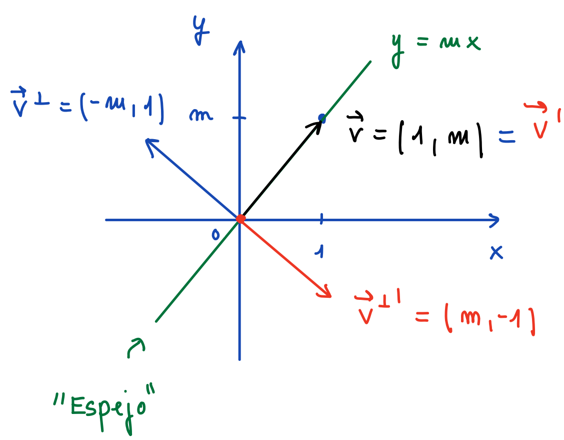
1 Hallar la matriz asociada a la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de una simetría axial respecto a la recta $y = mx$.



$$T(1, m) = (1, m)$$

$$T(-m, 1) = (m, -1)$$

$$\begin{cases} T(1, m) = T(1, 0) + m\,T(0, 1) = (1, m) \\ T(-m, 1) = -m\,T(1, 0) + T(0, 1) = (m, -1) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(\cdot\, m)} \quad m\,T(1, 0) + m^2\,T(0, 1) = (m, m^2)$$

$$-m\,T(1, 0) + T(0, 1) = (m, -1)$$

$\oplus$

$$(1 + m^2) \cdot T(0, 1) = (2m, m^2 - 1)$$

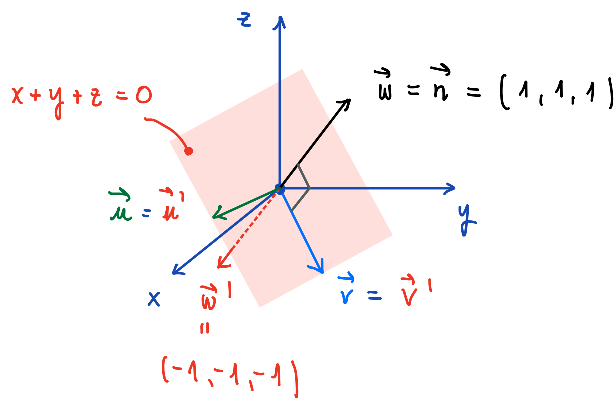
$$T(0, 1) = \underline{\underline{\left(\frac{2m}{1 + m^2}, \frac{m^2 - 1}{1 + m^2} \right)}}$$

$$T(1,0) = (1,m) - m\left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{m^2-1}{1+m^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1+m^2-2m^2}{1+m^2}, \frac{m+\cancel{m^3}-\cancel{m^3}+m}{1+m^2}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}}$$

3 Hallar la matriz asociada a la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de una simetría respecto al plano $x + y + z = 0$.



$\vec{v}$ cualquier vector del plano:

· si $y = 0$, $z = -1$:

$x = -y - z = 1$

$\vec{v} = (1, 0, -1)$

$\vec{u}$ debe ser $\perp$ a $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k} - (-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} =$$

$$= (1, -2, 1)$$

① → $T(1,1,1) = T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) = (-1,-1,-1)$

② $T(1,0,-1) = T(1,0,0) - T(0,0,1) = (1,0,-1)$

③ → $T(1,-2,1) = T(1,0,0) - 2T(0,1,0) + T(0,0,1) = (1,-2,1)$

① - ③ : $3T(0,1,0) = (-2,1,-2)$

$$T(0,1,0) = \underline{\underline{\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)}}$$

① + ② : $2T(1,0,0) + T(0,1,0) = (0,-1,-2)$

$$2T(1,0,0) = (0,-1,-2) - \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

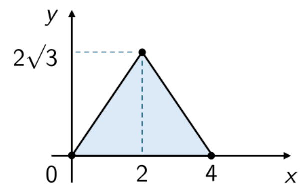
$$T(1,0,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right)}}$$

② : $T(0,0,1) = T(1,0,0) - (1,0,-1) =$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}\right) - (1,0,-1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

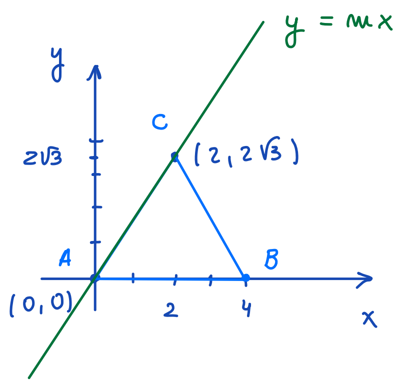
4 Se considera la siguiente figura en el plano:



Se desea una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que efectúe el siguiente proceso sobre la figura, respetando el orden:

1) Una simetría axial sobre la recta que une los puntos $(0,0)$ y $(2, 2\sqrt{3})$.
2) Un giro en sentido antihorario de 60°.
3) Una contracción de factor k.
4) Un giro en sentido horario de 30°.

Además, el punto $(4,0)$ debe transformarse en el $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
Hallar la transformación T y representar la figura transformada.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{2 - 0} = \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}\,x$$

$$A = A_{T_4} \cdot A_{T_3} \cdot A_{T_2} \cdot A_{T_1}$$

$$A_{T_1} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \underset{m=\sqrt{3}}{=} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\theta = 60^\circ$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{T_3} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = K \cdot I \qquad (0 < K < 1)$$

$$A_{T_4} = \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\operatorname{sen}(-30^\circ) \\ \operatorname{sen}(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \operatorname{sen} 30^\circ \\ -\operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} =$$

$\theta = -30^\circ$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot K \cdot I \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{K}{8}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{K}{8}\begin{pmatrix} -4\sqrt{3} & 4 \\ 4 & 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{K}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}}$$

Sabemos que :

$$T(4,0) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} , \frac{3}{2} \right)$$

$$T(4,0) = A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{K}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{2 \times 1} =$$

$$= \frac{K}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -4\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} -2K\sqrt{3} \\ 2K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

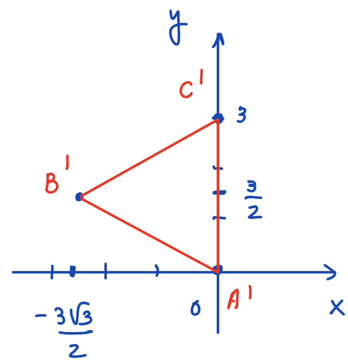
$$\begin{cases} \cancel{-}2K\cancel{\sqrt{3}} = \cancel{-}\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{2} \rightarrow K = \frac{3}{4} \checkmark \\ 2K = \frac{3}{2} \rightarrow K = \frac{3}{4} \checkmark \end{cases} \rightarrow A = \frac{3}{8} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{T(x,y) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} x + \frac{3}{8} y , \frac{3}{8} x + \frac{3\sqrt{3}}{8} y \right)}$$

$$T(0,0) = (0,0) \quad , \quad T(4,0) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} , \frac{3}{2} \right) \approx (-2'6 , 1'5)$$

$$T(2, 2\sqrt{3}) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot 2 + \frac{3}{8} \cdot 2\sqrt{3} , \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{3\sqrt{3}}{\cancel{8}_{4}} \cdot \cancel{2}\sqrt{3} \right) =$$

$$= \left(0 , \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right) = (0, 3)$$



5 Si un vector $\vec{v}$ no cambia al aplicarle una transformación T, decimos que $\vec{v}$ es un *punto fijo* de T y cumplirá que: $T(\vec{v}) = \vec{v}$. Calcular los puntos fijos de las siguientes transformaciones:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por un deslizamiento cortante en la dirección del eje x con factor k.

→ **b)** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por una simetría axial sobre la recta $y = mx$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por una rotación alrededor del eje y.

$$T(\vec{v}) = \vec{v} \quad \to \quad T(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} (1-m^2)x + 2my \\ 2mx + (m^2-1)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} ① \ (1-m^2)x + 2my = (1+m^2)x \\ ② \ 2mx + (m^2-1)y = (1+m^2)y \end{array}\right\}$$

① $2my = (\cancel{1}+m^2\cancel{-1}+m^2)x \longrightarrow \cancel{2m}y = \cancel{2m}^2 x \longrightarrow y = mx$

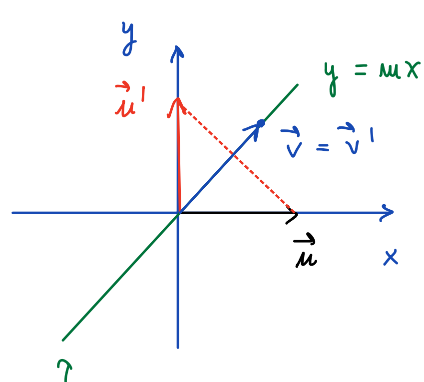
② $2mx = (1+m^2-m^2+1)y \longrightarrow \cancel{2}mx = \cancel{2}y$

$\downarrow$

~~$mx = mx$~~ S.C.I 1 par

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = m\alpha \end{array}\right\} \longrightarrow \text{Puntos fijos de } T : \boxed{\vec{v} = (x,y) = (\alpha, m\alpha) \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

$(\alpha \in \mathbb{R})$



dos puntos sobre la recta NO se reflejan $\Rightarrow$ son fijos.

7 Sea una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que realiza el siguiente proceso:

1) Una simetría respecto al plano $x = 0$.
2) Un giro en sentido antihorario de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje z.
3) Un giro en sentido horario de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje y.

Se pide:

a) Hallar la transformación T.

b) Calcular los puntos fijos de T.

c) Determinar la transformación inversa T^{-1}, que permite obtener el vector inicial a partir de su transformado.

a) $A = A_{T_3} \cdot A_{T_2} \cdot A_{T_1}$

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = 0 \equiv$ plano yz

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\theta = \frac{\pi}{2}}{=} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{T_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \underset{\theta = -\frac{\pi}{2}}{=} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & 0 & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & \quad y & \quad z \end{matrix} \\ \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}} \end{array}$$

$$\boxed{T(x,y,z) = (-z, -x, -y)}$$

b) Puntos fijos : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} -x = x \\ -x = y \\ -y = z \end{matrix}\right\}$

$$\left\{\begin{matrix} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ y = -x = 0 \\ z = -y = 0 \end{matrix}\right. \longrightarrow \boxed{\text{Punto fijo : } \vec{v} = (0,0,0)}$$

c) $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = (x,y,z) \qquad \vec{v}\,' = (x', y', z')$ → Debemos hallar A^{-1}.

T^{-1} ?

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{t} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{T^{-1}(x,y,z) = (-y,-z,-x)}$$