- <u>Tipos de aplicaciones lineales</u> :

Aplicación lineal
$f: V \to V'$
$\equiv$
Homomorfismo

→ **Inyectiva** $\equiv$ Monomorfismo — $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$

$+$

→ **Suprayectiva** $\equiv$ Epimorfismo — $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V')$

$\|$

→ **Biyectiva** $\equiv$ Isomorfismo — $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V')$

Aplicación lineal
$f: V \to V$
$\equiv$
Endomorfismo

→ **Biyectiva** $\equiv$ Automorfismo — $V' = V$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V')$

Ejercicio: Clasificar las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+2y, x+z, 2y+z)$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x+y+z, x, 0, 0)$.

- Existencia y unicidad de aplicaciones lineales :

Una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V'$ existe y es única si conocemos las imágenes de los vectores de una base de V.

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \longrightarrow \begin{matrix} f(\vec{v}_1) \checkmark \\ f(\vec{v}_2) \checkmark \\ \vdots \\ f(\vec{v}_n) \checkmark \end{matrix} \longrightarrow f \text{ existe y es única}$$

BASE DE V ✓

CONOCIDAS

$\equiv$

f queda completamente determinada

Ejercicio: Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumple :

$$f(-2,1) = (1,0,1)$$

$$f(-1,0) = (2,-1,1)$$

a) Verificar que f queda totalmente determinada por sus imágenes.

b) Obtener la expresión analítica de f.

Ejercicio: Consideramos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que verifica:

$$f(1,1) = (1,-1) \quad \text{y} \quad f(1,0) = (3,2)$$

Verificar que f existe y es única. Hallar $f(5,2)$.

Ejercicio: Decidir si existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$f(1,0,0) = (1,2,3)$$

$$f(1,1,1) = (0,0,1)$$

$$f(0,-1,-1) = (1,2,5)$$

• Matriz asociada a una aplicación lineal :

Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$, la matriz asociada a f (en bases canónicas) es la matriz A cuyas columnas son las imágenes de la base canónica de V.

Ejemplo : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ y $f(x,y) = (x-y,\ 0,\ 3x+5y,\ 7y)$:

$$f(1,0) = (1,0,3,0)$$
$$f(0,1) = (-1,0,5,7)$$

$$\longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

$\mathbb{R}^4 \leftarrow \mathbb{R}^2$

A es la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas

$C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ y

$C_4 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

* También podemos obtener la expresión analítica de f a partir de A:

Ejemplo: Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y la matriz asociada a f respecto de la base canónica C_3 es:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \end{array} \longrightarrow f(x,y,z) = (x+z, y, x+2y+z)$$

$\mathbb{R}^3 \leftarrow \mathbb{R}^3$

Propiedades

* Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: A es $m \times n$.

* $rg(A) = \dim(\text{Im } f) = rg(f)$

* A permite calcular $f(\vec{v})$: $\boxed{A \cdot \vec{v}^{\,t} = f(\vec{v})^t}$

se ponen en columnas

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y) = (x+y,\, x-y,\, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2,3)$.

* La matriz asociada permite calcular el núcleo y la imagen de f:

Ejercicio: Utilizando la matriz asociada a f respecto a la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular unas bases del núcleo e imagen de f.

- <u>Matriz asociada y cambio de base :</u>

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal con matriz asociada A en bases canónicas.

Si consideramos unas nuevas bases : $\begin{cases} \text{base } B \text{ de } V \\ \text{base } B' \text{ de } V' \end{cases}$

La matriz asociada a f respecto de las nuevas bases B y B' se denota A'.

* $\vec{v} \xrightarrow{A} f(\vec{v})$ $\qquad \boxed{A \cdot \vec{v}^{\,t} = f(\vec{v})^t}$

* $\vec{v}_B \xrightarrow{A'} f(\vec{v}_B)_{B'}$ $\qquad \boxed{A' \cdot \vec{v}_B^{\,t} = f(\vec{v}_B)^t_{B'}}$

$\begin{cases} A : \text{convierte un vector en canónicas a otro en canónicas.} \\ A' : \text{convierte un vector en base } B \text{ a otro en base } B'. \end{cases}$

Ejercicio: Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 0)$$

Calcular la matriz asociada a f en bases:

$$B = \{(1,1),(1,-1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Utilizar la matriz calculada para hallar la imagen de

$\vec{v} = (5,3)$ en coordenadas de B'.