

### Hoja de Problemas de la asignatura

1. ¿Dado un determinado espacio muestral  $\Omega$  formado por  $n$  elementos, ¿cuántos sucesos podríamos considerar en  $\mathcal{P}(\Omega)$ ?

#### Solución

Para modelar un subconjunto cualquiera de  $\Omega$ , considera los  $n$  elementos del conjunto como  $n$  casillas donde colocamos un 1 ó un 0 en función de si el correspondiente elemento pertenece al subconjunto o no. Por poner un ejemplo considera  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ . El siguiente croquis representaría el subconjunto  $S = \{a, d, f\}$ :

a	b	c	d	e	f	g	h
1	0	0	1	0	1	0	0

Por tanto, los distintos subconjuntos saldrían de variar con repetición 2 elementos ( el 1 y el 0 ) a lo largo de  $n$  posiciones. Por tanto estaríamos hablando de  $|\Omega| = 2^n$

- . -

2. Sabiendo que  $A$  y  $B$  son independientes, justifica que  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son también independientes.

#### Solución

Partimos de que al ser  $A$  y  $B$  independientes, entonces  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  (\*).

Demostremos por tanto la misma definición para el caso planteado

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

Para ello desarrollaremos el lado derecho e izquierdo de ambas desigualdades para comprobar que efectivamente se cumple la definición .

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - (P(A \cup B) = 1 - P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

Observa que la parte coloreada en rojo son iguales por la ecuación (\*) y así queda demostrado que son independientes..

- . -

3. Sea  $A$  y  $B$  sucesos tales que  $P(A) = \frac{1}{2}$  ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  y  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Calcula:



- a)  $P(A|B)$                       c)  $P(\bar{A}|B)$                       e)  $P(\bar{B}|\bar{A})$                       f)  $P(\overline{A \cup B})$   
b)  $P(B|A)$                       d)  $P(\bar{A}|\bar{B})$

### Solución

$$\begin{aligned} a) \quad P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \\ b) \quad P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ c) \quad P(\bar{A}|B) &= 1 - P(A|B) = \frac{2}{3} \\ d) \quad P(\bar{A}|\bar{B}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = \frac{3(1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B))}{2} = \frac{3(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4})}{2} = \frac{5}{8} \\ e) \quad P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} \\ f) \quad P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

- . -

4. El estudiante  $A$  asiste un 80 % de veces a clase y  $B$  un 60 %. Las asistencia de ambos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos asista uno?

### Solución

La probabilidad de que al menos asista uno es justo el complementario de que no asista ninguno. Por tanto calcularemos:

$$1 - P(\text{Nada asiste}) = 1 - 0.2 \cdot 0.4 = 0.92$$

- . -

5. Sabiendo que  $P(A) = 0$  justifica que  $A$  y  $B$  son también independientes, sea quien sea  $B$ .

### Solución

Obsérvese que  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Por tanto,

$$P(A \cap B) = P(B) - P(A \cup B)$$

Como  $P(A \cup B) \geq P(B)$ , necesariamente se cumplirá que:

$$P(A \cap B) = P(B) - P(A \cup B) \leq P(B) - P(B) = 0$$

O sea :

$P(A \cap B) = 0$  que confirma que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

- . -

6. Al lanzar tres de dados equilibrados,

- a) Probabilidad de que sumen 7.



- b) Probabilidad de que sumen 9.
- c) Probabilidad de que sumen 10.
- d) Probabilidad de que sumen 19.
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres dados sean iguales?
- f) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres dados sean pares?
- g) ¿cuál es el valor más probable? (más verosímil?)

### Solución

- a) Probabilidad de que sumen 7. Cada dado tiene 6 caras (números del 1 al 6), por lo tanto, el número total de combinaciones posibles al lanzar tres dados es:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Debemos encontrar cuántas combinaciones de tres números, entre 1 y 6, suman exactamente 7. A continuación, enumeramos todas las combinaciones posibles:

- (1, 1, 5)
- (1, 2, 4)
- (1, 3, 3)
- (2, 2, 3)

La lista anterior muestra las diferentes combinaciones, pero se debe tener en cuenta que el orden importa, ya que estamos lanzando tres dados. Por lo tanto, debemos contar las permutaciones de cada una de estas combinaciones.

Para cada combinación de valores, calculamos el número de permutaciones posibles:

- (1, 1, 5): Tiene  $\frac{3!}{2!} = 3$  permutaciones.
- (1, 2, 4): Tiene  $3! = 6$  permutaciones.
- (1, 3, 3): Tiene  $\frac{3!}{2!} = 3$  permutaciones.
- (2, 2, 3): Tiene  $\frac{3!}{2!} = 3$  permutaciones.

Sumamos el total de permutaciones de todas las combinaciones:  $3 + 6 + 3 + 3 = 15$

Finalmente, la probabilidad es el número de combinaciones favorables dividido entre el número total de combinaciones posibles:

$$\text{Probabilidad} = \frac{15}{216}$$

- b) Probabilidad de que sumen 9. Razonando como en el paso anterior, se puede comprobar que la probabilidad viene dada por:  $\frac{25}{216}$
- c) Probabilidad de que sumen 10. Razonando como en los pasos anteriores, se puede comprobar que la probabilidad viene dada por:  $\frac{27}{216}$
- d) Probabilidad de que sumen 19. Obviamente, este valor no puede ser obtenido, por lo que la probabilidad es nula.
- e) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres dados sean iguales? El segundo ha de coincidir con el primero y el tercero con los dos primeros, o sea,

$$P(\text{SERIGUALES}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$



f) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres dados sean pares?

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{8}$$

g) ¿cuál es el valor más probable? (más verosímil?) Si los pasos efectuados en el primer apartado los generalizamos para todos los posibles valores, obtendríamos la siguiente tabla:

Suma	Número de combinaciones
3	1
4	3
5	6
6	10
7	15
8	21
9	25
10	27
11	27
12	25
13	21
14	15
15	10
16	6
17	3
18	1

Por tanto, podemos concluir que los valores más probables son tanto el 10 y el 11.

- . -

7. Al lanzar cinco veces un par de dados equilibrados, calcula la probabilidad de obtener 7 en tres ocasiones.

### Solución

- Probabilidad de obtener un 7 en un solo lanzamiento:

Espacio muestral: 36 resultados posibles (6 caras en cada dado).

Eventos favorables: 6 (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1).

Probabilidad:  $P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

- Probabilidad de obtener un 7 exactamente 3 veces en 5 lanzamientos:

- Distribución binomial:

$n = 5$  (número de ensayos)

$k = 3$  (éxitos)

$p = \frac{1}{6}$  (probabilidad de éxito)

$q = 1 - p = \frac{5}{6}$  (probabilidad de fracaso)

- Fórmula:  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$



- Cálculo:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3}$$

$$P(X = 3) = 10 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36}$$

$$P(X = 3) = \frac{250}{7776}$$

- Por lo tanto, la probabilidad de obtener un 7 exactamente tres veces en cinco lanzamientos de dos dados es de  $\frac{250}{7776} \approx 0.0322$  o 3.22

- . -

8. Sabemos que en una urna hay un número  $n$  indeterminado de bolas. Para averiguarlo, hacemos una extracción de 10 bolas y las marcamos. Después las volvemos a introducir. En una segunda extracción sucesiva de 10 bolas donde vamos devolviendo la bola cada vez y removiendo la urna antes de cada extracción, han aparecido 2 bolas de las marcadas. ¿Cuál es el número de bolas que maximiza la probabilidad de haber extraído 2 bolas marcadas? Y si en la segunda extracción, sacamos las 10 bolas de golpe con el mismo resultados de 2 bolas marcadas?

### Solución

Se ha pedido a ChatGpt que resuelva este problema. A continuación se detalla la resolución aportada. ChatGpt ha dejado sin explicar bien alguna pregunta, por lo que se ha aportado una solución manual. Del resto, también ha sido corregida *analógicamente* pero aún así, parece que ha quedado algún error. ¿Sabrías encontrarlo/s ?

### SOLUCIÓN

Vamos a estudiar los dos escenarios por separado.

- a) Extracción con reemplazo. En este escenario, la segunda extracción se realiza bola a bola y con reemplazo.

Sea  $X$  la variable aleatoria que representa el número de bolas marcadas en una muestra de 10 bolas. Este problema sigue una distribución binomial, ya que:

- Hay un total de  $n$  bolas en la urna.
- Hemos marcado 10 bolas.
- Extraemos 10 bolas con reemplazo.
- La probabilidad de obtener una bola marcada en una extracción es  $p = \frac{10}{n}$ .

Por lo tanto,  $X \sim \text{Binomial}(10, p)$ , donde  $p = \frac{10}{n}$  es la probabilidad de éxito (extraer una bola marcada en una extracción).

La probabilidad de obtener exactamente 2 bolas marcadas en 10 extracciones está dada por:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = \binom{10}{2} \left(\frac{10}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{10}{n}\right)^8$$

donde  $\binom{10}{2}$  es el número de formas de elegir 2 bolas marcadas en 10 extracciones.

#### Paso 2: Maximizar la función de verosimilitud

La función de verosimilitud es la probabilidad de observar 2 bolas marcadas, como función de  $n$ . La función que debemos maximizar es:



$$L(n) = \binom{10}{2} \left(\frac{10}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{10}{n}\right)^8$$

No necesitamos preocuparnos por  $\binom{10}{2}$ , ya que es una constante, por lo que podemos maximizar la función simplificada:

$$L(n) \propto \left(\frac{10}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{10}{n}\right)^8$$

### Paso 3: Derivar y encontrar el máximo

Para encontrar el valor de  $n$  que maximiza  $L(n)$ , derivamos esta expresión con respecto a  $n$  y resolvemos la ecuación  $\frac{d}{dn}L(n) = 0$ . Este cálculo puede realizarse de forma numérica o simbólica, pero requiere varios pasos algebraicos. En la figura siguiente, mostramos el gráfico donde observaremos que la probabilidad óptima se encuentra en  $N = 50$ .

b) Extracción sin reemplazo.

RESOLUCIÓN CON CHATGPT, de dudosa fiabilidad. ¿Qué opinas?

Este problema corresponde a una situación de *estimación de proporciones* usando un experimento de captura y recaptura. Queremos estimar el número total de bolas  $n$  en la urna con base en los datos obtenidos.

### Paso 1: Planteamiento

La probabilidad de extraer  $x$  bolas marcadas de una urna con  $K$  bolas marcadas,  $N$  bolas en total y  $n$  bolas extraídas, está dada por la *distribución hipergeométrica*. Esta es:

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Donde:

- $N = n$  es el número total de bolas en la urna,
- $K = 10$  es el número de bolas marcadas,
- $n = 10$  es el número de bolas extraídas en la segunda muestra,
- $x = 2$  es el número de bolas marcadas extraídas en la segunda muestra.

Queremos encontrar el valor de  $n$  que maximiza la probabilidad de haber extraído exactamente 2 bolas marcadas.

### Paso 2: Función de verosimilitud

La verosimilitud de observar 2 bolas marcadas en una extracción de 10 bolas está dada por la probabilidad:

$$L(n) = P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{n-10}{8}}{\binom{n}{10}}$$

Donde:

- $\binom{10}{2}$  es el número de formas de elegir 2 bolas marcadas de las 10,
- $\binom{n-10}{8}$  es el número de formas de elegir 8 bolas no marcadas de las  $n-10$  bolas no marcadas,
- $\binom{n}{10}$  es el número total de formas de elegir 10 bolas de un conjunto de  $n$  bolas.

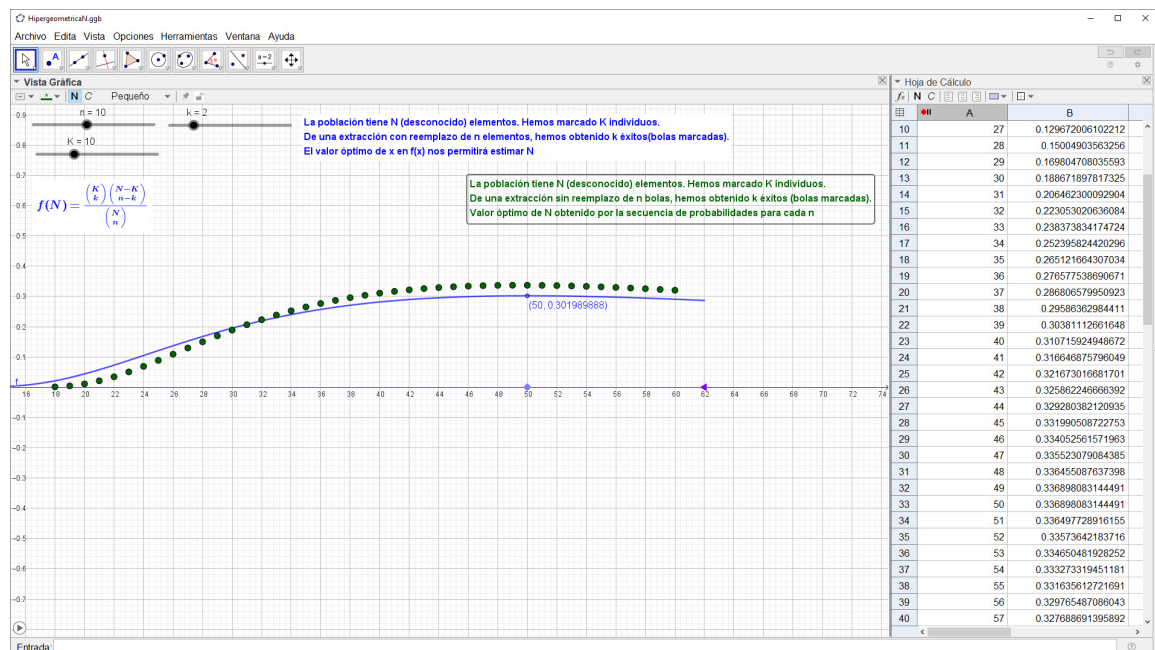
### Paso 3: Maximizar la verosimilitud

Para encontrar el valor de  $n$  que maximiza esta verosimilitud, necesitamos evaluar la función  $L(n)$  para varios valores de  $n$  y encontrar el máximo. Si representamos esta función con Geogebra, obtendríamos :

El máximo está tanto en  $N = 49$  como  $N = 50$ .

El método planteado nos permite estimar el número total de bolas en la urna que maximiza la probabilidad de extraer exactamente 2 bolas marcadas en la segunda extracción. Para obtener una respuesta numérica precisa, podemos resolver la ecuación de verosimilitud de forma numérica o aplicar métodos de búsqueda.

En el gráfico siguiente se superponen las funciones de verosimilitud para ambos escenarios.



- . -

9. Lanzamos una moneda equilibrada hasta obtener cara. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten exactamente tres lanzamientos?

### Solución

Si consideramos la variable  $X = n^o$  de lanzamientos hasta obtener éxito (salir cara), tendremos que se trata de una variable geométrica de parámetro  $p = 0.5$ . Por tanto

$$P(X = 3) = (0.5)^2 \cdot (0.5) = \frac{1}{8}$$

- . -



10. Lanzamos una moneda repetidas veces hasta que obtengamos en dos ocasiones consecutivas el mismo lado de la moneda. Calcula:

- a) La probabilidad de que se termine en el segundo lanzamiento.
- b) La probabilidad de terminar en el tercer lanzamiento.
- c) La probabilidad de que el experimento acabe antes del décimo lanzamiento.
- d) La probabilidad de que no acabe nunca.

### Solución

- a) La probabilidad de que se termine en el segundo lanzamiento. Es la probabilidad de que el segundo coincida con el primero:  $P = \frac{1}{2}$
- b) La probabilidad de terminar en el tercer lanzamiento. Sería la probabilidad de que no coincida anteriormente y a partir de ahí, que el siguiente (tercer lanzamiento) sí coincida. Es decir:  $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ . Obsérvese que la probabilidad de que acabe en el lanzamiento  $n$  viene dada por  $P = \frac{1}{2^{n-1}}$ . También es la probabilidad de que no acabe en el lanzamiento  $n$ .
- c) La probabilidad de que el experimento acabe antes del décimo lanzamiento. Sería:  $P = \sum_{i=2}^9 \frac{1}{2^i}$
- d) La probabilidad de que no acabe nunca. Sería:  $1 - P(\text{Acabe en algún momento})$ . Así podríamos calcular

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 0$$

- . -

11. Lanzamos una moneda equilibrada hasta obtener cara. Si repetimos el experimento tres veces, ¿Cuál es la probabilidad de que se necesite exactamente el mismo número de lanzamientos?

### Solución

Lanzamos una moneda equilibrada hasta obtener cara. Si repetimos el experimento tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que se necesite exactamente el mismo número de lanzamientos en los tres experimentos?

### Solución

Cada repetición del experimento de lanzar una moneda hasta obtener cara sigue una *distribución geométrica*. La probabilidad de obtener cara en el  $k$ -ésimo lanzamiento está dada por:

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

donde  $X$  es el número de lanzamientos necesarios hasta obtener cara. El número de lanzamientos posibles puede ser  $k = 1, 2, 3, \dots$ , y la probabilidad de que se necesite un número específico  $k$  de lanzamientos disminuye exponencialmente con  $k$ .

### Probabilidad conjunta

Queremos calcular la probabilidad de que, en tres experimentos independientes, el número de lanzamientos necesarios para obtener cara sea el mismo. Es decir, el mismo valor de  $k$  debe ocurrir en los tres experimentos.





La probabilidad conjunta de que los tres experimentos necesiten exactamente  $k$  lanzamientos es:

$$P(\text{mismo número de lanzamientos en los tres experimentos}) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = k) \cdot P(X_3 = k)$$

Como los experimentos son independientes y cada uno tiene la misma probabilidad, podemos escribir:

$$P(\text{mismo número de lanzamientos}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k$$

### Suma infinita

La expresión anterior es una serie geométrica de la forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r} \quad \text{donde } r = \frac{1}{8}$$

Por lo tanto, la suma es:

$$P(\text{mismo número de lanzamientos}) = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}$$

### Conclusión

La probabilidad de que se necesite exactamente el mismo número de lanzamientos en los tres experimentos es  $\frac{1}{7}$ .

- . -

12. Tres jugadores  $A, B$  y  $C$  lanzan (en ese orden) una moneda equilibrada. Gana el primer jugador que obtiene cara. ¿Cuál es la probabilidad de ganar cada uno?

### Solución

Sea  $p_A$  la probabilidad de que gane el primer jugador. Como para que gane se debe dar la circunstancia de que saque cara en el primer lanzamiento o que no haciéndolo, los otros dos jugadores fallen y de nuevo volveríamos a empezar teniendo la misma probabilidad de nuevo de ganar. Así podríamos considerar que:

$$p_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_A$$

Despejando de esta ecuación, se obtiene  $p_A = \frac{4}{7}$ .

Para que gane  $B$ , debería ocurrir que falle  $A$  y a partir de ese momento sería como volver a empezar el juego, pero siendo en esta ocasión  $B$  el que empieza, por lo que la probabilidad sería:

$$p_B = \frac{1}{2} p = \frac{2}{7}$$

Por último, la probabilidad de que gane  $C$  es:

$$p_C = 1 - p_A - p_B = \frac{1}{7}$$

- . -

13. Una jugadora de **Let's make a deal** decide implementar la siguiente estrategia de juego en el **concurso** : Cuando Monty Hall (el presentador) le ofrezca cambiar de puerta, ella lanzará un dado; si sale un 6, se quedará con la puerta elegida pero en caso contrario cambiará de puerta. ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el premio grande?

### Solución

Sabemos que si cambia de puerta, la probabilidad de ganar es de  $\frac{2}{3}$  y si no cambia la probabilidad de ganar es de  $\frac{1}{3}$ . Por tanto, en este caso, la probabilidad de ganar es:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{18}$$

- . -

14. En un concurso de televisión, se presentan 5 puertas al concursante. Dos de ellas tienen un premio jugoso, mientras que tres no lo tienen. Tras elegir dos puertas el concursante, y antes de abrirlas, el presentador enseña una puerta sin premio al concursante. ¿Qué debe hacer para acertar en las dos puertas y cuál es la probabilidad? (¿Cuál es la probabilidad de acertar manteniéndose en la elección? Y, ¿si cambia una? y, ¿si cambia las dos? )

### Solución

RESOLUCIÓN CON CHATGPT, de dudosa fiabilidad. ¿Qué opinas?

### RESOLUCIÓN

**Situación Inicial** - Hay 5 puertas en total. - 2 puertas tienen premios (P1 y P2). - 3 puertas no tienen premios (N1, N2, y N3).

**Paso 1: Elección Inicial** El concursante elige 2 puertas de las 5. Las posibilidades de elección son muchas, pero solo nos importa el resultado de las puertas seleccionadas.

**Paso 2: Presentador Revela una Puerta** El presentador, que sabe dónde están los premios, abrirá una de las 3 puertas no premiadas (N1, N2, o N3). Ahora hay dos puertas elegidas por el concursante y una puerta no premiada revelada por el presentador.

#### Probabilidades de Acertar

**1. Manteniéndose en la Elección (Sin Cambiar)** La probabilidad de que el concursante acierte manteniéndose en su elección es:

$$P(\text{acierto al quedarse}) = \frac{1}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

**2. Cambiando una Puerta** Si el concursante cambia una de las puertas elegidas después de que el presentador revele una puerta sin premio, la probabilidad de acertar es que elija 1 puerta correcta en la primera elección y después que descarte la mala y escoja la buena:

$$\frac{6}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

**3. Cambiando Ambas Puertas** Si el concursante cambia ambas puertas, la probabilidad de acertar es que haya elegido 2 puertas malas inicialmente, porque en esa situación, al mostrar una puerta solamente, el presentador necesariamente descartará la que queda. Por tanto la probabilidad es:

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

**Conclusión** El concursante tiene más probabilidad de acertar si decide cambiar una las 2 puertas.

- . -

15. ¿Cuántas personas debería haber en un grupo para que al menos dos de ellas tuvieran cumpleaños el mismo día con una probabilidad superior al 70 %? (Considera que todas han nacido en un año no bisiesto y que han sido elegidas aleatoriamente)

### Solución

RESOLUCIÓN CON CHATGPT, de dudosa fiabilidad. ¿Qué opinas?

Queremos determinar cuántas personas deben estar en un grupo para que la probabilidad de que al menos dos de ellas compartan cumpleaños sea superior al 70 %. Consideramos que todas las personas han nacido en un año no bisiesto (365 días) y que sus cumpleaños están distribuidos aleatoriamente.

#### Planteamiento

Sea  $n$  el número de personas en el grupo. La probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños es más fácil de calcular indirectamente. Primero, calculamos la probabilidad de que todas las personas tengan cumpleaños distintos y luego restamos este valor de 1 para obtener la probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños.

#### Paso 1: Probabilidad de que todas las personas tengan cumpleaños distintos

La primera persona puede nacer en cualquiera de los 365 días. La segunda persona debe nacer en un día diferente al de la primera, por lo que solo tiene 364 días favorables, y así sucesivamente. Entonces, la probabilidad de que las  $n$  personas tengan cumpleaños distintos es:

$$P(\text{cumpleaños distintos}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{365 - n + 1}{365}$$

Esto se puede escribir como:

$$P(\text{cumpleaños distintos}) = \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}$$

#### Paso 2: Probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños

La probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños es el complemento de la probabilidad de que todas tengan cumpleaños diferentes. Es decir:

$$P(\text{al menos dos personas con el mismo cumpleaños}) = 1 - P(\text{cumpleaños distintos})$$

Queremos que esta probabilidad sea superior al 70 %, es decir:



$$1 - P(\text{cumpleaños distintos}) > 0.7$$

Esto implica:

$$P(\text{cumpleaños distintos}) < 0.3$$

### Resolución numérica

Para encontrar el valor de  $n$  que satisface esta condición, podemos calcular iterativamente o utilizar una aproximación numérica. A partir de cálculos conocidos, obtenemos los siguientes resultados:

- Para  $n = 23$  personas, la probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños es aproximadamente 0.507 (50.7 %).
- Para  $n = 30$  personas, la probabilidad es aproximadamente 0.706 (70.6 %).

Por lo tanto, el número mínimo de personas necesario para que la probabilidad de que al menos dos personas compartan cumpleaños sea superior al 70 % es:

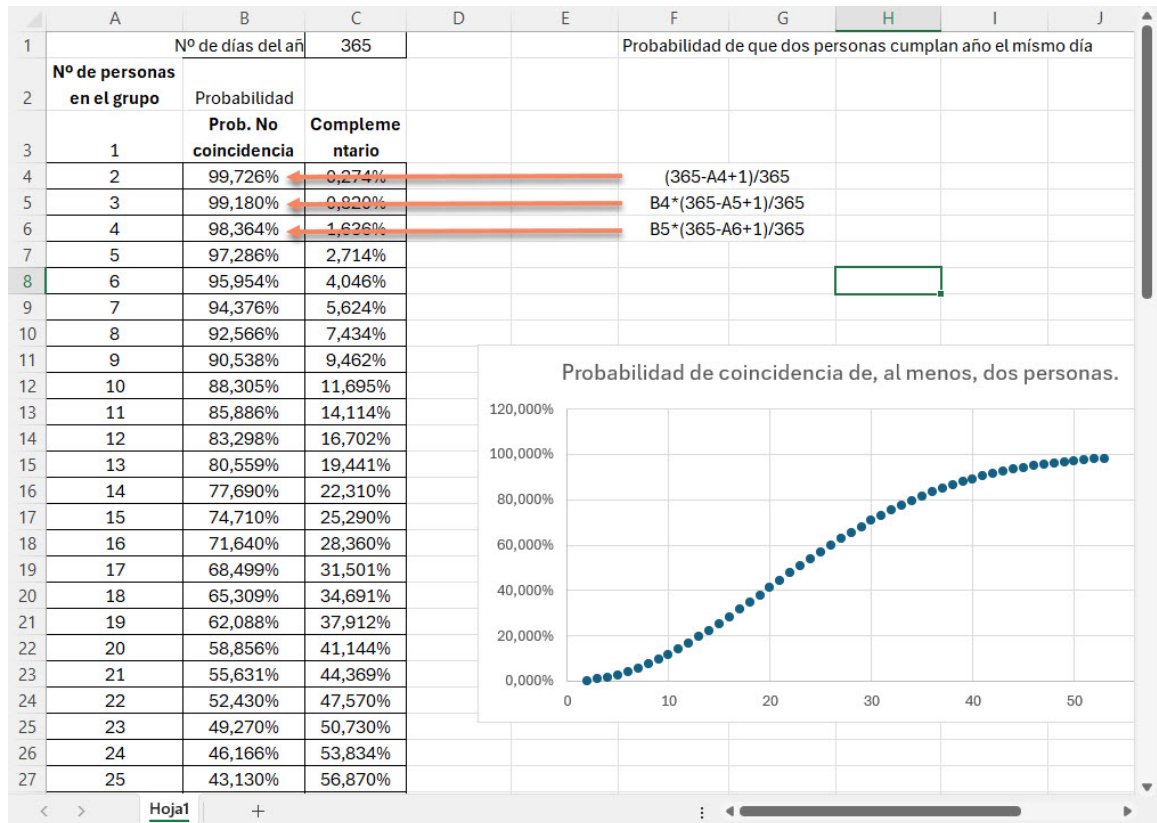
$$n = 30$$

### Conclusión

El número mínimo de personas en el grupo para que la probabilidad de que al menos dos personas tengan el mismo cumpleaños sea superior al 70 % es:

$$n = 30$$

La siguiente figura muestra cómo elaborar una excel con los cálculos pormenorizados.



16. Sabiendo que somos 60 personas en clase, ¿cuál es la probabilidad de que dos de nosotros tengamos la misma fecha de cumpleaños? Considera que los años solo tienen 365 días. Y si consideramos los bisiestos.

### Solución

Ejercicio similar al anterior.

17. En un grupo aleatorio de 4 personas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellas tengan el mismo día de cumpleaños? (Considera que han sido elegidas aleatoriamente de entre las nacidas este milenio)

### Solución

Vamos a considerar que uno de cada cuatro años es bisiesto. Primero calcularemos la probabilidad de que no coincidan las fechas. Como en el ejercicio anterior, la pregunta buscada sería el complementario de la situación anterior. Así pues, La probabilidad de que el segundo no coincida en fechas es que haya nacido en bisiesto y no coincida o que no haya sido así y tampoco coincida:

$$P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{364}{365} + \frac{1}{4} \cdot \frac{365}{366}$$

Para considerar el tercer miembro, tendríamos que los dos anteriores no coincida y el tercero tampoco:

$$P_3 = P_2 \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{363}{365} + \frac{1}{4} \cdot \frac{364}{366} \right)$$

Para considerar el cuarto miembro, tendríamos que los tres anteriores no coincidan y el cuarto tampoco:

$$P_4 = P_3 \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{362}{365} + \frac{1}{4} \cdot \frac{363}{366} \right)$$

Por tanto, tendríamos que la probabilidad planteada es:

$$P = 1 - P_4 \approx 0.01634479659$$

- . -

18. En los procesos electorales, para ser presidente de mesa, se sortea una persona al azar de entre los integrantes del censo electoral de esa mesa que tenga una determinada titulación: Bachillerato. Se establecen 2 posibles reglas para el caso que no se tenga dicha titulación:

- Se recorre el censo electoral por orden alfabético hasta el momento en que la persona reúna los requisitos.
- Se vuelve a sortear hasta que finalmente se tengan los requisitos.

¿Son ambos métodos equiprobables (cualquier titulado puede salir con igual probabilidad)? ¿Plantearías una tercera regla?

### Solución

En la primera regla, la probabilidad de ser agraciado viene dada por:

$$P(\text{Salir presidente}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{Nº de personas sin titulación antes del candidato}}{\text{Censo}}$$

Por tanto si delante de una persona (por orden alfabético) hay muchas personas tendrá más probabilidad que si, por ejemplo, hay dos personas consecutivas con la titulación. En este último caso, la segunda persona tendría mucha menos probabilidad. Otra posible regla es elaborar un censo solo con las personas que sí reúnen los requisitos y sortear entre dichas personas.

- . -

19. Considera el siguiente juego: Lanzamos un dado. Si se obtiene un 6 antes que un 1, se gana. Si se obtiene un 1 antes que un seis, se pierde. Cualquier otro valor, se vuelve a lanzar el dado. ¿Cuál es la probabilidad de ganar y cuál la de perder?

### Solución

RESOLUCIÓN CON CHATGPT, de dudosa fiabilidad. ¿Qué opinas?

Definimos los eventos:

- Si sale un 6, se gana.



- Si sale un 1, se pierde.
- Si sale cualquier otro número (2, 3, 4 o 5), se vuelve a lanzar el dado.

### Probabilidades individuales

- La probabilidad de obtener un 6 en un lanzamiento es  $\frac{1}{6}$ .
- La probabilidad de obtener un 1 es  $\frac{1}{6}$ .
- La probabilidad de obtener cualquier otro número (2, 3, 4 o 5) es  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

### Definición de probabilidades

Sea  $p$  la probabilidad de ganar, es decir, obtener un 6 antes que un 1. Podemos escribir la probabilidad  $p$  considerando las siguientes posibilidades:

- En el primer lanzamiento, la probabilidad de ganar directamente (si sale un 6) es  $\frac{1}{6}$ .
- La probabilidad de perder directamente (si sale un 1) es  $\frac{1}{6}$ .
- La probabilidad de que salga un número entre 2 y 5 (y que la situación vuelva a ser la misma) es  $\frac{2}{3}$ , en cuyo caso la probabilidad de ganar sigue siendo  $p$ .

La ecuación para la probabilidad  $p$  de ganar es:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}p$$

### Resolviendo la ecuación

Para resolver esta ecuación para  $p$ , multiplicamos ambos lados por 6:

$$6p = 1 + 4p$$

Restamos  $4p$  en ambos lados:

$$2p = 1$$

Finalmente, dividimos entre 2:

$$p = \frac{1}{2}$$

### Conclusión

La probabilidad de ganar (obtener un 6 antes que un 1) es  $\frac{1}{2}$ , es decir, 50 %.

- . -

20. Se introducen aleatoriamente 5 bolas en  $n$  urnas. Estudia para los distintos posibles valores de  $n$  la probabilidad de que una urna tenga más de 2 bolas.

### Solución

Obviamente, si hay menos de 5 urnas, las probabilidad es 1, ya que por el *principio del palomar*, seguro que al menos dos bolas deberían estar en una misma urna. Trazando paralelismos, podríamos considerar 365 urnas numeradas con cada día del año, y el problema sería exactamente igual al problema planteado del cumpleaños. Por tanto, solo tendríamos que adaptar los cálculos a *un año de  $n$  días*.

- . -

21. Los alumnos de IA están distribuidos de la siguiente forma: el 40 % en PRIMERO; el 35 % en SEGUNDO y el 25 % en TERCERO. Los resultados en un año académico han sido los siguientes: en PRIMERO, 25 % de aprobados; en SEGUNDO, 30 % y en TERCERO, 45 %. Escogido un alumno al azar se pide:

- Dicho alumno resulta haber aprobado ¿Cual es la probabilidad de que sea de TERCERO ?
- El alumno no ha aprobado. ¿Cual es la probabilidad de que sea de PRIMERO ?

### Solución

- Claramente se trata de aplicar el teorema de Bayes: Queremos calcular la probabilidad de que un alumno sea de TERCERO dado que ha aprobado, es decir,  $P(\text{TERCERO} \mid \text{Aprobado})$ . Aplicamos el **Teorema de Bayes**:

$$P(\text{TERCERO} \mid \text{Aprobado}) = \frac{P(\text{Aprobado} \mid \text{TERCERO}) \cdot P(\text{TERCERO})}{P(\text{Aprobado})}$$

Primero, calculamos  $P(\text{Aprobado})$  usando la **Ley de la Probabilidad Total**:

$$P(\text{Aprobado}) = P(\text{Aprobado} \mid \text{PRIMERO}) \cdot P(\text{PRIMERO}) + P(\text{Aprobado} \mid \text{SEGUNDO}) \cdot P(\text{SEGUNDO}) + P(\text{Aprobado} \mid \text{TERCERO}) \cdot P(\text{TERCERO})$$

Sustituyendo los valores dados:

$$P(\text{Aprobado}) = (0.25 \cdot 0.40) + (0.30 \cdot 0.35) + (0.45 \cdot 0.25)$$

$$P(\text{Aprobado}) = 0.10 + 0.105 + 0.1125 = 0.3175$$

Ahora calculamos  $P(\text{TERCERO} \mid \text{Aprobado})$ :

$$P(\text{TERCERO} \mid \text{Aprobado}) = \frac{0.45 \cdot 0.25}{0.3175}$$

$$P(\text{TERCERO} \mid \text{Aprobado}) = \frac{0.1125}{0.3175} \approx 0.354$$

**Conclusión:** La probabilidad de que el alumno sea de TERCERO, dado que ha aprobado, es aproximadamente:

$$P(\text{TERCERO} \mid \text{Aprobado}) \approx 0.354 \quad \text{o} \quad 35.4\%$$





b) En este caso, volvemos a aplicar el *Teorema de Bayes*. En esta ocasión, tendremos que:

$$P(1^o | \text{Suspendido}) = \frac{P(\text{Suspendido} | 1^o) \cdot P(1^o)}{P(\text{Suspendido})}$$

$$P(1^o | \text{Suspendido}) = \frac{(0.75 \cdot 0.40)}{(0.75 \cdot 0.40) + (0.70 \cdot 0.35) + (0.55 \cdot 0.25)} = \frac{0.30}{0.6825} \approx 0.4394$$

- . -

22. Un opositor se presenta a una prueba donde se eligen 3 temas al azar de un total de 100. Se presenta sabiendo 60 temas solamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene de superar el examen? ¿Cuál es el número mínimo de temas que debería saber para tener una probabilidad de aprobar superior al 50 %?

### Solución

**1. Número Total de Maneras de Elegir 3 Temas** El número total de formas en que podemos seleccionar 3 temas de 100 es:

$$\binom{100}{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 161700$$

**2. Número de Formas de Elegir 3 Temas Entre los 60 Conocidos** El número de formas de elegir 3 temas de los 60 que el opositor conoce es:

$$\binom{60}{3} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 34220$$

**3. Cálculo de la Probabilidad** La probabilidad de que los 3 temas seleccionados estén entre los que el opositor conoce es:

$$P(\text{Aprobar}) = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{34220}{161700} \approx 0.2115$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el opositor apruebe sabiendo 60 temas es aproximadamente 21.15 %.

### Parte 2: Número Mínimo de Temas que Debería Saber para Aprobar Superior al 50 %

Queremos encontrar el número mínimo de temas,  $x$ , que el opositor debe conocer para que la probabilidad de aprobar sea superior al 50 %.

**1. Número Total de Maneras de Elegir 3 Temas** El número total de formas de elegir 3 temas de 100 es:

$$\binom{100}{3} = 161700$$

**2. Número de Formas de Elegir 3 Temas Entre los  $x$  Conocidos** El número de formas de elegir 3 temas de los  $x$  que el opositor conoce es:



$$\binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

**3. Cálculo de la Probabilidad** Queremos que la probabilidad de aprobar sea superior al 50 %:

$$P(\text{Aprobar}) = \frac{\binom{x}{3}}{\binom{100}{3}} > 0.5$$

Esto implica:

$$\frac{\binom{x}{3}}{161700} > 0.5$$

Lo que resulta en:

$$\binom{x}{3} > 80850$$

Es decir:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6} > 80850$$

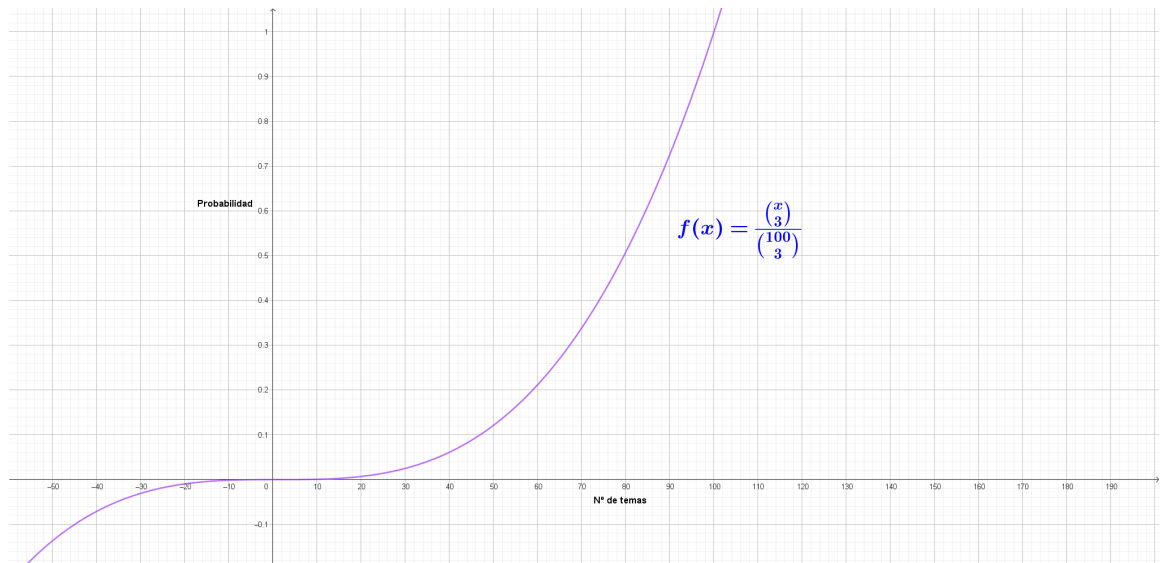
Multiplicamos ambos lados por 6:

$$x(x-1)(x-2) > 485100$$

Ahora, probamos diferentes valores de  $x$ :

- Para  $x = 85$ :  $85 \cdot 84 \cdot 83 = 592.620 > 485.100$
- Para  $x = 84$ :  $84 \cdot 83 \cdot 82 = 570.024 > 485.100$
- Para  $x = 83$ :  $83 \cdot 82 \cdot 81 = 548.226 > 485.100$
- Para  $x = 82$ :  $82 \cdot 81 \cdot 80 = 527.280 > 485.100$
- Para  $x = 81$ :  $81 \cdot 80 \cdot 79 = 507.240 > 485.100$
- Para  $x = 80$ :  $80 \cdot 79 \cdot 78 = 492.960 > 485.100$
- Para  $x = 79$ :  $79 \cdot 78 \cdot 77 = 474.474 < 485.100$

Por lo tanto, el número mínimo de temas que el opositor debe saber para tener una probabilidad de aprobar superior al 50 % es **80**. En la siguiente gráfica de Geogebra, puedes apreciar la evolu-



ción:

### Conclusión

- La probabilidad de que el opositor apruebe sabiendo 60 temas es aproximadamente 21.15 %.
- El número mínimo de temas que el opositor debe conocer para tener una probabilidad de aprobar superior al 50 % es 81.

- . -

23. Un test detecta la presencia del virus SRAS-CoV-2 con un 90 % de probabilidad si la persona está infectada (sensibilidad) y con un 80 % si no lo está (especificidad). Sabemos que el 45 % de la población está infectada. Determinar:

- a) La probabilidad de que efectivamente se tenga el virus dado un resultado positivo en el test.
- b) La probabilidad de que efectivamente se tenga el virus dado un resultado negativo en el test.
- c) La probabilidad de que se tenga el virus y el test sea positivo.
- d) La probabilidad de que se tenga el virus o que el test sea positivo.

### Solución

- Sensibilidad:  $P(\text{Positivo} \mid \text{Enfermo}) = 0.90$
- Especificidad:  $P(\text{Negativo} \mid \text{No Enfermo}) = 0.80$
- Probabilidad de estar enfermo:  $P(\text{Enfermo}) = 0.45$
- Probabilidad de no estar enfermo:  $P(\text{No Enfermo}) = 0.55$

#### 1. Probabilidad de estar enfermo dado un resultado positivo:

Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{Enfermo} \mid \text{Positivo}) = \frac{P(\text{Positivo} \mid \text{Enfermo})P(\text{Enfermo})}{P(\text{Positivo})}$$



Calculamos  $P(\text{Positivo})$ :

$$P(\text{Positivo}) = P(\text{Positivo} \mid \text{Enfermo})P(\text{Enfermo}) + P(\text{Positivo} \mid \text{No Enfermo})P(\text{No Enfermo})$$

Sabemos que  $P(\text{Positivo} \mid \text{No Enfermo}) = 1 - P(\text{Negativo} \mid \text{No Enfermo}) = 0.20$ , por lo que:

$$P(\text{Positivo}) = (0.90)(0.45) + (0.20)(0.55) = 0.405 + 0.11 = 0.515$$

Entonces:

$$P(\text{Enfermo} \mid \text{Positivo}) = \frac{(0.90)(0.45)}{0.515} = \frac{0.405}{0.515} \approx 0.7864$$

La probabilidad de estar enfermo dado un resultado positivo es aproximadamente 0.7864 o 78.64 %.

## 2. Probabilidad de estar enfermo dado un resultado negativo:

$$P(\text{Enfermo} \mid \text{Negativo}) = \frac{P(\text{Negativo} \mid \text{Enfermo})P(\text{Enfermo})}{P(\text{Negativo})}$$

Donde  $P(\text{Negativo})$  es:

$$P(\text{Negativo}) = P(\text{Negativo} \mid \text{Enfermo})P(\text{Enfermo}) + P(\text{Negativo} \mid \text{No Enfermo})P(\text{No Enfermo})$$

Sabemos que  $P(\text{Negativo} \mid \text{Enfermo}) = 0.10$ , por lo que:

$$P(\text{Negativo}) = (0.10)(0.45) + (0.80)(0.55) = 0.045 + 0.44 = 0.485$$

Entonces:

$$P(\text{Enfermo} \mid \text{Negativo}) = \frac{(0.10)(0.45)}{0.485} = \frac{0.045}{0.485} \approx 0.0928$$

La probabilidad de estar enfermo dado un resultado negativo es aproximadamente 0.0928 o 9.28 %.

## 3. Probabilidad de estar enfermo y dar positivo:

$$P(\text{Enfermo} \cap \text{Positivo}) = P(\text{Positivo} \mid \text{Enfermo})P(\text{Enfermo}) = (0.90)(0.45) = 0.405$$

La probabilidad de estar enfermo y dar positivo es 0.405 o 40.5 %.

## 4. Probabilidad de estar enfermo o dar positivo:

$$P(\text{Enfermo} \cup \text{Positivo}) = P(\text{Enfermo}) + P(\text{Positivo}) - P(\text{Enfermo} \cap \text{Positivo})$$

$$P(\text{Enfermo} \cup \text{Positivo}) = 0.45 + 0.515 - 0.405 = 0.56$$

La probabilidad de estar enfermo o dar positivo es 0.56 o 56 %.



- . -

24. Sabemos que en el mercado de los dados oficiales de los casinos existen 1 millón de dados oficiales. Sabemos que se han introducido 30.000 falsos. Sabemos que los falsos tienen una probabilidad de obtener 6 de  $\frac{4}{19}$ , siendo el resto de valores equiprobables. Se ha lanzado un dado elegido al azar y ha salido 6, ¿cuál es la probabilidad de que sea falso? y ¿de que sea legal?. Y ¿cuál si al lanzarlo dos veces, han salido 2 seises? Finalmente, se decide establecer una regla lanzándolo 100 veces. ¿A partir de qué número de seises obtenido en dicho experimento se puede concluir que el dado es falso sabiendo que la probabilidad de acertar es superior al 50 %?

### Solución

#### Desarrollo con Gemini

Eventos:  $F$ : El dado es falso.  $A$ : El dado es legal. 6: Salir un 6.

- a) Primero evaluamos la probabilidad de que sea falso: Aplicando el Teorema de Bayes:  
Queremos calcular  $P(F|6)$ , la probabilidad de que el dado sea falso dado que salió un 6.

$$P(F|6) = \frac{P(6|F) \cdot P(F)}{P(6)}$$

Calculando  $P(6)$ :

$$P(6) = P(6|F) \cdot P(F) + P(6|A) \cdot P(A)$$

$$P(6) = \frac{4}{19} \cdot \frac{30000}{1030000} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1000000}{1030000} \approx 0.0164$$

Calculando  $P(F|6)$ :

$$P(F|6) = \frac{\frac{4}{19} \cdot \frac{30000}{1030000}}{0.0164} \approx 0.3548$$

Por tanto, la probabilidad de que el dado sea falso dado que salió un 6 es aproximadamente 35.48 %.

- b) Para ver que el dado sea legal. Deberemos calcular  $1 - P(F|6)$ .  
Por lo que la probabilidad es aproximadamente del 64,52 %

- c) Para el caso de haber obtenido dos seises en dos lanzamientos.

Eventos al lanzar el dado dos veces:

$F$ : El dado es falso.

$A$ : El dado es auténtico.

$2S$ : Han salido dos seises consecutivos.

Probabilidades:

$$P(2S|F) = \left(\frac{4}{19}\right)^2 = \frac{16}{361} \quad P(2S|A) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \quad P(F) = \frac{30000}{1030000} \quad P(A) = \frac{1000000}{1030000}$$

Calculando  $P(2S)$ :

$$P(2S) = P(2S|F) \cdot P(F) + P(2S|A) \cdot P(A)$$

$$P(2S) = \frac{16}{361} \cdot \frac{30000}{1030000} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1000000}{1030000}$$

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(F|2S) = \frac{P(2S|F) \cdot P(F)}{P(2S)}$$

$$P(F|2S) = \frac{\frac{16}{361} \cdot \frac{30000}{1030000}}{\frac{16}{361} \cdot \frac{30000}{1030000} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1000000}{1030000}} \approx 0.435$$

d) Regla para 100 lanzamientos.

- . -

### Solución

Versión ChatGpt con 30.000 dentro de 1 millón

#### Parte 1: Probabilidad de que el dado sea falso dado que ha salido un 6 en una tirada

Sabemos que:

- Hay 1,000,000 dados en total, de los cuales 30,000 son falsos.
- La probabilidad de que un dado sea falso es  $P(\text{falso}) = \frac{30,000}{1,000,000} = 0.03$ .
- La probabilidad de que un dado sea legal es  $P(\text{legal}) = 0.97$ .

Para el dado falso:

$$P(6 | \text{falso}) = \frac{4}{19}$$

Para el dado legal:

$$P(6 | \text{legal}) = \frac{1}{6}$$

Usando el Teorema de Bayes, la probabilidad de que el dado sea falso dado que ha salido un 6 es:

$$P(\text{falso} | 6) = \frac{P(6 | \text{falso}) \cdot P(\text{falso})}{P(6)}$$

Primero, calculamos  $P(6)$  usando la ley de la probabilidad total:

$$P(6) = P(6 | \text{falso}) \cdot P(\text{falso}) + P(6 | \text{legal}) \cdot P(\text{legal})$$

Sustituyendo los valores:

$$P(6) = \frac{4}{19} \cdot 0.03 + \frac{1}{6} \cdot 0.97 \approx 0.16799$$

Ahora aplicamos el Teorema de Bayes:



$$P(\text{falso} \mid 6) = \frac{\frac{4}{19} \cdot 0.03}{0.16799} \approx 0.0376$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el dado sea falso dado que ha salido un 6 es aproximadamente 3.76 %.

Para la probabilidad de que el dado sea legal:

$$P(\text{legal} \mid 6) = 1 - P(\text{falso} \mid 6) = 0.9624$$

---

## Parte 2: Probabilidad de que el dado sea falso dado que han salido dos seises

Si lanzamos el dado dos veces y salen dos seises, aplicamos el Teorema de Bayes de nuevo:

$$P(\text{falso} \mid 6, 6) = \frac{P(6, 6 \mid \text{falso}) \cdot P(\text{falso})}{P(6, 6)}$$

Primero, calculamos  $P(6, 6 \mid \text{falso})$ :

$$P(6, 6 \mid \text{falso}) = \left(\frac{4}{19}\right)^2 = \frac{16}{361}$$

Y para un dado legal:

$$P(6, 6 \mid \text{legal}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Calculamos la probabilidad total  $P(6, 6)$ :

$$P(6, 6) = \frac{16}{361} \cdot 0.03 + \frac{1}{36} \cdot 0.97 \approx 0.02827$$

Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{falso} \mid 6, 6) = \frac{\frac{16}{361} \cdot 0.03}{0.02827} \approx 0.0470$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el dado sea falso dado que han salido dos seises es aproximadamente 4.70 %.

---

## Parte 3: A partir de cuántos seises en 100 tiradas se puede concluir que el dado es falso

Si lanzamos el dado 100 veces, la probabilidad de obtener un 6 con un dado legal es  $\frac{1}{6}$ , y con un dado falso es  $\frac{4}{19}$ .

Queremos encontrar el número mínimo de seises,  $k$ , tal que:

$$P(\text{falso} \mid k \text{ seises}) > 0.5$$

Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{falso} \mid k \text{ seises}) = \frac{P(k \text{ seises} \mid \text{falso}) \cdot P(\text{falso})}{P(k \text{ seises})}$$

Donde  $P(k \text{ seises})$  es la probabilidad total de obtener  $k$  seises. Esto se calcula como una suma ponderada de las probabilidades binomiales para el dado legal y el dado falso.

Para obtener el valor exacto de  $k$ , se necesita realizar un cálculo binomial y ajustar  $k$  hasta que la probabilidad condicional sea mayor al 50 %.

- . -

### Solución

#### Versión ChatGpt con 30000 +1 millón

#### Probabilidad de que el dado sea falso dado que ha salido un 6 en una tirada

Sabemos que:

- Hay 1,030,000 dados en total, de los cuales 30,000 son falsos.
- La probabilidad de que un dado sea falso es  $P(\text{falso}) = \frac{30,000}{1,030,000} \approx 0.02913$ .
- La probabilidad de que un dado sea legal es  $P(\text{legal}) = \frac{1,000,000}{1,030,000} \approx 0.97087$ .

Para el dado falso:

$$P(6 \mid \text{falso}) = \frac{4}{19}$$

Para el dado legal:

$$P(6 \mid \text{legal}) = \frac{1}{6}$$

Usamos el Teorema de Bayes para calcular la probabilidad de que el dado sea falso dado que ha salido un 6:

$$P(\text{falso} \mid 6) = \frac{P(6 \mid \text{falso}) \cdot P(\text{falso})}{P(6)}$$

Primero, calculamos  $P(6)$  usando la ley de la probabilidad total:

$$P(6) = P(6 \mid \text{falso}) \cdot P(\text{falso}) + P(6 \mid \text{legal}) \cdot P(\text{legal})$$

Sustituyendo los valores:

$$P(6) = \frac{4}{19} \cdot 0.02913 + \frac{1}{6} \cdot 0.97087 \approx 0.00613 + 0.16181 = 0.16794$$

Ahora aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{falso} \mid 6) = \frac{\frac{4}{19} \cdot 0.02913}{0.16794} \approx \frac{0.00613}{0.16794} \approx 0.0365$$



Por lo tanto, la probabilidad de que el dado sea falso dado que ha salido un 6 es aproximadamente 3.65 %.

Para la probabilidad de que el dado sea legal dado que ha salido un 6:

$$P(\text{legal} \mid 6) = 1 - P(\text{falso} \mid 6) = 1 - 0.0365 = 0.9635$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el dado sea legal dado que ha salido un 6 es aproximadamente 96.35 %.

—

### Parte 2: Probabilidad de que el dado sea falso dado que han salido dos seises consecutivos

Si lanzamos el dado dos veces y salen dos seises consecutivos, aplicamos nuevamente el Teorema de Bayes:

$$P(\text{falso} \mid 6, 6) = \frac{P(6, 6 \mid \text{falso}) \cdot P(\text{falso})}{P(6, 6)}$$

Primero, calculamos  $P(6, 6 \mid \text{falso})$ :

$$P(6, 6 \mid \text{falso}) = \left(\frac{4}{19}\right)^2 = \frac{16}{361}$$

Y para un dado legal:

$$P(6, 6 \mid \text{legal}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Calculamos la probabilidad total  $P(6, 6)$  usando la ley de la probabilidad total:

$$P(6, 6) = \frac{16}{361} \cdot 0.02913 + \frac{1}{36} \cdot 0.97087$$

Sustituyendo los valores:

$$P(6, 6) = 0.00129 + 0.02697 = 0.02826$$

Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{falso} \mid 6, 6) = \frac{\frac{16}{361} \cdot 0.02913}{0.02826} \approx \frac{0.00129}{0.02826} \approx 0.0457$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el dado sea falso dado que han salido dos seises consecutivos es aproximadamente 4.57 %.

—

### Parte 3 A partir de cuántos seises en 100 tiradas se puede concluir que el dado es falso con una probabilidad superior al 50 %

Si lanzamos el dado 100 veces, la probabilidad de obtener un 6 con un dado legal es  $\frac{1}{6}$ , y con un dado falso es  $\frac{4}{19}$ .

Queremos encontrar el número mínimo de seises,  $k$ , tal que:

$$P(\text{falso} \mid k \text{ seises}) > 0.5$$

Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{falso} \mid k \text{ seises}) = \frac{P(k \text{ seises} \mid \text{falso}) \cdot P(\text{falso})}{P(k \text{ seises})}$$

Donde  $P(k \text{ seises})$  es la probabilidad total de obtener  $k$  seises, calculada como una suma ponderada de las probabilidades binomiales para el dado legal y el dado falso.

Para obtener el valor exacto de  $k$ , se debe ajustar hasta que  $P(\text{falso} \mid k \text{ seises}) > 0.5$ , utilizando las siguientes distribuciones binomiales:

$$P(k \text{ seises} \mid \text{legal}) = \binom{100}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}$$

$$P(k \text{ seises} \mid \text{falso}) = \binom{100}{k} \left(\frac{4}{19}\right)^k \left(\frac{15}{19}\right)^{100-k}$$

**Solución con excel arroja los siguientes valores (Solución propia)**

N. de 6's	Probabilidad de ser Falso
88	0,094344506
89	0,396839077
90	0,806027206
91	0,963295199

Por lo que la solución sería la de adoptar la decisión de que sea falso a partir de obtener 90 6's. La probabilidad de acierto sería del 80 % aproximadamente.

- . -

25. Una empresa utiliza un sistema de diagnóstico para detectar fallos críticos en servidores. El sistema tiene una **sensibilidad** del 85 % para identificar fallos en los servidores, es decir,  $P(\text{Positivo} \mid \text{Falla}) = 0.85$ . La **especificidad** del sistema es del 90 %, es decir,  $P(\text{Negativo} \mid \text{No Falla}) = 0.90$ . Se sabe que el 30 % de los servidores tienen fallos críticos, es decir,  $P(\text{Falla}) = 0.30$ .

Determina:

- La probabilidad de que un servidor efectivamente tenga una falla crítica si el sistema da un resultado positivo.
- La probabilidad de que un servidor efectivamente tenga una falla crítica si el sistema da un resultado negativo.
- La probabilidad de que un servidor tenga una falla crítica y el sistema dé positivo.
- La probabilidad de que un servidor tenga una falla crítica o que el sistema dé positivo.

**Solución**

- Sensibilidad:  $P(\text{Positivo} \mid \text{Falla}) = 0.85$
- Especificidad:  $P(\text{Negativo} \mid \text{No Falla}) = 0.90$
- Probabilidad de tener una falla:  $P(\text{Falla}) = 0.30$
- Probabilidad de no tener una falla:  $P(\text{No Falla}) = 0.70$

**1. Probabilidad de tener un fallo dado un resultado positivo:**

Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{Falla} \mid \text{Positivo}) = \frac{P(\text{Positivo} \mid \text{Falla})P(\text{Falla})}{P(\text{Positivo})}$$

Calculamos  $P(\text{Positivo})$ :

$$P(\text{Positivo}) = P(\text{Positivo} \mid \text{Falla})P(\text{Falla}) + P(\text{Positivo} \mid \text{No Falla})P(\text{No Falla})$$

Sabemos que  $P(\text{Positivo} \mid \text{No Falla}) = 1 - P(\text{Negativo} \mid \text{No Falla}) = 0.10$ , por lo que:

$$P(\text{Positivo}) = (0.85)(0.30) + (0.10)(0.70) = 0.255 + 0.07 = 0.325$$

Entonces:

$$P(\text{Falla} \mid \text{Positivo}) = \frac{(0.85)(0.30)}{0.325} = \frac{0.255}{0.325} \approx 0.7846$$

La probabilidad de que un servidor tenga un fallo dado un resultado positivo es aproximadamente 0.7846 o 78.46 %.

**2. Probabilidad de tener un fallo dado un resultado negativo:**

$$P(\text{Falla} \mid \text{Negativo}) = \frac{P(\text{Negativo} \mid \text{Falla})P(\text{Falla})}{P(\text{Negativo})}$$

Donde  $P(\text{Negativo})$  es:

$$P(\text{Negativo}) = P(\text{Negativo} \mid \text{Falla})P(\text{Falla}) + P(\text{Negativo} \mid \text{No Falla})P(\text{No Falla})$$

Sabemos que  $P(\text{Negativo} \mid \text{Falla}) = 1 - 0.85 = 0.15$ , por lo que:

$$P(\text{Negativo}) = (0.15)(0.30) + (0.90)(0.70) = 0.045 + 0.63 = 0.675$$

Entonces:

$$P(\text{Falla} \mid \text{Negativo}) = \frac{(0.15)(0.30)}{0.675} = \frac{0.045}{0.675} \approx 0.0667$$

La probabilidad de que un servidor tenga un fallo dado un resultado negativo es aproximadamente 0.0667 o 6.67 %.

**3. Probabilidad de tener un fallo y dar positivo:**



$$P(\text{Falla} \cap \text{Positivo}) = P(\text{Positivo} \mid \text{Falla})P(\text{Falla}) = (0.85)(0.30) = 0.255$$

La probabilidad de tener un fallo y dar positivo es 0.255 o 25.5 %.

#### 4. Probabilidad de tener un fallo o dar positivo:

$$P(\text{Falla} \cup \text{Positivo}) = P(\text{Falla}) + P(\text{Positivo}) - P(\text{Falla} \cap \text{Positivo})$$

$$P(\text{Falla} \cup \text{Positivo}) = 0.30 + 0.325 - 0.255 = 0.37$$

La probabilidad de tener un fallo o dar positivo es 0.37 o 37 %.

- . -

26. Para la obtención del carnet de conducir, se realiza una prueba con 4 posibles estímulos sonoros. La respuesta consiste en apretar un botón. Solo el botón  $B_j$  es el correcto cuando se emite el sonido  $S_j$ . En la prueba se emite cada uno de los posibles sonidos de forma equiprobable y se anota la respuesta del aspirante. Se ha estudiado la siguiente distribución de probabilidades de cada respuesta a cada estímulo:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$S_1$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$S_2$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
$S_3$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$S_4$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Por ejemplo, la probabilidad de que se pulse el botón 2 al emitir el sonido  $S_1$  es  $\frac{1}{4}$

- Cuál es la probabilidad de que el aspirante pulse el botón  $B_3$ ?
- Si el aspirante ha apretado el botón  $B_2$ , ¿Cuál es la probabilidad de que se haya emitido el estímulo  $S_2$ ?
- Si se emite un estímulo, cuál es la probabilidad de que el aspirante acierte con la respuesta.
- Si se emiten 3 sonidos, cuál es la probabilidad de que acierte los tres.
- Si se emiten 3 sonidos, cuál es la probabilidad de que acierte, al menos, uno.

### Solución

- a)  $P(B_3)$

$$P(B_3 \mid S_1) \cdot P(S_1) + P(B_3 \mid S_2) \cdot P(S_2) + P(B_3 \mid S_3) \cdot P(S_3) + P(B_3 \mid S_4) \cdot P(S_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{41}{120}$$

Por cierto si consideramos la matrix:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$



Se podría interpretar el elemento  $p_{1,2}$  como la probabilidad  $P(B_1|S_2)$ . Por otro lado, podríamos considerar el vector de probabilidades:

$$v^t = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

donde el elemento  $v_i$  como la probabilidad  $P(S_i)$ .

Con este planteamiento, podríamos considerar la matriz producto:

$$E = M \cdot v^t = \begin{pmatrix} \frac{23}{80} \\ \frac{13}{41} \\ \frac{80}{120} \\ \frac{31}{120} \end{pmatrix}$$

Observa que se podría interpretar cada elemento de este vector como la probabilidad de que se pulse el botón  $B_i$ .

$$b) P(S_2|B_2) = \frac{P(S_2) \cdot P(B_2|S_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{13}{80}}$$

$$c) P(S_1) \cdot P(B_1|S_1) + P(S_2) \cdot P(B_2|S_2) + P(S_3) \cdot P(B_3|S_3) + P(S_4) \cdot P(B_4|S_4) = 0.25 \cdot \frac{3}{4} + 0.25 \cdot \frac{2}{5} + 0.25 \cdot \frac{4}{5} + 0.25 \cdot \frac{5}{6} = \frac{167}{240} \approx 0.6958\bar{3}$$

$$d) \text{ La solución vendría dada por } \left(\frac{167}{240}\right)^3$$

$$e) \text{ La probabilidad vendría dada por } 1 - P(\text{no acierte ninguno}) = 1 - \left(\frac{73}{240}\right)^3 = 0.971859302662037$$

- . -

27. Tenemos tres monedas, una de las cuales es falsa. En la falsa, la probabilidad de obtener cara es 0.6. Si elegimos una y la lanzamos 3 veces, ¿qué probabilidad hay de que las tres veces salga cara? Sabiendo que la hemos lanzado 3 veces y han salido dos caras y una cruz, ¿qué probabilidad hay de que sea falsa?

### Solución

#### Versión ChatGpt. Mismo Prompt

Tenemos tres monedas, una de las cuales es falsa. La probabilidad de obtener cara con la moneda falsa es 0.6, mientras que con las monedas válidas es 0.5. Queremos calcular la probabilidad de obtener 3 caras al lanzar una moneda elegida al azar.

Aplicamos la ley de la probabilidad total:

$$P(3 \text{ caras}) = P(3 \text{ caras} | \text{falsa}) \cdot P(\text{falsa}) + P(3 \text{ caras} | \text{válida}) \cdot P(\text{válida})$$

Donde:

- $P(\text{falsa}) = \frac{1}{3}$  (probabilidad de elegir la moneda falsa).
- $P(\text{válida}) = \frac{2}{3}$  (probabilidad de elegir una moneda válida).

- $P(3 \text{ caras} | \text{falsa}) = 0.6^3 = 0.216$  (probabilidad de obtener 3 caras con la moneda falsa).
- $P(3 \text{ caras} | \text{válida}) = 0.5^3 = 0.125$  (probabilidad de obtener 3 caras con una moneda válida).

Sustituyendo en la fórmula de la probabilidad total:

$$P(3 \text{ caras}) = 0.216 \cdot \frac{1}{3} + 0.125 \cdot \frac{2}{3}$$

Calculamos:

$$P(3 \text{ caras}) = 0.072 + 0.0833 = 0.1553$$

Por lo tanto, la probabilidad de que salgan 3 caras es aproximadamente 0.1553, o 15.53 %.

### Parte 2: Probabilidad de que la moneda sea falsa, dado que han salido 2 caras y 1 cruz

Usamos el Teorema de Bayes para calcular la probabilidad de que la moneda sea falsa, dado que han salido 2 caras y 1 cruz. El teorema de Bayes es:

$$P(\text{falsa} | 2 \text{ caras y 1 cruz}) = \frac{P(2 \text{ caras y 1 cruz} | \text{falsa}) \cdot P(\text{falsa})}{P(2 \text{ caras y 1 cruz})}$$

Primero, calculamos  $P(2 \text{ caras y 1 cruz})$  usando la ley de la probabilidad total:

$$P(2 \text{ caras y 1 cruz}) = P(2 \text{ caras y 1 cruz} | \text{falsa}) \cdot P(\text{falsa}) + P(2 \text{ caras y 1 cruz} | \text{válida}) \cdot P(\text{válida})$$

Calculamos las probabilidades condicionadas:

$$P(2 \text{ caras y 1 cruz} | \text{falsa}) = \binom{3}{2} \cdot (0.6)^2 \cdot (0.4) = 3 \cdot 0.36 \cdot 0.4 = 0.432$$

$$P(2 \text{ caras y 1 cruz} | \text{válida}) = \binom{3}{2} \cdot (0.5)^2 \cdot (0.5) = 3 \cdot 0.25 \cdot 0.5 = 0.375$$

Ahora, sustituimos en la probabilidad total:

$$P(2 \text{ caras y 1 cruz}) = 0.432 \cdot \frac{1}{3} + 0.375 \cdot \frac{2}{3}$$

Calculamos:

$$P(2 \text{ caras y 1 cruz}) = 0.144 + 0.25 = 0.394$$

Finalmente, aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(\text{falsa} | 2 \text{ caras y 1 cruz}) = \frac{0.432 \cdot \frac{1}{3}}{0.394} = \frac{0.144}{0.394} \approx 0.365$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la moneda sea falsa, dado que han salido 2 caras y 1 cruz, es aproximadamente 0.365, o 36.5 %.

- . -

28. Tenemos tres cajas  $\{A, B, C\}$  con bolas blancas y negras.  $A$  tiene 6 bolas blancas y 4 negras.  $B$  tiene 6 bolas, una de las cuales es negra.  $C$  tiene 8 bolas, 5 de las cuales son blancas. Si se elige una caja y una bola al azar, ¿Qué probabilidad hay de que la bola sea negra? ¿Sabiendo que ha sido negra, qué probabilidad hay de que haya sido de cada caja?

### Solución

#### Versión ChatGpt ¿Podemos fiarnos?

#### Parte 1: Probabilidad de que la bola sea negra

Sabemos que tenemos tres cajas  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y se elige una caja y una bola al azar. La probabilidad de que la bola sea negra se puede calcular utilizando la ley de la probabilidad total.

La probabilidad de que la bola sea negra en cada caja es:

- En la caja  $A$ , hay 6 bolas blancas y 4 bolas negras, por lo que:

$$P(\text{negra} | A) = \frac{4}{10} = 0.4$$

- En la caja  $B$ , hay 5 bolas blancas y 1 bola negra, por lo que:

$$P(\text{negra} | B) = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

- En la caja  $C$ , hay 5 bolas blancas y 3 bolas negras, por lo que:

$$P(\text{negra} | C) = \frac{3}{8} = 0.375$$

Supongamos que la probabilidad de elegir una de las tres cajas es igual, es decir,  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ .

Usamos la ley de la probabilidad total:

$$P(\text{negra}) = P(\text{negra} | A) \cdot P(A) + P(\text{negra} | B) \cdot P(B) + P(\text{negra} | C) \cdot P(C)$$

Sustituimos los valores:

$$P(\text{negra}) = 0.4 \cdot \frac{1}{3} + 0.1667 \cdot \frac{1}{3} + 0.375 \cdot \frac{1}{3}$$

Calculamos cada término:

$$P(\text{negra}) = \frac{0.4}{3} + \frac{0.1667}{3} + \frac{0.375}{3} = 0.1333 + 0.0556 + 0.125 = 0.314$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la bola sea negra es aproximadamente 0.314 o 31.4%.

#### Parte 2: Probabilidad de que la bola provenga de una caja específica, dado que es negra

Para calcular la probabilidad de que la bola haya sido de cada caja, dado que ha sido negra, utilizamos el teorema de Bayes. El teorema de Bayes se expresa como:

$$P(A | \text{negra}) = \frac{P(\text{negra} | A) \cdot P(A)}{P(\text{negra})}$$

De manera similar, calculamos  $P(B | \text{negra})$  y  $P(C | \text{negra})$ .

Sabemos que  $P(\text{negra}) = 0.314$ , y las probabilidades condicionadas ya las hemos calculado. Ahora aplicamos el teorema de Bayes para cada caja:

1. Probabilidad de que la bola sea de la caja A:

$$P(A | \text{negra}) = \frac{P(\text{negra} | A) \cdot P(A)}{P(\text{negra})} = \frac{0.4 \cdot \frac{1}{3}}{0.314} = \frac{0.1333}{0.314} \approx 0.4246$$

2. Probabilidad de que la bola sea de la caja B:

$$P(B | \text{negra}) = \frac{P(\text{negra} | B) \cdot P(B)}{P(\text{negra})} = \frac{0.1667 \cdot \frac{1}{3}}{0.314} = \frac{0.0556}{0.314} \approx 0.177$$

3. Probabilidad de que la bola sea de la caja C:

$$P(C | \text{negra}) = \frac{P(\text{negra} | C) \cdot P(C)}{P(\text{negra})} = \frac{0.375 \cdot \frac{1}{3}}{0.314} = \frac{0.125}{0.314} \approx 0.3984$$

## Resumen

- La probabilidad de que la bola sea negra es 0.314 o 31.4 %.
- Las probabilidades de que la bola provenga de cada caja, dado que ha sido negra, son:
  - $P(A | \text{negra}) \approx 0.4246$  o 42.46 %
  - $P(B | \text{negra}) \approx 0.177$  o 17.7 %
  - $P(C | \text{negra}) \approx 0.3984$  o 39.84 %

- . -

29. En una empresa contrata determinado material a tres proveedores  $\{A, B, C\}$  distintos.  $A$  tiene un 55 % de los encargos.  $B$  el 30 % y el resto se contrata con  $C$ . Sabemos que el 5 % de los encargos a  $A$  son defectuosos.  $B$  tiene un índice de fallos del 8 % y finalmente  $C$  tiene un 10 % de fallos.

- a) Calcula la probabilidad de que un material sea defectuoso.
- b) Hemos detectado un material defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de cada proveedor?

## Solución

### Versión ChatGpt ¿Nos fiamos?

#### Parte 1: Probabilidad de que el material sea defectuoso

Sabemos que la empresa contrata material a tres proveedores  $A$ ,  $B$  y  $C$  con las siguientes probabilidades de fallo:



- El 55 % de los encargos provienen de  $A$ , y el 5 % de estos son defectuosos.
- El 30 % de los encargos provienen de  $B$ , y el 8 % son defectuosos.
- El 15 % de los encargos provienen de  $C$ , y el 10 % son defectuosos.

La probabilidad total de que el material sea defectuoso es:

$$P(\text{defectuoso}) = P(\text{defectuoso} | A) \cdot P(A) + P(\text{defectuoso} | B) \cdot P(B) + P(\text{defectuoso} | C) \cdot P(C)$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$P(\text{defectuoso}) = (0.05 \cdot 0.55) + (0.08 \cdot 0.30) + (0.10 \cdot 0.15)$$

Calculamos cada término:

$$P(\text{defectuoso}) = 0.0275 + 0.024 + 0.015 = 0.0665$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el material sea defectuoso es  $P(\text{defectuoso}) = 0.0665$  o 6.65 %.

## Parte 2: Probabilidad de que el material defectuoso provenga de un proveedor específico

Usamos el teorema de Bayes para calcular la probabilidad de que el material defectuoso provenga de un proveedor dado. El teorema de Bayes se expresa como:

$$P(A | \text{defectuoso}) = \frac{P(\text{defectuoso} | A) \cdot P(A)}{P(\text{defectuoso})}$$

Hacemos lo mismo para los proveedores  $B$  y  $C$ .

1. Probabilidad de que el material defectuoso provenga de  $A$ :

$$P(A | \text{defectuoso}) = \frac{P(\text{defectuoso} | A) \cdot P(A)}{P(\text{defectuoso})} = \frac{0.05 \cdot 0.55}{0.0665} = \frac{0.0275}{0.0665} \approx 0.4135$$

2. Probabilidad de que el material defectuoso provenga de  $B$ :

$$P(B | \text{defectuoso}) = \frac{P(\text{defectuoso} | B) \cdot P(B)}{P(\text{defectuoso})} = \frac{0.08 \cdot 0.30}{0.0665} = \frac{0.024}{0.0665} \approx 0.3609$$

3. Probabilidad de que el material defectuoso provenga de  $C$ :

$$P(C | \text{defectuoso}) = \frac{P(\text{defectuoso} | C) \cdot P(C)}{P(\text{defectuoso})} = \frac{0.10 \cdot 0.15}{0.0665} = \frac{0.015}{0.0665} \approx 0.2256$$

## Resumen

- La probabilidad de que el material sea defectuoso es 0.0665 o 6.65 %.
- Las probabilidades de que el material defectuoso provenga de cada proveedor son:
  - $P(A | \text{defectuoso}) \approx 0.4135$  o 41.35 %
  - $P(B | \text{defectuoso}) \approx 0.3609$  o 36.09 %

- $P(C \mid \text{defectuoso}) \approx 0.2256$  o 22.56 %

- . -

### Solución

#### Versión Gemini

En la versión de Gemini, éstos han sido los resultados (se omite el desarrollo):

$$P(D) = 0.05 \cdot 0.55 + 0.08 \cdot 0.30 + 0.1 \cdot 0.15 = 0.0625$$

$$P(A|D) = \frac{0.05 \cdot 0.55}{0.0625} \approx 0.44$$

$$P(B|D) = \frac{0.08 \cdot 0.30}{0.0625} \approx 0.384$$

$$P(C|D) = \frac{0.1 \cdot 0.15}{0.0625} \approx 0.176$$

- . -

30. Los correos electrónicos de una corporación se clasifican en *Inocuos* y los maliciosos como *Malware*, *Phising*, *SPam* y *SCam*. Se ha diseñado un test automático que los clasifica. Para ello, también se ha estudiado la prevalencia de los mismos :

Prevalencia	80 %	3 %	6 %	7 %	4 %
	In	Malw	Phis	SP	SC
CIIn	95 %	1 %	5 %	0 %	8 %
CIMalw	1 %	90 %	6 %	0 %	1 %
CIPhis	2 %	5 %	87 %	1 %	1 %
CISP	0 %	3 %	1 %	97 %	2 %
CISC	3 %	1 %	1 %	2 %	88 %

Por ejemplo, la probabilidad de un un correo inocuo se clasifique como Phising es del 2 %. Calcula:

- Si un email se ha clasificado como Inocuo, ¿Cuál es la probabilidad de que efectivamente lo sea?
- Cuál es la probabilidad de clasificar correctamente un correo?
- ¿Cuál es la probabilidad de tener un falso inocuo?
- ¿Un correo ha sido clasificado como SCAM.Cuál es la probabilidad de que sea inocuo?
- Si a un usuario le entran 3 correos, ¿cuál es la probabilidad de acertar en todos los posibles emails inocuos que entren?

### Solución

Como paso previo, consideremos la matriz de probabilidades y vector de prevalencias:

$$M = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.01 & 0.05 & 0 & 0.08 \\ 0.01 & 0.9 & 0.06 & 0 & 0.01 \\ 0.02 & 0.05 & 0.87 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.03 & 0.01 & 0.97 & 0.02 \\ 0.03 & 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.88 \end{pmatrix}$$



y

$$v^t = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.03 \\ 0.06 \\ 0.07 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Si calculamos  $E = M \cdot v^t$  tendríamos las probabilidades de ser clasificado un correo:

$$E = \begin{pmatrix} 0.7665 \\ 0.039 \\ 0.0708 \\ 0.0702 \\ 0.0615 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que un correo sea clasificado como Inocuo es de 0.7665

- a)  $P(IN|CIIn) = \frac{P(IN) \cdot P(CIIn|In)}{P(CIIn)} = \frac{0.8 \cdot 0.95}{0.7665} \approx 0.9915198956294847 \approx 99.152\%$
- b)  $P(\text{Ser clasificado correctamente}) = 0.8 \cdot 0.95 + 0.03 \cdot 0.9 + 0.06 \cdot 0.87 + 0.07 \cdot 0.97 + 0.04 \cdot 0.88 = 0.9423 = 94.23\%$
- c) La probabilidad solicitada viene dada por el complementario del suceso estudiado en a), es decir  $P(\overline{IN}|CIIn) = 1 - 0.99152 = 0.00848$
- d)  $P(IN|ClSC) = \frac{P(IN) \cdot P(ClSC|In)}{P(ClSC)} = \frac{0.8 \cdot 0.03}{0.0615} \approx 0.3902439024390244 \approx 39.024\%$
- e) La probabilidad de acertar en un correo viene dada por:

$$P = 0.8 \cdot 0.95 + 0.03 \cdot 0.9 + 0.06 \cdot 0.87 + 0.07 \cdot 0.97 + 0.04 \cdot 0.88 = 0.9423 = 94.23\%$$

- . -