Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Apuntes de teoría nº 1

Antonio Valle Sánchez

DFESTS

UA UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

TEMA 1

INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

El procesado digital de señal se ha desarrollado muy rápidamente en los últimos treinta años. Esto es resultado del avance significativo en la tecnología digital de computadoras y en la fabricación de circuitos integrados.

Estos circuitos digitales, que no son muy caros y sí relativamente rápidos, han hecho posible construir sistemas digitales altamente sofisticados capaces de llevar a cabo funciones y tareas de procesado digital de señal complejas, las cuales resultarían muy difíciles, y a veces incluso caras de abordar, con circuitos analógicos o con sistemas de procesado analógico de señal.

El procesado digital de señal es la solución apropiada para todos los problemas de procesamiento de la señal. El hardware del procesado digital nos permite tener operaciones programables, las cuales a través del software se pueden modificar para que realicen diferentes funciones del procesado digital.

El tratamiento digital de la señal ha revolucionado por tanto multitud de campos. Algunas de sus diversas aplicaciones aparecen en la figura 1.1.

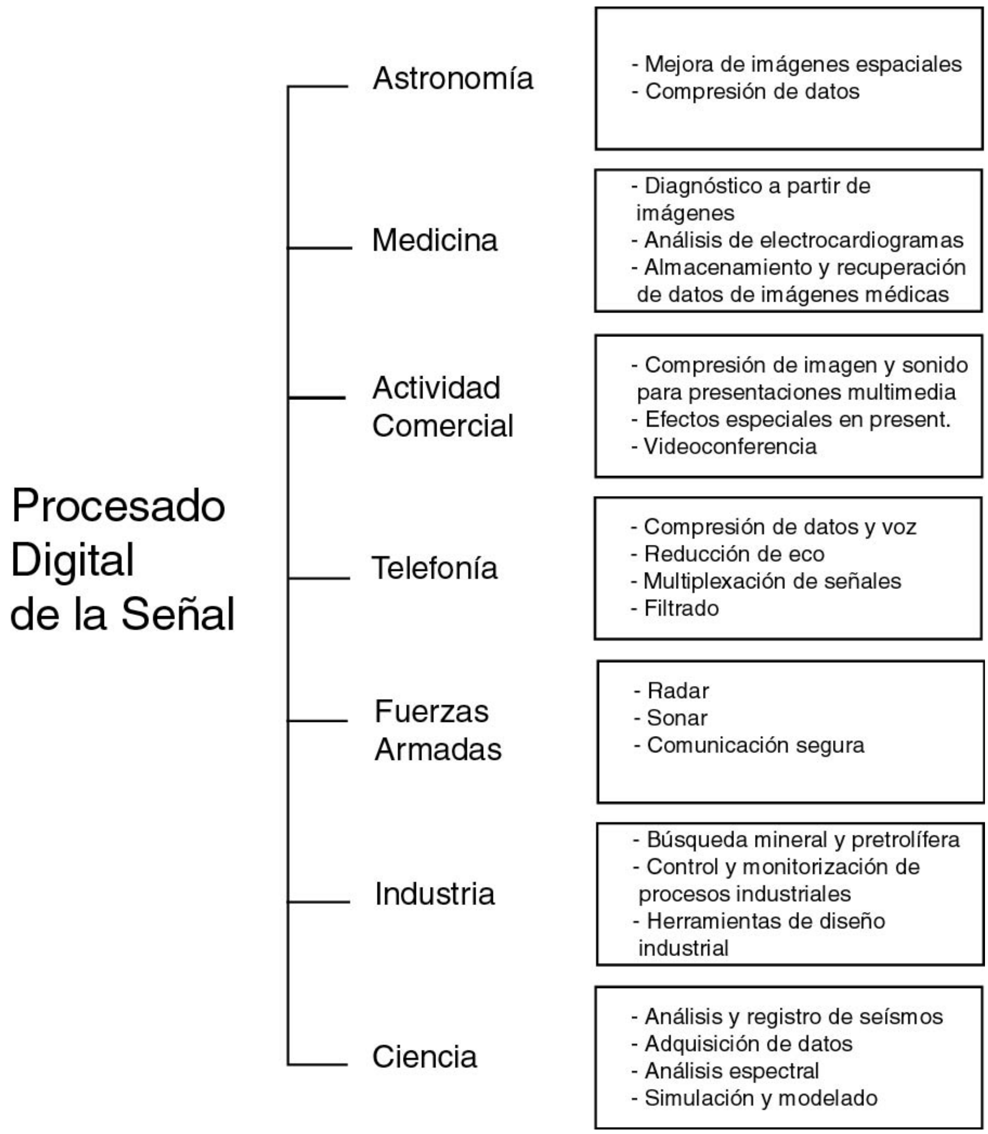

Figura 1.1 *Algunas aplicaciones del procesado digital de la señal en distintas áreas.*

1.1 Señales, sistemas y procesado de la señal.

Definiciones generales:

Señal:

Se define como la representación eléctrica de una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes.

Generalmente, el modo de obtener la señal eléctrica se puede esquematizar tal y como se muestra en la figura 1.2.

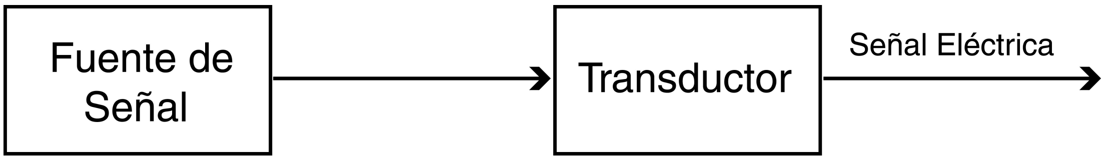

Figura 1.2 *Adquisición de una señal eléctrica.*

En este esquema, la fuente de señal integra tanto el estímulo como al sistema que genera la señal natural. Por ejemplo, en el caso de una señal de voz, la fuente de presión sonora vendría dada por el estímulo del aire proveniente de los pulmones más el conjunto formado por las cuerdas vocales y el tracto bucal. Respecto al transductor, éste es justo el dispositivo que permite convertir una magnitud física variable en una señal eléctrica (por ejemplo, un micrófono es un transductor que convierte la presión sonora en una señal eléctrica). La señal resultante de este proceso, y siguiendo el ejemplo indicado, será una señal eléctrica que variará con el tiempo de la misma forma que lo hace la presión sonora correspondiente.

En la tabla 1.1 se muestra algún ejemplo más.

Fuente de señal	**Transductor**	**Variables independientes**
Seísmo	Sismógrafo	Tiempo
Imagen en movimiento	Cámara de televisión	Espacio y tiempo

Tabla 1.1 *Ejemplos de señales.*

Sistema:

Se trata del dispositivo físico que realiza una determinada operación sobre la señal (ver figura 1.3)

Por ejemplo, puede ser un filtro que elimine de una señal de voz el ruido de fondo. Los sistemas se clasifican según el tipo de operación que realicen sobre la señal, como ya se verá en el tema 2.

Figura 1.3 *Esquema Señal – Sistema.*

Procesado de señal:

Consiste en todas las operaciones que pueden realizar los sistemas sobre las señales.

El procesado de la señal puede ser:

Analógico: implica sistemas analógicos y por tanto hardware analógico.

Digital: implica sistemas digitales, y por consiguiente hardware digital y software.

1.2 Clasificación de señales.

Los métodos de procesado de señal dependen del tipo de señales a procesar. Existen técnicas determinadas para el procesado de familias específicas de señales. De ahí la importancia de su clasificación para determinar que técnicas de procesado son más adecuadas en cada caso.

1.2.1 Señales multidimensional o unidimensionales.

Si la señal sólo depende de una variable, entonces se dice que es una señal unidimensional. En esta situación se encuentra por ejemplo una señal de voz, la cual se puede ver como una señal cuya amplitud varía en función de tiempo.

Si la señal depende de M variables, entonces se dirá que se tiene una señal M-dimensional. Por ejemplo, en una imagen en blanco y negro, en cada punto se tiene un valor de intensidad o brillo, $I(x,y)$, constituyendo por tanto una señal bi-dimensional.

En esta asignatura se trabajará generalmente con señales unidimensionales, donde la variable independiente será, en la mayoría de casos, el tiempo.

1.2.2 Señales en tiempo continuo o en tiempo discreto.

Las señales de tiempo continuo o señales analógicas son definidas para cada valor del tiempo y toman valores en un intervalo continuo (a,b), donde a podría ser $-\infty$ y b podría ser $+\infty$. En las funciones que describen a las señales de tiempo continuo encerraremos entre paréntesis a la variable independiente (por ejemplo, $s(t)$).

Una señal de tiempo discreto es definida sólo para valores discretos de tiempo. Estos instantes de tiempo no deben ser necesariamente equidistantes, pero en la práctica se escoge así por conveniencia computacional. En las funciones que describen a las señales de tiempo discretos colocaremos entre corchetes a la variable independiente (por ejemplo, $x[n]$).

1.2.3 Señales de valor continuo o de valor discreto.

Los valores que toma una señal de tiempo continuo o tiempo discreto pueden ser continuos o discretos. Si una señal toma todos los valores posibles de un rango finito o infinito entonces se dice que tenemos una señal de valor continuo. Si por el contrario, la señal sólo toma valores dentro de un conjunto finito de posibles valores, entonces se dice que es una señal de valor discreto.

Una señal de tiempo discreto que toma un conjunto finito de valores discretos, es llamada señal digital.

Si la señal a procesar es una señal analógica, para digitalizarla primero se convertirá en una señal de tiempo discreto por muestreo de la señal en determinados instantes de tiempo. A continuación, el proceso de conversión a una señal de valor discreto se realiza mediante el proceso de cuantificación, el cual es básicamente un proceso de aproximación.

En la figura 1.4 se muestra un cuadro resumen de lo expuesto en los párrafos anteriores y en el apartado 1.2.2. En este cuadro, se clasifican las señales en cuatro categorías posibles dependiendo de los valores que tomen las señales en sí, y los valores que tomen las respectivas variables independientes.

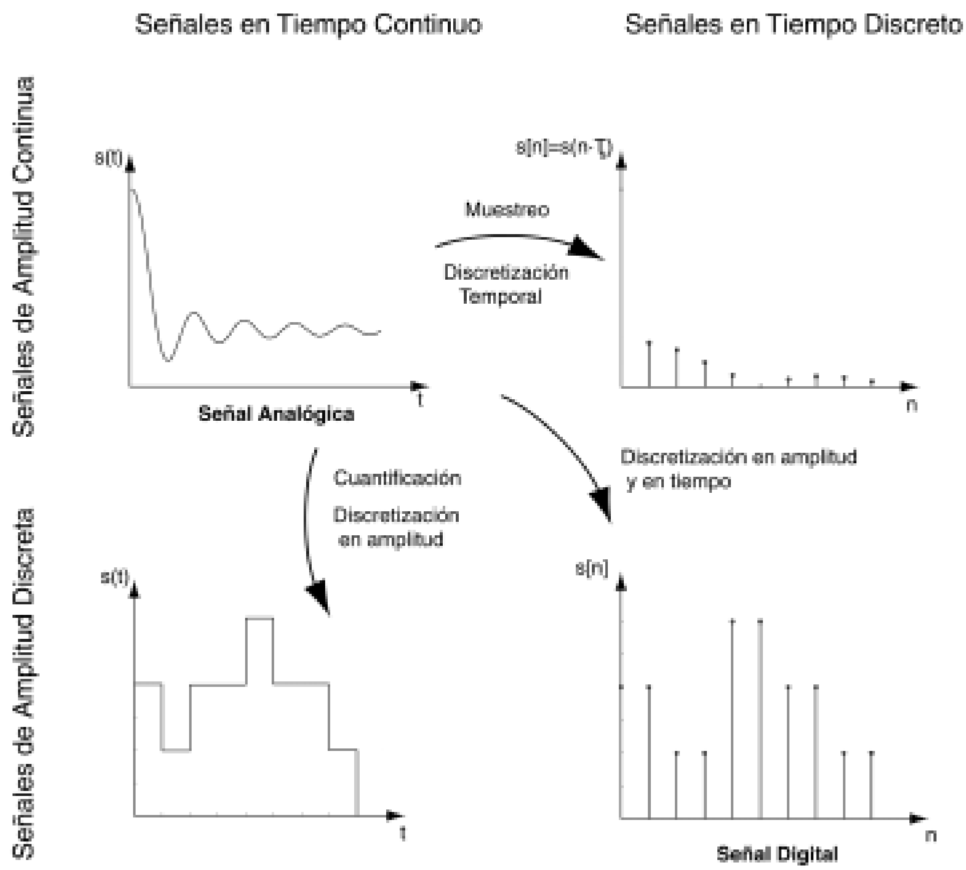

Figura 1.4 *Señales de valor continuo o discreto, combinadas con señales de tiempo continuo o tiempo discreto.*

1.2.4 Señales deterministas frente a señales aleatorias.

El estudio teórico de las técnicas de procesado de señal requiere una representación matemática de las señales y de los sistemas. Esto nos conduce a otra posible clasificación de las señales: señales deterministas y señales aleatorias.

Se dice que una señal es determinista cuando se conocen a priori los valores presentes, pasados y futuros de una señal, y además, ésta puede ser definida por una expresión o fórmula matemática explicita.

Ejemplos de este tipo de señal pueden ser las siguientes:

$$s(t) = 1.2 \cdot \cos\left(600 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$I(x, y) = 3 \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + 10 \cdot y^2$$

Por el contrario, se dice que una señal es aleatoria si no es posible describir la señal mediante una fórmula matemática explicita. Un ejemplo de este tipo de señales es el ruido.

Cuando se trabaja con señales aleatorias, entonces hay que recurrir a técnicas estadísticas para realizar el correspondiente estudio del procesado de la señal.

1.2.5 Señales reales y señales complejas.

Si los valores que toma la señal bajo estudio son valores reales, entonces se dice que se tiene una señal real. Un ejemplo puede ser el siguiente:

$$x(t) = 2 \cdot \mathrm{sen}(3 \cdot \pi \cdot t)$$

Si los valores que toma la señal son valores complejos, entonces se tiene una señal compleja. Un ejemplo sería el siguiente:

$$x(t) = 2 \cdot \cos(3 \cdot \pi \cdot t) + j \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(3 \cdot \pi \cdot t)$$

En este último caso, la señal se representaría mediante dos gráficas diferentes: en una de ellas se representaría la parte real, y en la otra se representaría la parte compleja (ver figura 1.5).

Otra forma de representar valores complejos es mediante fasores sobre lo que se conoce como plano complejo (ver figura 1.6).

Luego también podemos representar una señal compleja mostrando en una gráfica la variación del módulo del fasor y en otra la variación de la fase con respecto a la variable independiente.

En muchas aplicaciones de procesado de la señal resulta más conveniente adoptar una representación de la señal con valores complejos con el fin de facilitar el posterior análisis matemático.

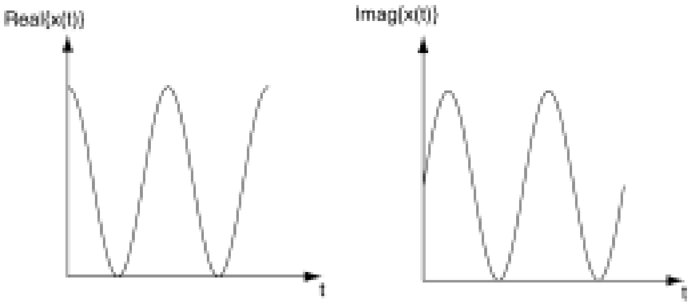

Figura 1.5 *Señales complejas. Representación mediante dos gráficas: Parte real y parte imaginaria.*

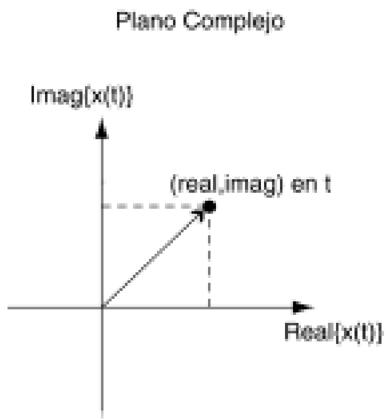

Figura 1.6 *Señales complejas. Representación en el plano complejo.*

1.3 Elementos básicos de un sistema de procesado digital de señal.

La mayor parte de las señales que suelen necesitar de un cierto procesado son señales de naturaleza analógica (señales con valores de amplitud continuos y dependientes de una variable continua). En este caso, éstas pueden ser procesadas directamente con sistemas analógicos adecuados (ver figura 1.7).

Figura 1.7 *Sistema analógico de procesado.*

El procesado digital supone un método alternativo para el procesado de señales analógicas. Para ello se necesita de dispositivos que transformen las señales del dominio analógico al dominio digital y viceversa (conversores A/D y D/A).

En la figura 1.8 se muestra como sería el esquema básico de un sistema de procesado digital de señales analógicas.

Figura 1.8 *Procesado digital de señales analógicas.*

El sistema digital se implementa repartiendo la tarea de procesado entre una parte de hardware digital, y otra parte de software, que aporta flexibilidad al sistema. Cuanto más complejo sea el hardware, éste será más rápido, pero a la vez, más caro. El software aporta flexibilidad, pero ralentiza el procesado.

Los conversores A/D se estudiarán en mayor detalle en el tema 2. Aún así, se puede adelantar que la función de éstos estará dividida conceptualmente en tres procesos diferentes: muestreo, cuantificación y codificación.

1.4 Ventajas del procesado digital de señales.

Económico:

La tecnología de los circuitos integrados permite la fabricación de sistemas digitales potentes, pequeños, rápidos y baratos. Actualmente, existen sistemas digitales que realizan tareas de procesado de señal que antes eran caras y/o difíciles de realizar con sistemas de procesado analógico.

Flexibilidad:

Un sistema digital programable permite alterar la funcionabilidad del sistema sin necesidad de alterar el hardware. Para ello, simplemente es necesario modificar el software de aplicación. Por el contrario, para reconfigurar un sistema analógico es necesario rediseñar el hardware y después comprobar y verificar su correcto funcionamiento.

Estabilidad y repetibilidad:

En los sistemas analógicos, las tolerancias de los componentes hacen difícil al diseñador el control del comportamiento de un sistema. Por ejemplo, una pequeña variación en el valor de una resistencia puede convertir en inestable al sistema. Además, estos componentes suelen ser mucho más sensibles a cambios de las condiciones externas, como por ejemplo la temperatura. A este respecto, los sistemas digitales suelen presentar una mayor estabilidad.

Almacenamiento:

Las señales digitales se pueden almacenar de forma sencilla sin pérdida alguna de fidelidad de la señal. En el caso de señales analógicas, el almacenamiento resulta más difícil y sobre todo introduce una pérdida de calidad en la señal.

Limitaciones del procesado digital:

El procesado digital también tiene sus limitaciones, las cuales estriban en la velocidad de operación de los conversores analógicos / digital, y de los procesadores digitales de señal.

1.5 El concepto de frecuencia.

El concepto de frecuencia está directamente relacionado con el tiempo. De hecho, sus dimensiones son la inversa del tiempo y por tanto la naturaleza del tiempo afectará a la naturaleza de la frecuencia.

En el procesado de señales es habitual trabajar en los dos dominios: el tiempo y la frecuencia. Esto permite estudiar adecuadamente a las señales y las operaciones que los sistemas realizan sobre ellas.

Básicamente, el concepto de frecuencia se basa en el principio de que cualquier señal puede ser descompuesta en una suma de señales sinusoidales con diferentes amplitudes, frecuencias y fases. Por ejemplo, la luz blanca es la suma de señales sinusoidales electromagnéticas de diferentes frecuencias.

La naturaleza del tiempo, esto es, si éste es continuo o discreto, afectará a los valores que puede tomar la frecuencia de una señal. Para verlo, en los apartados siguientes nos centraremos sobre el estudio del caso más sencillo: una señal sinusoidal pura.

1.5.1 Señales sinusoidales en tiempo continuo.

Una señal armónica simple es matemáticamente descrita por la siguiente señal sinusoidal de tiempo continuo

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi_0), \qquad -\infty < t < +\infty \tag{1.1}$$

donde

t, es la variable independiente continua;

A, es la amplitud de la sinusoide;

ω_0, es la pulsación de la sinusoide y se mide en radianes por segundo;

ϕ_0, es la fase de la sinusoide y se mide en radianes.

La señal $x(t)$ también puede expresarse matemáticamente como:

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi_0), \qquad -\infty < t < +\infty \tag{1.2}$$

donde f_0 es la frecuencia de la sinusoide y se mide en hercios, Hz., lo cual es equivalente a 1/s.

En vista de las ecuaciones 1.1 y 1.2, la relación entre la frecuencia y la pulsación de la sinusoide es la siguiente:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 . \tag{1.3}$$

En la figura 1.9 se muestra gráficamente la señal $x(t)$, indicando sobre ella cada uno de los parámetros que la caracterizan.

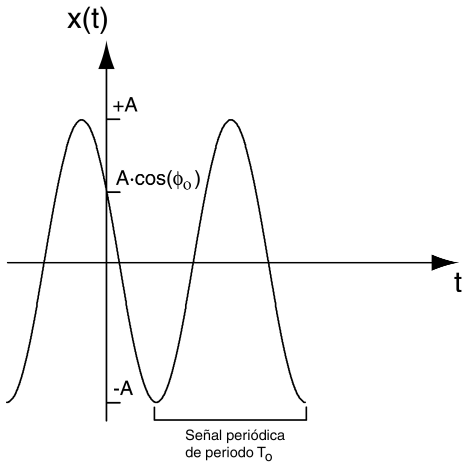

Figura 1.9 *Sinusoide de tiempo continuo.*

El cambio en la amplitud afecta al máximo valor que puede alcanzar la señal. Por otro lado, un cambio de fase influye en la posición de comienzo de la señal, o en este caso particular de la sinusoide, ya que

$$x(t) = A \cdot \cos(\phi_0), \qquad t = 0\,. \tag{1.4}$$

El cambio en la frecuencia afectará a la velocidad con la que varía la sinusoide. Si la frecuencia aumenta, entonces el periodo, inversamente proporcional a ésta, será menor, y consecuentemente la sinusoide variará de manera mucho más rápida. Por el contrario, si la frecuencia disminuye, entonces el periodo aumentará, lo que hará que las variaciones de la sinusoide sean más lentas. Se puede decir, que la frecuencia es una cantidad física positiva, en principio, y que representa el número de ciclos por unidad de tiempo.

Una señal sinusoidal analógica se puede caracterizar por las siguientes propiedades:

1. Para cada valor fijo de la frecuencia f_0, la señal $x(t)$ es periódica y cumple:

$$x(t + T_0) = x(t) \tag{1.5}$$

donde $T_0 = 1/f_0$, es el periodo fundamental.

2. Las señales sinusoidales de tiempo continuo con frecuencias distintas son entre ellas mismas distintas.

3. Si se aumenta la frecuencia f_0, se obtiene un aumento de la velocidad de oscilación de la señal, en el sentido que más periodos son incluidos en un mismo intervalo de tiempo dado.

En la mayoría de casos resulta más conveniente trabajar, desde un punto de vista matemático, con señales complejas en vez de con señales reales. De esta forma, se considera que una señal se puede descomponer en suma de señales complejas, en lugar de suma de señales reales. La relación entre ambas se puede encontrar en la relación de Euler, por la cual

$$x(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0) + j \cdot A \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_0) \tag{1.6}$$

y además, resulta a su vez que

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0) = \frac{A}{2} \cdot \left[e^{j(\omega_0 t + \phi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \phi_0)}\right] \tag{1.7}$$

Luego para señales de tiempo continuo, la frecuencia tomará valores continuos desde $-\infty$ hasta $+\infty$. A este respecto, la diferencia entre trabajar con señales sinusoidales reales y señales complejas estriba en que para las primeras siempre es posible hacer positiva la frecuencia ya que

$$x(t) = A \cdot \cos(-\omega_0 t + \phi_0) = A \cdot \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

$$x(t) = A \cdot \operatorname{sen}(-\omega_0 t + \phi_0) = -A \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi_0)$$

mientras que en el segundo caso no es posible ya que la siguiente expresión, con frecuencia negativa

$$x(t) = A \cdot e^{-j(\omega_0 t - \phi_0)} = A \cdot \cos(-\omega_0 t + \phi_0) + j \cdot A \cdot \operatorname{sen}(-\omega_0 t + \phi_0)$$

$$x(t) = A \cdot e^{-j(\omega_0 t - \phi_0)} = A \cdot \cos(\omega_0 t - \phi_0) - j \cdot A \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t - \phi_0)$$

es completamente diferente a la correspondiente señal compleja, con frecuencia positiva

$$x(t) = A \cdot e^{+j(\omega_0 t + \phi_0)} = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_0) + j \cdot A \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_0)$$

1.5.2 Señales sinusoidales en tiempo discreto

1.5.2.1 Sinusoides reales

Una señal sinusoidal pura de tiempo discreto, real, se puede definir a través de una expresión como la siguiente:

$$x[n] = A \cdot \cos(\omega_d n + \phi_d) \tag{1.8}$$

donde

n es la variable independiente discreta, es decir el tiempo discreto o el número de muestras. La variable n va tomando valores enteros desde $-\infty$ hasta $+\infty$ (....,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,........);

A es la amplitud de la sinusoide discreta;

ω_d, es la pulsación de la sinusoide discreta, o también la frecuencia angular. Las medidas son radianes por unidad de tiempo discreto (radianes/u.t.d.);

ϕ_d es la fase de la sinusoide discreta, medida en radianes.

Otra expresión equivalente se puede obtener mediante la incorporación de la frecuencia discreta en lugar de la pulsación. De este modo:

$$x[n] = A \cdot \cos(2\pi f_d n + \phi_d) \tag{1.9}$$

Donde f_d es la frecuencia discreta, mediada en ciclos por unidad de tiempo discreto.

La relación entre la frecuencia y la pulsación de una sinusoide en tiempo discreto es la misma que para una sinusoide continua:

$$\omega_d = 2\pi f_d \tag{1.10}$$

Ejemplo:

Si tomamos $\omega_d = \frac{\pi}{6}$ (ó $f_d = \frac{1}{12}$), $\phi_d = \frac{\pi}{3}$, y A=1, entonces se puede obtener la correspondiente sinusoide discreta, sin más que ir dando valores a la variable n:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Las sinusoides en tiempo discreto están caracterizadas por las siguientes propiedades exclusivas, distintas de las sinusoides continuas:

Propiedad 1:

Una sinusoide en tiempo discreto no siempre es periódica, al contrario de lo que ocurre con las sinusoides en tiempo continuo, las cuales siempre son periódicas, con periodo fundamental T_0 .

Por definición, una señal discreta $x[n]$ es periódica con periodo N_0 muestras (con N_d siendo un número entero positivo) si y sólo si

$$x[n + N_0] = x[n] \quad \forall n \tag{1.11}$$

Al valor más pequeño de N_0 que cumple esto se le llama periodo fundamental.

Para que la sinusoide discreta sea periódica se debe cumplir que:

$$\cos(2\pi f_d (N_0 + n) + \phi_d) = \cos(2\pi f_d n + \phi_d)$$

$$2\pi f_d N_0 + 2\pi f_d n + \phi_d = 2\pi f_d n + \phi_d + 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$$

$$2\pi f_d N_0 = 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$f_d = \frac{k}{N_0}, \quad k \in Z, \quad N_0 \in Z^+. \tag{1.12}$$

Luego sólo si f_d es un número racional, la sinusoide discreta será periódica. Como ejemplo, se muestra la siguiente tabla:

Señal periódica	**Señal no periódica**
$f_d = 15$	$f_d = \sqrt{2}$
$f_d = \frac{2}{3}$	$f_d = \frac{\pi}{2}$
$f_d = 1,\hat{6} = \frac{5}{3}$	$f_d = 2 \cdot e$
$f_d = 0,35 = \frac{7}{20}$	

Tabla 1.2 *Ejemplos de señales sinusoidales periódicas y no periódicas.*

El periodo fundamental N_0 de una sinusoide discreta, cuando ésta es periódica será:

$$N_0 = \min\left\{\frac{k}{f_d}\right\} \text{que sea entero positivo, con k entero} \tag{1.13}$$

En la tabla 1.3 se muestra algunos ejemplos:

$f_d = \frac{1}{4}$	$N_d = min\left\{ \frac{k}{1/4} \right\} = min\{4k\} = 4\ (con\ k = 1)$
$f_d = \frac{3}{2}$	$N_d = min\left\{ \frac{k}{3/2} \right\} = min\left\{ \frac{2}{3} k \right\} = 2\ (con\ k = 3)$
$f_d = \frac{4}{6}$	$N_d = min\left\{ \frac{k}{4/6} \right\} = min\left\{ \frac{6}{4} k \right\} = 3\ (con\ k = 2)$

Tabla 1.3 *Periodo fundamental de señales periódicas.*

Como resumen de todo lo visto, para saber si una sinusoide en tiempo discreto es periódica, y en este caso, para saber cual es su periodo fundamental, se deberán seguir los siguientes pasos:

1.- Determinar si f_d es racional, lo cual nos indica si la sinusoide en tiempo discreto es periódica o no.

2.- En caso de que la señal sea periódica, el periodo fundamental se calcula del siguiente modo:

a) Expresar f_d de forma racional, es decir, como cociente de dos números enteros.

b) Simplificar la expresión racional de f_d.

c) Buscar $N_0 = \min\left\{ \frac{k}{f_d} \right\}$, con k entero.

Propiedad 2:

Las sinusoides en tiempo discreto cuyas frecuencias están separadas por un número entero son idénticas (o bien las sinusoides cuyas pulsaciones están separadas un múltiplo entero de 2π). Esto no ocurre con las sinusoides de tiempo continuo.

Por ejemplo las sinusoides de frecuencia discreta f_{d1}=0.2, f_{d2}=1.2, y f_{d3}=5.2 son sinusoides idénticas.

En general, las sinusoides de frecuencias discretas f_d y f_d' son idénticas si cumplen la relación

$$f_d' = k + f_d \quad con\ k\ entero \tag{1.14}$$

$$\omega_d' = 2\pi k + \omega_d \quad con\ k\ entero \tag{1.15}$$

Esto se demuestra muy fácilmente, como se puede observar a continuación:

$$\cos((\omega_d + 2\pi k)n + \phi_d) = \cos(\omega_d n + 2\pi kn + \phi_d) = \cos(\omega_d n + \phi_d)$$

Propiedad 3:

Las secuencias o señales $x[n]$ son distintas si sus frecuencias están en el rango $0 \le f_d \le \frac{1}{2}$ (o bien $0 \le \omega_d \le \pi$). Entre 0.5 y 1 (o entre π y 2π) las oscilaciones decrecen y se vuelven también a repetir, aunque puede cambiar la fase.

Por ejemplo las frecuencias f_d=0.2 y f_d'=0.8 corresponden a sinusoides idénticas.

De forma general, las sinusoides de frecuencias discretas f_d y f_d' son idénticas si cumplen la relación

$$f_d' = k - f_d \quad con\ k\ entero \tag{1.16}$$

$$\omega_d^{'} = 2\pi k - \omega_d \quad con\ k\ entero \tag{1.17}$$

En la figura 1.10 se muestra como varía el número de oscilaciones en función de la frecuencia, tanto para señales de tiempo continuo, como señales de tiempo discreto.

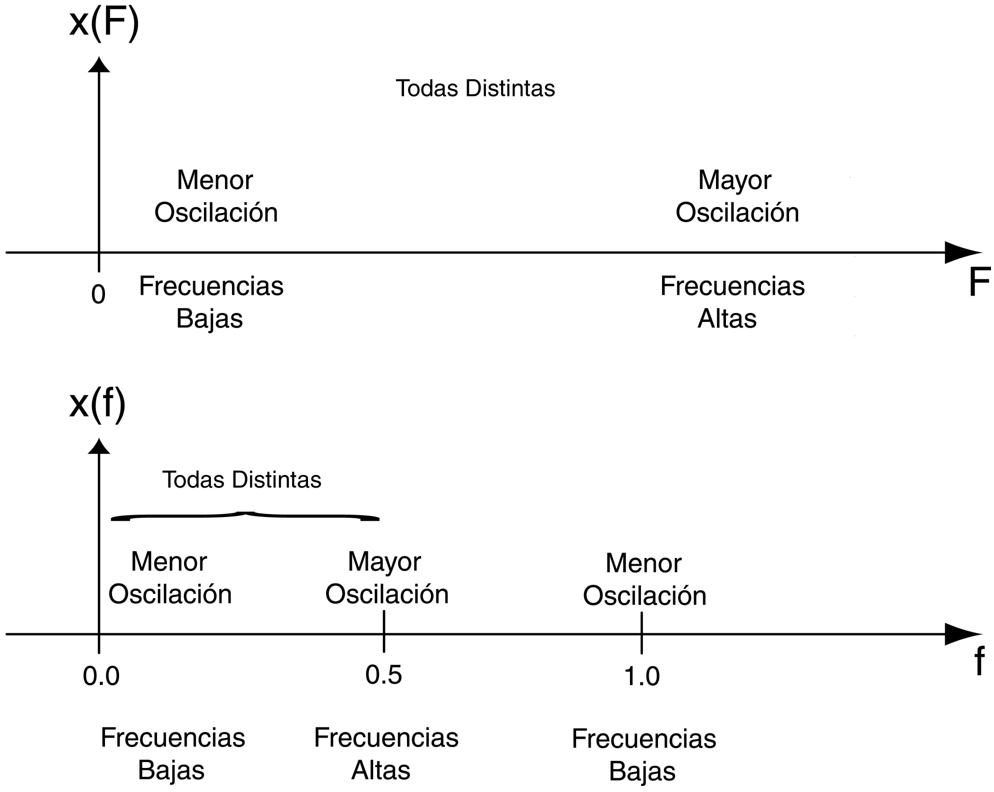

Figura 1.10 *Oscilación en señales continuas y discretas reales.*

1.5.2.2 Sinusoides complejas

La expresión general de una sinusoide compleja en tiempo discreto se puede poner como:

$$x[n] = A \cdot e^{j \cdot (\omega_d n + \phi_d)} \tag{1.18}$$

$$x[n] = A \cdot \cos(\omega_d n + \phi_d) + j \cdot A \cdot \mathrm{sen}(\omega_d n + \phi_d) \tag{1.19}$$

En este caso, las propiedades son bastante similares:

<u>Propiedad 1:</u>

Serán periódicas si y sólo si f_d es racional, y en este caso el periodo fundamental será $N_0 = \min\left\{\frac{k}{f_d}\right\}$ con N_0 y k números enteros.

<u>Propiedad 2:</u>

Dos sinusoides complejas discretas son idénticas si sus frecuencias discretas están separadas en un entero, o en su caso, si las pulsaciones están separadas por un múltiplo entero de 2π.

<u>Propiedad 3:</u>

El rango de frecuencias que corresponde a sinusoides complejas distintas es $-0.5 < f_d \leq +0.5$ ($-\pi < \omega_d \leq +\pi$) ó bien $0 \leq f_d < 1$ ($0 \leq \omega_d < 2\pi$), alcanzando la máxima oscilación en $f_d = 0.5$ ($\omega_d = \pi$).

1.5.3 Señales de tiempo continuo y señales de tiempo discreto: Resumen

Rango de frecuencias:

En tiempo continuo:

- Sinusoides reales: $0 \le f < +\infty$
- Sinusoides complejas: $-\infty < f < +\infty$

En tiempo discreto:

- Sinusoides reales: $0 \le f \le +0.5$

  Las sinusoides de frecuencias f_d y f_d' son iguales si

  $f_d' = k + f_d$ k *entero* (señales idénticas)

  $f_d' = k - f_d$ k *entero* (señales de igual oscilación, pero con distinta fase)

- Sinusoides complejas: $-0.5 < f_d \le +0.5$

  $f_d' = k + f_d$ k *entero*

Periodicidad:

En tiempo continuo:

Siempre periódicas. De periodo $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$ *segundos*.

En tiempo discreto:

No siempre son periódicas, sólo lo son si f_d es racional. En ese caso el periodo N_0 viene dado por la siguiente expresión:

$$N_0 = \min\left\{\frac{k}{f_d}\right\} muestras, \qquad con\ N_0 \in Z^+, k \in Z.$$

1.5.4 Desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas

En este apartado se muestra como las señales periódicas, independientemente de que sean en tiempo continuo o en tiempo discreto, pueden descomponerse en una suma de exponenciales complejas o sinusoides de distintas frecuencias, amplitudes y fases.

Sinusoides complejas relacionadas armónicamente

Se definen como el conjunto de sinusoides complejas cuyas frecuencias son múltiplo de una cierta frecuencia positiva única, f_0.

En tiempo continuo se tiene:

$$s_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{j2\pi k f_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

donde $s_k(t)$ recibe el nombre de armónico k-ésimo, de frecuencia $k \cdot f_0$ (ó periodo fundamental T_0/k), y donde todas se repiten cada T_0.

En tiempo discreto, escogiendo $f_d=1/N_0$, se tiene:

$$s_k[n] = e^{j\frac{2\pi k}{N_0}n} \qquad k = 0, 1, 2, ..., N_0 - 1$$

En este caso, todas tienen un periodo común igual a N_d. Ahora, ya no existen infinitos armónicos, sino sólo N_d sinusoides complejas distintas relacionadas armónicamente. En general, se podría escoger cualquier conjunto de N_d exponenciales consecutivas, aunque como criterio se tomará la primera exponencial en k=0.

1.5.4.1 Desarrollo en serie de Fourier en tiempo continuo

Una señal periódica de periodo T_0 cumple que

$$x(t+T_0)=x(t) \qquad \forall t$$

A la inversa del periodo se la conoce como frecuencia fundamental de la señal periódica $f_0=1/T_0$.

Se puede demostrar que toda señal periódica puede expresarse como una combinación lineal de sinusoides complejas relacionadas armónicamente con respecto a la frecuencia fundamental f_0. Esta combinación lineal se puede expresar matemáticamente como:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_o t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot s_k(t) \tag{1.20}$$

A la expresión anterior se le conoce como ecuación de síntesis del desarrollo en serie de Fourier, mientras que los términos c_k reciben el nombre de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. Estos coeficientes son números complejos que contienen la información de la amplitud y la fase de cada armónico:

$$c_k \cdot s_k(t)=|c_k|\cdot e^{j\phi_k}\cdot s_k(t)=|c_k|\cdot e^{j\phi_k}\cdot e^{j\omega_0 kt}=|c_k|\cdot e^{j(\omega_0 kt+\phi_k)} \tag{1.21}$$

Estos armónicos con sus correspondientes coeficientes c_k también reciben el nombre de componentes espectrales.

La forma de calcular los coeficientes c_k a partir de la señal periódica es:

$$c_k = |c_k| \cdot e^{j\phi_k} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega_o t} dt \qquad (1.22)$$

Esta última expresión es la ecuación de análisis del desarrollo en serie de Fourier.

1.5.4.2 Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

Una señal periódica discreta de periodo N_0 muestras cumple que

$$x[n+N_0] = x[n] \qquad \forall n$$

A f_d=1/N_0 se le conoce como frecuencia fundamental de la señal periódica.

Se puede demostrar que toda secuencia periódica se puede expresar como una combinación lineal de N_0 sinusoides complejas discretas relacionadas armónicamente con respecto a 1/N_0.

En este caso, las ecuaciones de síntesis y de análisis del desarrollo en serie de Fourier discreto son respectivamente

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k \cdot s_k[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N_0}n} \qquad (1.23)$$

y

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N_0}n}. \qquad (1.24)$$