Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

IA EPS UA

Problemas Tema 4: Transformaciones en el Plano y el Espacio

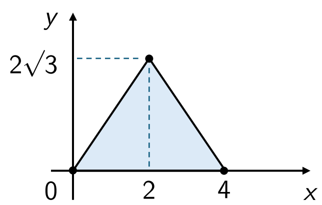
Fundamentos de Matemática Aplicada a la Inteligencia Artificial II

1 Hallar la matriz asociada a la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de una simetría axial respecto a la recta $y = mx$.

2 Hallar la matriz asociada a la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de una proyección ortogonal respecto a la recta $y = mx$.

3 Hallar la matriz asociada a la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de una simetría respecto al plano $x + y + z = 0$.

4 Se considera la siguiente figura en el plano:



Se desea una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que efectúe el siguiente proceso sobre la figura, respetando el orden:

1) Una simetría axial sobre la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(2, 2\sqrt{3})$.
2) Un giro en sentido antihorario de $60°$.
3) Una contracción de factor k.
4) Un giro en sentido horario de $30°$.

Además, el punto $(4, 0)$ debe transformarse en el $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
Hallar la transformación T y representar la figura transformada.

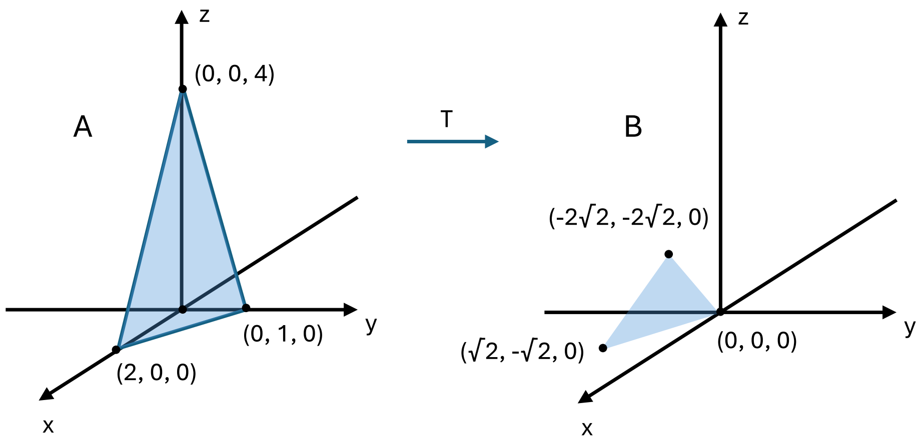
5 Si un vector $\vec{v}$ no cambia al aplicarle una transformación T, decimos que $\vec{v}$ es un *punto fijo* de T y cumplirá que: $T(\vec{v}) = \vec{v}$. Calcular los puntos fijos de las siguientes transformaciones:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por un deslizamiento cortante en la dirección del eje x con factor k.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por una simetría axial sobre la recta $y = mx$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por una rotación alrededor del eje y.

6 Encontrar la matriz A de una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que permita convertir la figura A en la figura B:



7 Sea una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que realiza el siguiente proceso:

1) Una simetría respecto al plano $x = 0$.
2) Un giro en sentido antihorario de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje z.
3) Un giro en sentido horario de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje y.

Se pide:

a) Hallar la transformación T.

b) Calcular los puntos fijos de T.

c) Determinar la transformación inversa T^{-1}, que permite obtener el vector inicial a partir de su transformado.

8 La matriz de rotación en $\mathbb{R}^3$ con respecto a un eje arbitrario es:

$$A = \begin{pmatrix} u_1^2 + C(1-u_1^2) & u_1u_2(1-C) - u_3S & u_1u_3(1-C) + u_2S \\ u_1u_2(1-C) + u_3S & u_2^2 + C(1-u_2^2) & u_2u_3(1-C) - u_1S \\ u_1u_3(1-C) - u_2S & u_2u_3(1-C) + u_1S & u_3^2 + C(1-u_3^2) \end{pmatrix}$$

Donde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es el vector unitario que marca la dirección del eje, $C = \cos\theta$ y $S = \operatorname{sen}\theta$, siendo θ el ángulo de rotación antihorario.

a) Verificar que si $\vec{u} = (1,0,0)$, obtenemos la matriz de rotación en $\mathbb{R}^3$ alrededor del eje x.

b) Obtener los transformados de $\vec{v} = (1,0,0)$ y $\vec{w} = (1,1,1)$ al efectuar una rotación en sentido antihorario de $90°$, alrededor del eje cuya dirección viene dada por el vector $(1,1,1)$.

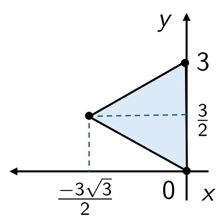
Soluciones

1 $A = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$.

2 $A = \dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$.

3 $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4 $T(x,y) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y, \frac{3}{8}x + \frac{3\sqrt{3}}{8}y\right)$.



5 **a)** $\vec{v} = (x,y) = (\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (puntos del eje x).
b) $\vec{v} = (x,y) = (\alpha, m\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (puntos de la recta $y = mx$).
c) $\vec{v} = (x,y,z) = (0, \alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (puntos del eje y).

6 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7 **a)** $T(x,y,z) = (-z, -x, -y)$.
b) El único punto fijo de T es: $\vec{v} = (x,y,z) = (0,0,0)$.
c) $T^{-1}(x,y,z) = (-y, -z, -x)$.

8 **a)** Sí obtenemos la matriz de rotación con respecto al eje x:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & -S \\ 0 & S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

9 **b)** $\vec{v}\,' = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\vec{w}\,' = (1,1,1)$, con la matriz de rotación:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$