任选20题

Problem 5.1

请给出DFS算法基于栈的非递归实现。

Problem 5.2

在有向图G上运行DFS算法，并且记录发现结点和离开结点的时间。对于有些边(u, v)可以观察到$v.finishTime < u.discoverTime$。满足这样条件的边可能是哪种类型的边(TE/BE/DE/CE)？请给出简要说明。

Problem 5.3

证明：一个有向图的收缩图是无环的。

Problem 5.4 ((必选))

强连通片算法中的两次深度优先遍历，分别是否可以替换为广度优先遍历？请说明原因。

Problem 5.5 ((必选))

对于无向连通图的深度优先搜索树的根节v，请找出点v是割点的充要条件，并证明你的结论。

Problem 5.6 ((必选))

对于寻找割点算法，如果$back$被初始化为$+\infty$(或者$2(n+1)$)而不是$v.dicoverTime$时，算法是否仍然正确？请说明你的理由。

Problem 5.7

无向图和有向图的连通性：

1. 请证明在任意的连通无向图G中，存在这样一个顶点v，删除v后G仍然连通；
2. 请给出一个满足如下要求的强连通有向图G：对于图中任意点v，将v从G中删除后，新产生的图不再强连通；
3. 在一个包含两个连通片的无向图中，通常可以通过添加一条边使得该无向图连通。给出一个满足如下要求的有向图，它包含两个强连通片，而只添加一条边不可以使得该图强连通。

Problem 5.8

有人提出这样一种思路，计算无向图中最小环的大小(环的大小定义为环中边的条数)：当在深度优先搜索中遇到一条BE (v, w)时，则由该BE与遍历中的一些TE组成一个从w到v的环。环的大小是$level[v] - level[w] + 1$，其中一个顶点的$level$值是指在DFS树中，从根顶点到该顶点的路径长度。以上思想可以表述成下面的算法：

- 执行一次深度优先搜索，记录每个顶点的$level$值；
- 每当遇到一条回边，计算此时得到的环的长度，如果它比当前最小的环的长度还要小，则更新当前最小环长度为该长度。

通过给出一个反例来证明以上算法并不能保证总是正确，并给出简要的说明。

Problem 5.9

给定无向图$G = (V, E)$，请设计一个线性时间的算法，判定是否可以为G中的边添加方向，使得图中每个顶点的入度至少为1。若存在，算法需给出每条边的方向。

Problem 5.10
针对以下任务，给出一个线性时间算法：

- 输入：一个有向无环图G
- 问题：G中是否存在一条有向路径，它恰好访问每个顶点一次？

Problem 5.11
在一个有向无环图G中，进行拓扑排序的另一种方法是：重复地寻找一个入度为0的顶点，将该顶点输出，并将该顶点及其所关联的出边从图中删除。解释如何来实现这一想法，并保证它的运行时间为线性时间。如果G中包含回路的话，这一算法在运行时会发生什么？

Problem 5.12 (顶点间的"one-to-all"可达性问题(必选))
给定一个有向图G，有n个顶点，m条边。

1. 请设计一个$O(m+n)$的算法来判断一个给定的顶点s能否到达图中所有的其它顶点；
2. 请设计一个$O(m+n)$的算法来判断图G中是否存在一个顶点，它可以到达图中所有的其他顶点。

Problem 5.13 ((必选))
给定一个有向图G，我们定义一个节点v的影响力值$impact(v)$为图中从v可达的顶点个数(不包含v自身)。

1. 请设计一个算法，找出图中影响力值最小的点；
2. 请设计一个算法，找出图中影响力最大的点。

Problem 5.14
现有一套计算机科学的课程体系，包含n门必修课。这些必修课之间有依赖关系，可用有向图G来表示：G有n个顶点，分别对应n门必修课；G有m条边，若顶点v和w之间存在一条从v指向w的边，当且仅当v是w的先修课程。一门必修课的持续时间为一个学期。我们假设学生一个学期可以修任意数目的课程。请设计一个线性时间复杂度的算法来计算修完所有n门课程所需的最少学期数。

Problem 5.15
某市警察局为该市制定的交通规则规定所有的街道都是单行线。市长认为从市内的任一十字路口出发都要有一条合法的路线能够到达任一其他的十字路口，不过该主张还未得到反对派的支持。因此需要设计一个计算机程序，以确定市长的主张是否正确。然而，市内选举在即，所剩时间无几，只能允许设计一个线性时间算法。

1. 从图论的观点描述该问题，并说明为什么该问题能够在线性时间内解决；
2. 假定现在事实证明市长最初的观点是错误的。她随后又提出了一个妥协方案：如果你驱车从市政厅出发，沿着单行街道前进，那么不管你到哪里，总会有一条路线让你合法地驶回市政厅。将该妥协方案描述成一个图论问题，并设计一个线性时间的算法来验证该方案的正确性。

Problem 5.16 (小孩排队问题(必选))

1. 将n个捣蛋的小孩面朝前排成一队。输入m条信息"i恨j"。如果i恨j，则i不能排在j的后面某个位置，否则i会向j扔东西。请设计一个算法，在$O(m+n)$时间内将小孩排成一队，或者判定不存在符合条件的排队方法；

2. 将n个捣蛋的小孩排成多行。如果i恨j，则i所在的行号要小于j所在的行号。设计一个算法，找出所需要的最少行数，或者判断不存在满足要求的排法。

Problem 5.17 (2-SAT问题)
给定一个子句集合，其中每个子句是两个文字(一个文字是一个布尔变量或是一个布尔变量的取反)间的或(OR)操作。请设计一个算法，为每个变量赋值TRUE或者FALSE，使得所有的子句都被满足，也就是说使得在每个子句中至少存在一个取值为TRUE的文字。例如，对于下面的例子：

$$(x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee x_4)$$

如下赋值能使所有子句都满足：分别将x_1、x_2、x_3和x_4赋值为TRUE、FALSE、FALSE和TRUE。

1. 该2SAT问题实例是否存在其他的满足赋值？如果存在，找到它们；
2. 给出一个含有4个变量的2SAT问题实例，使得该实例不存在满足赋值。

本题的意图在于引导我们找到一种求解2SAT问题的有效方法，该方法将原问题归约成一个在有向图中寻找强连通片的图论问题。给定一个含有n个变量和m个子句的2SAT 问题实例I，并按如下要求构建一个有向图$G_I = (V, E)$：

- G_I含有$2n$个顶点，每个顶点对应一个变量或变量的取反；
- G_I含有$2m$条边，对于实例I的每一个子句$(\alpha \vee \beta)$（其中α和β是文字），G_I 中都含有一条边从α的取反指向β，以及一条边从β的取反指向α。

注意到子句$(\alpha \vee \beta)$等价于蕴涵关系$\overline{\alpha} \rightarrow \beta$或$\overline{\beta} \rightarrow \alpha$。从这个意义上讲，$G_I$记录了实例$I$中的所有蕴涵关系。

3. 构建本题给出的上述2SAT问题实例对应的有向图，并构建第2个子问题中构建的2SAT实例对应的有向图；
4. 证明如下结论：如果对于某个变量x，G_I中有一个同时包含x和$\overline{x}$的强连通片．那么实例I不存在使所有子句都满足的赋值；
5. 证明第4个子问题的逆命题：即如果G_I中不存在一个强连通片中含有一个文字及该文字的取反，则该实例I一定是可满足的；
6. 请设计一个求解2-SAT问题的线性时间算法。

Problem 5.18
请证明无向图的广度优先遍历过程中，不存在BE和DE。

Problem 5.19 (二部图(必选))
给定无向图G，能否使用深度优先搜索判断其是否为二部图？如果可以的话，你如何看待深度优先搜索和广度优先搜索(在不同情况下)的优劣关系？

Problem 5.20
请为如下问题设计一个线性时间的算法：

- 输入：一个连通的无向图G

- 问题：是否可以从G中移除一条边，使G仍然保持连通？

你能否将算法时间压缩在$O(n)$内？

Problem 5.21
给定一棵n个节点的二叉树T，

- 请设计一个$O(n)$的算法计算T的高度；
- 请设计一个$O(n)$的算法计算T的直径(图中两个节点的距离为其间最短路径的长度，图的直径为其间两点之间距离的最大值)。

Problem 5.22 ((必选))
如果二叉树的一棵子树为完美二叉树，我们称之为完美子树。任意给定一个n个节点的二叉树，请计算它的最大完美子树。(最大完美子树不一定唯一，你需要找出所有的。)

Problem 5.23
给定一棵二叉树$T = (V, E)$，其根节点为$r \in V$。当在树T中从r到v的路径经过u时，u被称为是v的祖先。我们想要通过对树进行预处理操作，使得形如“u是否是v的祖先”的查询可以在常数时间内得到答案，而预处理操作本身应该在线性时间内完成。请设计这样一个预处理算法。

Problem 5.24 ((必选))
下面四个题目是和图中的环和路径的知识相关的。这里假设图是用邻接表表示的。

1. 请分别使用DFS和BFS两类图遍历框架解决有向图和无向图上检测是否存在环的问题；
2. 算法老师声称他已经发现了判断图中是否包含环的复杂度为$O(n)$的算法，图是用邻接表来表示的。请证明算法老师提出的算法是不符合要求的；(提示：对于顶点个数n，设计一个有$\Omega(n^2)$条边的有向图，则$O(n)$的算法不能遍历图中的所有边。你可以通过改变算法不能访问的边来使得算法执行产生错误的结果。)

Problem 5.25 ((必选))
给定一个连通的无向图G，

1. 假设图中的边权值均为1。请设计一个线性时间的算法，计算G的最小生成树；
2. 假设$m = n + 10$，请设计一个线性时间的算法，计算G的最小生成树；
3. 假设图中每条边的权值均为1或2。请设计一个线性时间的算法，计算G的最小生成树。

Problem 5.26
给定一个图$G = (V, E)$和一个起始点s，BFS算法为图中的每个顶点u计算了从s到u的最短路径长度$d[u]$(路径上的边数)。在网络通信中通常还需要知道最短路径的数量。请修改BFS算法计算从s到图中每个顶点的最短路径的数量，要求算法的时间复杂度是$O(m + n)$。这个问题的求解分为两个步骤：

1. 首先在图G上运行标准的BFS算法。请说明如何利用BFS算法的执行结果产生一个新的图$G' = (V', E')$，其中$V' \subseteq V$并且$E' \subseteq E$，G'中的每条路径是G中起始顶点为s的最短路径；同时，G中起始顶点为s的最短路径都在G' 中；
2. 请说明怎样利用上面的结果来对V'中的每个顶点u求G'中从s到u的路径的数量，记为$c[u]$。

提示：在计算$c[u]$的时候要特别注意，从一个节点到另一个节点的最短路径的数量可能达到顶点个数的指数级这个量级。这意味着你的算法不能逐条产生这样的路径。另外，你需要考虑怎样能够一次统计多条最短路径。

Problem 5.27

假设你想要举办一个舞会，为此需要决定邀请什么人参加。目前共有n个人可供选择，你列出了所有人之间是否相识的关系表。你希望邀请尽可能多的人参加，但同时必须考虑以下两点：在舞会上，每个人至少可以各找到5个相识和5个不相识的人。请就此问题给出一个高效的算法，以n个人的列表及其相识关系表为输入，输出最优的被邀请客人名单，并基于变量n估算其运行时间。