Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 7

DFESTS

UA UNIVERSITAT D'ALACANT UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

TEMA 3.- SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

…

3.5.4. Cálculo de convoluciones de duración infinita
3.6. Concepto y clases de sistemas de tiempo discreto
3.6.1.- Propiedades de los sistemas de tiempo discreto
3.7. Sistemas lineales e invariantes (LTI) en tiempo discreto
3.7.1. Respuesta al impulso

3.5.4. Cálculo de convoluciones de duración infinita

Para calcular una convolución de **duración infinita** recurrimos a métodos analíticos

2 MÉTODOS:
1.- Utilizando la definición de convolución
(6 pasos, apoyándose en la representación gráfica)
2.- Utilizando las propiedades de convolución

Método 1. Utilizando la definición de convolución y transformándola en suma de series de potencias.

$$\boxed{z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k] \qquad \rightarrow \sum_{k=\mathrm{N}_1}^{\mathrm{N}_2} r^k = \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{(1-r)} \quad ; con\ r \neq 1}$$

Ejemplo de suma de series de potencias. $r = 1/2$

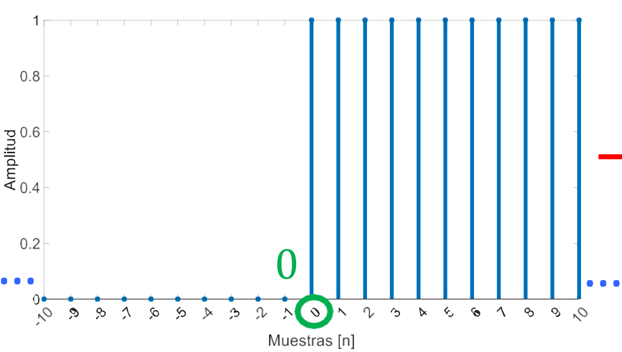
$$\sum_{K=0}^{4} \left({}^1\!/_2\right)^k = \frac{\left({}^1\!/_2\right)^0 - \left({}^1\!/_2\right)^{4+1}}{\left(1 - {}^1\!/_2\right)} = \frac{1 - \left({}^1\!/_2\right)^5}{{}^1\!/_2} = 2 \cdot \left(1 - \left({}^1\!/_2\right)^5\right)$$

Problema 1. Dadas las señales de duración no finita, calcular la convolución de X e Y.

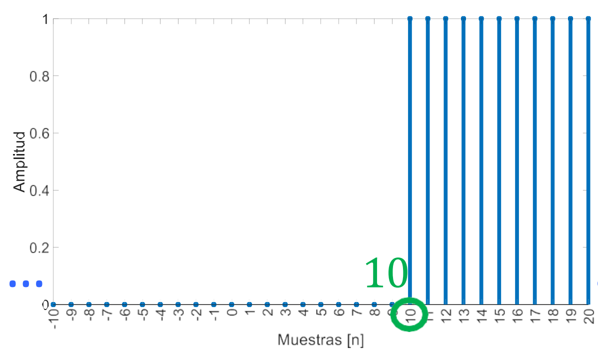
$$\mathbf{X[n]} = \mathrm{U[n]} - \mathrm{U[n-10]} \qquad \mathbf{Y[n]} = \left({}^{1}/_{3}\right)^{n} \mathrm{U[n]} \qquad \text{Calcular}: \quad \boldsymbol{Z[n]} = \boldsymbol{X[n]} * \boldsymbol{Y[n]}$$

En primer lugar, representamos la señal X[n] e Y[n]

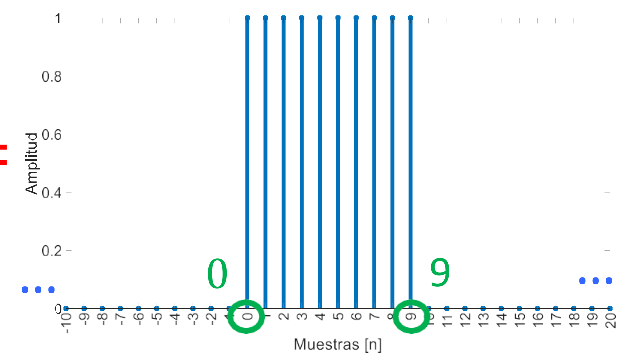
$U[n]$



$U[n-10]$



$x[n]$=U[n]-U[n-10]



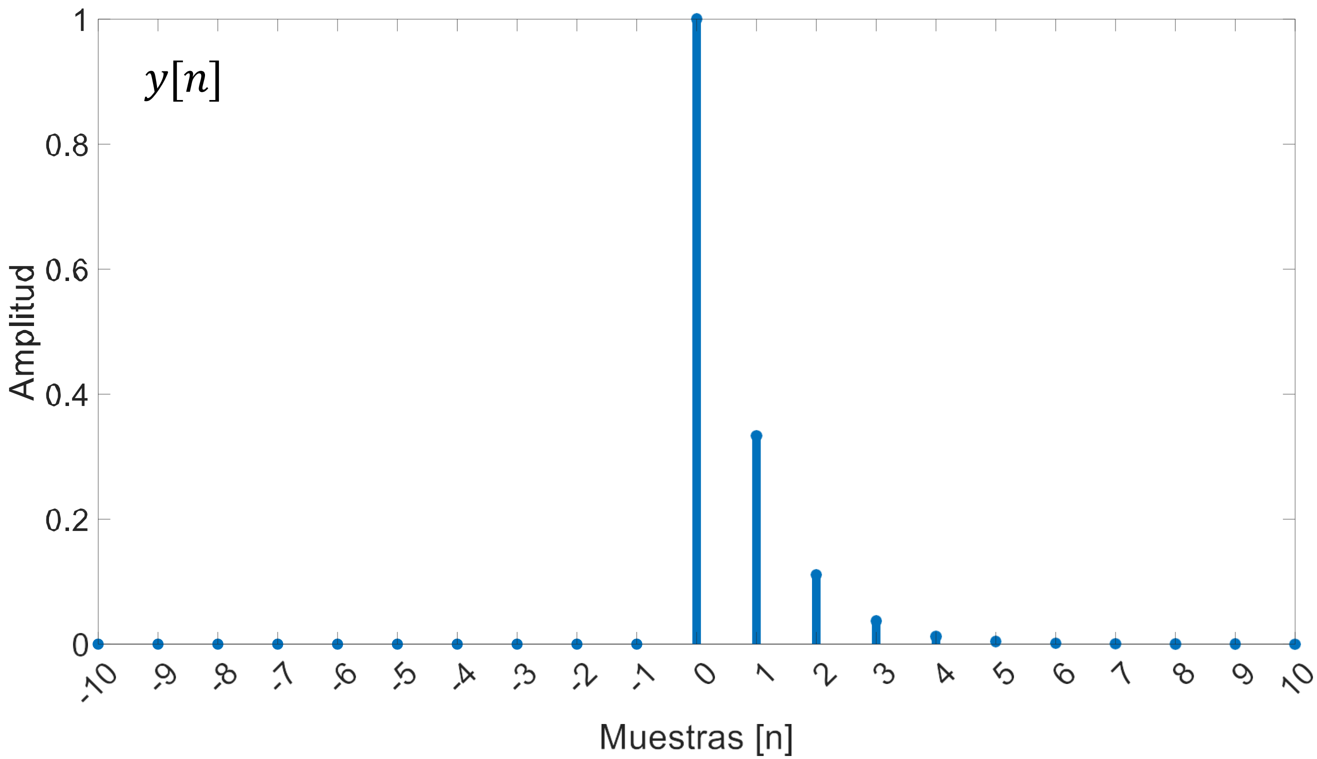
$U[n] = 1, para\ n \geq 0$
(0 para el resto de muestras)

$U[n-10] = 1, para\ n \geq 10$
(desplazado en el tiempo)

$x[n] = 1, para\ n$ entre 0 y 9
(0 para el resto de muestras)

DFESTS

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n U[n]$$



$Cuando\ n \rightarrow \infty$

$\mathrm{y[n]} = 0$

Pasos para el cálculo de la convolución no finita:

Paso 1. Calcula instante inicial y final de $z[n]$.

En este caso, a partir de la representación gráfica.

Duración de $Z[n] = X[n] * Y[n]$

$Z_{ini} = X_{ini} + Y_{ini} = 0 + 0 = 0$

$Z_{fin} = X_{fin} + Y_{fin} = 9 + \infty = \infty$

$$\boxed{\begin{array}{c} Z[\mathrm{n}] \neq 0 \\ 0 \leq n \leq \infty \end{array}} \rightarrow \quad Duración\ infinita$$

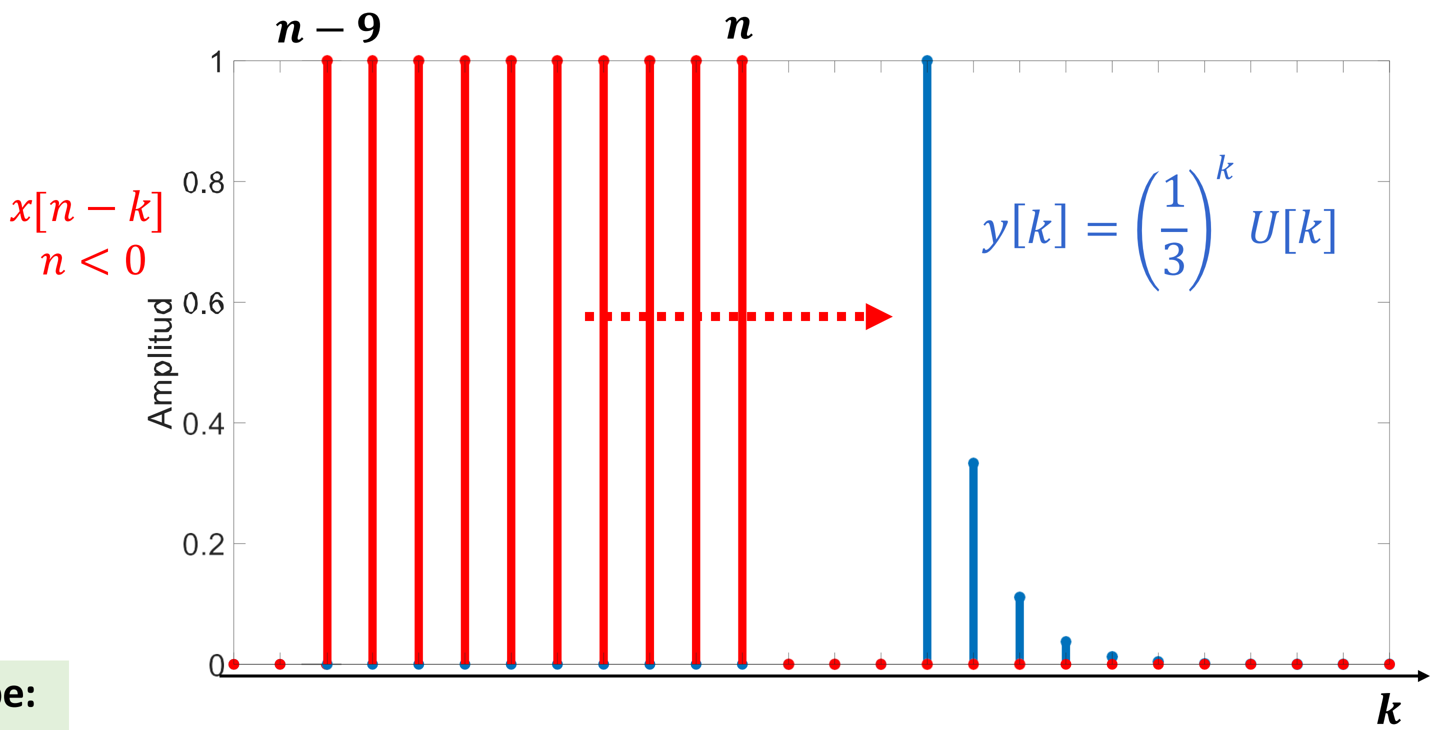
Paso 2. Invierte en k la secuencia más sencilla entre $x[n]$ e $y[n]$.

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] * x[n-k]$$

Invertimos x, por ser finita, y por lo tanto más sencilla.

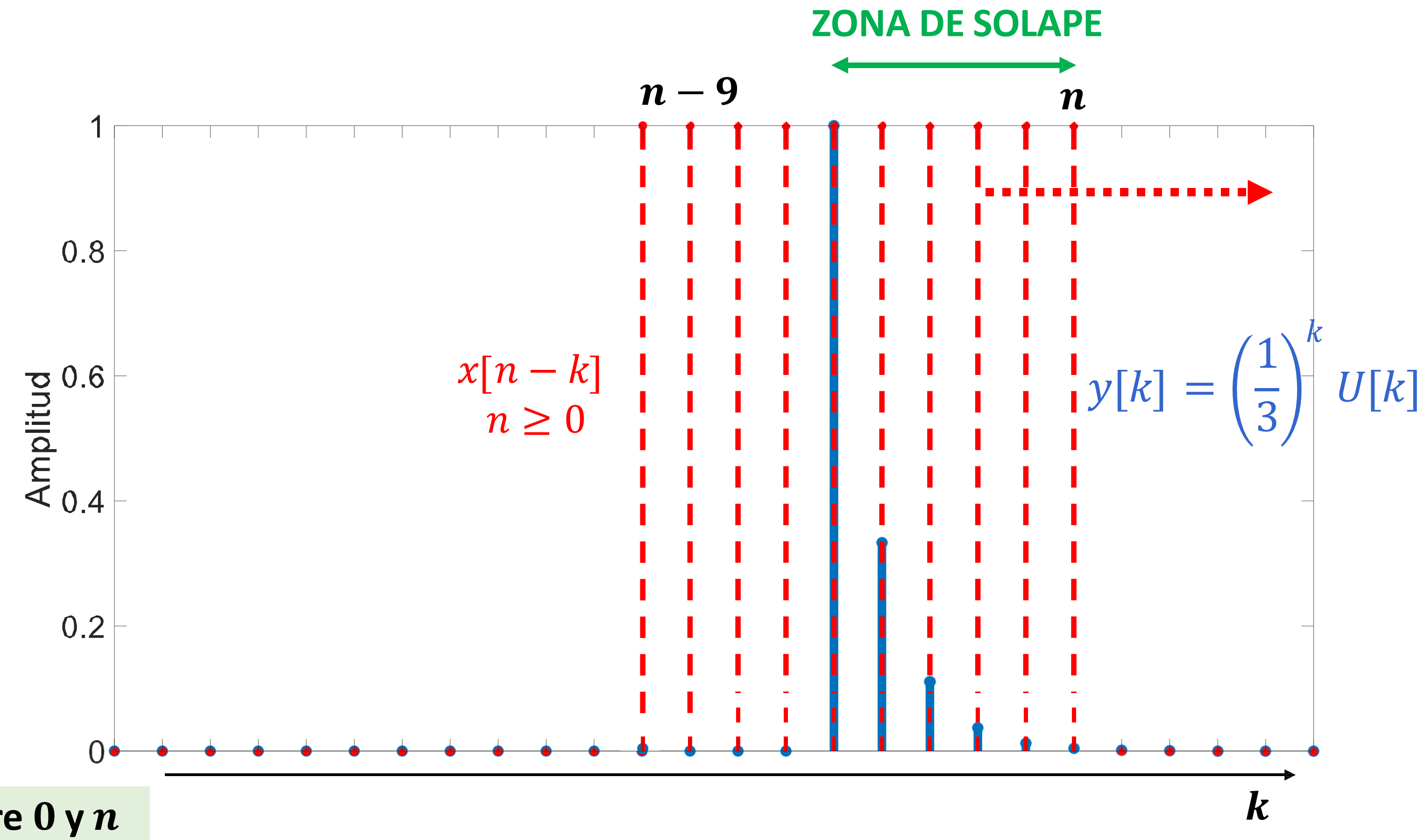
3. Desplaza la secuencia invertida yendo desde - ∞ a +∞ y determina las **zonas de solape** entre las secuencias en *k* . Esto reducirá los límites de la suma de la convolución.

Si $n < 0$



No hay solape:
$z[n] = 0, n < 0$

Si $n \geq 0$



Hay solape entre 0 y n ("$k = 0$ hasta $k = n$")

4. Resuelve la suma de la convolución para todos los instantes *n* que cumplen la expresión.

Si $n \geq 0 \quad y \quad n < 9$

Entre 0 y n, la amplitud es **1**

$\mathbf{x}[\boldsymbol{n}] = \delta[n] + \ldots + \delta[n-9]$

$\mathbf{Y}[\mathbf{n}] = \left({}^{1}\!/_{3}\right)^{n} \mathrm{U}[\mathrm{n}]$

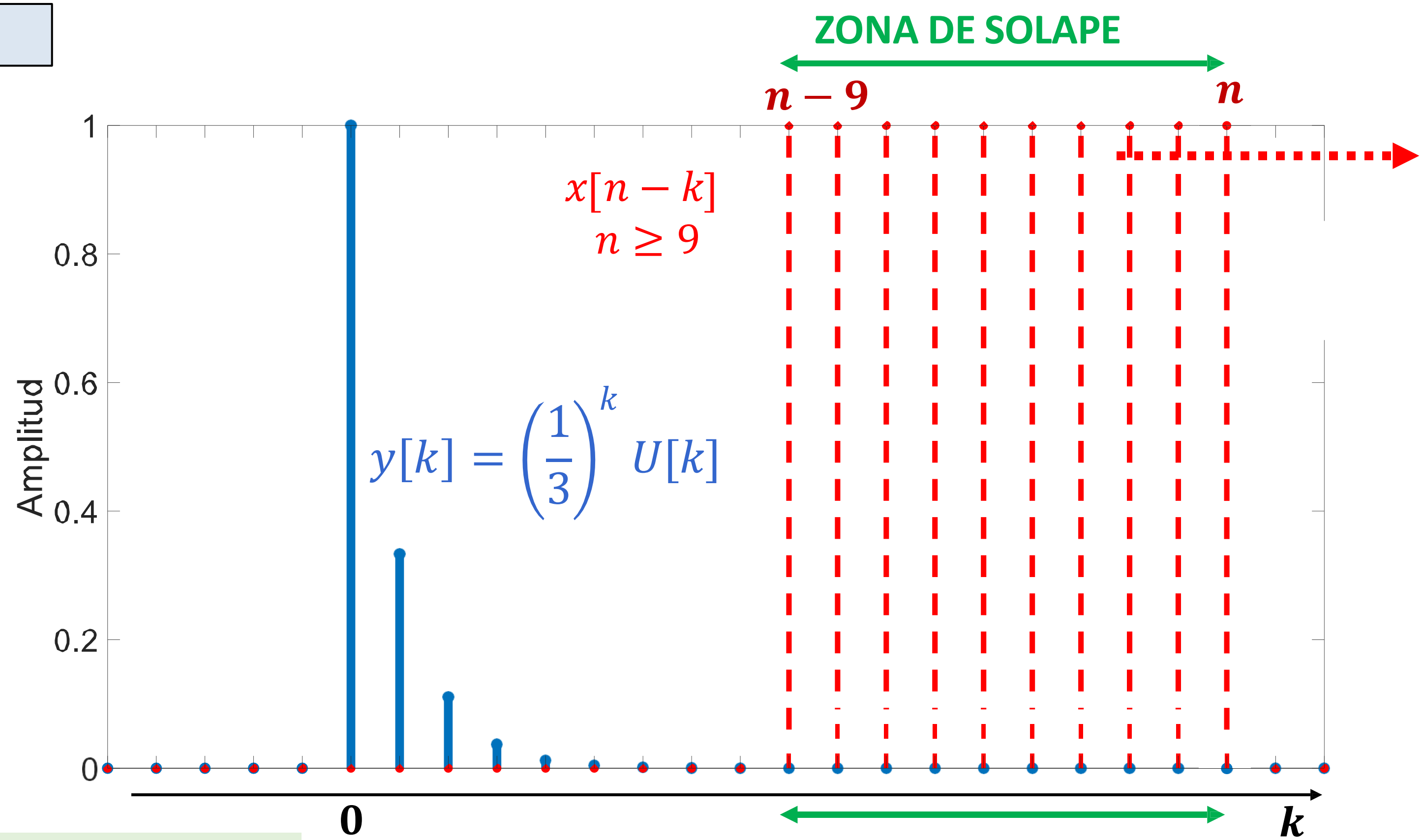
$$\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{n}] = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} y[k] * x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} \left({}^{1}\!/_{3}\right)^{k} \cdot 1 =$$

Aplicamos:

$$\sum_{k=\mathrm{N}_1}^{\mathrm{N}_2} r^k = \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{(1-r)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left({}^{1}\!/_{3}\right)^{k} = \frac{\left({}^{1}\!/_{3}\right)^{0} - \left({}^{1}\!/_{3}\right)^{n+1}}{\left(1 - {}^{1}\!/_{3}\right)} = \frac{1 - \left({}^{1}\!/_{3}\right)^{n+1}}{{}^{2}\!/_{3}} = {}^{\mathbf{3}}\!/_{\mathbf{2}} \left(\mathbf{1} - \left({}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}\right)$$

Si $n \geq 9$



Hay solape entre $n-9$ y n
($k = n-9$ hasta $k = n$)

Al haber solape, aplicamos
la expresión de la suma de potencias →

$$\boldsymbol{Z[n]} = \sum_{\boldsymbol{k=n-9}}^{\boldsymbol{n}} y[k] * x[n-k] = \sum_{k=n-9}^{n} \left({}^{1}/_{3}\right)^{k} \cdot 1 =$$

Aplicamos:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} r^k = \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{(1-r)}$$

$$= \frac{({}^{1}/_{3})^{n-9} - ({}^{1}/_{3})^{n+1}}{(1-{}^{1}/_{3})} = \boldsymbol{{}^{3}/_{2}\left(({}^{1}/_{3})^{n-9} - ({}^{1}/_{3})^{n+1}\right)}$$

Para n ≥ 9

5. Repite los pasos del 2 al 4 para todos los casos.

6. Unifica en una sola expresión la convolución obtenida, $z[n]$.

$$\boldsymbol{Z[n]} = \begin{cases} 0 \quad para \quad n < 0 \\ {}^{3}/_{2}\left(1 - \left({}^{1}/_{3}\right)^{n+1}\right. \quad para \quad 0 \le n < 9 \\ {}^{3}/_{2}\left(\left({}^{1}/_{3}\right)^{n-9} - \left({}^{1}/_{3}\right)^{n+1}\right) \quad para \quad n \ge 9 \end{cases}$$

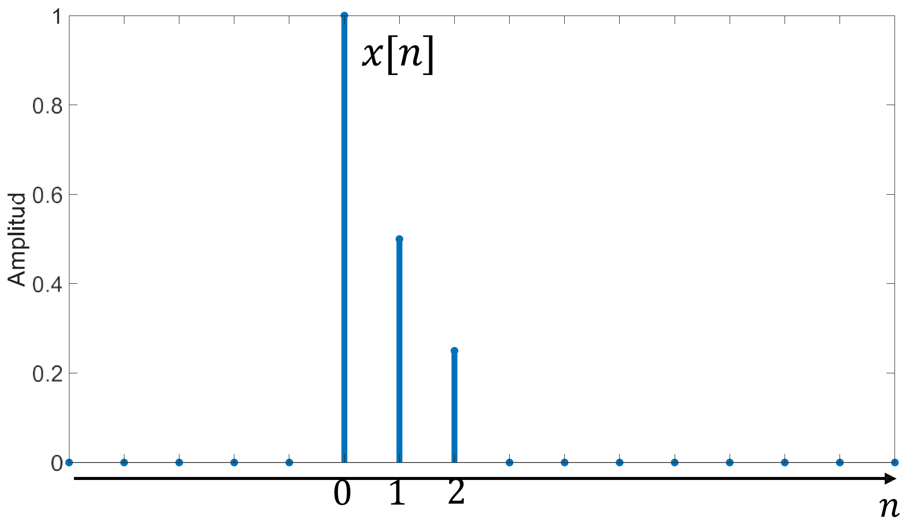
Este es el resultado de la convolución

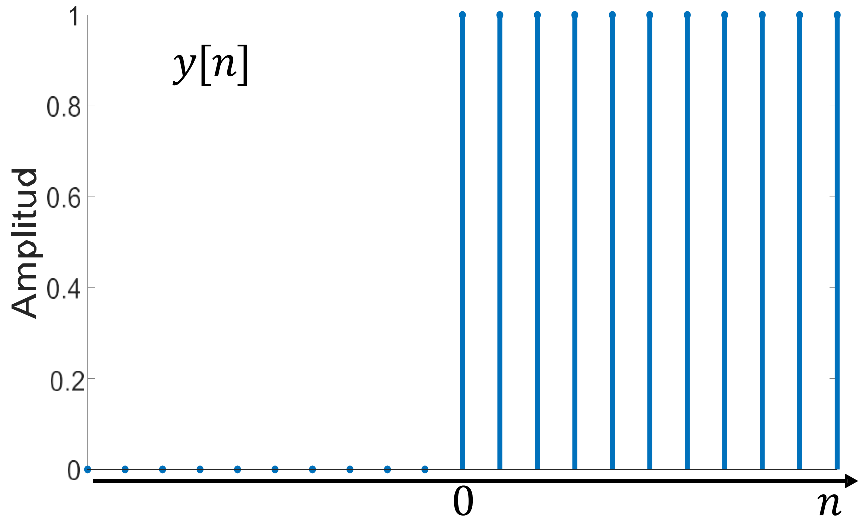
Método 2. Utilizando las propiedades de la convolución

Problema 2. Dadas las señales de duración no finita, calcular la convolución de X e Y.

$$x[n] = (1/2)^n \prod\left(\frac{n}{3}\right)$$
$$y[n] = U[n]$$

Calcular : $\boldsymbol{Z[n] = X[n] * Y[n]}$





$$A\prod\left(\frac{n}{L}\right) = \begin{cases} A & 0 \le n \le (L-1) \\ 0 & resto \end{cases}$$

Secuencia pulso cuadrado

Desarrollamos la secuencia $(^1/_2)^n$ hasta 3-1=2, es decir hasta(L-1). Para n=0,1 y2
Introducimos $\boldsymbol{\delta[n]}$ para definir los instantes.

$$\mathrm{x}[n] = (^1/_2)^n \prod\left(\frac{n}{3}\right) = (^1/_2)^0\, \delta[n] + (^1/_2)^1\, \delta[n-1] + (^1/_2)^2\, \delta[n-2] =$$

$$= \delta[n] + {}^1/_2\, \delta[n-1] + {}^1/_4\, \delta[n-2]$$

$$\boxed{\mathrm{A} = (^1/_2)^{\mathrm{n}}}$$

n	$\mathbf{x}[\boldsymbol{n}] = (^1/_2)^n \prod\left(\frac{n}{3}\right)$
0	$(^1/_2)^0 = 1$
1	$(^1/_2)^1 = {}^1/_2$
2	$(^1/_2)^2 = {}^1/_4$

Una vez determinada la expresión de x[n], calculamos la convolución entre X e Y

$$\mathrm{x}[n] = \delta[n] + {}^1/_2\, \delta[n-1] + {}^1/_4\, \delta[n-2]$$

$$\mathrm{y}[n] = U[n]$$

Duración:

$Z_{ini} = X_{ini} + Y_{ini} = 0 + 0 = 0$

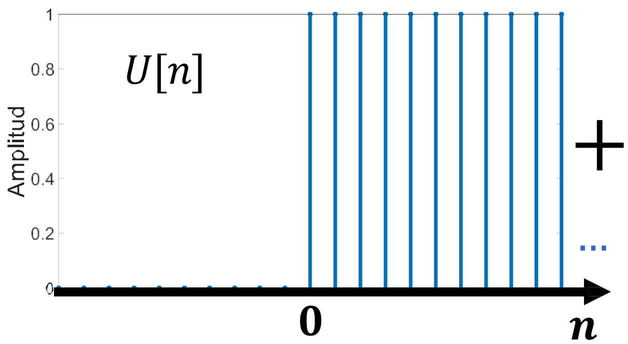
$Z_{fin} = X_{fin} + Y_{fin} = 2 + \infty = \infty$

Se trata de una convolución infinita

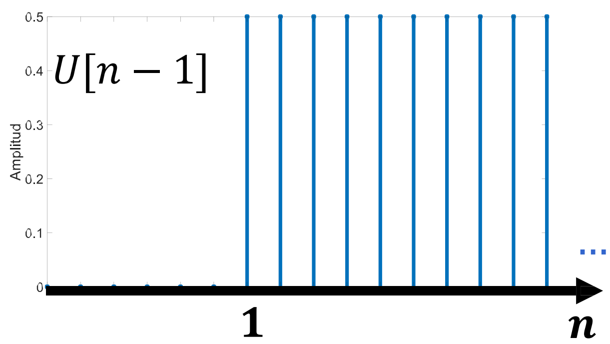
En este método aplicamos las propiedades de las deltas

$$\boldsymbol{Z[n]} = \boldsymbol{X[n]} * \boldsymbol{Y[n]} = (\delta[n] + {}^1/_2\ \delta[n-1] + {}^1/_4\ \delta[n-2]) * U[n] =$$

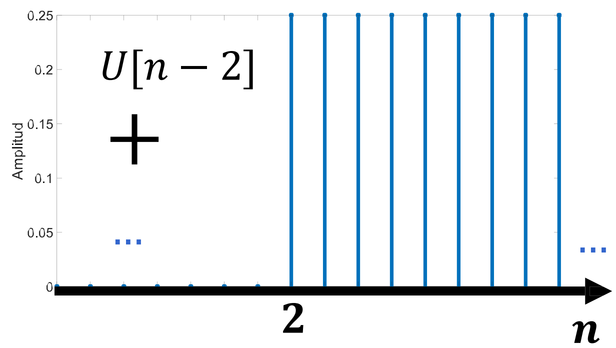
$$= U[n] + {}^1/_2\ U[n-1] + {}^1/_4\ U[n-2]$$



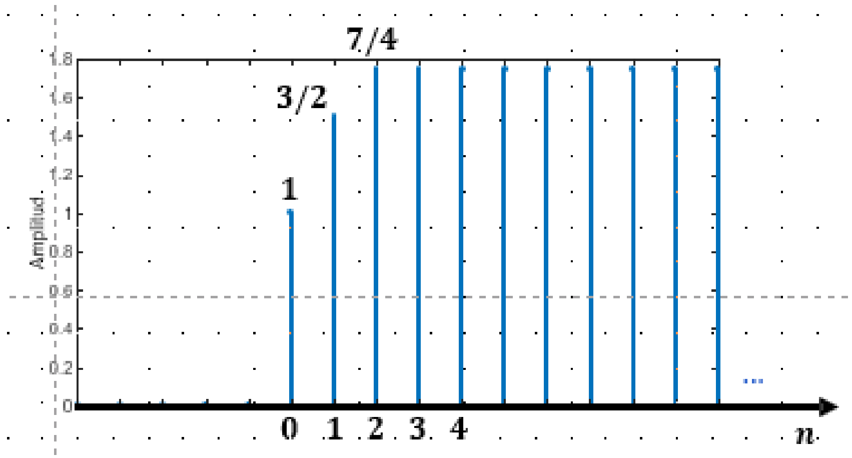
+



+



$\equiv$



Se suman los 3 términos mediante una tabla

$$Z[n] = X[n] * Y[n] = U[n] + {}^{1}/_{2}\, U[n-1] + {}^{1}/_{4}\, U[n-2]$$

n	0	1	2	3	4	5
(Instante)	(n-0)	(n-1)	(n-2)	…	…	…
$U[n]$	1	1	1	1	1	….
${}^{1}/_{2}\, U[n-1]$		${}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{2}$	…
${}^{1}/_{4}\, U[n-2]$			${}^{1}/_{4}$	${}^{1}/_{4}$	${}^{1}/_{4}$	…
Z[n]	**1**	${}^{3}/_{2}$	${}^{7}/_{4}$	${}^{7}/_{4}$	${}^{7}/_{4}$	…

1 + 1/2 = 3/2

1 + 1/2 + 1/4 = 7/4

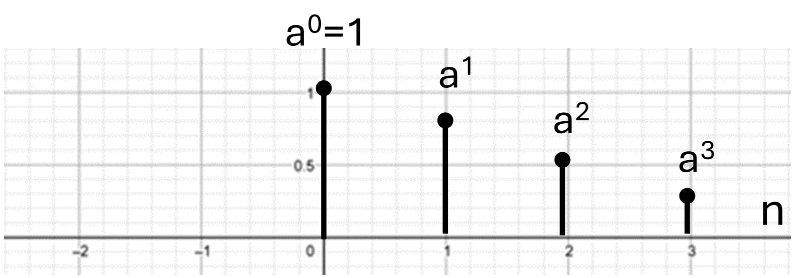
$$Z[n[= \delta[n] + {}^{3}/_{2}\, \delta[n-1] + {}^{7}/_{4}\, U[n-2]$$

Este es el resultado de la convolución

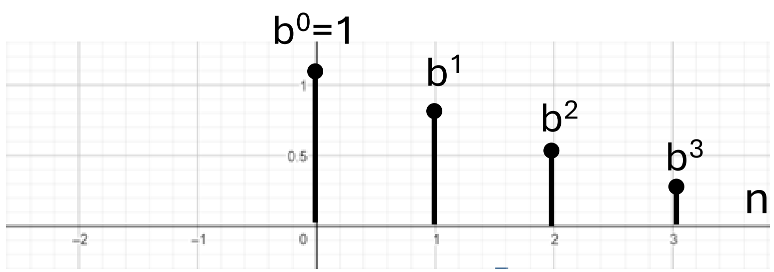
Problema 3. Calcula la convolución $z[n]=x[n]*y[n]$ de las siguientes secuencias:

$$x[n] = a^n \cdot u[n], \quad a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1,$$
$$y[n] = b^n \cdot u[n], \quad b \in \mathbb{R},\ 0 < b < 1,$$

$x[n] = a^n \cdot u[n]$



$x[n] = b^n \cdot u[n]$



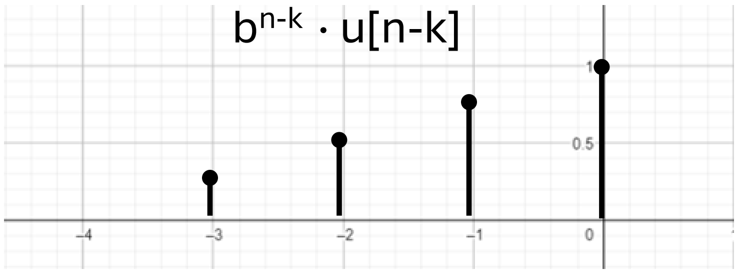
1. Calcula instante inicial y final de $z[n]$.

$Z_{ini} = X_{ini} + Y_{ini} = 0 + 0 = 0$

$$0 \leq n \leq \infty$$

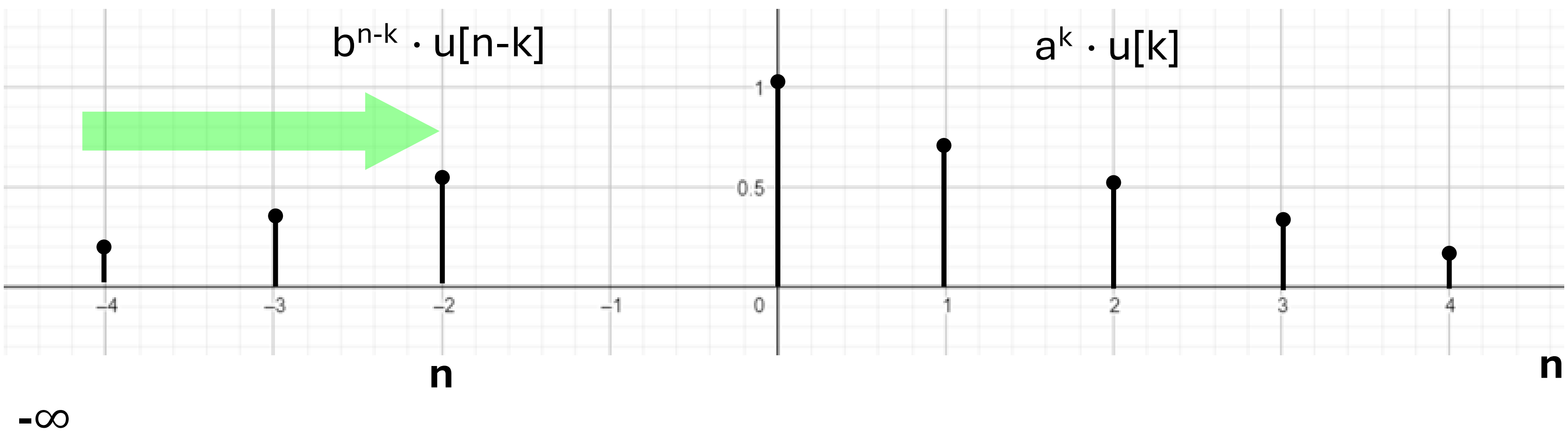
$Z_{fin} = X_{fin} + Y_{fin} = \infty + \infty = \infty$

2. Invierte en *k* la secuencia más sencilla entre *x*[*n*] e *y*[*n*].



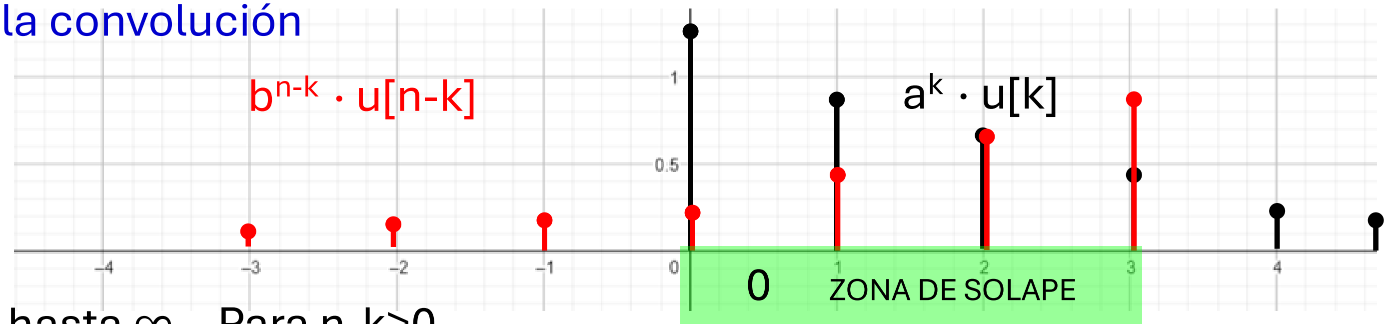
$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]$$

3. Desplaza la secuencia y determina las **zonas de solape**.



Si **n < 0** no hay solape. **Z[n] = 0**

4. Resuelve la suma de la convolución



n

$\boxed{\text{Si } \mathbf{n \geq 0}}$ hay solape, hasta ∞. Para n-k>0

$$z[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] * y[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} \overset{(1)}{=} b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k \overset{(2)}{=} b^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^0 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)_{(3)}} =$$

$$= b^n \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}\right)}{\left(\frac{b-a}{b^1}\right)} \overset{(4)}{=} \frac{\cancel{b^{n+1}}}{b-a} \cdot \left(\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{\cancel{b^{n+1}}}\right) = \frac{\boldsymbol{b^{n+1} - a^{n+1}}}{\boldsymbol{(b-a)}}$$

(1) $b^{n-k} = b^n \left(\frac{1}{b}\right)^k$

(2) SSP: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^0 - x^{n+1}}{1-x}$

(3) Calcular: $\frac{1}{1} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$

(4) Calcular: $\frac{1}{1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b^{n+1}}$

5 y 6. (Repite) y unifica

$$z[n] = \begin{cases} 0 \quad , & n < 0 \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)} \, , & n \geq 0 \end{cases} \; \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)} \cdot u[n]$$

DFESTS

Problema 4. Considera los sistemas en cascada (serie) cuyas respuestas impulsivas son:

$$h_1[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad h_2[n] = \delta[n] + \tfrac{3}{2}u[n-1]$$

Si la secuencia de entrada es **x[n] = u[n]**, obtén la salida y[n].

$$\xrightarrow{x[n]} \boxed{h_1} \longrightarrow \boxed{h_2} \xrightarrow{y[n]}$$

a) Calcular primero $h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$

b) Y después calcular $y[n] = h_{eq}[n] * x[n]$

a) $h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$ → h_{eq} es de duración infinita. 1º operar, para eliminar δ[n], δ[n] = 1

$$h_{eq}[n] = \left(\left(-{}^{1}/_{2}\right)^n \cdot u[n]\right) * \left(\delta[n] + {}^{3}/_{2} \cdot u[n-1]\right) =$$

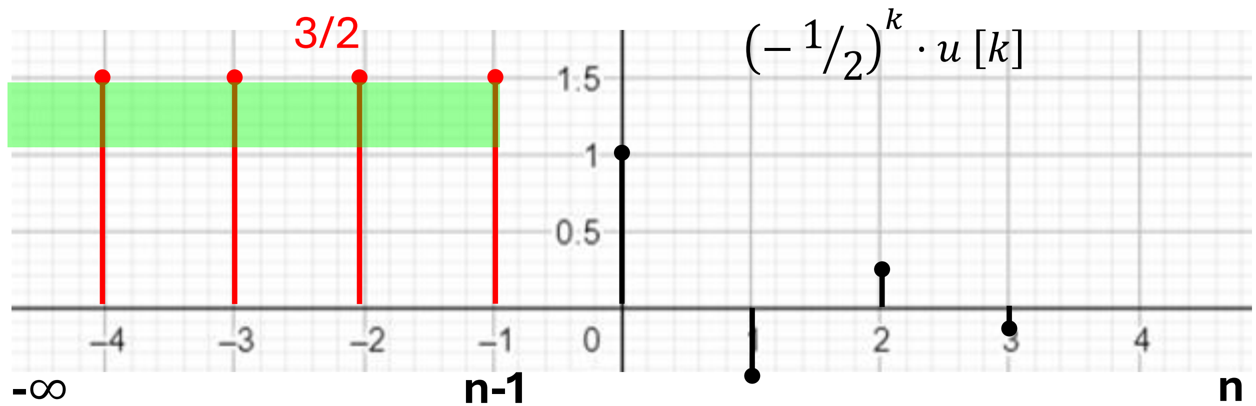
$$= \left[\left(-{}^{1}/_{2}\right)^n \cdot u[n] * \delta[n]\right] + \left[\left(-{}^{1}/_{2}\right)^n \cdot u[n] * {}^{3}/_{2} \cdot u[n-1]\right] =$$

$$= \left(\left(-{}^{1}/_{2}\right)^n \cdot u[n]\right) + \left[\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{u}[\boldsymbol{n}] * {}^{3}/_{2} \cdot \boldsymbol{u}[\boldsymbol{n}-\mathbf{1}]\right]$$

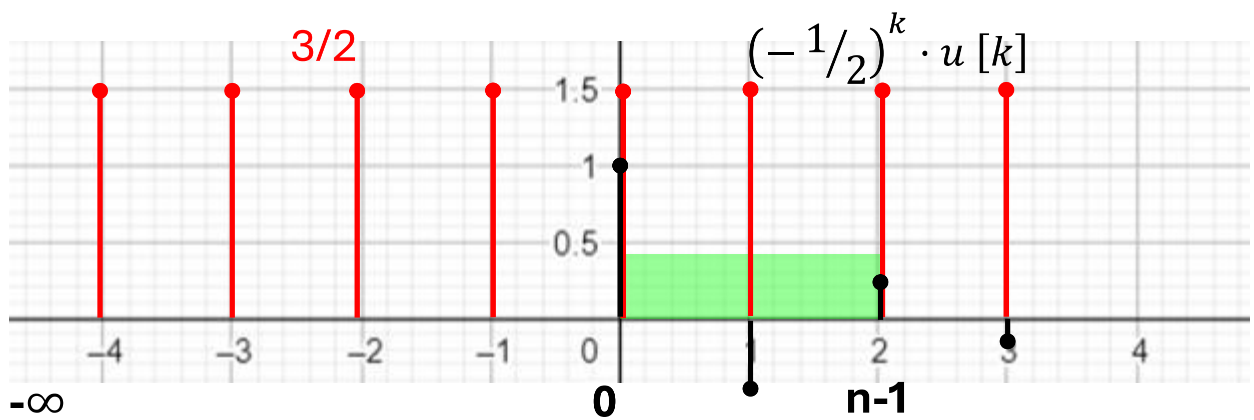
$$\mathrm{s1}[\mathrm{n}] = \left(\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{u}[\mathrm{n}]\right)$$ s1[n]

$$\mathrm{s2}[\mathrm{n}] = \left[\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{u}[\mathrm{n}] * {}^{3}/_{2} \cdot \mathrm{u}[\mathrm{n}-1]\right]$$ A continuación, resolvemos s2[n]

$$s2[n] = \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \cdot u\,[n] * \left({}^{3}/_{2} \cdot u\,[n-1]\right) \begin{Bmatrix} Inicio = 0 + 1 \quad = 1 \\ Final = \infty + \infty = \infty \end{Bmatrix}$$



Si n-1 < 0 → **n<1** → s2[n]=0, no hay solape



Si **n** ≥ **1** → hay solape entre 0 y n-1

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]$$

$$s2[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{k} \cdot {}^{3}/_{2} = {}^{3}/_{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{k} \overset{(1)}{=} {}^{3}/_{2} \cdot \frac{\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{0} - \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \left(-{}^{1}/_{2}\right)} =$$

$$= \cancel{{}^{3}/_{2}}\ \frac{1 - (-{}^{1}/_{2})^{n}}{\cancel{{}^{3}/_{2}}} = \left(\mathbf{1} - \left(-{}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right)$$

$$(1) SSP: \sum_{k=0}^{n} x^{k} = \frac{x^{0} - x^{n+1}}{1-x}$$

$$s2[n] = \left\{ \begin{matrix} 0 & n < 1 \\ \left(1 - \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n}\right) & n \geq 1 \end{matrix} \right\} \equiv 1 - \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \mathrm{u[n\text{-}1]}$$

$$\mathrm{h_{eq}[n]} = \mathrm{s1[n]} + s2[n] = \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \mathrm{u[n]} + \left(1 - \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n}\right) \cdot u[n-1]$$

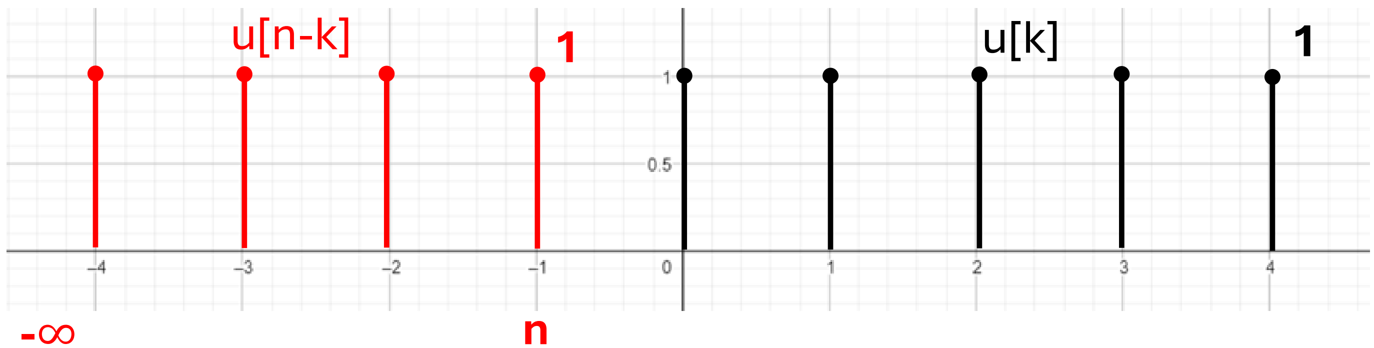
Ahora resolvemos $h_{eq}[n]$

	n	0	1	2	3	4
$s1[n] \rightarrow$	$\left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \cdot u[n]$	1	-1/2	1/4	-1/8	...
$s2[n] \rightarrow$	$1 - \left(-{}^{1}/_{2}\right)^{n} \cdot u[n-1]$		3/2	3/4	9/8	
		1	1	1	1	1 = **u[n]** ...

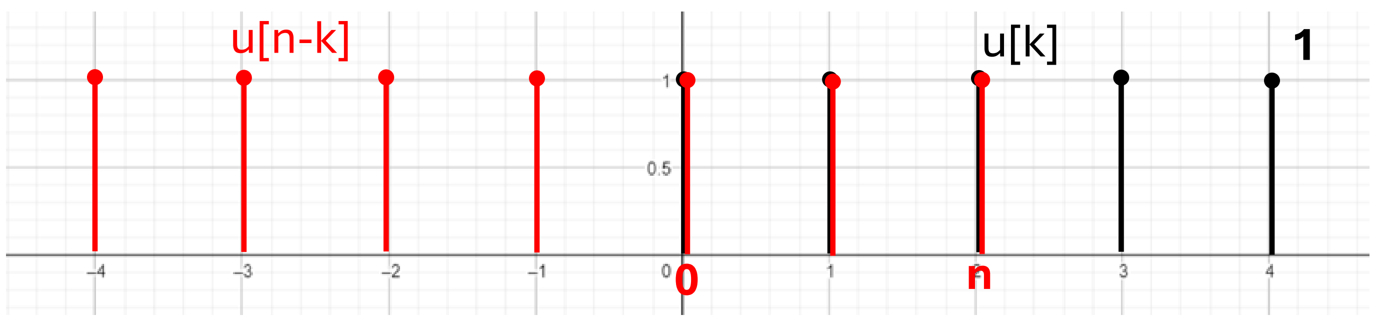
-1/2+(3/2)= -0,5 +1,5=1

$$\mathbf{h_{eq}[n]} = \boldsymbol{u[n]}$$

b) Calcular y[n] = h_{eq}[n] * x[n] = **u[n] * u[n]** → duración ∞



Si n < 0 → y[n]=0



Si n ≥ 0

Aplicando la fórmula del sumatorio: $\sum_{k=0}^{n} a = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a = 1 + \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + n \, ; con \ a_0 = 1$
O calcular $\sum_{k=0}^{n} 1$ en https://es.symbolab.com/

$$\boldsymbol{y[n]} = \sum_{k=0}^{n} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} (1 \cdot 1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1) \equiv \boldsymbol{(n+1) \cdot u[n]}$$

Problema 5. Determina la respuesta $y[n]$ para la conexión en cascada de los sistemas:

$h_1[n] = \text{sen}(8n)$ y $h_2[n] = a^n \cdot u[n]$ con $|a| < 1$

Siendo la excitación $x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$ con $|a| < 1$

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

$\boxed{\delta[n] = 1}$

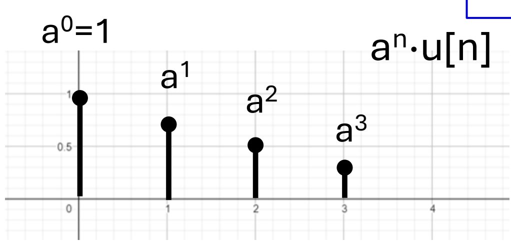
$$x[n] * h_2[n] = (\delta[n] - a\delta[n-1]) * a^n \cdot u[n] =$$

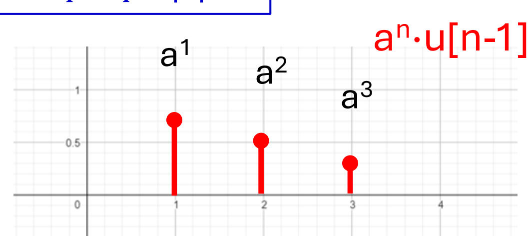
$\boxed{\text{Por } \delta[n-1], \ \mathbf{n} \text{ pasa } \mathbf{n-1}}$

$$= (a^n \cdot u[n]) - (a \cdot a^{(n-1)} \cdot u[n-1]) = a^n \cdot u[n] - a^n \cdot u[n-1] = \boldsymbol{\delta[n]}$$

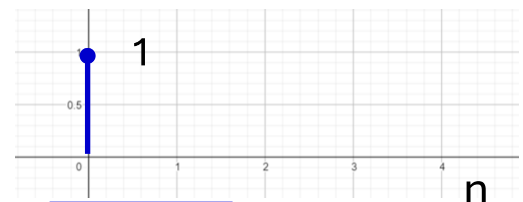
$\boxed{a \cdot a^{(n-1)} = a \cdot \frac{a^n}{a^1} = a^n}$

Decrece porque |a|<1





$\equiv$



$\boxed{\delta[n] = 1}$

$$\mathbf{y[n]} = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] =$$
$$= \delta[n] * \text{sen}(8n) = \mathbf{sen(8n)}$$

by ARC

3.6. CONCEPTO Y CLASES DE SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

Los sistemas de tiempo discreto se utilizan para realizar operaciones sobre secuencias.
Su implementación se lleva a cabo en ordenadores.
A la secuencia que introducimos se le denomina **excitación** y la que obtenemos a la salida es la **respuesta**.

$$x[n] \xRightarrow{EXCITACIÓN} \boxed{T\{X[n]\}} \quad y[n] \xRightarrow{RESPUESTA}$$

Ejemplo:

$$y[n] = T\{X[n]\}$$

$$y[n] = X[n]^2$$

n	**x**	**Y**
0	2	4
1	3	9
2	4	16
3	5	25

3.6.1.- Propiedades de los sistemas de tiempo discreto

1.- Propiedad de causalidad

Un sistema es causal si utiliza para calcular el valor de salida $y[n_o]$ en n_o , la información de $x[n]$ en $n \leq n_o$ y de $y[n]$ en $n < n_o$. Es decir, si su respuesta solo depende de los valores de la excitación en el instante actual y en el pasado, no en el futuro. No puede existir respuesta (salida) antes de producirse la excitación (entrada).

$y[n] = x[n-5] \Longrightarrow$ CAUSAL

$y[n] = x[n+3] \Longrightarrow$ NO ES CAUSAL

2.- Propiedad de estabilidad

Un sistema es estable si se verifica que, para una excitación, acotada en todo su intervalo de definición, la respuesta también es una señal acotada (finita). Es decir, la salida será un valor concreto, no infinito.

$$|x[n]| < M, \forall n \Longrightarrow |y[n]| < N, \forall n$$

3.- Propiedad de invarianza en el tiempo

Un sistema es invariante, si sus características no varían en el tiempo

$$x[n] \Longrightarrow y[n]$$

$$x[n - no] \Longrightarrow y[n - no]$$

4.- Propiedad de linealidad

Un sistema es lineal, si cumple el principio de superposición. Un conjunto de secuencias excitación $x_i\,[n]$ producen individualmente respuestas $y_i\,[n]$.

$$x_1[n] \Longrightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \Longrightarrow y_2[n]$$

Si es lineal, se cumple

$$x_3[n] = A_1\, x_1[n] + A_2\, x_2[n] \Longrightarrow y_3[n] = A_1\, y_1[n] + A_2\, y_2[n]$$

Por ejemplo, $y[n] = x[n]^2$, no es lineal, porque

$$x[n] = x_1 + x_2 \Longrightarrow y[n] = (x_1 + x_2)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2$$

5.- Propiedad de sistema con o sin memoria

Un sistema es sin memoria, si cada valor de $y[n_o]$ solo depende de $x[n_o]$ ($n=n_o$)

$y[n] = \mathrm{x}[n-3] \quad \Longrightarrow$ CON MEMORIA (depende de un instante pasado)

$y[n] = \mathrm{n}\,\mathrm{x}[n] \quad \Longrightarrow$ SIN MEMORIA (depende del presente) - instantáneo

6.- Propiedad de sistema invertible

Un sistema es el inverso de otro, si al conectarlos en cascada, se vuelve a obtener como respuesta la excitación.
En este caso se dice que el sistema original es **invertible.**

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \text{---} \boxed{h[n]^{-1}} \rightarrow \; y[n] = x[n]$$

$h_{eq}[n] = h[n] \ast h[n]^{-1} = \delta[n]$ $\qquad$ $h[n]\ es\ invertible$

$y[n] = x[n] \ast h_{eq}[n] = x[n]$ $\qquad$ $h[n]^{-1}\ es\ el\ inverso\ de\ h[n]$

3.7.- SISTEMAS **L**INEALES E **I**NVARIANTES EN **T**IEMPO DISCRETO (LTI)

3.7.1.- Respuesta al impulso

De todos los sistemas, los de mayor importancia práctica son los sistemas **lineales e invariantes**. Debido al cumplimiento de estas dos propiedades es posible conocer la respuesta de éstos ante cualquier excitación.

$$x[n] \Longrightarrow \boxed{\quad LTI \quad} \Longrightarrow y[n]$$

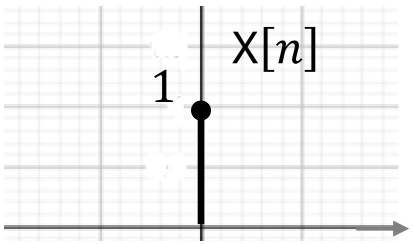
Para ello, es necesario conocer la respuesta impulsiva del sistema, **h[n]**, que es la que se produce cuando la excitación es una secuencia impulso unidad. Además, solo se puede definir para este tipo de sistemas.

h[n] es la respuesta del sistema LTI, cuando la entrada es $\mathbf{x[n] = \delta[n] \rightarrow y[n] = h[n]}$

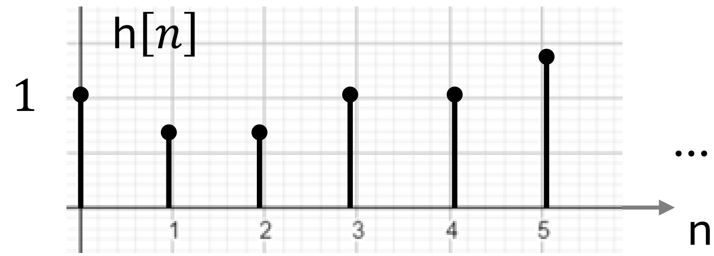
La respuesta **y[n]** de un **LTI** a una excitación **x[n]**, se puede obtener realizando la **convolución** de dicha excitación con la respuesta al impulso **h[n]** de éste.

$$\boldsymbol{y[n] = x[n] * h[n]}$$

$x[n] = \delta[n] \longrightarrow$ *LTI* $\longrightarrow y[n] = h[n]$



DELTA



RESPUESTA IMPULSIVA

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow y[n] = h[n]$$

$x[n] \longrightarrow$ *LTI* Con h[n] $\longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{y[n] = x[n] * h[n]}}$

Entrada

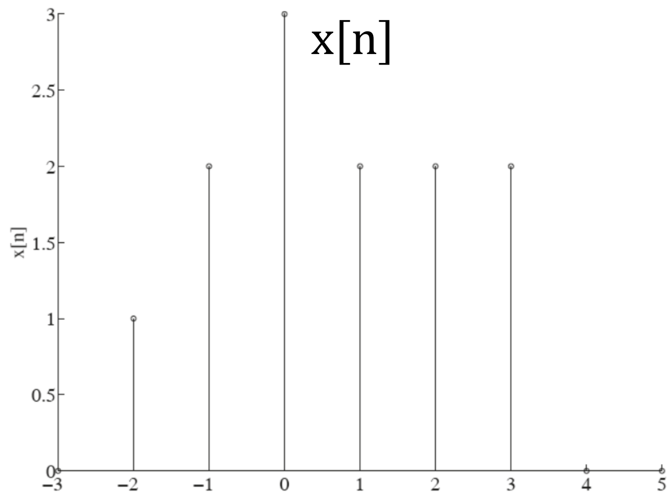
Respuesta

Respuesta impulsiva

Problema 6. Dado el sistema LTI descrito por la ecuación en diferencias y[n], calcular:

a) La respuesta impulsiva **h[n]**
b) La respuesta del sistema (**y[n]**) a la señal de entrada descrita en el gráfico (x[n])
c) Atendiendo a la duración de su respuesta impulsiva, ¿Qué tipo de filtro es?

$$y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3] - 3x[n-4]$$



a) Hay que calcular **h[n]**

$$x[n] = \delta[n] \rightarrow y[n] = h[n]$$

$$y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3] - 3x[n-4]$$

$$x[n] = \delta[n]$$

h[n] es la respuesta del sistema LTI.
Cuando la entrada es x[n] = δ[n] → y[n] = h[n].
Ver T6,18

$$\mathbf{h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3] - 3\delta[n-4]}$$

b) Respuesta del sistema $\boldsymbol{y[n]}$

$$y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3] - 3x[n-4]$$
$$x[n] = \delta[n+2] + 2\,\delta[n+1] + 3\delta[n] + 2\,\delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + 2\,\delta[n-3]$$

(Señal de entrada, dada por el gráfico)

Se sitúan los valores de x en cada línea y se calcula $\boldsymbol{y[n]}$

δ(n-)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	
x[n]		**1**	**2**	**3**	**2**	**2**	**2**					Valores de x
-2x[n-2]				-2	-4	-6	-4	-4	-4			Desplaza y multiplica
x[n-3]					1	2	3	2	2	2		Desplaza
-3x[n-4]						-3	-6	-9	-6	-6	-6	Desplaza y multiplica
y[n]		1	2	1	-1	-5	-5	-11	-8	-4	-6	Sumas por columnas

$$\boldsymbol{y(n) = \delta(n+2) + 2\delta(n+1) + \delta(n) - \delta(n-1) - 5\delta(n-2) -}$$
$$\boldsymbol{-5\delta(n-3) - 11\delta(n-4) - 8\delta(n-5) - 4\delta(n-6) - 6\delta(n-7)}$$

$$\boxed{-2 \leq n \leq 7}$$

c) Atendiendo a la respuesta de y[x] obtenida, se trata de un **filtro FIR**.
El resultado tiene una duración finita (10 instantes)

Problema 7. Calcular la respuesta del sistema y[n] :

$$1y[n] = x[n] + 2x[n-2] + 2y[n-1]$$

Parte recurrente, que define el tipo de sistema

Ante la misma entrada: $x[n] = \delta[n+2] + 2\,\delta[n+1] + 3\delta[n] + 2\,\delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + 2\,\delta[n-3]$

Ahora se trata de un **filtro IIR** de $N = 1$. $h[n]$ e $y[n]$ no tienen duración finita.

δ(n-)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
x[n]			**1**	**2**	**3**	**2**	**2**	**2**			Valores de x
2x[n-2]					2	4	6	4	4	4	Desplaza y multiplica
2y[n-1]	-	-	-	❷ 2	8	26	64	144			
y[n]	-	-	❶ 1	❸ 4	13	32	72	...	...	...	Hasta $+\infty$ duración infinita

❶ Se pone el valor conocido de y[n] (1er instante de la excitación x (-2), vale 1)

❷ Luego se desplaza y se multiplica por 2 -> (2y[n-1])

❸ Por último, se suman los 3 términos de **y[n]** . Y así sucesivamente.