- Diagonalización ortogonal :

Recordemos que una matriz cuadrada P $(n \times n)$ es ortogonal si :

$$\boxed{P^{-1} = P^{t}} \quad \text{o} \quad \boxed{P \cdot P^{t} = I}$$

P^{-1} debe existir

En una matriz ortogonal, sus columnas son un conjunto ortonormal de vectores.

Ejercicio : Verificar que P es una matriz ortogonal. Comprobar, además, que las columnas de P forman un conjunto ortonormal.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada A (n x n) es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal P tal que :

$$\boxed{D = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{t} \cdot A \cdot P} \longrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{t}$$

$P^{-1} = P^{t}$

Solo las matrices reales simétricas son diagonalizables ortogonalmente :

$$\boxed{A \text{ es diagonalizable ortogonalmente} \iff A \text{ es simétrica (real)}}$$

* Proceso de diagonalización ortogonal :

① Comprobar que A es una matriz real simétrica (n x n).

② Calcular los λ_i y m_i de A.

③ Para cada λ_i con $m_i = 1$: calcular el vector propio y normalizarlo.

④ Para cada λ_i con $m_i > 1$: calcular m_i vectores propios y ortonormalizarlos

$\downarrow$

Gram - Schmidt + Normalizar.

$\perp$

⑤ Vectores propios ortonormales $\longrightarrow$ columnas de P.

Valores propios $\longrightarrow$ diagonal principal de D.

Ejercicio: Determinar una matriz P que diagonalice ortogonalmente

a $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar que $D = P^t \cdot A \cdot P$.

Ejercicio: Diagonalizar ortogonalmente la matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- <u>Descomposición en valores singulares :</u> SVD

Hasta ahora, sabemos que :

* Si A es una matriz simétrica $(n \times n) \rightarrow$ siempre es diagonalizable. ✓

* Si A es una matriz cuadrada $(n \times n) \rightarrow$ puede ser diagonalizable.

* ¿ Si A es una matriz rectangular $(m \times n)$? $\rightarrow$ <u>SVD</u>.

La descomposición en valores singulares (SVD) de una matriz A $(m \times n)$ es una factorización de la forma :

$$\boxed{A = \underbrace{U}_{m \times m} \cdot \underbrace{\Sigma}_{m \times n} \cdot \underbrace{V^t}_{n \times n}}$$

A: $m \times n$

Donde :

U : matriz ortogonal $m \times m$.

Σ : matriz "diagonal" $m \times n$.

V : matriz ortogonal $n \times n$.

Trabajamos con la matriz simétrica : $\underset{(n\times n)}{A^t \cdot A}$ $\begin{cases} \text{es diagonalizable} \\ \lambda_i \geq 0 \end{cases}$

Ordenamos los valores propios de $A^t \cdot A$ de mayor a menor :

$$\underbrace{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r}_{>0} \geq \underbrace{\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0}_{=0}$$

Entonces, los valores singulares de A serán :

$$\boxed{\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \ , \ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \ , \dots , \ \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}}$$

y las matrices U, Σ y V se corresponderán con :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

se construye igual que P

$$V = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

vectores propios ortonormales

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \cdots & \vec{u}_r & \cdots & \vec{u}_m \end{pmatrix}_{m \times m}$$

① $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \vec{v}_i \quad (i = 1, \ldots, r)$

② Construir base ortonormal :

$$\{ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_m \}$$

¡ si fuera necesario !

Ejercicio: Obtener la factorización SVD de la matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$