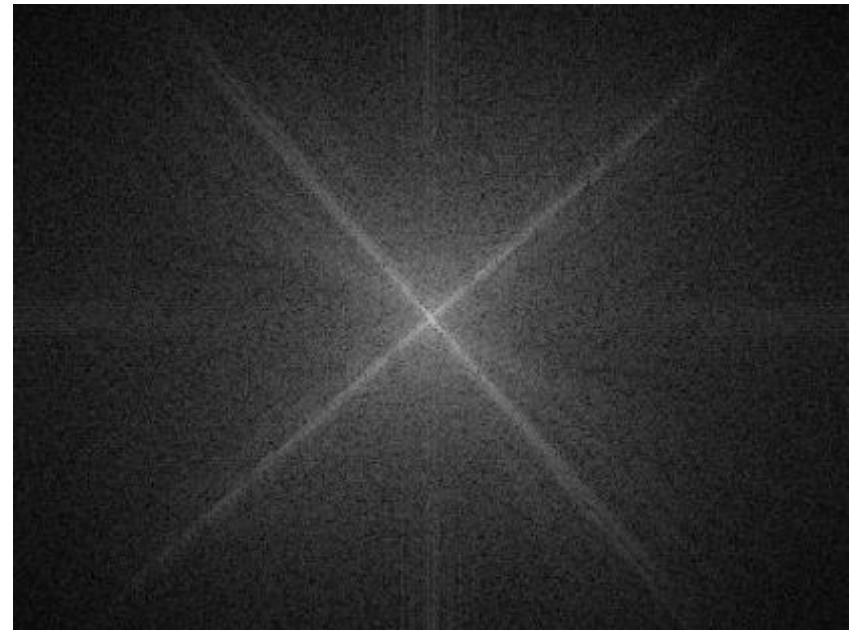


举例

- 集成电路的电子扫描图像



± 45 度的边缘



± 45 度方向的分量





频率域滤波基础

- 频域率性质
- 频率域滤波步骤
- 空间和频域率对应关系





频域率滤波基础

● 基本公式

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

- $F(u, v) = \mathfrak{F}[f(x, y)]$ 是图像 $f(x, y)$ 的 DFT
- $H(u, v)$ 是滤波函数（滤波器）
- H 实对称， f 是实数 $\Rightarrow g$ 是实数
 - 但存在计算误差，忽略 g 中虚数
- 假设 $F(u, v)$ 已经中心化

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$

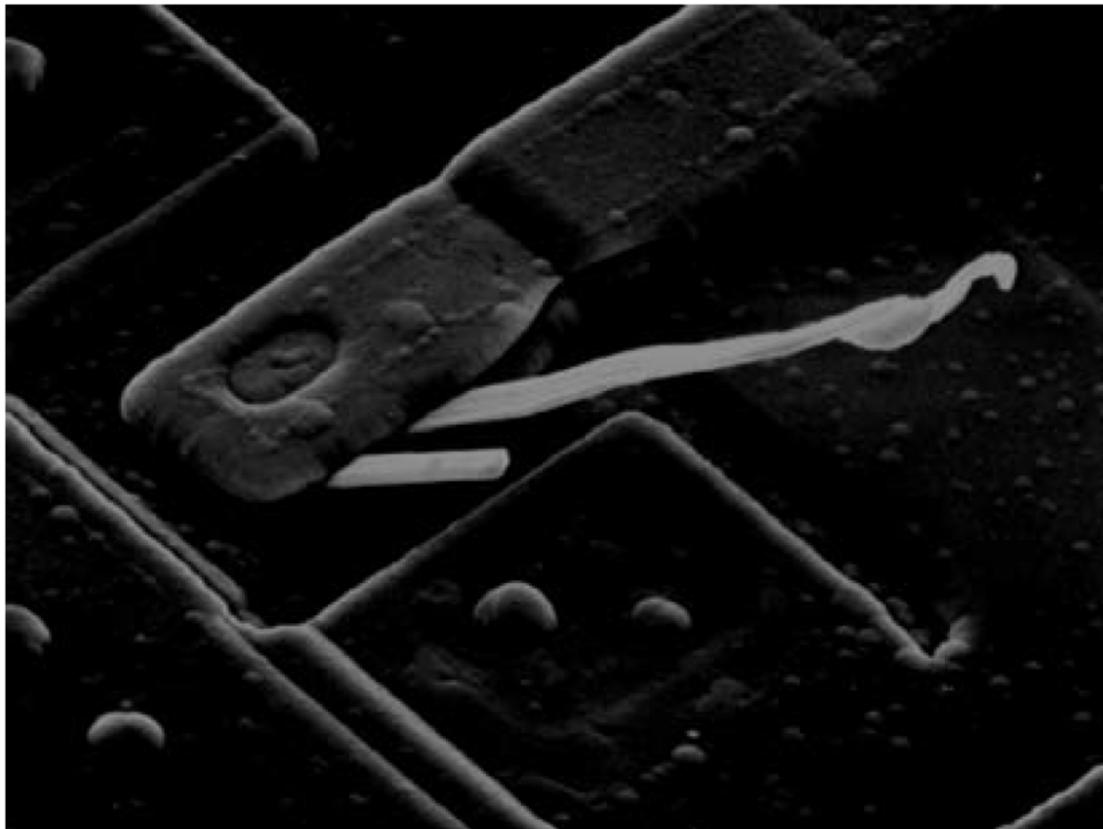
- 只需要考虑中心对称的 $H(u, v)$





举例

- $H(M/2, N/2) = 0$, 其他位置 $H(u, v)=1$
- 平均灰度
为0



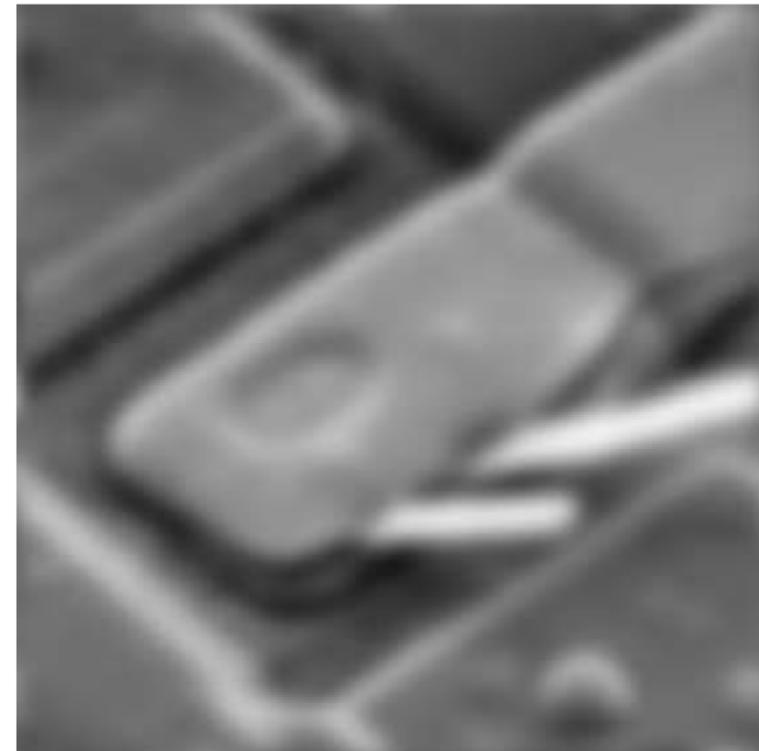
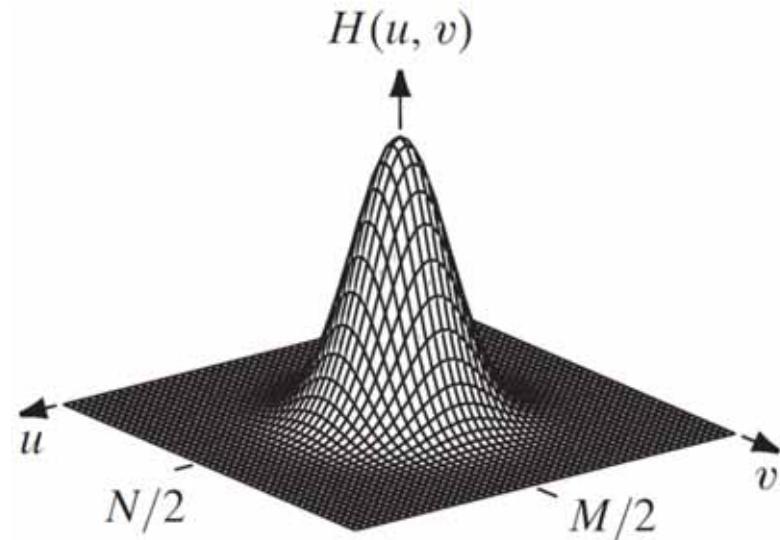
显示时将负数设为0





低通滤波器

- 衰减高频而通过低频，模糊图像

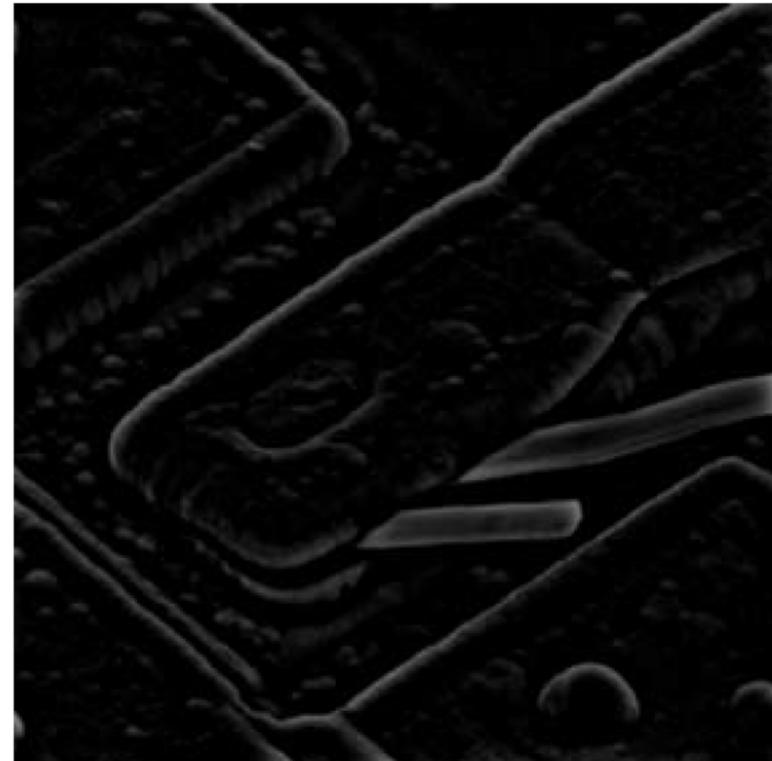
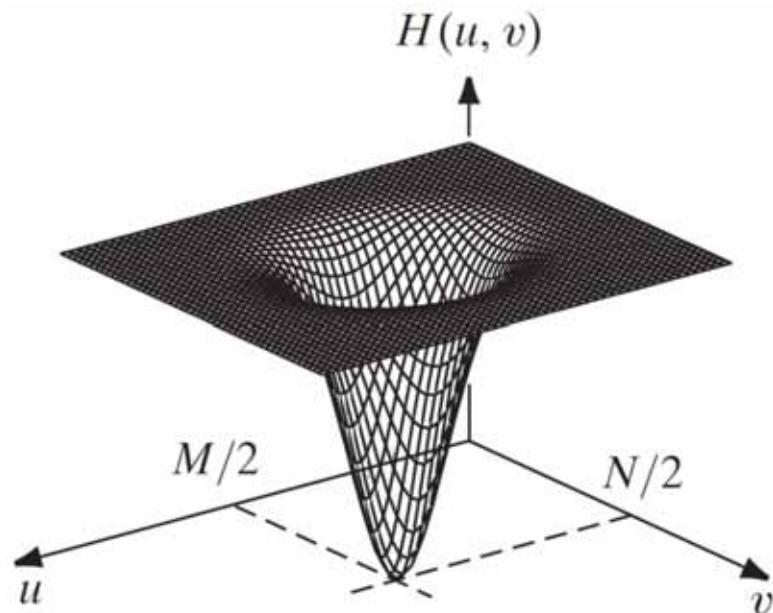


- 低频对应于图像中缓慢变化的灰度



高通滤波器

- 衰减低频而通过高频，强化细节



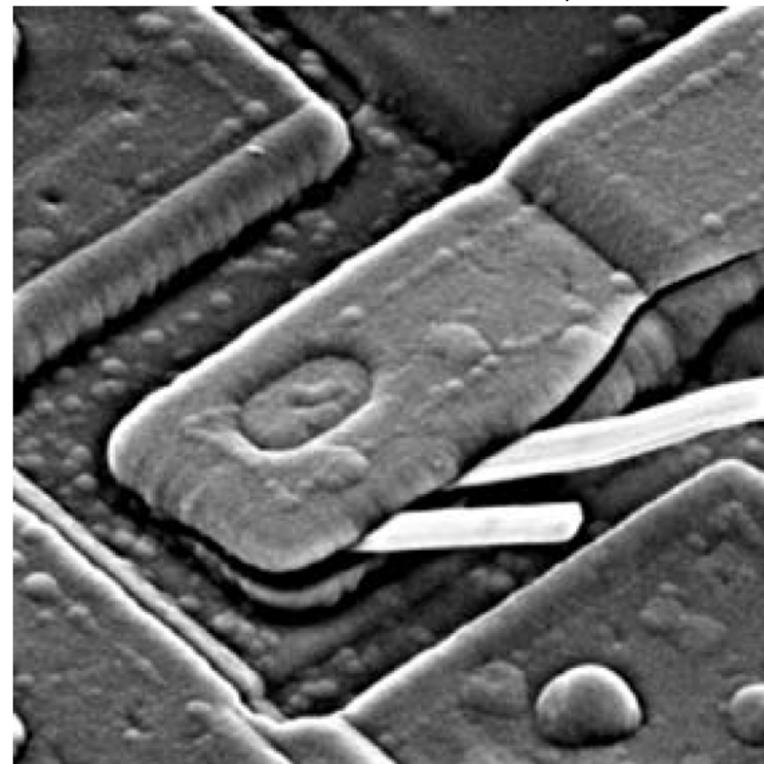
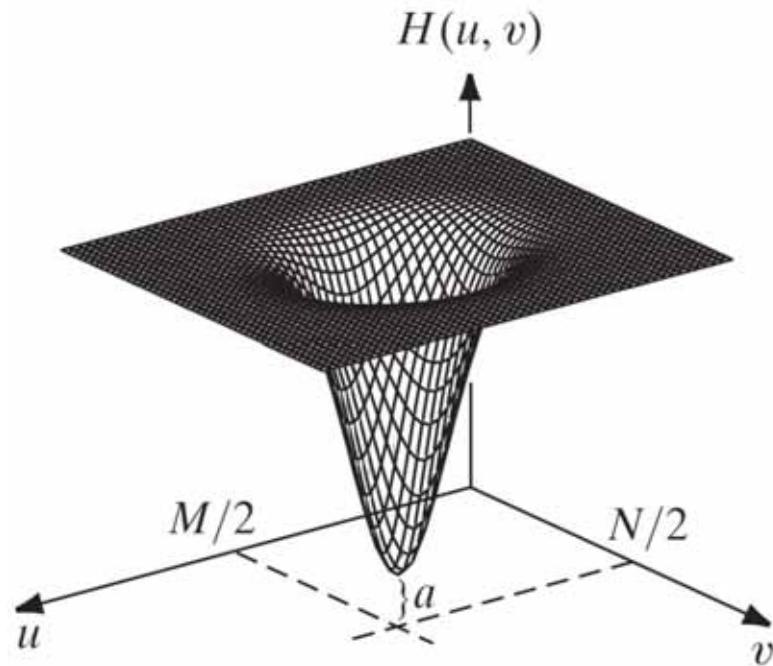
- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度



高通滤波器



- 衰减低频而通过高频，强化细节



- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度





二维0填充

- $f(x, y)$ 是 $A \times B$ 大小的图像
- $h(x, y)$ 是 $C \times D$ 大小的图像
- 缠绕错误可以避免，如果

$$f_p(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq B - 1 \\ 0 & A \leq x \leq P \quad \text{or} \quad B \leq y \leq Q \end{cases}$$

$$h_p(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq D - 1 \\ 0 & C \leq x \leq P \quad \text{or} \quad D \leq y \leq Q \end{cases}$$

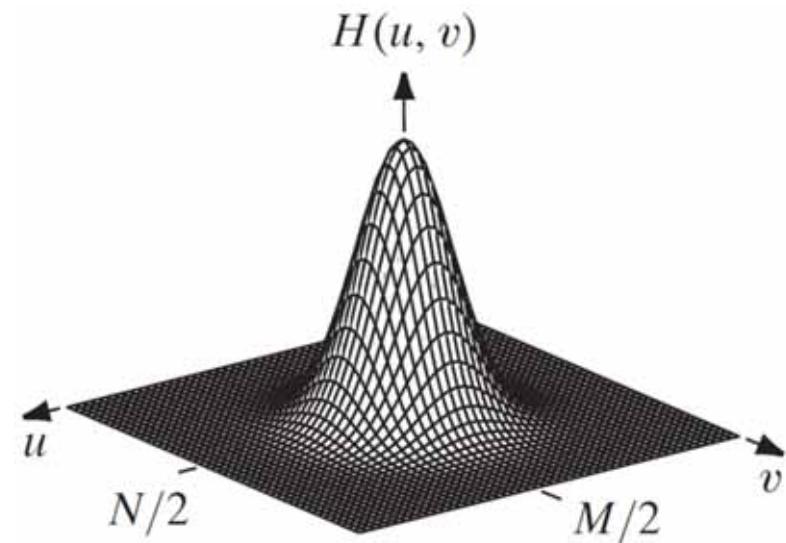
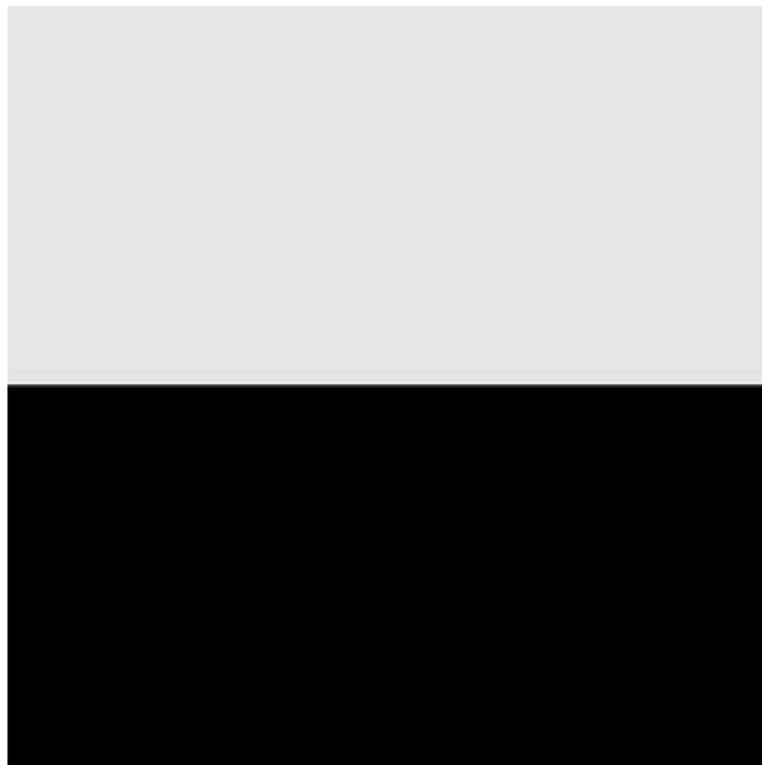
- 其中 $P \geq A + C - 1 \quad Q \geq B + D - 1$
- 选择偶数会让计算更快





不进行0填充

- 低通滤波器





不进行0填充

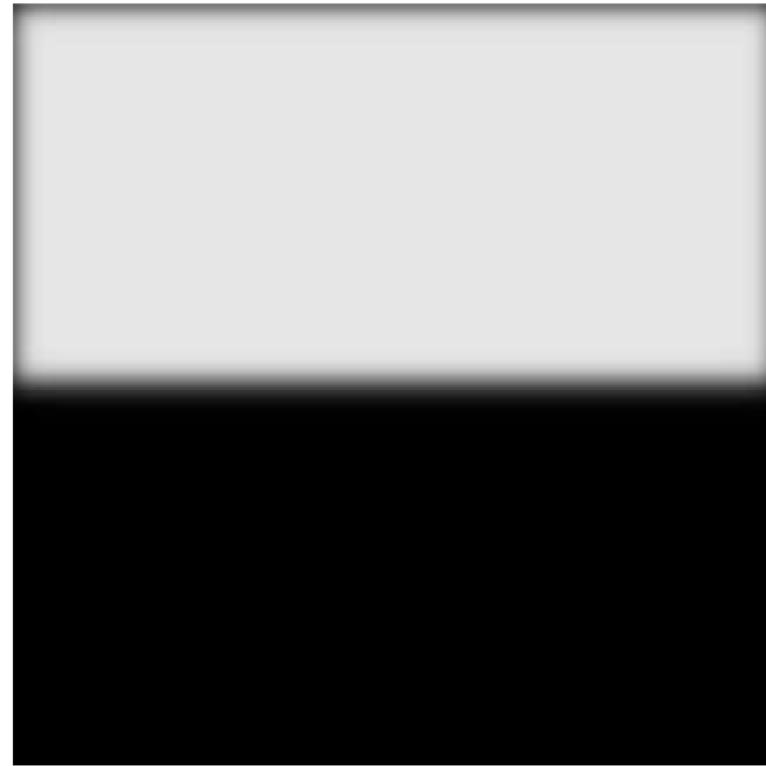
- 低通滤波器





进行0填充

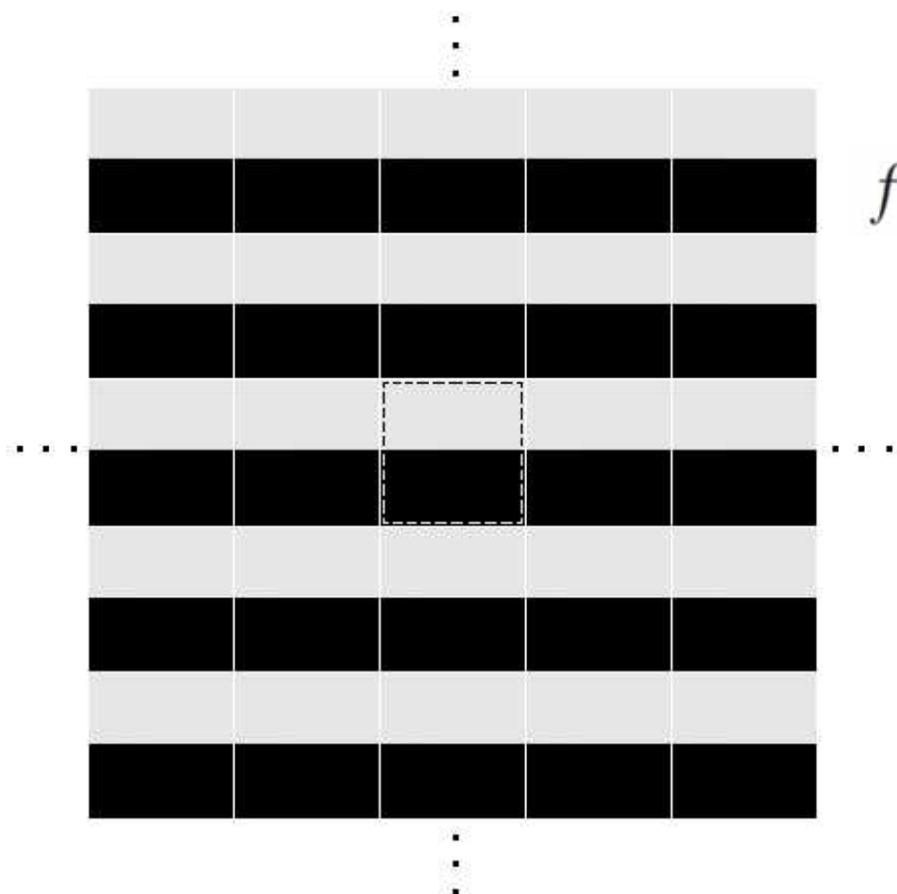
- 低通滤波器





原因分析

- 离散傅里叶变换的固有周期性



$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

$$f(x, y) \star h(x, y)$$

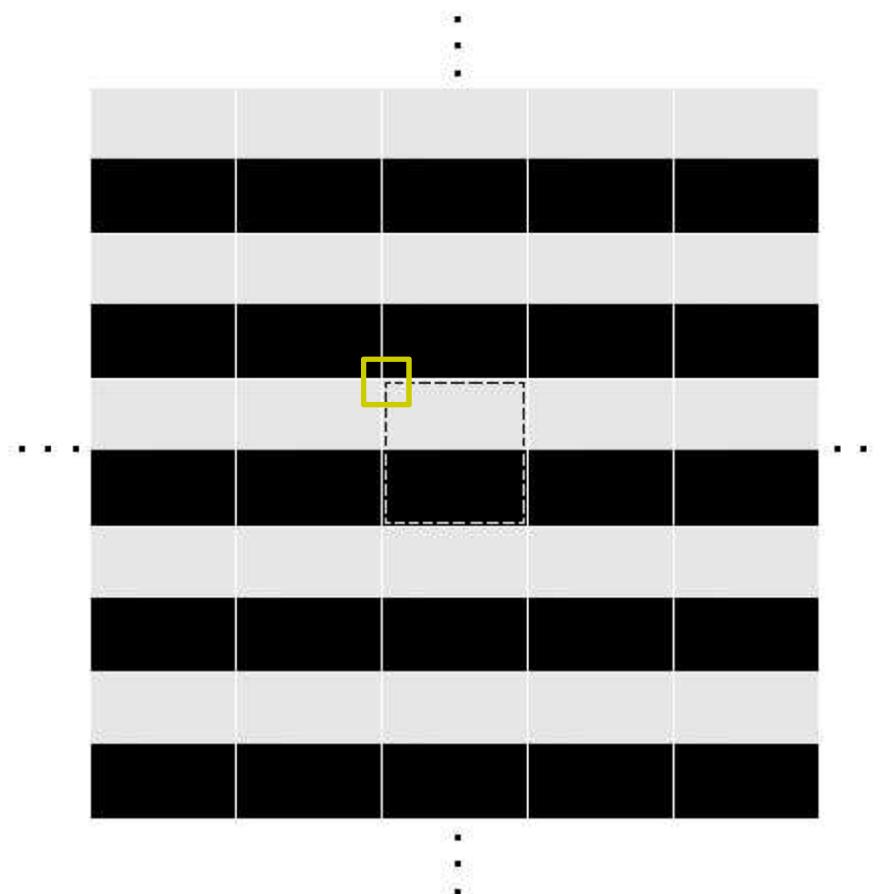
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$





原因分析

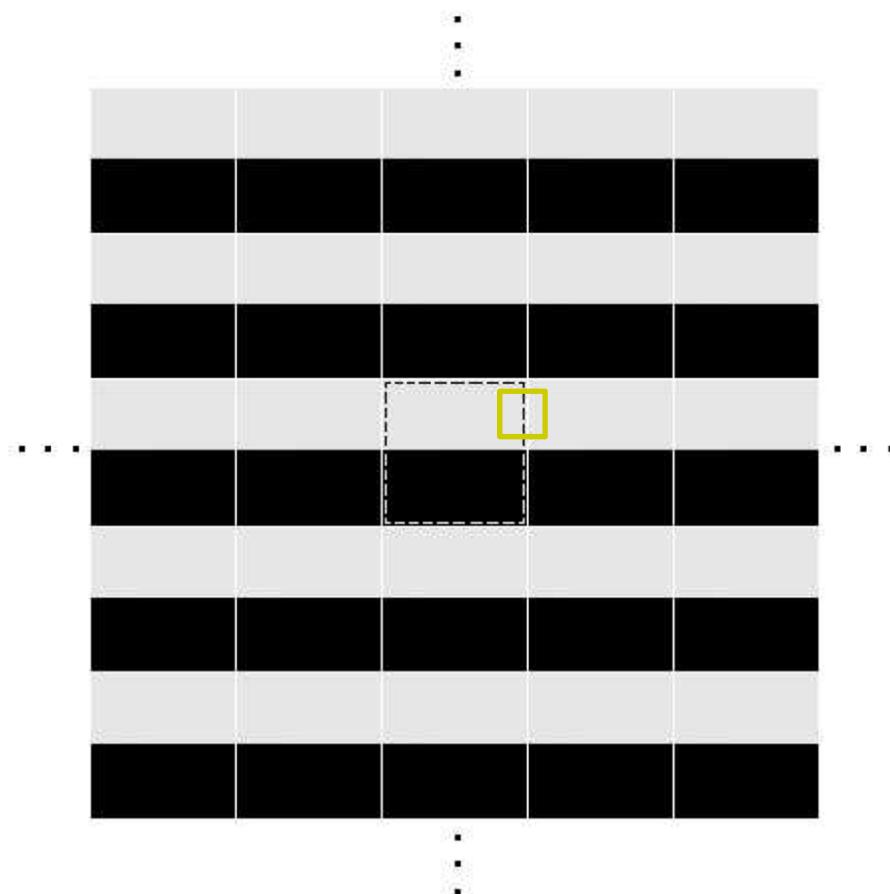
- 离散傅里叶变换的固有周期性





原因分析

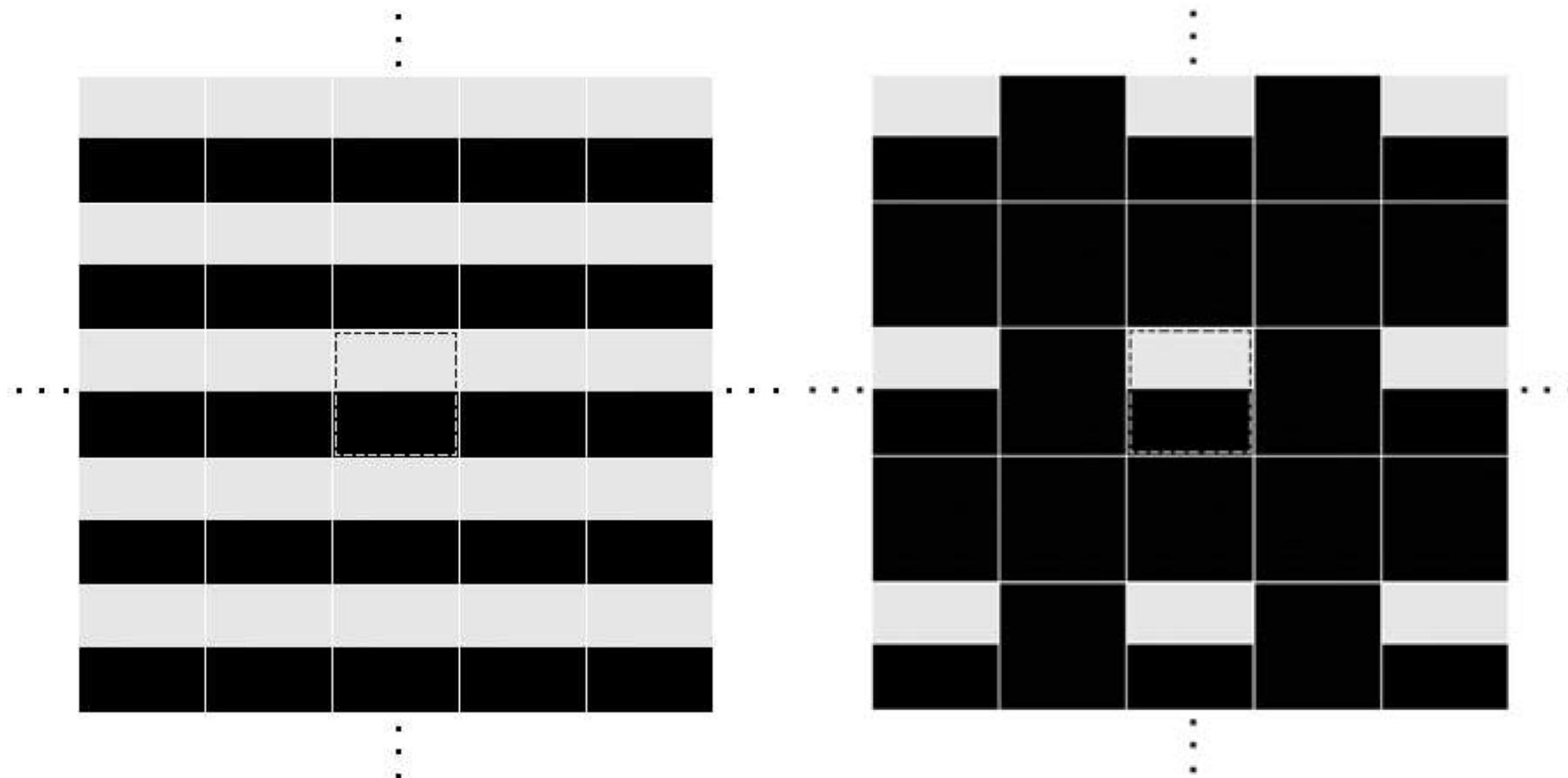
- 离散傅里叶变换的固有周期性



原因分析



- 离散傅里叶变换的固有周期性





如何对频域滤波器0填充？

- 基本公式

$$g(x, y) = \mathcal{I}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

- 通常直接指定频域滤波器 $H(u, v)$

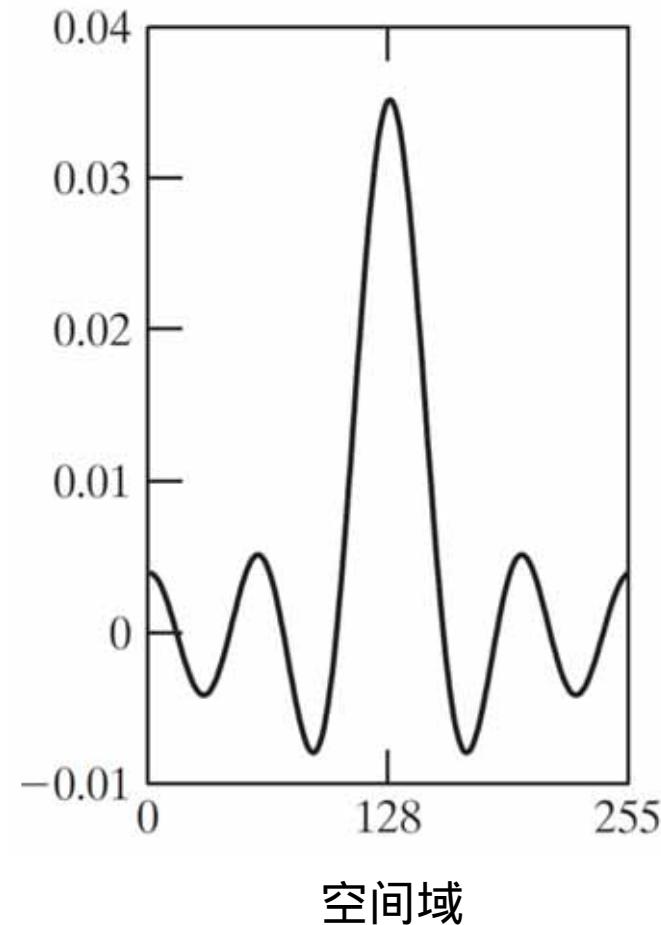
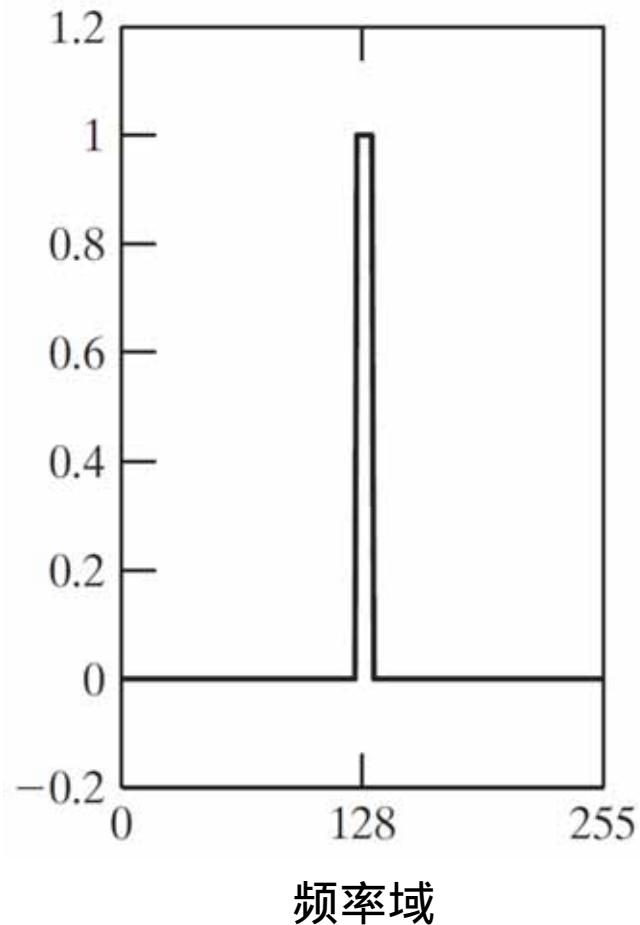
- 第一种方案





举例

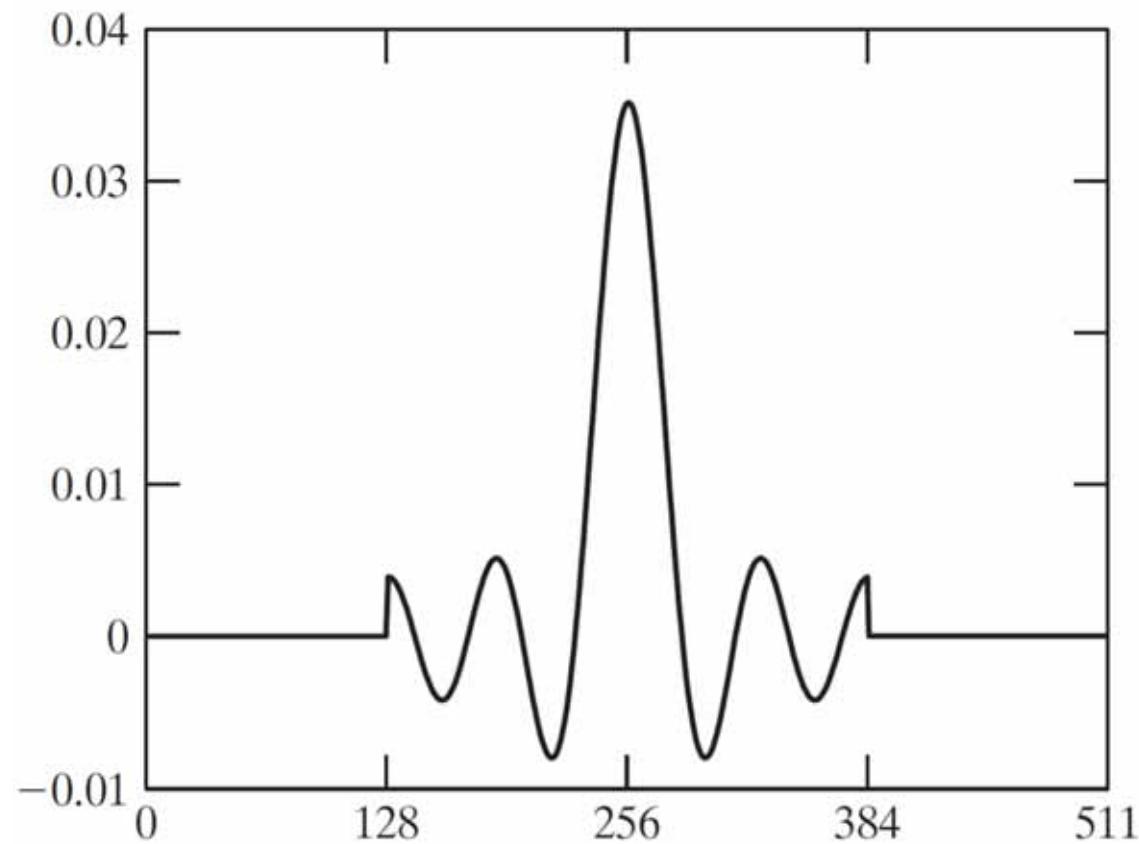
- 1维低通滤波器





举例

- ## • 1维低通滤波器

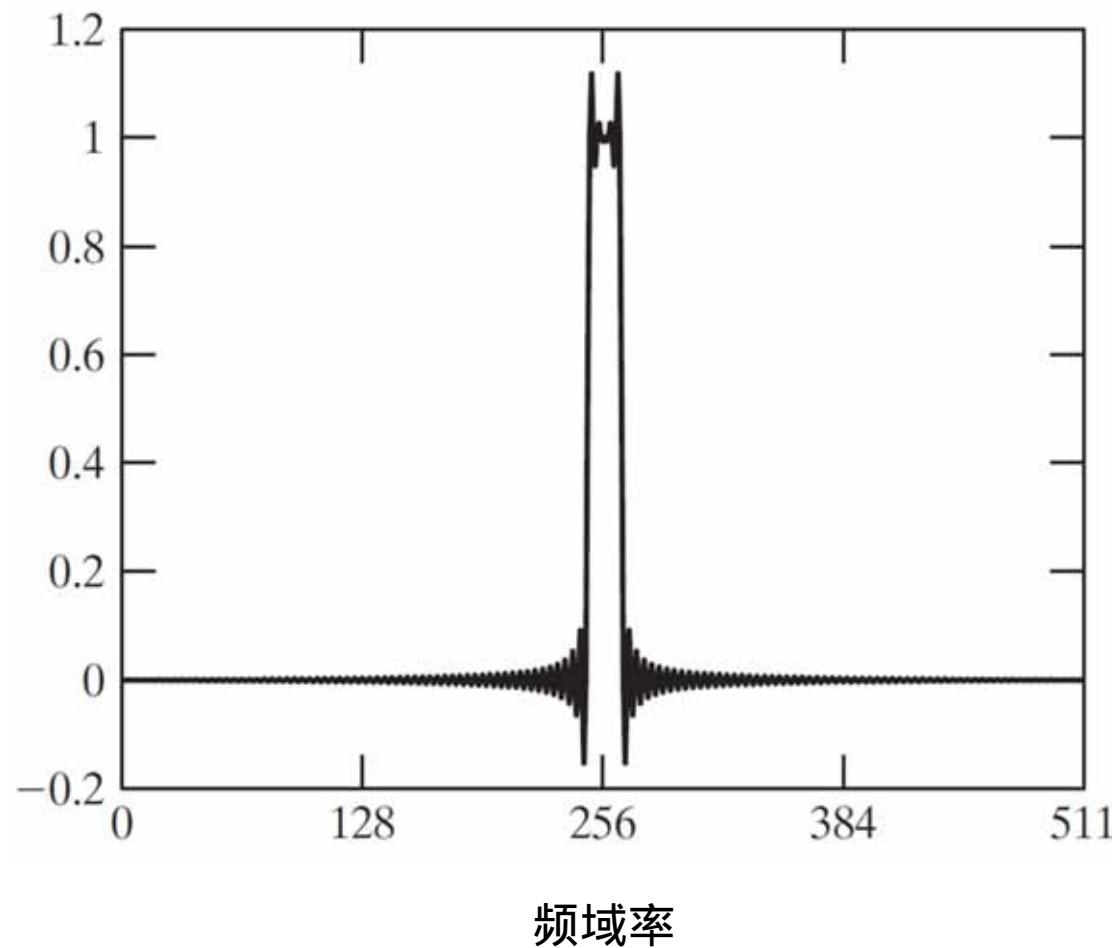


空间域0填充



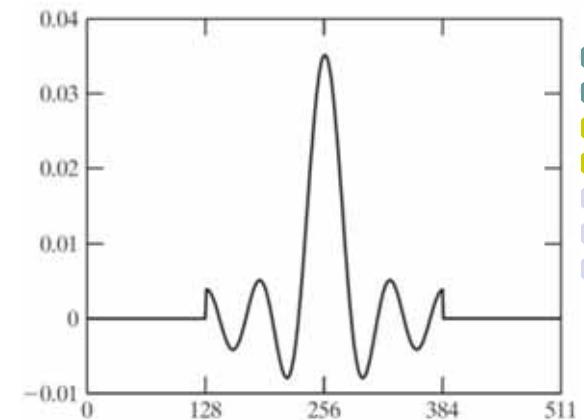
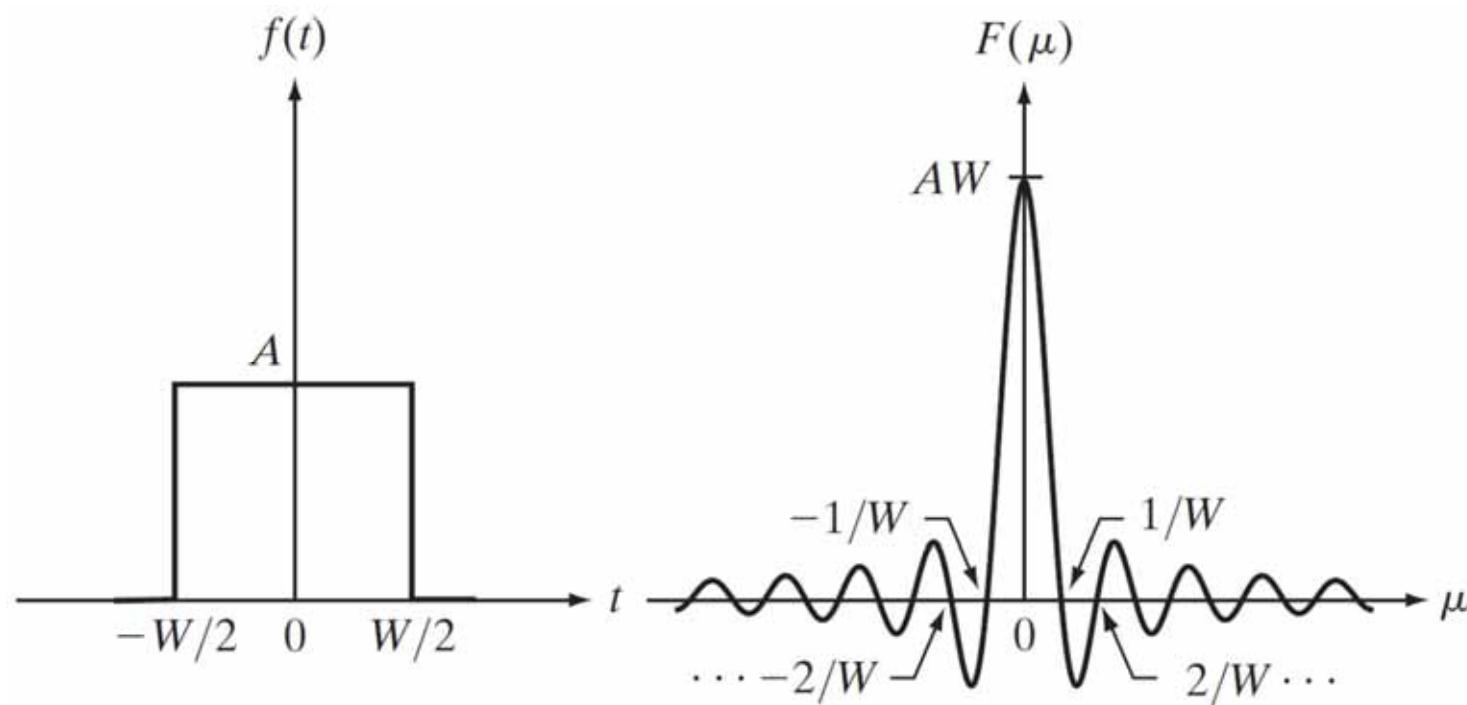
举例

- 1维低通滤波器



举例

- 盒状函数的傅里叶变换





第二种方案（更常用）

1. 对图像进行0填充，并计算傅里叶变换
2. 设计与填充后图像一样大的频域滤波器
 - 并不能完全避免缠绕错误
 - 实际效果很好，比第一种方案更佳





频域滤波器一般流程

1. 给定一副大小为 $M \times N$ 的输入图像 $f(x, y)$ ，选择填充参数 P 和 Q 。典型地，我们选择 $P = 2M$ 和 $Q = 2N$ 。
2. 对 $f(x, y)$ 添加必要数量的 0，形成大小为 $P \times Q$ 的填充后图像 $f_p(x, y)$ 。
3. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以 $f_p(x, y)$ 移到其变换的中心。
4. 计算来自步骤 3 的图像的 DFT，得到 $F(u, v)$ 。





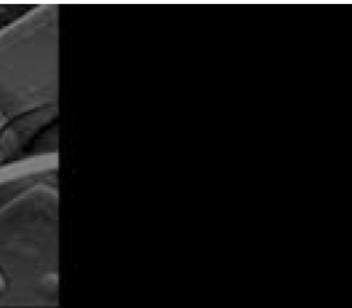
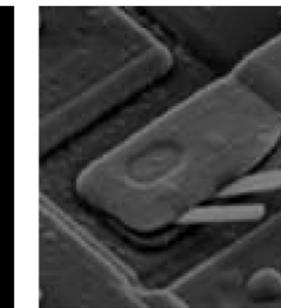
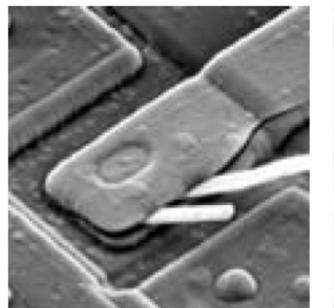
频域滤波器一般流程

5. 生成一个实的、对称的滤波函数 $H(u, v)$ ，其大小为 $P \times Q$ ，中心在 $(\frac{P}{2}, \frac{Q}{2})$ 处。用阵列相乘形成乘积 $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ 。
6. 得到处理后的图像： $g_p(x, y) = \{\text{real}[\mathcal{F}^{-1}[G(u, v)]]\}(-1)^{x+y}$
7. 通过 $g_p(x, y)$ 的左上象限提取 $M \times N$ 区域，得到最终处理结果 $g(x, y)$ 。





举例



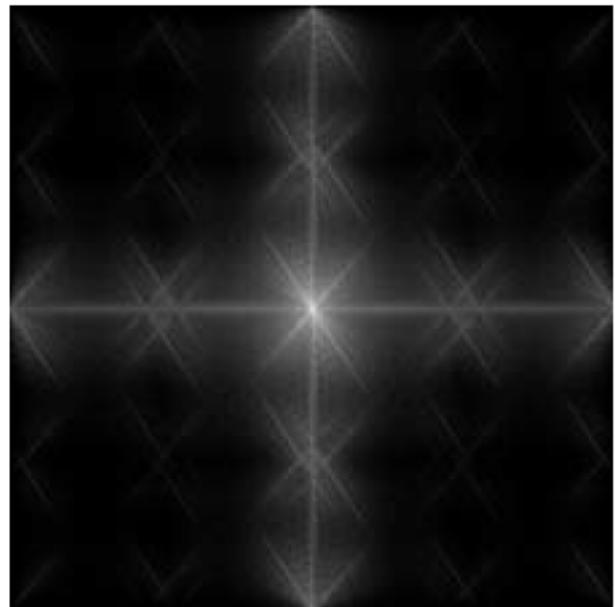
0填充

乘 $(-1)^{x+y}$

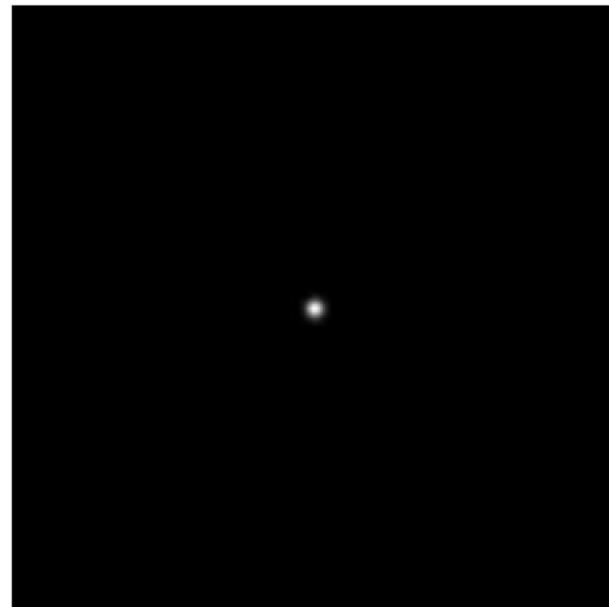




举例



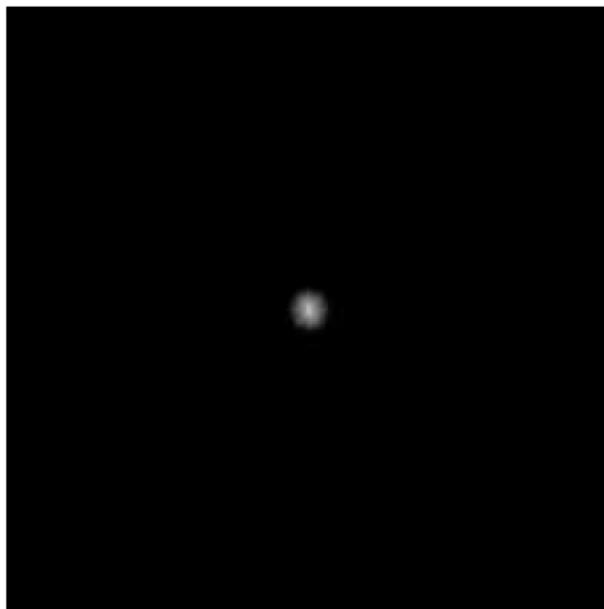
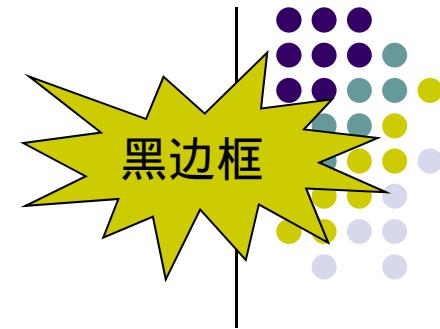
傅里叶谱



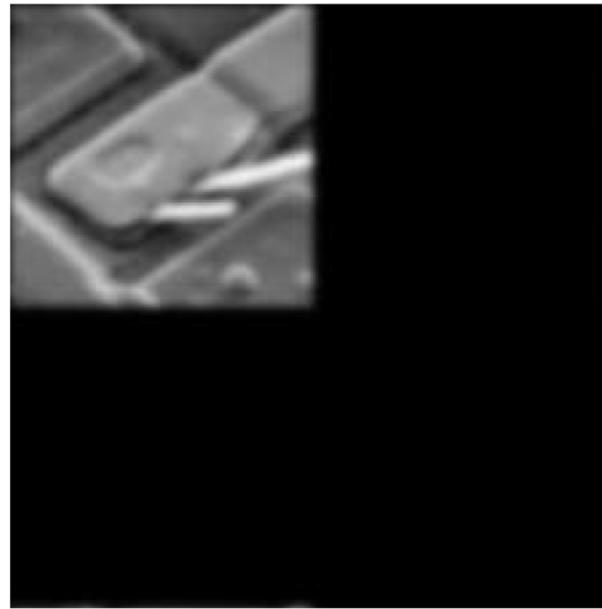
高斯低通滤波器



举例



滤波



IDFT , 乘 $(-1)^{x+y}$



裁剪





零相移滤波器

- 假设滤波器为实数

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left[H(u, v)R(u, v) + jH(u, v)I(u, v)\right]$$

其中

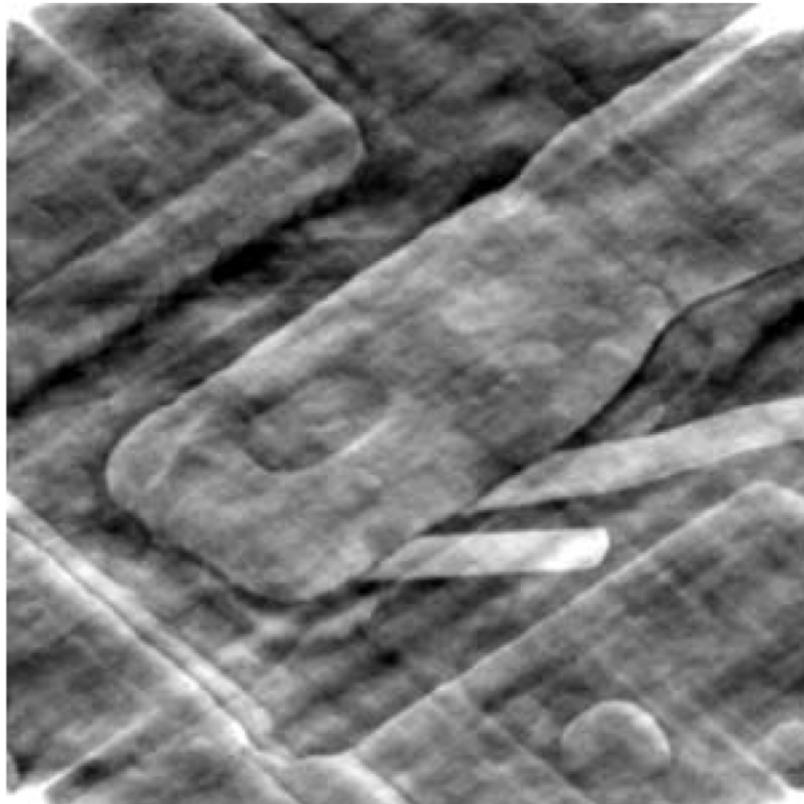
$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

- 相角保持不变！

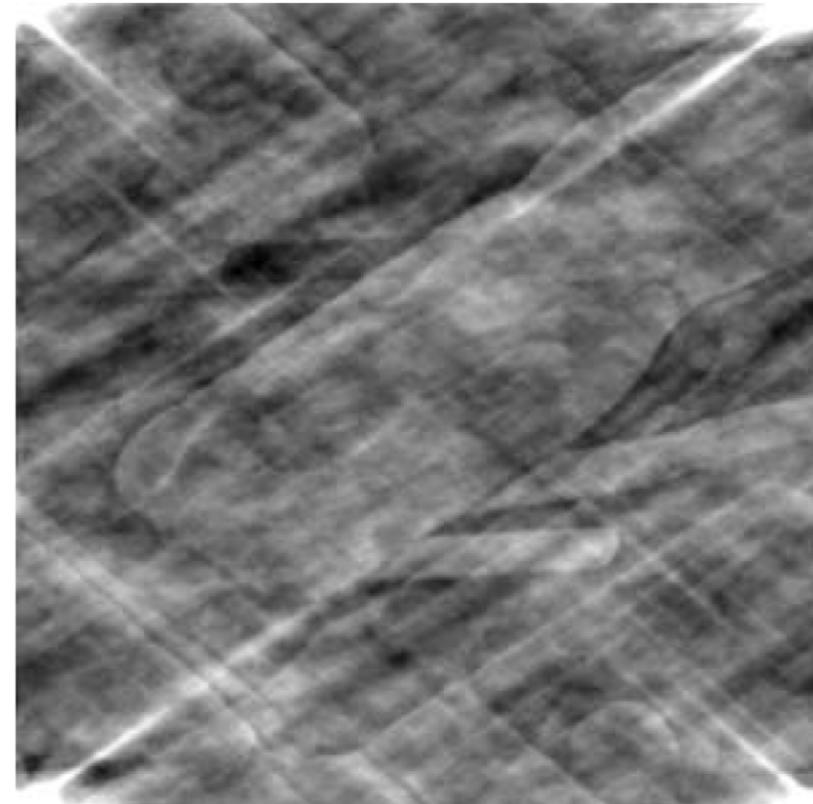




相角的敏感性



相角乘0.5



相角乘0.25





频率域滤波基础

- 频域率性质
- 频率域滤波步骤
- 空间和频域率对应关系





空间滤波 v.s. 频域滤波

- 令 $f(x, y) = \delta(x, y) \Rightarrow F(u, v) = 1$
- 频率域滤波

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)] \\ &= \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)] \end{aligned}$$

得到对应的空间滤波器

- 傅里叶变换对

$$h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v)$$





频率域滤波器→空间滤波器

- 构造各种频率域滤波器做实验
 - 频率域滤波器更加直观
- 选择合适的频率域滤波器
- 构造空间滤波器来近似频率域滤波器
 - 通常构造“**较小**” 的空间滤波器
 - 空间滤波器更易实现，更高效



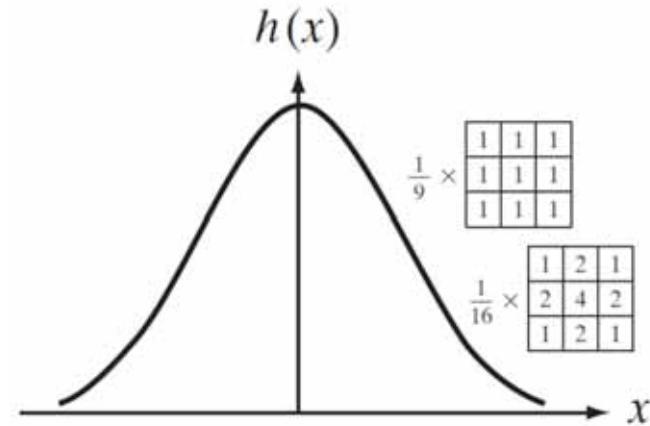
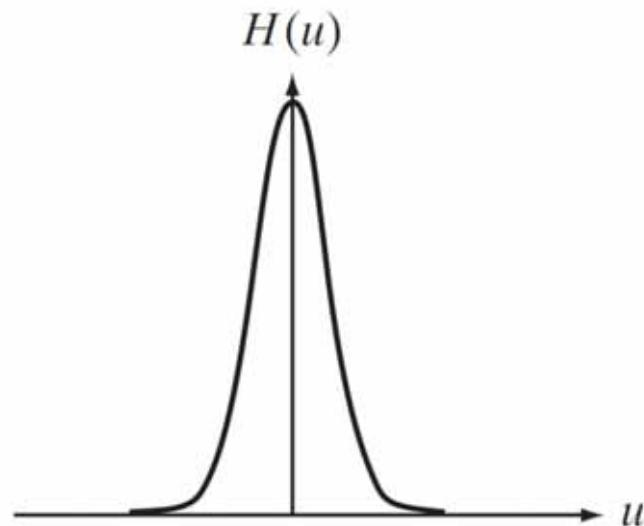
频率域滤波器→空间滤波器

- 一维频率域高斯滤波器

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2}$$

- 空间域对应的滤波器

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma A e^{-2\pi^2\sigma^2x^2}$$





平滑线性滤波器

- 均值滤波器/低通滤波器

- 优点：降低噪声
 - 比如去除伪轮廓
- 缺点：边缘模糊

$$R = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 z_i$$

$$\frac{1}{9} \times$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

- 先求和，再归一化





平滑线性滤波器

- 加权线性滤波器
 - 非均匀权重
 - 降低模糊

$$g(x, y) = \frac{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t) f(x + s, y + t)}{\sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b w(s, t)}$$

$$\frac{1}{16} \times$$

1	2	1
2	4	2
1	2	1





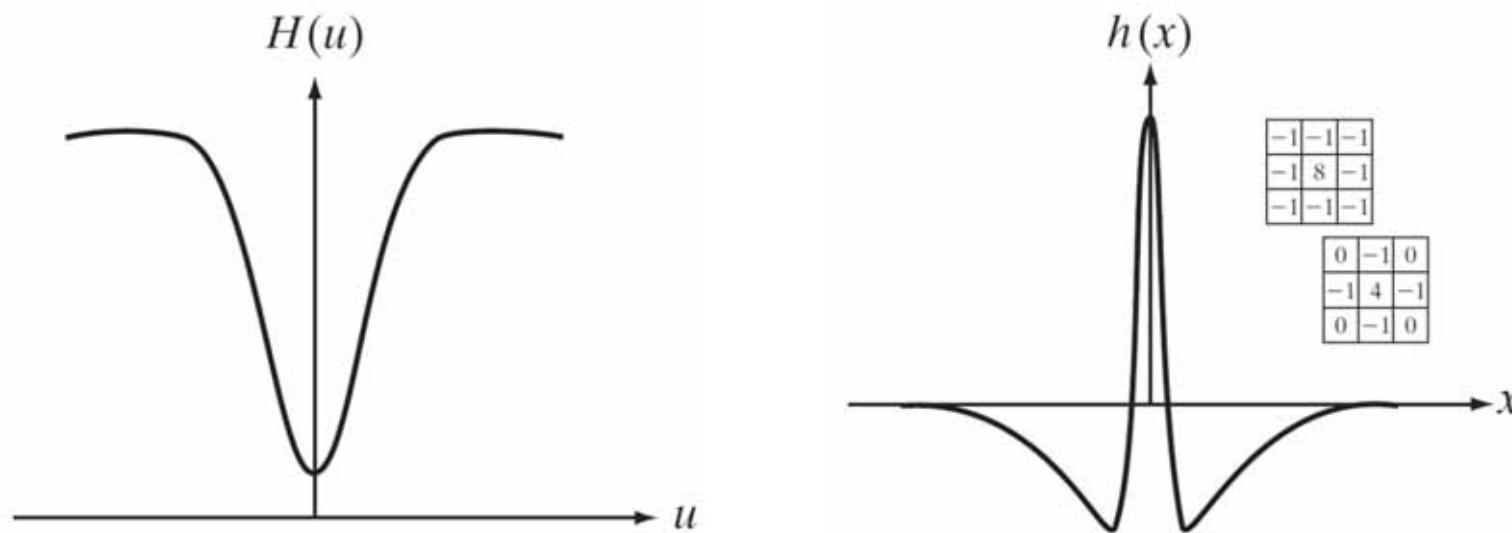
频率域滤波器→空间滤波器

- 利用高斯函数构造高通滤波器

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2}$$

- 空间域对应的滤波器

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma_1 A e^{-2\pi^2\sigma_1^2x^2} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 B e^{-2\pi^2\sigma_2^2x^2}$$





拉普拉斯算子

● 标准形式

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) = & f(x+1, y) + f(x-1, y) \\ & + f(x, y+1) + f(x, y-1) \\ & - 4f(x, y)\end{aligned}$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

90度增量
各向同性

● 对角线形式

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

45度增量
各向同性

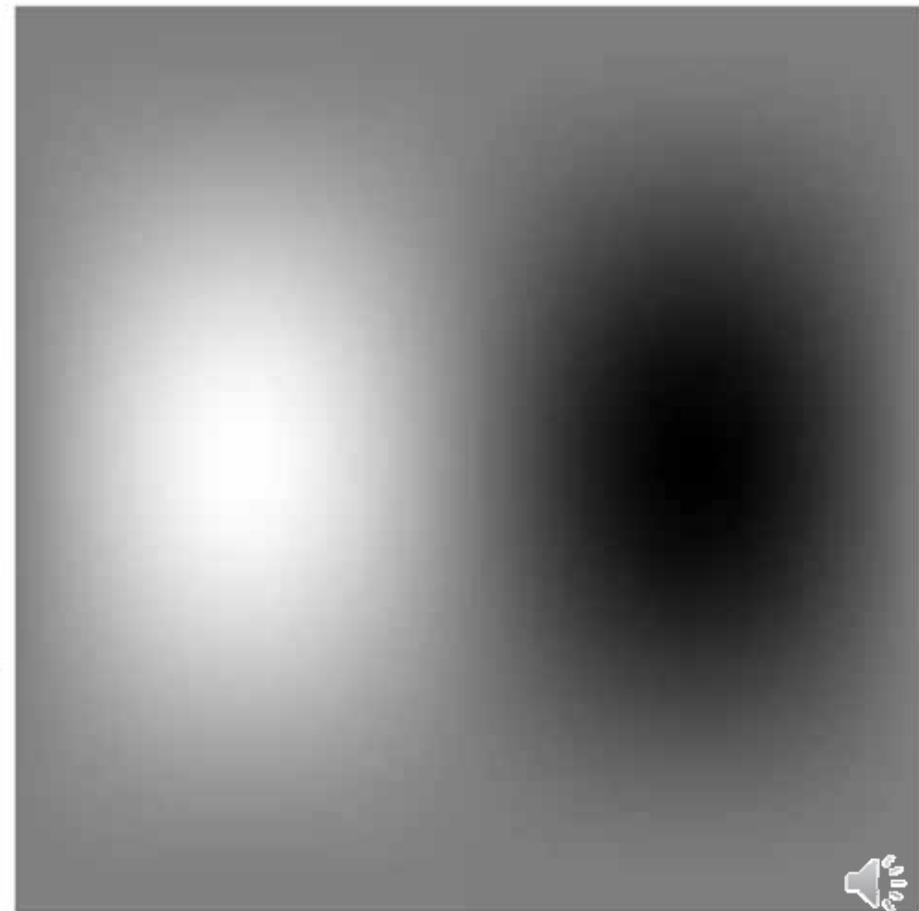
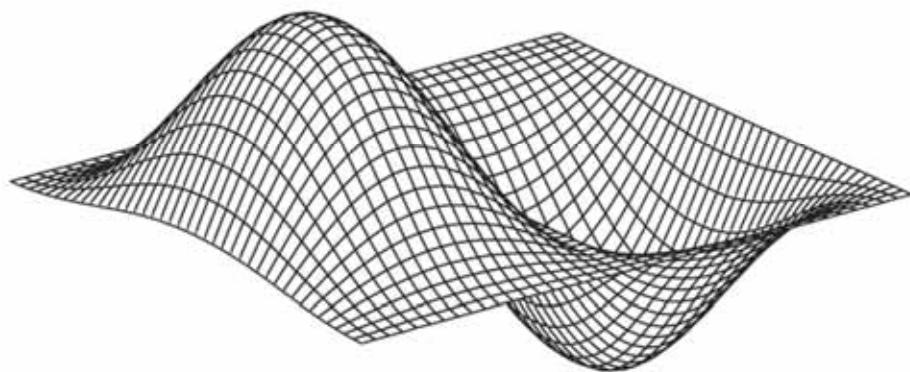


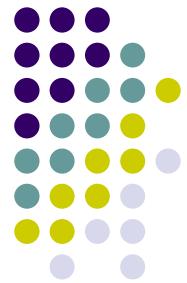


空间滤波器→频率域滤波器

- Sobel算子

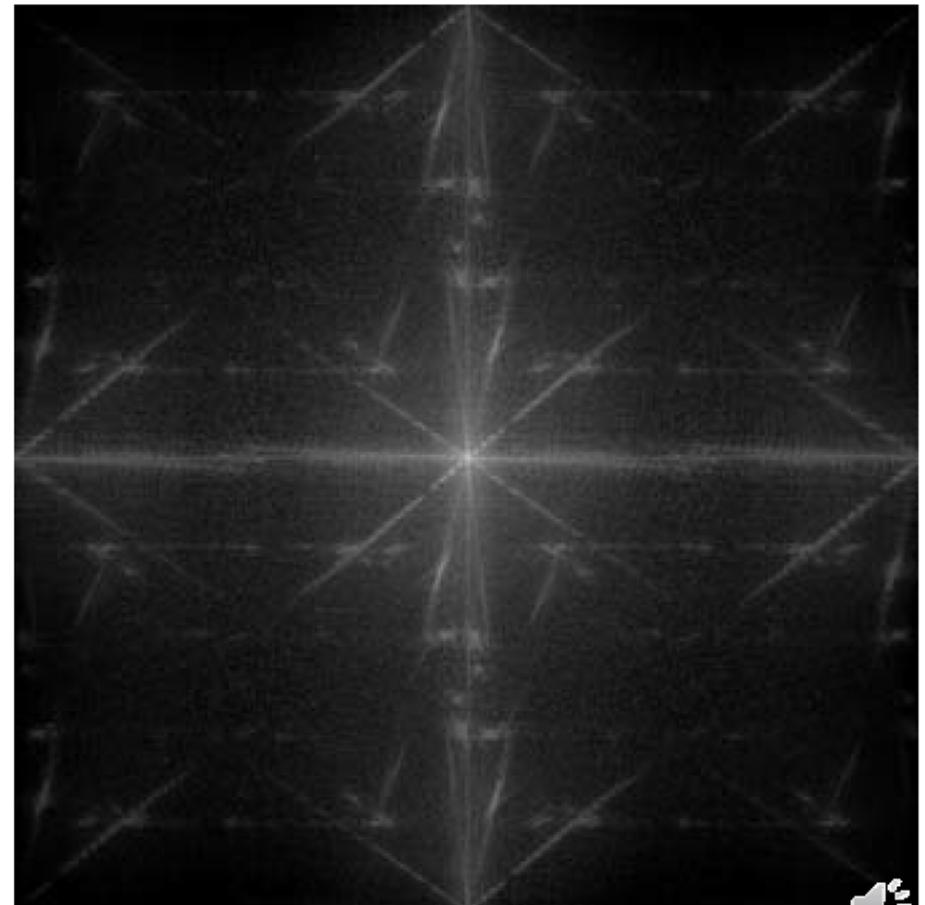
-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

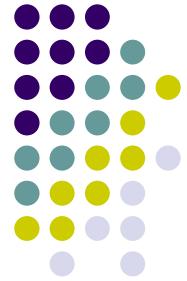




空间滤波器→频率域滤波器

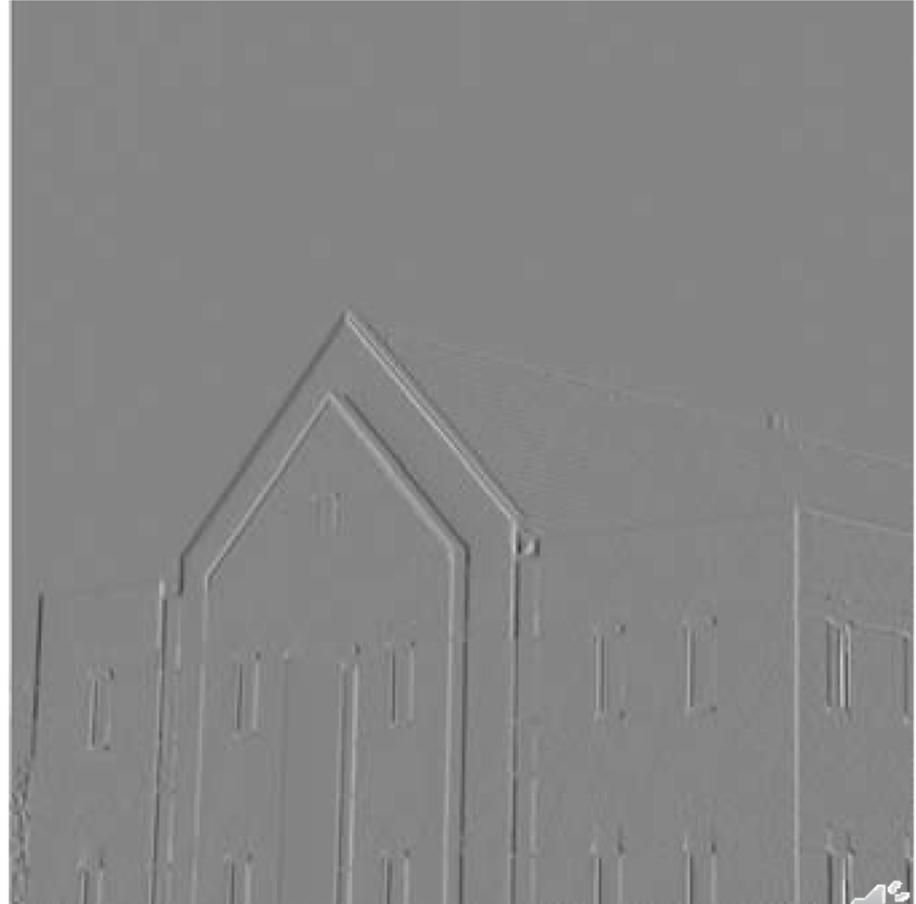
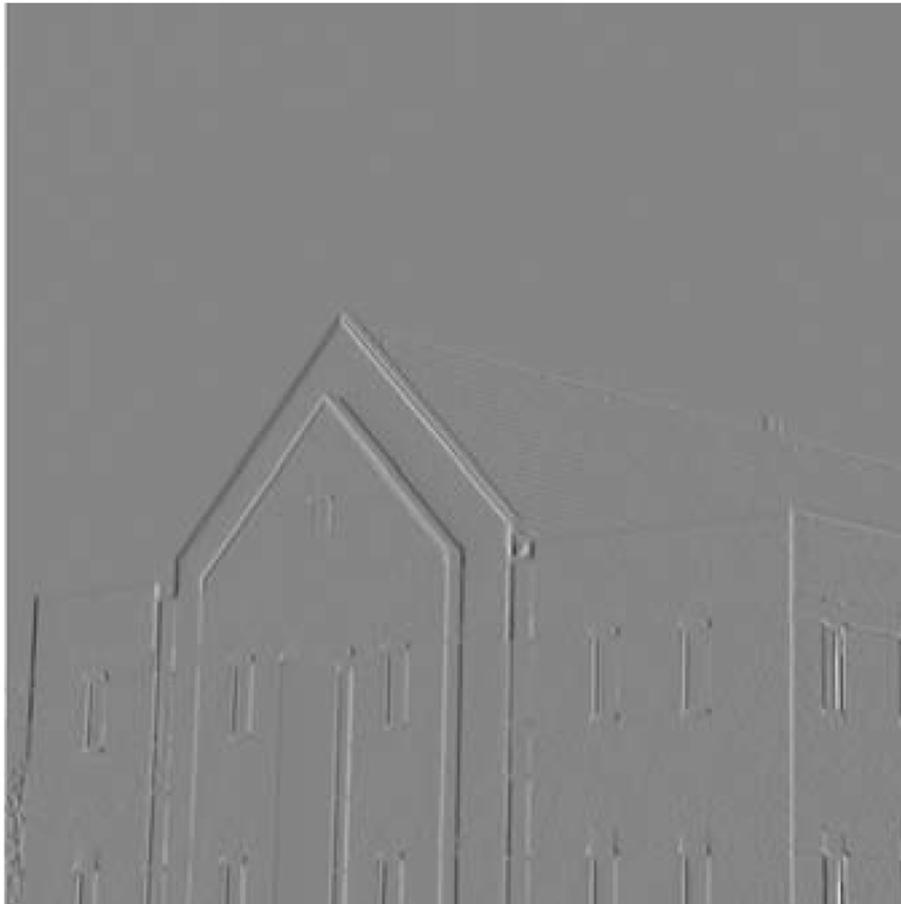
- 待处理图像





空间滤波器→频率域滤波器

- 滤波结果（空间和频率一致）





平滑图像

- 理想低通滤波器
- 巴特沃斯低通滤波器
- 高斯低通滤波器





理想低通滤波器

- 数学定义

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- D_0 为某常数
- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$

- 理想

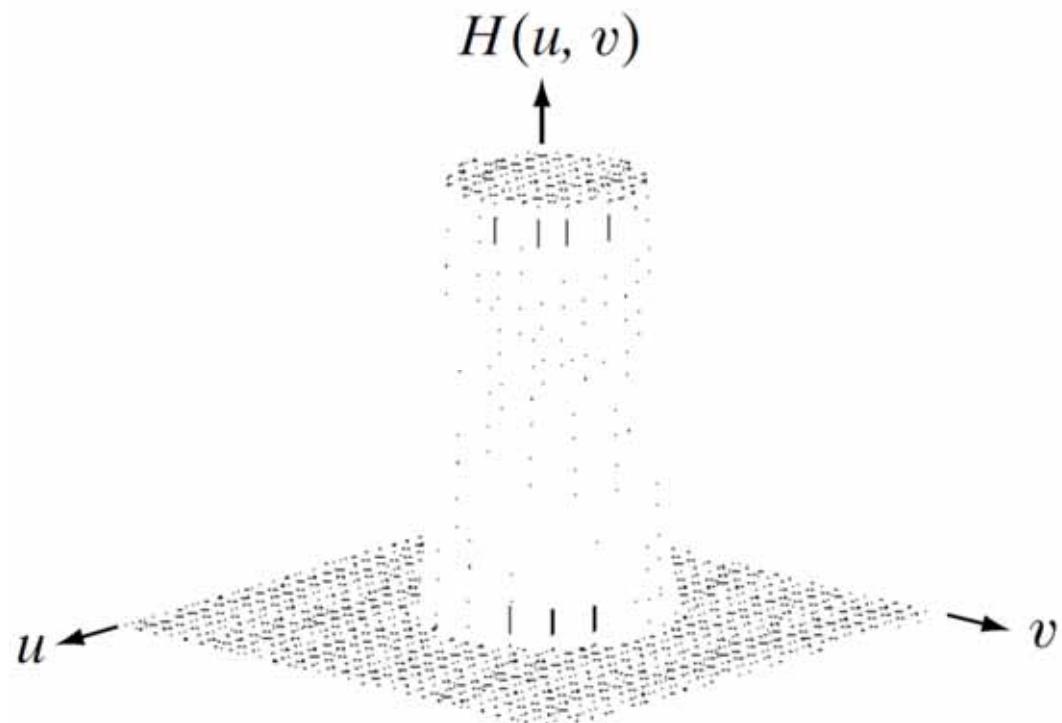
- 低频完全保留
- 高频完全抑制





理想低通滤波器

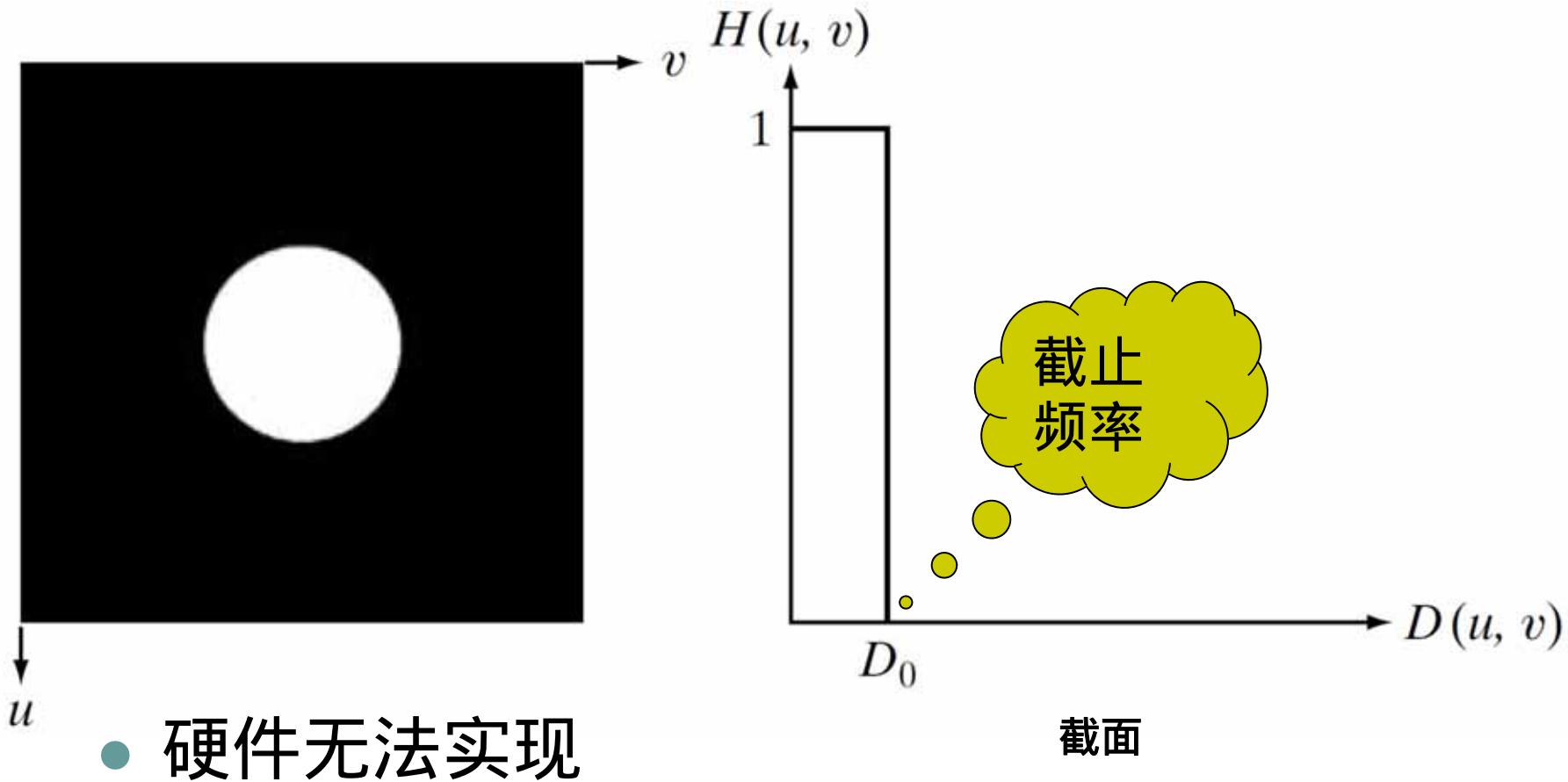
- 透视图





理想低通滤波器

- 图形显示





傅里叶变换的功率分布

- 总功率

$$P_T = \sum_{u=0}^{P-1} \sum_{v=0}^{Q-1} P(u, v)$$

- 其中

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

- 半径为 D_0 的圆包含的功率百分比

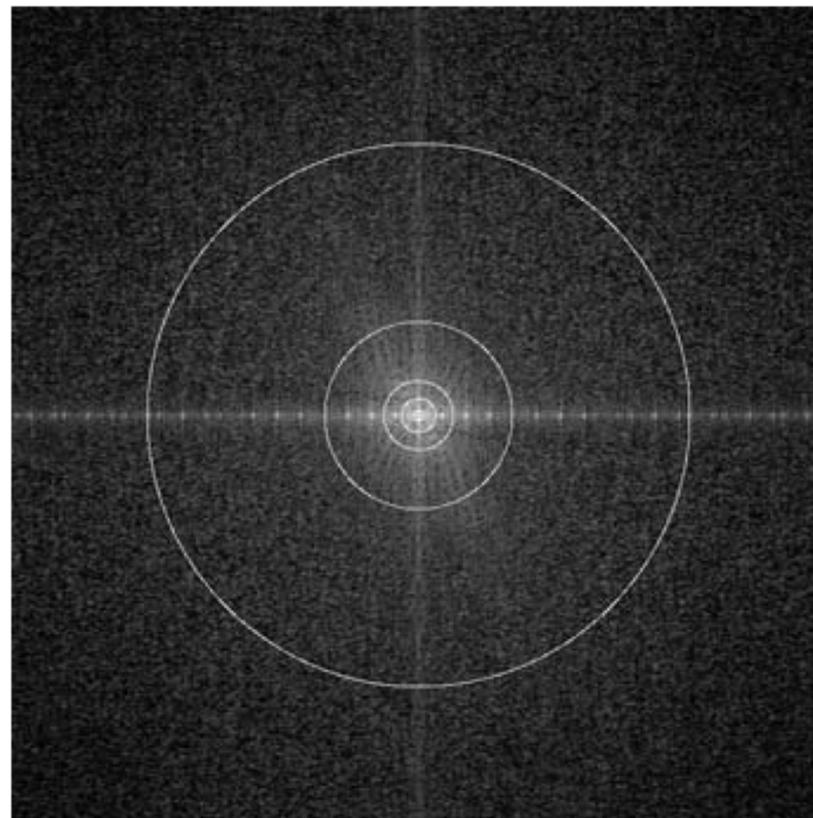
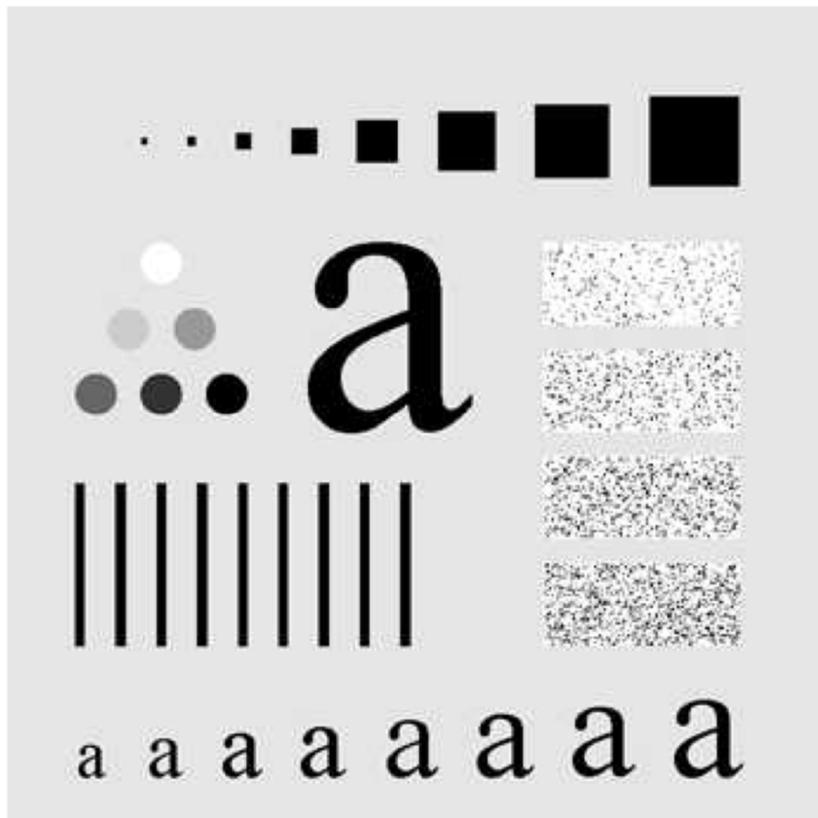
$$\alpha = 100 \left[\sum_u \sum_v P(u, v) / P_T \right]$$

- (u, v) 属于圆内





举例

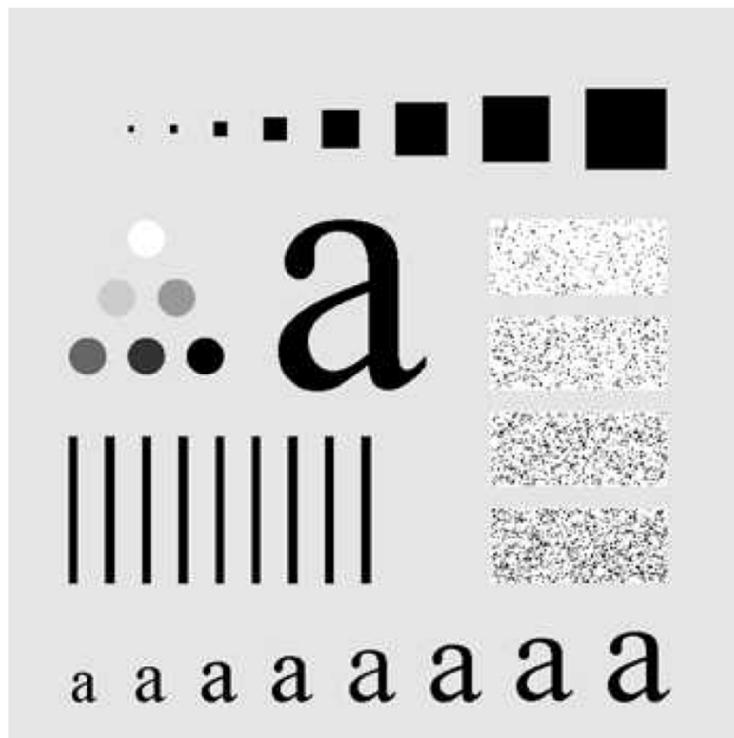


10、30、60、160、460像素宽
87.0%、93.1%、95.7%、97.8%、
99.2%的能量



举例

- 利用半径构造低通滤波器



截止频率为10





举例

- 观测到振铃（ ringing ）现象



截止频率为30



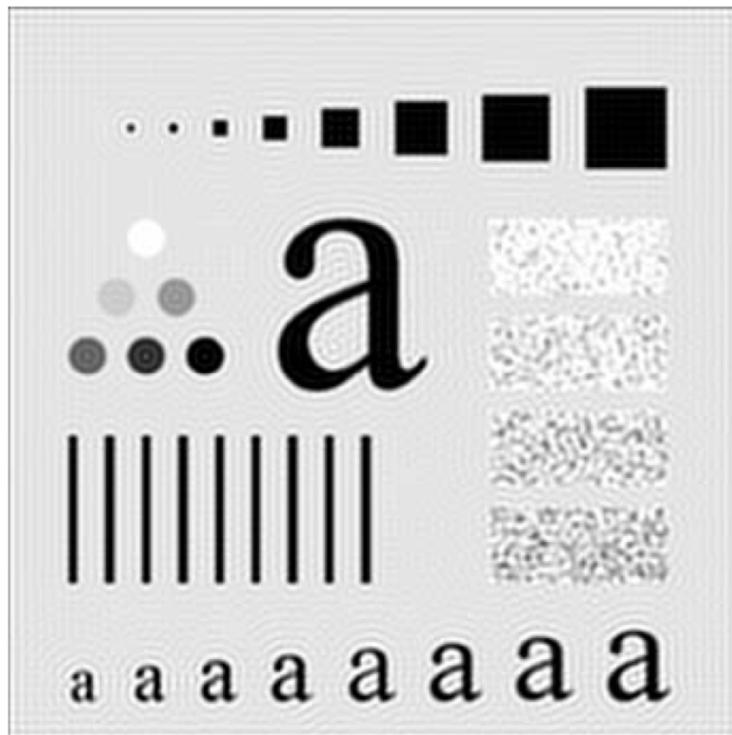
截止频率为60



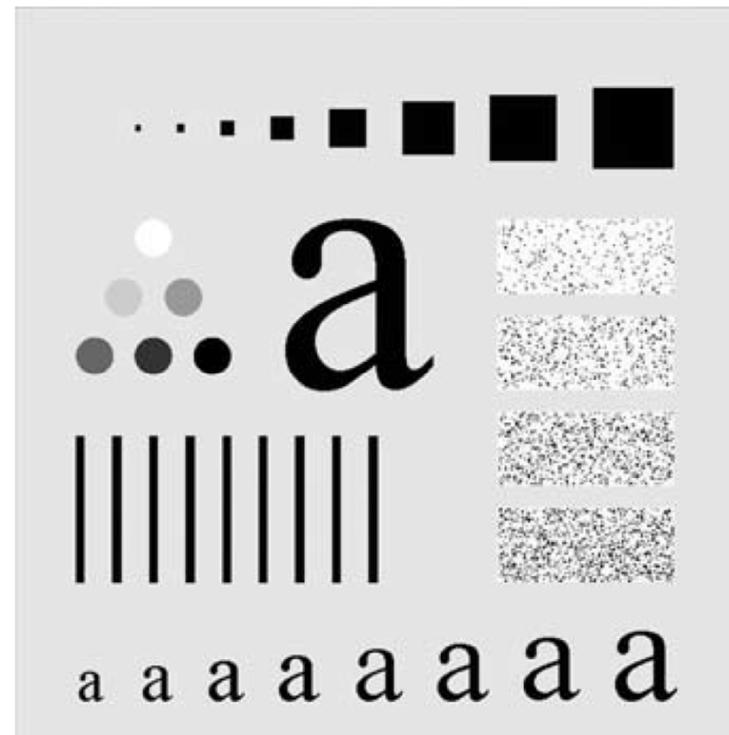


举例

- 观测到振铃，越来越清晰



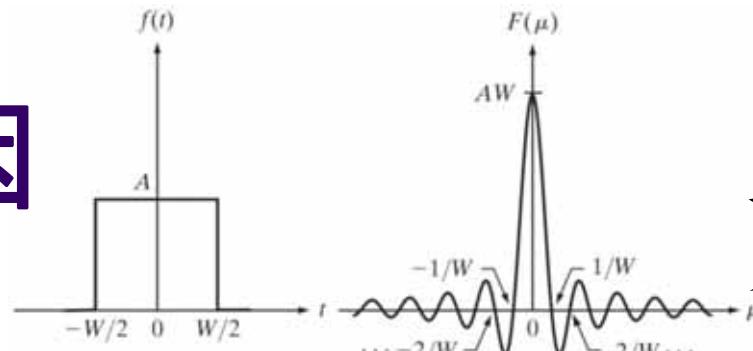
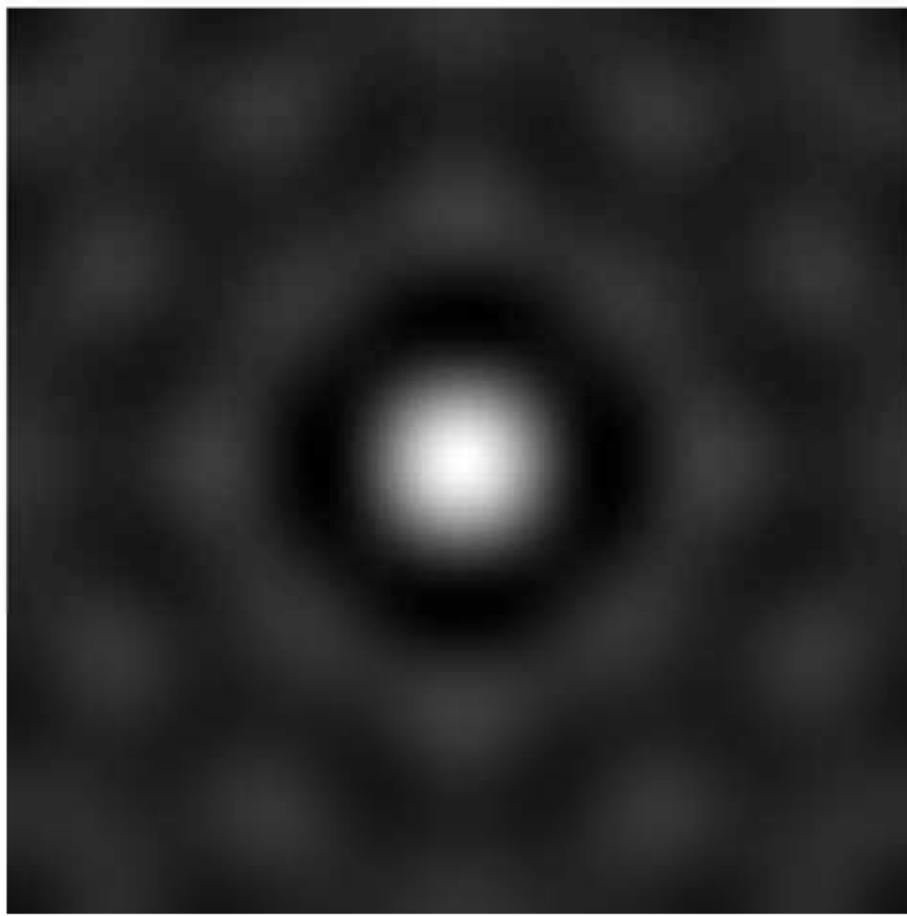
截止频率为160



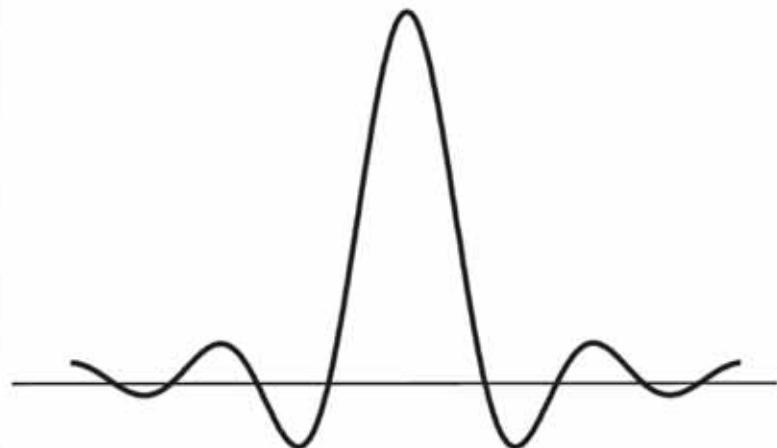
截止频率为460



振铃的原因



半径越大，
sinc约窄！



通过中心的剖面图

半径为5的低通滤波器对应的空间表示





平滑图像

- 理想低通滤波器
- 巴特沃斯低通滤波器
- 高斯低通滤波器





巴特沃斯低通滤波器

- n 阶巴特沃斯 (Butterworth) 低通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$

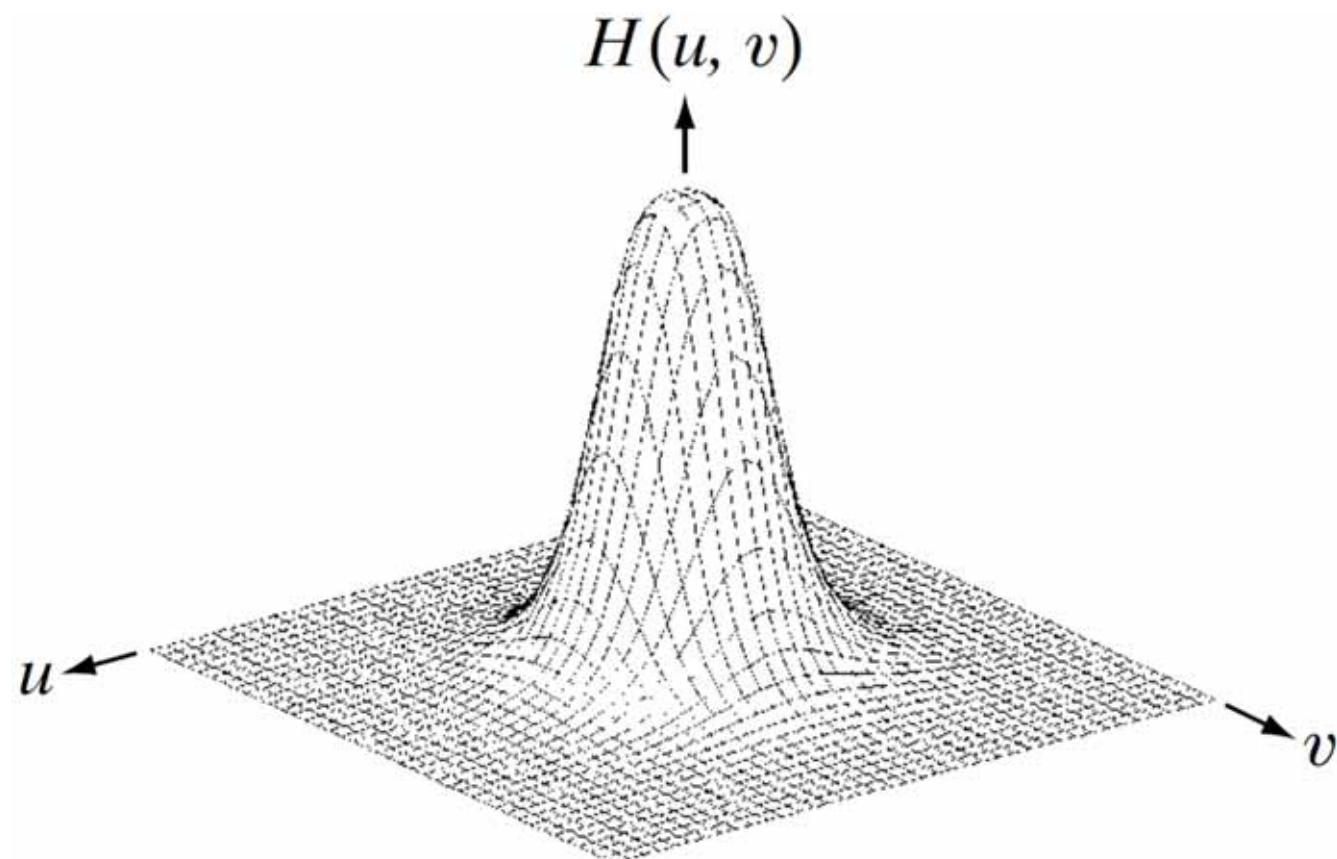
- D_0 为 截止频率





巴特沃斯低通滤波器

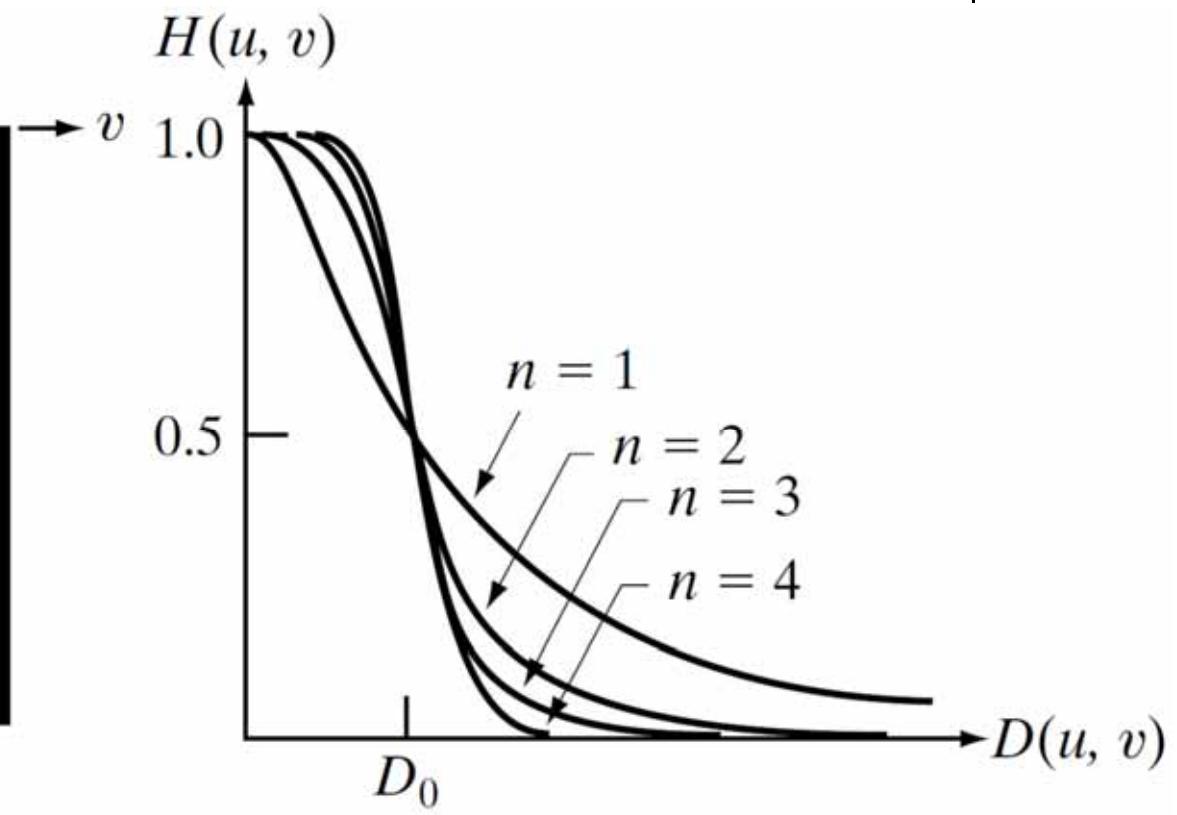
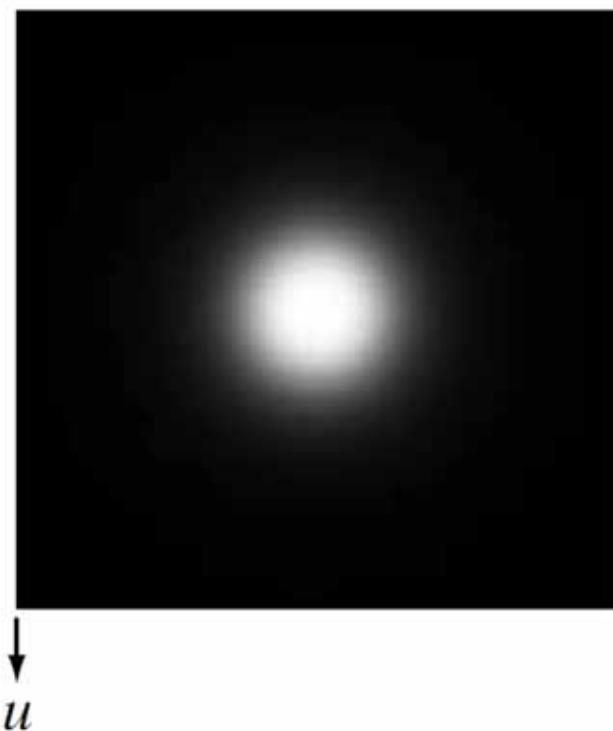
- 透视图





巴特沃斯低通滤波器

- 图形显示

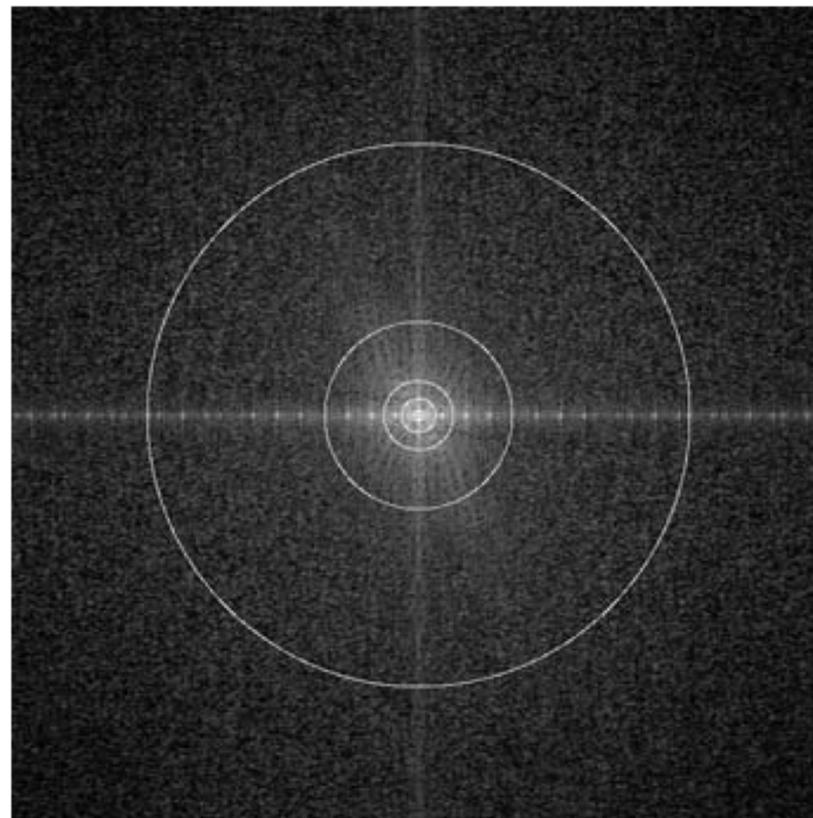
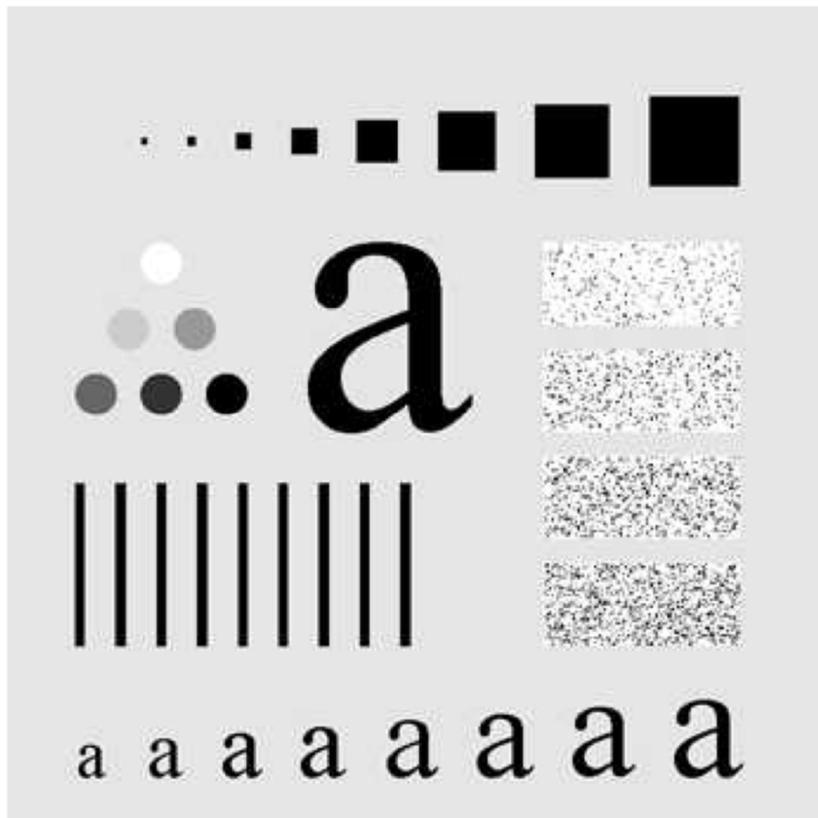


- 截止频率： $H(u, v)$ 下降到某个百分比





举例



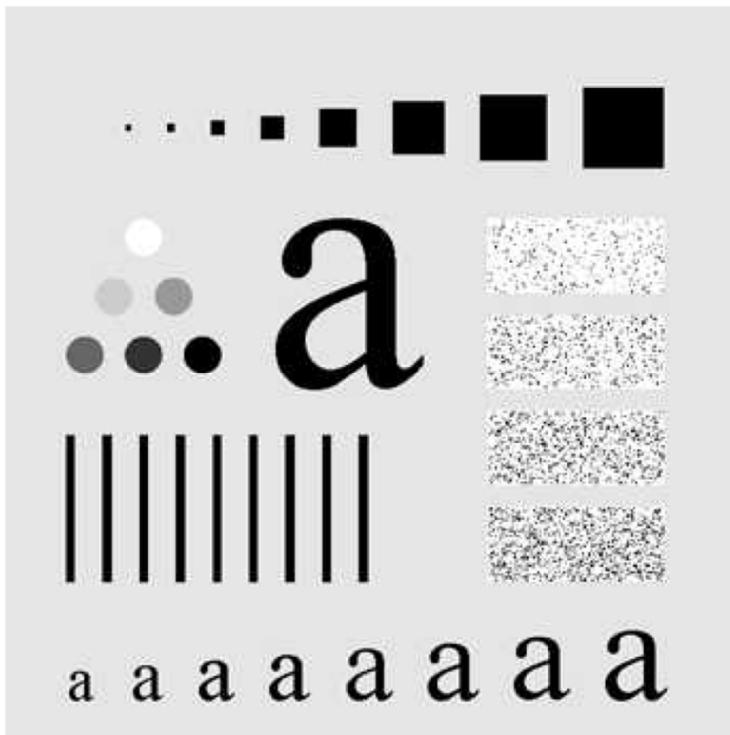
10、30、60、160、460像素宽
87.0%、93.1%、95.7%、97.8%、
99.2%的能量





举例

- 利用半径构造巴特沃斯滤波器 ($n = 2$)



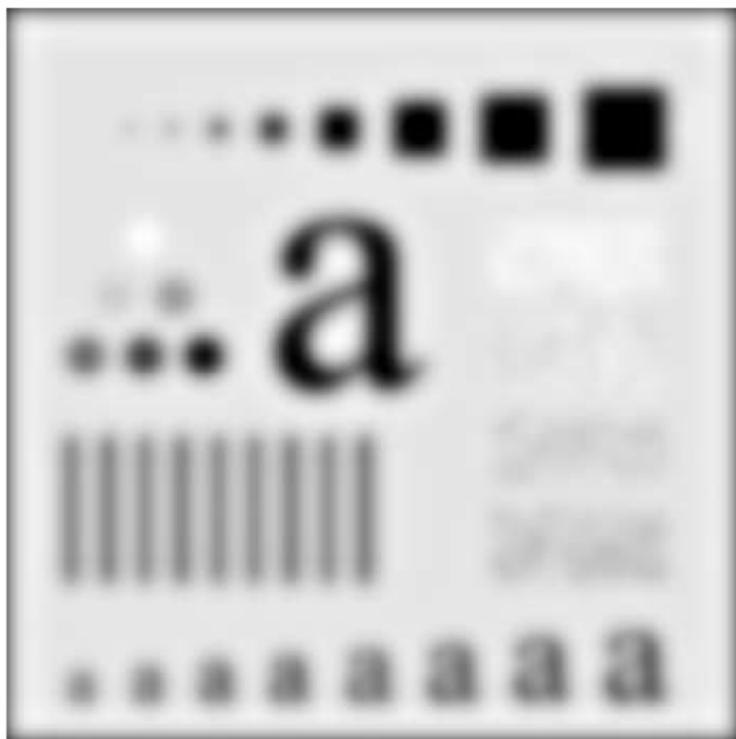
截止频率为10





举例

- 没有振铃（ ringing ）现象



截止频率为30



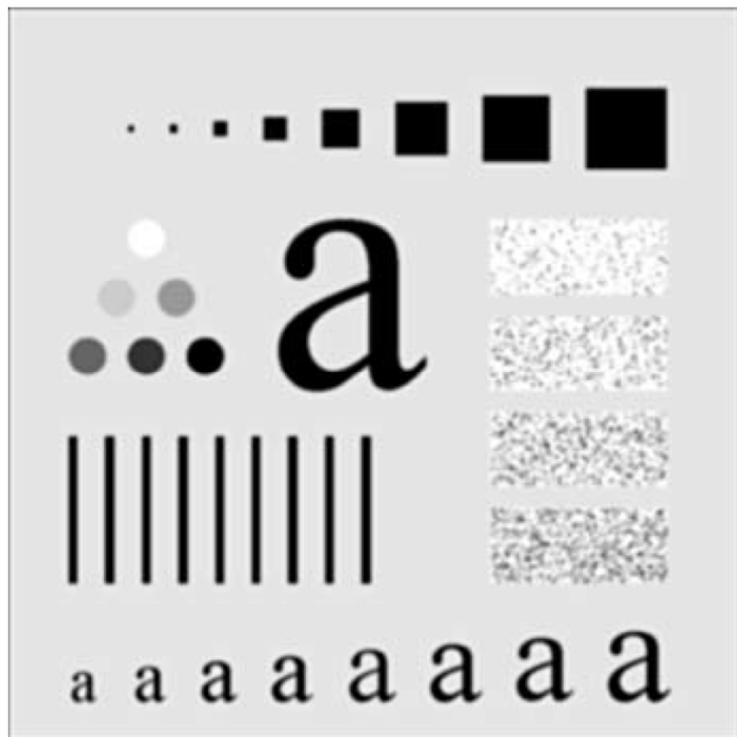
截止频率为60



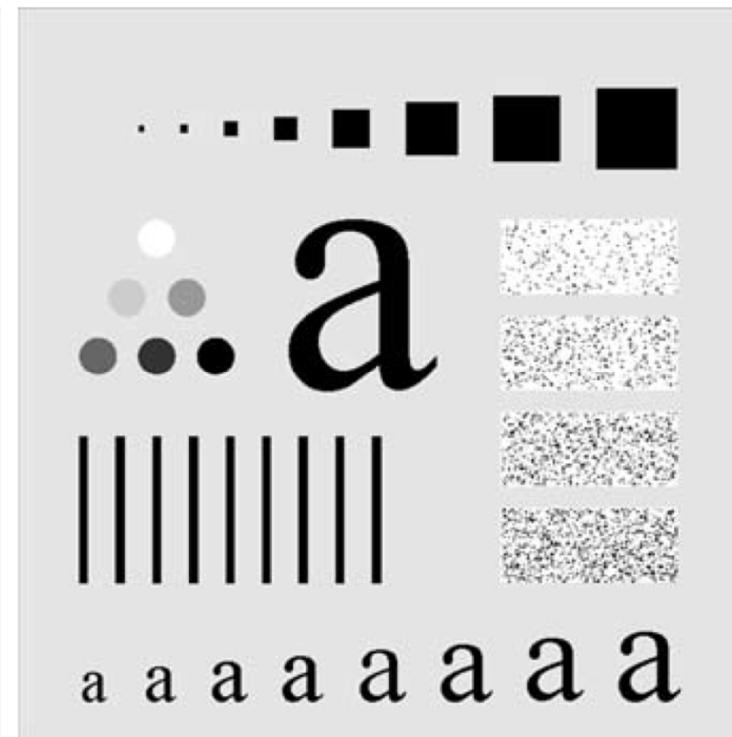


举例

- 没有振铃，越来越清晰



截止频率为160



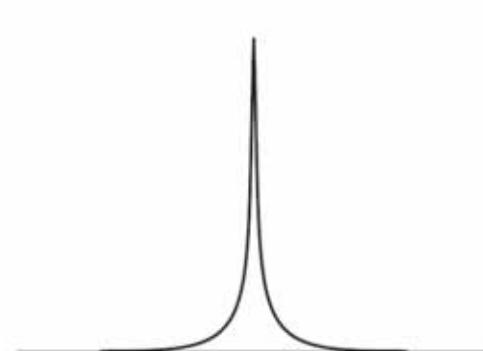
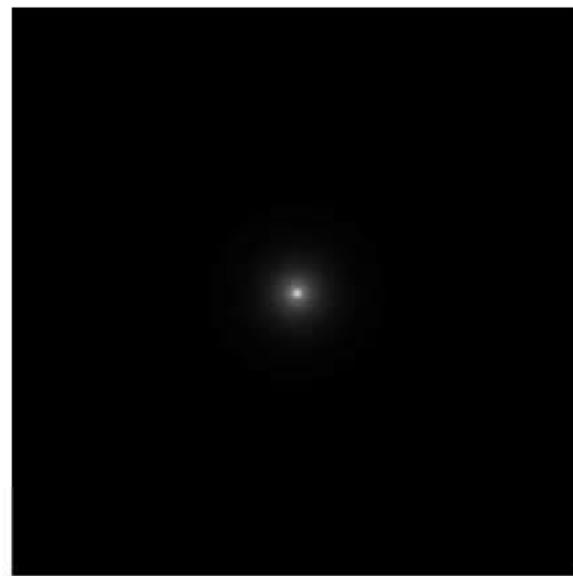
截止频率为460



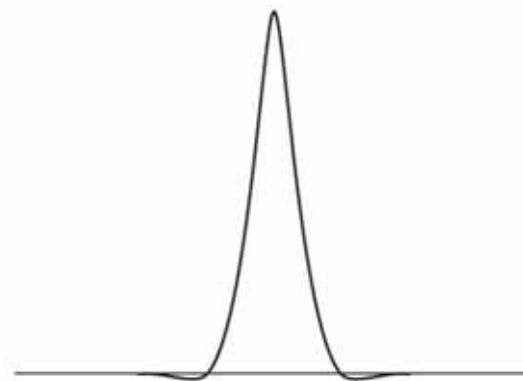
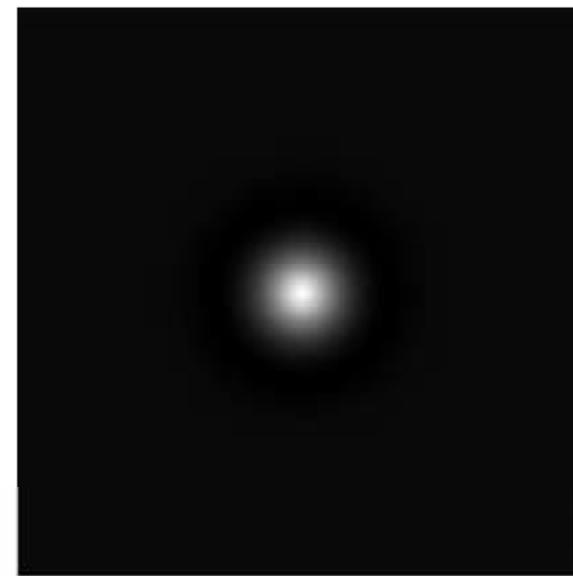
巴特沃斯滤波器的空间表示

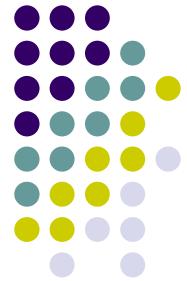
- 截止频率为5

$n = 1$



$n = 2$

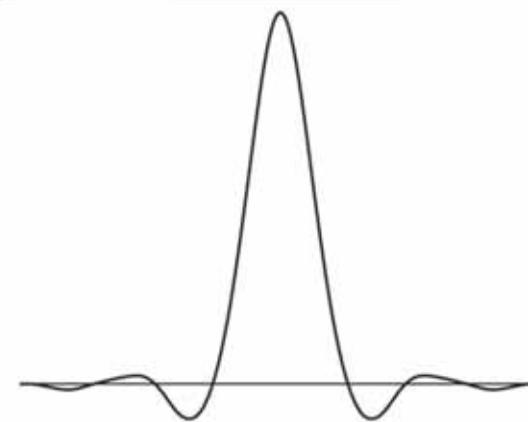
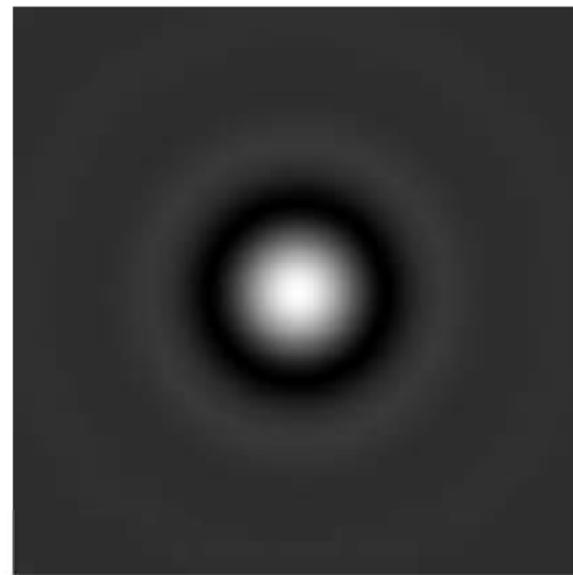




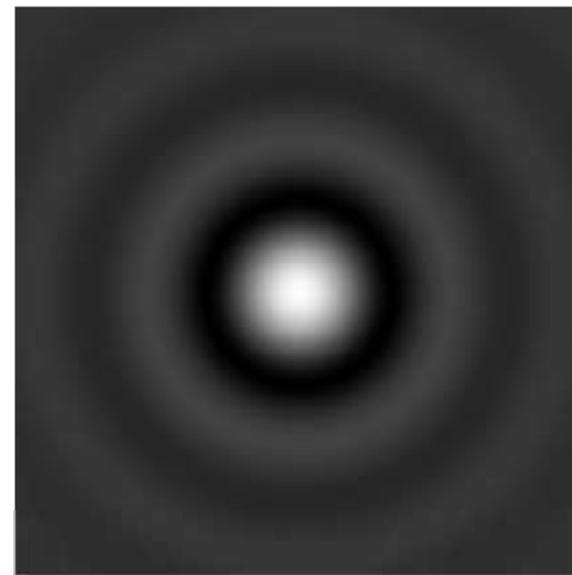
巴特沃斯滤波器的空间表示

- 截止频率为5

$n = 5$



$n = 20$





平滑图像

- 理想低通滤波器
- 巴特沃斯低通滤波器
- 高斯低通滤波器





高斯低通濾波器

- 数学定义

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right]^{1/2}$$

- 令 $\sigma = D_0$

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

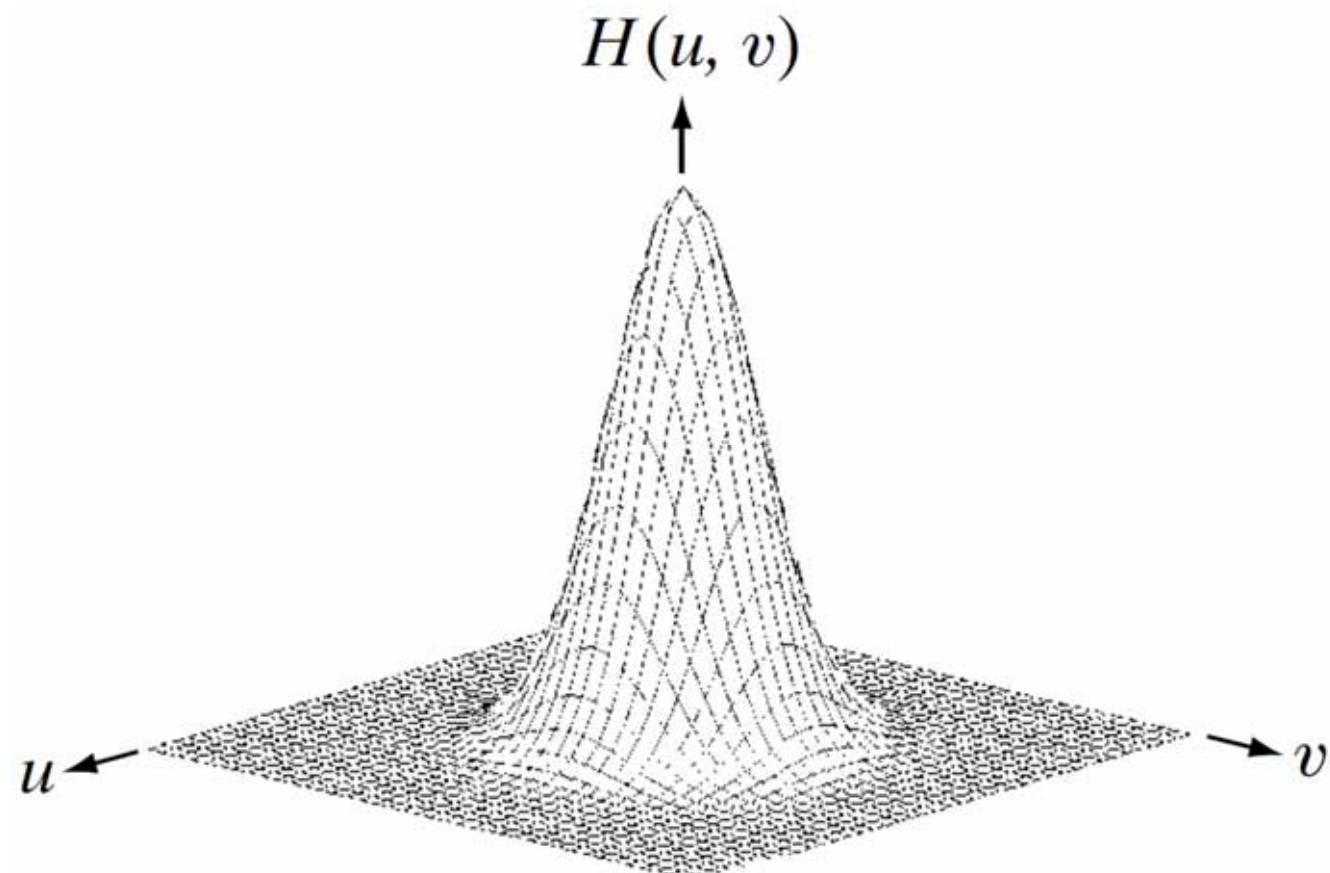
- D_0 为截止频率
- 当 $D(u, v) = D_0$, $H(u, v) = 0.607$





高斯低通濾波器

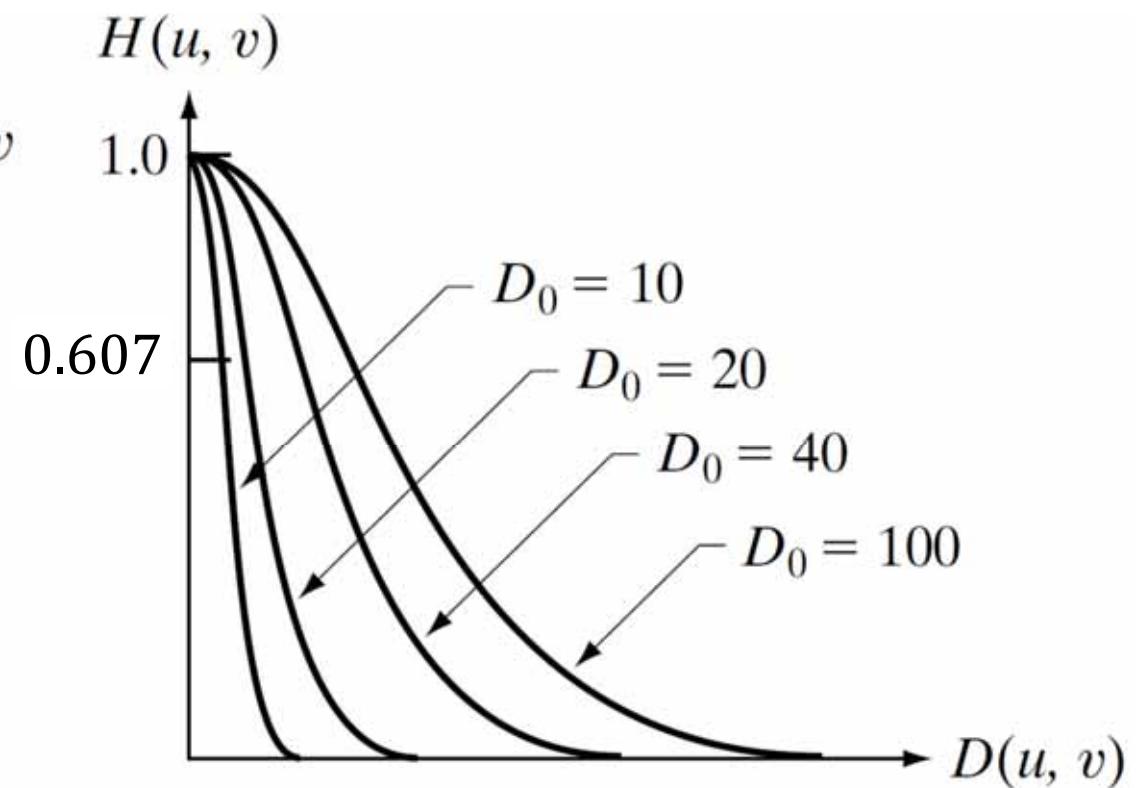
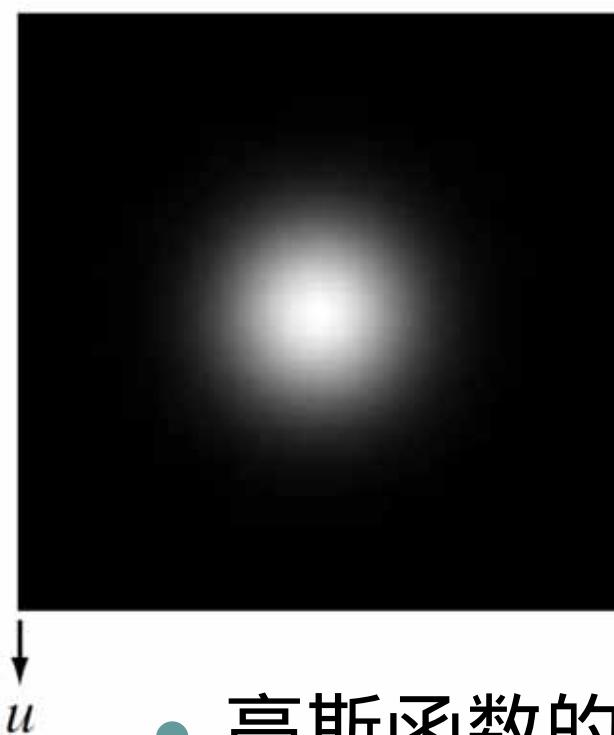
- 透視圖





高斯低通濾波器

- 图形显示



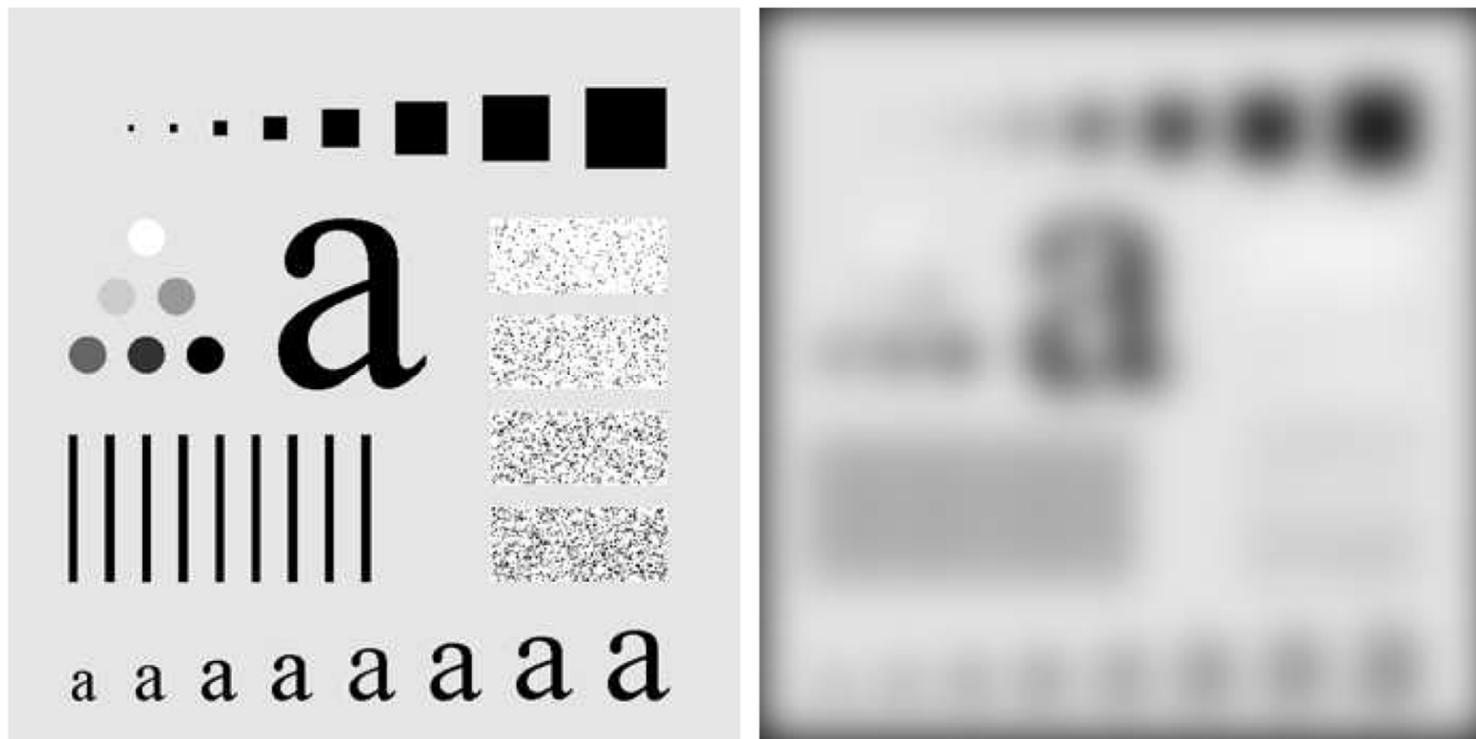
- 高斯函数的傅里叶变换依然是高斯





举例

- 利用半径构造高斯低通波器



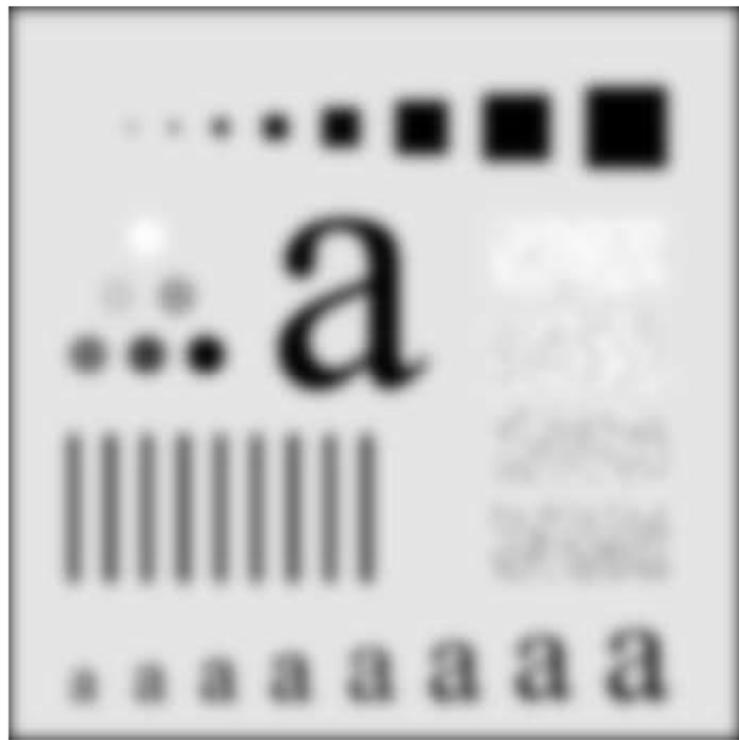
截止频率为10





举例

- 没有振铃（ ringing ）现象



截止频率为30



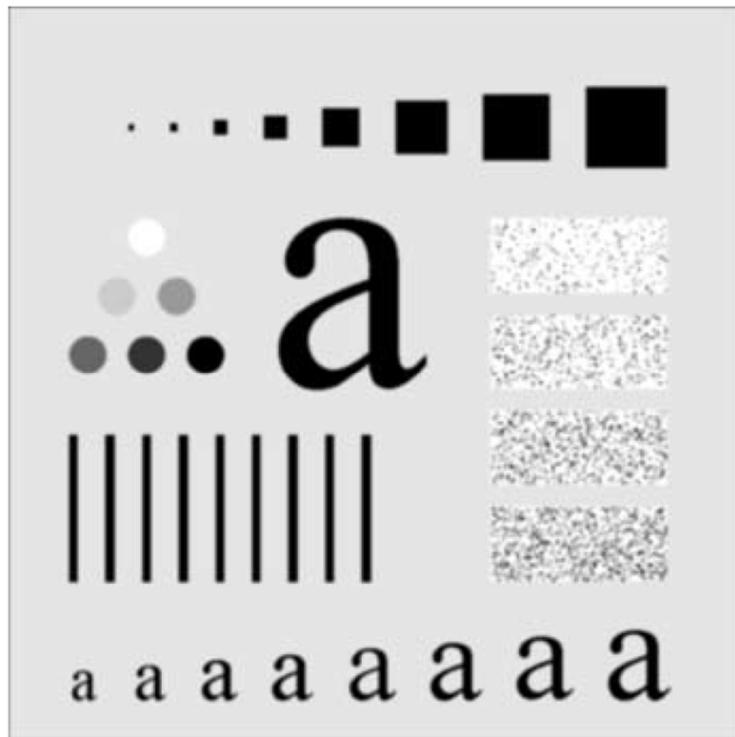
截止频率为60



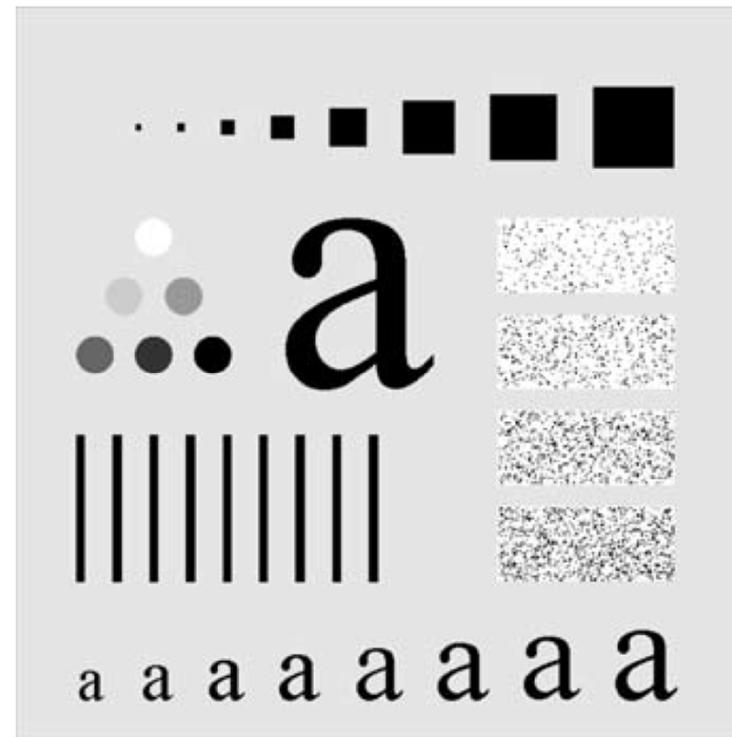


举例

- 没有振铃，越来越清晰



截止频率为160



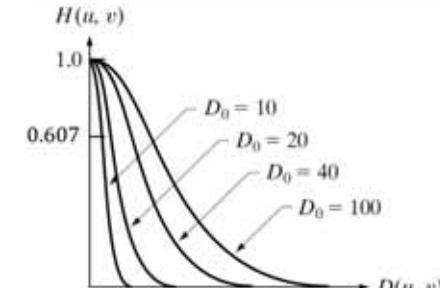
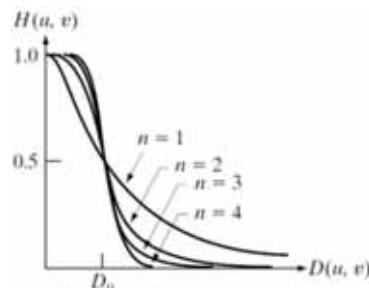
截止频率为460



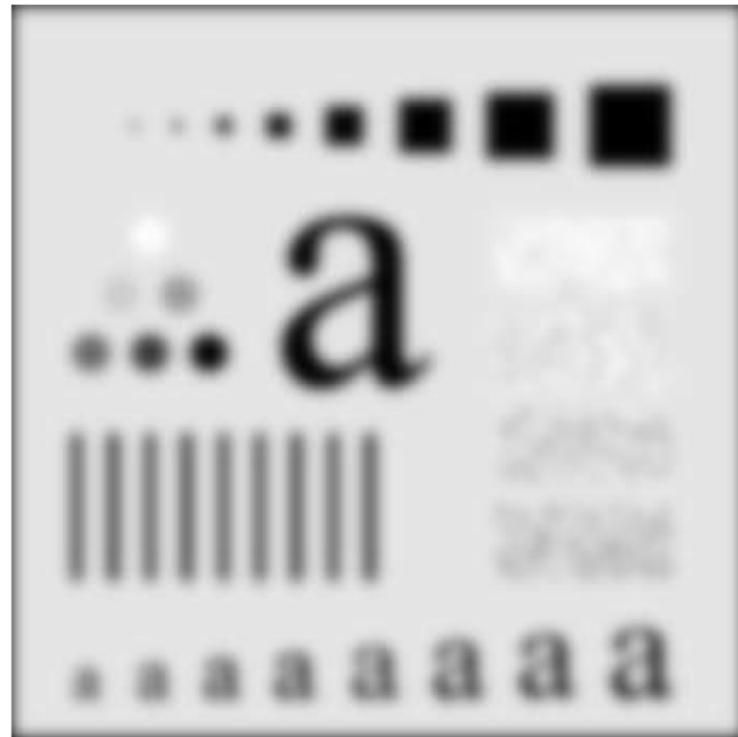


对比

- 巴特沃斯低通滤波器更模糊

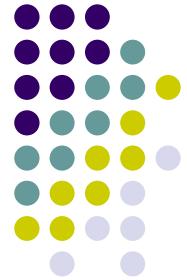


巴特沃斯低通滤波器 ($n = 2$)



高斯低通滤波器





低通滤波器对比

- 理想低通滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- 巴特沃斯低通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- 高斯低通滤波器

$$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$





举例——字符识别

- 字符不清晰、断裂，低通滤波器修复

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



高斯低通滤波器($D_0 = 80$)





举例——印刷

• 图片美容



高斯低通濾波器($D_0 = 100$)

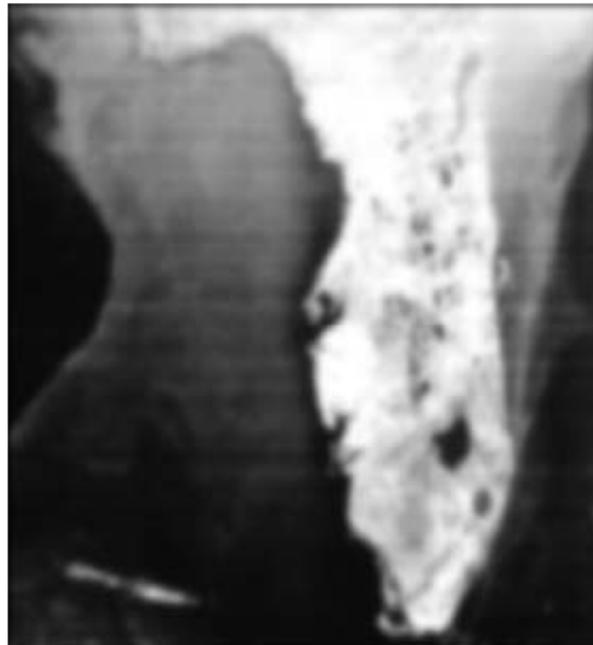
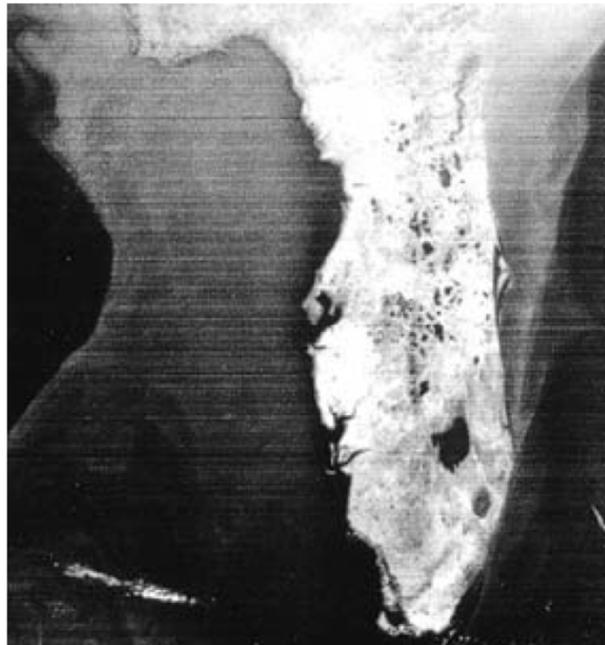


高斯低通濾波器($D_0 = 80$)

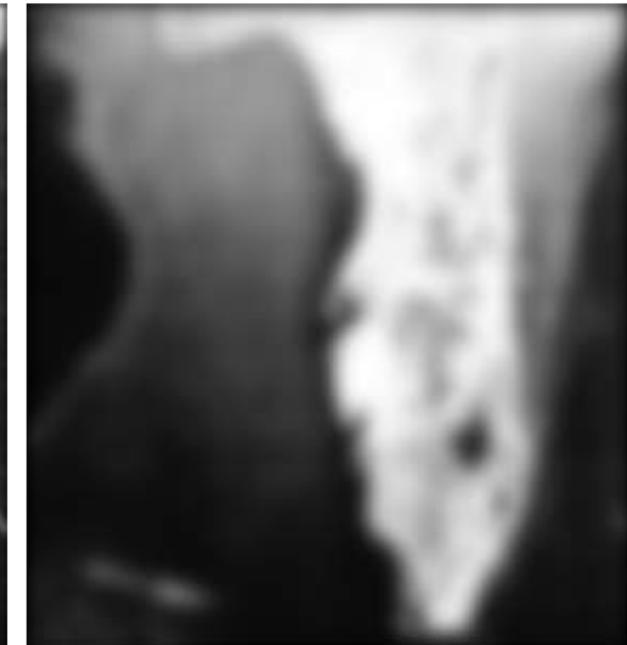


举例——卫星图片

- 去掉横线、去掉细节



高斯低通濾波器($D_0 = 50$)



高斯低通濾波器($D_0 = 20$)





锐化图像

- 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
- 频率域拉普拉斯算子
- 频率域非锐化掩蔽
- 同态滤波





锐化图像

- 傅里叶变换的低频部分
 - 灰度缓慢变化的地方
 - 墙、地板、天空
- 傅里叶变换的高频成分
 - 灰度剧烈变化的地方
 - 边缘、噪声
- 高通滤波器
 - 通过高频
 - 衰减低频





锐化图像

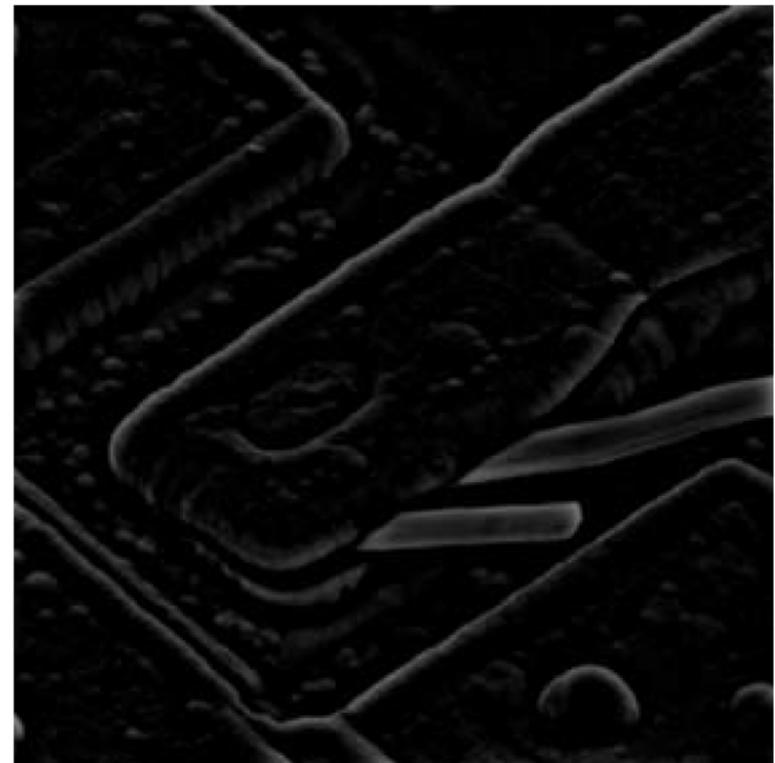
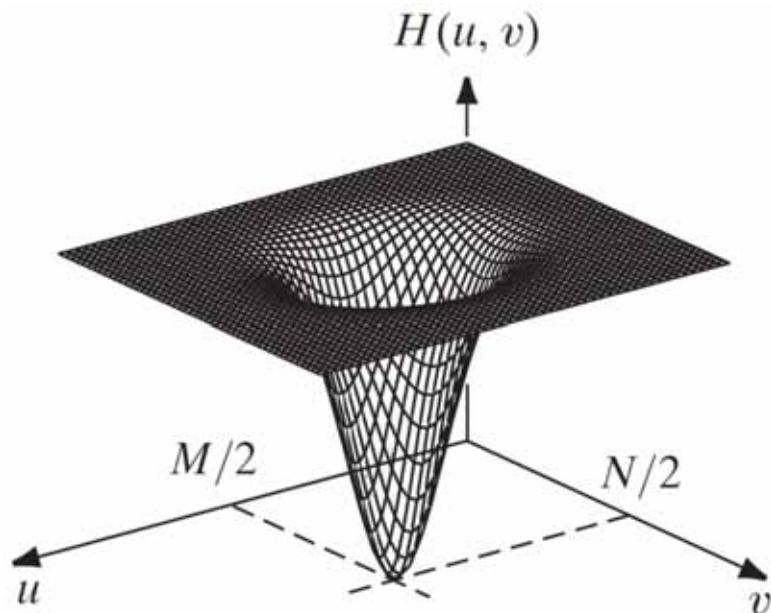
- 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
- 频率域拉普拉斯算子
- 频率域非锐化掩蔽
- 同态滤波





高通滤波器

- 衰减低频而通过高频，强化细节



- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度





高通濾波器

- 从低通濾波器构造高通濾波器

$$H_{\text{HP}}(u, v) = 1 - H_{\text{LP}}(u, v)$$

- $H_{\text{LP}}(u, v)$ 是低通濾波器
- 理想高通濾波器
- 巴特沃斯高通濾波器
- 高斯高通濾波器





理想高通滤波器

- 数学定义

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- D_0 为某常数
- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$

- 理想

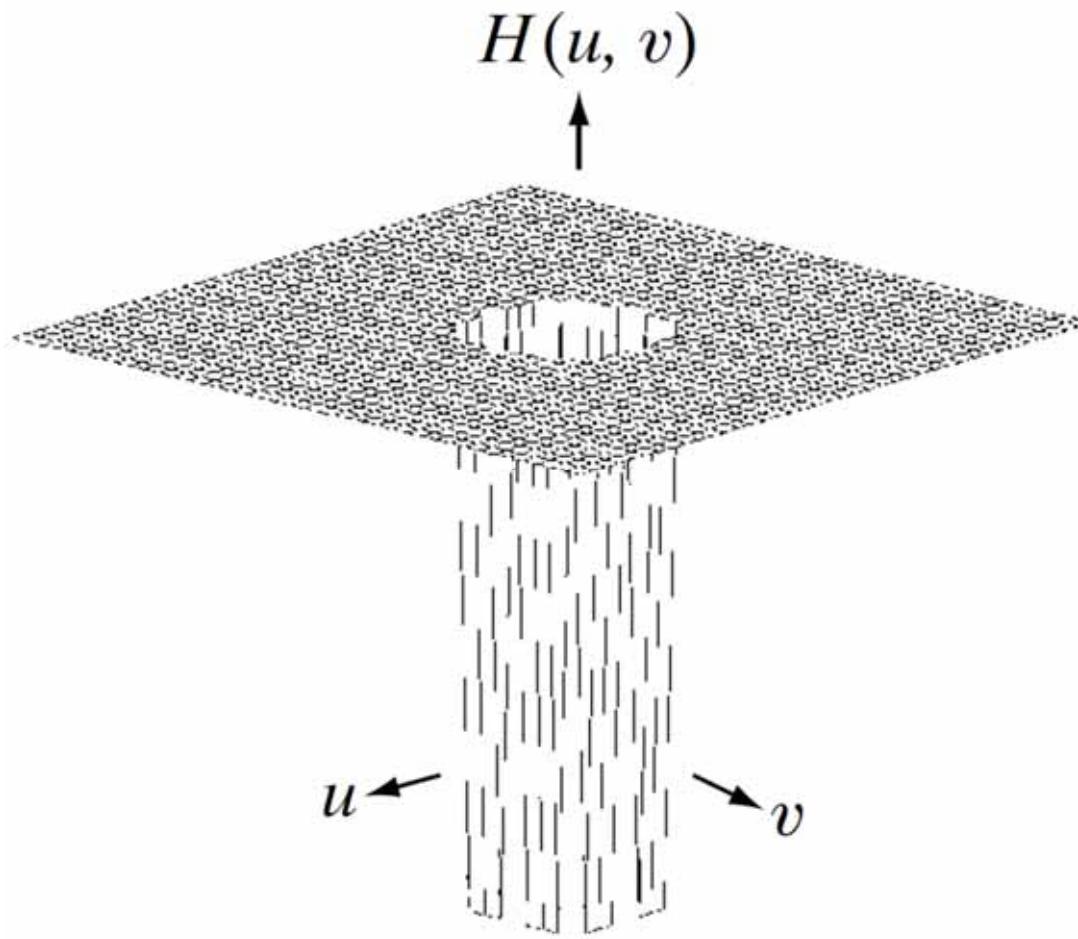
- 低频完全抑制
- 高频完全保留





理想高通滤波器

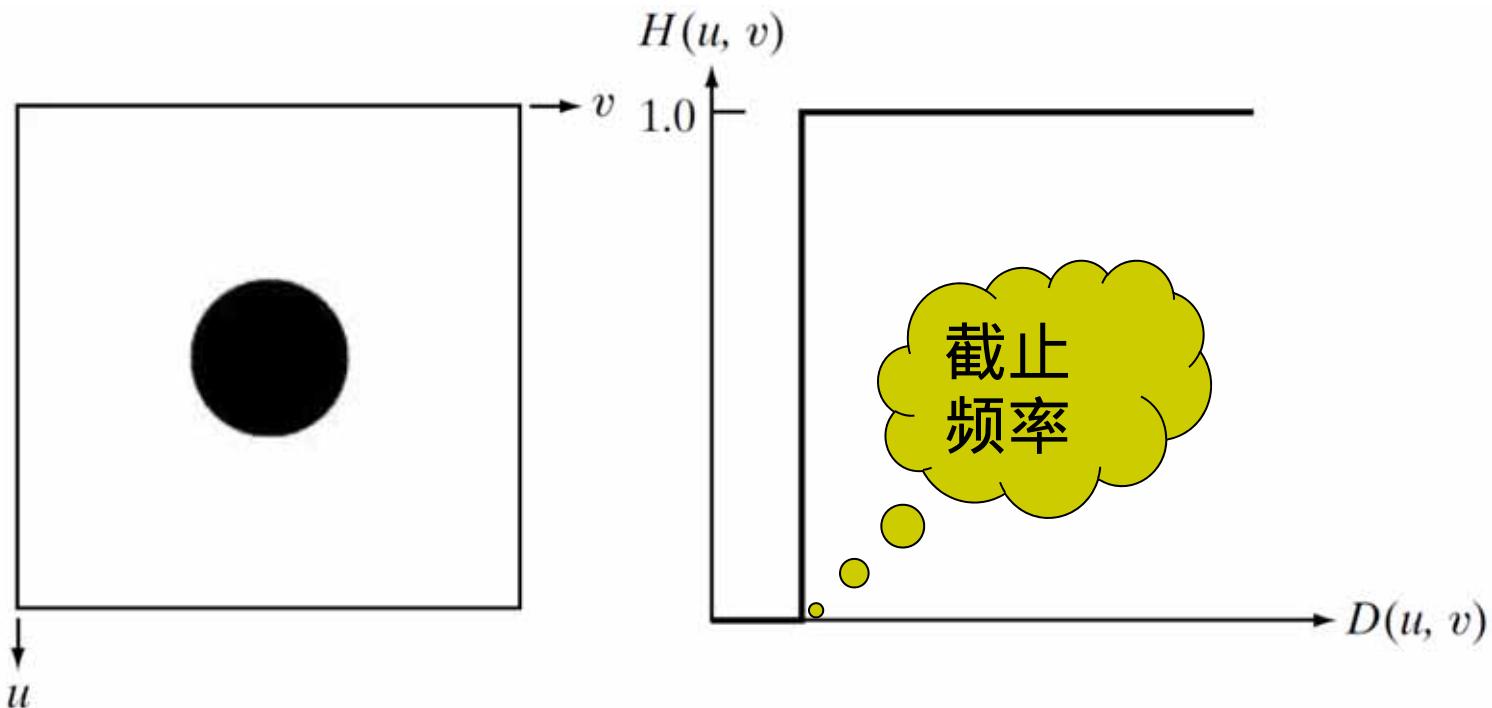
- 透视图





理想高通滤波器

- 图形显示



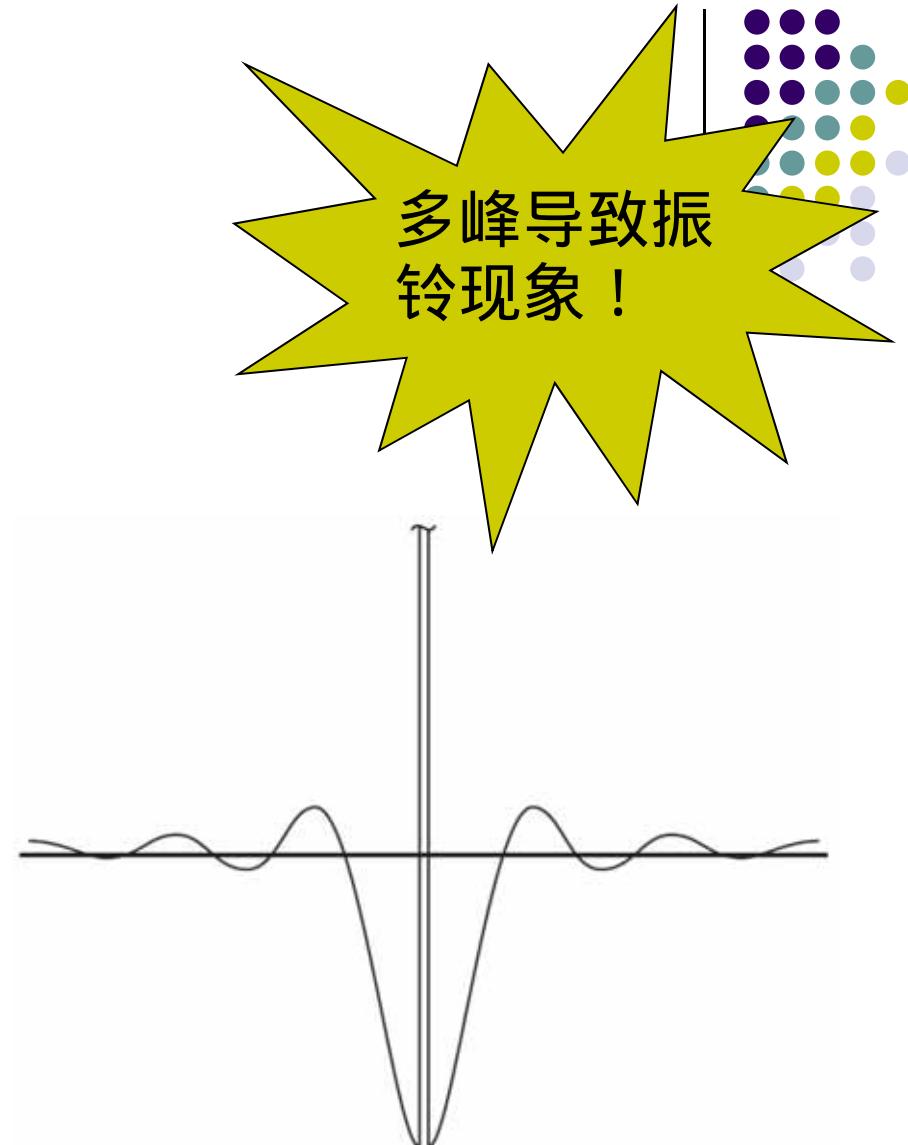
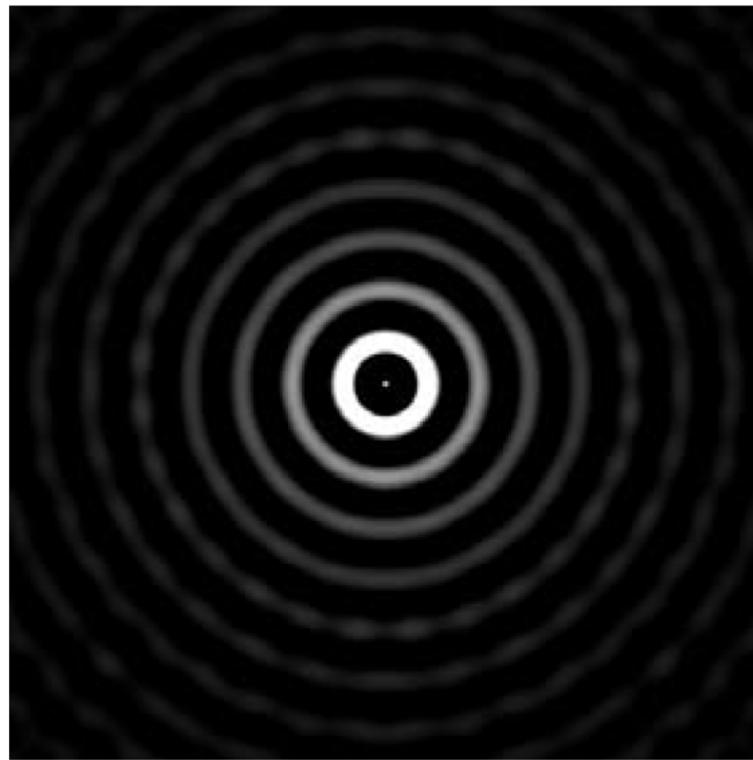
- 硬件无法实现

截面



理想高通滤波器

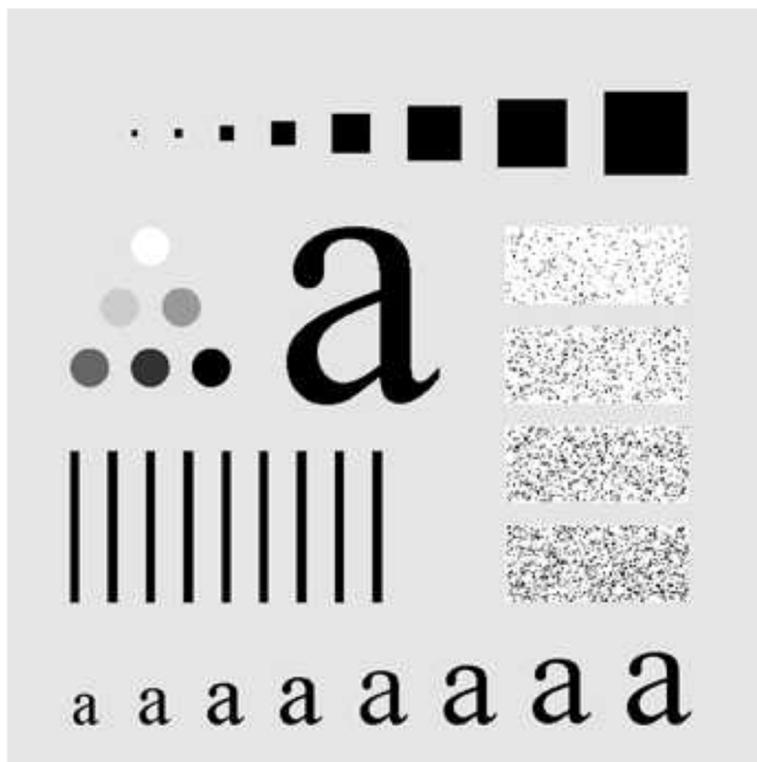
- 空间表示





举例

- 产生了振铃现象



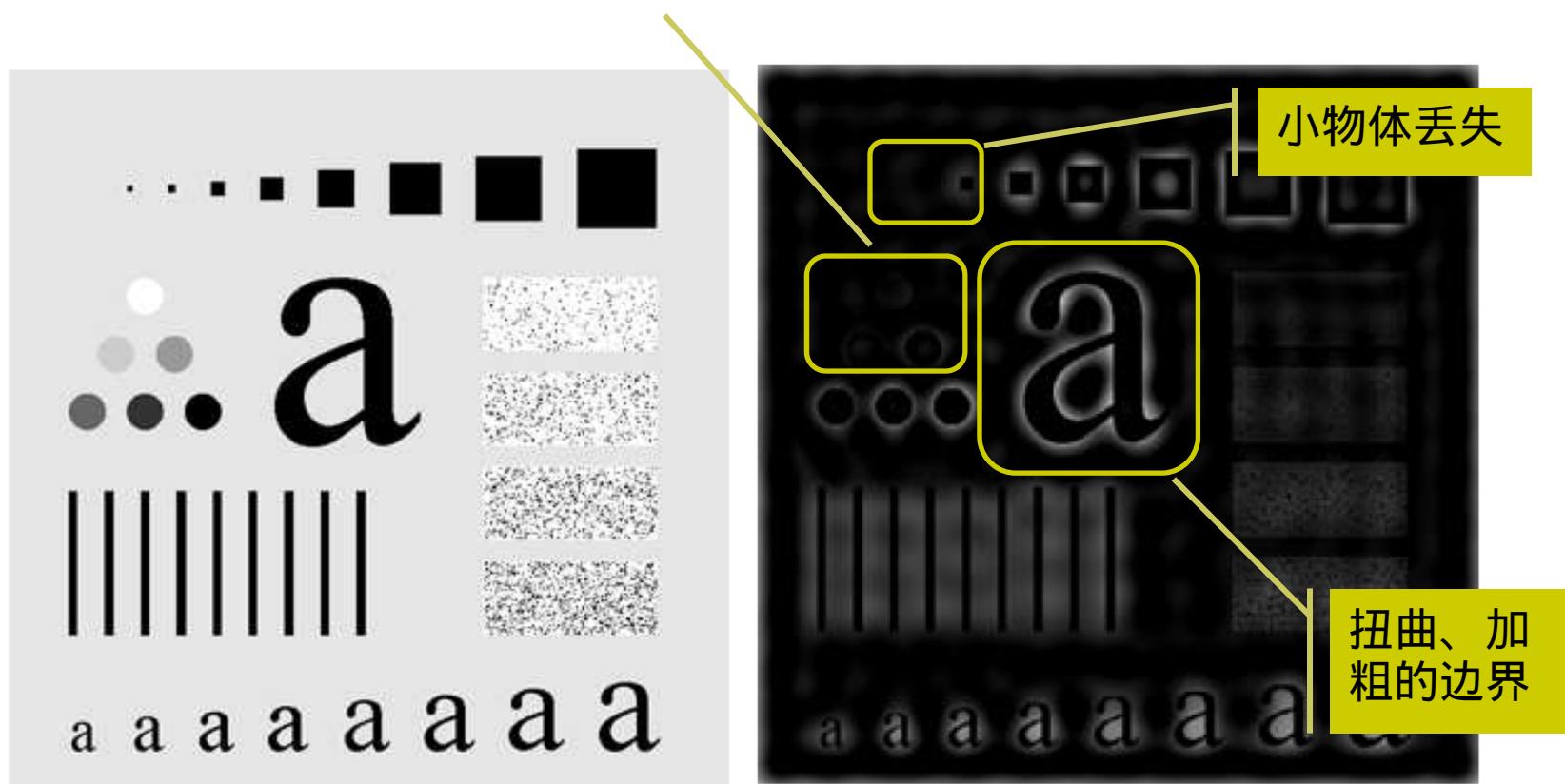
$D_0 = 30$ 的高通滤波





举例

- 产生了振铃现象



$D_0 = 30$ 的高通滤波



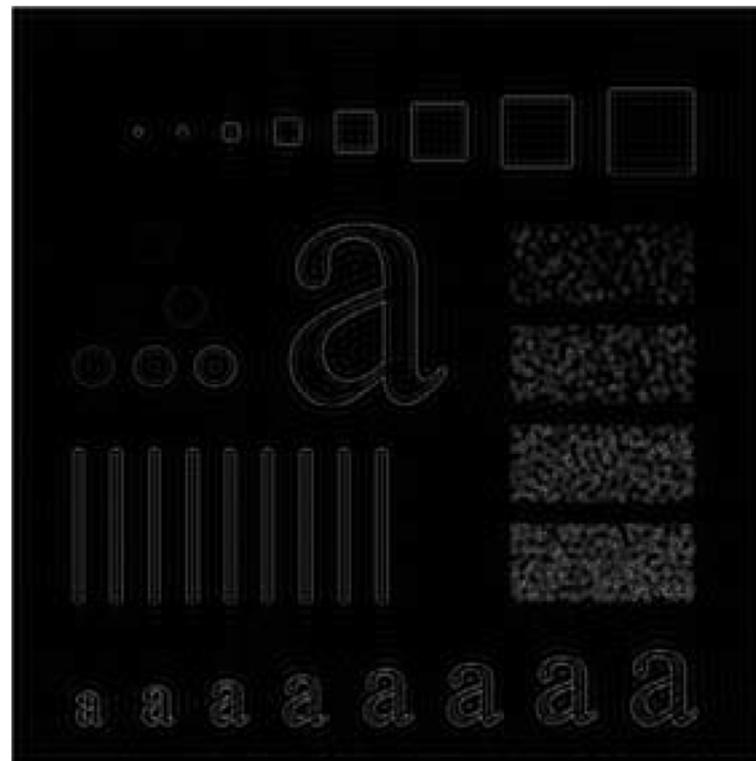


举例

- 振铃有所缓解



$D_0 = 60$ 的高通滤波

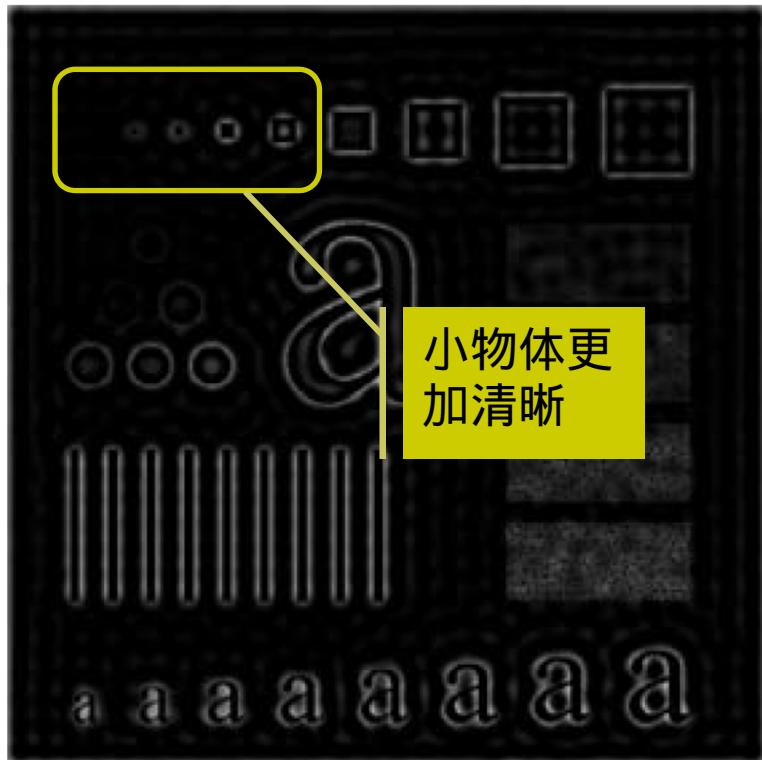


$D_0 = 160$ 的高通滤波

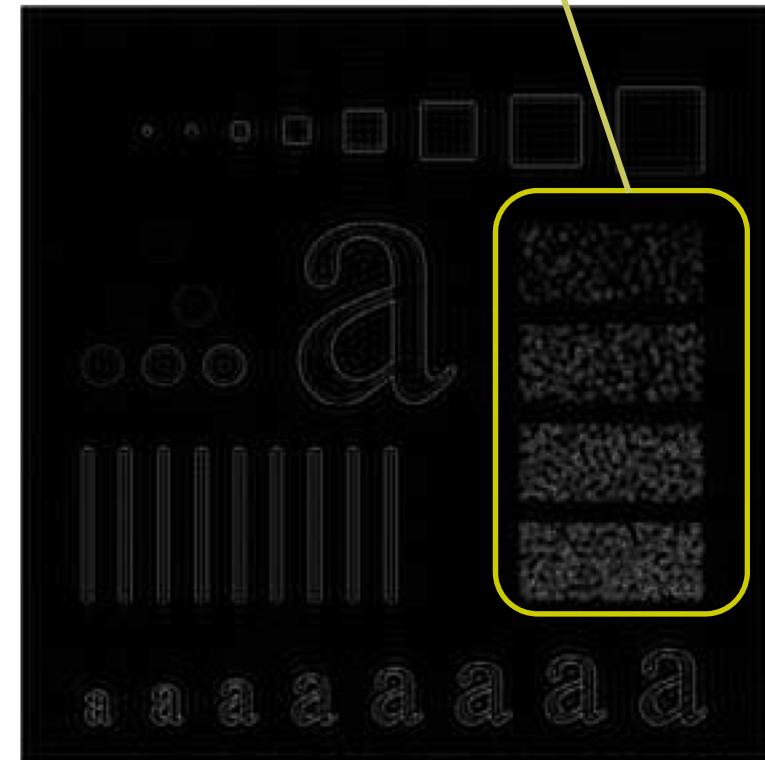


举例

- 振铃有所缓解



小物体更
加清晰



$D_0 = 160$ 的高通滤波



细节更
加明显





巴特沃斯高通滤波器

- n 阶巴特沃斯 (Butterworth) 高通滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$

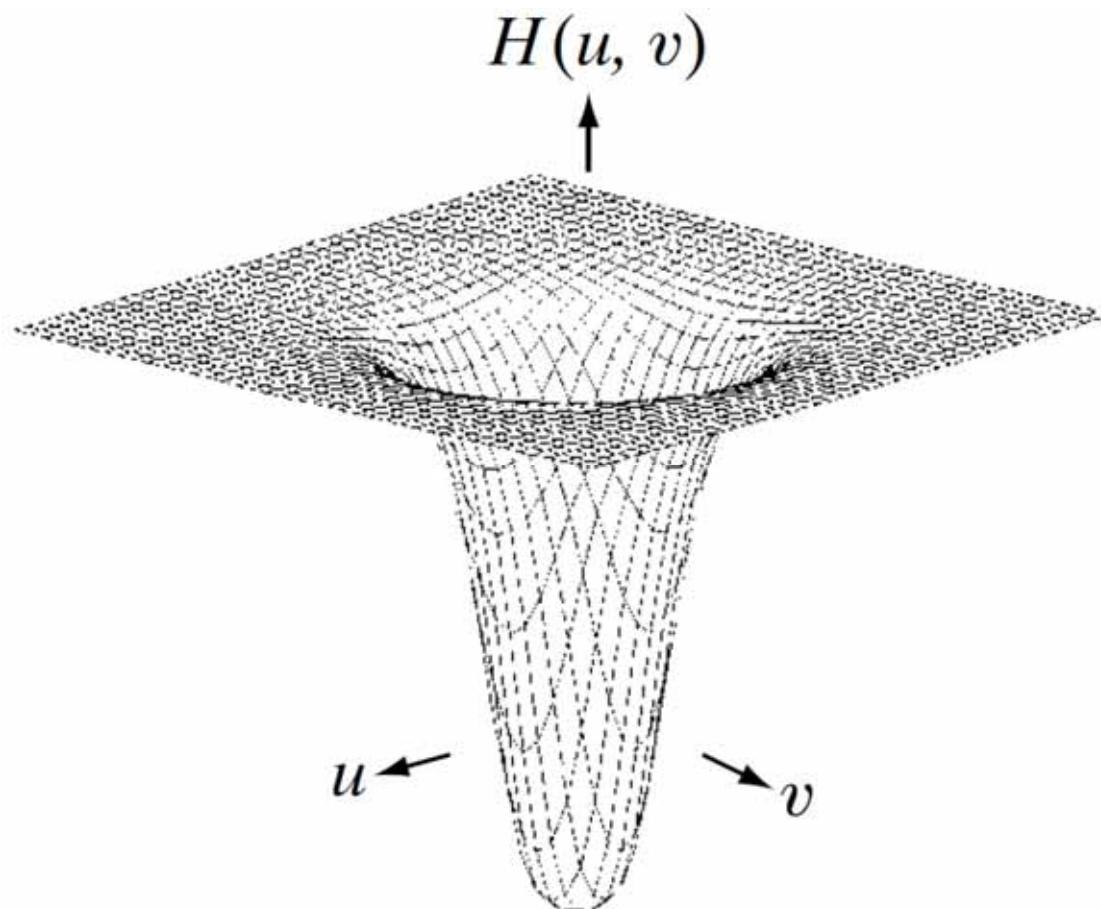
- D_0 为 截止频率





巴特沃斯高通滤波器

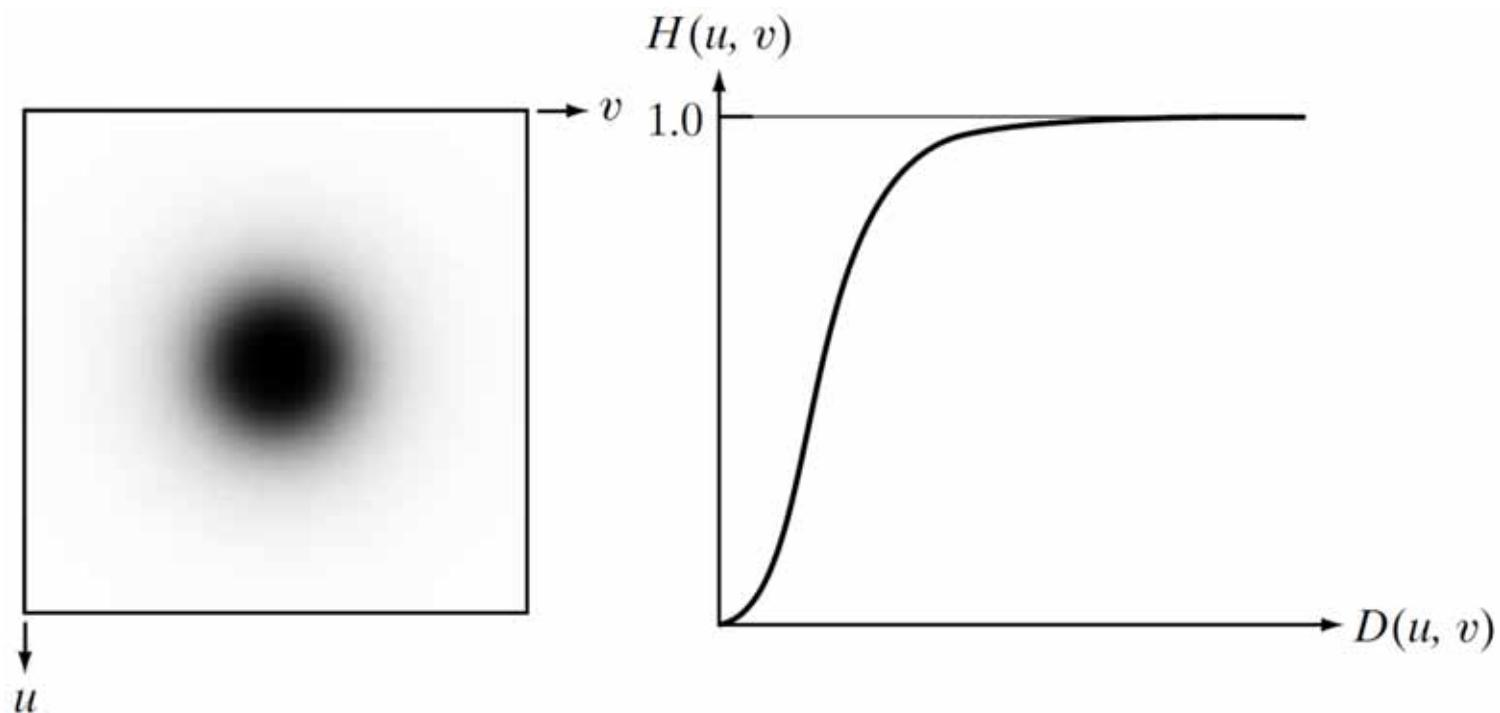
- 透视图





巴特沃斯高通滤波器

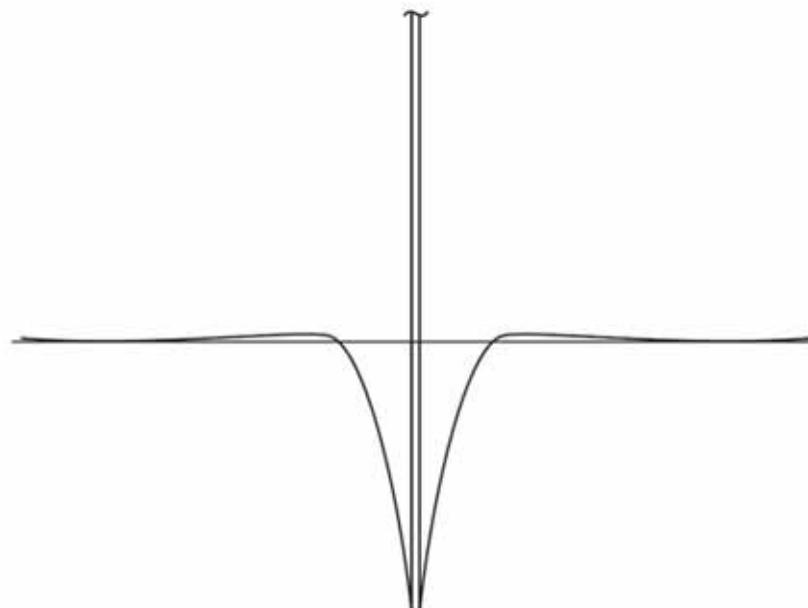
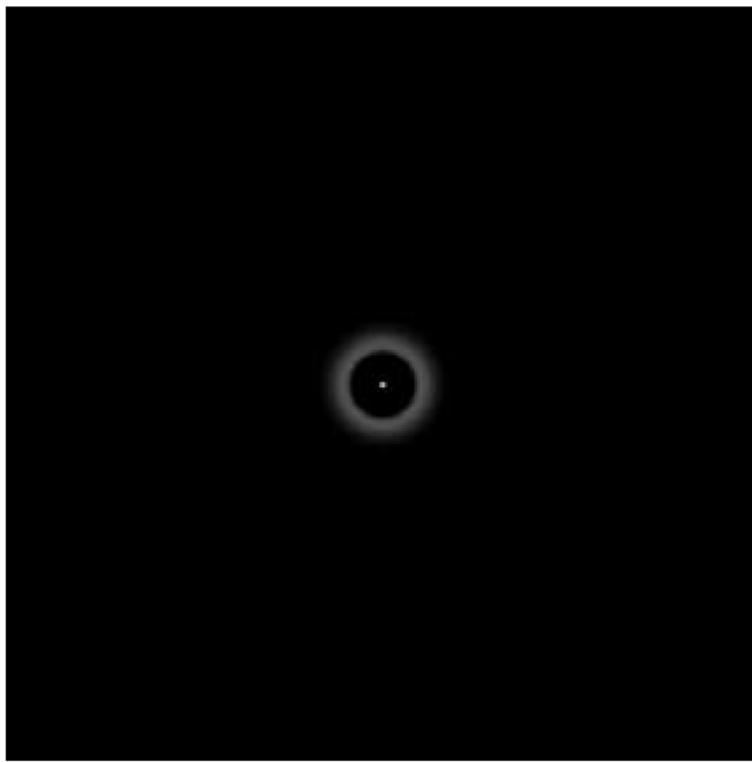
- 图形显示





巴特沃斯高通滤波器

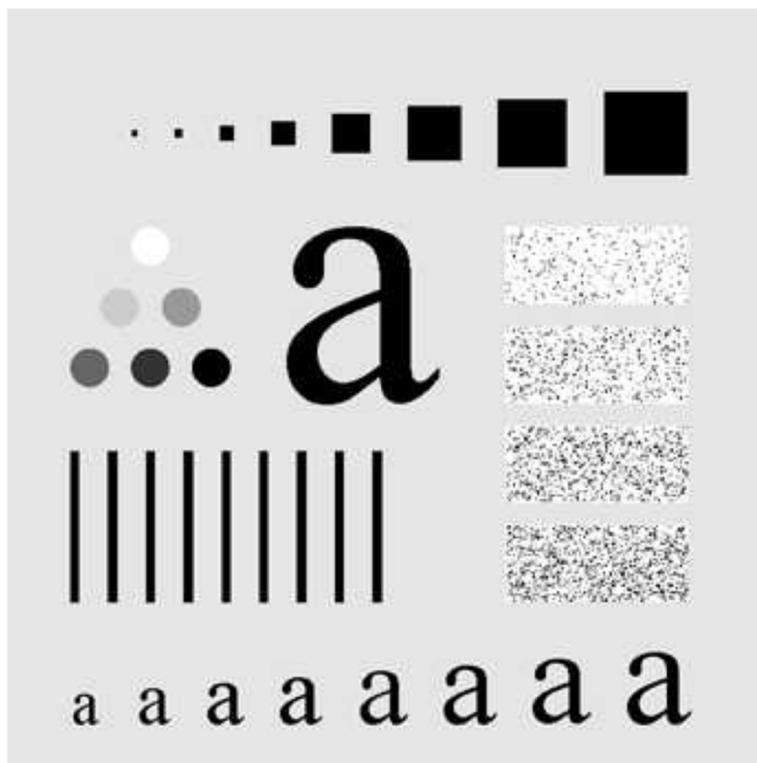
- 空间表示





举例

- 轻微振铃现象



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2, D_0 = 30$



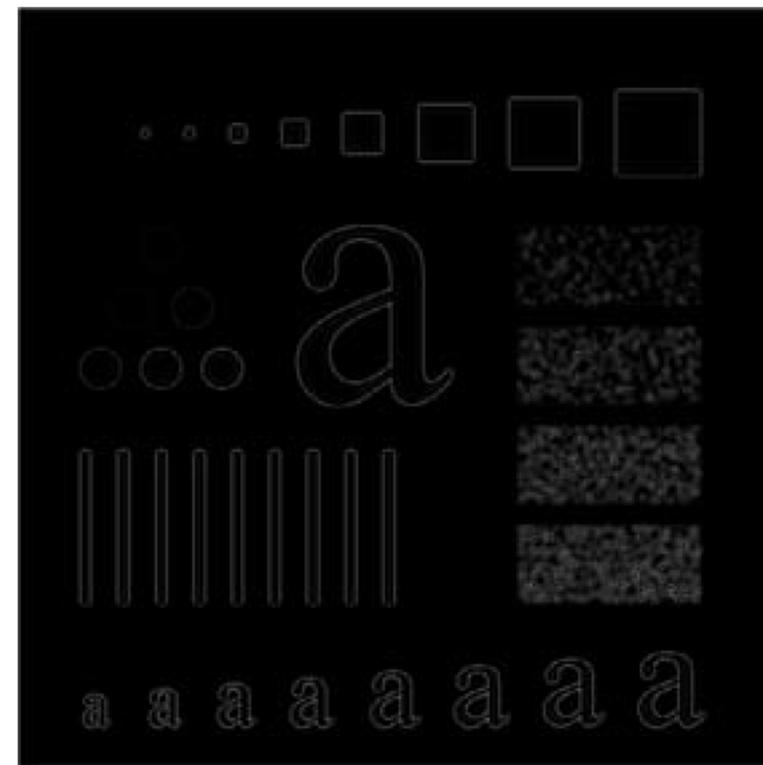


举例

- 轻微振铃现象



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2, D_0 = 60$



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2, D_0 = 160$



对比

- $D = 30$



理想高通滤波器



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$



对比

- $D = 60$



理想高通滤波器



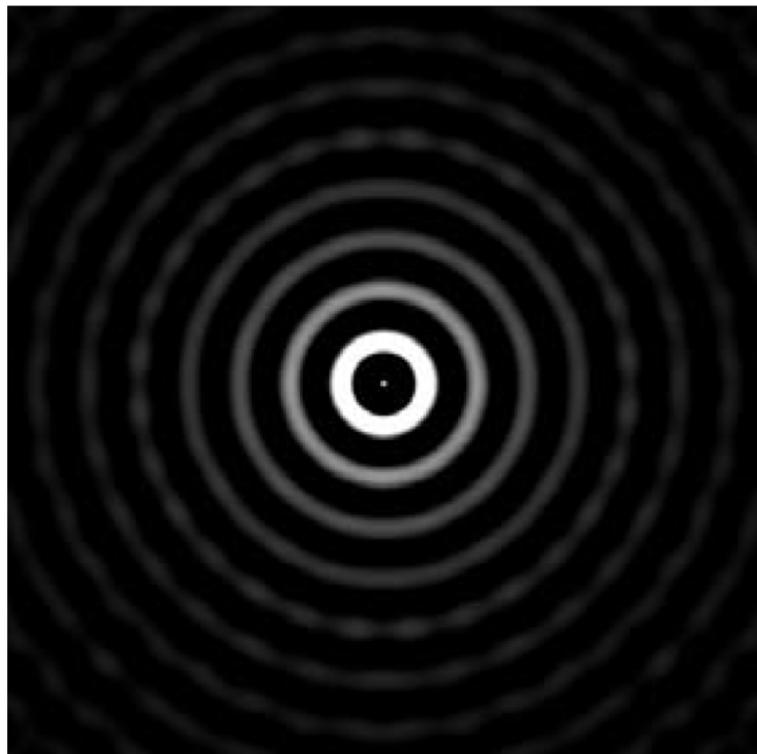
巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$



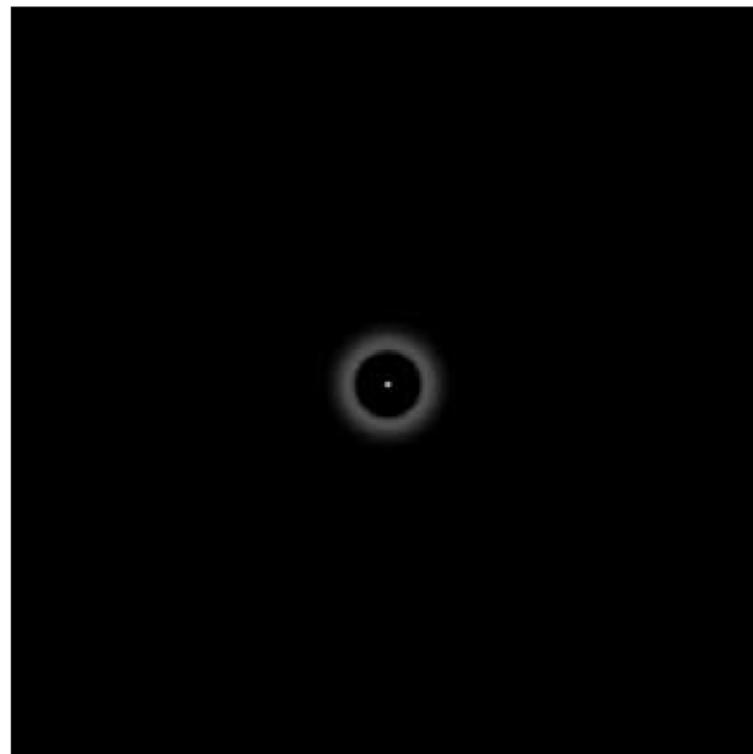


对比

- 空间表示



理想高通滤波器



巴特沃斯高通滤波器 $n = 2$





高斯高通滤波器

- 数学定义

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$

- $D(u, v)$ 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$

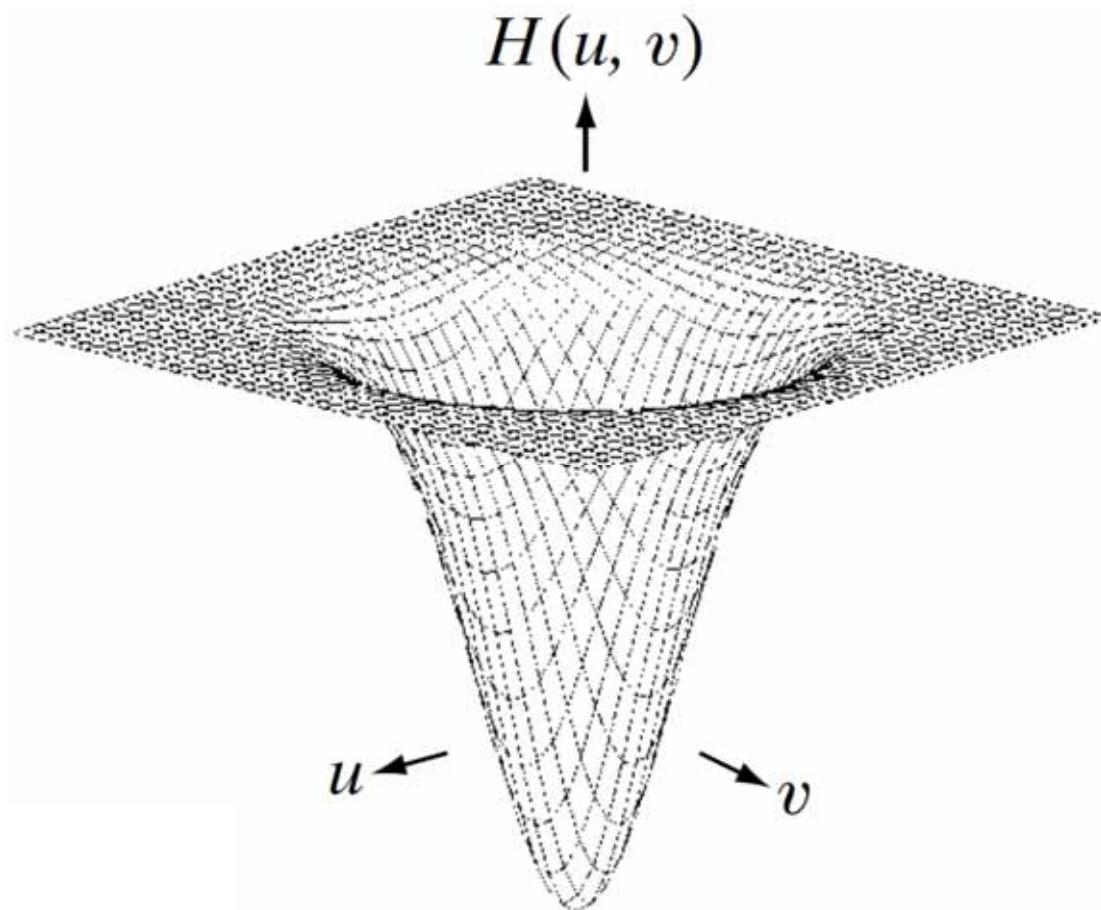
- D_0 为 截止频率





高斯高通濾波器

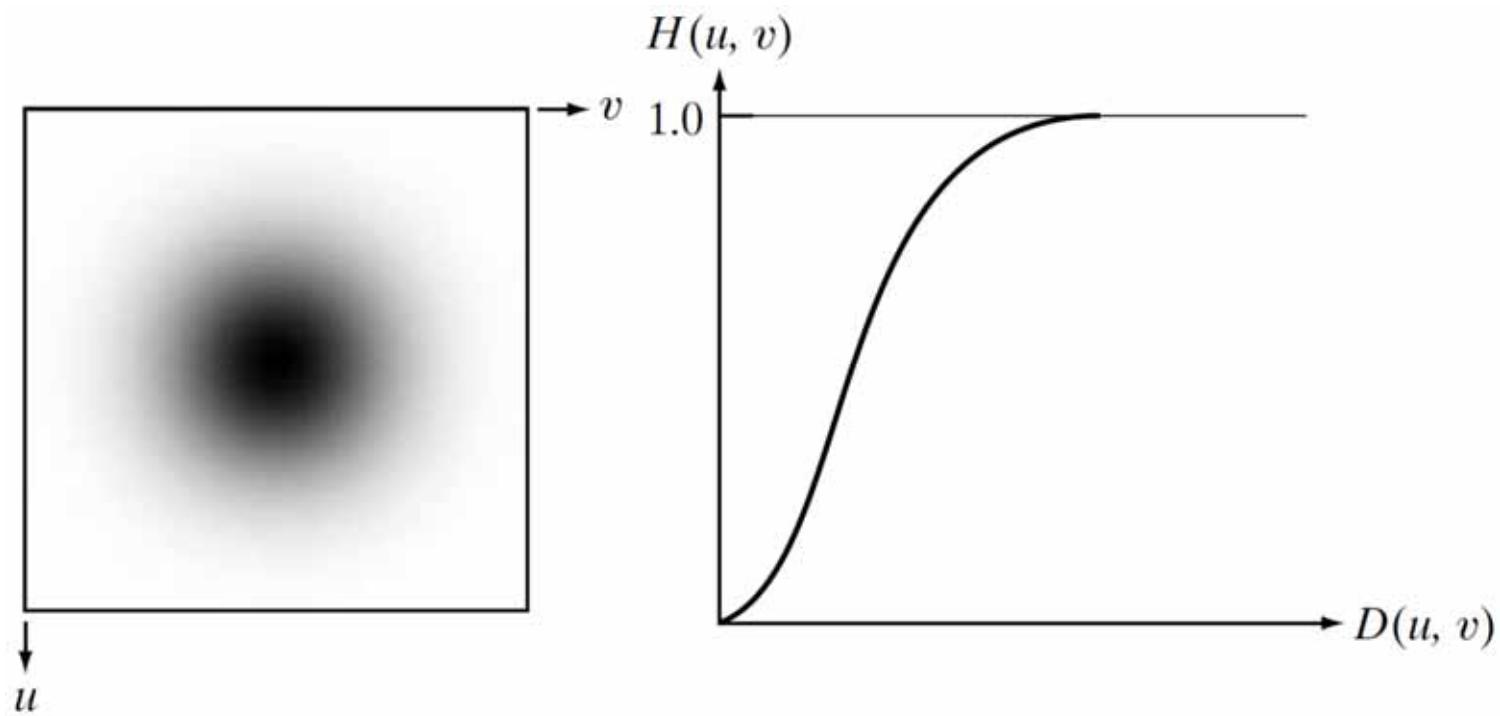
- 透視圖





高斯高通濾波器

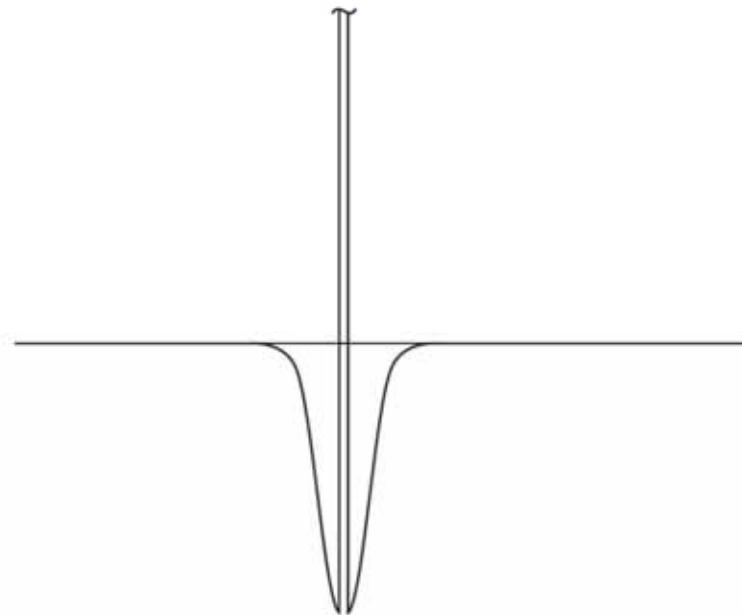
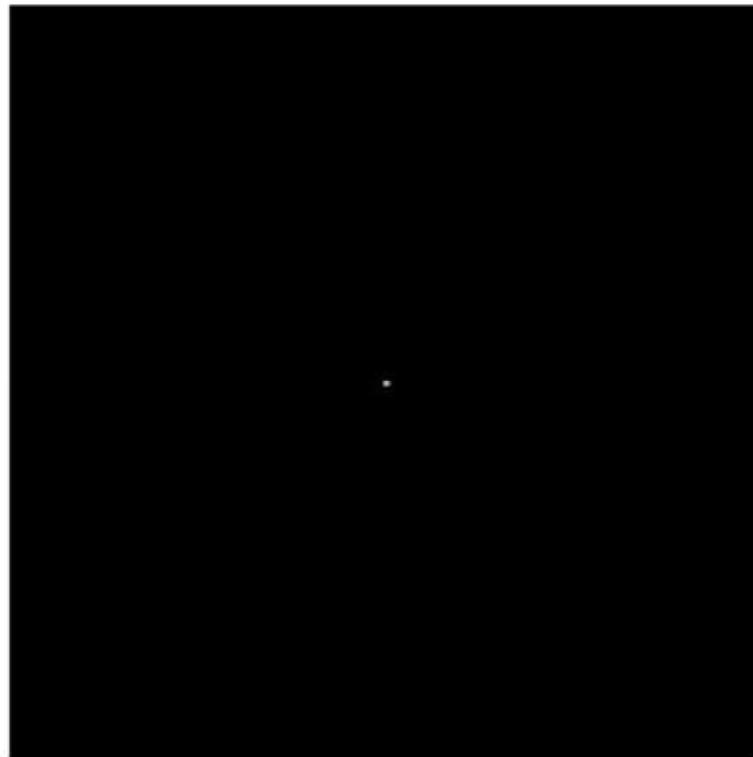
- 图形显示





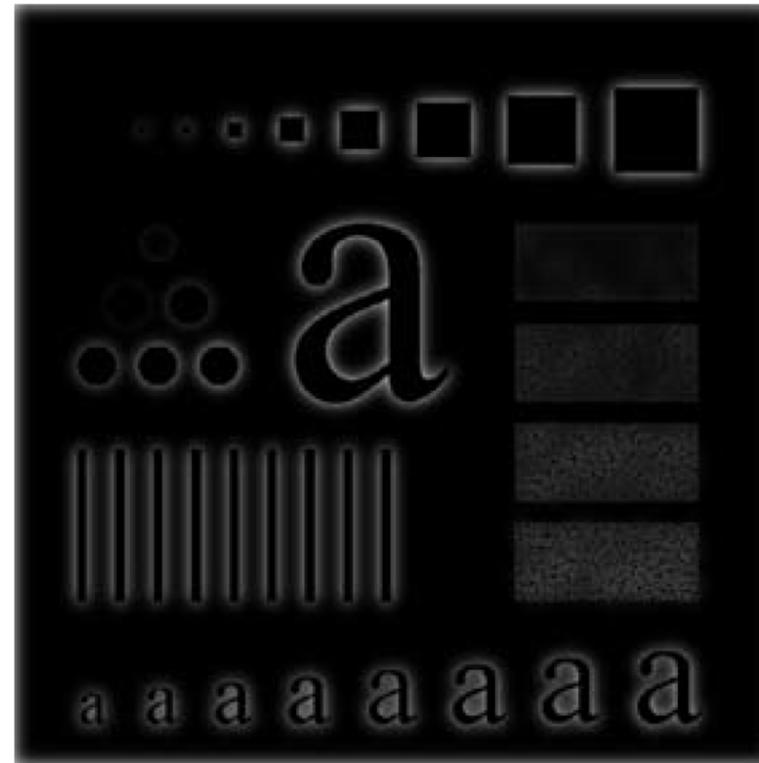
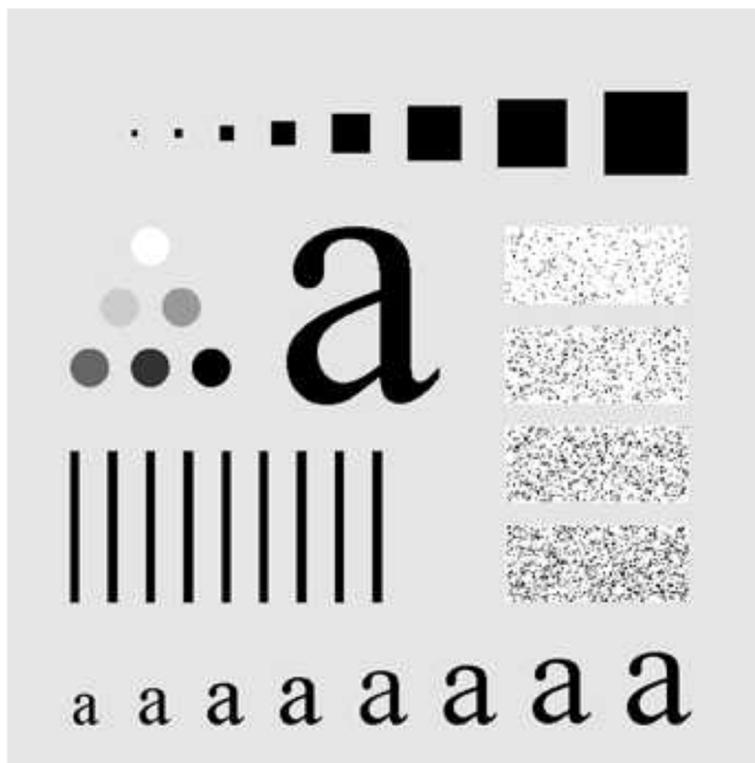
高斯高通濾波器

- 空间表示





举例



$D_0 = 30$ 的高通滤波





举例



$D_0 = 60$ 的高通濾波



$D_0 = 160$ 的高通濾波



对比

- $D = 30$



巴特沃斯高通濾波器 $n = 2$



高斯高通濾波器





对比

- $D = 60$



巴特沃斯高通濾波器 $n = 2$



高斯高通濾波器





高通濾波器對比

- 理想高通濾波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- 巴特沃斯高通濾波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

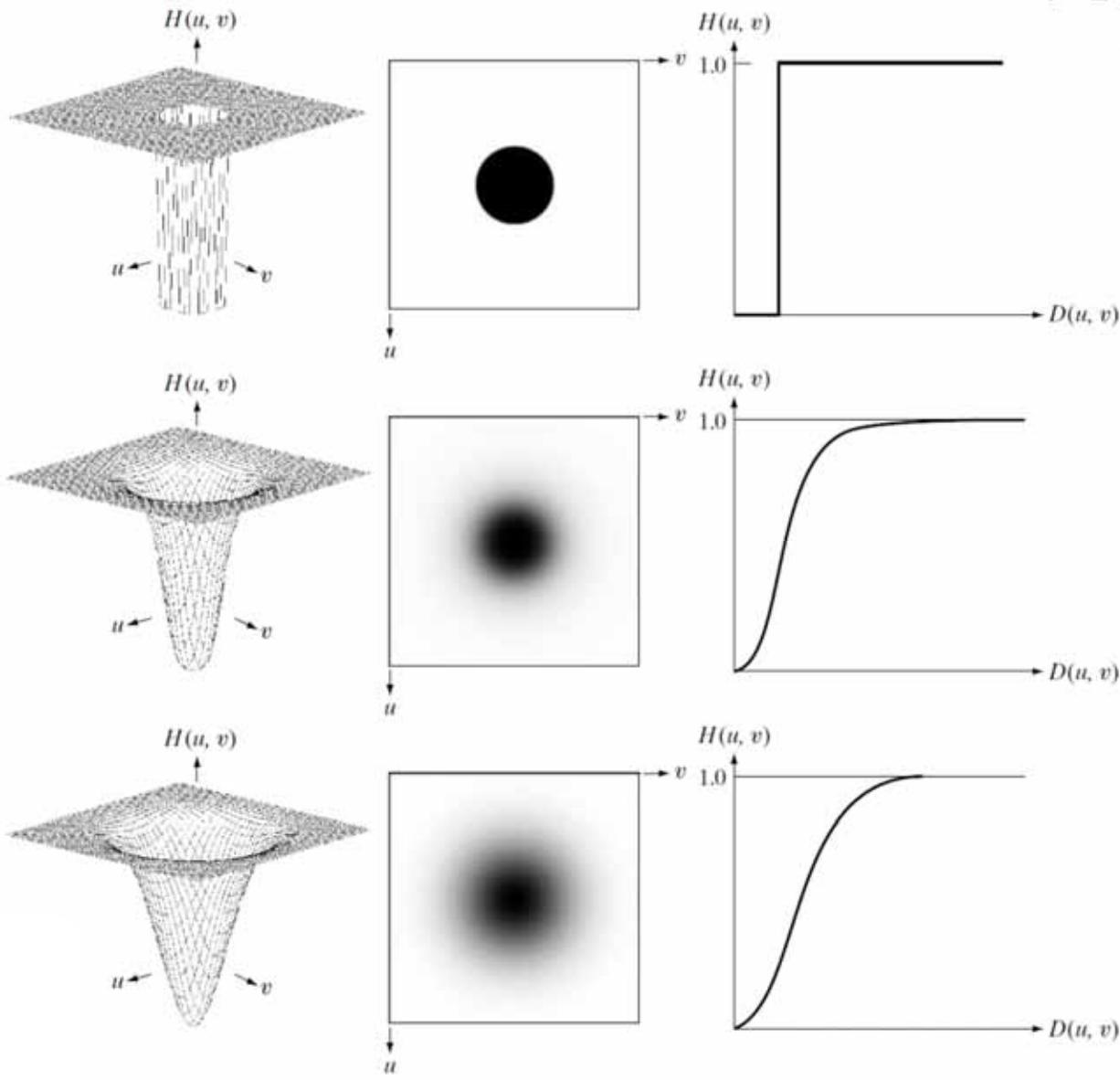
- 高斯高通濾波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$



高通滤波器对比

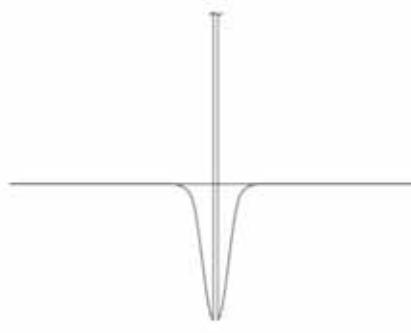
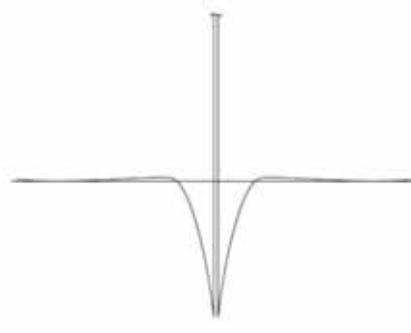
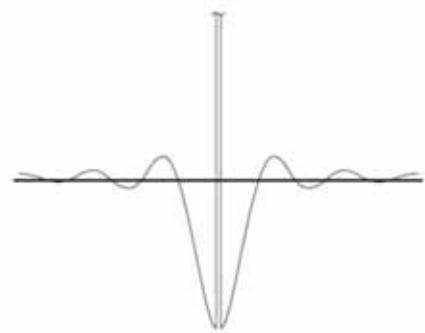
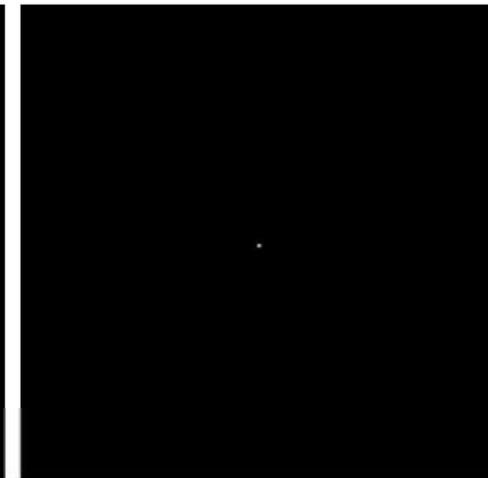
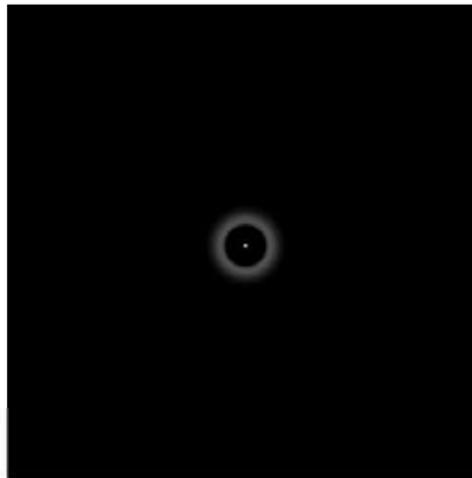
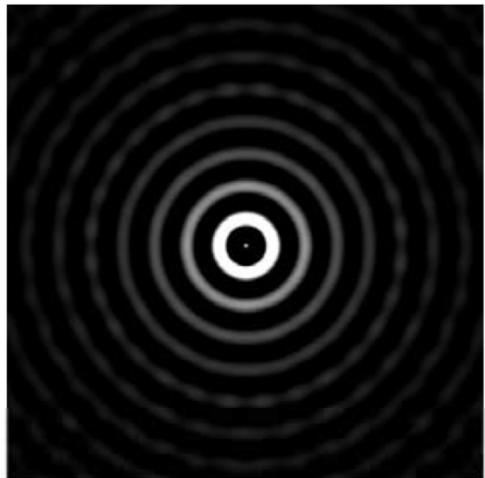
● 频率域





高通滤波器对比

- 空间域





指纹增强

- 去掉斑点、增强纹路



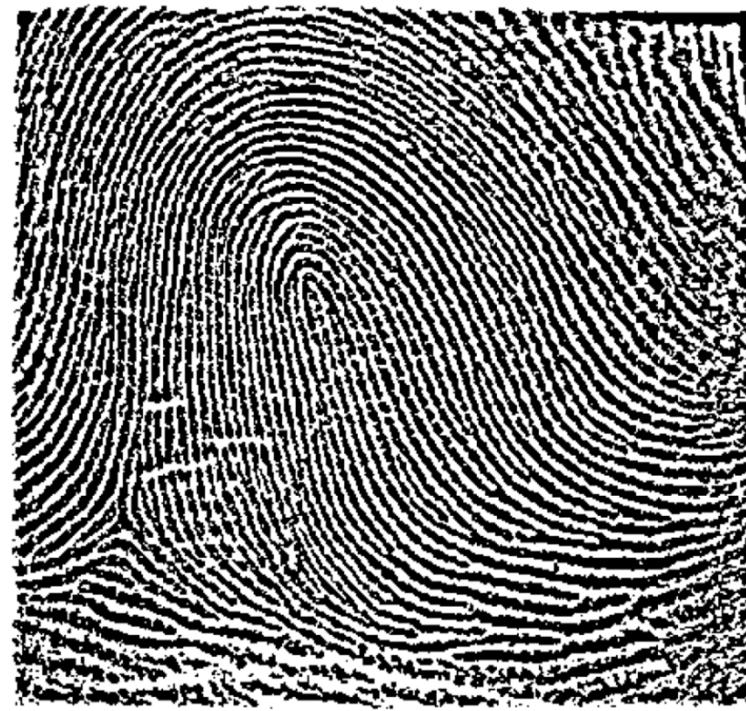
巴特沃斯高通濾波器 $n = 4, D_0 = 50$





指纹增强

- 去掉斑点、增强纹路



阈值法





锐化图像

- 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
- 频率域拉普拉斯算子
- 频率域非锐化掩蔽
- 同态滤波





使用二阶导数对图像锐化

- 各向同性滤波器
 - 旋转图像→滤波 = 滤波→旋转结果
- 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- 线性算子
- 离散拉普拉斯算子

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$





拉普拉斯算子

● 标准形式

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) = & f(x+1, y) + f(x-1, y) \\ & + f(x, y+1) + f(x, y-1) \\ & - 4f(x, y)\end{aligned}$$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

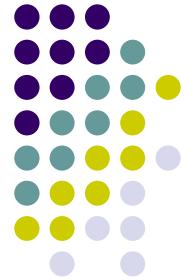
90度增量
各向同性

● 对角线形式

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

45度增量
各向同性





使用二阶导数对图像锐化

- 拉普拉斯算子结果叠加到图像中

$$g(x, y) = f(x, y) + c[\nabla^2 f(x, y)]$$

- 采用负的中心系数 , $c = -1$
- 采用正的中心系数 , $c = 1$

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1





频率域的拉普拉斯算子

- 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- 傅里叶变换

$$\nabla^2 f(t, z) \Leftrightarrow -4\pi^2(\mu^2 + \nu^2)F(\mu, \nu)$$

- 频域滤波器

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$

- 频域滤波器（中心化）

$$H(u, v) = -4\pi^2[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]$$

$$= -4\pi^2 D^2(u, v)$$





频率域的拉普拉斯算子

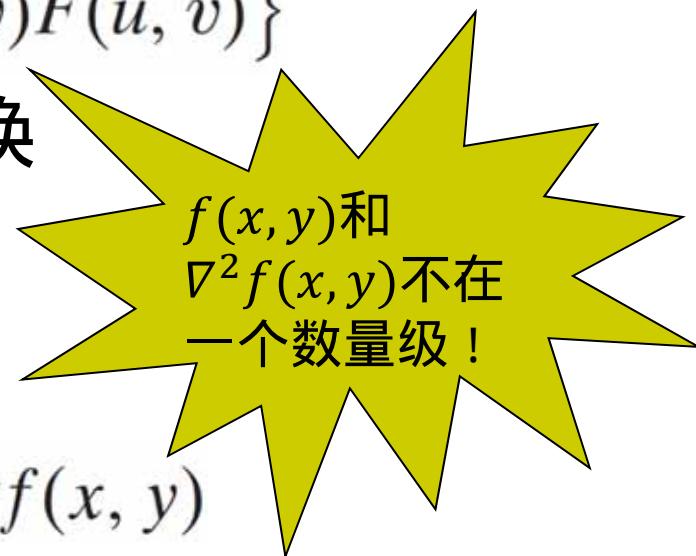
- 拉普拉斯图像

$$\nabla^2 f(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F(u, v)\}$$

- 频率域滤波、傅里叶反变换
- $F(u, v)$ 是原图像的DFT
- 图像锐化

$$g(x, y) = f(x, y) + c\nabla^2 f(x, y)$$

- $c = -1$
- $f(x, y)$ 归一化到 $[0,1]$ ，再计算DFT
- $\nabla^2 f(x, y)$ 归一化到 $[-1,1]$





频率域的拉普拉斯算子

- 图像锐化

$$g(x, y) = f(x, y) + c \nabla^2 f(x, y)$$

- $c = -1$

- 频域率写法

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v) - H(u, v)F(u, v)\}$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}\{\left[1 - H(u, v)\right]F(u, v)\}$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}\{\left[1 + 4\pi^2 D^2(u, v)\right]F(u, v)\}$$

- 简洁、但同样存在量纲的问题





举例

- 月球图像



原图



频率域拉普拉斯增强





对比

- 月球图像



空间域拉普拉斯增强



频率域拉普拉斯增强





锐化图像

- 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
- 频率域拉普拉斯算子
- 频率域非锐化掩蔽
- 同态滤波





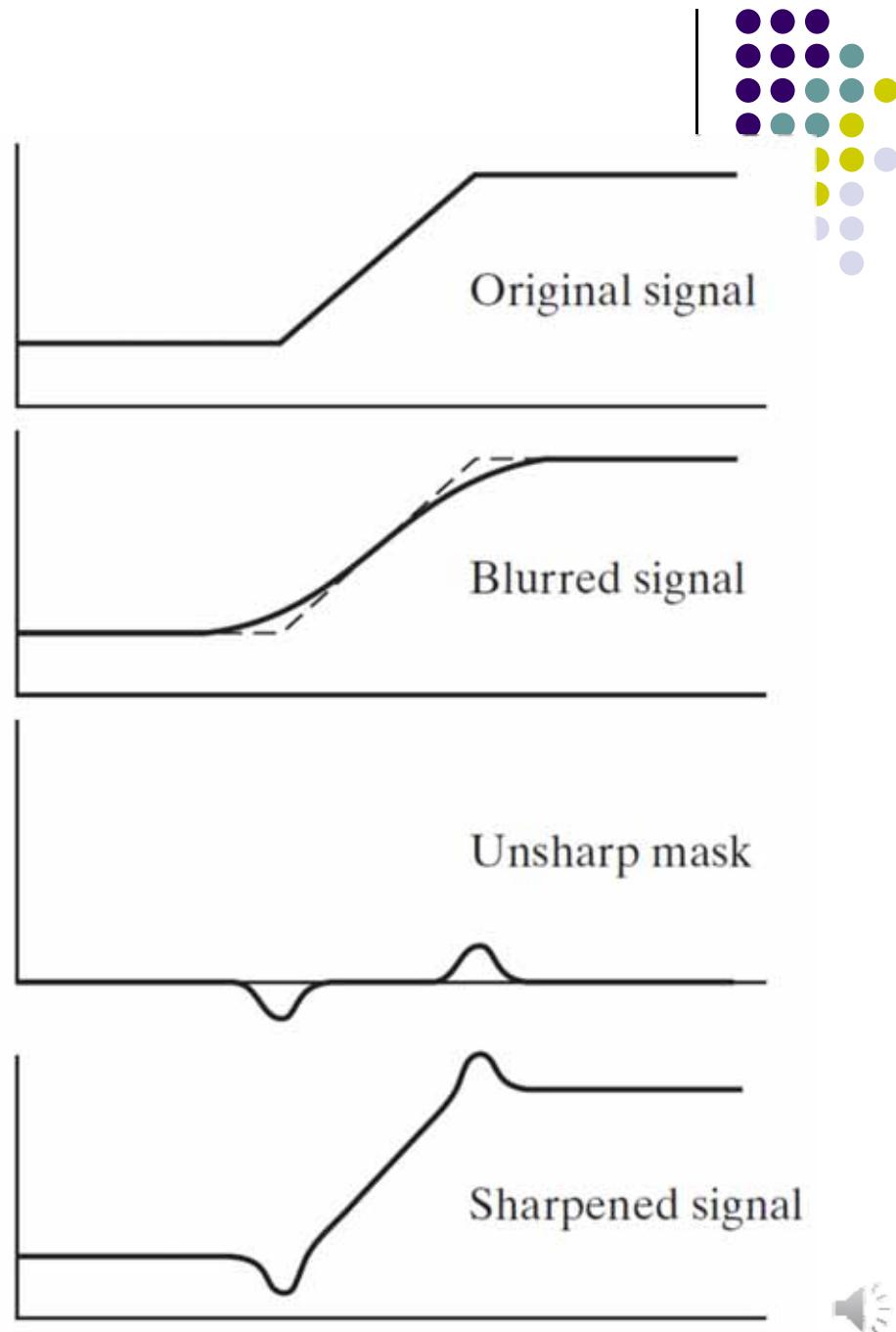
非锐化掩蔽

- 从原图像减去一幅非锐化版本
 1. 模糊原图像
 2. 从原图像减去模糊图像，得到模板
 3. 将模板加到原图像
- 具体公式
$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$
$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$
- 模糊图像 $\bar{f}(x, y)$
- 非锐化掩蔽 $k = 1$ ；高提升滤波 $k > 1$



示例

- 非锐化模板
- 二阶导数





频率域非锐化掩蔽

- 基于低通滤波器的非锐化模板

$$g_{\text{mask}}(x, y) = f(x, y) - f_{\text{LP}}(x, y)$$

- 其中

$$f_{\text{LP}}(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H_{\text{LP}}(u, v)F(u, v)]$$

- $H_{\text{LP}}(u, v)$ 为低通滤波器
- $F(u, v)$ 是原图像的DFT

- 增强后的图像

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 非锐化掩蔽 $k = 1$ ；高提升滤波 $k > 1$





频率域非锐化掩蔽

- 增强后的图像

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 频域率写法

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[1 + k * [1 - H_{\text{LP}}(u, v)]\right]F(u, v)\right\}$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{[1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)]F(u, v)\right\}$$

- 其中 $H_{\text{HP}}(u, v) = 1 - H_{\text{LP}}(u, v)$
- 高频强调滤波

$$1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)$$



频率域非锐化掩蔽



- 增强后的图像

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{\text{mask}}(x, y)$$

- 频域率写法

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[1 + k * [1 - H_{\text{LP}}(u, v)]\right]F(u, v)\right\}$$

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[1 + k * H_{\text{HP}}(u, v)\right]F(u, v)\right\}$$

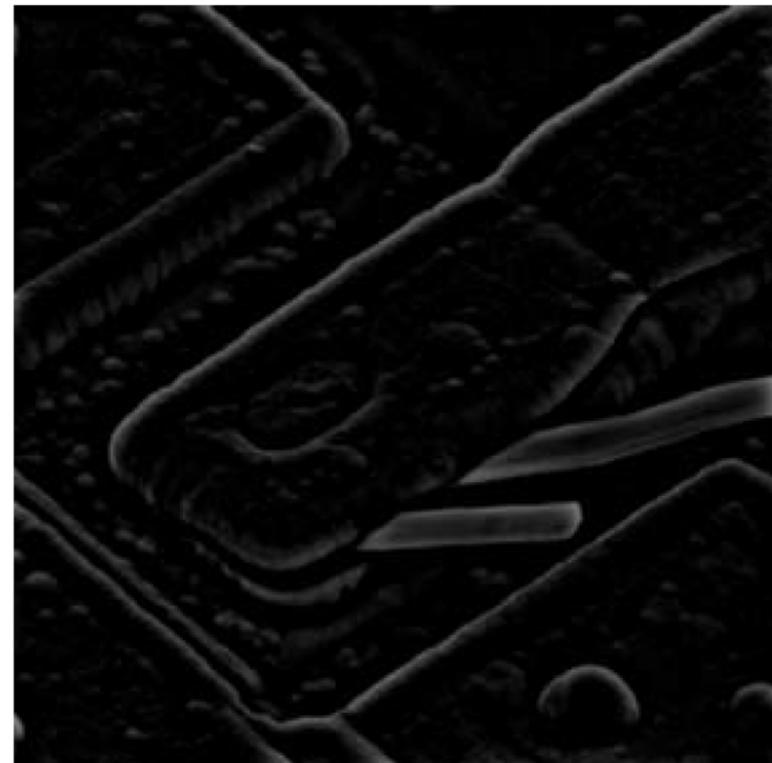
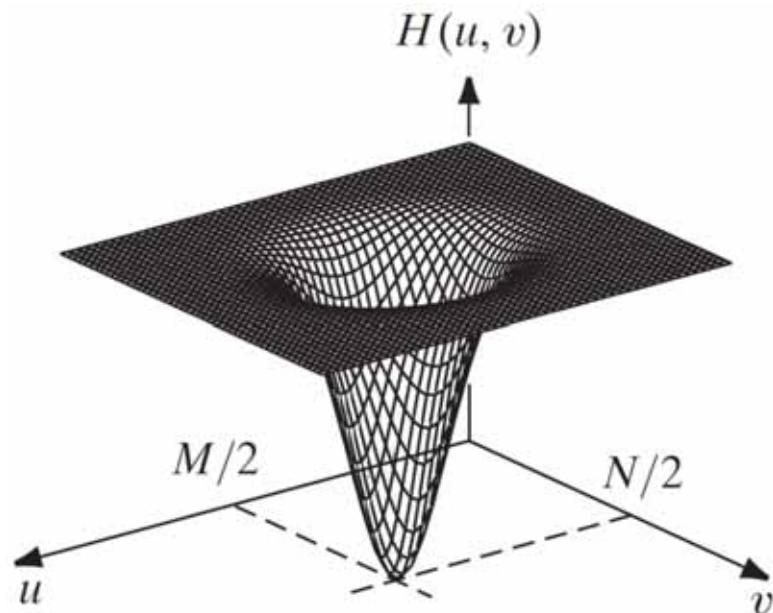
- 其中 $H_{\text{HP}}(u, v) = 1 - H_{\text{LP}}(u, v)$
- 高频强调滤波 (更一般形式)

$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\left[k_1 + k_2 * H_{\text{HP}}(u, v)\right]F(u, v)\right\}$$



高通滤波器

- 衰减低频而通过高频，强化细节



- 高频对应于图像中剧烈变化的灰度

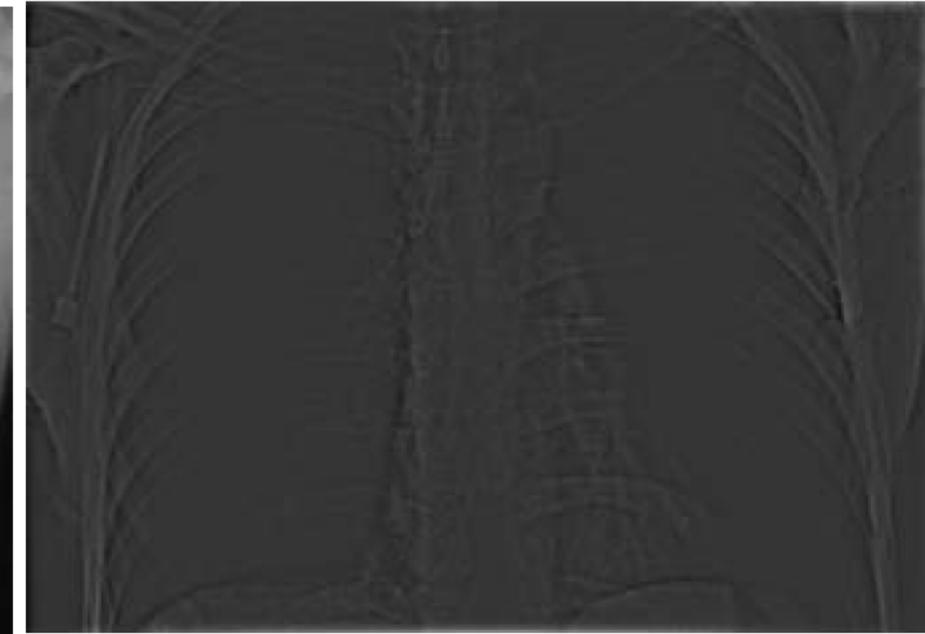


举例

- 胸部X射线



原图



高斯高通滤波器 $D_0 = 40$



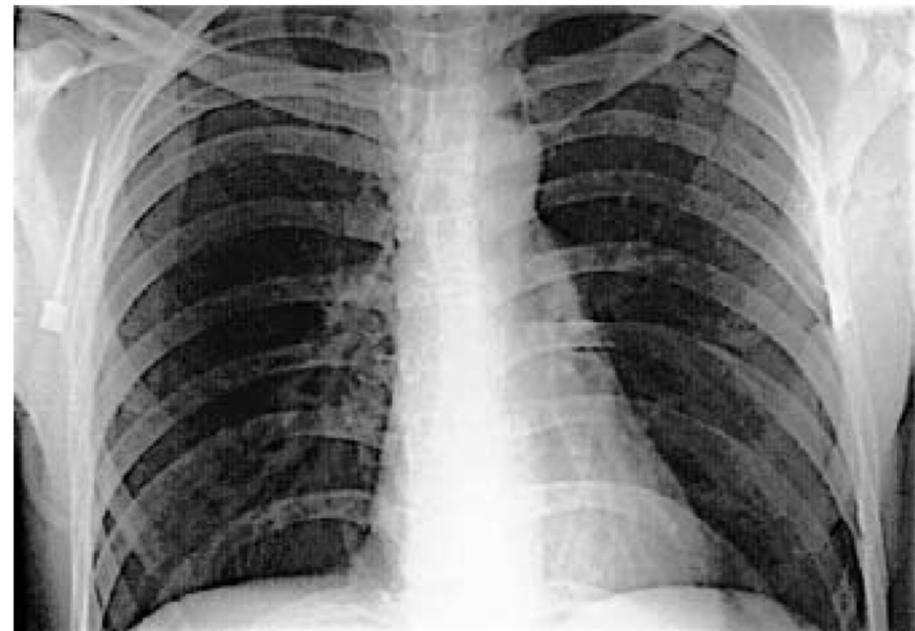


举例

- 胸部X射线



高频强调滤波 $k_1 = 0.5, k_2 = 0.75$



直方图均衡





锐化图像

- 理想高通、巴特沃斯、高斯高通滤波器
- 频率域拉普拉斯算子
- 频率域非锐化掩蔽
- 同态滤波





同态滤波 (1)

- 照射—反射模型

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

- 照射 $0 < i(x, y) < \infty$
- 反射 $0 < r(x, y) < 1$

- 注意

$$\Im[f(x, y)] \neq \Im[i(x, y)]\Im[r(x, y)]$$

- 取对数 $z(x, y) = \ln f(x, y)$

$$= \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$





同态滤波 (2)

- 对 $z(x, y)$ 傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{z(x, y)\} &= \mathfrak{F}\{\ln f(x, y)\} \\ &= \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\}\end{aligned}$$

- 换言之

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

- 其中 $F_i(u, v) = \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\}$
- 其中 $F_r(u, v) = \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\}$
- 对 $Z(u, v)$ 滤波

$$\begin{aligned}S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v)\end{aligned}$$





同态滤波 (3)

- 空间域图像

$$\begin{aligned}s(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}\{S(u, v)\} \\&= \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\} + \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}\end{aligned}$$

- 定义

$$i'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_i(u, v)\}$$

$$r'(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(u, v)F_r(u, v)\}$$

- 空间域图像

$$s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$$





同态滤波 (4)

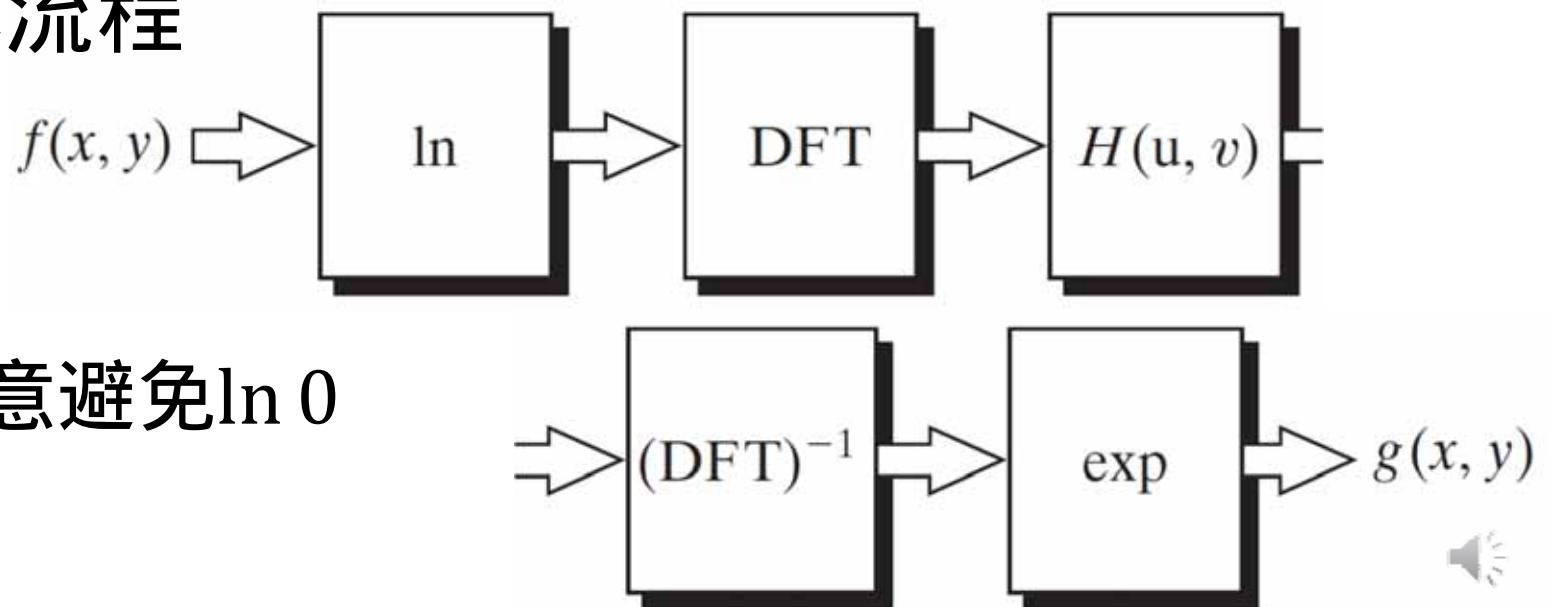
- 取指数

$$g(x, y) = e^{s(x, y)} = e^{i'(x, y)} e^{r'(x, y)} = i_0(x, y) r_0(x, y)$$

- 其中

$$i_0(x, y) = e^{i'(x, y)} \quad r_0(x, y) = e^{r'(x, y)}$$

- 整体流程



- 注意避免 $\ln 0$





讨论

- 照明和反射分量的分离是关键

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

- 进而实现了分别滤波

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned}$$

- 照射分量较为稳定
- 反射分量差异较大
 - 尤其在连接处





讨论

- 照明和反射分量的分离是关键

$$Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$$

- 进而实现了分别滤波

$$\begin{aligned} S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ &= H(u, v)F_i(u, v) + H(u, v)F_r(u, v) \end{aligned}$$

- $Z(u, v)$ 中的低频成分对应于照射分量
- $Z(u, v)$ 中的高频成分对应于反射分量

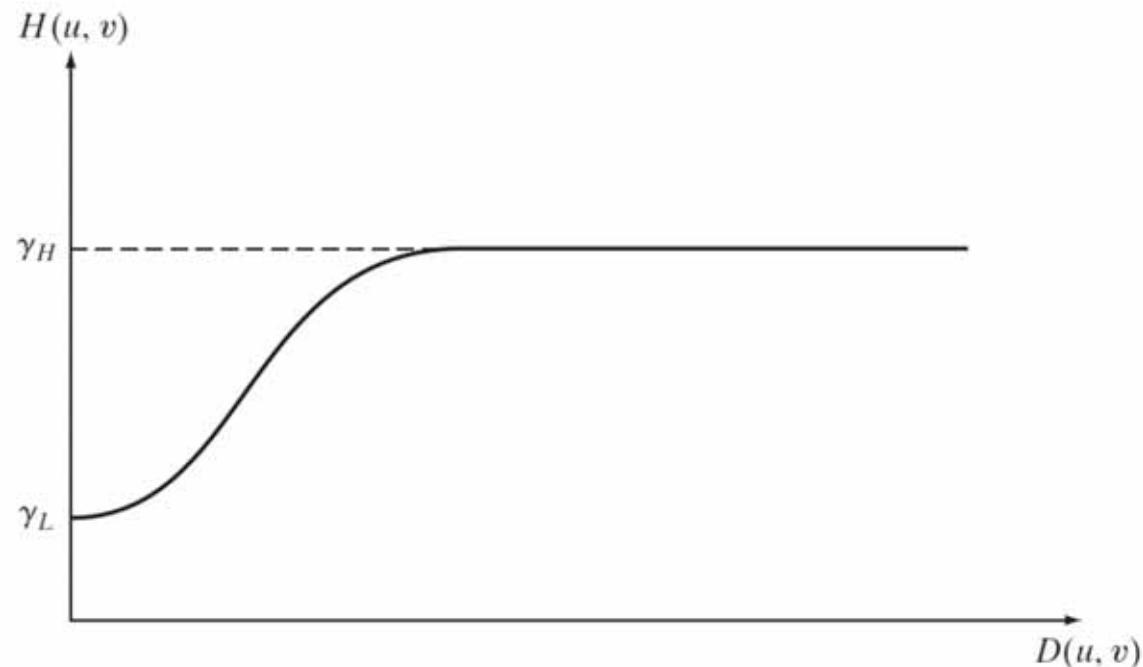




同态滤波

● 频域滤波器设计

- $\gamma_L < 1$
- 衰减低频
(照明)
- $\gamma_H > 1$
- 放大高频
(反射)



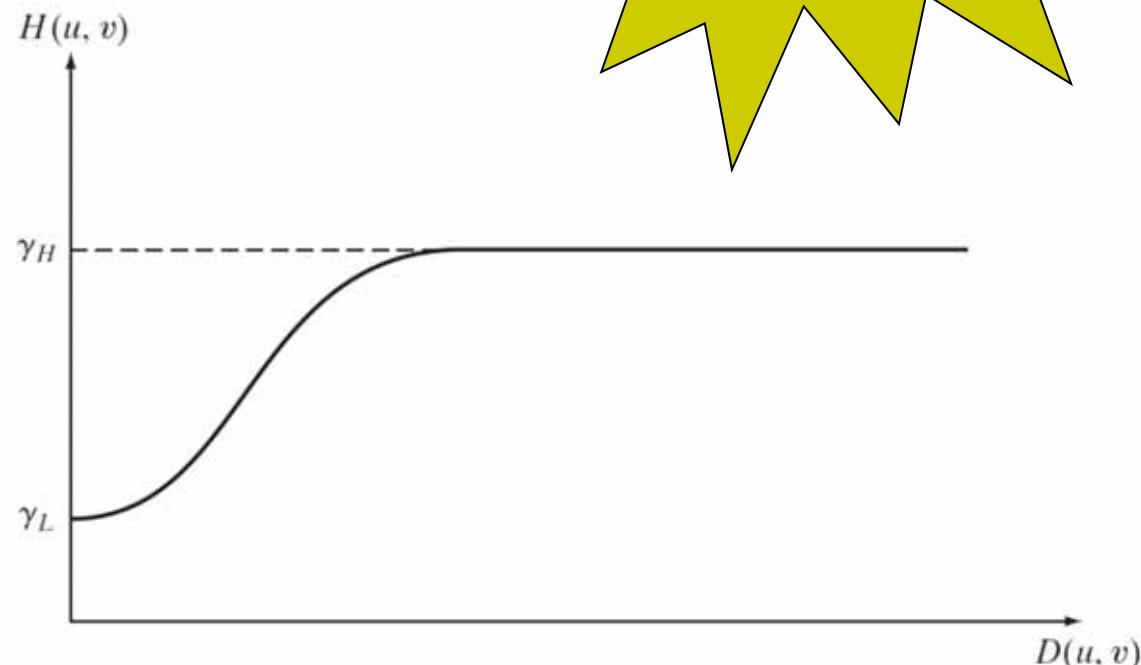
- 压缩灰度范围、增强对比度



同态滤波

- 频域滤波器设计

- $\gamma_L < 1$
- 衰减低频
(照明)
- $\gamma_H > 1$
- 放大高频
(反射)



- 实现 (基于高斯滤波器)

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[1 - e^{-c[D^2(u, v)/D_0^2]} \right] + \gamma_L$$





举例

- 两个亮点（肿瘤）导致其他地方较暗



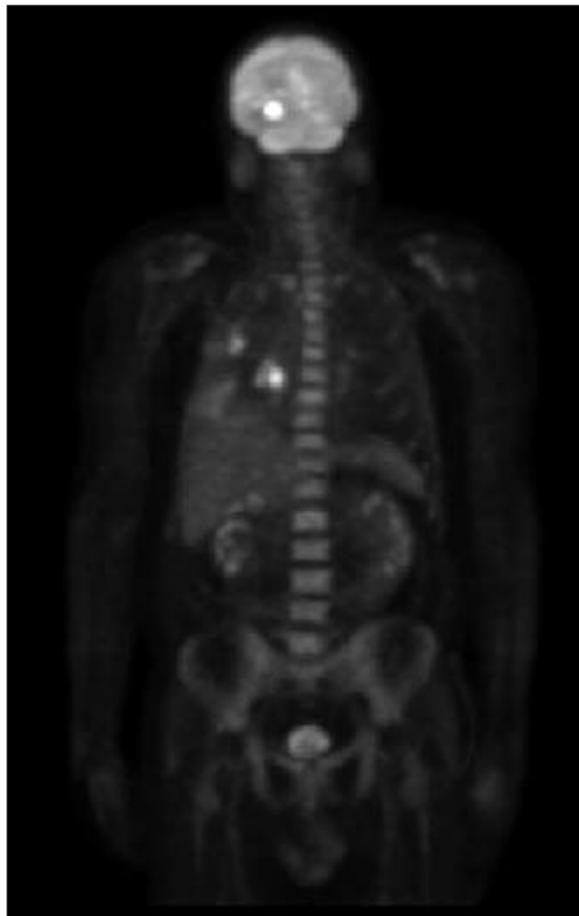


举例

- 两个亮点（肿瘤）导致其他地方较暗

- $\gamma_L = 0.25$
- $\gamma_H = 2$
- $c = 1$
- $D_0 = 80$

- 更加清晰
- 更多细节





选择性滤波

- 带阻滤波器
 - 处理特定频段
- 带通滤波器
 - 处理特定频段
- 陷波滤波器 (notch filters)
 - 处理特定区域





带阻滤波器

● 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- D_0 为截止频率
- W 是带宽
- D 为 (u, v) 到中心的距离

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$





带阻滤波器

- 理想带阻滤波器

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 巴特沃斯带阻滤波器

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$$

- 高斯带阻滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2 - D_0^2}{DW}\right]^2}$$





选择性滤波

- 带阻滤波器
 - 处理特定频段
- 带通滤波器
 - 处理特定频段
- 陷波滤波器 (notch filters)
 - 处理特定区域

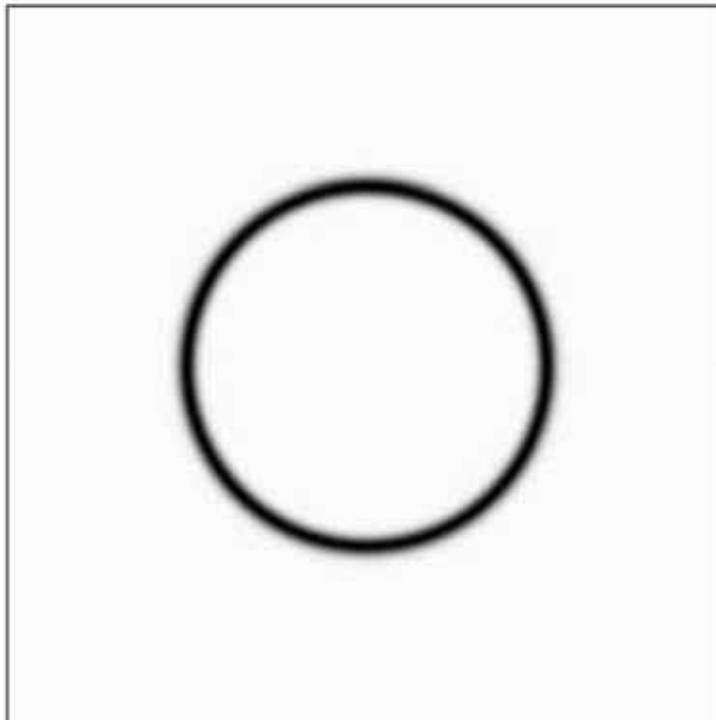




带通滤波器

- 从带阻滤波器构造带通滤波器

$$H_{\text{BP}}(u, v) = 1 - H_{\text{BR}}(u, v)$$



高斯带阻滤波器



高斯带通滤波器





选择性滤波

- 带阻滤波器
 - 处理特定频段
- 带通滤波器
 - 处理特定频段
- 陷波滤波器 (notch filters)
 - 处理特定区域





陷波滤波器

1. 处理特定区域
2. 保持对称性
 - 在 (u_0, v_0) 存在陷波， $(-u_0, -v_0)$ 也存在一个
 - 陷波带阻滤波器

$$H_{\text{NR}}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

- $H_k(u, v)$ 是中心在 (u_k, v_k) 的高通滤波器
- $H_{-k}(u, v)$ 是中心在 $(-u_k, -v_k)$ 的高通滤波器
- 中心是相对于 $(M/2, N/2)$ 而言





陷波滤波器

- n 阶巴特沃斯陷波带阻滤波器

$$H_{\text{NR}}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u, v)]^{2n}} \right] \left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u, v)]^{2n}} \right]$$

- 其中 $D_k(u, v) = [(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2]^{1/2}$

$$D_{-k}(u, v) = [(u - M/2 + u_k)^2 + (v - N/2 + v_k)^2]^{1/2}$$

- 陷波带通滤波器

$$H_{\text{NP}}(u, v) = 1 - H_{\text{NR}}(u, v)$$

- 交互式地改变DFT的局部区域

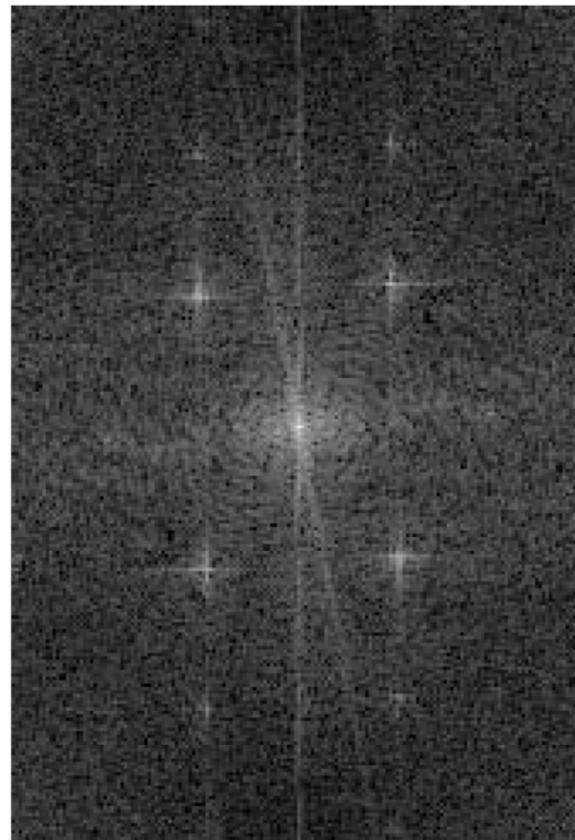
- 不进行补0填充





举例

- 莫尔模式



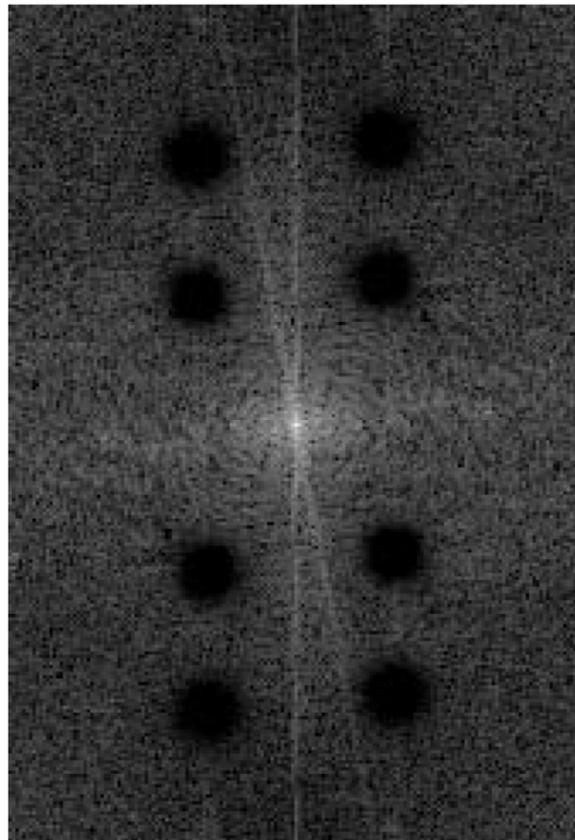
共轭对称的
频率，对应
于原图中的
周期性莫尔
模式





举例

- 应用陷波带阻滤波器



与巴特沃斯陷波带阻滤波器相乘



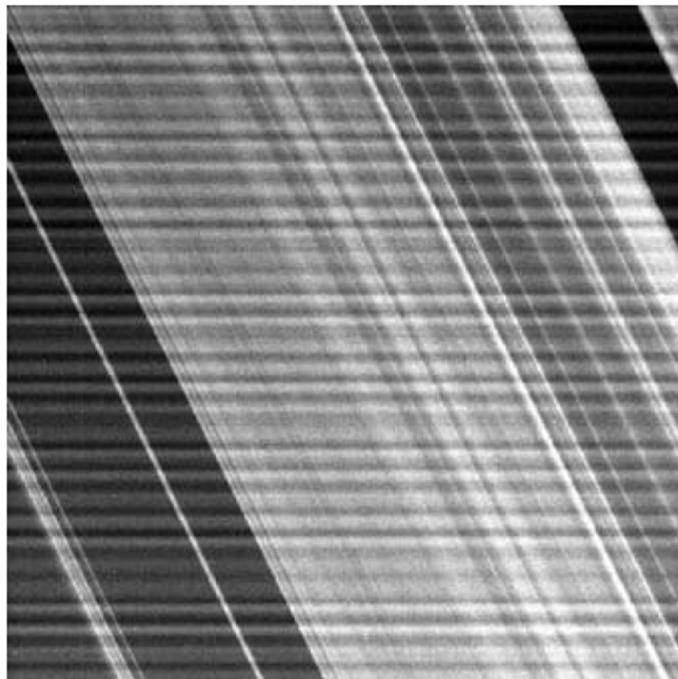
滤波后的图像



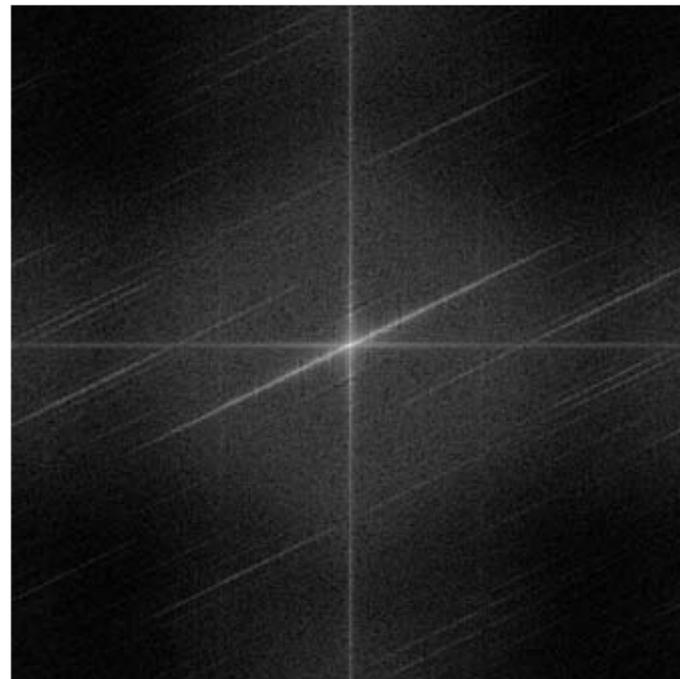


举例

- 土星环照片



垂直的正弦模式，是由加在摄像机视频信号的AC信号造成



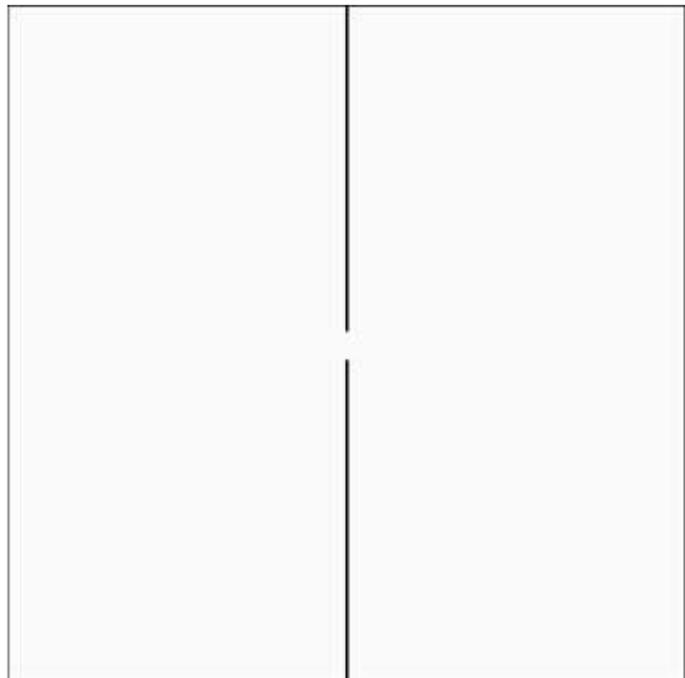
垂直轴上的能量爆发
对应于噪声



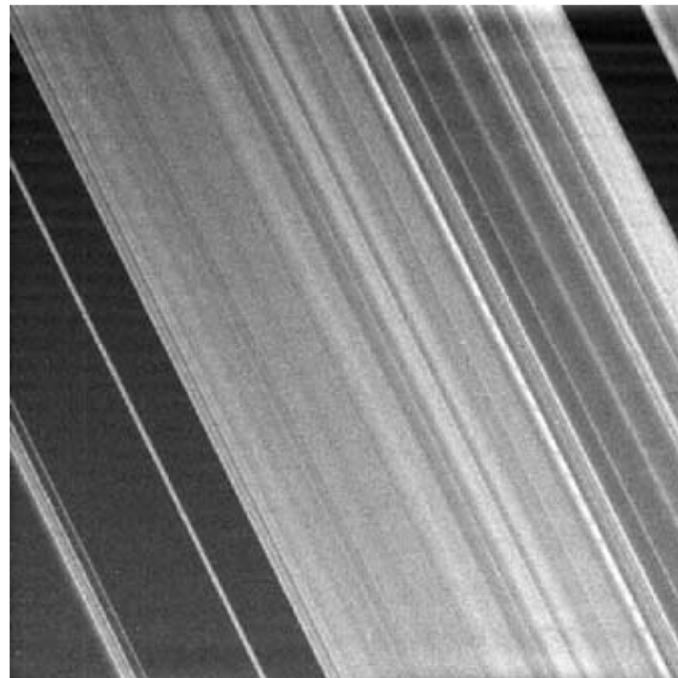


举例

- 应用陷波带阻滤波器



陷波带阻滤波器（黑色为0）



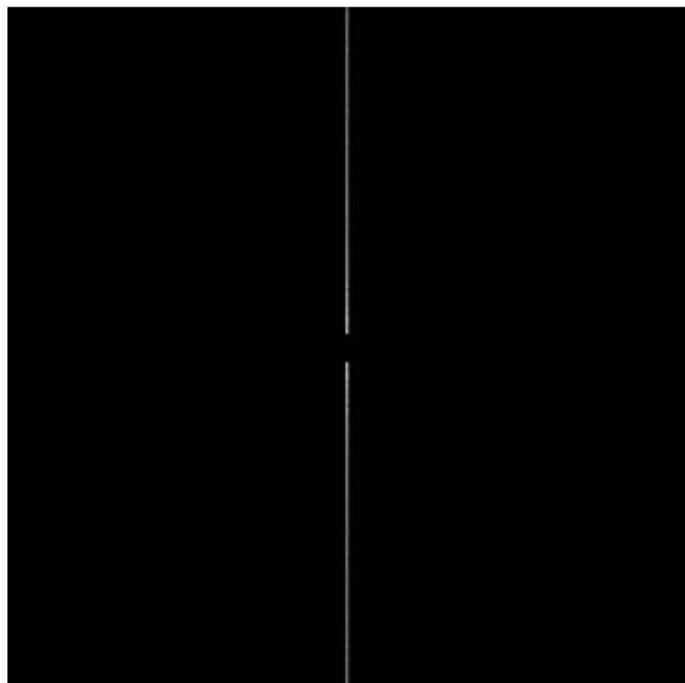
滤波后的图像



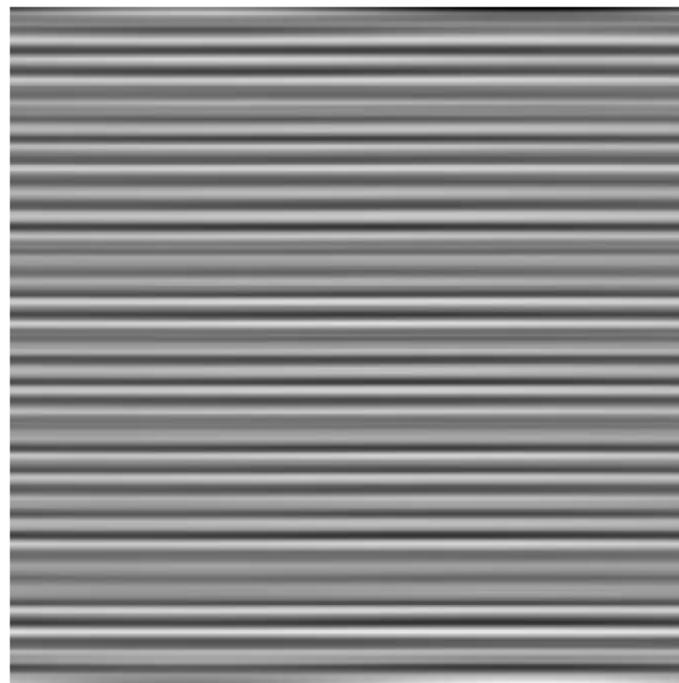


举例

- 应用陷波带阻滤波器



陷波带通滤波器（黑色为0）



噪声





提纲

- 背景
- 基本知识
- 连续傅里叶变换（一维）
- 采样
- 离散傅里叶变换（一维）
- 连续傅里叶变换（二维）
- 离散傅里叶变换（二维）
- 频率域滤波
- 实现





二维离散傅里叶变换对

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像
- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$



二维DFT的可分离性

通过1维DFT算
法计算2维DFT！

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M} \end{aligned}$$

- 其中

$$F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N}$$

- $F(x, v)$ 是 $f(x, y)$ 的第 $x + 1$ 行的1维DFT
- $F(u, v)$ 是 $F(x, v)$ 组成的列的1维DFT





通过DFT计算IDFT

- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

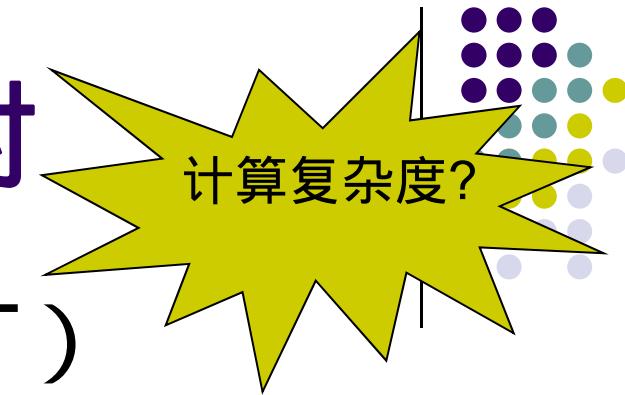
- 求共轭

$$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- 计算 $F^*(u, v)$ 的 DFT
- 对结果求共轭，除 MN



二维离散傅里叶变换对



- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像
- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$



二维离散傅里叶变换对

计算复杂度
 $O(M^2N^2)$

- 二维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $u = 0, 1, \dots, M - 1, v = 0, 1, \dots, N - 1$
- $f(x, y)$ 是大小为 $M \times N$ 的数字图像

之前的理论
无法应用

- 二维离散傅里叶反变换 (IDFT)

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

- $x = 0, 1, \dots, M - 1, y = 0, 1, \dots, N - 1$





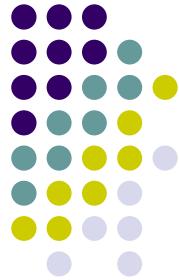
快速傅里叶变换 (FFT)

- 1维离散傅里叶变换 (DFT)

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- u 是整数
- 改写 $F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) W_M^{ux} \quad u = 0, 1, \dots, M-1$
 - 其中 $W_M = e^{-j2\pi/M}$
 - 并且假设 $M = 2^n$





逐次加倍方法 (1)

- 令 $M = 2K$, 其中 K 为正整数

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{x=0}^{2K-1} f(x) W_{2K}^{ux} \\ &= \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_{2K}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_{2K}^{u(2x+1)} \end{aligned}$$

- 可以证明 $W_{2K}^{2ux} = W_K^{ux}$

- 因此 $F(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux} + \sum_{x=0}^{K-1} f(2x+1) W_K^{ux} W_{2K}^u$





逐次加倍方法 (2)

- 定义

$$F_{\text{even}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{ux}$$

$$F_{\text{odd}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x + 1) W_K^{ux}$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, K - 1$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, K - 1$$

- 得到

$$F(u) = F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u) W_{2K}^u$$

- 注意

$$W_K^{u+K} = (e^{-j2\pi/K})^{u+K} = (e^{-j2\pi/K})^u e^{-j2\pi} = (e^{-j2\pi/K})^u = W_K^u$$

$$W_{2K}^{u+K} = (e^{-j\pi/K})^{u+K} = (e^{-j\pi/K})^u e^{-j\pi} = -(e^{-j\pi/K})^u = -W_{2K}^u$$



逐次加倍方法 (3)

- 因此

$$F_{\text{even}}(u + K) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x) W_K^{(u+K)x} = F_{\text{even}}(u)$$

$$F_{\text{odd}}(u + K) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x + 1) W_K^{(u+K)x} = F_{\text{odd}}(u)$$

- 得到

$$F(u + K) = F_{\text{even}}(u + K) + F_{\text{odd}}(u + K) W_{2K}^{u+K}$$

$$= F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u) W_{2K}^u$$

$$u = 0, 1, 2, \dots, K - 1$$





逐次加倍方法 (4)

- 计算 $F(0), \dots, F(K - 1)$

$$F(u) = F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u$$

- 对于 $F(K), \dots, F(2K - 1)$

迭代运用
该原理

$$F(u + K) = F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u)W_{2K}^u$$

- 计算2次 K 个点的DFT

$$F_{\text{even}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x)W_K^{ux} \quad F_{\text{odd}}(u) = \sum_{x=0}^{K-1} f(2x + 1)W_K^{ux}$$

- 根据公式得到 $M = 2K$ 个点的DFT





复杂度

- 复数乘法

$$m(n) = \frac{1}{2}M \log_2 M$$

- 复数加法

$$a(n) = M \log_2 M$$

- 优势

$$c(M) = \frac{M^2}{M \log_2 M} = \frac{M}{\log_2 M}$$

- 令 $M = 2^n$

$$c(n) = \frac{2^n}{n}$$





复杂度

- 优势

