

Ejercicio: Clasificar las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y, x + z, 2y + z)$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (x + y + z, x, 0, 0)$.

a) Calculamos el $\text{Ker } f$:

$$\begin{array}{lcl} x + 2y = 0 & \longrightarrow & -z + 2y = 0 \rightarrow \underline{z = 2y} = \boxed{0} \\ x + z = 0 & \longrightarrow & x = -z = \boxed{0} \\ \underline{2y + z} = 0 & \longrightarrow & 2y + 2y = 0 \rightarrow 4y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \end{array}$$

$$\text{Ker } f = \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \dim(\text{Ker } f) = 0 \quad \checkmark$$

$$\dim(\text{Im } f) = \underbrace{\dim(V)}_{\mathbb{R}^3} - \dim(\text{Ker } f) = 3 - 0 = 3 = \underbrace{\dim(V^1)}_{\mathbb{R}^3} \quad \checkmark$$

f es biyectiva (automorfismo)

b) Calculamos $\text{Im } f$:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 0, 0, 0)$$

$$\text{Im } f = \text{L} \{ (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), \cancel{(1, 0, 0, 0)} \}$$

L.I

$$B_{\text{Im } f} = \{ (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \} \rightarrow \dim(\text{Im } f) = 2 \neq \dim(V') \quad \begin{matrix} \text{"} \\ \mathbb{R}^4 \end{matrix}$$

$$\dim(\text{Ker } f) = \dim(V) - \dim(\text{Im } f) = 3 - 2 = 1 \neq 0 \quad \begin{matrix} \text{"} \\ \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

f no es inyectiva ni sobrayectiva

Ejercicio: Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumple:

$$f(-2, 1) = (1, 0, 1)$$

$$f(-1, 0) = (2, -1, 1)$$

a) Verificar que f queda totalmente determinada por sus imágenes.

b) Obtener la expresión analítica de f .

a) dos vectores $(-2, 1)$ y $(-1, 0)$ deben ser base de \mathbb{R}^2 .

$B = \{(-2, 1), (-1, 0)\}$ es base de $\mathbb{R}^2 \rightarrow f$ queda completamente determinada por sus imágenes.

b) Debemos escribir un vector de \mathbb{R}^2 (x, y) como C.L. de B :

$$(x, y) = \alpha \cdot (-2, 1) + \beta \cdot (-1, 0)$$

$$\begin{cases} x = -2\alpha - \beta \rightarrow \beta = -2\alpha - x = -x - 2y \\ y = \alpha \rightarrow \alpha = y \end{cases}$$

$$(x, y) = y(-2, 1) + (-x-2y)(-1, 0)$$

$$f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

$$f(x, y) = f(\underbrace{y}_{\leftarrow}(-2, 1) \oplus \underbrace{(-x-2y)}_{\leftarrow})(-1, 0) =$$

$$= y \underbrace{f(-2, 1)}_{\checkmark} + (-x-2y) \underbrace{f(-1, 0)}_{\checkmark} =$$

$$= y \cdot (1, 0, 1) + (-x-2y) \cdot (2, -1, 1) =$$

$$= (y, 0, y) + (-2x-4y, x+2y, -x-2y) =$$

$$= \boxed{(-2x-3y, x+2y, -x-y)}$$

Ejercicio: Consideramos el endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que verifica:

$$f(1,1) = (1,-1) \quad \text{y} \quad f(1,0) = (3,2)$$

Verificar que f existe y es única. Hallar $f(5,2)$.

Como $B = \{(1,1), (1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2 \rightarrow f$ existe y es única ✓

$$(5,2) = \alpha(1,1) + \beta(1,0) \rightarrow (5,2) = 2(1,1) + 3(1,0)$$

$$\begin{cases} 5 = \alpha + \beta \\ 2 = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \beta = 5 - \alpha = 5 - 2 = 3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$$f(5,2) = 2f(1,1) + 3f(1,0) = 2(1,-1) + 3(3,2) =$$

$$= \boxed{(11, 4)}$$

Ejercicio: Decidir si existe alguna aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal

que : $f(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$

$$f(1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$

$$f(0, -1, -1) = (1, 2, 5)$$

Comprobamos si los vectores forman una base de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{No forman base de } \mathbb{R}^3.$$

$\uparrow \quad \uparrow$

← L.D

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si se cumple la linealidad} \rightarrow \infty \text{ a.l.} \\ \text{Si NO se cumple la linealidad} \rightarrow \nexists \text{ a.l.} \end{array} \right.$

$$(0, -1, -1) = \overset{1}{\alpha} (1, 0, 0) + \overset{-1}{\beta} (1, 1, 1)$$

$$\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta \\ -1 = \beta \\ -1 = \beta \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \alpha = -\beta = 1 \\ \rightarrow \beta = -1 \end{array} \right.$$

~~$-1 = \beta$~~

Comprobamos la linealidad :

$$f(0, -1, -1) = 1 \cdot f(1, 0, 0) - 1 \cdot f(1, 1, 1) =$$

$$= (1, 2, 3) - (0, 0, 1) = (1, 2, 2) \neq (1, 2, 5)$$

no se cumple la linealidad

No existe una f que cumpla las condiciones

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

Ejercicio: Utilizando la matriz asociada a f respecto a la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \mathbb{R}^3 \leftarrow \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

Calcular unas bases del núcleo e imagen de f .

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo.

• Núcleo de f :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\uparrow vector de V \uparrow $\vec{0}$ de V'

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ \text{---} 2x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ :2 \rightarrow y + z = 0 \rightarrow y = -z \\ \rightarrow 2z - z - z = 0 \rightarrow 0 = 0 \text{ S.C.I.} \end{cases}$$

$$N^{\circ} \text{ par} = 3 \text{ inc} - 2 \text{ ec. fin} = 1 \text{ par} (\alpha)$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \rightarrow (x, y, z) = \alpha \underline{(1, -1, 1)}$$

\hookrightarrow s. gen de $\text{Ker } f$

$$\text{Ker } f = L \{ (1, -1, 1) \} = \{ (\alpha, -\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R} \}$$

L.I

$B_{\text{Ker } f} = \{ (1, -1, 1) \}$

• Imagen de f : $\text{Im } f = L \{ (1, 0, 2), (0, 2, 1), (-1, 2, -1) \}$

\nearrow
 columnas de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \text{---} 1 & 2 & \text{---} 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \text{---} 0 & 2 & \text{---} 1 \end{pmatrix}$$

$B_{\text{Im } f} = \{ (1, 0, 2), (0, 2, 1) \}$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_1$$

$$\dim \text{Im } f = \dim(V) - \dim(\text{Ker } f) =$$

$$= 3 - 1 = 2 \quad \checkmark$$

Ejercicio: Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Calcular la matriz asociada a f en bases:

$$B = \{(1, 1), (1, -1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Utilizar la matriz calculada para hallar la imagen de

$$\vec{v} = (5, 3) \text{ en coordenadas de } B'.$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{v} & & f(\vec{v}) \\ C_2 & \xrightarrow{A} & C_3 \\ \uparrow P & & \uparrow Q \\ B & \xrightarrow{A'} & B' \\ \vec{v}_B & & f(\vec{v}_B)_{B'} \end{array}$$

camino indirecto: $B \xrightarrow{P} C_2 \xrightarrow{A} C_3 \xrightarrow{Q^{-1}} B'$

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P =$$

↑
al revés!

poner vectores de B'
en columnas

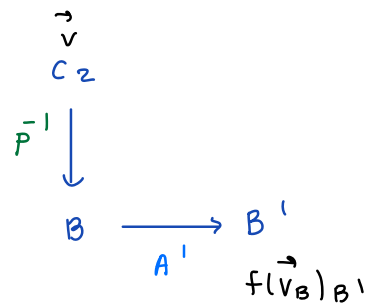
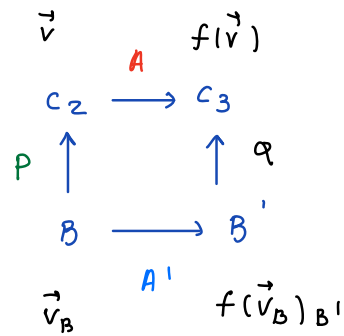
$$3 \times 3 = 9 \times 2$$

3×2

← mismo tamaño
que A

$$\vec{v} = (5, 3) \rightarrow f(\vec{v}_B)_{B'}$$

$$A' \cdot P^{-1} \cdot \vec{v}^t = f(\vec{v}_B)_{B'}^t$$

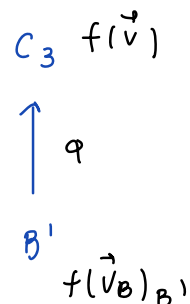


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{2 \times 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{f(\vec{v}_B)_{B'} = (5, 3, -3)}$$

Comprobación: $f(\vec{v}) = f(5, 3) = (8, 2, 0)$

x y



$$Q \cdot f(\vec{v}_B)^t_{B_1} = f(\vec{v})^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$