ERRORES

Ingeniería en Inteligencia Artificial

Razonamiento bajo Incertidumbre

INTRODUCCIÓN

Medir es determinar el valor de una magnitud física comparándola con un patrón que se denomina ***unidad de medida.***
No es posible realizar una medida que este libre de errores.

El orden de magnitud del error total de la medida es su ***precisión.***

Cuando damos el valor de una magnitud física, es conveniente saber cuan fiable es ese valor; esta fiabilidad nos la mide la precisión, y para conocerla hay que estimar el error.

INTRODUCCIÓN

TIPOS DE ERRORES

1) Error de Precisión: Es la división mas pequeña de la escala del equipo de medida y determina la mínima diferencia de magnitud que puede apreciar el equipo (resolución).

2) Errores sistemáticos: Su origen suele deberse a un mal funcionamiento o calibración del equipo de medida. Normalmente su efecto es incrementar o disminuir el valor de la medida siempre en la misma cantidad.

3) Errores accidentales: son los resultantes de la contribución de fuentes incontrolables que desplazan de forma aleatoria el valor medio por encima o debajo de su valor real. Son inevitables

INTRODUCCIÓN

MEDIDAS DIRECTAS

1) Error cometido al realizar una sola medida de una magnitud.
   a) Analógico: el error de precisión es la mitad de la división mas pequeña.

$$E_p = \frac{1}{2}\ división\ más\ pequeña$$

   a) Digital: el error de precisión es la mínima magnitud que puede medir el aparato.

$$E_p = mínima\ magnitud\ medible$$

INTRODUCCIÓN

MEDIDAS DIRECTAS

2) Error cometido al realizar *n* medidas de una magnitud.
   a) La mejor aproximación al verdadero valor de la medida es.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

   b) El error cometido al aproximar el valor verdadero de x a $\bar{x}$ es el denominado accidental:

$$E_{acc} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

   c) Para estimar el error final de nuestras medidas usaremos el máximo entre el error de precisión y el error accidental calculado

$$\Delta x = \max(E_p, E_{acc})$$

INTRODUCCIÓN

En cualquier ingeniería, el error se refiere a cualquier desviación no deseada entre el resultado esperado y el resultado real de un sistema o algoritmo.

Estos errores pueden manifestarse de diversas formas, desde pequeñas discrepancias en la precisión de un modelo hasta fallos catastróficos que comprometen la integridad de todo el sistema.

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la IA, las fuentes del error pueden ser diversas:

1) Calidad de los datos utilizados para entrenar los modelos de IA: Si los datos son incompletos, sesgados o incorrectos, es probable que el modelo produzca resultados inexactos o parciales.
2) Complejidad y a las suposiciones simplificadas: Los algoritmos de IA pueden introducir errores debido a su complejidad y a las suposiciones simplificadas que hacen sobre el mundo real.
3) Falta de comprensión: una falta de comprensión completa del funcionamiento de los modelos de IA, especialmente en el caso de algoritmos de aprendizaje profundo y redes neuronales, dificulta la identificación y corrección de errores.

ERROR ABSOLUTO. DEFINICIÓN

Sea A un número exacto y a un aproximación de A, el error absoluto Δ del número aproximado a, también denotado como Δa es el valor absoluto de la diferencia entre el correspondiente número exacto y la aproximación

$$D = | A - a |$$

ERROR ABSOLUTO. DEFINICIÓN

Ejemplo

Determinar el error absoluto de la aproximación *3,14* del número π.

Número exacto $A=\pi$

Número aproximado $a=3,14$

Error absoluto de a $\Delta=|\pi-3,14|$

No se puede expresar en forma decimal

$|3,141592653... - 3,14| \approx 0,001592653...$

ERROR ABSOLUTO. DEFINICIÓN

Ejemplo

Buscamos una raíz de $f(x)$, es decir un x_0 tal que $f(x_0)=0$. El mejor resultado obtenido es el de un $x_a=2{,}34803$ tal que $f(x_a)=10^{-5}$

¿Cuál es el error absoluto de $f(x_a)$?

$A=f(x_0)=0 \quad a=f(x_a)=10^{-5} \qquad \Delta=|0-10^{-5}|=10^{-5}$

ERROR ABSOLUTO. DEFINICIÓN

Ejemplo

Buscamos una raíz de $f(x)$, es decir un x_0 tal que $f(x_0)=0$. El mejor resultado obtenido es el de un $x_a=2,34803$ tal que $f(x_a)=10^{-5}$

¿Y cuál es el error absoluto de x_a?

$A=x_0$ $\qquad$ $a=2,34803$ $\qquad$ $\Delta=|x_0-2,34803|$

El error absoluto Δx_a no se puede expresar de otra forma, ya que no se conoce x_0

ERROR ABSOLUTO. COTA

Cota del Error Absoluto

Una cota Δ_a *del error absoluto* $\Delta a=|A-a|$ es cualquier número que delimite el error, es decir que no sea menor, de forma que satisfaga

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a$$

esa expresión define un intervalo alrededor de a donde se situará A

$$A \in [a - \Delta_a, a + \Delta_a]$$

es decir

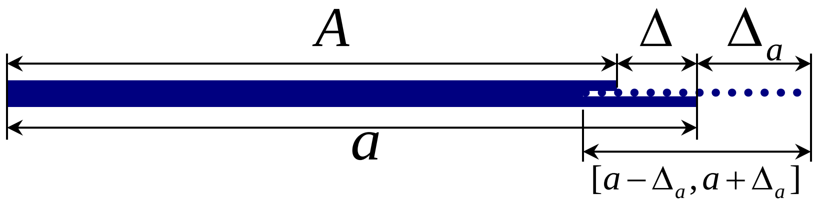
$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a$$

lo que se expresa como

$$A \approx a \pm \Delta_a$$

ERROR ABSOLUTO. COTA

Significado de $A = a \pm \Delta_a$



$$|A-a| = \Delta \leq \Delta_a$$

Cuanto menor sea la cota Δ_a mejor ya que menor será el intervalo $[a-\Delta_a, a+\Delta_a]$ y más acotado queda el error Δ

$$a-\Delta_a \leq A \leq a+\Delta_a \quad \Rightarrow \quad A = a \pm \Delta_a$$

ERROR ABSOLUTO. COTA

Ejemplo

Se aproxima el valor *A=1/3* con *a=0,33*

¿Es $\Delta_a=0{,}001$ una cota superior de su error absoluto?
NO, puesto que

$$\Delta = |A - a| > \Delta_a$$

$$|1/3 - 0{,}33| = 0{,}0033\widehat{3} > 0{,}001$$

¿Lo es $\Delta_a=0{,}004$?

ERROR ABSOLUTO. COTA

Ejemplo

Se aproxima el valor *A=1/3* con *a=0,33*

¿Es $\Delta_a=0,001$ una cota superior de su error absoluto? NO, puesto que

$$\Delta = |A - a| > \Delta_a$$

$$|1/3 - 0,33| = 0,0033\overset{\frown}{3} > 0,001$$

¿Lo es $\Delta_a=0,004$? Si, puesto que

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a \qquad \Delta = 0,0033\overset{\frown}{3} \leq 0,004$$

¿Lo es $\Delta_a = 0,00334\overset{\frown}{3}$?

ERROR ABSOLUTO. COTA

Ejemplo

Se aproxima el valor *A=1/3* con *a=0,33*

¿Es Δ_a*=0,001* una cota superior de su error absoluto? NO

$$\Delta = | A - a | > \Delta_a$$

$$| 1/3 - 0,33 | = 0,0033\overset{\frown}{3} > 0,001$$

¿Lo es Δ_a*=0,004*? Si

$$\Delta = | A - a | \leq \Delta_a \qquad \Delta = 0,0033\overset{\frown}{3} \leq 0,004$$

¿Lo es $\Delta_a = 0,00334\overset{\frown}{3}$? Si ya que $0,0033\overset{\frown}{3} \leq 0,00334\overset{\frown}{3}$

ERROR ABSOLUTO. COTA

Ejemplo

Se aproxima el valor *A=1/3* con *a=0,33*

¿Es Δ_a=*0,001* una cota superior de su error absoluto? NO

$$\Delta = |A - a| > \Delta_a \qquad |1/3 - 0,33| = 0,0033\widehat{3} > 0,001$$

¿Lo es Δ_a=*0,004?* SI

$$\Delta = |A - a| \leq \Delta_a$$

¿Y $\Delta_a = 0,00334\widehat{3}$? SI

$$\Delta = 0,0033\widehat{3} \leq 0,004$$

¿Cuál de las dos es mejor?

$$0,0033\widehat{3} \leq 0,00334\widehat{3}$$

ERROR ABSOLUTO. COTA

Ejemplo

Se aproxima el valor A=1/3 con a=*0,33*

¿Es $\Delta_a = 0{,}001$ una cota superior de su error absoluto?

¿Lo es $\Delta_a = 0{,}004$? SI

¿Y $0{,}00334\widehat{3}$? SI

¿Cuál de las dos es mejor?

$$\Delta_a = 0{,}00334\widehat{3}$$

Puesto que

$$0{,}00334\widehat{3} \leq 0{,}004$$

ERROR RELATIVO. DEFINICIÓN

Error Relativo

El error relativo δ de un número aproximado a es el ratio entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto A

$$\delta \quad \text{ó} \quad \delta a = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|}$$

ERROR RELATIVO. DEFINICIÓN

Error Relativo

El error relativo δ de un número aproximado a es el ratio entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto A

$$\delta \quad \text{ó} \quad \delta a = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|}$$

Ejemplos

A=5,35 a=5,4

A=624,05 a=624

ERROR RELATIVO. DEFINICIÓN

Error Relativo

El error relativo δ de un número aproximado a es el ratio entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto A

$$\delta \quad \text{ó} \quad \delta a = \frac{|A-a|}{|A|} = \frac{\Delta a}{|A|}$$

Ejemplos

A=5,35 a=5,4 $\quad \Delta = 0{,}05 \quad \delta = \dfrac{0{,}05}{5{,}35} = 0{,}0093$

A=624,05 a=624 $\quad \Delta = 0{,}05 \quad \delta = \dfrac{0{,}05}{624{,}05} = 8{,}0122 \cdot 10^{-5}$

ERROR RELATIVO.COTA

Cota del Error Relativo

Una cota δ_a *del error relativo* $\Delta a / |A|$ es cualquier número no menor que dicho error, es decir

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$$

ERROR RELATIVO. DEFINICIÓN

Cota del Error Relativo

Una cota δ_a *del error relativo* $\Delta a / |A|$ es cualquier número no menor que dicho error, es decir

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \leq \delta_a$$

Como $\Delta = |A|\,\delta$

Si $\delta \leq \delta_a$ y $\Delta \leq |A|\,\delta_a$ entonces

de donde $\Delta_a = |A|\,\delta_a$

La cota de error relativo por el valor absoluto del valor exacto es una cota del error absoluto

RELACIÓN ENTRE COTA DE ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO

En la práctica, el valor *A* suele desconocerse, por lo que la relación que interesa usar es $\Delta_a = |a|\,\delta_a$

La cota de error relativo por el valor absoluto de la aproximación, que es en realidad una cota de error absoluto

es decir, $a - |a|\,\delta_a \leq A \leq a + |a|\,\delta_a$

lo que se expresa como $A = a(1 \pm \delta_a)$ o $A \approx a \pm \delta_a\%$ en %

Para ello hay que demostrar

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

RELACIÓN ENTRE COTA DE ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO

Relación entre cota relativa y absoluta

A demostrar

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

Suponemos A y a positivos y $\Delta_a < a$.

Como $\Delta \leq \Delta_a$ y $a - \Delta_a \leq A$ entonces

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \leq \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a} \leq \frac{\Delta_a}{a} \quad \Rightarrow \quad \delta_a = \frac{\Delta_a}{a}$$

A demostrar en otros casos ...

RELACIÓN ENTRE COTA DE ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO

Ejemplos de cotas $\delta_a = \Delta_a / |a|$

$$A = 5{,}35 \qquad \Delta = |A - a| = |5{,}35 - 5{,}4| = 0{,}05$$

$$a = 5{,}4 \qquad \delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{0{,}05}{5{,}35} = 0{,}0093\ldots$$

1. $\Delta_a = 0{,}06$

2. $\Delta_a = 0{,}051$

3. $\Delta_a = 0{,}054$

RELACIÓN ENTRE COTA DE ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO

Ejemplos de cotas $\delta_a = \Delta_a / |a|$

$$A = 5{,}35 \qquad \Delta = |A - a| = |5{,}35 - 5{,}4| = 0{,}05$$

$$a = 5{,}4 \qquad \delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{0{,}05}{5{,}35} = 0{,}0093\ldots$$

1. $\Delta_a = 0{,}06 \qquad \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{0{,}06}{5{,}4} = 0{,}011\widehat{1} \geq \delta$

2. $\Delta_a = 0{,}051 \qquad \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{0{,}051}{5{,}4} = 0{,}009\widehat{4} \geq \delta$

3. $\Delta_a = 0{,}054 \qquad \delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{0{,}054}{5{,}4} = 0{,}01 \geq \delta$

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Descomposición decimal

Un número real positivo A puede expresarse como la siguiente suma finita o infinita

$$A = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots$$

donde

$$m \in \mathbf{Z} \quad \alpha_i \in \{0,1,2,\ldots,9\} \quad \alpha_m \neq 0$$

A esta suma se le llama forma decimal y se dice entonces que $\boldsymbol{\alpha_i}$ son dígitos, que α_m es el dígito más significativo y que m es la potencia de*10* más elevada para A

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Aproximación decimal

Se llama aproximación en forma decimal de un número real positivo *A* a la siguiente forma decimal con suma finita

$$a = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1} \quad (\beta_m \neq 0)$$

Ejemplo, forma decimal de *A=π* y de su aproximación *3,142*

$$\pi = 3{,}1415\ldots = 3\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4} + \ldots$$

$$a = 3{,}142 = 3\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3}$$

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Dígitos significativos

Cualquier dígito α_i no nulo es significativo

Cualquier dígito $\alpha_i=0$ es significativo si son significativos α_{i+1} y α_{i-1}

El resto de dígitos cero

- En la forma decimal no existen por definición $\alpha_i=0$ anteriores al dígito más significativo $\alpha_m\neq 0$

- Los ceros posteriores al último $\alpha_i\neq 0$ se considerarán significativos si interesan, dependiendo de la precisión del aparato de cálculo o captura, la interpretación, la expresión, etc.

$$0{,}04030 = 4\cdot 10^{-2} + 0\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-4} + 0\cdot 10^{-5}$$

$$600 = 6\cdot 10^{2} + 0\cdot 10^{1}$$

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Dígitos exactos

Son dígitos exactos de una <u>aproximación</u> *a* en forma decimal el máximo número *n* de dígitos significativos

$$\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots \beta_{m-n+1}$$

tales que cumplen

$$\Delta = | A - a | \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1}$$

Se dice entonces que *a* tiene los *n* primeros dígitos exactos.

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Dígitos exactos

Interpretación de la condición

$$\Delta = |A - a| \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1}$$

La aproximación *a* tiene los *n* primeros dígitos exactos si el error absoluto de *a* no excede de media unidad situada en el *n-ésimo* lugar contando de izquierda a derecha, y esos *n* primeros dígitos exactos son

$$\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots \beta_{m-n+1}$$

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

Dados $A=3,25$ y $a=3,29$, ¿cuántos dígitos exactos tiene a?

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

Dados *A=3,25* y *a=3,29,* ¿cuántos dígitos exactos tiene *a*?

Buscamos las expresiones con un solo dígito 5 que acoten, lo más ajustado posible, el error absoluto

$$\Delta = | A - a | = 0{,}04 \qquad a = 3 \cdot 10^{m=0} + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$$

$$0{,}005 < 0{,}04 \leq 0{,}05$$

Se calcula el valor de n para las dos cotas

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

Dados *A=3,25* y *a=3,29*, ¿cuántos dígitos exactos tiene *a*?

$$\Delta = |A - a| = 0{,}04 \qquad a = 3 \cdot 10^{m=0} + 2 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$$

$$0{,}005 < 0{,}04 \leq 0{,}05$$

$$\Delta > (1/2) \cdot 10^{m-n+1} = 0{,}005$$
$$-2 = m - n + 1 \Rightarrow n = 3$$

por abajo *n=3*

$$\Delta \leq (1/2) \cdot 10^{m-n+1} = 0{,}05$$
$$-1 = m - n + 1 \Rightarrow n = 2$$

por arriba *n=2*

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

Dados *A=3,25* y *a=3,29*, ¿cuántos dígitos exactos tiene *a*?

$$\Delta = |A-a| = 0,04 \qquad a = 3\cdot 10^{m=0} + 2\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2}$$

$$\cancel{0,005} < 0,04 \le 0,05$$

$$\cancel{\Delta > (1/2)\cdot 10^{m-n+1} = 0,005}$$
$$\cancel{-2 = m-n+1 \Rightarrow n = 3}$$

~~por abajo *n=3*~~

$$\Delta \le (1/2)\cdot 10^{m-n+1} = 0,05$$
$$-1 = m-n+1 \Rightarrow n = 2$$

por arriba *n=2*

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

¿Y si $A=3{,}25$ y $a=3{,}31$?

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$0{,}05 < 0{,}06 \leq 0{,}5$$

$$0{,}5 \cdot 10^{-1} < 0{,}06 \leq 0{,}5 \cdot 10^{0}$$

$$-1 = m - n + 1 \qquad\qquad 0 = m - n + 1$$

$$m = 0 \quad n = 2 \qquad\qquad m = 0 \quad n = 1$$

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$\cancel{0{,}05} < 0{,}06 \leq 0{,}5$$

$$0{,}5 \cdot 10^{-1} < 0{,}06 \leq 0{,}5 \cdot 10^{0}$$

$$\cancel{-1 = m - n + 1 \qquad m = 0 \quad n = 2} \qquad\qquad 0 = m - n + 1 \qquad m = 0 \quad n = 1$$

n=1

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5$$

$$0,5 \cdot 10^{-1} < 0,06 \leq 0,5 \cdot 10^{0}$$

$$\cancel{-1 = m - n + 1} \qquad 0 = m - n + 1$$

$$\cancel{m = 0 \quad n = 2} \qquad m = 0 \quad n = 1$$

n=1

¿Y si *A=3,23* y *a=3,29*?

n=1

¿Y si A=3,25 y a=3,3?

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5$$

$$0,5 \cdot 10^{-1} < 0,06 \leq 0,5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$\cancel{-1 = m - n + 1 \quad m = 0 \quad n = 2} \qquad 0 = m - n + 1 \quad m = 0 \quad n = 1$$

¿Y si *A=3,23* y *a=3,29*?

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5 = 0,5 \cdot 10^{0}$$

n=1

$$m = 0 \quad 0 = m - n + 1$$

¿Y si A=3,25 y a=3,3?

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

¿Y si *A=3,25* y *a=3,31*?

n=1

$$\cancel{0,05} < 0,06 \le 0,5$$

$$0,5 \cdot 10^{-1} < 0,06 \le 0,5 \cdot 10^{0}$$

$$\cancel{-1 = m - n + 1 \quad m = 0 \quad n = 2}$$

$$0 = m - n + 1 \quad m = 0 \quad n = 1$$

¿Y si *A=3,23* y *a=3,29*?

n=1

$$\cancel{0,05} < 0,06 \le 0,5 = 0,5 \cdot 10^{0}$$

$$m = 0 \quad 0 = m - n + 1$$

¿Y si A=3,25 y a=3,3?

$$\cancel{0,005} < 0,05 \le 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1}$$

$$m = 2 \quad 1 = m - n + 1$$

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS Y DÍGITOS EXACTOS

Ejemplo

¿Y si $A=3,25$ y $a=3,31$?

¿Y si $A=3,25$ y $a=3,31$?

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5$$

$$0,5\cdot 10^{-1} < 0,06 \leq 0,5\cdot 10^{0}$$

$n=1$

$$\cancel{-1 = m-n+1 \qquad m=0 \quad n=2} \qquad 0=m-n+1 \qquad m=0 \quad n=1$$

¿Y si $A=3,23$ y $a=3,29$?

$$\cancel{0,05} < 0,06 \leq 0,5 = 0,5\cdot 10^{0}$$

$n=1$

$$m=0 \quad 0=m-n+1$$

¿Y si A=3,25 y a=3,3?

$$\cancel{0,005} < 0,05 \leq 0,05 = 0,5\cdot 10^{-1}$$

$$m=2 \quad 1=m-n+1$$

$$\cancel{0,5} < 0,8 \leq 5 = 0,5\cdot 10^{1}$$

$$m=2 \quad 1=m-n+1$$

RELACIÓN ENTRE ERROR RELATIVO Y DÍGITOS EXACTOS

Teorema de la acotación

Si un número aproximado $a>0$ tiene n dígitos exactos, su error relativo satisface

$$\delta \leq \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

donde β_m es el primer dígito significativo (dígito más significativo) de a

RELACIÓN ENTRE ERROR RELATIVO Y DÍGITOS EXACTOS

Teorema de la acotación

Ejemplo

Se pretende aproximar $\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$

¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,1%*?

RELACIÓN ENTRE ERROR RELATIVO Y DÍGITOS EXACTOS

Teorema de la acotación

Ejemplo

Se pretende aproximar $\sqrt{2} = 1,4142135623...$
¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,1%*?

Calculamos el primer dígito $\beta_m = \beta_0 = 1$

Queremos que $\delta_a = 0,001$

Aplicamos el Teorema de la Acotación

$$\delta_a = \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad 0,001 = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad 10^{-3} = 10^{1-n}$$

$$-3 = 1 - n$$

RELACIÓN ENTRE ERROR RELATIVO Y DÍGITOS EXACTOS

Teorema de la acotación

Ejemplo

Se pretende aproximar $e = 2.718281828\ldots$

¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,05%*?

RELACIÓN ENTRE ERROR RELATIVO Y DÍGITOS EXACTOS

Teorema de la acotación

Ejemplo

Se pretende aproximar e *=2.718281828…*

¿Cuántos dígitos son necesarios para que el error relativo no exceda de un *0,05%*?

Calculamos el primer dígito $\beta_m = \beta_0 = 2$

Queremos que $\delta_a = 0{,}0005$

Aplicamos el Teorema de la Acotación

$$\delta_a = \frac{1}{\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad 0{,}0005 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}5 \cdot 10^{1-n}$$

$$-3 = 1 - n$$

OPERACIONES CON ERRORES

Error absoluto de la suma

La suma de los errores absolutos es cota del error absoluto de la suma de aproximaciones

Valor exacto $S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

Aproximación $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$S - s = A_1 - a_1 + A_2 - a_2 + \ldots + A_n - a_n$$

$$S - s = (\pm\Delta a_1) + (\pm\Delta a_2) + \ldots + (\pm\Delta a_n)$$

$$| S - s | \leq | \pm\Delta a_1 | + | \pm\Delta a_2 | + \ldots + | \pm\Delta a_n |$$

$$\Delta s \leq \Delta_s = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n$$

OPERACIONES CON ERRORES

Error absoluto de la resta

Como -a aproxima a –A con el mismo error absoluto que a aproxima a A

$$|A-a| = \Delta a$$

$$|(-A)-(-a)| = |-(A-a)| = |A-a| = \Delta a$$

Entonces la suma de errores también resulta una cota para la resta

$$S = A_1 - A_2 = A_1 + (-A_2)$$
$$s = a_1 - a_2 = a_1 + (-a_2)$$
$$\Delta s \leq \Delta_r = \Delta a_1 + \Delta a_2$$

OPERACIONES CON ERRORES

Error relativo de la suma

El máximo de las cotas de error relativo de los términos de una suma acota al error relativo de esa suma si todos los términos son del mismo signo

Valor exacto $S = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

Aproximación $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Si $\Delta_s = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n$

entonces

$$\Delta_s \leq \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}$$

$$\delta s = \frac{\Delta s}{|S|} \leq \frac{\Delta_s}{|S|} \leq \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|}$$

OPERACIONES CON ERRORES

Error relativo de la suma

$$\delta s = \frac{\Delta s}{|S|} \le \frac{\Delta_s}{|S|} \le \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|} =$$

$$= \frac{|A_1|\delta_{a_1} + |A_2|\delta_{a_2} + \ldots + |A_n|\delta_{a_n}}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|} \le$$

$$\le \delta^* \frac{|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|}{|A_1 + A_2 + \ldots + A_n|} = \delta^*$$

$$\delta^* = \max(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \ldots, \delta_{a_n})$$

$$\delta s \le \delta_s = \max(\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, \ldots, \delta_{a_n})$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Error absoluto de una función

El error absoluto de una función tiende al error absoluto de su variable por el valor absoluto de su derivada cuando el error absoluto de la variable tiende a cero

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f \to \Delta x \,|\, f'|$$

Demostración

Suponemos *a* una aproximación a *x* y su error absoluto

$$\Delta x = | x - a |$$

Por definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x \pm \Delta x)}{\pm \Delta x}$$

$$\left| f'(x) \right| = \left| \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x \pm \Delta x)}{\pm \Delta x} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left| f(x) - f(a) \right|}{\Delta x}$$

$$\left| f'(x) \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad | f'| \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \Delta f \approx \Delta x \,|\, f'|$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo. Error absoluto de una función logaritmo

El error absoluto del logaritmo natural tiende al error absoluto de su variable cuando el error absoluto de esta variable tiende a *0*

El error absoluto del logaritmo natural tiene como cota la cota del error relativo de *x*

$$f(x) = \ln(x) \qquad \Delta f(x) \approx \Delta x \cdot \left| f'(x) \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Delta \ln(x) \approx \frac{\Delta x}{|x|} = \delta x$$

$$\Delta \ln(x) \approx \frac{\Delta x}{|x|} \leq \frac{\Delta_x}{|x|} = \delta_x \qquad \delta_x = \Delta_{\ln(x)}$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo. Error absoluto de la función raíz cuadrada

El error absoluto de una raíz cuadrada tiende al error absoluto de su variable partido dos veces el valor de la función, cuando el error absoluto de esta variable tiende a *0*

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \Delta f(x) \approx \Delta x \cdot \left| f'(x) \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \Delta\sqrt{x} \approx \frac{\Delta x}{2\left|\sqrt{x}\right|}$$

$$\sqrt{(23 \pm 1{,}09)} \approx \sqrt{23} \pm \left(1{,}09 \times \frac{1}{2\left|\sqrt{23}\right|} \right) \approx$$

$$\approx \pm (4{,}796 \pm 0{,}11364) \approx \pm (4{,}796 \pm 2{,}37\%)$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Error relativo del producto

El error relativo del producto está acotado por la suma de los errores relativos de los factores

Valor exacto $P = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$

Aproximación $p = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

$$\ln(p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_n)$$

$$\Delta_{\ln(p)} \leq \Delta_{\ln(a_1)} + \Delta_{\ln(a_2)} + \ldots + \Delta_{\ln(a_n)}$$

$$\delta_p \leq \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_n}$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Error relativo del cociente

El error relativo del producto está acotado por la suma de los errores relativos del dividendo y divisor

Valor exacto $C = A_1 / A_2$

Aproximación $c = a_1 / a_2$

$$\ln(c) = \ln(a_1) - \ln(a_2)$$

$$\Delta_{\ln(c)} \leq \Delta_{\ln(a_1)} + \Delta_{\ln(a_2)}$$

$$\delta_c \leq \delta_{a_1} + \delta_{a_2}$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo

Si $A_1 = 5 \pm 0{,}25$,
$A_2 = 2 \pm 0{,}1$,
$A_3 = 4 \pm 0{,}2$,

Calcula

$$\frac{A_3\,(A_1 + A_2)}{A_3 - A_2}$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo

Si $A_1=5\pm0{,}25$,
$A_2=2\pm0{,}1$,
$A_3=4\pm0{,}2$,

Calcula

$$\frac{A_3\,(A_1 + A_2)}{A_3 - A_2}$$

$$\frac{(4\pm0{,}2)[(5\pm0{,}25)+(2\pm0{,}1)]}{(4\pm0{,}2)-(2\pm0{,}1)} = \frac{(4\pm0{,}2)(7\pm0{,}35)}{(2\pm0{,}3)} =$$

$$= \frac{(4\pm5\%)(7\pm5\%)}{(2\pm15\%)} = \frac{(28\pm10\%)}{(2\pm15\%)} = 14\pm25\% = 14\pm3{,}5$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo

Si $A = 1 \pm 0{,}02$ $\quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$

Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo

Si $A = 1 \pm 0{,}02$ $B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$

Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$A = 1 \pm 2\%$

$B = -5 \pm 1\%$

$C = 6 \pm 0{,}5\%$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo

Si $A = 1 \pm 0{,}02$ $\;B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$

Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$A = 1 \pm 2\%$

$B = -5 \pm 1\%$

$C = 6 \pm 0{,}5\%$

$AC = 6 \pm 2{,}5\% = 6 \pm 0{,}15$

$4AC = 24 \pm 2{,}5\% = 24 \pm 0{,}6$

$B^2 = BB = 25 \pm 2\% = 25 \pm 0{,}5$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo

Si $A = 1 \pm 0{,}02$ $B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$

Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$A = 1 \pm 2\%$

$B = -5 \pm 1\%$

$C = 6 \pm 0{,}5\%$

$AC = 6 \pm 2{,}5\% = 6 \pm 0{,}15$

$4AC = 24 \pm 2{,}5\% = 24 \pm 0{,}6$

$B^2 = BB = 25 \pm 2\% = 25 \pm 0{,}5$

$B^2 - 4AC = 1 \pm 1{,}1$

$$\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{1} \pm \left(\frac{1{,}1}{2\left|\sqrt{1}\right|}\right) = 1 \pm 0{,}55$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Ejemplo

Si $A = 1 \pm 0{,}02 \quad B = -5 \pm 0{,}05$ y $C = 6 \pm 0{,}03$

Calcula las raíces de $Ax^2 + Bx + C$

$A = 1 \pm 2\%$

$B = -5 \pm 1\%$

$C = 6 \pm 0{,}5\%$

$AC = 6 \pm 2{,}5\% = 6 \pm 0{,}15$

$4AC = 24 \pm 2{,}5\% = 24 \pm 0{,}6$

$B^2 = BB = 25 \pm 2\% = 25 \pm 0{,}5$

$B^2 - 4AC = 1 \pm 1{,}1$

$2A = 2 \pm 2\%$

$$\sqrt{B^2 - 4AC} = \sqrt{1} \pm \left(\frac{1{,}1}{2\left|\sqrt{1}\right|}\right) = 1 \pm 0{,}55$$

$$\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2\mathrm{A}} = \frac{6 \pm 0{,}60}{2 \pm 0{,}04} = \frac{6 \pm 10\%}{2 \pm 2\%} = 3 \pm 12\% = 3 \pm 0{,}36$$

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2\mathrm{A}} = \frac{4 \pm 0{,}60}{2 \pm 0{,}04} = \frac{4 \pm 15\%}{2 \pm 2\%} = 2 \pm 17\% = 2 \pm 0{,}34$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

ERROR EN FUNCIONES DE MAS DE UNA VARIABLE

Sean las medidas x, y con errores $\Delta x, \Delta y$ utilizadas para calcular

$$q = f(x, y)$$

Mediante un desarrollo en serie de potencias para el caso de varias variables

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \cdots$$

Con lo que

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \cdots$$

y

$$\Delta q = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y$$

ERRORES en MODELOS de INTELIGENCIA ARTIFICIAL

En el contexto de la modelización en inteligencia artificial y machine learning, las métricas de error son medidas utilizadas para evaluar la calidad de los modelos predictivos y de clasificación. Estas métricas permiten cuantificar la diferencia entre las predicciones del modelo y los valores reales, lo que permite comparar el rendimiento de diferentes modelos y seleccionar el mejor modelo para una tarea específica.

ERRORES para ALGORITMOS de REGRESIÓN

Error Absoluto Medio (MAE)

MAE, del inglés Mean Absolute Error (Error Absoluto Medio), mide la diferencia media absoluta entre las predicciones del modelo y los valores reales.

El MAE se calcula sumando los errores absolutos entre las predicciones del modelo y los valores reales para cada observación y luego dividiendo por el número de observaciones.

El MAE es una métrica de error en la misma unidad que la variable de respuesta, lo que significa que se puede interpretar directamente el tamaño promedio del error. Un MAE de 0 indica que el modelo predice exactamente los valores reales, mientras que un MAE mayor indica que el modelo tiene un mayor error promedio.

El MAE es útil cuando se desea evaluar el rendimiento del modelo en términos de la magnitud del error y no se desea penalizar en exceso los valores atípicos (outliers) o errores extremos. Sin embargo, puede ser sensible a los valores atípicos y no tener en cuenta la dirección de los errores. Por lo tanto, se recomienda utilizar el MAE junto con otras métricas para tener una evaluación más completa del modelo.

ERRORES para ALGORITMOS de REGRESIÓN

Error Cuadrático Medio (MSE)

El MSE, del inglés Mean Squared Error mide el promedio de las diferencias al cuadrado entre las predicciones del modelo y los valores reales.

El MSE se calcula sumando las diferencias al cuadrado entre las predicciones del modelo y los valores reales para cada observación y luego dividiendo por el número de observaciones.

También es una métrica de error en la misma unidad que la variable de respuesta, lo que significa que se puede interpretar directamente el tamaño promedio del error. Sin embargo, al elevar al cuadrado las diferencias, el MSE penaliza más los errores grandes que los pequeños, lo que puede ser deseable en algunos casos, como cuando los errores grandes son más costosos.

El MSE es útil cuando se desea evaluar el rendimiento del modelo en términos de la magnitud del error y se desea penalizar más los errores grandes que los pequeños. Sin embargo, al igual que el MAE, puede ser sensible a los valores atípicos y no tener en cuenta la dirección de los errores. Por lo tanto, se recomienda utilizar el MSE junto con otras métricas para tener una evaluación más completa del modelo.

ERRORES para ALGORITMOS de REGRESIÓN

Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE)

El RMSE, del inglés Root Mean Squared Error mide la raíz cuadrada del promedio de las diferencias al cuadrado entre las predicciones del modelo y los valores reales.

El RMSE también es una métrica de error en la misma unidad que la variable de respuesta, lo que significa que se puede interpretar directamente el tamaño promedio del error. Al calcular la raíz cuadrada del MSE, el RMSE tiene la misma unidad que la variable de respuesta original.

El RMSE proporciona una medida de la magnitud del error que es fácil de interpretar y comparar entre modelos. Al igual que el MSE, el RMSE penaliza más los errores grandes que los pequeños.

Al igual que el MAE y el MSE, el RMSE puede ser sensible a los valores atípicos y no tener en cuenta la dirección de los errores. Por lo tanto, se recomienda utilizar el RMSE junto con otras métricas para tener una evaluación más completa del modelo.