Ejercicio: Sea V el espacio vectorial de las matrices reales 2×3 con el producto escalar $A \bullet B = tr(AB^t)$. Considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $A \bullet B$, $A \bullet C$ y $B \bullet C$.

b) $(2A + 3B) \bullet 4C$.

c) $|A|$

d) Normalizar A.

a) $$A \bullet B = tr(A \cdot B^t) = tr\left[\underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \right] =$$

$$= tr \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 46 & 118 \\ 28 & 73 \end{pmatrix}} = 46 + 73 = \boxed{119}$$

$$A \bullet C = \underbrace{tr(A \cdot C^t)}_{\text{es } \sum a_{ij} \cdot c_{ij}} = 9 \cdot 3 + 8(-5) + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 4(-4) =$$

$$= \boxed{-9}$$

$B \bullet C = 1 \cdot 3 + 2(-5) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6(-4) = \boxed{-21}$

b) $(2A + 3B) \bullet 4C = 8A \bullet C + 12 B \bullet C = 8(-9) + 12(-21) =$

Distributiva

$= \boxed{-324}$

c) $|A| = \sqrt{A \bullet A} = \boxed{\sqrt{271}}$

MÓDULO / NORMA : NO ES DET !

$A \bullet A = 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 = 271$

d) Normalizar A : $\dfrac{A}{|A|} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A$

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{271}} & \frac{8}{\sqrt{271}} & \frac{7}{\sqrt{271}} \\ \frac{6}{\sqrt{271}} & \frac{5}{\sqrt{271}} & \frac{4}{\sqrt{271}} \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Considerando dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de un espacio euclídeo, calcular la norma de $\vec{v}$ sabiendo que: $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{6}$, y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{\pi}{4}$.

Sabemos que se cumple: $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

?

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = (\sqrt{6})^2 - 2^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} =$$

$$= 6 - 4 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Por otro lado: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2|\vec{v}|\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \cancel{2}|\vec{v}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}\cdot|\vec{v}|}}$$

Sustituimos en la 1ª ecuación:

$$|\vec{v}|^2 = 2 - 2\sqrt{2}|\vec{v}| \qquad |\vec{v}|^2 + 2\sqrt{2}\cdot|\vec{v}| - 2 = 0$$

$$|\vec{v}| = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{4\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\sqrt{2} \pm 4}{2} \rightarrow \boxed{|\vec{v}| = 2 - \sqrt{2}}$$

Ejercicio: Dado el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

a) Determinar la matriz de Gram respecto de la base canónica.

b) Determinar un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, unitario, que forme un ángulo de 45^o con el vector $(1,-1,0)$.

a) La matriz de Gram en base canónica $B = C_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es

$G_C = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)$, donde $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ es el coeficiente de $x_i y_j$ en la expresión del prod. escalar:

$$G_C = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ x_2y_1 \\ x_3y_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Vector pedido : $\vec{u} = (x, y, z) \rightarrow$ unitario : $|\vec{u}| = 1$

si $\vec{v} = (1, -1, 0)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cancelto{1}{|\vec{u}|} \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = \cancel{1} \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{1}}$$

?

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (1 \quad -1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (2 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

Entonces, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, pero $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se puede calcular como :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x \quad y \quad z) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (3x + y \quad x + y \quad 2z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3x + \cancel{y} - x - \cancel{y} = 2x = 1 \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Por tanto : $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, y, z\right) \rightarrow$ NO UNITARIO !

$$|\vec{u}| = 1 \longrightarrow \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 1 \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \left(\frac{1}{2} \;\; y \;\; z\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} + y \;\;\; \frac{1}{2} + y \;\;\; 2z\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y + y^2 + 2z^2 =$$

$$= \frac{3}{4} + y + y^2 + 2z^2 = 1$$

* Por ej : si $y = 0 \longrightarrow \frac{3}{4} + 2z^2 = 1 \longrightarrow 2z^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$z^2 = \frac{1}{8} \longrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm \frac{1}{\underset{\overset{\shortparallel}{4 \cdot 2}}{\sqrt{8}}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

Ejercicio: Se define el siguiente producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, siendo $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

b) La matriz de Gram respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) La matriz de Gram respecto a la base:

$$B = \{ \underbrace{(1,1,1)}_{\vec{v}_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{\vec{v}_2}, \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{v}_3} \}$$

d) El módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

e) El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}\quad 1\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{1\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \boxed{2}$$

b) $$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Podemos calcular la matriz G_B calculando todos los productos escalares. Otra forma más sencilla es con la ecuación del cambio de base:

$$G_B = P^t \cdot G_C \cdot \underset{\uparrow}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz de paso (vectores de B en col.)

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (1 \ \ -1 \ \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \ \ -1 \ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \boxed{\sqrt{5}}$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (2 \ \ -1 \ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

e) $\alpha = \arccos \left(\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \right) = \arccos \left(\dfrac{2}{1 \cdot \sqrt{5}} \right) = \boxed{26'6^\circ}$

<u>Ejercicio:</u> En $\mathbb{R}^3$, se considera un producto escalar tal que si

$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una cierta base de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 5 \qquad\qquad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 10$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \qquad\qquad \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = 37$$

Calcular la matriz de Gram en la base B si se sabe que el vector $12\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2$ es ortogonal al vector $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y que $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = 19$.

$$G_B = \begin{pmatrix} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 \\ \vec{v}_2\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 \\ \vec{v}_3\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_3\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_3\cdot\vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \\ \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & 10 & 5 \\ \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 & 5 & 37 \end{pmatrix}$$

- $(12\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 0$

$$12\,\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 + 12\,\underline{\underline{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}} - 5\,\underline{\underline{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1}} - 5\,\overset{10}{\overset{\shortparallel}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}} = 0$$

$$12\,\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 + 7\,\underset{2}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2} = 50 \longrightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 = \frac{50-14}{12} = \boxed{3}$$

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = 19$

$$\underline{\underline{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}} + \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3}_{= \underline{\underline{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}}} + \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}_{= 10} + \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3}_{= 5} = 19$$

$$2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 19 - 15 = 4 \longrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$\underline{\underline{G_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 37 \end{pmatrix}}}$$

Ejercicio: Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico. Sabiendo que los vectores de dicha base son unitarios y forman entre sí un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, hallar el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$, siendo:

$$\vec{u} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_3 \quad y \quad \vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_3) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) =$$

$$= 3\cancelto{1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} + 3\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 - 2\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 = \boxed{3 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$|\vec{u}_1| = 1 \longrightarrow \sqrt{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = 1 \rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1$$

$$|\vec{u}_2| = 1 \longrightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1$$

$$|\vec{u}_3| = 1 \longrightarrow \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = 1$$

Por tanto:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \cancelto{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \cancelto{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = \cancelto{1}{|\vec{u}_3|} \cdot \cancelto{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{2}$$