Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 9

DFESTS

UA | UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

TEMA 4.- TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

4.1. Señales de tiempo discreto en el dominio de la frecuencia

4.1.1. Transformada de Fourier en tiempo discreto

Para obtener la amplitud y la fase de una señal discreta, se utiliza:
si la señal es **periódica** → el Desarrollo en Serie de Fourier (DSF).
si la señal **no es periódica** → la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT)

(D.T.F.T) Discrete Time Fourier Transform

Se define como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{\varphi_x{}^{(e^{j\omega})}}$$

Transformada de Fourier de una secuencia

$e^{j\omega}$ - es la **variable en frecuencia** que indica DTFT de señales en tiempo discreto
$X(\omega)$ - es la definición en tiempo continuo
x[n] - es la señal en tiempo discreto
ω – es la frecuencia angular discreta (variable real entre –∞ y +∞)

La representación de las señales discretas en el dominio de la frecuencia es una combinación lineal de señales sinusoidales complejas, cada una con una amplitud y una fase.

La **DTFT** es la forma más útil de representar los sistemas **LTI**.
Se basa en la suma de un conjunto de señales exponenciales complejas ($e^{-j\omega n}$)

$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{\varphi_x(e^{j\omega})}$

espectro de amplitud de x[n]

espectro de fase de x[n]

$x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$

tiempo discreto

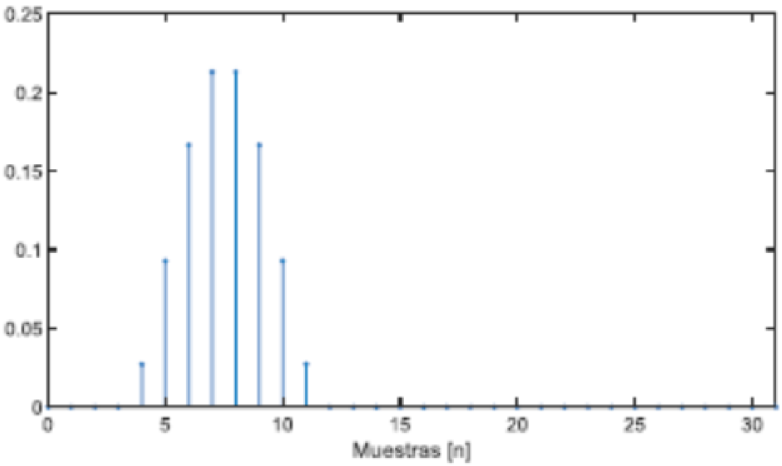
variable continua y periódica

$X(e^{j\omega})$ =DTFT {x[n]}

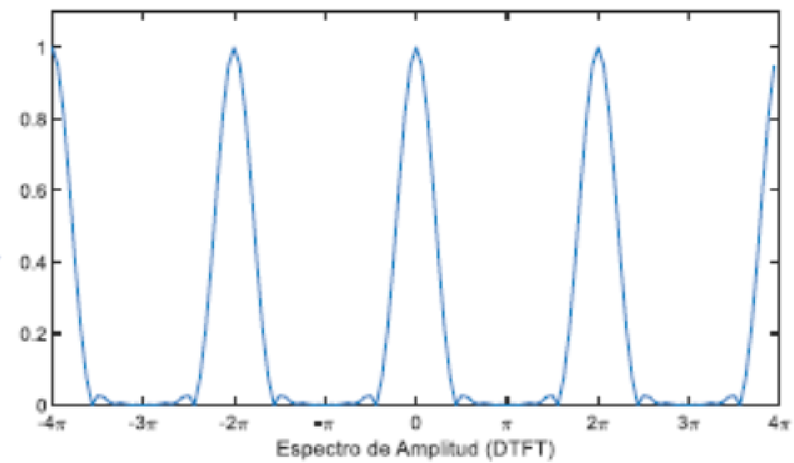
A pesar de tratarse de una transformada de una secuencia (discreta), el resultado es una función de variable continua (ω o f)

Debido a que las funciones tipo $ej\omega n$ son periódicas (exponenciales complejas), el espectro $X(ej\omega)$ de cualquier secuencia es una función periódica, de periodo 2π. Debido a esto, toda la información espectral de la secuencia quedará comprendida en un único periodo

Ejemplo



DTFT



$\boldsymbol{x[n]}$

$|\boldsymbol{X(e^{j\omega})}|$

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$$

Señal discreta **Señal continua y periódica**

Ejemplo: Calcular la DTFT de la secuencia x[n]

$$x[n] = \delta[n] + 2\,\delta(\text{n-1}) \longrightarrow \text{DTFT? } X(e^{j\omega})?$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{1} x[n]\,e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} + 2e^{-j\omega 1} = 1 + 2e^{-j\omega} =$$

$$= 1 + 2\cos(\omega) - 2\,\text{j}\,\text{sen}(\omega)$$

$$\boxed{e^{-j\,\phi} = \cos\phi \pm j\,\text{sen}\,\phi}$$

$$x[n] = \delta(n) + 2\delta[n-1] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = 1 + 2\cos(\omega) - 2j\,\mathrm{sen}(\omega)$$

(función compleja)

$$\left.\begin{aligned} |x(e^{j\omega})| &= \sqrt{(1+2\cos(\omega))^2 + (2\,\mathrm{sen}(\omega))^2} \\ \phi(e^{j\omega}) &= arctg\left(\frac{-2\sin(\omega)}{1+2\cos(\omega)}\right) \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

Para representarlos utilizaremos ordenador

$$x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) \qquad X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{DTFT}^{-1}} X[n]$$

También tenemos la **Transformada inversa de Fourier** , para volver a x[n]

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega} \cdot d\omega$$

Al referirnos a una secuencia y su transformada de Fourier, se habla de

$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ = PAR DE TRANSFORMADAS

4.1.1.1. Condición de existencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto

Para que exista $X(e^{j\omega})$ es necesario que:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} < \infty$$

Es decir, que $x[n]$ sea absolutamente sumable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

En caso contrario, hay que utilizar transformadas en el límite, usando Delta de Dirac

$$\delta(\omega) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \pi(\frac{\omega}{\tau})$$

$$\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau}\, \pi\left(\frac{\omega}{\tau}\right) d\omega = \frac{1}{\tau} \cdot \tau = 1$$

DFESTS

4.1.1.2. Aplicaciones de la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una operación matemática que transforma señales entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. Su uso facilita el tratamiento y el análisis de señales de una forma alternativa.
Es una herramienta fundamental para algunas disciplinas como la física, la ingeniería, la medicina o la acústica.

Veamos un par de ejemplos para entender mejor la importancia de la DFT:

-Una señal de audio con mucho ruido puede ser separada en sus distintas frecuencias (graves y agudos) y filtrar solo las que nos interesan, obteniendo un sonido más limpio.

- Se pueden transmitir señales en el aire a través de ondas electromagnéticas separándolas en distintas frecuencias. Esto permite utilizar todo el espectro radioeléctrico para transmitir y poder tener así en el aire señales de radio, televisión, telefonía móvil o wifi; de modo que, cada aparato electrónico escuche lo que necesita. Todos los equipos electrónicos tienen elementos que son capaces de quedarse con las frecuencias que necesitan y obviar las demás.

https://www.xataka.com/otros/alguien-ha-hecho-video-perfecto-para-todos-que-sufrimos-intentando-entender-transformada-Fourier

4.1.2. Propiedades de la transformada de Fourier de secuencias

$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ Par de transformadas conocidas

A) PROPIEDAD DE LINEALIDAD

$$x_1[n] = A\, x[n] \leftrightarrow X_1\left(e^{j\omega}\right) = A X(e^{j\omega})$$

B) INVERSIÓN EN EL TIEMPO Y CONJUGACIÓN

$$x_1[n] = x[-n] \longrightarrow X_1\left(e^{j\omega}\right) = X(e^{-j\omega})$$

$$x_2[n] = x[n]^* \longrightarrow X_2\left(e^{j\omega}\right) = X^*(e^{j\omega})$$

Si $x[n]$ es real, entonces $x[n] = x[n]^*$

C) PROPIEDAD DE SIMETRÍA

El espectro de amplitud será una función par y el espectro de fase una función impar.

$X(e^{j\omega})$ es simétrica

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right| \quad \text{simétrico par}$$

$$\phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \quad \text{simétrico impar}$$

D) DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

Retardar o adelantar la secuencia equivale, en el dominio de la frecuencia, a multiplicar por un fasor:

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$x_1[n] = x[n - n_0] \qquad X_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$

$$x_2[n] = x[n + n_0] \qquad X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{+j\omega n_0}$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \left|X_1(e^{j\omega})\right| \; e^{j\,(\phi_x(e^{j\omega})\; j\omega n_0)}$$

E) DESPLAZAMIENTO EN FRECUENCIA

x[n] $e^{j\omega_0 n}$ $\longrightarrow$ X($e^{j(\omega-\omega 0)}$)

Se desplaza la X a ω_0

Desplazar hacia adelante o hacia atrás el espectro de una secuencia equivale, a multiplicar por un fasor o modular la secuencia:

De $x[n]$ Pasamos a $x[n-n_0]$

$$x[n]e^{-j\omega_0 n} \longrightarrow X(e^{j(\omega+\omega 0)})$$

F) TEOREMA DE LA CONVOLUCIÓN

La transformada de Fourier de la convolución de dos secuencias, x[n]) e y[n] se puede calcular como el producto de sus espectros:

$$x(n) \rightarrow x(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad y(n) \rightarrow y(e^{j\omega})$$

$$x[n] * y[\mathrm{n}] \xrightarrow{\text{DTFT}} \mathrm{X}(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

en el tiempo en frecuencia

$$x[n] \cdot y[n]) \longrightarrow \mathrm{X}(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$$

A la inversa, también se verifica

G) TEOREMA DEL ENVENTANADO (se ve en prácticas)

Cuando la secuencia es infinita (o demasiado larga), se realiza un truncamiento hasta que tenga una longitud manejable. A este proceso se le conoce como enventanado.

$$\mathrm{X}(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) * Y(e^{j(\omega-\sigma)})d\sigma$$

4.1.3. Cálculo de transformadas

4.1.3.2. Espectros de algunas secuencias básicas

Para el cálculo de las transformadas, se usa:

- La definición $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$
- Par de transformadas conocidas.

Es la forma de pasar de una secuencia $x[n]$ en el **dominio del tiempo** a otra $X(e^{j\omega})$ en el **dominio de la frecuencia**

$$\text{CÁLCULO DE } X(e^{j\omega}) \begin{cases} -\ Par\ de\ transformadas \\ \\ -\ Definición\ (calcular\ la\ serie) \\ \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \end{cases}$$

1.- IMPULSO UNIDAD

La transformada de la secuencia impulso unidad es la unidad

$$x[n] = \delta[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = 1$$

$$x[n] = A\delta[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = A\,e^{-j\omega n_0}$$

Ej: $x[n] = 2\delta[n-3] \longrightarrow x(e^{j\omega}) = 2e^{-j3\omega}$

2.- SECUENCIA CONSTANTE

$x(n) = A\,; \quad \forall_n$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Ae^{-j\omega n} = +\infty$$

amplitud frecuencia

$$x[n] = A \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) =$$

$$= \cdots + 2\pi A\delta(\omega + 4\pi) + 2\pi A\delta(\omega + 2\pi) + 2\pi A\delta(\omega) + 2\pi A\delta(\omega - 2\pi) + 2\pi A\delta(\omega - 4\pi) + \cdots$$

Ej: $x[n] = 1 \longrightarrow x(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$

3.- SINUSOIDE COMPLEJA

La transformada de una sinusoide compleja es un tren de deltas de Dirac

$$x[n] = Ae^{j(\omega d n+\varphi)} = Ae^{j\varphi}e^{j\omega d n} \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = 2\pi A e^{j\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega d-2\pi k)$$

Ej: $x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow x(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

4.- SINUSOIDE REAL

La transformada de una sinusoide real es un tren de pares de deltas de Dirac

$$x[n] = A\cos(\omega d n+\varphi) = \frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j\omega d n} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j\omega d n}$$

$$\Big\downarrow \text{DTFT}$$

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\frac{A}{2}e^{j\varphi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega d-2\pi k) + 2\pi\frac{A}{2}e^{-j\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega d-2\pi k)$$

5.- EXPONENCIAL ACOTADA

$$x[n] = a^n U[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Con $|a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n =$$

$$= \frac{\overbrace{(ae^{-j\omega})^0}^{1} - \overbrace{(ae^{-j\omega})^\infty}^{0}}{1-(ae^{-j\omega})} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Se demuestra aplicando
la suma de series de potencias

También se puede calcular: $\boldsymbol{n\, a^n U[n]} \leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{ae^{-j\omega}}}{\boldsymbol{(1 - ae^{-j\omega})^2}}$

Con $|\boldsymbol{a}| < 1$, y **n** un valor

DFESTS

6.- ESCALÓN UNIDAD

$$\boxed{x[n] = U(n)} \xrightarrow{\text{DTFT}} \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)}$$

7.- SECUENCIA PERIÓDICA

$$X[n] = X[n+N_0] = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_K\, e^{j\frac{2\pi k}{N_0}n} = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_K\, e^{j\omega n} \quad ; \ \omega_k = \frac{2\pi k}{N_0} \qquad \text{(DSF\_ ES)}$$

$$C_K e^{j\omega n} \xrightarrow{\text{DTFT}} 2\pi CK \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega k - 2\pi l)$$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_K\, e^{j\frac{2\pi k}{N_0}n}} \xrightarrow{\text{DTFT}} \boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N_0-1} 2\pi\, CK \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N_0} - 2\pi l\right)}$$

8.- PULSO CUADRADO

$$\boxed{x[n] = A\Pi\left(\frac{n}{L}\right)} \xrightarrow{\text{DTFT}} \boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\omega n} = Ae^{-j\omega\frac{(L-1)}{2}} \frac{\text{sen}\left(\omega L/_{2}\right)}{\text{sen}\left(\omega/_{2}\right)}}$$

9.- SECUENCIA SINC

$$\boxed{x[n] = \frac{\omega_c}{\Pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\Pi}\right)} \xrightarrow{\text{DTFT}} \boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \pi\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega c}\right)}$$

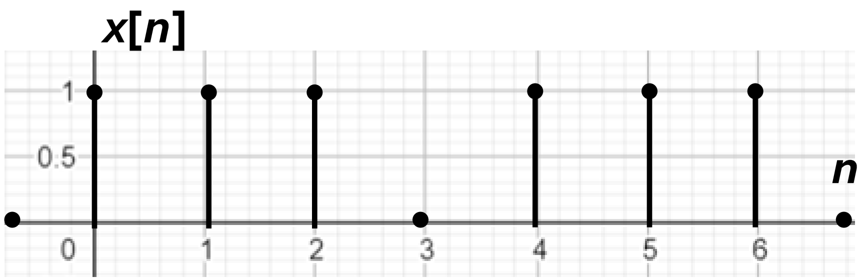
Inicio

Anchura

Apéndice 1.- PAR DE TRANSFORMADAS

TIPO DE SEÑAL	DOMINIO DEL TIEMPO	DOMINIO DE LA FRECUENCIA
1.- Impulso unidad	$x[n] = \delta[n]$	$X(e^{j\omega}) = 1$
1.1- Impulso unidad (desplazado)	$x[n] = A\delta[n \pm n_0]$	$X(e^{j\omega}) = Ae^{\pm j\omega n_0}$
2.- Secuencia constante	$x[n] = A$	$X(e^{j\omega}) = 2\pi A \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
3.- Sinusoide compleja	$x[n] = Ae^{(j\omega dn + \varphi)}$	$X(e^{j\omega}) = 2\pi A \cdot e^{j\varphi} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega d - 2\pi k)$
4.- Sinusoide real	$x[n] = A \cdot \cos(\omega dn + \varphi)$	$X(e^{j\omega}) = \pi A \cdot e^{j\varphi} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega d - 2\pi k) + \pi A \cdot e^{-j\varphi} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega d - 2\pi k)$
5.- Exponencial acotada	$x[n] = a^n \cdot U[n]$ con $\|a\| < 1$	$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
5.1.- Exponencial acotada (desplazada)	$x[n] = a^{n-1} \cdot u[n-1]$	$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
5.2.- Exponencial acotada (por n)	$x[n] = n \cdot a^n \cdot U[n]$	$X(e^{j\omega}) = \frac{a \cdot e^{-j\omega}}{(1 - a \cdot e^{-j\omega})^2}$
6.- Escalón unidad	$x[n] = U(n)$	$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
7.- Secuencia periódica	$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_K \, e^{j\frac{2\pi K}{N_0}n}$	$\mathrm{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N_0-1} 2\pi \, CK \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N_0} - 2\pi l\right)$
8.- Pulso cuadrado	$x(n) = A\Pi\left(\frac{n}{L}\right)$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\omega n} = Ae^{-j\omega\frac{(L-1)}{2}} \frac{\mathrm{sen}(\omega L/2)}{\mathrm{sen}(\omega/2)}$
9.- Secuencia sinc	$x[n] = \frac{\omega_c}{\Pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\Pi}\right)$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \pi\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega c}\right)$

Problema 1. Dada la señal $x[n]$



a) Calcular el DSF y los Ck

b) Calcular y representar la DTFT de X[n]

Para calcular la DTFT (t4) de señales periódicas, primero hay que realizar el DSF (t1).

a) Tema 1:

No = 4; $$Ck = \frac{1}{No}\sum_{n=0}^{No-1} x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k}{No}n} \quad ; \quad X[n] = \sum_{k=0}^{N_{0-1}} C_k \cdot e^{j\left(2\pi \frac{k}{N_0} n\right)}$$

$$C_0 = \frac{3}{4}\ ;\ C_1 = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}\ ;\ C_2 = \frac{1}{4}\ ;\ C_3 = \frac{1}{4}e^{+j\frac{\pi}{2}}$$

(Visto en detalle en Tema 1)

$$X[n] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{4}e^{j\pi n} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

Este es el DSF

b) Tema 4: Par de transformadas

$$x[n] = A \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Secuencia constante

$$x[n] = Ae^{j\varphi}e^{(j\,\omega_d\,n)} \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) = 2\pi A \cdot e^{j\varphi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_d - 2\pi k)$$

Sinusoid e complej a

$$X[n] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{4}e^{j\pi n} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

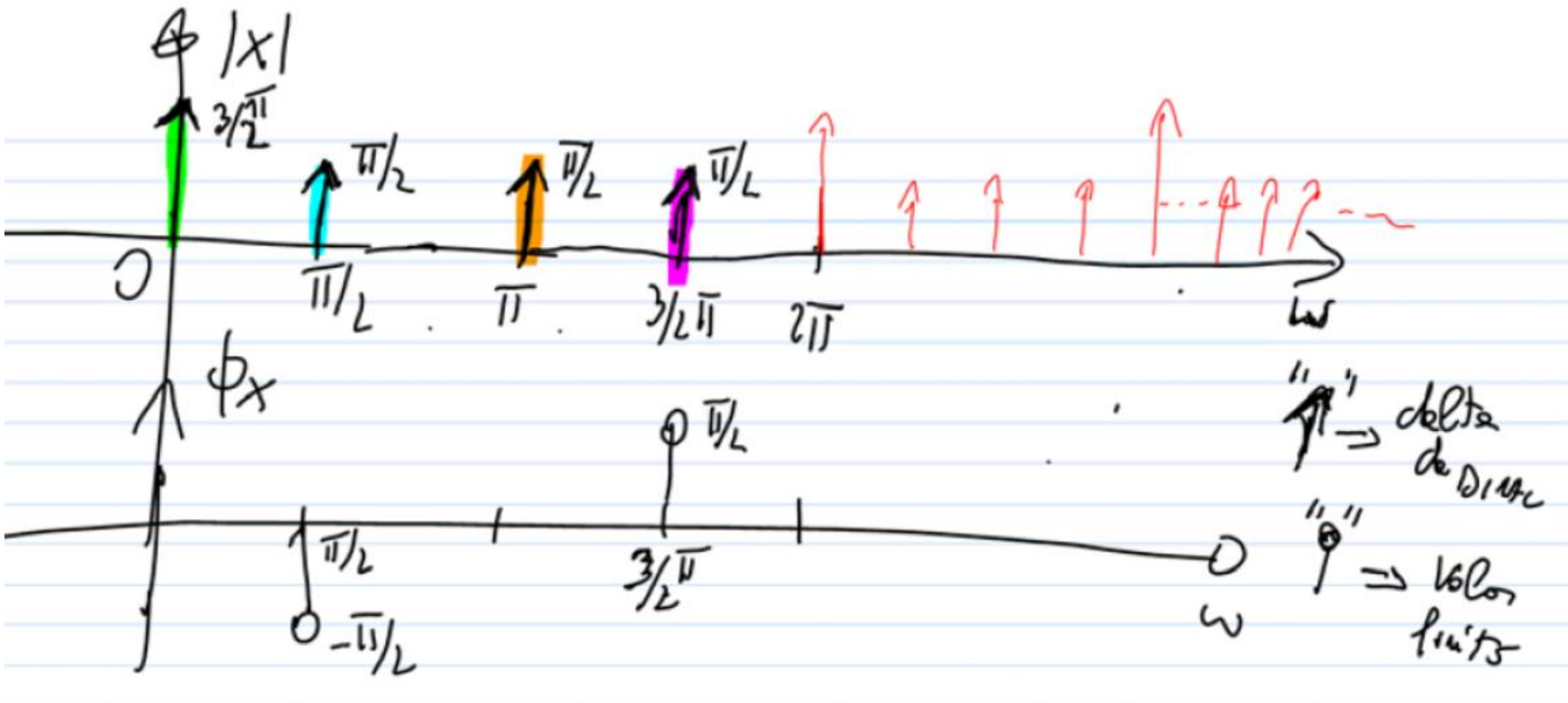
-> DSF

$$X(e^{j\omega}) = \cancel{2}\pi \frac{3}{\cancel{4}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) +$$

-> DTFT

$$\cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{4}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - 2\pi k) + \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{4}} e^{+j\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k\right)$$

A continuación, se representan los espectros de amplitud y de fase



Problema 2. Calcular la trasformada de Fourier inversa ($DTFT^{-1}$) de los siguientes espectros

a) $X(e^{j\omega}) = 1 - 2\,e^{-j\omega} + 4\,e^{j2\omega} + 3\,e^{-j6\omega}$

$$A\,\delta[\mathrm{n}] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} A$$

Impulso unidad

$$A\,\delta[\mathrm{n}+\mathrm{n}_0] = Ae^{+j\omega n_0}$$

$$A\,\delta[\mathrm{n}-\mathrm{n}_0] = Ae^{-j\omega n_0}$$

Impulso unidad desplazado

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 4\delta[n+2] + 3\delta[n-6]$$

$$\boxed{\mathbf{x[n] = 4\delta[n+2] + \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-6]}}$$

b) $X\left(e^{j\omega}\right) = \cos^2(\omega)$

Identidades trigonométricas

$$\boxed{\cos^2(\omega) = \frac{1+\cos(2\omega)}{2}}$$

$$\boxed{\cos(2\omega) = \frac{e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}}{2}}$$

$$\boxed{\mathrm{A}\,\delta[\mathrm{n}+\mathrm{n}_0] = Ae^{+j\omega n_0}}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \cos^2(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\,\omega) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}e^{j2\omega} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}e^{-j2\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}$$

$$\Updownarrow DTFT-1$$

$$\boxed{\boldsymbol{X[n] = \frac{1}{2}\;\delta[n] + \frac{1}{4}\;\delta[n+2] + \frac{1}{4}\;\delta[n-2]}}$$

DFESTS

Problema 3. Dada la ecuación en diferencias que describe el sistema LTI:

$$y[n] + \frac{1}{2}\, y[n-1] = x[n]$$

a) Calcular la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva $H(e^{j\omega})$

Ecuación en diferencias de tipo IIR y orden N=1

$$\boxed{A\,\delta[n+n_0] = Ae^{+j\omega n_0}}$$

$$Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega} \cdot Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \;; \qquad Y(e^{j\omega})\,(1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega}} \right) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

$$\boxed{\boldsymbol{H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega}}}}$$

b) Calcular la respuesta impulsiva h[n] , a partir de $H(e^{j\omega})$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega}}}$$

Exponencial acotada a la izquierda

$$\boxed{(a)^n \cdot U[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a\, e^{-j\omega}}} \qquad |a| < 1$$

En este caso, $a = -{}^{1}\!/_{2}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-j\omega}}$$

h[n] = DTFT^{-1} $\{H(e^{j\omega})\}$ *Por lo tanto:*

$$\boxed{\boldsymbol{h[n] = \left(-{}^{1}\!/_{2}\right)^{n} \cdot U[n]}}$$

DFESTS

c) Calcular la respuesta y[n] del sistema a las excitaciones:

c1: $x_1[n] = (^{-1}/_2)^n \cdot U[n]$ Calcular $y_1[n]$

$$y_1[n] = \left\langle \begin{array}{c} y_1[n] = x_1[n] * h_1[n] \\ Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) \xrightarrow{DTFT\ -1} y[n] \end{array} \right\rangle$$

$$\boxed{(a)^n \cdot U[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - a\, e^{-j\omega}}}$$

Exponencial acotada a la izquierda

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega}} \qquad X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega}}$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\boxed{x[n] = \mathrm{n} \cdot a^n \cdot U[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{a \cdot e^{-j\omega}}{(1-a\cdot e^{-j\omega})^2} \quad |a| < 1}$$

$$\boxed{x[n] = \mathrm{A}\,\delta[\mathrm{n}+\mathrm{n}_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = Ae^{+j\omega n_0}}$$

$\left(a = -\frac{1}{2}\right)$ Dividimos y multiplicamos por $-\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{e^{-j\omega}}$, para ponerlo de la forma adecuada

$$\boxed{\frac{1}{e^{-j\omega}} = \left(e^{-j\omega}\right)^{-1} = e^{+j\omega 1}}$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2} = \frac{\left(-2\,\frac{1}{-2}\cdot e^{-j\omega}\frac{1}{e^{-j\omega}}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2} = \frac{\left(-2\frac{1}{e^{-j\omega}}\right)\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2} = -2\,e^{+j\omega 1} \cdot \frac{-\frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\boxed{\mathbf{y_1}[\boldsymbol{n}] = -\mathbf{2}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\,(-{}^{1}\!/_{2})^{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{U}[\boldsymbol{n}]}$$

En el libro (pág. 38) la solución no está completa: $\mathrm{y}[n] = (n+1)\,(-{}^{1}\!/_{2})^{n}\,U[n]$

C2: $X_2[n] = \delta[n] + {}^1/_2\, \delta[n-1]$

Calcular $y_2[n]$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\, e^{-j\omega}} \longleftrightarrow h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n U[n]$$

$$y_2[n] = \left\langle \begin{array}{c} y_2[n] = x_2[n] * h_2[n] \\ \\ Y_2(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) \xrightarrow{DTFT\ -1} y_2[n] \end{array} \right\rangle$$

En este caso, la respuesta la vamos a calcular de dos formas:

En el dominio del tiempo:

$h[n]$ $x_2[n]$ $\delta[n] = 1$ por $[n-1]$

$$y_2[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n U[n] * \left(\delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1]\right) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n U[n] + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} U[n-1] = \boldsymbol{\delta[n]}$$

Sumando los dos términos, mediante una tabla

n	0	1	2	
$\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \cdot u[n]$	1	-1/2	1/4	
$1/\mathbf{2}\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{\boldsymbol{n-1}} \cdot u[n-1]$		1/2	-1/4	
	1	0	0	$\boldsymbol{\delta[n]}$

$$\boldsymbol{y_2[n] = \delta[n]}$$

En el dominio de la frecuencia:

$$X_2[n] = \delta[n] + {}^{1}/_{2}\,\delta[n-1] \longleftrightarrow X_2(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

$$\boxed{A\,\delta[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} A}$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \left(\cancel{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cancel{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}}\right) = \mathbf{1}$$

$\Updownarrow$ $DTFT - 1$

$$\boldsymbol{y_2[n] = \delta[n]}$$