TEMA 3 : ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

- Producto escalar (estándar): euclídeo / canónico / usual

Es una operación entre 2 vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ que da como resultado un número real (escalar).

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \bullet (v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ejemplo: Hallar el producto escalar de los vectores:

$$\vec{u} = \left(-1, -2, \frac{1}{3}\right) \text{ y } \vec{v} = \left(\frac{3}{4}, 0, -8\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot \frac{3}{4} + (-2) \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-8) = -\frac{3}{4} - \frac{8}{3} = \frac{-9-32}{12} = \boxed{-\frac{41}{12}}$$

Propiedades :

① Conmutativa : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

② Distributiva : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

③ Reubicación del escalar : $\alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

④ Definido positivo : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ solo si $\vec{u} = \vec{0}$.

- Producto escalar (no estándar) :

Toda operación en un espacio vectorial real que cumpla las propiedades anteriores será un producto escalar (no estándar) .

$\boxed{\text{Ejemplo}}$: La siguiente operación es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + 2 u_2 v_2 + 3 u_3 v_3$$

Ya que cumple las 4 propiedades .

Ejemplo: La siguiente operación no es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

Ya que no cumple la propiedad ④:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = (x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2 x_1 x_2 \geq 0 \,? \; \times$$

Puede ser negativa

Ejercicio: Verificar que la siguiente expresión define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + 2 u_2 v_2$

- Espacio euclídeo:

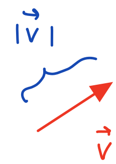
Es un e.v. real V en el que hay definido un producto escalar.

- Norma o módulo:

La norma o módulo de un vector $\vec{v}$ es un escalar definido como:

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}}$$

* Representa la longitud del vector $\vec{v}$:



$\boxed{\text{Ejemplo}}$: En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar estándar, la norma del vector $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0\right)$ es :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$|\vec{v}| = \sqrt{1} = \boxed{1}$ $\longrightarrow$ Si $|\vec{v}| = 1$: $\vec{v}$ es unitario.

Propiedades :

① $|\vec{v}| \geq 0 \longrightarrow |\vec{v}| = 0$ solo si $\vec{v} = \vec{0}$

② $|\alpha \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$ $\quad |\alpha| \rightarrow$ VALOR ABS

③ $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

④ $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ solo si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\longrightarrow$ $T^{\underline{MA}}$ de Pitágoras

⑤ $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ $\longrightarrow$ Desigualdad triangular

⑥ $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ $\longrightarrow$ Desigualdad de Cauchy - Schwarz

⑦ $|\vec{u}+\vec{v}|^2 + |\vec{u}-\vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$ $\longrightarrow$ ley del paralelogramo.

Ejercicio: Considérense los vectores $\vec{u} = (1,5)$ y $\vec{v} = (3,4)$ en $\mathbb{R}^2$.

Hallar:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ con respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^2$.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ con respecto al producto escalar de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1, u_2)\cdot(v_1, v_2) = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 3u_2 v_2$$

c) $|\vec{v}|$ empleando el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^2$.

d) $|\vec{v}|$ empleando el producto escalar del apartado b).

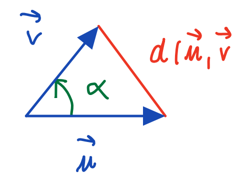
Ejercicio: Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores de un e.v euclídeo, determinar la norma de $\vec{v}$ sabiendo que:

$$|\vec{u}| = 1, \quad |\vec{u}+\vec{v}| = 2 \quad y \quad |\vec{u}-\vec{v}| = 3$$

- **Distancia y ángulo entre dos vectores :**

* DISTANCIA :

$$\boxed{d(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}-\vec{v}| = |\vec{v}-\vec{u}|}$$



* ÁNGULO :

$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)}$$

$\vec{u},\vec{v} \neq \vec{0}$ $\qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha}$$

<u>Ejercicio</u>: Calcular la distancia y el ángulo entre los vectores

$\vec{u} = (0,-1,4)$ y $\vec{v} = (4,3,-1)$, utilizando :

a) El producto escalar usual.

b) El producto escalar :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 - u_3v_2 - u_2v_3 + u_3v_3$$

- **Matriz de Gram :** matriz del prod. escalar

Dada una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de un e.v euclídeo, la

la matriz de Gram en base B es la matriz :

$$G_B = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_n \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{v}_n \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_n \cdot \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \cdot \vec{v}_n \end{pmatrix}$$

- La matriz de Gram representa a un producto escalar.
- Tiene orden n y es simétrica definida positiva.

menores principales > 0.

Ejercicio : Consideramos el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Calcular la matriz de Gram respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$

Ejercicio: Calcular la matriz de Gram del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $B = \{(1,1,2),(3,1,1),(-2,-1,2)\}$.

- Expresión matricial del producto escalar: $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores en base B.

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{v}_n\cdot\vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n\cdot\vec{v}_n \end{pmatrix}}_{G_B} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo: El siguiente producto escalar en $\mathbb{R}^3$, definido por:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{1\times 3}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

se corresponde con:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \underbrace{(x_1+x_2,\ x_1+2x_2-x_3,\ -x_2+x_3)}_{1\times 3}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{3\times 1} =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$$

Ejercicio: Verificar si las siguientes expresiones definen un producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

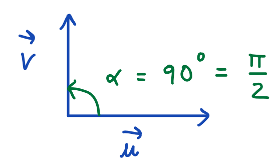
a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_3y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_3$

b) $(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

- <u>Ortogonalidad</u>: ortogonal = perpendicular $\perp$

* Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si su prod. escalar es 0:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}}$$



* Un conjunto de vectores es ortogonal si cada vector es ortogonal a todos los demás.

Ejemplo: dos vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales si consideramos el prod. escalar estándar:

$$\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} \cdot \underbrace{(0,1,0)}_{e_2} = 0 \qquad e_1 \perp e_2$$

$$\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{e_3} = 0 \qquad e_1 \perp e_3$$

$$\underbrace{(0,1,0)}_{e_2} \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{e_3} = 0 \qquad e_2 \perp e_3$$

* Todo conjunto ortogonal es L.I. (al revés no es cierto)

- Ortonormalidad :

* Normalizar un vector $\vec{v}$ es convertirlo a unitario : $|\vec{v}| = 1$

$$\boxed{\vec{v}_u = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

* Conjunto ortonormal :

Conjunto ortogonal con todos los vectores unitarios.

Ejercicio : Comprobar que el siguiente conjunto de vectores es ortogonal :

$$\left\{ \left(-\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right), \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0\right) \right\}$$

Normalizar el conjunto de vectores para que sea ortonormal.

Ejercicio: En el e.v. euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, determinar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $(1,2,1,0)$, $(0,-1,1,0)$ y $(1,1,-2,1)$.