Ejercicio: Dado el siguiente producto escalar de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

y la base $B = \{ \underset{\vec{v}_1}{(1,1,0)}, \underset{\vec{v}_2}{(0,1,1)}, \underset{\vec{v}_3}{(1,1,1)} \}$, determinar una base ortogonal del e.v. euclídeo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$.

Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt para hallar una base ortogonal:

$$B' = \{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \}$$

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \underline{\underline{(1,1,0)}}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \bullet \vec{w}_1}{|\vec{w}_1|^2} \cdot \vec{w}_1 = (0,1,1) - \frac{2}{6}(1,1,0) = \underline{\underline{\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)}}$$

$$\vec{v}_2 \bullet \vec{w}_1 = \underset{\vec{v}_2}{\overset{1 \times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}} \cdot \underset{G_B}{\overset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}} \cdot \underset{\vec{w}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$|\vec{w}_1| = \sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \qquad \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 = |\vec{w}_1|^2$$

$$\vec{w}_1 \bullet \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \bullet \vec{w}_1}{|\vec{w}_1|^2}\vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \bullet \vec{w}_2}{|\vec{w}_2|^2}\vec{w}_2 =$$

$\hookrightarrow \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2$

$$= (1,1,1) - \overset{1}{\cancel{\frac{6}{6}}}(1,1,0) - \frac{2}{\frac{7}{3}}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \underline{\underline{\left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)}}$$

$$\vec{v}_3 \bullet \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

$$\vec{v}_3 \bullet \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + 2 = \frac{7}{3}$$

Base ortogonal : $\boxed{B' = \left\{ (1,1,0), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right), \left(\frac{2}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{1}{7}\right) \right\}}$

Ejercicio: Determinar la expresión matricial de un producto escalar de $\mathbb{R}^3$ para el cual los siguientes vectores sean una base ortogonal:

$$\vec{w}_1 = (1,1,0), \quad \vec{w}_2 = (1,-1,1), \quad \vec{w}_3 = (1,1,1)$$

y, además, se cumpla que $|\vec{w}_1| = 1$, $|\vec{w}_2| = \sqrt{2}$ y $|\vec{w}_3| = \sqrt{3}$, siendo $|\cdot|$ la norma definida a partir de dicho producto escalar.

Queremos que la base $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ sea ortogonal con respecto al prod. escalar desconocido. Para ello, la matriz de Gram G_B debe ser diagonal:

$$G_B = (\underbrace{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_j}_{\text{prod. escalar desconocido}}) \underbrace{=}_{\text{diagonal}} \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{w}_1|^2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 = 1^2 = 1 \qquad \vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

Para hallar la expresión matricial del prod. escalar en base canónica,

necesitamos G_C :

$$G_B = P^t \cdot \overset{?}{G_C} \cdot P \longrightarrow (P^t)^{-1} \cdot G_B \cdot P^{-1} = G_C$$

matriz de paso

vectores de B en C)

$$G_C = (P^{-1})^t \cdot G_B \cdot P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|P| = -1+1-(1+1) = \underline{\underline{-2}} \qquad \operatorname{adj}(P) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$G_C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & -5 & -10 \\ -5 & 5 & 6 \\ -10 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{-5}{2} \\ \frac{-5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio: Calcular el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U \equiv \{ x + y = 0,\ z + t = 0 \} \qquad W \equiv \{ x + y = 0,\ z = 0,\ t = 0 \}$$

Determinar también la proyección ortogonal del vector $\vec{x} = (1,1,1,0)$ sobre U y sobre W.

- **Base de U:** $B_U = \{ \underset{\vec{u}_1}{(1,-1,0,0)}, \underset{\vec{u}_2}{(0,0,1,-1)} \}$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to y = -x \\ \to t = -z \end{array} \Bigg\} \to \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \beta \\ t = -\beta \end{array}\right\}$$

4 inc − 2 ec = 2 par $\quad (x, z \in \mathbb{R}) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,-1,0,0) + \beta(0,0,1,-1)$$

L.I

- **Base de W:** $B_W = \{ \underset{\vec{w}}{(1,-1,0,0)} \}$ ✓

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\} \to y = -x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \to \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array}\right\} (x,y,z,t) = \alpha(1,-1,0,0)$$

4 − 3 = 1 par $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$

• <u>Cálculo de $U^\perp$</u> : $U^\perp = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 / \vec{v} \perp \vec{u}_1 \wedge \vec{v} \perp \vec{u}_2 \}$

usual

$$\vec{v} = (x, y, z, t) \longrightarrow \left.\begin{array}{l} (x, y, z, t) \cdot (1, -1, 0, 0) = 0 \\ (x, y, z, t) \cdot (0, 0, 1, -1) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{U^\perp = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y = 0, \ z - t = 0 \}}$$

ec. imp. de $U^\perp$

• <u>Cálculo de W</u> : $W^\perp = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 / \vec{v} \perp \vec{w} \}$

$$(x, y, z, t) \cdot (1, -1, 0, 0) = 0 \rightarrow x - y = 0$$

$$\boxed{W^\perp = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y = 0 \}}$$

• <u>Proyecciones ortogonales</u> : B_U y B_W son ortogonales ✓

usual

$$\text{proy}_U(\vec{x}) = \cancel{\frac{\vec{x} \cdot \vec{u}_1}{|\vec{u}_1|^2}}^{\,0} \vec{u}_1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_2|^2} \vec{u}_2 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, -1) =$$

$$= \boxed{\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)}$$

$$\text{proy}_W(\vec{x}) = \cancel{\frac{\vec{x} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}}^{\,0} \vec{w} = \boxed{(0, 0, 0, 0)}$$

Ejercicio: En un e.v. real V, tenemos un producto escalar que, respecto a una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ cumple que:

a) $|\vec{v}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}_2| = \sqrt{7}$ y $|\vec{v}_3| = \sqrt{4}$.

b) El complemento ortogonal de $U = L\{\underbrace{\vec{v}_3}_{L.I}\}$ es $U^{\perp} \equiv \{5y + 4z = 0\}$.

c) La proyección ortogonal del vector $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ sobre $W = L\{\underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3}_{\vec{w}}\}$ es el vector $\frac{22}{25}(\underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3}_{\vec{w}})$.

Determinar la matriz de Gram del producto escalar en la base B.

De la matriz de Gram $G_B = [\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j]$ sabemos que:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_1|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = (\sqrt{7})^2 = 7, \quad \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = (\sqrt{4})^2 = 4$$

$$G_B = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 7 & c \\ b & c & 4 \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Por otro lado, los vectores de U son $\perp$ a los de $U^{\perp}$:

base de U: $B_U = \{\vec{v}_3\} = \{(\alpha, \beta, \gamma)_B\} = \{\overset{\vec{v}_3}{(0,0,1)_B}\}$

$\vec{v}_3$ en base B es: $\vec{v}_3 = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\alpha}} \vec{v}_1 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\beta}} \vec{v}_2 + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\gamma}} \vec{v}_3$

base de $U^{\perp}$: $B_{U^\perp} = \{\overset{\vec{u}_1}{(1,0,0)_B}, \overset{\vec{u}_2}{(0,4,-5)_B}\}$

$\cdot(-5)$

$x \in \mathbb{R}$

$5y + 4z = 0 \longrightarrow y = -\frac{4}{5} z \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\frac{4}{5}\beta \\ z = \beta \end{array}\right\} (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

3 inc − 1 ec = 2 par.

$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0, -\frac{4}{5}, 1)$

Se cumplirá que: $\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 = 0$ y $\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2 = 0$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1 = (0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 7 & c \\ b & c & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (b \ c \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b = 0 \rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\vec{v}_3 \bullet \vec{u}_2 = (\overset{0}{\overset{\shortparallel}{b}} \quad c \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = 4c - 20 = 0 \rightarrow \boxed{c = 5}$$

Finalmente, la proyección de $\vec{v}_2 + \vec{v}_3$ sobre W es:

$$\text{proy}_W (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \frac{(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \bullet \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \vec{w} = \frac{22}{25} \vec{w} \rightarrow \frac{(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \bullet \vec{w}}{\underset{\downarrow \atop \vec{w} \bullet \vec{w}}{|\vec{w}|^2}} = \frac{22}{25}$$

$$W = L\{\underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3}_{\vec{w}}\}$$

$$\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = (0, 1, 1)_B \qquad \vec{w} = (1, 1, 1)_B$$

$$(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \bullet \vec{w} = (0 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + 21$$

$$|\vec{w}|^2 = \vec{w} \bullet \vec{w} = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2a + 23$$

$$\frac{a + 21}{2a + 23} = \frac{22}{25} \longrightarrow 25a + 525 = 44a + 506$$

$$19a = 19 \longrightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\boxed{G_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}}$$