4 Obtener, si existe, la matriz $X = \begin{pmatrix} s & t & s \\ t & s & t \end{pmatrix}$ tal que $XX^t + 12\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$.

$$\underset{\underline{2}\times 3}{\begin{pmatrix} s & t & s \\ t & s & t \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} s & t \\ t & s \\ s & t \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} -24 & 24 \\ 24 & -36 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2s^2+t^2 & 3st \\ 3st & s^2+2t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & 24 \\ 24 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2s^2 + t^2 - 24 = 0 \rightarrow t^2 = 24 - 2s^2 \rightarrow t^2 = 24 - 2\cdot 4$

$t^2 = 16 \rightarrow t = \pm\sqrt{16} = \boxed{\pm 4}$

$3st + 24 = 0$

$s^2 + 2t^2 - 36 = 0 \rightarrow s^2 + 2(24 - 2s^2) - 36 = 0$

$: 3$

$s^2 + 48 - 4s^2 - 36 = 0$

$st + 8 = 0$

$-3s^2 + 12 = 0$

$st = -8$

$3s^2 = 12 \rightarrow s^2 = \frac{12}{3} = 4$

$s = \pm\sqrt{4} = \boxed{\pm 2}$

los signos de s y t deben ser $\neq$

• $s = 2$ y $t = -4$: $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ✓

• $s = -2$ y $t = 4$: $X = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ✓

6 Calcular A^n y B^n ($n \in \mathbb{N}$), siendo:

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 2\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 2\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 3\alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 3\alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^4 & 0 \\ 4\alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{pmatrix}$$ → Comprobamos por inducción que es cierto.

- Para $n = 1$: $A^1 = A = \begin{pmatrix} \alpha^1 & 0 \\ 1 \cdot \alpha^0 & \alpha^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ ✓ se cumple

- Suponemos que es cierto para n y vemos si se cumple para $n+1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ (n+1)\alpha^n & \alpha^{n+1} \end{pmatrix}$$ ✓ se cumple

$$n\alpha^{n-1} \cdot \alpha^1 + \alpha^n = n\alpha^{\cancel{n-1+1}} + \alpha^n = n\alpha^n + \alpha^n =$$

$$= \alpha^n \cdot (n+1)$$

- Como se cumplen las 2 condiciones anteriores la fórmula de A^n es correcta.

7 Hallar A^n, para $n \in \mathbb{N}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 + 0$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1 \quad 0} \\ 0 & 1 \quad 1 \\ 0 & 0 \quad 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 + 0$ $\qquad$ $2 + 1 + 0$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2 \quad 1} \\ 0 & 1 \quad 2 \\ 0 & 0 \quad 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 + 1 + 0$ $\qquad$ $3 + 2 + 1 + 0$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3 \quad 3} \\ 0 & 1 \quad 3 \\ 0 & 0 \quad 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & S_{n-1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{n-1} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

$$1 + 2 + \cdots + (n-1)$$

Suma de los n primeros nºs naturales: $1 + 2 + 3 + \cdots + n$

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- Para $n = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ se cumple

- Suponemos que es cierto para n y vemos si se cumple para n+1 :

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & S_{n-1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & S_n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

se cumple

$$S_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

$$S_n = S_{n-1} + n$$

12 Determinar el rango de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Por el método de los menores.

b) Por el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc|} & C_2 & C_3 \\ F_1 & 2 & 1 \\ F_2 & 4 & 1 \end{array} = 2 - 4 = -2 \neq 0$

$rg(A) \geq 2$

· <u>Menores orden 3</u> : a partir del menor ord. $2 \neq 0$

Podemos añadir F_3 o F_4 y para cada fila C_1, C_4 o C_5 :

$$\begin{array}{c|ccc|} & C_1 & C_2 & C_3 \\ F_1 & 1 & 2 & 1 \\ F_2 & 2 & 4 & 1 \\ F_4 & -1 & -2 & 0 \end{array} = 0 \qquad \begin{array}{c|ccc|} & C_2 & C_3 & C_4 \\ F_1 & 2 & 1 & 0 \\ F_2 & 4 & 1 & 2 \\ F_4 & -2 & 0 & 1 \end{array} = 2 - 4 - (4) =$$

$\uparrow$

$C_2 = 2C_1$

$= -6 \neq 0$

$rg(A) \geq 3$

· <u>Menores de orden 4</u> : construimos a partir del menor de ord. $3 \neq 0$

$$\begin{array}{c|cccc|} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ F_1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ F_2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ F_3 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ F_4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} = 0 \qquad \begin{array}{c|cccc|} & & \downarrow & & C_5 \\ & 2 & 1 & 0 & -1 \\ & 4 & 1 & 2 & 3 \\ & 6 & 1 & 4 & 7 \\ F_4 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array} =$$

$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$

$C_2 = 2C_1 \qquad\qquad F_2 \to F_2 - F_1$

$F_3 \to F_3 - F_1$

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_2 = 2F_1}{\uparrow}= 0$$

Como todos los menores de orden $4 = 0 \rightarrow \boxed{rg(A) = 3}$

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$

$F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1$

$F_4 \rightarrow F_4 + F_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{rg(A) = 3}$$

$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2$

$F_4 \rightarrow F_4 + F_2$

10 Aplicando el método de Gauss, calcular el rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Mediante operaciones elementales de tipo fila.

b) Mediante operaciones elementales de tipo columna.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{C_3 \to C_3 - 2C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 \to C_3 - 3C_2 \\ C_4 \to C_4 + 2C_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -12 & 12 \\ 3 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{C_4 \to C_4 + C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -12 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{rg(A) = 3}$$

14 Hallar los valores de α y β para los que el rango de la matriz A es lo más pequeño posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & \alpha & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & \beta \end{pmatrix}$$

$rg(A) = rg(A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & \alpha & -3 \\ 4 & -3 & -2 & 3 & \beta \end{pmatrix} \sim$$

se facilita el proceso

$F_2 \to F_2 - 3F_1$

$F_3 \to F_3 + 2F_1$

$F_4 \to F_4 + F_1$

$F_5 \to F_5 - 4F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & -13 & -6 & -7 \\ 0 & -3 & 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha+3 & 0 \\ 0 & 5 & -14 & -9 & \beta-12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -13 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha+3 & 0 \\ 0 & 5 & -14 & -9 & \beta-12 \end{pmatrix}$$

$F_3 \to \frac{1}{3} F_3$

$F_2 \longleftrightarrow F_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha+3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \beta-7 \end{pmatrix} \sim$$

$F_3 \to F_3 + 7F_2$

$F_5 \to F_5 + 5F_2$

$F_3 \to \frac{1}{8} F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \alpha+3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \beta-7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-7 \end{pmatrix}$$

$F_4 \to F_4 - 4F_3$

$F_5 \to F_5 - F_3$

$\alpha - 1 = 0 \longrightarrow \alpha = 1$

$\beta - 7 = 0 \longrightarrow \beta = 7$

El rango mínimo será 3 cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 7$