Lógica Difusa

Introducción

Queremos desarrollar un termostato para un centro comercial (CC).

Introducción

Queremos desarrollar un termostato para un centro comercial (CC).

El gobierno ha sacado una normativa que recomienda que la temperatura de los CC estén a 27ºC.

¿Cómo lo haríamos con un condicional IF – ELSE?

Introducción

Queremos desarrollar un termostato para un centro comercial (CC).

El gobierno ha sacado una normativa que recomienda que la temperatura de los CC estén a 27ºC.

```
IF TEMPERATURA < 27
        ENCENDER TERMOSTATO
ELSE
        APAGAR TERMOSTATO
```

Introducción

Por tanto, el termostato esta en dos estados, encendido o apagado (1 ó 0).

LÓGICA CLÁSICA

Introducción

Ejemplos de variables con lógica clásica

- **Edad**
- **Peso**
- **Altura**
- **Sexo**
- **Ideología política**
- **Calificación de la asignatura**
- **Salud**

Introducción

¿Problemas de la lógica clásica?

Introducción

¿Problemas de la lógica clásica?

- Bivalencia (verdadero o falso)
- No hay grados de verdad (todo o nada)
- No maneja la incertidumbre
- No maneja el “todo” o “nada”.

Introducción

Solución: **Lógica difusa**

Introducción

La lógica difusa o fuzzy logic (también se le llama lógica borrosa), es una rama de la inteligencia artificial que permite lidiar con situaciones y datos inciertos en la toma de decisiones y el razonamiento.

A diferencia de la lógica tradicional, que trabaja con valores binarios (verdadero o falso, si o no), la lógica difusa aborda la naturaleza borrosa y **subjetiva** de muchos problemas del mundo real al permitir la representación de grados de verdad entre 0 y 1.

Introducción

Por ejemplo, en la vida real usamos **cualificadores** del tipo "muy", "poco", "mucho", etc.

Esos son grados intermedios entre la verdad absoluta (1) y la falsedad completa (0).

Esa **cuantificación intermedia de variables cualitativas** es lo que aborda la logica difusa.

Introducción

Ejemplos de variables con lógica difusa

- **Edad**
- **Peso**
- **Altura**
- **Sexo**
- **Ideología política**
- **Calificación de la asignatura**
- **Salud**

Introducción

Se trata de una herramienta matemática fundamental para dar una respuesta a la limitación de la lógica clásica, pudiendo manejar la incertidumbre y la vaguedad inherentes a numerosos contextos.

Existen multitud de aplicaciones en una amplia variedad de campos:

- Sistemas de control automático (como automóviles y procesos industriales, donde las condiciones pueden ser variables y difíciles de modelar con precisión)
- Diagnóstico médico (diagnóstico de enfermedades, donde los síntomas pueden ser vagos y difíciles de interpretar de manera estrictamente binaria).
- Sistemas de recomendación (para adaptar recomendaciones a preferencias cambiantes y difusas de los usuarios).

Introducción

Queremos desarrollar un termostato para un centro comercial (CC).

El gobierno ha sacado una normativa que recomienda que la temperatura de los CC estén a 27ºC.

¿Es eficiente abordar este problema como binario?

Conjuntos difusos

Conjunto que sirve para realizar una evaluación **cualitativa** de alguna cantidad física.

Conjuntos difusos

Edad

¿A partir de qué edad se considera joven?

Conjuntos difusos

- **Edad - ¿A partir de qué edad se considera joven?**
- **Peso**
- **Altura**
- **Sexo**
- **Ideología política**
- **Calificación de la asignatura**
- **Salud**

Conjuntos difusos

El enfoque de la lógica difusa viene a corregir esto, considerando que el conjunto "personas jóvenes" es un conjunto que no tiene una delimitación (frontera) clara para pertenecer o no a él.

Para tratar el problema, se definen previamente dos conceptos:

grado de pertenencia y **función de pertenencia**

Conjuntos difusos

Grado de pertenencia: es un número que indica en qué medida un elemento dado pertenece a un conjunto difuso.

Este número es un valor entre 0 y 1, donde 0 representa una no pertenencia (ausencia total) y 1 representa una pertenencia completa (presencia total).

Los grados de pertenencia intermedios representan niveles de pertenencia parciales.

Conjuntos difusos

Definición de grados de pertenencia:

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Función de pertenencia: es una curva o función matemática que describe cómo varía el grado de pertenencia a lo largo del rango de valores posibles de una variable.

Es decir, es una representación gráfica de cómo un elemento se relaciona con un conjunto difuso en función de su valor en una variable.

Pueden tomar diversas formas, como triangular, trapezoidal, gaussiana, sigmoide, etc.

Conjuntos difusos

Función de pertenencia.

Notación: Un conjunto difuso A en el dominio χ (discreto o continuo) se define como sigue:

$A = \{(x, \mu A(x)) | x \in \chi)\}$, donde $\mu A(x)$ es la función de pertenencia para el conjunto difuso A tal que $\mu A : \chi \rightarrow [0, 1]$. Es decir, asigna a cada elemento $x \in \chi$ un valor entre 0 y 1, que sería el grado de pertenencia de x al conjunto A

Conjuntos difusos

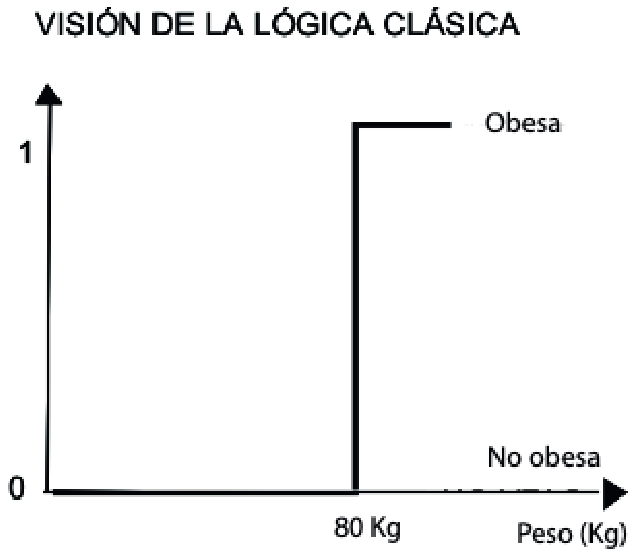
Función de pertenencia.

Peso: Función de pertenencia del conjunto “PersonaObesa”

Conjuntos difusos

Función de pertenencia.

Peso: Función de pertenencia del conjunto “PersonaObesa”



Conjuntos difusos

Función de pertenencia.

Peso: Función de pertenencia del conjunto “PersonaObesa”

El ejemplo anterior, una persona con un peso de 79 kg podría pertenecer al conjunto difuso ”PersonasObesas" con un grado de pertenencia de 0.8, una persona que pese 81 kg tendrá un grado de 0.85 y una que pese 60 kg tendrá un grado de pertenencia de 0.05. En definitiva, la persona de 79 kg diremos que es una persona “obesa en gran medida”

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Algunos conceptos de la teoría clásica sirven para los conjuntos difusos, pero hay otros conceptos nuevos que conforman la teoría de conjuntos difusos.

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Variable lingüística: concepto que se va a calificar de forma difusa.

Conjuntos difusos

Variables lingüísticas:

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Universo de discurso: rango de valores que pueden tomar los elementos que poseen la propiedad expresada por la variable lingüística.

Conjuntos difusos

¿Universo del discurso?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Valor lingüístico: las diferentes clasificaciones que se pueden efectuar sobre la variable lingüística. Es lo que llamaremos **conjunto difuso**.

Conjuntos difusos

¿Valores lingüisticos?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Conjunto nítido: un conjunto es nítido si su función de pertenencia toma valores en $\{0,1\}$, y difuso si toma valores en $[0,1]$.

Conjuntos difusos

¿Algún ejemplo de conjunto nítido?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Alfa-corte: es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto difuso dado, con grado mayor o igual que alfa ($A\alpha$ = {$x \in \chi / \mu A(x) \geq \alpha$}). Si fuese mayor que alpha, se denominaría alfa corte estricto.

Permite convertir un conjunto difuso a conjunto nítido.

Conjuntos difusos

Ejemplos de alfa-corte

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Soporte: es el conjunto de todos los puntos $x \in \chi$ tales que su función de pertenencia es mayor que 0. En otras palabras, es el conjunto nítido de elementos que tienen grado de pertenencia estrictamente mayor que 0 (alfa-corte estricto de nivel 0).

Es definir un subconjunto difuso eliminando los elementos que no tienen pertenencia ninguna.

Conjuntos difusos

Ejemplos de soporte

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Núcleo: es el conjunto nítido de elementos que tienen grado de pertenencia 1 (alfa-corte de nivel 1).

Es lo opuesto a soporte, pero los conjuntos soporte y núcleo NO son complementarios.

Conjuntos difusos

Ejemplos de núcleos

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Altura: es el valor más grande de la función de pertenencia.

En multitud de casos será 1, pero no tiene que ser siempre así.

Conjuntos difusos

¿Ejemplos de altura diferente a 1?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Conjunto normal o normalizado: es aquel conjunto que su núcleo es no vacío, es decir, se puede encontrar un punto $x \in \chi$ tal que $\mu A(x) = 1$ (su altura es 1).

Conjuntos difusos

¿Ejemplos de conjuntos normales?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Punto de cruce: es el elemento x de χ para el cual $\mu A(x)$ = 0.5.

Es el equivalente al concepto de "mediana" en estadística. Se podría decir que es el punto de **máxima ambigüedad** de un conjunto difuso.

Conjuntos difusos

¿Ejemplos de puntos de cruce?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

Conjunto difuso singleton: aquel conjunto cuyo soporte es un solo punto que cumple la condición $\mu A(x) = 1$.

Es decir, el soporte coincide con el núcleo y tienen un único punto.

Conjuntos difusos

¿Ejemplos de conjunto difuso singleton?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos

Conceptos de los conjuntos difusos.

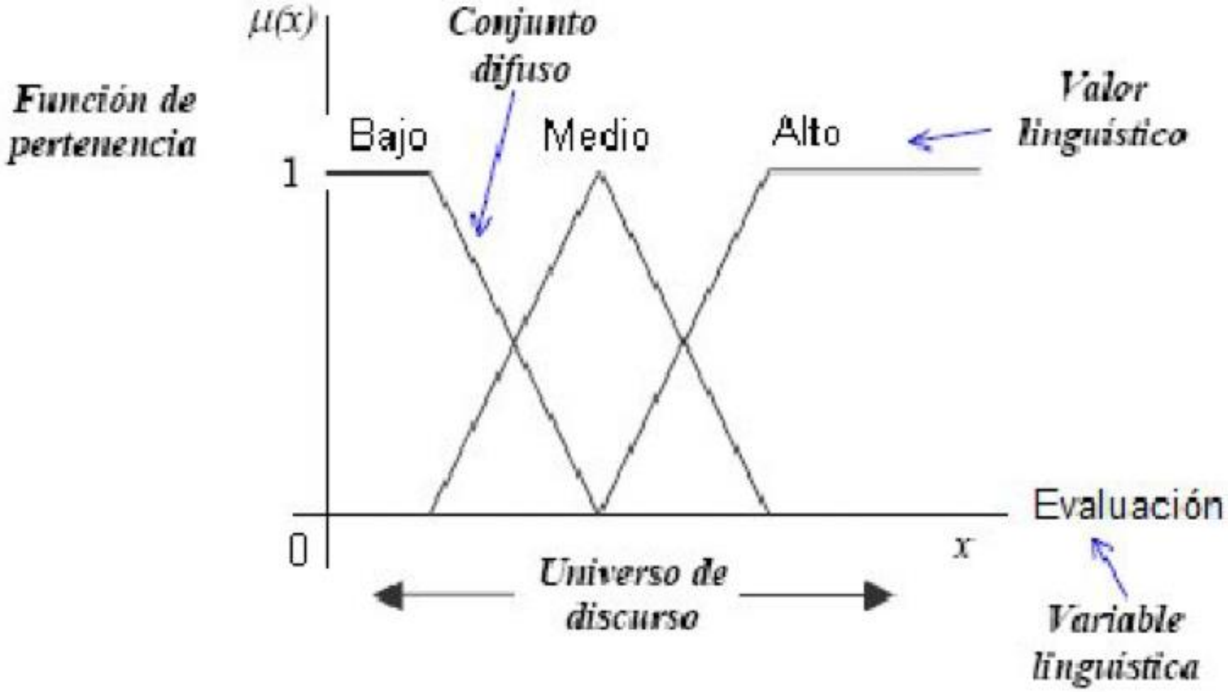
Convexidad: un conjunto es convexo si no hay puntos de inflexión o cambios de monotonía.

Conjuntos difusos

¿Ejemplos de conjuntos difusos convexos?

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Conjuntos difusos



Funciones de Pertenencia

En la lógica difusa, los conjuntos difusos sirven para modelar diferentes problemas o comportamientos.

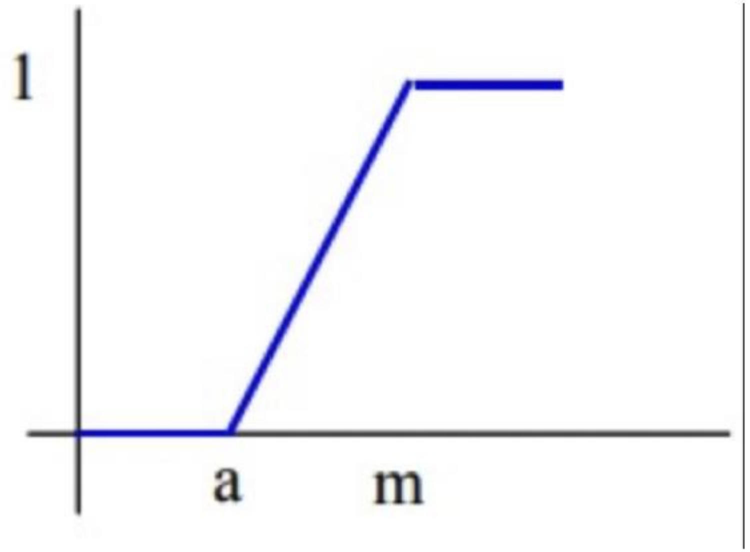
Para ello, se usan funciones de pertenencia, ya sea de forma discreta o continua.

Funciones de Pertenencia

PI: para modelar conjuntos difusos lineales

Funciones de Pertenencia

PI: para modelar conjuntos difusos lineales



$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } a < x < m \\ 1 & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

Funciones de Pertenencia

PI: se aplica a

- Disminución o aumento lineal.
- Umbrales definidos con transición gradual.
- Conjuntos con límites suaves en un solo extremo.

Ejemplos

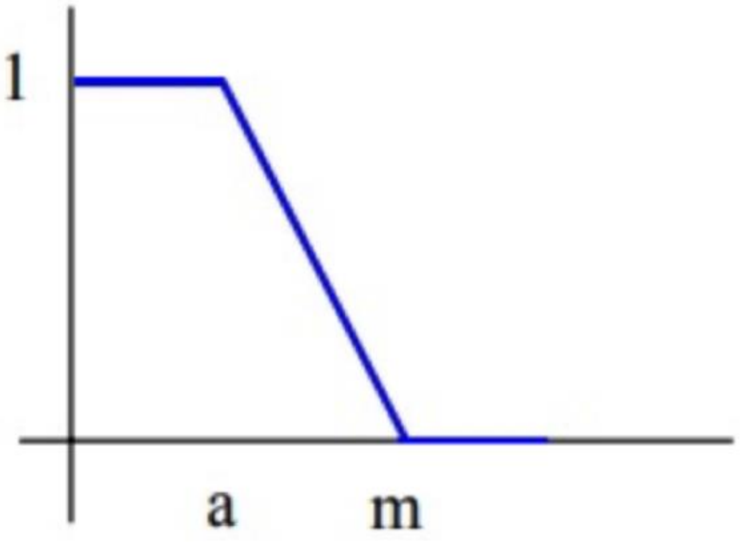
- Edad, niveles de contaminación, velocidad, etc…

Funciones de Pertenencia

L: para representar conjuntos inversos a la pi.

Funciones de Pertenencia

L: para representar conjuntos inversos a la pi.



$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq a \\ \frac{m-a}{x-a} & \text{si } a < x < m \\ 0 & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

Funciones de Pertenencia

L: se aplica a

- Disminución o aumento lineal.
- Umbrales definidos con transición gradual.
- Conjuntos con límites suaves en un solo extremo.

Ejemplos

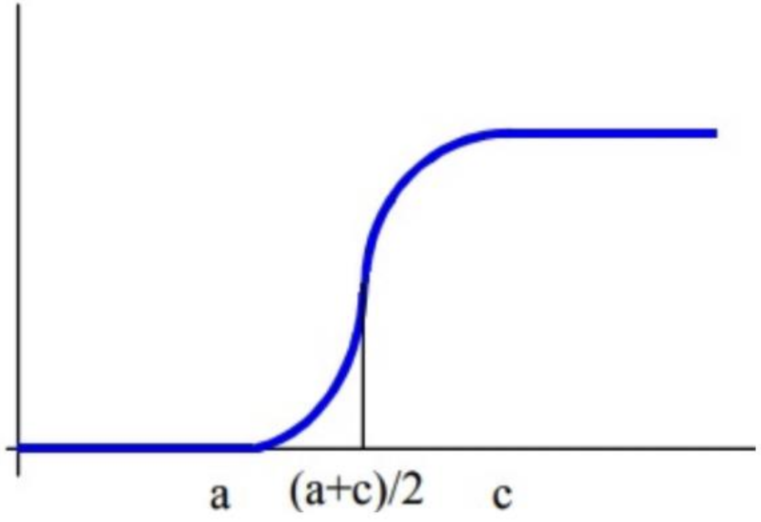
- Edad, niveles de contaminación, velocidad, etc...

Funciones de Pertenencia

GAMMA (o sigmoidea): para modelar conjuntos difusos en los que la transición entre la pertenencia completa ($\mu(x)=1$) y la no pertenencia ($\mu(x)=0$) es suave y asimétrica

Funciones de Pertenencia

GAMMA (o sigmoidea): para modelar conjuntos difusos en los que la transición entre la pertenencia completa (μ(x)=1) y la no pertenencia (μ(x)=0) es suave y asimétrica



$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{si } a < x \le \frac{a+c}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{si } \le \frac{a+c}{2} < x < c \\ 1 & \text{si } x \ge c \end{cases}$$

Funciones de Pertenencia

GAMMA (o sigmoidea): se aplica a

- Transiciones asimétricas.
- Crecimiento o decrecimiento exponencial.
- Umbrales con pendientes suaves

Ejemplos

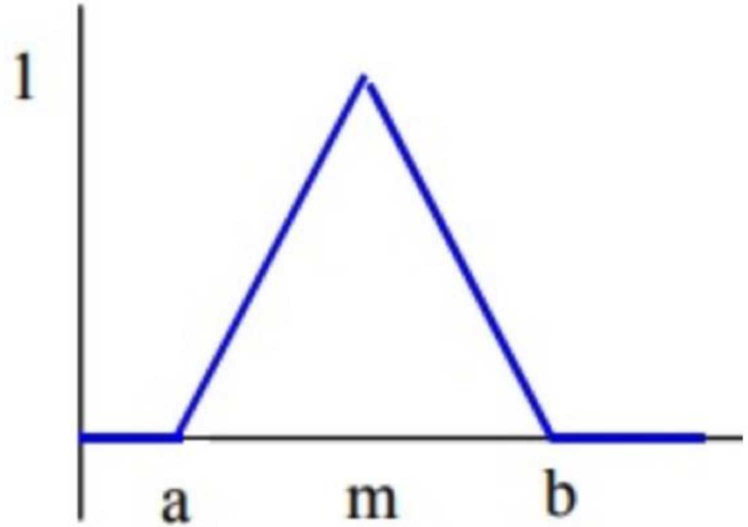
- Modelado de riesgo financiero, procesos de decisión médica, clasificación de temperatura, etc.

Funciones de Pertenencia

TRIANGULAR: para modelar conjuntos difusos con una transición entre lo verdadero y falso de forma suave y simétrica.

Funciones de Pertenencia

TRIANGULAR: para modelar conjuntos difusos con una transición entre lo verdadero y falso de forma suave y simétrica.



$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{si } m < x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Funciones de Pertenencia

TRIANGULAR: se aplica a

- Transiciones simétricas.
- Umbrales con pendientes suaves y un pico claro

Ejemplos

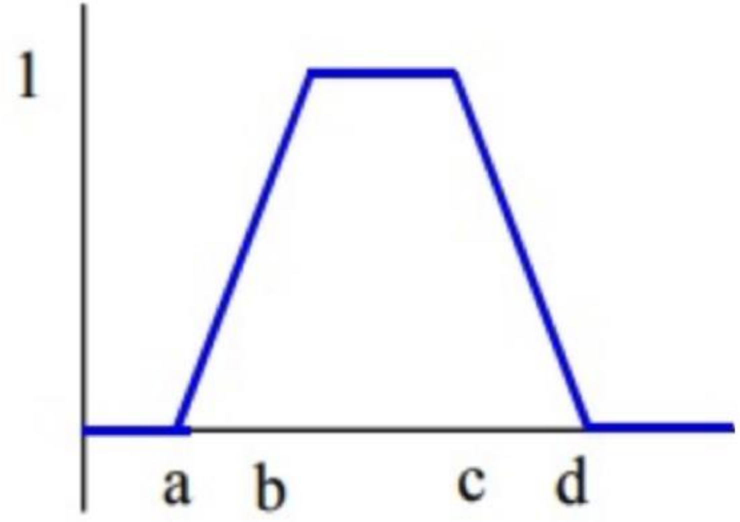
- Control en un punto, procesamiento de lenguaje natural (modelar palabras como ”cerca” o rápido”), etc…

Funciones de Pertenencia

TRAPEZOIDAL: para modelar conjuntos difusos con una transición entre lo verdadero y falso de forma suave y simétrica pero la zona transición sea más prolongada (no pico)

Funciones de Pertenencia

TRAPEZOIDAL: para modelar conjuntos difusos con una transición entre lo verdadero y falso de forma suave y simétrica pero la zona transición sea más prolongada (no pico)



$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{b-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{si } x > d \end{cases}$$

Funciones de Pertenencia

TRAPEZOIDAL: se aplica a

- Modelado total en un intervalo, y fuera de este intervalo disminuye o aumenta gradualmente.

Ejemplos

- Para modelar conceptos como “moderado”.

Funciones de Pertenencia

MODELADO DE UN CONJUNTO: un conjunto A puede expresarse de forma discreta o continua, mediante sumatorio o integrales del ratio de la función de pertenencia y el elemento.

$$A = \sum_{U} \frac{\mu_A(X_i)}{X_i}$$

$$A = \int_{U} \frac{\mu_A(X_i)}{X_i}$$

Funciones de Pertenencia

RESUMEN: muy a grosso modo, se puede simplificar el uso de un tipo u otro de la siguiente forma:

- Las funciones **Gamma, PI y L** se usan para calificar valores lingüísticos extremos, como "recién nacido" o "anciano", respectivamente.
- Las funciones **triangular y trapezoidal** se usan para describir valores intermedios (como "adolescente", "joven", "adulto").

Conjuntos difusos

Ejercicio final: definir variables y funciones de pertenencia de:

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud