Ecuaciones diferenciales ordinarias: problemas de valor inicial

Problemas de valor inicial de primer orden

En esta parte del curso nos ocuparemos de aproximar la solución $y(x)$ para un problema

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeto a $a \leq x \leq b$ y a la condición inicial $y(a) = c_0$.

• Problemas bien planteados

Definición: Se dice que una función $f(x)$ satisface la *condición de Lipschitz* en un dominio D si existe una constante K tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

para $x_1, x_2 \in D$.

Ejemplo: Muestre que $f(x, y) = xy^2$ definida para $1 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq y \leq 3$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y.

Solución: $$\begin{aligned} |f(x,y_1)-f(x,y_2)| &= |xy_1^2-xy_2^2| \\ &= |x(y_1^2-y_2^2)| = |x(y_1+y_2)(y_1-y_2)| \\ &= |x|\cdot|y_1+y_2|\cdot|y_1-y_2| \leq 2\cdot 6\cdot |y_1-y_2|, \end{aligned}$$
es decir, cumple la condición de Lipschitz con constante 12.

Teorema: Si $f(x,y)$ es continua en un dominio D y satisface la condición de Lipschitz en la variable y, entonces el problema

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = c_0$$

tiene solución única en D.

Definición: Se dice que un conjunto D es *convexo* si para cada par de puntos que pertenecen a D, el segmento de recta que los une también pertenece a D.

Teorema: Si $f(x)$ esta definida en un dominio convexo D y existe una constante K tal que

$$\left|\frac{df}{dx}\right| \leq K$$

para todo $x \in D$, entonces f satisface la condición de Lipschitz.

Definición: Dado un problema de valor inicial

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = c_0,$$

sea $\varepsilon > 0$, y sean $\delta(x)$ una función continua y ε_0 una constante tales que $|\delta(x)| < \varepsilon$ y $|\varepsilon_0| < \varepsilon$, entonces

$$\tilde{y}'(x) = f(x,y) + \delta(x), \qquad \tilde{y}(x_0) = c_0 + \varepsilon_0$$

se denomina *problema perturbado* asociado al problema original, con una perturbación menor a ε.

Observación: Asociar un problema perturbado a un problema original nos permite suponer la posibilidad de errores en la información. Se espera que a perturbaciones pequeñas (valores pequeños de ε) la diferencia entre $y(x)$ y $\tilde{y}(x)$ sea pequeña, pero no siempre es así.

Definición: Un problema de valor inicial $y'(x) = f(x,y)$ con $y(x_0) = c_0$ se dice que es *bien planteado* si tiene solución única $y(x)$ y si para cada $\varepsilon > 0$ se cumple que el problema perturbado con perturbación menor a ε tiene solución única $\tilde{y}(x)$, y existe k tal que $|y(x) - \tilde{y}(x)| < k\varepsilon$.

Observación: Nos interesan los problemas bien planteados porque...

Teorema: Si $f(x,y)$ es continua con $a \leq x \leq b$ y satisface la condición de Lipschitz en y, entonces el problema de valor inicial $y'(x) = f(x,y)$ con $y(a) = c_0$ es bien planteado.

Ejemplo: Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$y'(x) = y - x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 1.$$

Dado que $f(x,y) = y - x^2 + 2x$ es continua en un dominio convexo y que

$$\left| \frac{\partial (y - x^2 + 2x)}{\partial y} \right| = 1,$$

por los teoremas anteriores es Lipschitz y por tanto es bien planteado.

• Método de Euler

Supongamos que tenemos un problema bien planteado

$$y'(x) = f(x,y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = c_0.$$

El método de Euler es el enfoque más básico. Es la base de métodos más sofisticados que normalmente se usan en la práctica.

En lugar de obtener una aproximación a la solución $y(x)$, se obtendrán aproximaciones a varios valores, que llamaremos *puntos de malla*. Con esos valores, el resto se pueden obtener por interpolación.

Establecemos los puntos de malla equiespaciados en $[a,b]$: sea N un número natural y sea $h = \frac{b-a}{N}$ (el cual es llamado *tamaño de paso*), entonces los puntos de malla están dados por

$$x_i = a + ih, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

De la aproximación de la derivada tenemos que

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h},$$

pero $x_i + h = x_{i+1}$ y $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ así que sustituyendo y despejando

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h\, f(x_i, y(x_i)).$$

Denotemos w_i a estas aproximaciones de $y(x_i)$, entonces, el método de Euler consiste en obtener estos valores mediante

$$w_0 = c_0,$$

$$w_{i+1} = w_i + h\, f(x_i, w_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1.$$

Algoritmo: Método de Euler

Entrada: Valores a, b, entero positivo N, función $f(x, y)$, valor de condición inicial c_0.

Salida: Valores w_i que aproximan $y(x)$ en $N+1$ valores de x_i.

Paso 1: Hacer $h \leftarrow \frac{b-a}{N}$;

$x \leftarrow a$;

$w \leftarrow c_0$;

devolver valores x y w.

Paso 2: Para $i = 1, 2, ..., N$ hacer

$w \leftarrow w + h\, f(x, w)$;

$x \leftarrow x + h$;

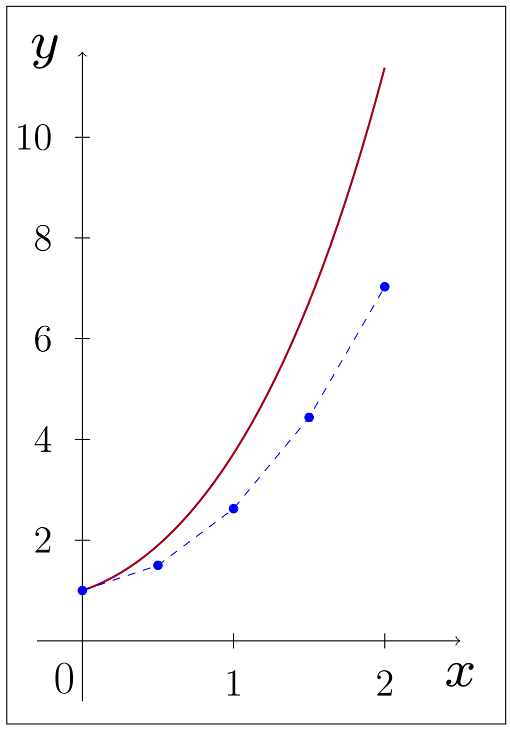
devolver valores x y w.

Paso 3: Terminar.

Ejercicio: Aproxime la solución del siguiente problema de valor inicial mediante el método de Euler con $N = 4$:

$$y'(x) = y - x^2 + 2x, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad y(0) = 1.$$

Ejercicio: La solución exacta al problema anterior es $y(x) = e^x + x^2$. Compare los valores w_i con $y(x_i)$.



Cota del error para el método de Euler

Teorema: Si f es una función continua que satisface la condición de Lipschitz con constante K, entonces las aproximaciones w_i a los valores $y(x_i)$ están acotadas por

$$|y(x_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2K}(e^{Kih} - 1),$$

donde M es una cota para $|y''(x)|$ en $a \leq x \leq b$.

• Métodos de Taylor de orden superior

En el método de Euler hemos aproximado y' mediante el polinomio de Taylor de grado 1:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) \approx y(x_i) + hy'(x_i).$$

Es de esperar que se puede obtener una mejor aproximación usando un polinomio de Taylor de grado mayor:

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i).$$

Dado que $y'(x) = f(x, y)$, entonces

$$y''(x) = f'(x, y), \ \ldots, \ y^{(n)}(x) = f^{(n\text{-}1)}(x, y),$$

con lo cual la expresión anterior puede escribirse como

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h\left[f(x_i, y(x_i)) + \frac{h}{2}f'(x_i, y(x_i)) + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{h^{n\text{-}1}}{n!}f^{(n\text{-}1)}(x_i, y(x_i))\right].$$

Con esto, el método de Taylor de orden n queda definido por:

$$w_0 = c_0,$$

y para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1$:

$$T_i = f(x_i, w_i) + \frac{h}{2}f'(x_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n\text{-}1}}{n!}f^{(n\text{-}1)}(x_i, w_i),$$

$$w_{i+1} = w_i + h\,T_i.$$

Ejercicio: Aproxime la solución del problema anterior mediante el método de Taylor de orden dos.

• Métodos Runge-Kutta

Los métodos de Taylor requieren las derivadas de $f(x,y)$. Los métodos de Runge-Kutta no tienen la necesidad de calcular y evaluar las derivadas, aunque suelen presentar mayores errores de truncamiento.

Método modificado de Euler

En este método aproximamos

$$f(x,y)+\frac{h}{2}f'(x,y)$$

mediante

$$f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}\,\frac{f(x_{i+1},y_{i+1})-f(x_i,y_i)}{h}$$

y tomando del método de Euler que $y_{i+1}\approx y_i+hf(x_i,y_i)$ queda

$$\frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_i+hf(x_i,y_i))}{2}$$

lo cual prove el siguiente método

$$w_0=c_0,$$

$$w_{i+1}=w_i+\frac{h}{2}[f(x_i,w_i)+f(x_{i+1},w_i+hf(x_i,w_i))],\qquad i=0,...,N\text{-}1.$$

Método del punto medio

Para este método aproximamos

$$f(x,y)+\frac{h}{2}f'(x,y)$$

mediante

$$f\left(x+\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{h}{2}f(x,y)\right),$$

de acuerdo a lo cual, el método del punto medio queda definido por:

$$w_0 = c_0,$$

$$w_{i+1} = w_i + h\, f\left(x_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{h}{2}f(x_i, w_i)\right), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N\text{-}1.$$

Método de Heun

En este método se usa una aproximación al polinomio de Taylor en dos variables de orden 3 para obtener el siguiente método:

$$w_0 = c_0,$$

y para $i = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$:

$$\begin{aligned} k_1 &= \tfrac{h}{3}f(x_i, w_i), \\ k_2 &= \tfrac{2h}{3}f(x_i + \tfrac{h}{3}, w_i + k_1), \\ w_{i+1} &= w_i + \tfrac{h}{4}\Big[f(x_i, w_i) + 3f(x_i + \tfrac{2h}{3}, w_i + k_2)\Big]. \end{aligned}$$

Método Runge-Kutta de orden 4

Este es un método más usado. Se basa en una aproximación al polinomio de Taylor de orden 4 para obtener el siguiente método:

$$w_0 = c_0,$$

y para $i = 0, 1, \ldots, N$-1:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_i, w_i),\\
k_2 &= h\, f(x_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{k_1}{2}),\\
k_3 &= h\, f(x_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{k_2}{2}),\\
k_4 &= h\, f(x_{i+1}, w_i + k_3),\\
w_{i+1} &= w_i + \tfrac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4].
\end{aligned}$$

Algoritmo: Método Runge-Kutta de orden 4

Entrada: Valores extremos a, b, entero positivo N, función $f(x, y)$, valor de condición inicial c_0.

Salida: Valores w_i que aproximan $y(x)$ en $N+1$ valores de x.

Paso 1: Hacer $h \leftarrow \frac{b-a}{N}$;

$x \leftarrow a$;

$w \leftarrow c_0$;

devolver valores x y w.

Paso 2: Para $i = 1, 2, ..., N$ hacer

$k_1 \leftarrow h\, f(x, w)$,

$k_2 \leftarrow h\, f(x + h/2, w + k_1/2)$,

$k_3 \leftarrow h\, f(x + h/2, w + k_2/2)$,

$k_4 \leftarrow h\, f(x + h, w + k_3)$,

$w \leftarrow w + [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]/6$;

$x \leftarrow x + h$;

devolver valores x y w.

Paso 3: Terminar.

Ejercicio: Resolver el ejercicio anterior mediante los métodos Runge-Kutta.

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Consideremos el siguiente sistema de problemas de valor inicial:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), & y_1(a) &= c_1, \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), & y_2(a) &= c_2, \\
&\vdots & &\vdots \\
\frac{dy_m}{dx} &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), & y_m(a) &= c_m,
\end{aligned}
$$

para $a \leq x \leq b$. La solución consiste en encontrar m funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . . , $y_m(x)$ que satisfagan cada una de las ecuaciones y las condiciones iniciales dadas.

Teorema: Si cada función f_j es continua y satisface la condición de Lipschitz en $a \leq x \leq b$ y $-\infty < y_j < \infty$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales anterior tiene solución única.

Los métodos para resolver estos sistemas de ecuaciones diferenciales son generalizaciones de los vistos antes. Por ejemplo, el método de Runge-Kutta de orden 4 se adapta como sigue:

Sea N un número entero y $h = \frac{b-a}{N}$, con lo que

$$x_i = a + i\,h, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Denotamos con w_{ij} la aproximación a $y_j(x_i)$. Entonces:

$$w_{0j} = c_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

y para $i = 0, 1, \ldots, N$-1 hacemos para cada $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\begin{aligned}
k_{1j} &= h\, f_j(x_i, w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{im}),\\
k_{2j} &= h\, f_j(x_i + \tfrac{h}{2}, w_{i1} + \tfrac{k_{11}}{2}, w_{i2} + \tfrac{k_{12}}{2}, \ldots, w_{im} + \tfrac{k_{1m}}{2}),\\
k_{3j} &= h\, f_j(x_i + \tfrac{h}{2}, w_{i1} + \tfrac{k_{21}}{2}, w_{i2} + \tfrac{k_{22}}{2}, \ldots, w_{im} + \tfrac{k_{2m}}{2}),\\
k_{4j} &= h\, f_j(x_i + h, w_{i1} + k_{31}, w_{i2} + k_{32}, \ldots, w_{im} + k_{3m}),\\
w_{i+1,j} &= w_{ij} + \tfrac{1}{6}[k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}].
\end{aligned}$$

El siguiente algoritmo implementa esta idea:

Algoritmo: Método Runge-Kutta de orden 4 para sistema de problemas de valor inicial

Entrada: Valores extremos a, b, entero positivo N, funciones f_j, valores de condición inicial c_j.

Salida: Valores w_{ij} que aproximan $y_j(x_i)$ en los $N+1$ valores de x.

Paso 1: Hacer $h \leftarrow \frac{b-a}{N}$;

$x \leftarrow a$.

Paso 2: Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer

$w_j \leftarrow c_j$.

Paso 3: Devolver valores x y w_j.

Paso 4: Para $i = 1, 2, ..., N$ hacer pasos 5 a 11:

Paso 5: Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer

$k_{1j} \leftarrow h\, f_j(x, w_1, w_2, \dots, w_m)$.

Paso 6: Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer

$k_{2j} \leftarrow h\, f_j(x + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{k_{11}}{2}, w_2 + \frac{k_{12}}{2}, \dots, w_m + \frac{k_{1m}}{2})$.

Paso 7: Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer

$k_{3j} \leftarrow h\, f_j(x + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{k_{21}}{2}, w_2 + \frac{k_{22}}{2}, \dots, w_m + \frac{k_{2m}}{2})$.

Paso 8: Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer

$k_{4j} \leftarrow h\, f_j(x + h, w_1 + k_{31}, w_2 + k_{32}, \dots, w_m + k_{3m})$.

Paso 9: Para $j = 1, 2, \dots, m$ hacer

$w_j \leftarrow w_j + [k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}]/6$;

Paso 10: Hacer $x \leftarrow x + h$.

Paso 11: Devolver los valores de x y w_j

y regresar al paso 4.

Paso 12: Terminar.

Problema de valor inicial de orden superior

Muchos problemas importantes se modelan mediante un problema de valor inicial cuya ecuación diferencial es de un orden mayor que 1.

El problema de valor inicial de orden m

$$y^{(m)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(m\text{-}1)}), \qquad a \leq x \leq b,$$

con condiciones iniciales

$$y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2, \quad \dots, \quad y^{(m\text{-}1)}(a) = c_m,$$

se puede convertir en un sistema de ecuaciones como el de la sección anterior y resolver.

En efecto, si definimos $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$, ..., $u_m(x) = y^{(m\text{-}1)}(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dx} &= u_2, \\
\frac{du_2}{dx} &= u_3, \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
\frac{du_{m\text{-}1}}{dx} &= u_m, \\
\frac{du_m}{dx} &= y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m\text{-}1)}) = f(x, u_1, u_2, \dots, u_m),
\end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $u_1(a) = c_1$, $u_2(a) = c_2$, ..., $u_m(a) = c_m$.

Ejemplo: Transformar el siguiente problema de valor inicial a un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$y'' - 2y' + 4y = 4e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$$

Solución: Sea $u_1(x) = y(x)$ y $u_2(x) = y'(x)$. Entonces el problema se transforma en

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), & u_1(0) &= 1, \\ u_2'(x) &= 4e^{2x} - 4u_1(x) + 2u_2(x), & u_2(0) &= 2. \end{aligned}$$

Ejercicio: Resolver el problema de valor inicial anterior mediante el algoritmo Runge-Kutta de orden 4.

Ejercicio: La solución al problema anterior es $y = e^{2x}$. Compare los resultados con los valores exactos.

Ecuaciones diferenciales ordinarias: problemas de valor en la frontera

Problemas de valor en la frontera de segundo orden

En esta parte del curso nos ocuparemos de aproximar la solución $y(x)$ para un problema

$$y''(x) = f(x, y, y')$$

sujeto a $a \leq x \leq b$ y a las condición de prontera $y(a) = c_0$ y $y(b) = c_1$.

Problema lineal de valor en la frontera

Definición: Se dice que la ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$ es *lineal* si existen funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x).$$

Teorema: Si $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ y $q(x) > 0$ en $[a, b]$, entonces el problema

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad y(a) = c_0, \quad y(b) = c_1$$

tiene solución única.

Método de diferencias finitas

Sea N un número natural y sea $h = \frac{b-a}{N}$, entonces los puntos de malla están dados por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

De la aproximación de tres puntos de la primera y segundas derivadas tenemos que

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h},$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2},$$

con lo que la ecuación diferencial en los puntos de malla interiores queda

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x)\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + q(x)y + r(x).$$

Denotando w_i a las aproximaciones de $y(x_i)$ y reorganizando la ecuación, se tiene que para $i = 1, 2, \ldots, N-1$

$$[1 - \tfrac{h}{2}p(x_i)]w_{i+1} - [2 + h^2 q(x_i)]w_i + [1 + \tfrac{h}{2}p(x_i)]w_{i-1} = h^2 r(x_i)$$

y para los valores de la frontera

$$w_0 = c_0, \quad w_N = c_1,$$

lo cual resulta en un sistema de ecuaciones lineales tri-diagonal que tiene solución única si $q(x) \geq 0$ y $p(x) < \frac{2}{h}$ para todo x en $[a, b]$.

Algoritmo: Diferencia finita (lineal)

Entrada: Valores extremos a y b, condiciones de frontera c_0 y c_1, entero $N \geq 3$, funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$.

Salida: Valores w_i que aproximan $y(x_i)$.

Paso 1: Hacer $h \leftarrow \frac{b-a}{N}$ y $x \leftarrow a$.

Paso 2: Para $i = 1, ..., N\text{-}1$ hacer

$x \leftarrow x + h$;

$a_i \leftarrow 2 + h^2 q(x)$;

$b_i \leftarrow 1 + (h/2)p(x)$;

$d_i \leftarrow -h^2 r(x)$.

Paso 3: Hacer $d_1 \leftarrow d_1 + b_1 c_0$ y $d_{N\text{-}1} \leftarrow d_{N\text{-}1} - (b_{N\text{-}1} - 2)c_1$.

Paso 4: Hacer $\ell_1 \leftarrow a_1$;

$u_1 \leftarrow (b_1 - 2)/\ell_1$;

$z_1 \leftarrow d_1/\ell_1$.

Paso 5: Para $i = 2, ..., N\text{-}1$ hacer

$\ell_i \leftarrow a_i + b_i u_{i\text{-}1}$;

$u_i \leftarrow (b_i - 2)/\ell_i$;

$z_i \leftarrow (d_i + b_i z_{i\text{-}1})/\ell_i$.

Paso 6: Hacer $u_{N\text{-}1} \leftarrow 0$, $w_0 \leftarrow c_0$ y $w_N \leftarrow c_1$.

Paso 7: Para $i = N\text{-}1, ..., 1$ hacer $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$.

Paso 8: Para $i = 0, ..., N$ hacer $x = a + ih$ y devolver x con w_i.

Paso 9: Terminar.

Problema no lineal de valor en la frontera

Para el problema general

$$y''(x) = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = c_0, \ y(b) = c_1,$$

en que $f(x, y, y')$ no es lineal, el desarrollo para el método de diferencias finitas es el mismo.

Sea N un número natural, $h = \frac{b-a}{N}$ y $x_i = a + ih$ para cada $i = 0, 1, \ldots, N$. Considerando las aproximaciones de la primera y segunda derivadas $y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}$ y $y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$, y denotando con w_i a las aproximaciones de $y(x_i)$, la ecuación diferencial en los puntos de malla interiores queda

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right)$$

con los valores de frontera $w_0 = c_0, \quad w_N = c_1$.

La diferencia con el desarrollo anterior es que el sistema de ecuaciones que se genera no es lineal, por lo que debe usarse un método iterativo para su solución.

Algoritmo: Diferencia finita (no lineal)

Entrada: Valores extremos a y b, condiciones de frontera c_0 y c_1, entero $N \geq 3$, función $f(x, y, y')$, la derivada parcial de f respecto a y $f_y(x, y, y')$, la derivada parcial de f respecto a y' $f_{y'}(x, y, y')$, tolerancia ε y número máximo de iteraciones M.

Salida: Valores w_i que aproximan $y(x_i)$.

Paso 1: Hacer $h \leftarrow \frac{b-a}{N}$ y $x \leftarrow a$.

Paso 2: Para $i = 0, ..., N$ hacer

$$w_i \leftarrow c_0 + i\,\frac{c_1 - c_0}{N}.$$

Paso 3: Hacer $k \leftarrow 1$.

Paso 4: Mientras $k \leq M$, hacer los pasos 5 a 13.

Paso 5: Para $i = 1, ..., N\text{-}1$ hacer

$$x \leftarrow x + h;$$
$$t \leftarrow \frac{w_{i+1} - w_{i\text{-}1}}{2h};$$
$$a_i \leftarrow 2 + h^2 f_y(x, w_i, t);$$
$$b_i \leftarrow 1 + (h/2) f_{y'}(x, w_i, t);$$
$$d_i \leftarrow w_{i+1} - 2w_i + w_{i\text{-}1} - h^2 f(x, w_i, t).$$

Paso 6: Hacer $\ell_1 \leftarrow a_1$;

$$u_1 \leftarrow (b_1 - 2)/\ell_1;$$
$$z_1 \leftarrow d_1/\ell_1.$$

Paso 7: Para $i = 2, ..., N\text{-}1$ hacer

$$\ell_i \leftarrow a_i + b_i u_{i-1};$$
$$u_i \leftarrow (b_i - 2)/\ell_i;$$
$$z_i \leftarrow (d_i + b_i z_{i\text{-}1})/\ell_i.$$

Paso 8: Hacer $u_{N\text{-}1} \leftarrow 0$.

Paso 9: Para $i = N\text{-}1, ..., 1$ hacer

$v_i = z_i - u_i v_{i+1};$

$w_i = w_i + v_i.$

Paso 10: Si $\|\mathbf{v}\| \leq \varepsilon$ hacer pasos 11 y 12.

Paso 11: Para $i = 0, ..., N$ hacer $x = a + ih$ y devolver x con w_i.

Paso 12: Terminar.

Paso 13: Hacer $k \leftarrow k + 1$ y volver al paso 4.

Paso 14: Devolver mensaje de fallo: «El procedimiento no fue exitoso» y terminar.

Observación: El problema no lineal de valor en la frontera tiene solución única en su dominio D si f, f_y y $f_{y'}$ son continuas en D, f_y y $f_{y'}$ son acotadas en D y si $f_y(x, y, y') > 0$ en D.