$\boxed{\text{TEMA 2}}$: ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES LINEALES.

1. INTRODUCCIÓN:

- Vector n-dimensional : es un conjunto ordenado de n números reales ($n \in \mathbb{N}$).

  Se denota por : $\boxed{\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)}$

  * Números v_i ($i = 1, \dots, n$) : componentes del vector.

  * Conjunto de todos los vectores n-dimensionales : $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo Indicar el conjunto al que pertenecen los vectores :

$\vec{u} = (1, 2) \rightarrow \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\vec{v} = (1, 2, -1) \rightarrow \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{w} = (1, 0, 0, 1, -3) \rightarrow \vec{w} \in \mathbb{R}^5$

- Suma de vectores : si $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \left(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n\right)} \qquad \left(\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^n\right)$$

- Producto de un escalar por un vector: si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\alpha \cdot \vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)} \qquad (\alpha \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}^n)$$

Ejemplo Si $\vec{u} = (1,-1,0,2)$ y $\vec{v} = (2,3,10,-2)$, calcular

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(1,-1,0,2) - 3(2,3,10,-2) =$$

$$= (2,-2,0,4) + (-6,-9,-30,6) =$$

$$= (-4,-11,-30,10) \in \mathbb{R}^4$$

2. ESPACIOS VECTORIALES:

- Espacio vectorial real:

Un espacio vectorial real V es un conjunto no vacío de objetos, llamados vectores $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots)$, en el que se definen 2 operaciones:

* Suma: $\vec{u} + \vec{v}$ $\quad (\vec{u}, \vec{v} \in V)$
* Producto por un escalar: $\alpha \cdot \vec{u}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Y estas deben cumplir las siguientes propiedades:

Suma : para todo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

1. Cerradura bajo la suma : $\vec{u} + \vec{v} \in V$
2. Conmutativa : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. Asociativa : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
4. Elemento neutro : existe un $\vec{0} \in V$ tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
5. Elemento opuesto : existe un $-\vec{u} \in V$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Producto por un escalar : para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

6. Cerradura bajo el prod. por un escalar : $\alpha \cdot \vec{u} \in V$
7. Asociativa : $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$
8. Distributiva respecto a la suma de vectores : $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
9. Distributiva respecto a suma de escalares : $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
10. Elemento neutro : $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

- Si los escalares son nºs reales $\rightarrow$ espacio vectorial (e.v) real .

vector

Importante Un objeto de un e.v puede ser : un vector n-dimensional, una matriz, un polinomio, una $f(x)$ continua, etc.

Ejemplo Los conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ con las operaciones estándar de suma de vectores y producto de escalar por vector son e.v.

Ejemplo El conjunto $M_{m \times n}$ (todas las matrices $m \times n$) con las operaciones estándar de suma de matrices y producto de escalar por matriz es un e.v.

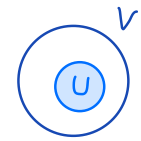
Ejemplo El conjunto $\mathbb{P}_n$ (todos los $P(x)$ de grado $\leq n$) con las operaciones estándar de suma de $P(x)$ y producto de escalar por $P(x)$ es un e.v.

Ejemplo Los conjuntos $C(-\infty, +\infty)$ (todas las $f(x)$ continuas en $\mathbb{R}$) y $C[a,b]$ (todas las $f(x)$ continuas en $[a,b]$) junto con las operaciones estándar de suma de $f(x)$ y producto de escalar por $f(x)$ son e.v.

Ejercicio ¿El conjunto de los números enteros $\underbrace{\mathbb{Z}}_{V}$ con las operaciones estándar es un e.v ?

Ejercicio ¿El conjunto de polinomios de grado 2 con las operaciones usuales de polinomios es un e.v ?

- <u>Subespacio vectorial</u> :



Sea U un subconjunto no vacío de un e.v V $(U \subseteq V)$.

Decimos que U es un subespacio vectorial de V si y solo si se cumplen 3 condiciones :

a) $\vec{0} \in U$.

b) $\vec{u} + \vec{v} \in U \quad (\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in U)$.

c) $\alpha \cdot \vec{u} \in U \quad (\forall\, \vec{u} \in U,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R})$.

<u>Ejercicio</u> : Verificar que el conjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

<u>Ejercicio</u> : Considera el conjunto $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \cdot y = 0\}$.

¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

<u>Ejercicio</u> : ¿Es $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = mx\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$?