Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 6

DFESTS

UA UNIVERSITAT D'ALACANT UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

TEMA 3. SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

3.1. Concepto de señal en tiempo discreto

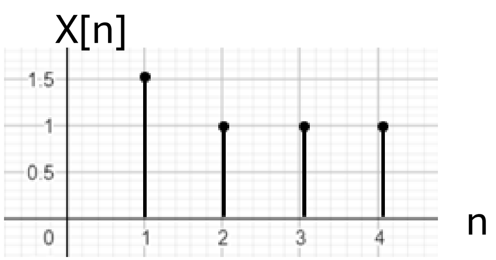
Las señales en tiempo discreto se representan mediante sucesiones de números reales o complejos denominadas **secuencias**. Pueden generarse por muestreo de una señal de tiempo continuo o ser producidas artificialmente (en definitiva, son números). Una secuencia se designa por **X[n]** y puede expresarse de las siguientes formas:

1.- TABLA.

n	0	1	2	3
X[n]	2	3	1	0

2.- LIBROS. X[n] = { -1, **2**, 3, 1, 0} (instante n=0 -> 2)

3.- GRÁFICA.



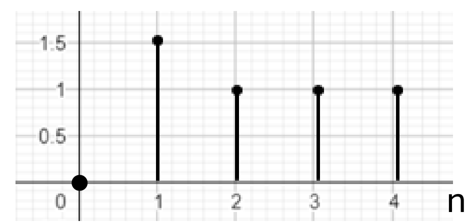
4.- MEDIANTE EXPRESIÓN. X[n] = cos $(0{,}1\pi n + \pi/4)$; $0 \le n \le 100$

5.- MEDIANTE SEÑALES o SECUENCIAS BÁSICAS. X[n]= f$[S[n]]$

3.2. Caracterización de las secuencias

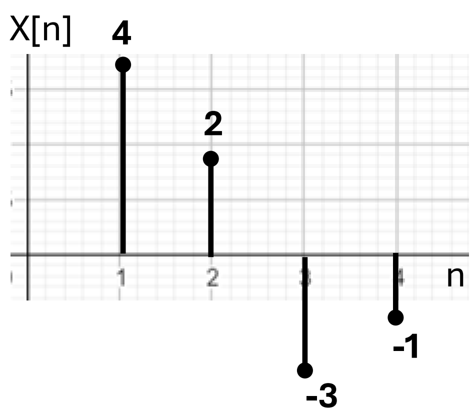
Las **magnitudes y parámetros** con los que se estudian las secuencias en el dominio del tiempo discreto son los siguientes:

1.- Duración de la señal dur { X[n] } = $m_{fin} - m_{ini} + 1$



4 – 0 +1 = 5

2.- Valor de pico de una señal



Xp = { $|Xmax|$, $|Xmin|$}

$|Xmax| = 4$

$|Xmin| = 3 = |-3| = 3$

Xp = 4 = Xmax

3.- Valor de pico a pico

Xpp = Xmax – Xmin = 4 – (-3) = 7

4.- Valor medio

$$< X[x] > \;\rightarrow\; a)\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^{N} X[n] \quad (\textit{Señal no periódica})$$

$$< X[x] > \;\rightarrow\; b)\; \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_o-1} X[n] \quad (\textit{Señal periódica})$$

5.- Potencia (valor cuadrático medio)

$$< X[n]^2 > = \mathrm{Px} = \frac{1}{N0} \sum_{n=0}^{N_o-1} X[n]^2 \quad (\textit{Señal periódica})$$

6.- Energía

$$Ex = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]^2 \quad (\textit{Señal no periódica})$$

En secuencias de duración finita o bien infinita, pero de potencia cero, se habla de energía.

SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

Secuencias definidas en términos DE POTENCIA
(**potencia finita** y energía "∞")
a) Las periódicas
b) Las de muestreo de señal periódica analógica, pero no periódicas

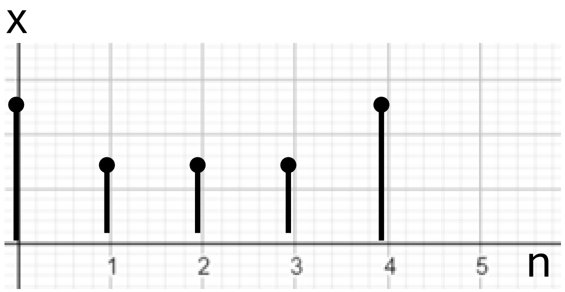
Secuencias definidas en términos DE ENERGÍA
(**energía finita** y potencia "0")
a) Las de duración finita
b) Las de duración infinita, pero que tienden a "0"

Ejemplos:

a) $X[n] = \cos(0{,}1\pi n)$ -> fd -> N_0

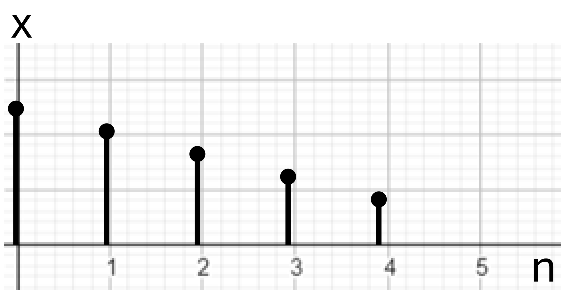
Señal periódica, es de POTENCIA

b)



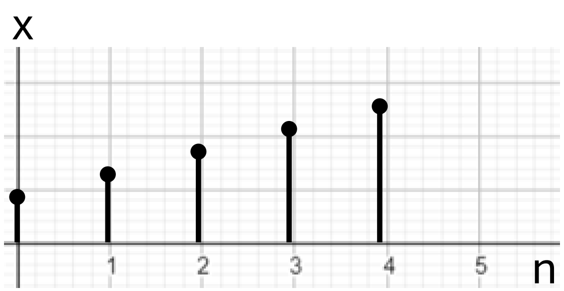
Una señal de duración finita
es de ENERGíA

c)



$(1/2)^n \cdot U[n]$ -> Tiende a "0"
es de ENERGÍA

d)



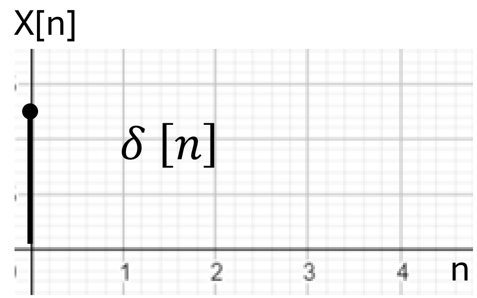
$n \cdot U[n]$ -> No es de ENERGÍA
ni de POTENCIA

3.3. Algunas secuencias básicas

1.- IMPULSO UNIDAD → ($\boldsymbol{\delta}$)

$$\boldsymbol{X[n] = \delta\,[n]}$$

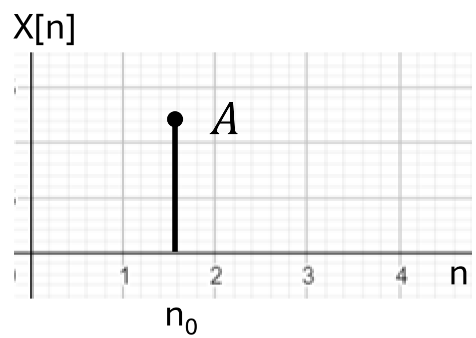
$$X[n] = \delta\,[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & resto \end{cases}$$



El impulso unidad es una señal que vale siempre cero excepto, para *n* = 0 (que vale 1).

$$X[n] = A\,\delta\,[n - n_0]$$

Amplitud Tiempo

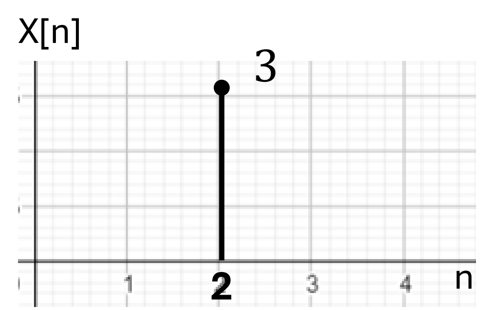


$n - n_0 = 0$

$n = n_0$

$$A\,\delta\,[n - n_0] = \begin{cases} A & n = n_0 \\ 0 & resto \end{cases}$$

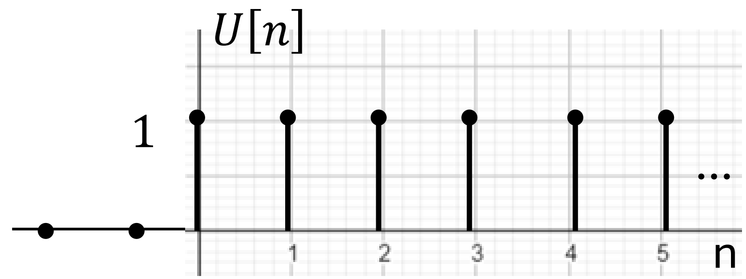
Ej: $X[n] = \mathbf{3}\delta[n - \mathbf{2}]$ ≡



DFESTS

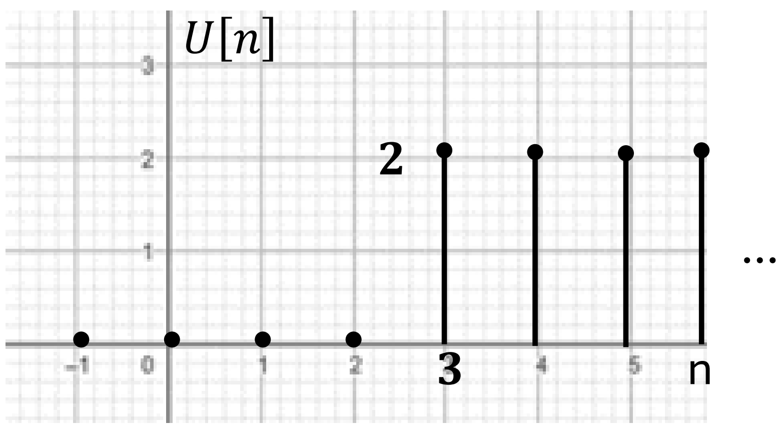
2.- ESCALÓN UNIDAD $\rightarrow$ $\boldsymbol{U[n]}$

$$\boldsymbol{X[n] = U[n]} \quad \equiv \quad \begin{Bmatrix} 1, & n \geq 0 \\ 0, & resto \end{Bmatrix}$$



Ej: $X_1[n] = \boldsymbol{2}U[n - \boldsymbol{3}]$

• • •



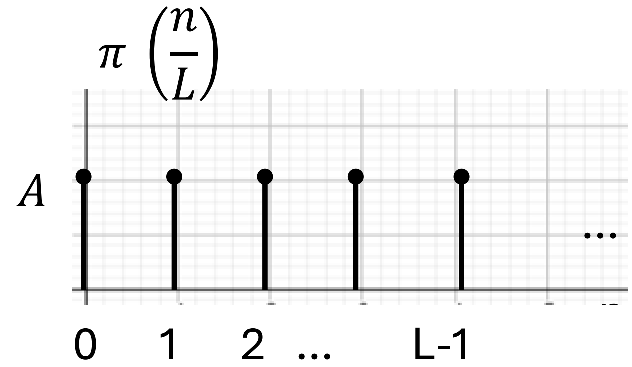
$$n - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad n = 3$$

3.- PULSO CUADRADO $\rightarrow \Pi$

Inicio temporal

$$X[n] = A\Pi\left(\frac{n}{L}\right) \equiv \begin{cases} A, & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & resto \end{cases}$$

Amplitud



Es la duración del pulso cuadrado.
Nº de muestras distintas de cero de pulso cuadrado.

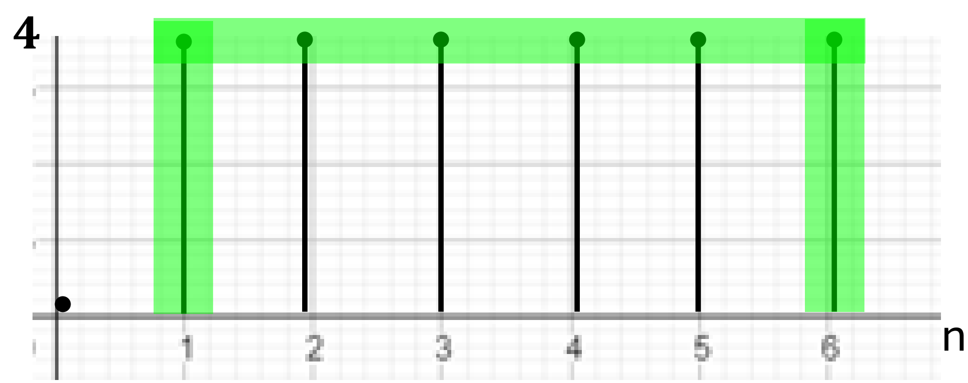
$$4\Pi\left(\frac{n-1}{6}\right)$$

$$Ej: X[n] = 4\Pi\left(\frac{n-1}{6}\right)$$

Inicio

Duración

Amplitud



4.- SEÑALES SINUSOIDALES

$$X[n] = A \cdot cos(2\pi f dn + \phi d)$$

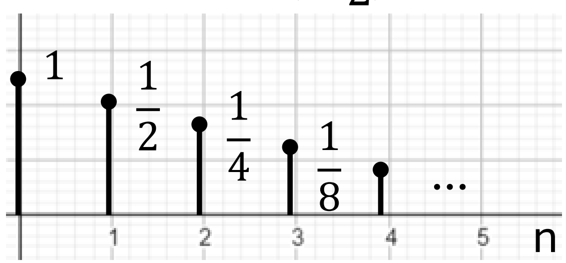
$$X[n] = A \cdot sen(2\pi f dn + \phi d)$$

$$X[n] = e^{j(\omega dn + \phi d)}$$

5.- SEÑALES EXPONENCIALES $X[n] = Z^n$

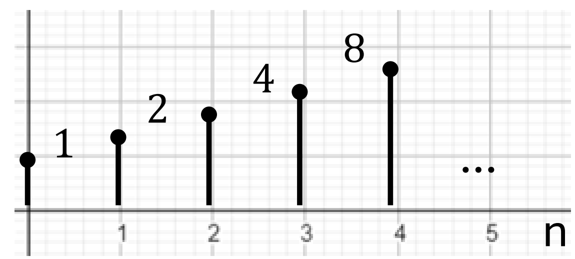
Decreciente

$|Z| < 1 \qquad (1/2)^n U[n]$



Creciente

$|Z| > 1 \quad ; \qquad 2^n \, U[n]$

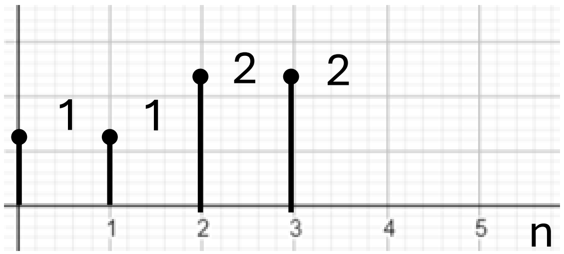


Si Z es complejo: X[n] = $Q^n \, e^{j(\omega dn)} = e^n \, (\cos(\omega dn) + j \cdot sen(\omega dn))$

3.4. Operaciones básicas con secuencias

1.- DESPLAZAMIENTOS. Pueden **retrasar** o **adelantar** la señal

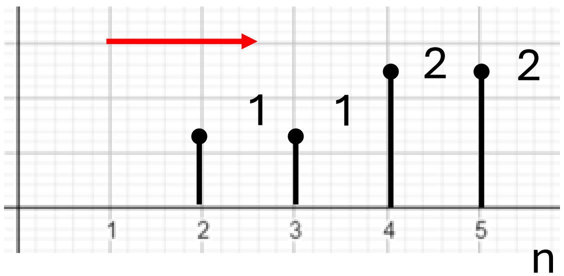
X[n]



$X[n] \rightarrow X[n - \mathbf{n_0}]$ (con $n_0 > 0$)

→ SEÑAL ORIGINAL

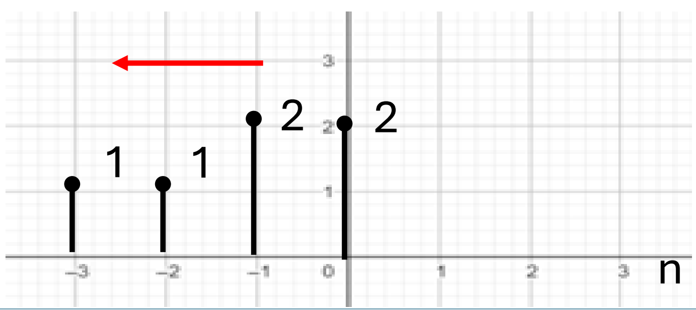
X[n-2]



$X[n] \rightarrow X[n-2]\,;\ n-2=0 \ \rightarrow \mathbf{n=2}$

→ RETRASAR LA SEÑAL

X[n+3]

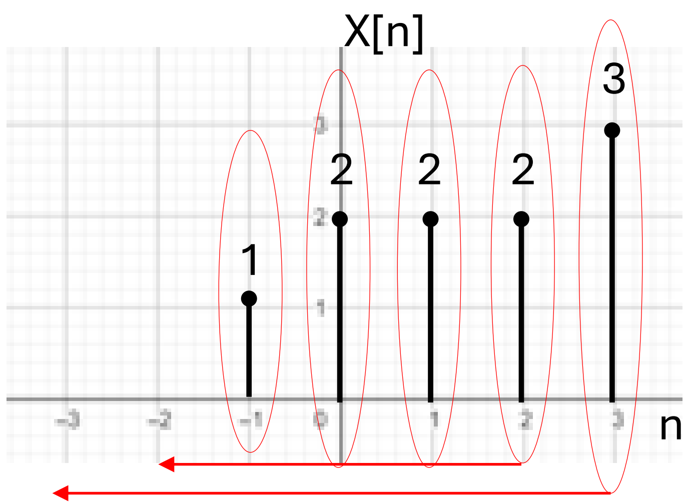


$X[n] \rightarrow X[n+3]\,;\ n+3=0 \ \rightarrow \mathbf{n=-3}$

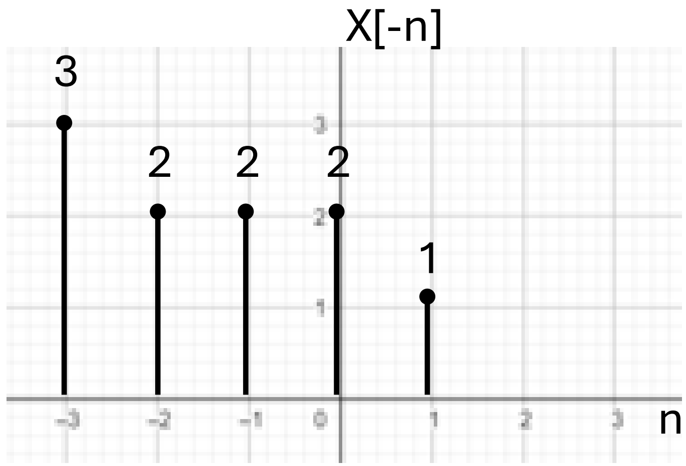
→ ADELANTAR LA SEÑAL

2.- INVERSIÓN. El resultado es una reflexión (o inversión de la señal)

$$X[n] \rightarrow X[-n]$$



$$\mathbf{X}[\boldsymbol{n}] = \delta\,[n+1] + 2\delta\,[n] + 2\delta\,[n-1] + 2\delta\,[n-2] + 3\delta[n-3]$$



$$\mathbf{X}[-\boldsymbol{n}] = 3\delta\,[n+3] + 2\delta\,[n+2] + 2\delta\,[n+1] + 2\delta\,[n] + \delta[n-1]$$

3.- INVERSIÓN Y DESPLAZAMIENTO.

$X[-n+n_0]$ → INVIERTE Y *RETRASA*. $-n+n_0$; $-n = -n_0$; $n = n_0$

$X[-n-n_0]$ → INVIERTE Y *ADELANTA*. $-n-n_0$; $-n = n_0$; $n = -n_0$

Ejemplo. Dada la siguiente señal, calcula **X[-n+2]**

$$X[n] = 2\delta\,[n+3] + 2\delta\,[n+2] + 2\delta\,[n+1] + \delta\,[n-1] + 2\delta\,[n-2] + 3\delta\,[n-3] + 4\delta\,[n-4]$$

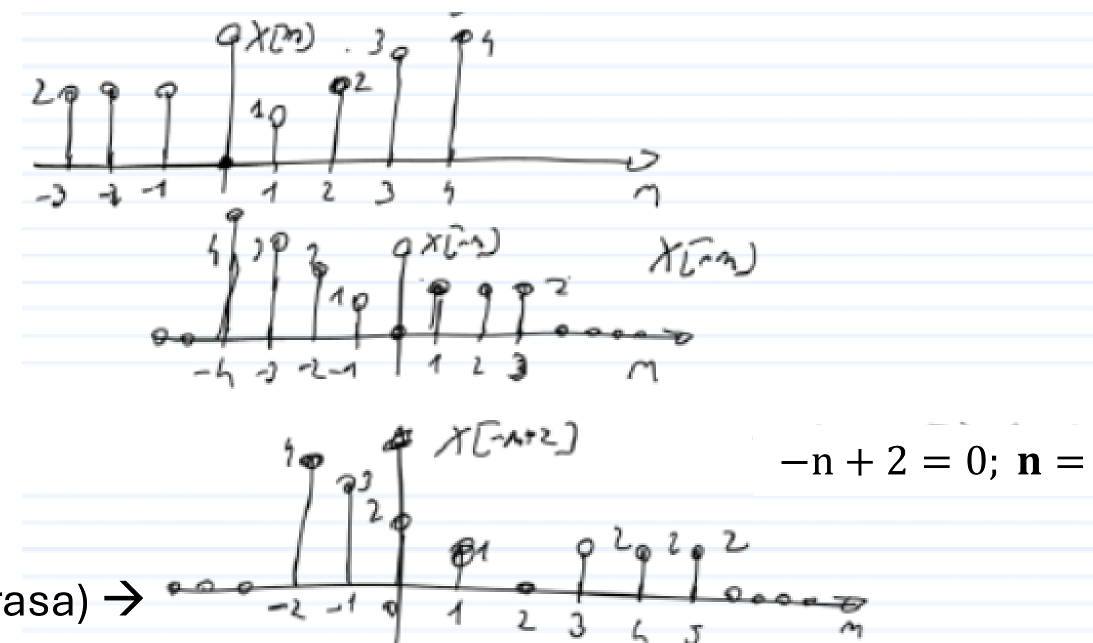
ORIGINAL →

Primero

INVERTIR →

y luego

DESPLAZAR (retrasa) →



$-n+2=0$; $\mathbf{n=2}$

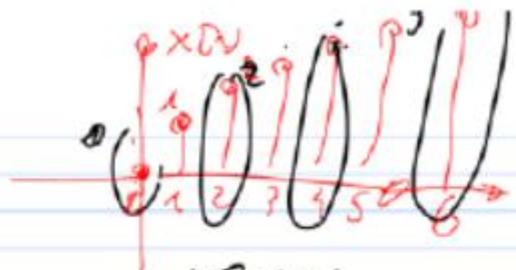
4.- ESCALADO. Se produce un escalado temporal o diezmado

$$\mathrm{X[n]} \rightarrow X[N \cdot n] \qquad N\ es\ un\ número\ (entero\ o\ racional)$$

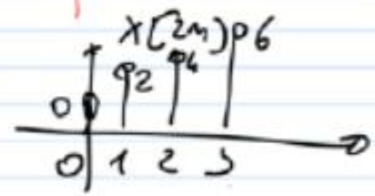
$$\mathrm{X[n]} \rightarrow X[2n] \rightarrow \boldsymbol{COMPRESIÓN}$$

X	1	2	3	4	5	6	
n	0	1	2	3	4	5	6

$x(n) \rightarrow x[2n] \xrightarrow{x[n]}$



← Original



← Escalada (un valor sí y otro no)

$$\mathrm{X[n]} \rightarrow X[0{,}5n] \rightarrow \boldsymbol{EXPANSIÓN}$$

Se introducirían valores intermedios

RESUMEN DE DESPLAZAMIENTOS

Dependiendo de si existe o no INVERSIÓN, la operación DESPLAZAMIENTO puede adoptar distintas variaciones.

A partir de la señal original **X[n] ,** se pueden dar los siguientes ejemplos:

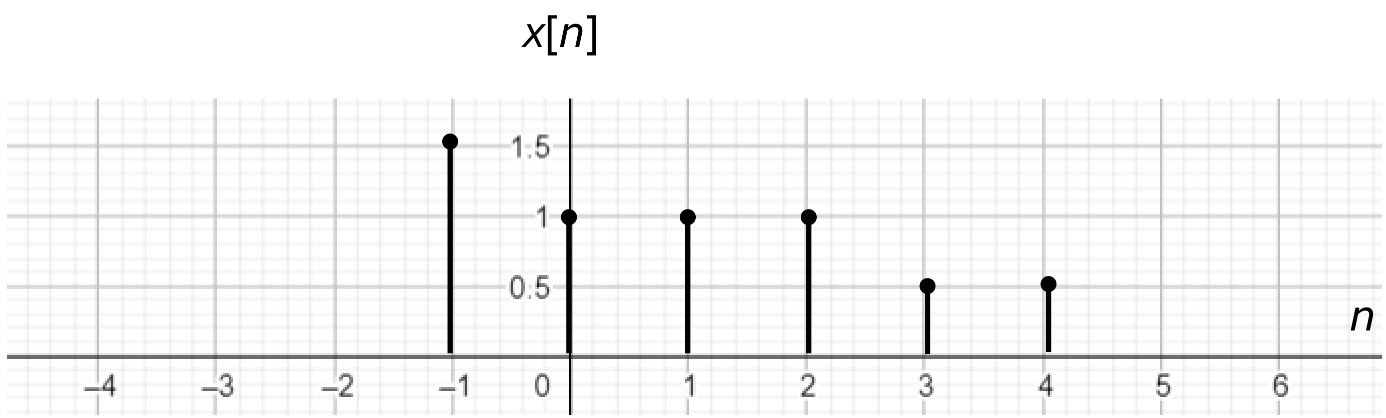
1.- **x[n-1]** -> n-1=0; n=1. La secuencia se retrasa (se desplaza a la derecha)

2.- **x[n+2]** -> n+2=0; n=-2. La secuencia se adelanta (se desplaza a la izquierda)

3.- **x[-n+3]** -> -n+3=0; -n=-3; n=3. La secuencia se retrasa (se desplaza a la derecha)

4.- **x[-n-4]** -> -n-4=0; -n=4; n=-4. La secuencia se adelanta (se desplaza a la izquierda)

Problema 1. Dada la señal de tiempo discreto, $x[n]$ de la figura, calcula las señales que se piden a continuación:



Señal de referencia

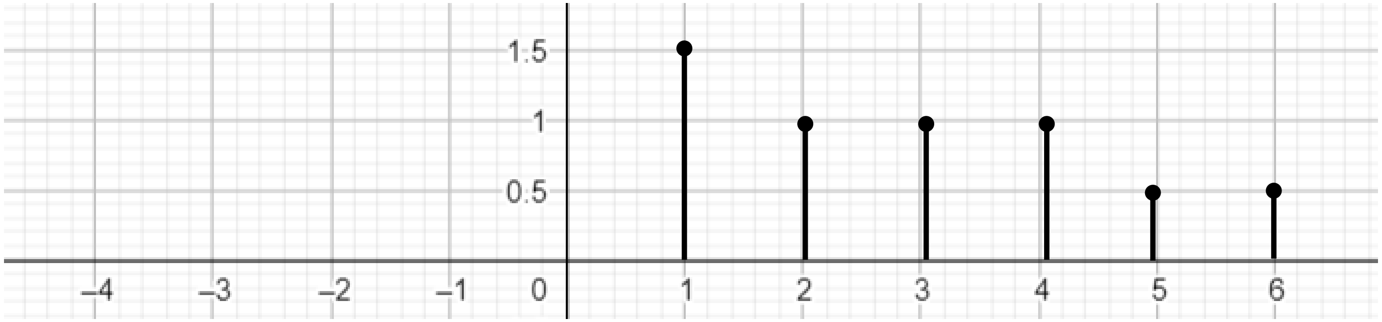
n	x[n]
-1	1,5
0	1
1	1
2	1
3	0,5
4	0,5

$$x[n] = 1{,}5\delta[n+1] + 1\delta[n] + 1\delta[n-1] + 1\delta[n-2] + 0{,}5\delta[n-3] + 0{,}5\delta[n-4]$$

a) ***x*[*n* − 2].** Desplazamiento en el tiempo

Si n-2=0 → n=2 . La señal se retrasa 2 utd.

$x[n-2]$

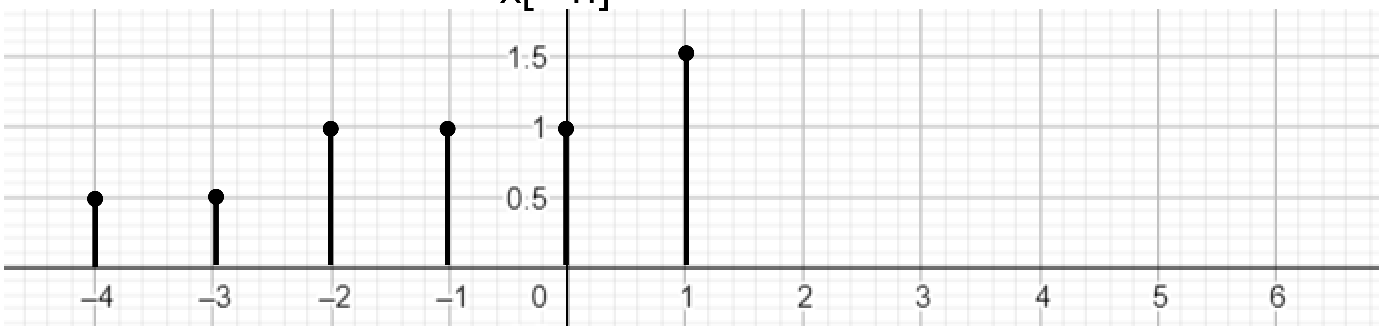


$$x[n-2] = 1{,}5\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + 0{,}5\delta[n-5] + 0{,}5\delta[n-6]$$

b) **x[4 − n].** Inversión en el tiempo y desplazamiento

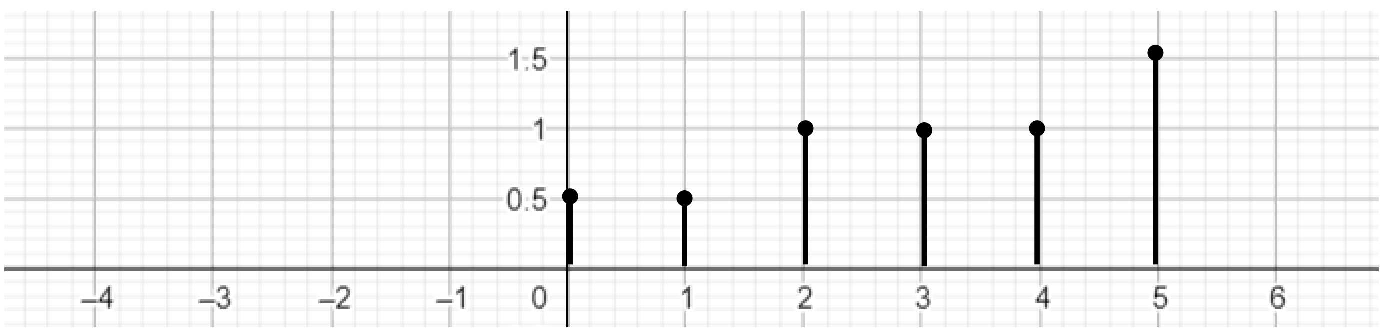
Si 4-n=0 → n=4. Primero se invierte y luego se desplaza

x[− n]



x[4− n]

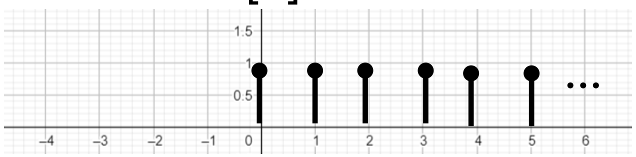
$4 - \mathrm{n} = 0;\ \mathbf{n} = \mathbf{4}$



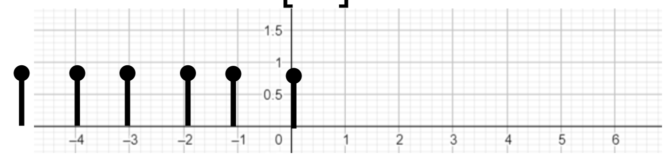
x[1−n] = 0,5δ[n] + 0,5δ[n-1] +δ[n-2] + δ[n-3] + δ[n-4] + 1,5δ[n-5]

c) **x[n] · u[2-n].** Multiplicación por la secuencia unidad invertida, más dos.

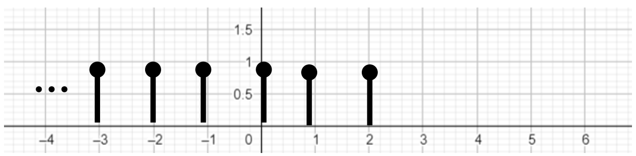
u[n]



u[-n]

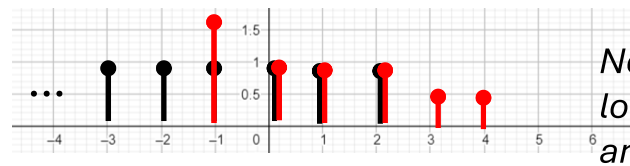


u[-n+2]



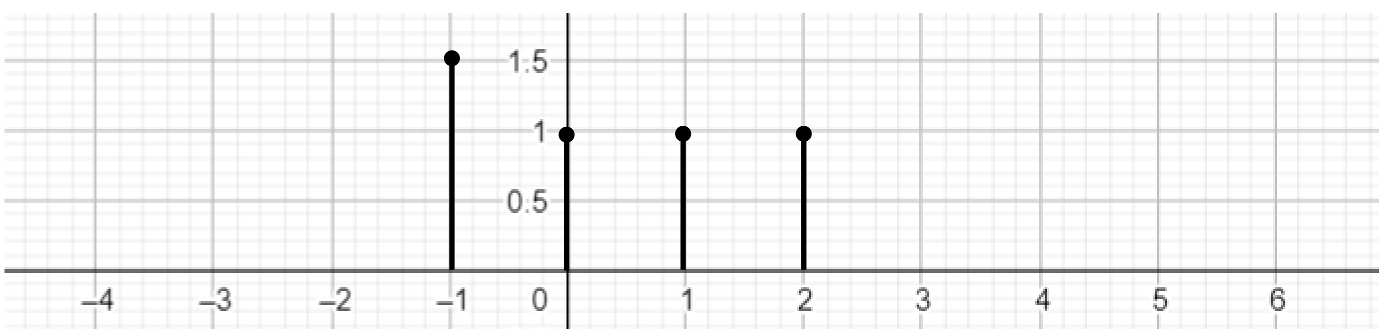
x[n] · u[-n+2]

u[2-n] → *n=2 by SM*



Nos quedamos con los que coinciden en ambas secuencias.

x[n] · u[2-n]1

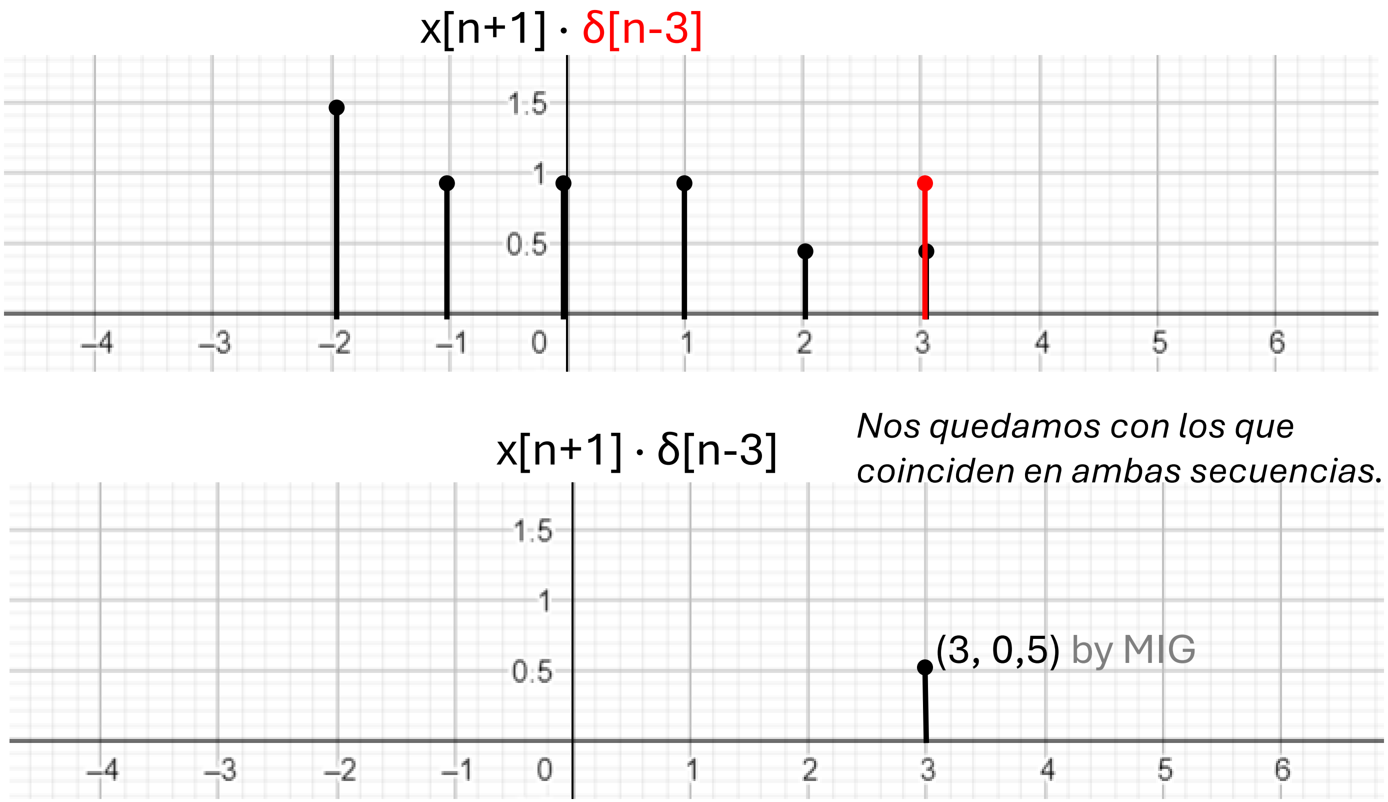


$x[n] \cdot u[2-n] = 1{,}5\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

DFESTS

d) x[n+1] · δ[n-3]. Multiplicación por otra secuencia.

Primero se desplaza a la izquierda la secuencia original, por x[n+1] y luego se multiplica por otra secuencia que solo tiene una utd



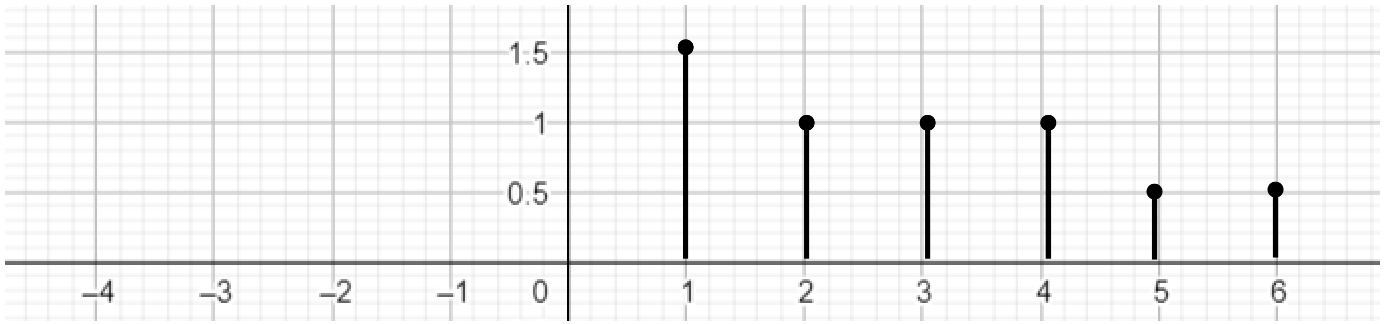
Nos quedamos con los que coinciden en ambas secuencias.

$x[n+1] \cdot \delta[n-3] = 0{,}5\delta[n-3]$.

e) x[n +1] * δ[n – 3]. Convolución.

$x[n+1]*\delta[n-3] = x[n+1-3] = x[n-2]$.

Por n+1 desplazamos 1 a la izquierda, y por n-3 desplazamos 3 a derecha. En definitiva, se desplaza 2 utd a la derecha.

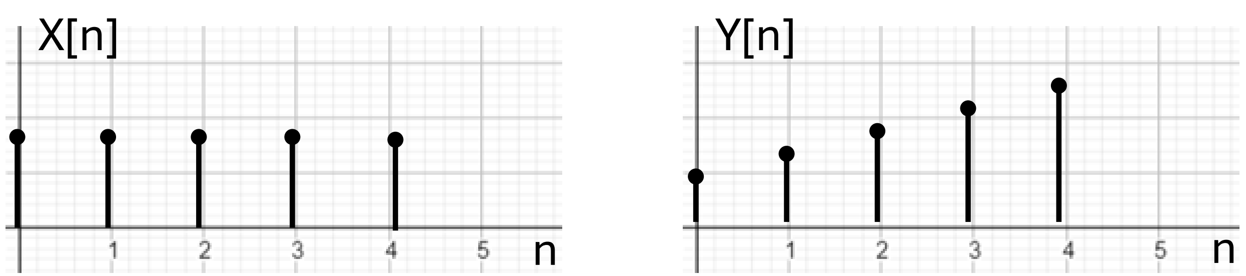


$$x[n+1] \cdot \delta[n-3] = 1{,}5\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+0{,}5\delta[n-5]+0{,}5\delta[n-6]$$

3.5. Convolución de secuencias

Dadas 2 señales X[n] e Y[n] se define la CONVOLUCIÓN entre ellas, a la operación que las transforma en una tercera señal Z[n], y que representa la magnitud en la que se superponen X[n] y una versión trasladada e invertida de Y[n].

$$Z[\mathrm{n}] = X[n] * Y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \cdot Y[n-k]$$



3.5.1. Propiedades de la convolución

1.- CONMUTATIVA

$$X[n] * Y[n] = Y[n] * X[n]$$

2.- ASOCIATIVA

$$(X[n] * Y[n]) * Z[n] = X[n] * (Y[n] * Z[n])$$

3.- DISTRIBUTIVA

$$X[n] * (Y[n] + Z[n]) = X[n] * Y[n] + X[n] * Z[n]$$

4.- ESCALADO

$$A\,X[n] * Y[n] = A(X[n] * Y[n])$$

5.- ELEMENTO NEUTRO - $\delta[n]$

$$X[n] * \delta[n] = X[n]$$

$$X[n] * \delta[n - n_0] = X[n - n_0]$$

$$X[n] * \delta[n + n_0] = X[n + n_0]$$

3.5.2. Duración de la convolución discreta

$$Z[\mathrm{n}] = X[n] * Y[n]$$

$$\mathrm{dur}\{ Z[\mathrm{n}]\} = dur\,\{X[n]\} + dur\,\{Y[n]\} - 1$$

INSTANTES INICIALES Y FINALES

$$M_{Zini} = M_{Xini} + M_{Yini}$$

$$M_{Zfin} = M_{Xfin} + M_{Yfin}$$

3.5.3. Cálculo de la convolución discreta

Se calculará la convolución de 2 señales, utilizando 3 métodos diferentes.

Dadas las señales x[n] e y[n], calcular la convolución $z[n]= x[n] * y[n]$

$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$

$y[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]$

3.5.3.1. Superposición de impulsos unidad

Se sustituye cada secuencia por su expresión en función de señales impulsos unidad y se opera teniendo en cuenta las propiedades: distributiva, escalado en amplitud y elemento neutro de la convolución.

Primero se calcula el instante discreto en el que comenzará y terminará z[n].

$Z_{ini} = X_{ini} + Y_{ini} = 0 – 1 = -1$
$Z_{fin} = X_{fin} + Y_{fin} = 3 + 1 = 4$

Si tenemos δ[*n*− x], el instante es x
Si tenemos δ[*n*+x], el instante es -x

Por lo tanto, z[n] ≠ 0 para -1 ≤ n ≤ 4
O sea, entre (n+1) y (n-4)

$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$
$y[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]$

Luego se realiza el cálculo, sustituyendo y multiplicando factor a factor:

$\mathbf{z[n]=}\ x[n] * y[n] = x[n] * (\delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]) = \mathbf{x}[n+1] + 2\mathbf{x}[n] - 3\mathbf{x}[n-1] =$

$(2\delta[n+0] + \delta[n-2] - \delta[n-3]) * \delta[n+1] = 2\delta[n+1] + \delta[n-2+1] - \delta[n-3+1]$
$(2\delta[n+0] + \delta[n-2] - \delta[n-3]) * 2\delta[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-2] -2\delta[n-3]$
$(2\delta[n+0] + \delta[n-2] - \delta[n-3]) * -3\delta[n-1] = -6\delta[n-1] -3\delta[n-2-1] -1(-3)\delta[n-3-1]$
$= 2\delta[n+1] + \delta[n-1] - \delta[n-2]+$
$+ 4\delta[n] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-3]+$
$-6\delta[n-1] - 3\delta[n-3] + 3\delta[n-4];$

$\mathbf{z[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] - 5\delta[n-1] + \delta[n-2] - 5\delta[n-3] + 3\delta[n-4]}$

3.5.3.2. Mediante tabla

Para cada valor de $n_{z1} \leq n \leq n_{z2}$ se calcula la convolución organizando las secuencias en una tabla, y calculando el sumatorio de los productos de $x[k]$ e $y[n - k]$.

z[n]= x[n] ∗ y[n] = $\boxed{z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]}$

$z[n] \neq 0$ para $-1 \leq n \leq 4$
O sea, entre (n+1) y (n-4)

$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$

$y[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]$

$$\boxed{x[k] * y[n-k]}$$

z[n] entre (n+1) y (n-4)

y[n-k]·k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	n	z[n]	z[n]
x[k]				**2** 2δ[n-0]		**1** 1δ[n−2]	**-1** −1δ[n−3]							
y[-1-k]		-3	2	1								-1	0(-3)+0·2+2·1=**2**	**n+1**
y[-k] y[0-k]			**-3** −3δ[n+1]	**2** 2δ[n-0]	**1** 1δ[n-1]							0	2·2= **4**	**n**
y[1-k]				-3	2	1						1	2(-3)+1·1=-6+1=**-5**	**n-1**
y[2-k]					-3	2	1					2	1·2+(-1)·1=2-1=**1**	**n-2**
y[3-k]						-3	2	1				3	1(-3)+(-1)2=**-5**	**n-3**
y[4-k]							-3	2	1			4	(-1)(-3)=**3**	**n-4**

1.- Posicionamos la señal x[n], en sus instantes

*2.- Posicionamos la **inversa** de la y[n], desplazando lo necessario para obtener todos los solapes*

*3.- Sumatorio de los productos **x[k]** por y[n-k] para cada fila*

4.- Obtenemos la señal resultante

z[n]= 2δ[n+1] + 4δ[n] – 5δ[n−1] + δ[n-2] - 5δ[n−3] + 3δ[n−4]

3.5.3.3. Resolución gráfica

Similar al anterior. Para cada valor de $n_{z1} \le n \le n_{z2}$ se calcula la convolución mediante la representación gráfica de $x[k]$ e $y[n - k]$

z[n]= x[n] ∗ y[n] = $\boxed{z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]}$

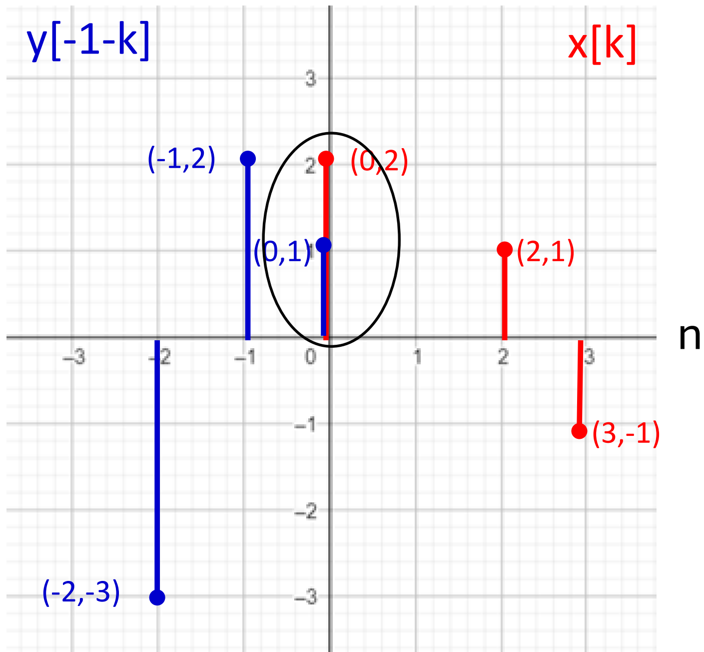
z[n] ≠ 0 para -1 ≤ n ≤ 4
O sea, entre (n+1) y (n-4)

Se ponen sólo 2 ejemplos y[-1-k] , y[1-k], pero habría que hacerlo para los 6 casos.
Muy engorroso, no se suele utilizar.

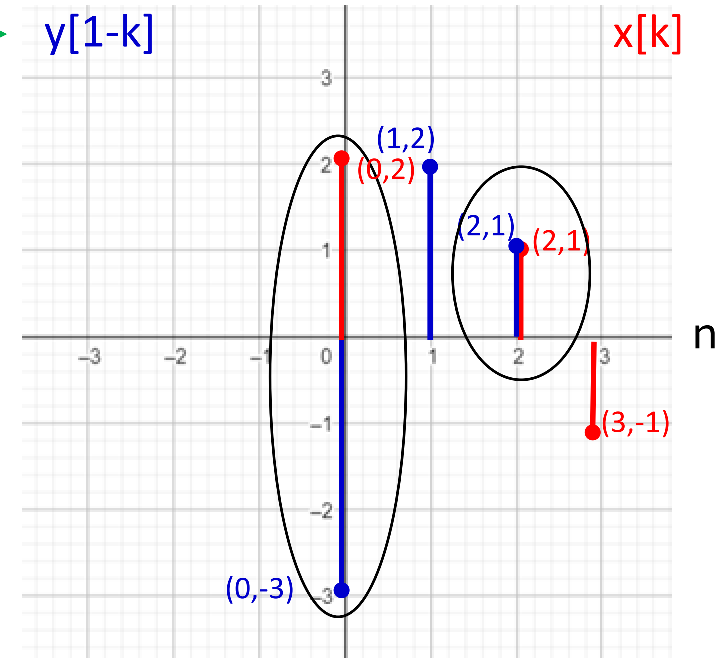
$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$
$y[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1]$

Para n=-1; $\mathbf{z}[-\mathbf{1}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[-1-k]$

Para n=1; $\mathbf{z}[\mathbf{1}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[1-k]$



2·1=**2**, en -1 -> (n+1)



2(-3)+1·1=-6+1=**-5**, en 1 -> (n-1)

z[n]= **2δ[n+1]** + 4δ[n] **– 5δ[n–1]** + δ[n-2] - 5δ[n–3] + 3δ[n–4]