Lógica Difusa II

Etiquetado Lingüístico

Los conjuntos difusos tienen asociados normalmente etiquetas lingüísticas, que normalmente en lenguaje natural tienen asociados adverbios.

Para componer la función de pertenencia con estos etiquetados, se suelen usar operaciones aritméticas muy simples.

Etiquetado Lingüístico

GRADO SUPERLATIVO: multiplicar por 1.5 (con tope). Suele acompañar a palabras como “muy”.

Ejemplo:

Persona muy delgada

μMUYdelgada (x) = min(1, μdelgada(x)*1.5)

Etiquetado Lingüístico

GRADO NO ESPECIFICADO: raíz cúbica. Suele acompañar a palabras como “algo”.

Ejemplo:

Persona algo delgada.

$\mu ALGO$delgada (x) = μdelgada(x)^(1/3)

Etiquetado Lingüístico

GRADO DE INEXACTITUD APROXIMADA: raíz cuadrada. Suele acompañar a palabras como “más o menos”.

Ejemplo:

Persona más o menos delgada.

μMASoMENOSdelgada (x) = μdelgada(x)^(1/2)

Etiquetado Lingüístico

GRADO ALTAMENTE SUPERLATIVO: multiplicar por 2 (con tope).

. Suele acompañar a palabras como “extremadamente”.

Ejemplo:

Persona extremadamente delgada.

μEXTREMADAMENTEdelgada (x) = min(1, μdelgada(x)*2)

Etiquetado Lingüístico

NEGACIÓN: inversa de la función. Suele acompañar a palabras como "NO", pero también a antónimos de las anteriores, como "poco".

Ejemplo:

Persona no delgada.

μNOdelgada (x) = 1- μdelgada(x)

Modificadores de los conjuntos difusos

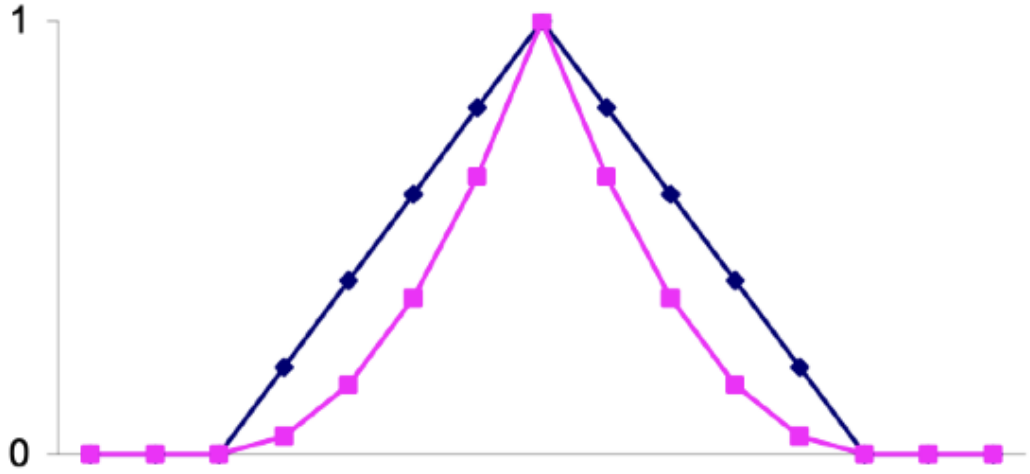
Este etiquetado lingüístico puede ser personalizado para cada sistema mediante modificadores.

Modificadores de los conjuntos difusos

NORMALIZACIÓN: Convierte un conjunto difuso no normalizado a normalizado, dividiendo por la altura del conjunto.

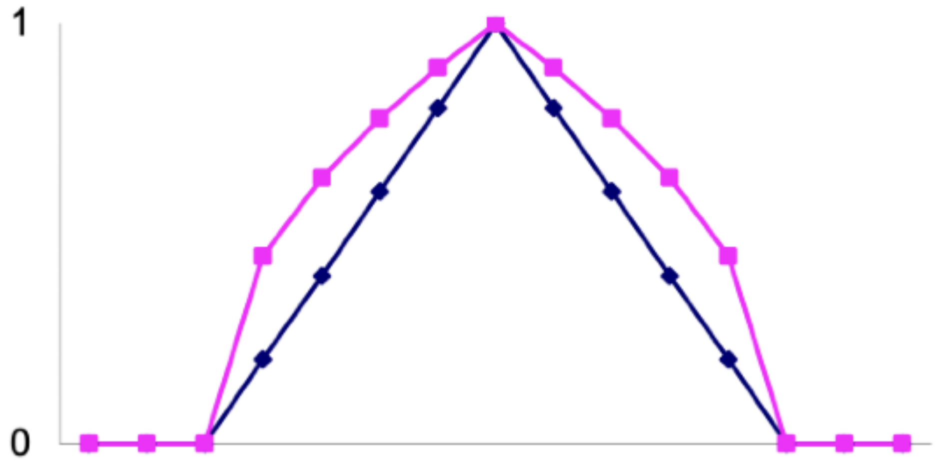
Modificadores de los conjuntos difusos

CONCENTRACIÓN: Cuando se desea que la función de pertenencia tome valores más pequeños de los actuales, focalizándose en los valores mas grandes, se compone con una función de pertenencia tal que (μ^p , siendo $p > 1$)



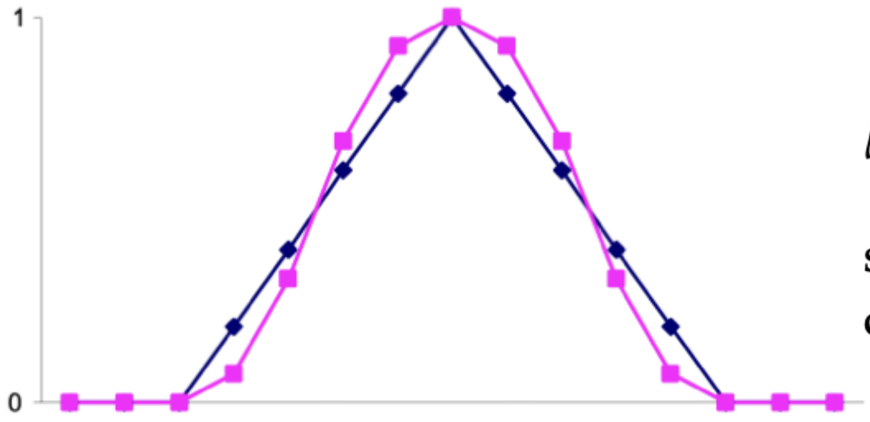
Modificadores de los conjuntos difusos

DILATACIÓN: Si se desea un efecto contrario a la concentración (tomar valores más grandes para focalizarse en los pequeños), se compone una función de pertenencia tal que (μ^p , siendo $0 < p < 1$).



Modificadores de los conjuntos difusos

INTENSIFICACIÓN: Cuando se desea un efecto híbrido (dilatar una parte y concentrar otra), se sitúa un umbral (por ejemplo 0.5), y se disminuyen los valores menores al umbral y se aumentan los mayores que el umbral.

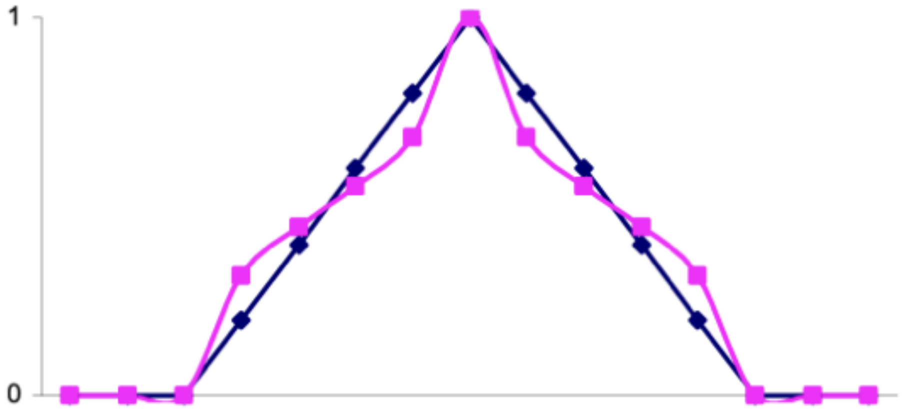


$$\mu_{mod}(x) = \begin{cases} 2^{p-1}\mu(x)^p & \text{si } \mu(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2^{p-1}(1-\mu(x))^p & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $p > 1$ (cuanto mayor es p, mayor es la intensificación.

Modificadores de los conjuntos difusos

DIFUMINACIÓN: Cuando se desea un efecto contrario a la intensificación, es decir, se disminuyen los valores mayores al umbral y se aumentan los menores que el umbral.



$$\mu_{mod}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu(x)}{2}} & \text{si } \mu(x) \leq 0.5 \\ 1 - \sqrt{\frac{1-\mu(x)}{2}} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Operaciones con conjuntos difusos

De forma análoga a la teoría clásica de conjuntos, los conjuntos difusos tienen las operaciones de unión, intersección o complementario, entre otras.

Se realiza un repaso de las mismas y sus particularidades en este tipo de conjuntos

Operaciones con conjuntos difusos

UNIÓN: La teoría clásica define la unión como la pertenencia de un elemento a un conjunto unión si pertenece, al menos, a uno de los conjuntos.

En su análogo a lógica difusa, se refiere a su función de pertenencia. La ecuación de la unión u de dos conjuntos A y B quedaría de la siguiente forma:

$$\mu_{A \cup B}(x) = u(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

donde u: [0,1] x [0,1] → [0, 1]

Operaciones con conjuntos difusos

UNIÓN: propiedades

Hay una serie de propiedades que se deben cumplir, partiendo de $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$:

- Concordante con el caso nítido: $u(0,1) = u(1,1) = u(1,0) = 1$; mientras $u(0,0) = 0$
- Propiedad commutativa: $u(\alpha, \beta) = u(\beta, \alpha)$
- Propiedad asociativa: $u(\alpha, u(\beta, \gamma)) = u(u(\alpha, \beta), \gamma)$
- Identidad: $u(\alpha, 0) = \alpha$
- Monotonía: si $\alpha \leq \alpha'$ y $\beta \leq \beta'$, entonces $u(\alpha, \beta) \leq u(\alpha', \beta')$

Operaciones con conjuntos difusos

UNIÓN: también es deseable que cumpla las Leyes de De Morgan para calcular el grado de la unión en función de los grados de la intersección y el complementario.

Si a las propiedades de obligado cumplimiento se le suman que siguen estas leyes, se dice que las funciones de pertenencia se les llama conormas triangulares.

En estos casos, la unión puede ser representada mediante las **t-conorma**. Hay muchas variedades, como la máxima, el producto o la suma.

Operaciones con conjuntos difusos

UNIÓN: Conorma Máxima

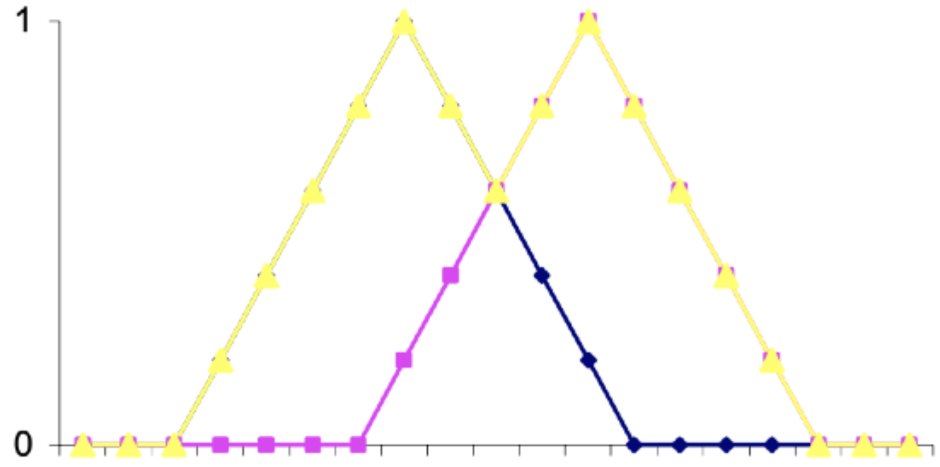
Toma el valor máximo de pertenencia en cada punto del dominio de los conjuntos difusos que se están uniendo.

Dicho de otra forma, si un elemento tiene un grado de pertenencia mayor en uno de los conjuntos que se están uniendo, su grado de pertenencia en la unión será el mayor de los dos.

Operaciones con conjuntos difusos

UNIÓN: Conorma Máxima

Esto significa que la T-conorma máxima tiende a dar más peso a las regiones donde al menos uno de los conjuntos tiene un alto grado de pertenencia. Su notación es: $umax\ (\alpha, \beta)$ = max(α, β)



Operaciones con conjuntos difusos

UNIÓN: Conorma producto

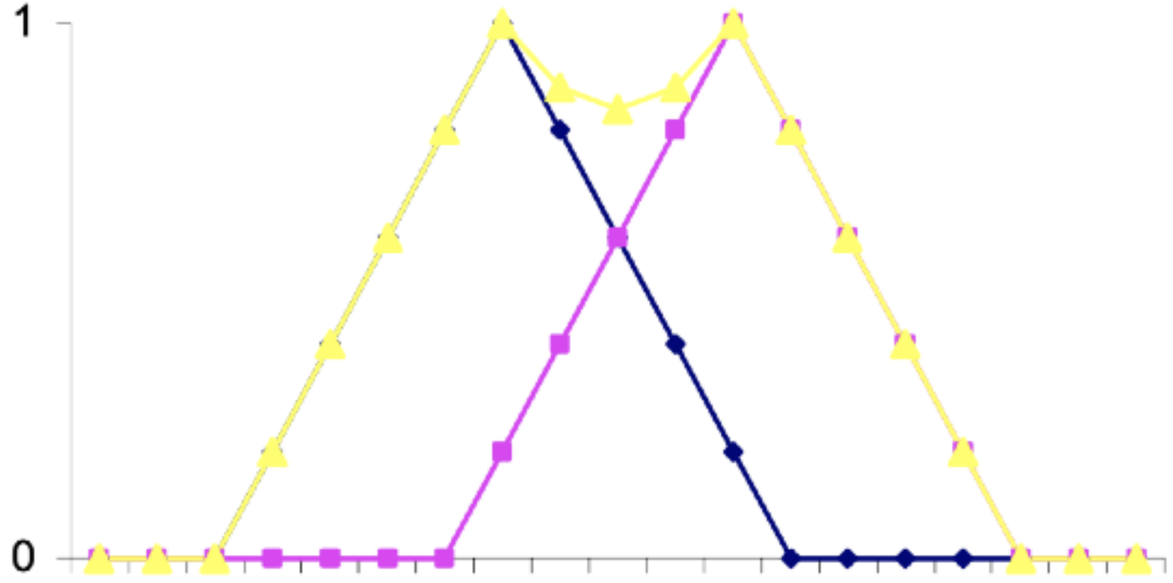
Se toma el valor producto de pertenencia en cada punto del dominio de los conjuntos difusos que se están uniendo con una corrección basada en la unión.

Se utiliza para modelar la unión de conjuntos difusos más suave y progresiva.

Operaciones con conjuntos difusos

UNIÓN: Conorma producto

Su notación es: $u * (\alpha, \beta) = \alpha + \beta - \alpha * \beta$



Operaciones con conjuntos difusos

INTERSECCIÓN: La teoría clásica define la intersección como la pertenencia de un elemento a un conjunto intersección si pertenece a ambos.

Su análogo difuso busca determinar el grado de pertenencia a dicho conjunto intersección partiendo de los dos grados de pertenencia de los conjuntos originales. La notación será la siguiente, donde los dos conjuntos a valorar se definen como A y B:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mathrm{inter}(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

donde u: [0,1] x [0,1] → [0, 1]

Operaciones con conjuntos difusos

INTERSECCIÓN : propiedades

Similar a la unión, hay una serie de propiedades que se deben cumplir, partiendo de $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$:

- Concordante con el caso nítido: $\text{inter}(0, 1) = \text{inter}(0, 0) = \text{inter}(1, 0) = 0$; mientras $\text{inter}(1, 1) = 1$
- Propiedad commutativa: $\text{inter}(\alpha, \beta) = \text{inter}(\beta, \alpha)$
- Propiedad asociativa: $\text{inter}(\alpha, \text{inter}(\beta, \gamma)) = \text{inter}(\text{inter}(\alpha, \beta), \gamma)$
- Identidad: $\text{inter}(\alpha, 1) = \alpha$
- Monotonía: si $\alpha \leq \alpha'$ y $\beta \leq \beta'$, entonces $\text{inter}(\alpha, \beta) \leq \text{inter}(\alpha', \beta')$

Operaciones con conjuntos difusos

INTERSECCIÓN : similar a la unión, pero cuando en un problema se usan funciones de pertenencia triangulares, la intersección puede ser representada mediante las **t-norma**.

Se usan para calcular la intersección de dos conjuntos difusos, es decir, representa la parte en común o la superposición entre los dos conjuntos originales.

Hay muchas variedades, pero las más usadas son la mínima y el producto.

Operaciones con conjuntos difusos

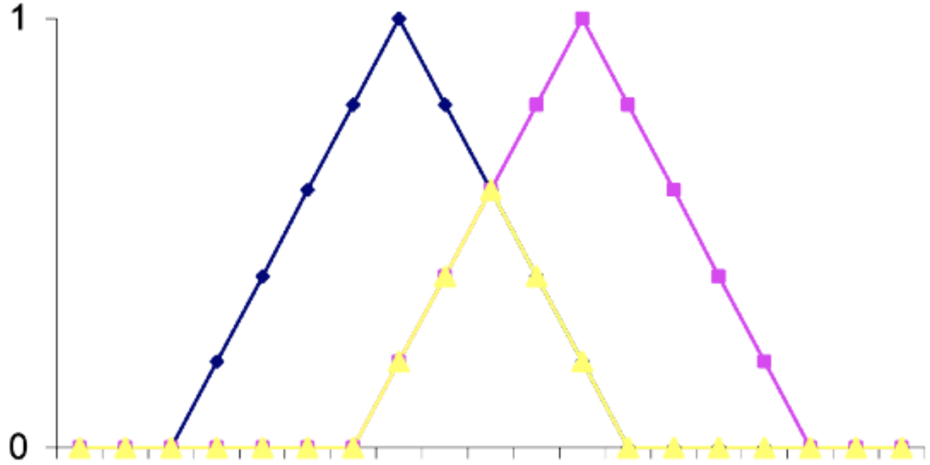
INTERSECCIÓN : T-norma mínimo

Se usa para calcular la intersección de conjuntos difusos tomando el valor mínimo de pertenencia en cada punto del dominio. Es decir, si un elemento tiene un grado de pertenencia mayor en un conjunto que en otro, su grado de pertenencia en la intersección será el menor de los dos.

Operaciones con conjuntos difusos

INTERSECCIÓN : T-norma mínimo

Su notación es: inter$_{min}$ (α, β) = min(α, β)



Operaciones con conjuntos difusos

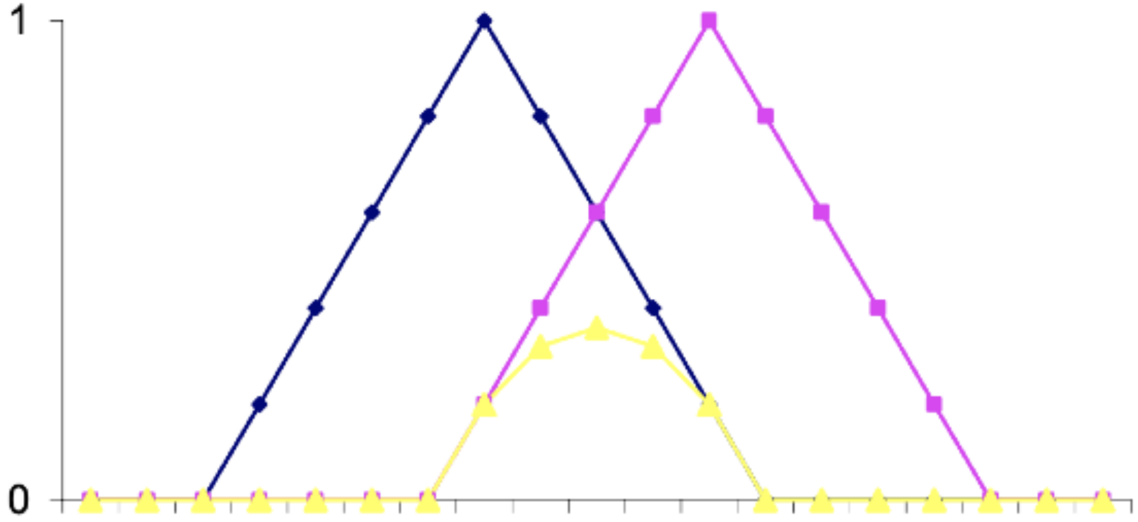
INTERSECCIÓN : T-norma producto

Se usa para calcular la intersección de conjuntos difusos multiplicando los grados de pertenencia en cada punto del dominio. Esto tiende a dar más peso a las regiones donde ambos conjuntos tienen altos grados de pertenencia.

Operaciones con conjuntos difusos

INTERSECCIÓN : T-norma producto

Su notación es: inter $*(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$



Operaciones con conjuntos difusos

COMPLEMENTARIO: Dado un conjunto A, su complementario se forma con todos aquellos elementos del universo que no pertenecen al conjunto A.

En conjuntos difusos, la representación de si un elemento pertenece o no a un conjunto A viene dado por su función de pertenencia, por lo que la representación del complementario se denota como

$$\mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu_A(x))$$

Operaciones con conjuntos difusos

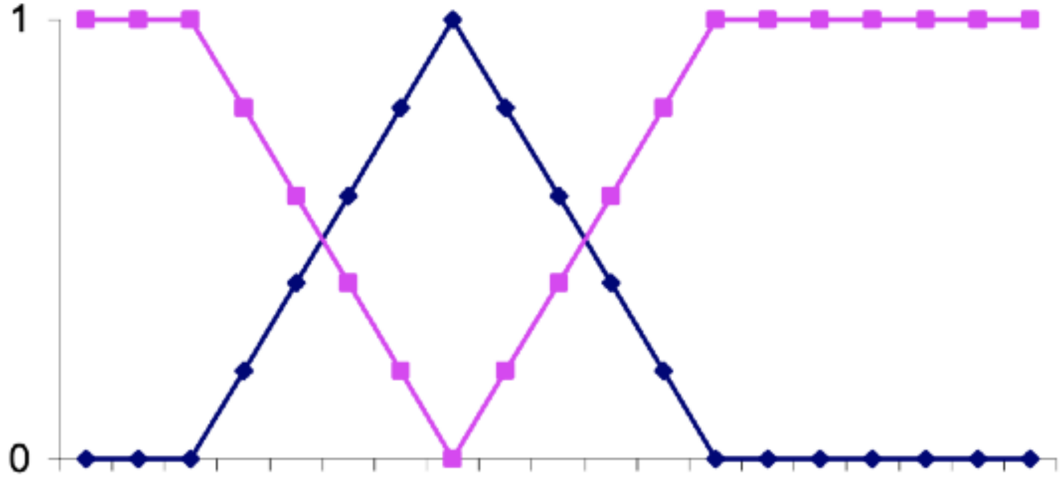
COMPLEMENTARIO : propiedades

A nivel de propiedades, la función complementaria $c(\alpha)$ tiene que cumplir que en el rango de 0 a 1, se cumple que $c : [0,1] \rightarrow [1,0]$, siendo una función concordante con el caso nítido ($C(1) = 0$ y $C(0) = 1$), forzosamente decreciente ($\forall \alpha, \beta \in [0,1]\ \alpha > \beta \rightarrow c(\alpha) < c(\beta)$), y que cumple la anulación de la doble negación ($c(c(\alpha)) = \alpha$).

Operaciones con conjuntos difusos

COMPLEMENTARIO :

Se puede representar como $c(\alpha) = 1 - \alpha$

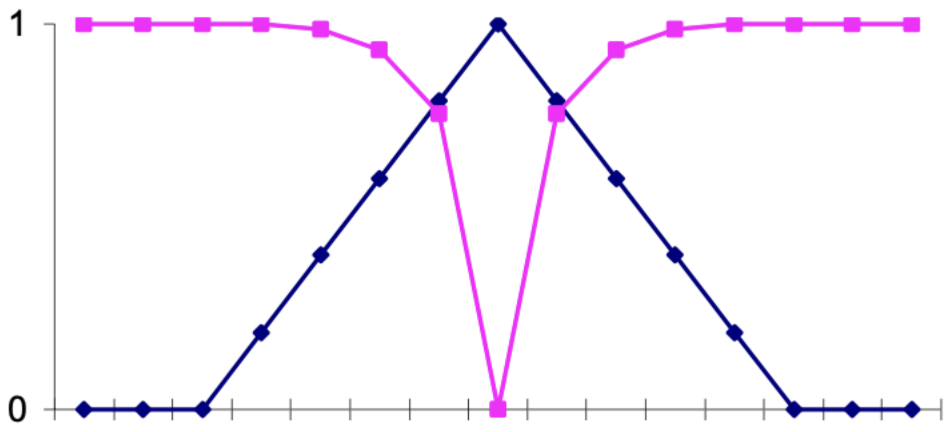


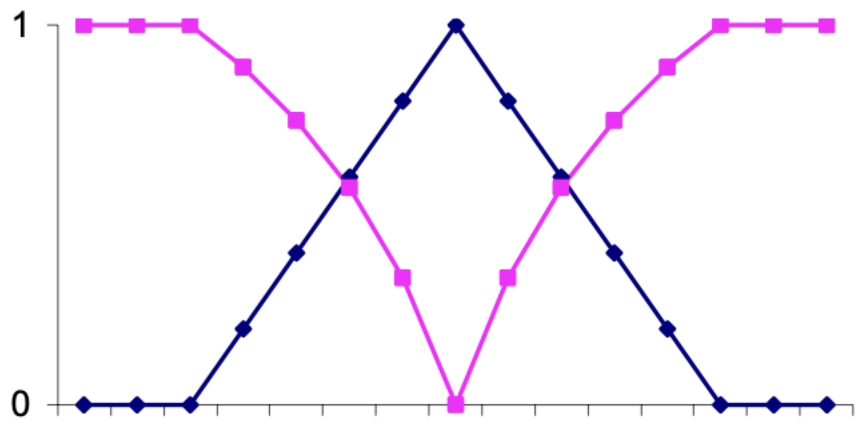
Operaciones con conjuntos difusos

COMPLEMENTARIO: Hay otros complementarios en conjuntos difusos que sirven para suavizar el complementario clásico, como Yager o Sugeno.

$$c_w(\alpha) = (1 - \alpha^w)^{1/w} \quad w \in [0, \infty]$$

$$c_\lambda(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1-\lambda\alpha}$$





Diferencias entre conjuntos difusos y clásicos

Hay otros ciertos aspectos que diferencian a las operaciones y propiedades de los conjuntos clásicos de los difusos.

Por ejemplo, las condiciones requeridas en la unión e intersección **no garantizan** que se cumplan propiedades básicas como la idempotencia ($A \cap A = A$) y la distributividad ($A \cap (B \cup C)$) de la intersección, o la idempotencia ($A \cup A = A$) y la distributividad de la unión ($A \cup (B \cap C)$).

Para verificar éstas, se usan la t-normal del mínimo y su t-conorma del máximo correspondiente.

Diferencias entre conjuntos difusos y clásicos

También ha cierta diferencia en la definición del conjunto vacío y el conjunto universal.

En concepto clásico del conjunto vacío dice que es aquel conjunto que no contiene ningún elemento.

Su correspondiente definición en teoría de conjuntos difusos sería:

Conjunto vacío

$$\forall x \in \chi, \mu_{\emptyset}(x) = 0$$

Conjunto Universal

$$\forall x \in \chi, \mu_{\chi}(x) = 1$$

Diferencias entre conjuntos difusos y clásicos

Partiendo de estas definiciones no se consiguen verificar en la teoría de conjuntos difusos algunos teoremas famosos de la teoría de conjuntos clásica, como pueden ser $A \cap A = \emptyset$ o $A \cup A = \chi$.

A esta contradicción se le llama **principio de contradicción** y **principio del tercio excluso**, respectivamente.

Por ejemplo, una persona, por lógica difusa, puede pertenecer y no pertenecer al conjunto "*joven*", con diferentes grados.

Por lo tanto, la intersección del conjunto y su complementario no sería vacío.

Diferencias entre conjuntos difusos y clásicos

Una posible solución para que cumplan estos teoremas sería la definición de una t-norma y una t-conorma acotada (tam-bién llamadas de Luckasiewicz) que los satisfagan, pero no cumplirían las propiedades de idempotencia y distributividad de la intersección y unión .

Etiquetado lingüístico y modificadores

Ejercicio final: realizar etiquetado lingüístico y analizar la necesidad de modificadores de los conjuntos difusos de:

- Edad
- Peso
- Altura
- Sexo
- Ideología política
- Calificación de la asignatura
- Salud