Lógica Difusa IV

Implicación e inferencia difusa

Con toda la información anterior, el siguiente paso para el modelado de un problema que se desea resolver con razonamiento basado en reglas es la definición de unas reglas difusas del tipo SI-ENTONCES

Ejemplo: SI "Persona es muy alta" ENTONCES "juega mucho al baloncesto".

Antes de profundizar en las reglas y la inferencia difusa, hay que definir un concepto previo necesario llamado "implicación"

Implicación

Se usa en lógica y razonamiento para expresar la relación entre dos proposiciones o afirmaciones, generalmente en la forma "SI... ENTONCES...".

Establece una conexión lógica o causal entre dos proposiciones, donde la primera, llamada "**antecedente**", es una condición o premisa que, si se cumple, lleva a la segunda, llamada "**consecuente**", como resultado".

La notación tradicional es: $p \rightarrow q$

Implicación

Por tanto, una implicación en lógica difusa tiene que asignar una función de pertenencia a una agrupación del antecedente (p) y el consecuente (q) que permita razonar con reglas del tipo SI-ENTONCES.

Implicación

Por tanto, una implicación en lógica difusa tiene que asignar una función de pertenencia a una agrupación del antecedente (p) y el consecuente (q) que permita razonar con reglas del tipo SI-ENTONCES.

La función de pertenencia se define como:

$$\mu_{p \to q} : U \times V \to [0, 1]$$

$$(x, y) \to \mu_{p \to q}(x, y)$$

Relaciones

Definir reglas sobre estas variables:

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud

Implicación

El asunto central de la relación de implicación reside en decidir qué se desea representar, puesto que es la base para el razonamiento basado en reglas.

Implicación

El asunto central de la relación de implicación reside en decidir qué se desea representar, puesto que es la base para el razonamiento basado en reglas.

Hay dos tipos:

- Implicación lógica.
- Implicación causa-efecto.

Implicación

IMPLICACIÓN LÓGICA: hacer coincidir el significado de la implicación con el de la lógica clásica. Hay muchas equivalencias que se pueden usar en lógica difusa, pero con transformaciones.

Implicación

IMPLICACIÓN LÓGICA: hacer coincidir el significado de la implicación con el de la lógica clásica.

Ejemplo: la equivalencia $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

Implicación

IMPLICACIÓN LÓGICA: hacer coincidir el significado de la implicación con el de la lógica clásica.

Ejemplo: la equivalencia $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

Como se explicó en el apartado de los operadores lógicos difusos, se reformula la función de pertenencia como

$$\mu_{p\to q}(x, y) = \max(1 - \mu A(x), \mu B(y)).$$

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*
q: *"Las emisiones de* CO_2 *están disminuyendo."*
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Uso de energías renovables en crecimiento moderado (p=0.7)
Emisiones de CO_2 no han bajado mucho (q=0.4)

$\mu_{p \rightarrow q}(x, y) = \max(1 - \mu A(x), \mu B(y)) = \max(0.3, 0.4) = 0.4$
(la implicación no es del todo cierto)

Implicación

Otras equivalencias:

Leyes de De Morgan**:** se pueden extender a lógica difusa con las funciones **T-norma** (para AND) y **T-conorma** (para OR):

$$\neg(p \wedge q) \approx \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \approx \neg p \wedge \neg q$$

Pero en lógica difusa, estas operaciones dependen del tipo de **T-norma** o **T-conorma** elegida, por ejemplo:

- Producto: $p \wedge q = p \cdot q$
- Mínimo: $p \wedge q = \min(p,q)$
- Suma acotada: $p \vee q = \min(1,p+q)$

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*
q: *"Las emisiones de CO_2 están disminuyendo."*

$$\neg(p \wedge q) \approx \neg p \vee \neg q$$

"No es cierto que las energías renovables y la reducción de CO_2 vayan juntas"
es lo mismo que
"O no aumentan las renovables o no bajan las emisiones."

Aumento moderado de renovables (p=0.6)
Reducción significativa de emisiones (q=0.8)

$\neg(p \wedge q) = 1 - \min(0.6, 0.8) = 1 - 0.6 = 0.4$
$\neg p \vee \neg q = \max(1 - 0.6, 1 - 0.8) = \max(0.4, 0.2) = 0.4$ (son equivalentes)

Implicación

Otras equivalencias:

- Doble negación:

$$\neg(\neg p) \approx p$$

Sigue siendo válida en lógica difusa, ya que aplicar la función de negación dos veces devuelve el mismo valor.

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*

q: *"Las emisiones de CO_2 están disminuyendo."*

$$\neg(\neg p) \approx p$$

"No es falso que el uso de renovables aumenta" equivale a "El uso de renovables aumenta."

(Aumento considerable de renovables (p=0.75)

$\neg(\neg p) = p = 0.75$ (siempre se cumple)

Implicación

Otras equivalencias:

- Conmutatividad y Asociatividad:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

Estas propiedades siguen siendo válidas si se eligen T-normas y T-conormas apropiadas.

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*

q: *"Las emisiones de CO_2 están disminuyendo."*

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

"El uso de renovables o la reducción de CO_2" es lo mismo que "La reducción de CO_2 o el uso de renovables".

Aumento moderado de renovables (p=0.9)

Reducción baja de emisiones (q=0.4)

$p \vee q = \max(0.9, 0.4) = 0.9$

$q \vee p = \max(0.4, 0.9) = 0.9$

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*

q: *"Las emisiones de CO_2 están disminuyendo."*

r: "Las empresas invierten más en tecnologías limpias."

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

"Las renovables, las emisiones y la inversión en tecnologías limpias pueden agruparse sin cambiar el significado."

Sin cambios en el uso de renovables (p=0.5)

Reducción moderada de emisiones (q=0.7)

Baja inversión en tecnologías limpias (r=0.2)

$(p \vee q) \vee r = \max(\max(0.5,0.7), 0.2) = \max(0.7, 0.2) = 0.7$

$p \vee (q \vee r) = \max(0.5, \max(0.7,0.2)) = \max(0.5, 0.7) = 0.7$

Implicación

Otras equivalencias:

- Distributividad:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \ ???$$

En lógica difusa, la **distributividad no siempre se cumple**. Es decir, depende de la elección de T-normas y T-conormas.

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*

q: *"Las emisiones de* CO_2 *están disminuyendo."*

r: "Las empresas invierten más en tecnologías limpias."

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

"El uso de renovables y (la reducción de CO_2 o la inversión en tecnologías limpias)"

no siempre equivale a

"(uso de renovables y reducción de CO_2) o (uso de renovables e inversión en tecnologías limpias)".

Ligero aumento en el uso de renovables (p=0.6)

Ligero aumento de emisiones (q=0.4)

Altísima inversión en tecnologías limpias (r=0.9)

$p \wedge (q \vee r)$ = min(0.6,max(0.4,0.9)) = min(0.6,0.9) = 0.6

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ = max(min(0.6,0.4), min(0.6,0.9)) = max(0.4,0.6) = 0.6 (en este caso se cumple)

Implicación

Otras equivalencias:

- Idempotencia:

$$p \vee p = p$$

$$p \wedge p = p$$

En lógica difusa, **siempre se cumple** que decir dos veces lo mismo es igual a la premisa.

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*

$$p \lor p = p$$

$$p \land p = p$$

"Decir dos veces que las renovables aumentan es lo mismo que decirlo una vez."

Aumento moderado en el uso de renovables (p=0.7)

$p \lor p = \max(0.7,0.7) = 0.7$

$p \land p = \min(0.7,0.7) = 0.7$

Implicación

Otras equivalencias:

- Absorción:

$$p \vee (p \wedge q) = p \text{ (se cumple siempre)}$$

$$p \wedge (p \vee q) = p \text{ (no se cumple siempre)}$$

En lógica difusa, establece que ciertas combinaciones de operadores lógicos pueden simplificarse sin perder información. Por ejemplo, si ya sabemos que p es verdadero, agregar $p \wedge q$ (que ya incluye p) no cambia el resultado.

Implicación

Otras equivalencias:

- Absorción:

$$p \lor (p \land q) = p \text{ (se cumple siempre)}$$

$$p \land q = \min(p,q)$$

$$p \lor (p \land q) = \max(p, \min(p,q))$$

Dado que $\min(p,q) \leq p$, el máximo entre p y un número menor o igual que p **siempre será p**.

Implicación

Otras equivalencias:

- Absorción:

$$p \wedge (p \vee q) = p \text{ (no se cumple siempre)}$$

$$p \vee q = \max(p,q)$$

$$p \wedge (p \vee q) = \min(p, \max(p,q))$$

Aquí el problema es que **se cumple con el operador mínimo, pero no con otras T-normas**.

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*

q: *"Las emisiones de CO_2 están disminuyendo."*

$$p \wedge (p \vee q) = p$$

"El uso de renovables o (el uso de renovables y reducción de CO_2)" equivale a "El uso de renovables".

Ligero aumento en el uso de renovables (*p*=0.6)

Gran aumento de emisiones (*q*=0.8)

$p \vee (p \wedge q) = \min(0.6, \max(0.6, 0.8)) = \min(0.6, 0.8) = 0.6$ (se cumple)

Implicación

Otras equivalencias:

- Ley de la Negación Excluida**:**

$$p \vee \neg p = 1 \text{ ???}$$

En lógica difusa, **esto no siempre es cierto** porque p y ¬p pueden no sumar exactamente 1 (según la función de negación usada).

Implicación

p: *"El uso de energías renovables está aumentando."*

$$p \vee \neg p = 1$$

"El uso de renovables o su negación siempre es 1."

Ligera reducción en el uso de renovables (*p*=0.3)

$p \vee \neg p = \max(0.3, 1-0.3) = \max(0.3, 0.7) = 0.7$ (no se cumple)

Implicación

IMPLICACIÓN CAUSA-EFECTO: dar un significado de relación causa-efecto como se usan en los Sistemas basados en conocimiento (SBC).

Implicación

IMPLICACIÓN CAUSA-EFECTO: dar un significado de relación causa-efecto como se usan en los Sistemas basados en conocimiento (SBC).

Ejemplo en un SBC Médico

- **Regla**: *Si un paciente tiene fiebre alta y dolor de cabeza, entonces puede tener gripe*.
- **Causa**: "Fiebre alta y dolor de cabeza".
- **Efecto**: "Diagnóstico de gripe".

Si la **glucosa en sangre** es **alta** Y el **IMC** es **elevado**,
ENTONCES la **probabilidad de diabetes** es **alta**.

Implicación

IMPLICACIÓN CAUSA-EFECTO: dar un significado de relación causa-efecto como se usan en los Sistemas basados en conocimiento (SBC).

Ejemplo en un SBC Médico

Este ejemplo no es determinista, puesto que hay mucha incertidumbre en el mismo.

Implicación

IMPLICACIÓN CAUSA-EFECTO:

Cuando la relación causa-efecto no es completamente determinista (como en situaciones de incertidumbre), se utilizan reglas difusas, donde la causa no siempre genera el mismo efecto con certeza del 100%.

Implicación

IMPLICACIÓN CAUSA-EFECTO: dar un significado de relación causa-efecto como se usan en los Sistemas basados en conocimiento (SBC).

Ejemplo en un SBC Médico

Regla: *Si* la **glucosa en sangre** es **alta** y el **IMC** es **elevado**, *entonces* la **probabilidad de diabetes** es **alta**.

- **Causa**: ”Glucosa alta y el IMC elevado".
- **Efecto**: ”Diabetes con probabilidad ALTA".

Implicación

IMPLICACIÓN CAUSA-EFECTO:

La implicación lógica difusa es la mejor a nivel teórico, pero falla en la formulación en muchos SBC con relaciones causa-efecto no consistentes con la lógica.

Por ello, se deben definir el segundo tipo.

Implicación

Pasos básicos de la IMPLICACIÓN.

Evaluación de reglas: cada regla en el sistema de inferencia difusa se evalúa en función de las entradas y se activa con un grado de activación difuso que refleja la adecuación de esa regla para la situación actual.

Implicación

Pasos básicos de la IMPLICACIÓN.

Combinación de reglas: una vez que todas las reglas se han evaluado y activado, los resultados se combinan para obtener una salida difusa.

Implicación

Pasos básicos de la IMPLICACIÓN.

Los antecedentes en las reglas difusas pueden tomar diferentes formas:

Implicación

Pasos básicos de la IMPLICACIÓN.

Los antecedentes en las reglas difusas pueden tomar diferentes formas:

- Con antecedentes difusos: cuando en el antecedente hay un hecho difuso, del cual se pretende saber su función de pertenencia.

Implicación

Pasos básicos de la IMPLICACIÓN.

Los antecedentes en las reglas difusas pueden tomar diferentes formas:

- Con antecedentes difusos: cuando en el antecedente hay un hecho difuso, del cual se pretende saber su función de pertenencia.

Ejemplo:

SI la **presión arterial es alta** Y la **frecuencia cardíaca es rápida**, **ENTONCES** el **riesgo de infarto es alto**.

Implicación

Pasos básicos de la IMPLICACIÓN.

Los antecedentes en las reglas difusas pueden tomar diferentes formas:

- Con antecedentes nítidos: cuando en el antecedente hay un hecho nítido y se desea saber la función de pertenencia del hecho difuso de la conclusión.

Implicación

Pasos básicos de la IMPLICACIÓN.

Los antecedentes en las reglas difusas pueden tomar diferentes formas:

- Con antecedentes nítidos: cuando en el antecedente hay un hecho nítido y se desea saber la función de pertenencia del hecho difuso de la conclusión.

Ejemplo:

SI la **temperatura corporal es 39°C**, **ENTONCES** la **probabilidad de infección es alta**.

Implicación

Reglas.

En la implicación difusa, las reglas de la lógica clásica varían un poco.

Veamos algunos ejemplos como Modus Ponens Difuso o Modus Tollens Difuso.

Implicación

Reglas: Modus Ponens difuso

- Lógica clásica:

SI $p \Rightarrow q$ (Si p es verdadero, entonces q es verdadero).

Ejemplo: Si “Vinicius se desmaya” entonces “penalti para el Madrid”

Implicación

Reglas: Modus Ponens difuso

- Lógica clásica:

SI $p \Rightarrow q$ (Si p es verdadero, entonces q es verdadero).

Ejemplo: Si “Vinicius se desmaya” entonces “penalti para el Madrid”

- Lógica difusa:

p y q no son valores binarios (0 o 1), sino que tienen grados de pertenencia entre 0 y 1.

Implicación

Reglas: Modus Ponens difuso

- Lógica difusa:

p y q no son valores binarios (0 o 1), sino que tienen grados de pertenencia entre 0 y 1.

Implicación

Reglas: Modus Ponens difuso

- Lógica difusa:

p y q no son valores binarios (0 o 1), sino que tienen grados de pertenencia entre 0 y 1.

Ejemplo:

SI la **fiebre es alta**, **ENTONCES** la **probabilidad de infección es alta**.

El paciente tiene una fiebre de **38.5°C**, que pertenece en un **0.7** al conjunto "fiebre alta".

Resultado: La probabilidad de infección será **alta con un grado de pertenencia de 0.7**.

Implicación

Reglas: Modus Tollens difuso

- Lógica clásica:
- **SI** $p \Rightarrow q$ (si q es falso, entonces p también es falso)

Ejemplo: Si estudio entonces apruebo.

Si he suspendido entonces no he estudiado.

Implicación

Reglas: Modus Tollens difuso

- Lógica difusa:

SI $p \Rightarrow q$ (si q es falso, entonces p también es falso)

Ejemplo: **SI** la **fiebre es alta**, **ENTONCES** la **probabilidad de infección es alta**.

Implicación

Reglas: Modus Tollens difuso

- Lógica difusa:

SI p⇒q (si q es falso, entonces p también es falso)

Ejemplo: **SI** la **fiebre es alta**, **ENTONCES** la **probabilidad de infección es alta**.

Se observa que la probabilidad de infección **es baja (0.2 de pertenencia)**.

Entonces, la pertenencia a "fiebre alta" también debe ser **baja**.

En difuso, la conclusión **se ajusta de forma gradual** , en lugar de simplemente descartar la fiebre por completo.

Implicación

Reglas: Silogismo hipotético difuso

- Lógica clásica:

SI $p \Rightarrow q$ **Y** $q \Rightarrow r$ **ENTONCES** $p \Rightarrow r$

Ejemplo: Si estudio entonces apruebo y si apruebo entonces me voy de vacaciones. Entonces si estudio me voy de vacaciones.

Implicación

Reglas: Silogismo hipotético difuso

- Lógica difusa: cada implicación tiene grados de certeza.

Ejemplo:

SI la **glucosa en sangre es alta**, **ENTONCES** hay **riesgo de diabetes (0.8)**.

SI hay **riesgo de diabetes**, **ENTONCES** hay **probabilidad de daño renal (0.6)**.

Resultado: La probabilidad de daño renal dependerá de la combinación de estos grados de pertenencia.

Implicación

Reglas: Silogismo disyuntivo difuso

- Lógica clásica:
- **SI** p ∨ q (p o q es verdadero). Si p es falso, q es verdadero, y viceversa.

Ejemplo: El dicho “eres tonto o lo pareces”.

Implicación

Reglas: Silogismo disyuntivo difuso

- Lógica difusa:

SI el **dolor es fuerte O** la **presión arterial es alta**, **ENTONCES** se debe **administrar analgésico**.

Se observa que la **presión arterial es normal (0.2 de pertenencia)**.

Resultado: La administración de analgésico dependerá solo del grado de pertenencia del "dolor fuerte".

En este caso, la inferencia se hace considerando que la disyunción en lógica difusa no es un "o exclusivo", sino una combinación de grados de certeza.

Implicación

En los dos próximos temas se verán dos tipos de modelado difuso (Mamdani y Sugeno), cuyas diferentes se verán con detalle.

Respecto a las reglas, en **Mamdani** el antecedente y el consecuente son difusos, y se requiere un proceso de desfuzzificación para obtener una salida nítida.

Implicación

En los dos próximos temas se verán dos tipos de modelado difuso (Mamdani y Sugeno), cuyas diferentes se verán con detalle.

Respecto a las reglas, en **Mamdani** el antecedente y el consecuente son difusos, y se requiere un proceso de desfuzzificación para obtener una salida nítida.

Ejemplo:

SI el **nivel de dolor es alto ENTONCES** la **dosis de analgésico es alta**.

Implicación

En los dos próximos temas se verán dos tipos de modelado difuso (Mamdani y Sugeno), cuyas diferentes se verán con detalle.

Respecto a las reglas, en Sugeno, el antecedente es difuso, pero el consecuente es una función matemática o un valor nítido.

Implicación

En los dos próximos temas se verán dos tipos de modelado difuso (Mamdani y Sugeno), cuyas diferentes se verán con detalle.

Respecto a las reglas, en Sugeno, el antecedente es difuso, pero el consecuente es una función matemática o un valor nítido.

Ejemplo:

SI la **glucosa en sangre es alta ENTONCES** la **dosis de insulina = 0.1 × glucosa - 5**.

Relaciones

Calcular la implicación sobre las reglas definidas previamente:

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud