# Teoría de la Probabilidad 1

- ¿Cuál es la probabilidad de aprobar la asignatura “Razonamiento bajo incertidumbre”?

- ¿Cuál es la probabilidad de no encontrarme un atasco cuando voy a clase?

- Todos los días nos hacemos preguntas sobre probabilidad e incluso los que hayáis visto un poco de la materia en cursos anteriores, tenéis una idea intuitiva lo suficientemente correcta para lo que necesitamos de ella en este curso.

# Nociones de probabilidad

- Frecuentista (objetiva): Probabilidad de un suceso es la frecuencia relativa (%) de veces que ocurriría el suceso al realizar un experimento repetidas veces.
- Subjetiva (bayesiana): Grado de certeza que se posee sobre un suceso. Es personal.
- Clásica (sucesos equiprobables).

Aparece el concepto de suceso.

- Lógica (inferencia respecto a la evidencia) medida de grado de creencia racional.

# Nociones de probabilidad

Dos principales enfoques:

- Objetiva (clásica, frecuencia) – las probabilidades existen y se pueden medir en el mundo real.

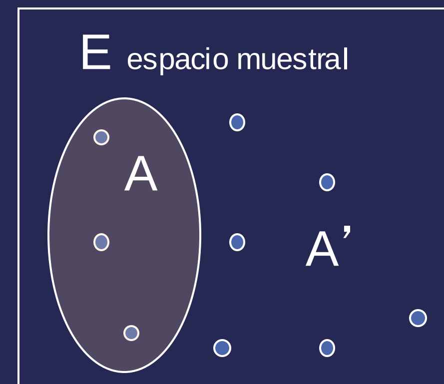
- Epistemológica (lógica, subjetiva) – las probabilidades tienen que ver con el conocimiento humano, medida de creencia.

# Sucesos

- Cuando se realiza un experimento aleatorio diversos resultados son posibles. El conjunto de todos los resultados posibles se llama espacio muestral (E).

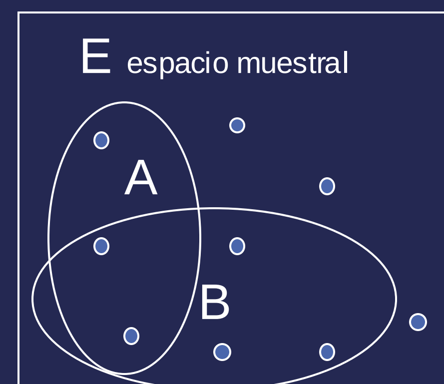

- Se llama suceso a un subconjunto de dichos resultados.

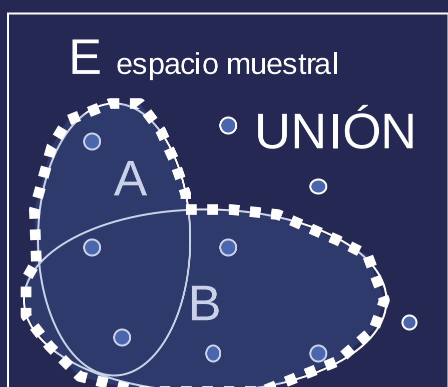
- Dado un suceso A, se llama suceso contrario o complementario A’, al formado por los elementos que no están en A.

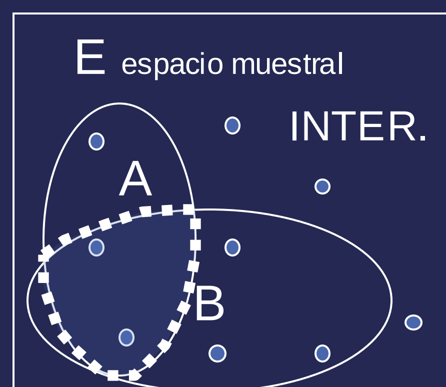



- Se llama suceso unión de A y B, AUB, al formado por los resultados que están en A o en B, incluyendo los que están en ambos.

- Se llama suceso intersección de A y B, A∩B o simplemente AB, al formado por los elementos que están en A y B.



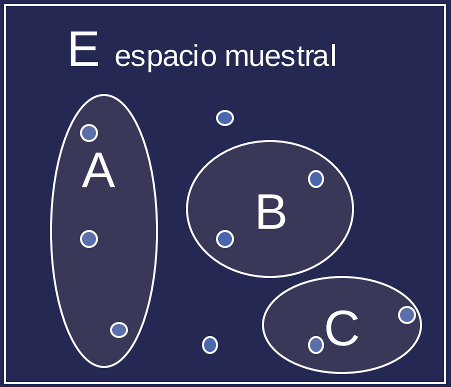



# Definición de probabilidad

- Se denomina probabilidad a cualquier función, P, que asigna a cada suceso A un valor numérico P(A), verificando las siguientes reglas (axiomas)
  - $P(E)=1$


  - $0 \leq P(A) \leq 1$




  - $P(A \cup B \cup C \ldots)=P(A)+P(B)+P(C)+\ldots$
    Con A, B, C disjuntos o mutuamente exclusivos

# Teoremas

$P(\emptyset) = 0$

$P(A') = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dos sucesos A y B son **independientes** si el conocimiento de que ha ocurrido uno de ellos no cambia la probabilidad de que ocurra el otro.

Si A y B son independientes, entonces

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

# Aclaraciones

La regla $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ se cumple sólo en el caso de que A y B sean independientes. La regla de la suma $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ sólo se cumple si A y B son disjuntos.

No hay que tener la tentación de utilizar estas dos reglas sencillas cuando no se cumplen las circunstancias que permiten su aplicación.

Hay que estar seguro de NO confundir el hecho de que dos sucesos sean independientes con el de que sean disjuntos.

Si A y B son disjuntos, entonces si ocurre A no puede suceder B. Por tanto, los conjuntos disjuntos no son independientes.

A diferencia de los sucesos disjuntos, no se puede representar los sucesos independientes mediante un diagrama de Venn.

La independencia tiene en cuenta la probabilidad de los sucesos y no sólo los resultados que los constituyen.

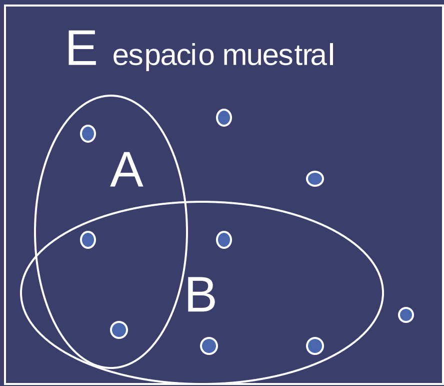
# Ejemplos de independencia de sucesos

1. Una moneda no tiene memoria y que quien lanza la moneda no puede influir sobre su caída, es razonable suponer que los sucesivos lanzamientos de una moneda son independientes. Para una moneda bien equilibrada esto significa que después de ver el resultado del primer lanzamiento, se sigue asignando una probabilidad de 1/2 a las caras del segundo lanzamiento.

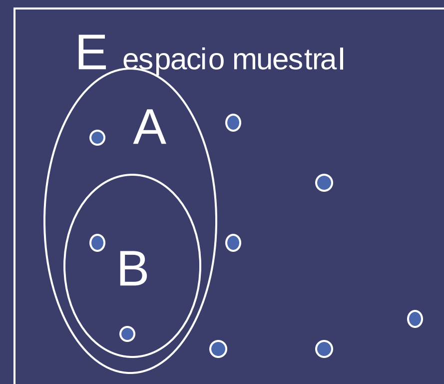
2. Por otro lado, los colores de las sucesivas cartas de una baraja no son independientes. Una baraja de 52 cartas tiene 26 cartas rojas y 26 negras. Si se selecciona una carta de una baraja bien mezclada, la probabilidad de obtener una carta roja es de 26 = 0,50 (resultados igualmente probables). Una vez vista que la primera carta es roja, se sabe que sólo quedan 25 cartas rojas en la baraja entre las 51 cartas restantes. La probabilidad de que la segunda carta sea roja es, por tanto, 25/51 = 0,49. En este caso, el conocimiento del resultado de la primera carta cambia la asignación de probabilidades para la segunda.

3. Si un médico te toma la presión de la sangre dos veces, es razonable suponer que los dos resultados son independientes ya que el primer resultado no influye sobre el aparato cuando se hace la segunda lectura. Pero, si de forma consecutiva realizas dos pruebas para determinar tu nivel de inteligencia, u otra prueba psicológica similar, los resultados de las dos pruebas no son independientes. El aprendizaje que tiene lugar durante el primer intento influye sobre el segundo.

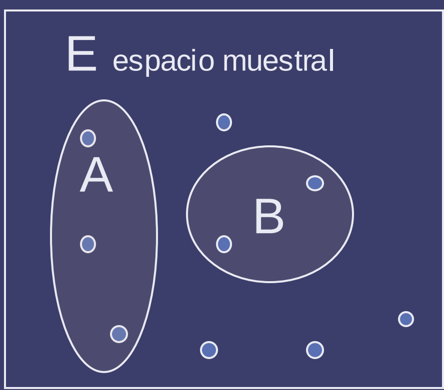
# EJEMPLOS




P(A)=?
P(B)=?
P(AUB)=?
P(A ∩ B)=?
P(A')=?
P(B')=?




P(A)=?
P(B)=?
P(AUB)=?
P(A ∩ B)=?
P(A')=?
P(B')=?




P(A)=?
P(B)=?
P(AUB)=?
P(A ∩ B)=?
P(A')=?
P(B')=?

# EJERCICIO

1. Entre los humanos, los portadores del gen del albinismo tienen una probabilidad de 1/2 de pasarlo a su descendencia. Además, una persona es albina sólo si sus dos padres le transmitieron dicho gen. Los padres transmiten de forma independiente sus genes. Si los dos padres son portadores del gen del albinismo, ¿cuál es la probabilidad de que su primer hijo sea albino? Y si tienen dos hijos (que heredan de forma independiente los genes de sus padres), ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean albinos? ¿Y de que no lo sea ninguno de ellos?

# EJERCICIO

2. Selecciona al azar a un estudiante universitario de primer curso y pregúntale qué calificación obtuvo en la prueba de acceso a la universidad. He aquí las probabilidades de obtener una determinada calificación en base a una gran encuesta a estudiantes de primer curso:

| **Resultado** | **5-5.9** | **6-6.9** | **7-7.9** | **8-8.9** | **9-10** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Probabilidad** | **0,41** | **0,23** | **0,29** | **0,06** | **0,01** |

(a) Si se escogen al azar a dos estudiantes de primer curso. ¿Por qué se puede suponer que su calificación en la prueba de acceso a la universidad es independiente?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos estudiantes obtuvieran una calificación mayor o igual que 9?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el primero de los estudiantes obtuviera una calificación mayor o igual que 9 y el segundo menor que 6?

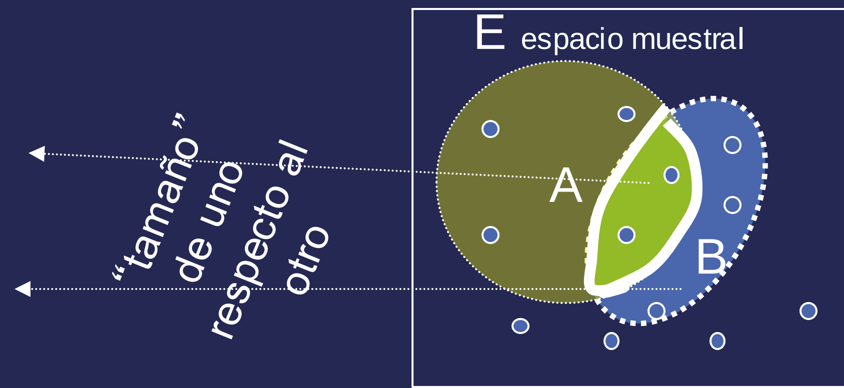
# EJERCICIO

3. Datos del Gobierno indican que el 27% de los trabajadores tienen una carrera universitaria y que el 16% de los trabajadores están empleados en el sector de la automoción como operarios. ¿Puedes concluir que debido a que (0,27)(0,16) = 0,043, aproximadamente el 4% de los trabajadores tienen una carrera universitaria y trabajan en el sector de la automoción como operarios? Justifica tu respuesta.

# Probabilidad condicionada

- Se llama probabilidad de A condicionada a B a la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

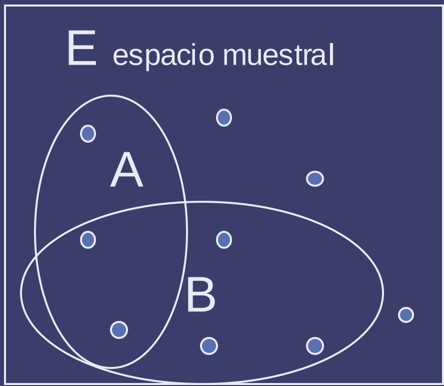



- Error:
  - No se debe confundir probabilidad condicionada con intersección.
  - En ambos casos se mide la intersección, pero…
    - En P(A∩B) con respecto a P(E)=1
    - En P(A|B) con respecto a P(B)

# Ejemplos de probabilidad condicionada

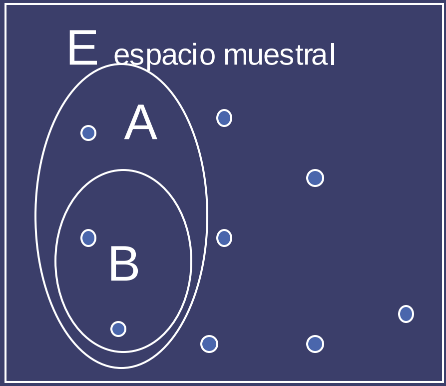
- Al tirar un dado, sabemos que salió número par, ¿cuál es probabilidad de que sea un número primo?
- Sabemos que una persona tiene un catarro, ¿cuál es la probabilidad de que sea COVID-19?

# EJEMPLOS



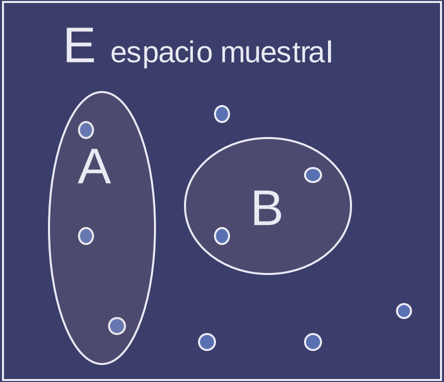

P(A)=3/9=1/3
P(B)=5/9
P(AUB)=6/9=2/3
P(A ∩ B)=2/9
P(A')=6/9=2/3
P(B')=4/9

P(A|B)=? P(B|A)=?




P(A)=3/9=1/3
P(B)=2/9
P(AUB)=3/9=1/3
P(A ∩ B)=2/9
P(A')=6/9=2/3
P(B')=7/9

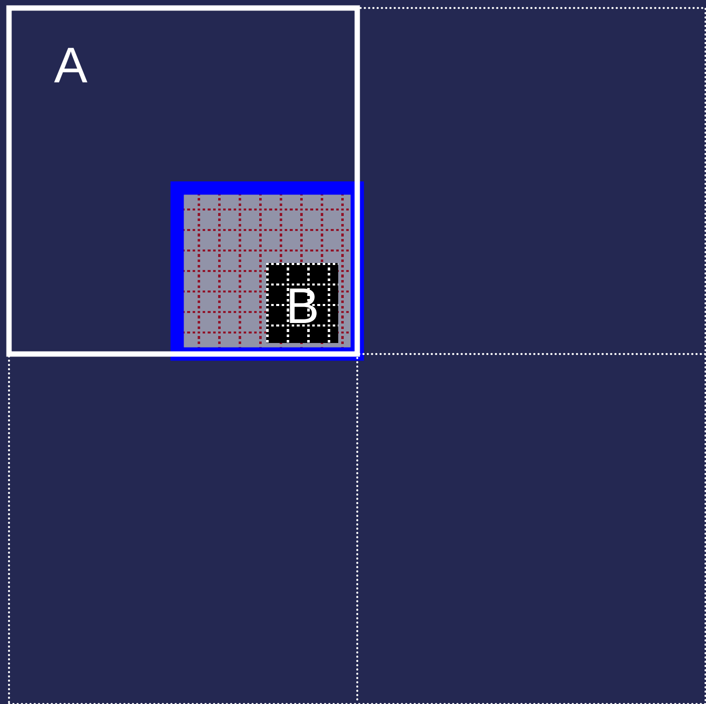
P(A|B)=? P(B|A)=?



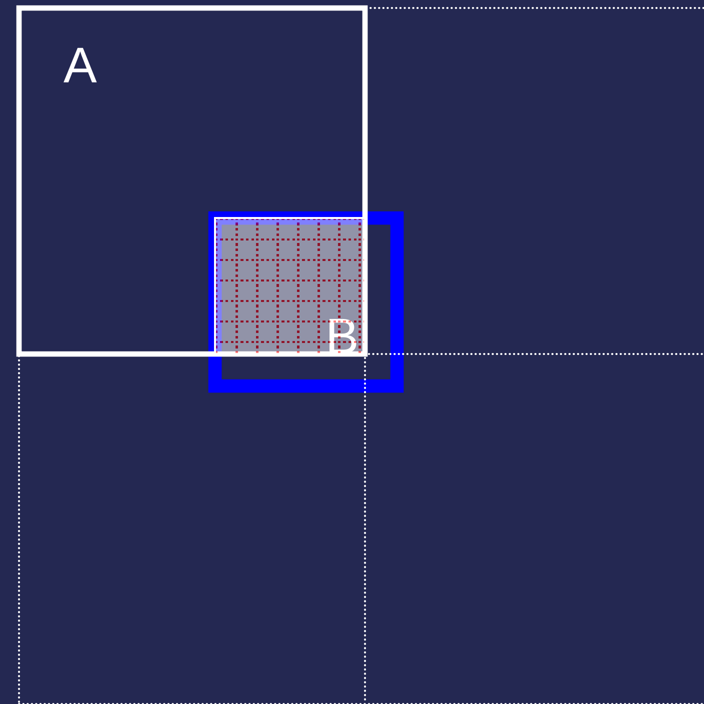

P(A)=3/9=1/3
P(B)=2/9
P(AUB)=5/9
P(AB)=0
P(A')=6/9=2/3
P(B')=7/9

P(A|B)=? P(B|A)=?

# Intuir la probabilidad condicionada




P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A∩B) = 0,10



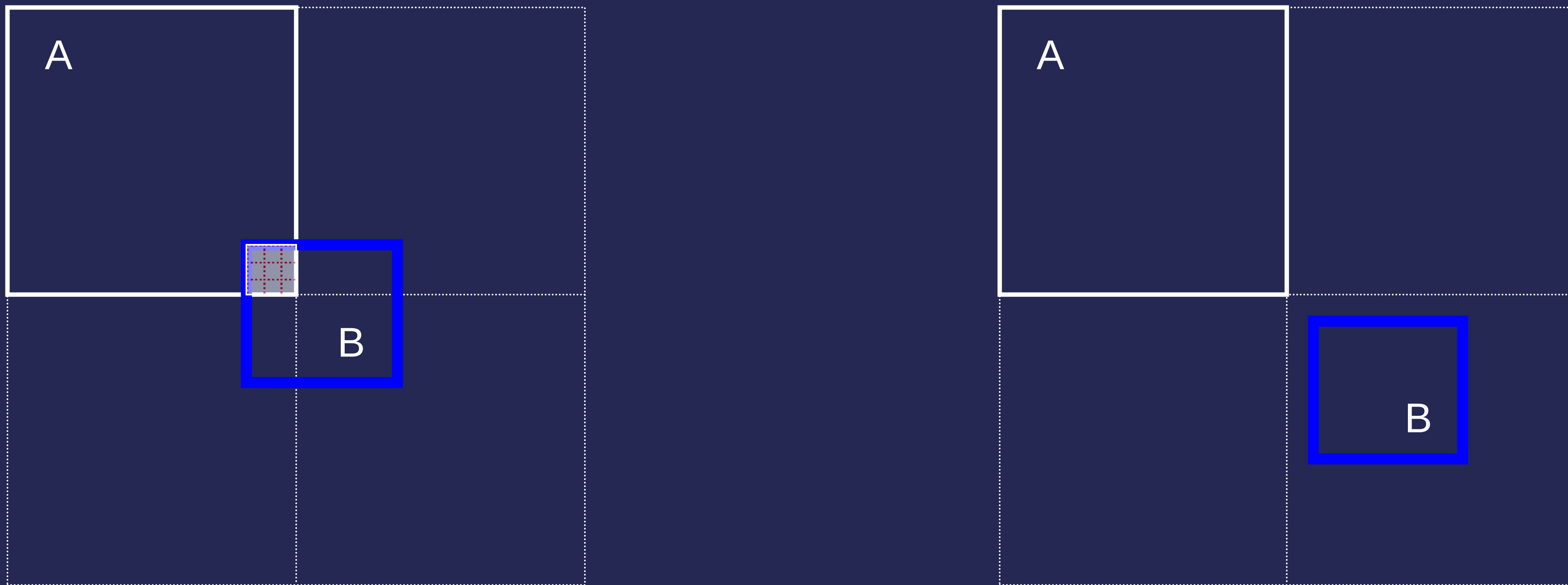

P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A∩B) = 0,08

¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

**P(A|B)=1**

**P(A|B)=0,8**

# Intuir la probabilidad condicionada




P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A∩B) = 0,005

P(A) = 0,25
P(B) = 0,10
P(A∩B) = 0

¿Probabilidad de A sabiendo que ha pasado B?

**P(A|B)=0,05**

**P(A|B)=0**

# Algunas reglas de cálculo prácticas

- Cualquier problema de probabilidad puede resolverse, en teoría, mediante aplicación de los axiomas. Sin embargo, es más cómodo utilizar reglas de cálculo:
  - $P(A') = 1 - P(A)$
  - $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$

    $= P(B)\, P(A|B)$

Probabilidad de que pasen A y B es la probabilidad de A y que también pase B sabiendo que ha ocurrido A.

Probabilidad de que pasen A y B es la probabilidad de B y que también pase A sabiendo que ha ocurrido B

# Ejemplo

Recuento

| | | MENOPAUSIA | | |
|---|---|---|---|---|
| | | NO | SI | Total |
| CLASIFICACION OMS | NORMAL | 189 | 280 | 469 |
| | OSTEOPENIA | 108 | 359 | 467 |
| | OSTEOPOROSIS | 6 | 58 | 64 |
| Total | | 303 | 697 | 1000 |

- Se ha repetido en 1000 ocasiones el experimento de elegir a una mujer de una población muy grande. El resultado está en la tabla. Sabiendo que no pueden padecer las dos enfermedades a la vez, es decir Osteopenia ∩ Osteoporosis = Ø, calcula
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer tenga osteoporosis?
    - P(Osteoporosis)=64/1000=0,064=6,4%
      - Noción frecuentista de probabilidad
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer no tenga osteoporosis?
    - P(No Osteoporosis)=1-P(Osteoporsis)=1- 64/1000=0,936=93,6%

# Ejemplo (II)

Recuento

| | | MENOPAUSIA | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | NO | SI | |
| CLASIFICACION OMS | NORMAL | 189 | 280 | 469 |
| | OSTEOPENIA | 108 | 359 | 467 |
| | OSTEOPOROSIS | 6 | 58 | 64 |
| Total | | 303 | 697 | 1000 |

- ¿Probabilidad de tener osteopenia u osteoporosis?
  - P(Osteopenia U Osteoporosis) = P(Osteopenia) + P(Osteoporosis) - P(Osteopenia ∩ Osteoporosis) = 467/1000 + 64/1000 – 0 = 0,531

- ¿Probabilidad de tener osteoporosis o menopausia?
  - P(Osteoporosis U Menopausia) = P(Osteoporosis) + P(Menopausia) - P(Osteoporosis ∩ Menopausia) = 64/1000 + 697/1000 - 58/1000 = 0,703
    - No son sucesos disjuntos

- ¿Probabilidad de una mujer sin ninguna de las dos enfermedades?
  - P(Normal) = 469/1000 = 0,469
  - P(Normal) = 1 - P(Normal') = 1 - P(Osteopenia U Osteoporosis) = 1 - 0,531=0,469

# Ejemplo (III)

Recuento

| | | MENOPAUSIA | | |
|---|---|---|---|---|
| | | NO | SI | Total |
| CLASIFICACION OMS | NORMAL | 189 | 280 | 469 |
| | OSTEOPENIA | 108 | 359 | 467 |
| | OSTEOPOROSIS | 6 | 58 | 64 |
| Total | | 303 | 697 | 1000 |

- Si es menopáusica… ¿probabilidad de osteoporosis?
  - P(Osteoporosis|Menopausia)=58/697=0,098
- ¿Probabilidad de menopausia y osteoporosis?
  - P(Menopausia ∩ Osteoporosis) = 58/1000=0,058
    - Otra forma:

$$\mathrm{P(Menopausia \cap Osteoporosis) = P(Menopausia)P(Osteoporosis|Menopausia)} =$$

$$= \frac{697}{1000} - \frac{58}{697} = \frac{58}{1000} = 0{,}058$$

# Ejemplo (III)

Recuento

| | | MENOPAUSIA | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | NO | SI | |
| CLASIFICACION OMS | NORMAL | 189 | 280 | 469 |
| | OSTEOPENIA | 108 | 359 | 467 |
| | OSTEOPOROSIS | 6 | 58 | 64 |
| Total | | 303 | 697 | 1000 |

- Si tiene osteoporosis… ¿probabilidad de menopausia?
  - P(Menopausia|Osteoporosis) = 58/64 = 0,906
- ¿Probabilidad de menopausia y no osteoporosis?
  - P(Menop ∩ No Osteoporosis) = 639/1000 = 0,639
- Si tiene no tiene osteoporosis… ¿probabilidad de no menopausia?
  - P(No Menopausia|NoOsteoporosis) = 297/936 = 0,317

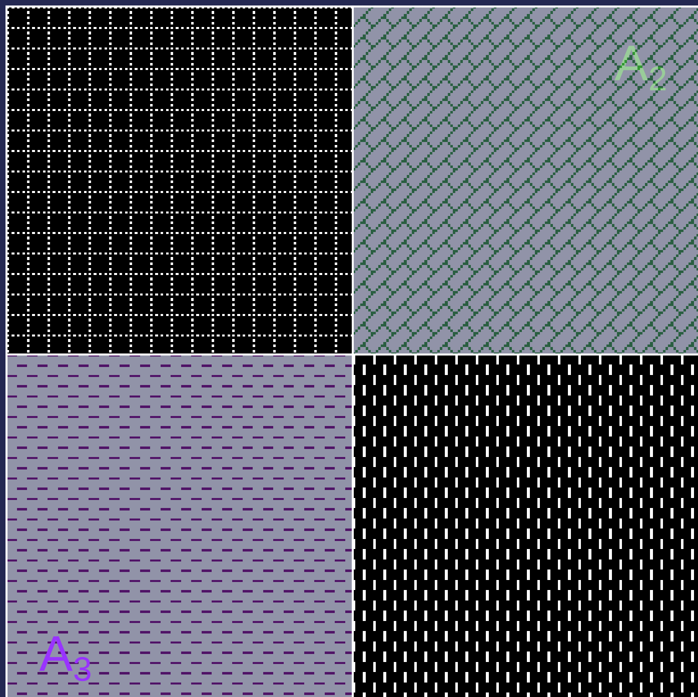
# Ejemplo (IV)

Recuento

| | | MENOPAUSIA | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | NO | SI | |
| CLASIFICACION OMS | NORMAL | 189 | 280 | 469 |
| | OSTEOPENIA | 108 | 359 | 467 |
| | OSTEOPOROSIS | 6 | 58 | 64 |
| Total | | 303 | 697 | 1000 |

- ¿Son independientes menopausia y osteoporosis?
  - Una forma de hacerlo
    - P(Osteoporosis)=64/1000=0,064
    - P(Osteoporosis|Menopausia)=58/697=0,098
      - La probabilidad de tener osteoporosis es mayor si ha pasado la menopausia. Añade información extra. ¡No son independientes!
  - ¿Otra forma?
    - P(Menop ∩ Osteoporosis) = 58/1000 = 0,058
    - P(Menop) P(Osteoporosis)= (697/1000) x (64/1000) = 0,045
      - La probabilidad de la intersección no es el producto de probabilidades. No son independientes.

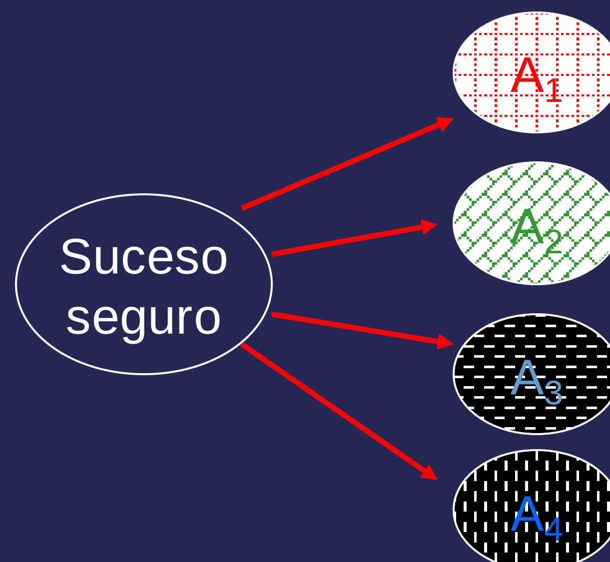
# Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos




Son una colección de sucesos

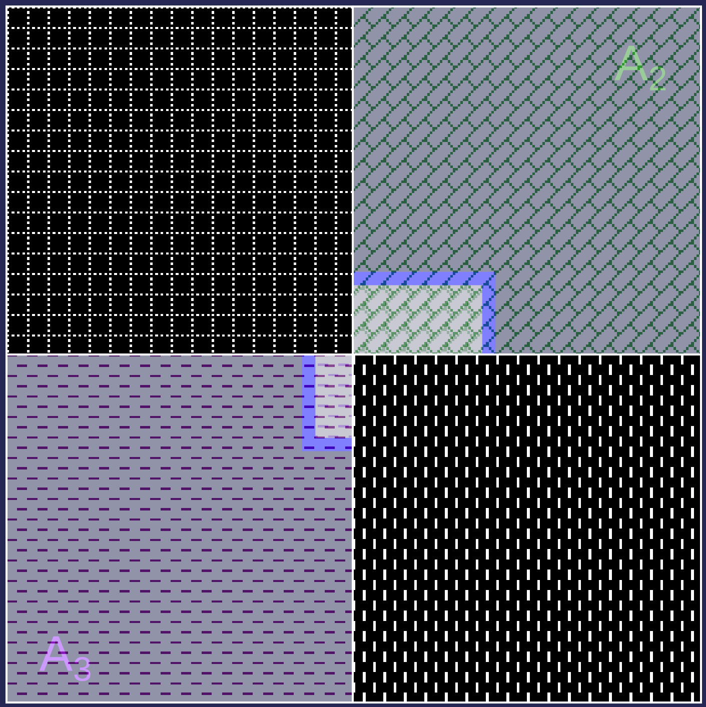
**$A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$…**

Tales que, la unión de todos ellos, forman el espacio muestral, y sus intersecciones son disjuntas.

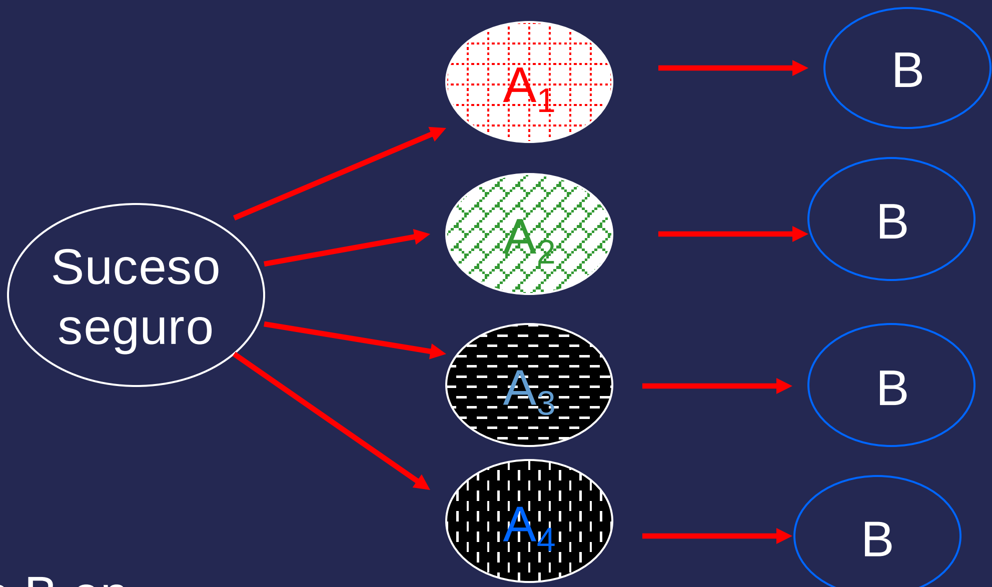


# Divide y vencerás

Todo suceso B, puede ser descompuesto en componentes de dicho sistema.




$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4)$$

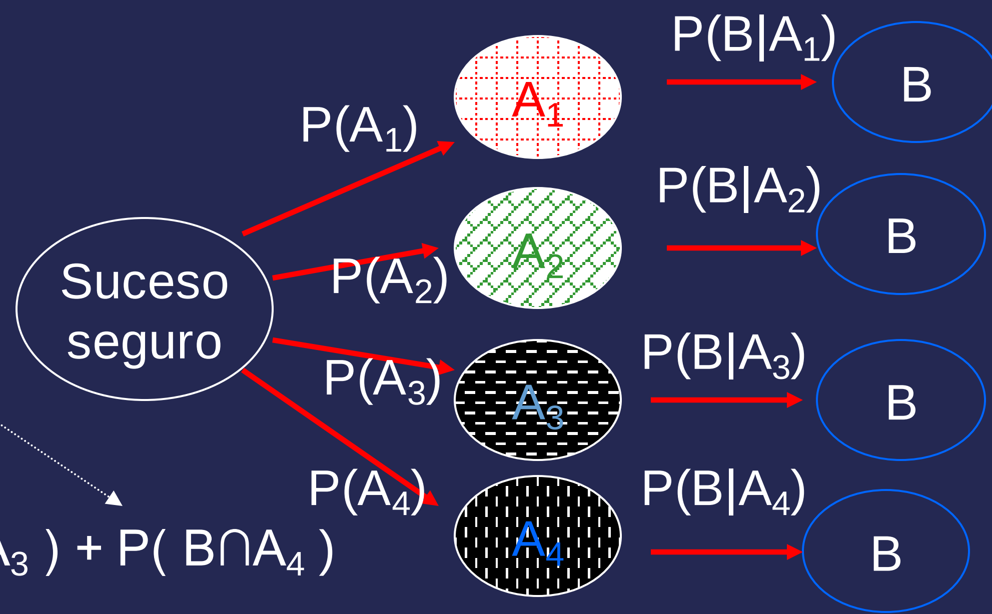



Nos permite descomponer el problema B en subproblemas más simples. Funciona.

# Teorema de la probabilidad total

Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

… podemos calcular la probabilidad de B.


$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4)$$

$$= P(A_1)\, P(B|A_1) + P(A_2)\, P(B|A_2) + \ldots$$

**Ejemplo**: En una clase el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los hombres, son fumadores el 20%.

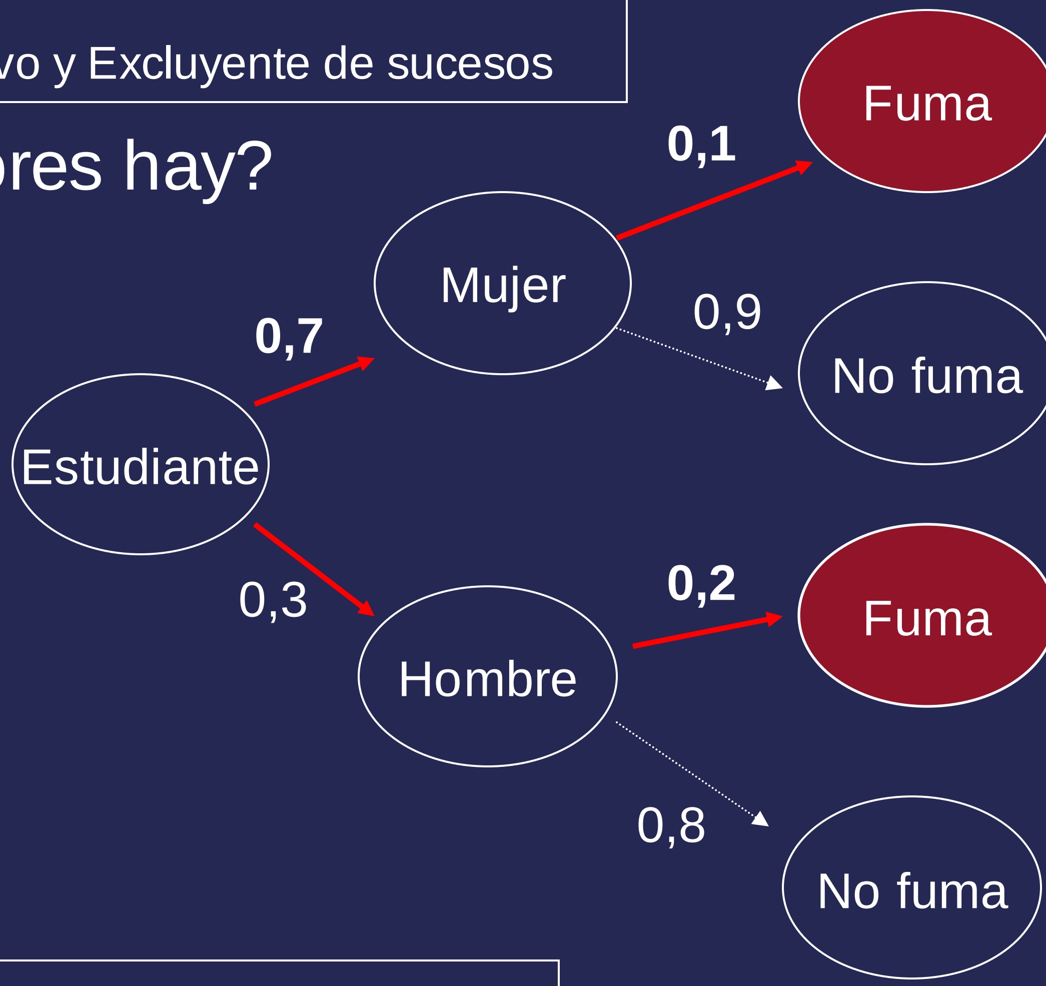
**T. Prob. Total.**
Hombres y mujeres forman un sistema Exhaustivo y Excluyente de sucesos

- ¿Qué porcentaje de fumadores hay?
  - $P(F) = P(M \cap F) + P(H \cap F)$

    $= P(M)P(F|M) + P(H)P(F|H)$

    $= 0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}3 \times 0{,}2$

    $= 0{,}13 = 13\%$




**Los caminos a través de los nodos representan intersecciones.**

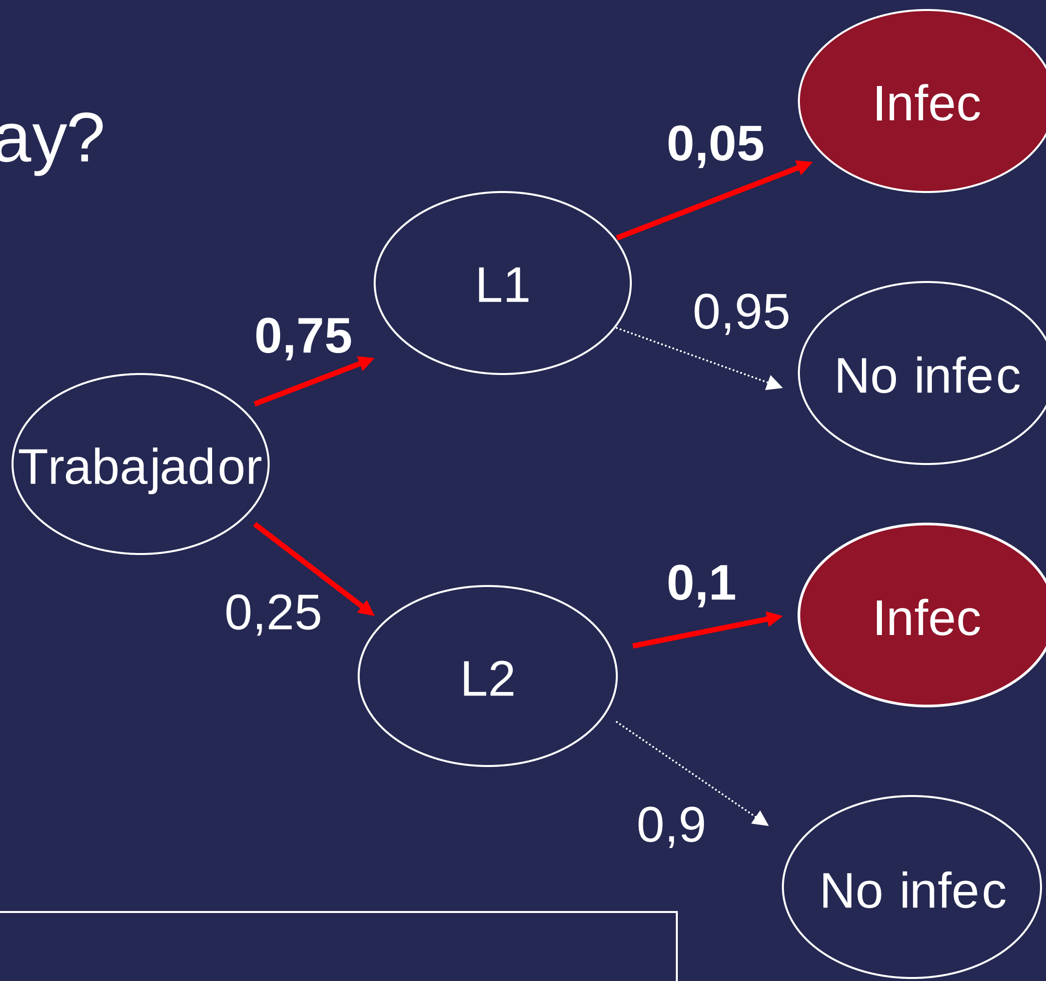
**Ejemplo**: En un centro hay dos laboratorios que analizan virus. El primero se usa el 75% de las veces. La frecuencia de infección de un virus es del 5% para el primer laboratorio y el 10% para el segundo.

- ¿Qué probabilidad de fuga hay?
  - $P(I) = P(L1 \cap I) + P(L2 \cap I)$

    $= P(L1)P(I|L1) + P(L2)P(I|L2)$

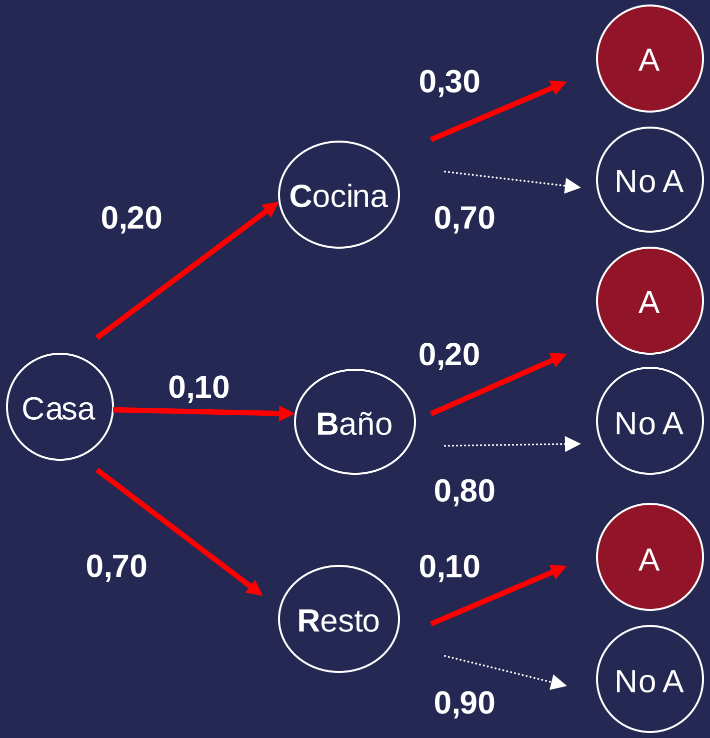
    $=0{,}75 \times 0{,}05 + 0{,}25 \times 0{,}1$

    $= 0{,}0625$




T. Prob. Total.
Los dos laboratorios forman un sistema Exhaustivo y Excluyente de sucesos

**Ejemplo**: El 20% del tiempo que se está en una casa transcurre en la cocina, el 10% en el baño y el resto entre el salón y el dormitorio. Por otro lado, la probabilidad de tener un accidente doméstico estando en la cocina es de 0,30 de tenerlo estando en el baño es de 0,20 y de tenerlo fuera de ambos de 0,10. ¿Cuál es la probabilidad de tener un accidente doméstico?

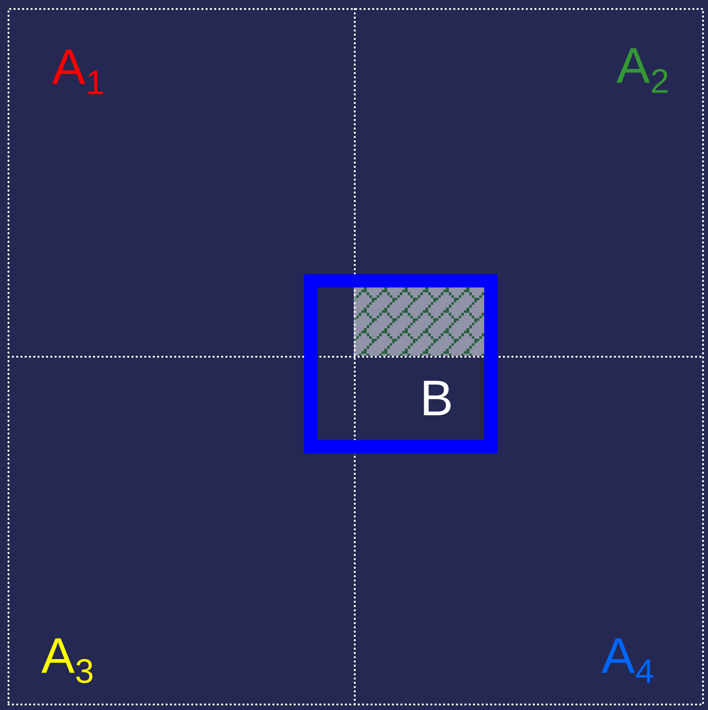



$$P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap B) + P(A \cap R) =$$

$$P(C)P(A|C) + P(B)P(A|B) + P(R)P(A|R)$$

$$=0,2 \times 0,3 + 0,1 \times 0,2 + 0,7 \times 0,1 = 0,15$$

# Teorema de Bayes




Si conocemos la probabilidad de B en cada uno de los componentes de un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos, entonces…

…si ocurre B, podemos calcular la probabilidad (*a posteriori*) de ocurrencia de cada $A_i$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$$

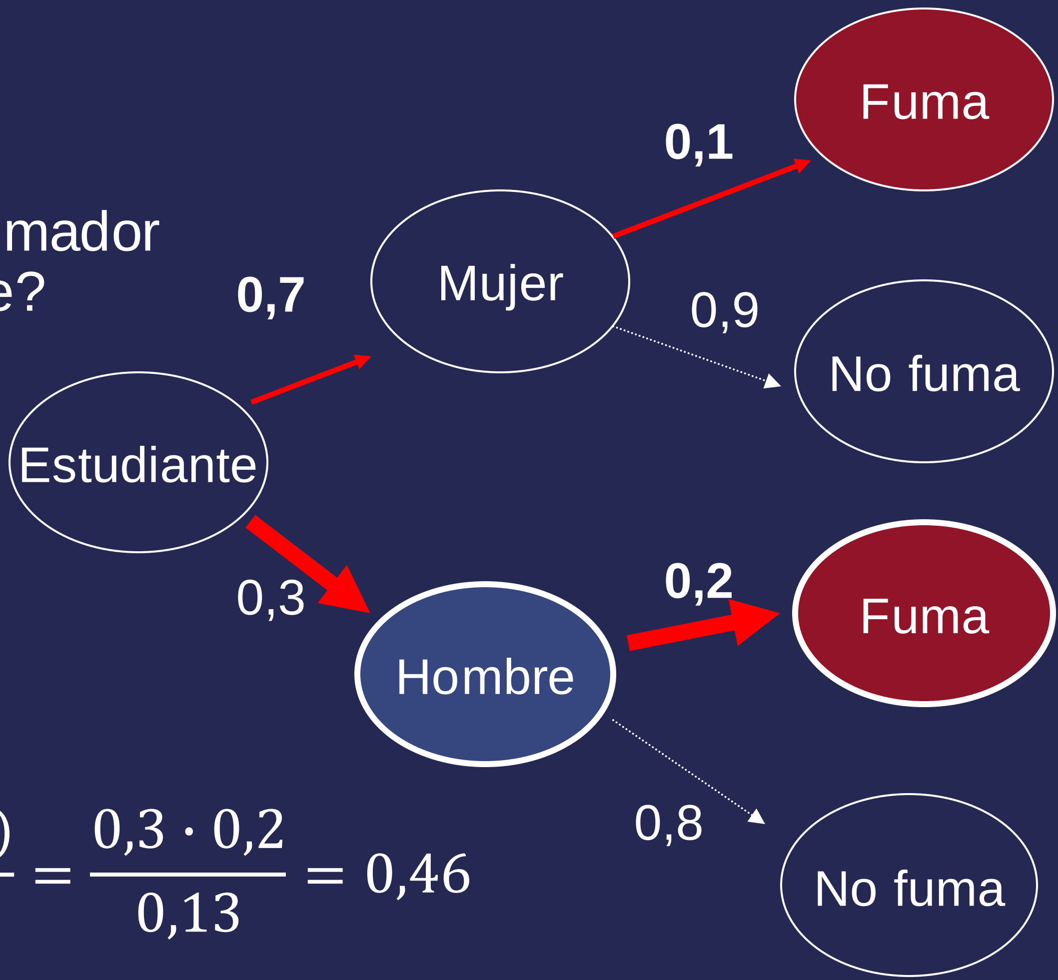
donde P(B) se puede calcular usando el teorema de la probabilidad total:

$$P(B)=P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + P(B\cap A_3) + (B\cap A_4)$$

$$=P(B|A_1)\,P(A_1) + P(B|A_2)\,P(A_2) + \ldots$$

**Ejemplo**: En una clase el 70% de los alumnos son mujeres. De ellas el 10% son fumadoras. De los varones, son fumadores el 20%.

- ¿Qué porcentaje de fumadores hay?
  - P(F) = 0,7 x 0,1 + 0,3 x 0,2 = 0,13
    - (Resuelto antes)
- Se elije a un individuo al azar y es fumador ¿Probabilidad de que sea un hombre?

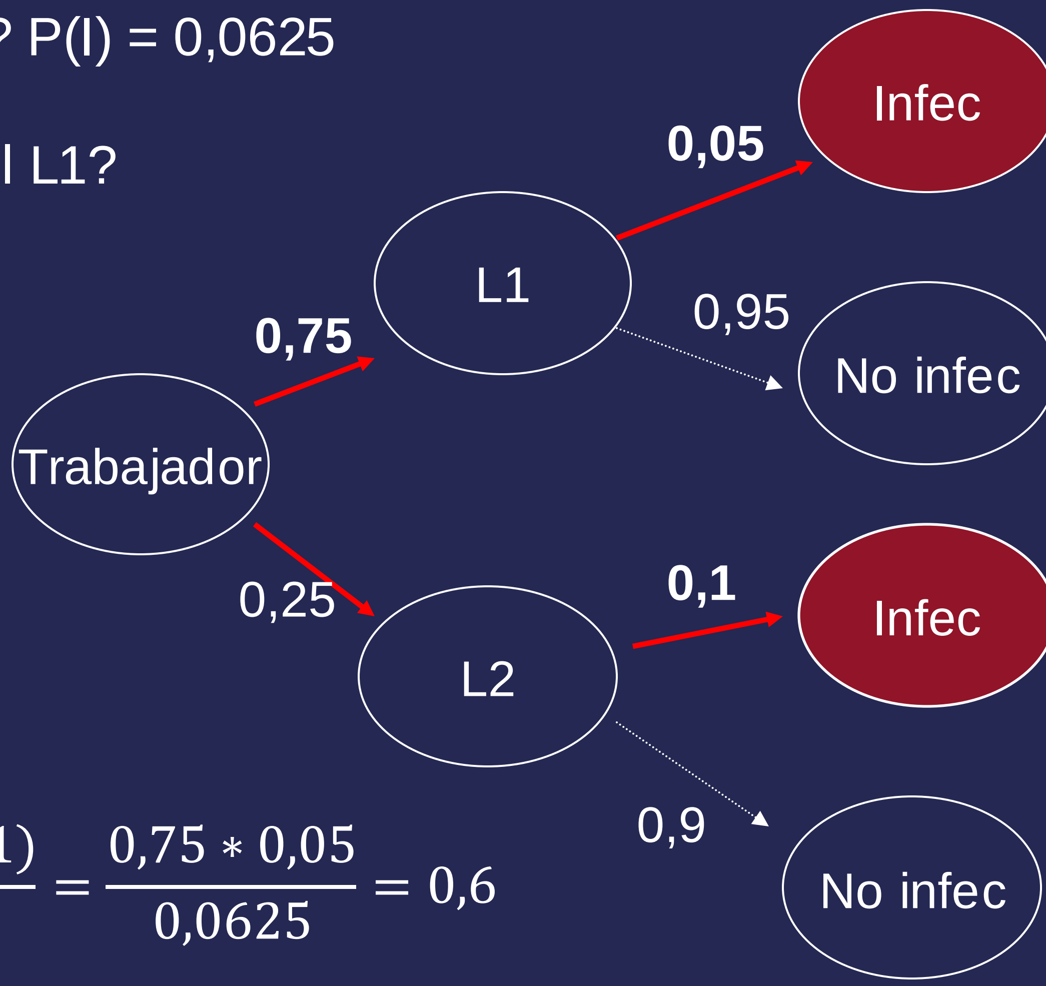



$$P(H|F) = \frac{P(H \cap F)}{P(F)} = \frac{P(H) \cdot P(F|H)}{P(F)} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,13} = 0,46$$

**Ejemplo**: En un centro hay dos laboratorios que analizan virus. El primero se usa el 75% de las veces. La frecuencia de infección de un virus es del 5% para el primer laboratorio y el 10% para el segundo.

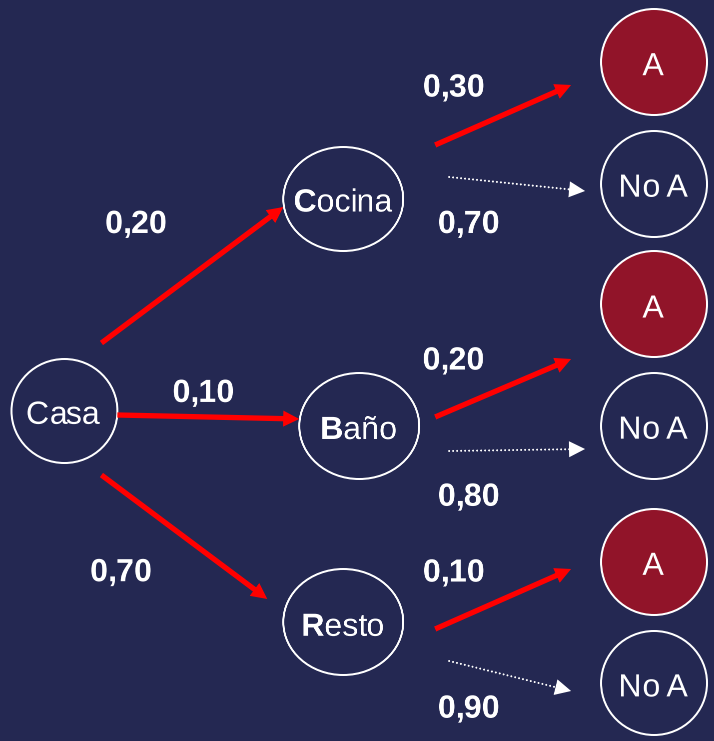
- ¿Qué probabilidad de infección hay? P(I) = 0,0625
- Se ha producido una infección.

¿Qué probabilidad hay de que sea en el L1?




$$P(L1|I) = \frac{P(L1 \cap I)}{P(I)} = \frac{P(L1) \cdot P(I|L1)}{P(I)} = \frac{0{,}75 * 0{,}05}{0{,}0625} = 0{,}6$$

**Ejemplo**: El 20% del tiempo que se está en una casa transcurre en la cocina, el 10% en el baño y el resto entre el salón y el dormitorio. Por otro lado, la probabilidad de tener un accidente doméstico estando en la cocina es de 0,30 de tenerlo estando en el baño es de 0,20 y de tenerlo fuera de ambos de 0,10. Se ha producido un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la cocina?




P(A) = 0,15 (ya calculado)

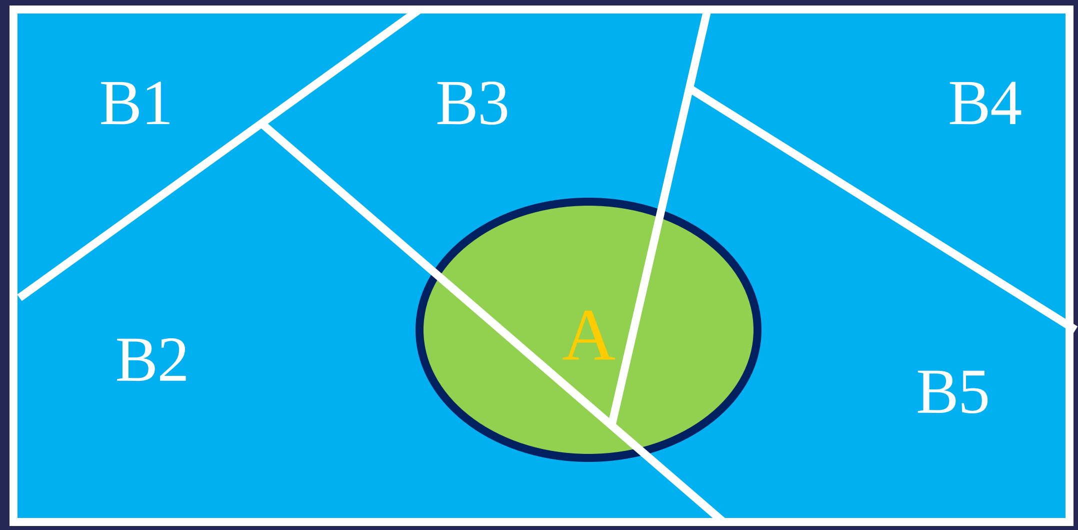
$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C) \cdot P(A|C)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}30}{0{,}15} = 0{,}4$$

# Teorema de Bayes. Generalización

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{\sum_{i=1} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

donde P(A) se ha calculado utilizando el teorema de la probabilidad total:

$P(A)=P(B\cap B_1) + P(A\cap B_2\ ) + P(\ A\cap B_3\ ) + (\ A\cap B_4\ )\ldots= P(A|B_1)\ P(B_1) + P(A|B_2)\ P(B_2) + \ldots$



**Ejercicio 1**: Dos maquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:

a) Probabilidad de que sea defectuosa.

b) Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la primera máquina.

# Ejercicio 1

**SOLUCIÓN:**

Indiquemos por: $M_A$ = {la pieza procede de la maquina A}

$M_B$ = {la pieza procede de la maquina B}

Entonces $\Omega = \{300 \text{ piezas}\} = M_A + M_B$

$$P(M_A) = \frac{1}{3} \qquad P(M_B) = \frac{2}{3}$$

1) Sea D = {la pieza defectuosa}

$$P(D) = P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B) = (0{,}05)\cdot\frac{1}{3} + (0{,}06)\cdot\frac{2}{3} = 0{,}0567$$

2) Es la probabilidad de $M_A$ condicionada a la presencia de D

$$P(M_A/D) = \frac{P(D/M_A)\cdot P(M_A)}{P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B)} = \frac{(0{,}05)\cdot\frac{1}{3}}{0{,}0567} = 0{,}2941$$

**Ejercicio 2**: El portero titular de un equipo de fútbol para 8 de cada 10 penaltis, mientras que el suplente solo para 5. el portero suplente juega, por termino medio, 15 minutos en cada partido (90 minutos).

a) Si en un partido se lanzan tres penaltis contra este equipo, ¿cuál es la probabilidad de que se paren los tres?

b) Si se lanza un penalti y no se para ¿cuál es la probabilidad de que estuviera jugando el portero titular?

# Ejercicio 2

**SOLUCIÓN:**

Se consideran los sucesos:

P= el portero para un penalti

T= juega el portero titular

S= juega el portero suplente (S=T$^c$)

Con probabilidades:

$$P(S)=\frac{15}{90}=\frac{1}{6},P(T)=1-P(S)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$P(P/T)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},P(P^C/T)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

$$P(P/S)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},P(P^C/S)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

a) la probabilidad de que se pare un penalti cualquiera es, utilizando el teorema de la probabilidad total, con los sucesos T y S como sistema completo de sucesos:

$$P(P)=P(P/T)P(T)+P(P/S)P(S)=\frac{4}{5}\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{6}=\frac{40+5}{60}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

Si se lanzan tres penaltis, se consideran los sucesos:

$P_i$= El portero para el penalti i-ésimo

Mutuamente independientes, con probabilidades $P(P_i)$= 0.75, i=1,2,3. La probabilidad de que se paren los tres es:

$$P(P_1\cap P_2\cap P_3)=P(P_1)P(P_2)P(P_3)=0.75^3\approx 0.4219$$

b) para calcular P(T/P$^c$) se aplica el teorema de Bayes, con los sucesos T y S como sistema completo de sucesos:

$$P(T/P^C)=\frac{P(P^C/T)P(T)}{P(P^C/T)P(T)+P(P^C/S)P(S)}=\frac{\frac{1}{5}\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{6}}=\frac{10}{10+5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}\approx 0.6667$$

**Ejercicio 3**: Tenemos cien urnas de tres tipos. El primer tipo contiene 8 bolas blancas y 2 negras; el segundo, 4 blancas y 6 negras y el tercero, 1 blanca y 9 negras. Se elige una urna al azar y se extrae de ella una bola, que resulta blanca. Se devuelve la bola a la urna y se repite el proceso, siendo ahora la bola extraída negra. Si sabemos que 16/39 es la posibilidad de que , siendo la bola blanca, proceda del primer tipo de urna y que 30/61 es la posibilidad de que, siendo la bola negra, proceda del segundo tipo de urna, calcúlese el numero de urnas de cada tipo. (Pista: aplica el teorema de Bayes)

# Ejercicio 3

**SOLUCIÓN:**

Sean x, y y z el numero de urnas de cada tipo y su composición,

$x(8b,2n), y(4b,6n), z(1b,9n)$

Sabemos que $x+y+z=100$

Aplicando l teorema de Bayes en cada extracción tenemos:

$$P(\frac{1}{b})=\frac{P(1)\cdot P(\frac{b}{1})}{P(1)\cdot P(\frac{b}{1})\cdot P(2)\cdot P(\frac{b}{2})\cdot P(3)\cdot P(\frac{b}{3})}=\frac{\frac{x}{100}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{x}{100}\cdot\frac{8}{10}+\frac{y}{100}\cdot\frac{4}{10}+\frac{z}{100}\cdot\frac{1}{10}}=\frac{8x}{8x+4y+z}=$$

$$\frac{8x}{8x+4y+100-x-y}=\frac{8x}{7x+3y+100}=\frac{16}{39}$$

$$P(\frac{2}{n})=\frac{P(2)\cdot P(\frac{n}{2})}{P(1)\cdot P(\frac{n}{1})\cdot P(2)\cdot P(\frac{n}{2})\cdot P(3)\cdot P(\frac{n}{3})}=$$

$$\frac{6y}{2x+6y+9z}=\frac{6y}{-7x-3y+900}=\frac{30}{61}$$

de las ecuaciones anteriores con incógnitas, x e y:

$$\frac{8x}{7x+3y+100}=\frac{16}{39}$$

$$\frac{6y}{-7x-3y+900}=\frac{30}{61}$$

$x=20; y=50.$

Recordando que $x+y+z=100, z=30.$

Hay 20 urnas del primer tipo, 50 del segundo y 30 del tercero.