Intervalos de confianza

Clase del 12/11/2024

Contenidos

Introducción

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Población Normal con varianza conocida

Dada una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una variable aleatoria normal con media μ y varianza conocida σ^2, el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\,\%$ para la media μ es:

$$\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde:

- $\bar{X}$ es la media muestral,
- σ es la desviación estándar poblacional (conocida),
- n es el tamaño de la muestra,
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ es el valor crítico de la distribución normal estándar correspondiente a un nivel de confianza $1-\alpha$.

- Este intervalo de confianza es válido cuando los datos provienen de una distribución normal y la varianza σ^2 es conocida. También deben ser independientes.
- El valor crítico $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ se obtiene de la tabla de la distribución normal estándar para un nivel de confianza dado.
- Por regla general, interesa que la confianza sea *grande*: 95 %, 99 %, 99.9 %

IC con varianza desconocida

Dada una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una variable aleatoria normal con media μ y varianza desconocida, el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\,\%$ para la media μ es:

$$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},\,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\; \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},\,n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

donde:

- $\bar{X}$ es la media muestral, n es el tamaño de la muestra,
- S es la desviación estándar muestral, calculada como $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$,
- $t_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}$ es el valor crítico de la distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad correspondiente a un nivel de confianza $1-\alpha$.

- Este intervalo de confianza es válido cuando los datos provienen de una distribución normal y la varianza poblacional es desconocida.
- Los valores de la muestra deben ser independientes.

IC para la varianza poblacional σ^2

En esta ocasión nos basamos en la distribución chi-cuadrado (χ^2). Dada una muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una variable aleatoria normal con media desconocida y varianza σ^2, el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\,\%$ para σ^2 es:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}} \right)$$

donde:

- S^2 es la varianza muestral $= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$,
- n es el tamaño de la muestra,
- $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}$ y $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,n-1}$ son los valores críticos de la distribución chi-cuadrado con $n-1$ grados de libertad, correspondientes a los percentiles $\frac{\alpha}{2}$ y $1-\frac{\alpha}{2}$, respectivamente.

- Este intervalo de confianza es válido cuando los datos provienen de una distribución normal.
- Los valores críticos $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ y $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ se obtienen de la tabla de la distribución chi-cuadrado.

IC para una proporción poblacional

Dada una muestra de tamaño n, en la cual se observan X éxitos (eventos de interés), se puede estimar la proporción poblacional p mediante la proporción muestral $\hat{p} = \frac{X}{n}$.
El intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\,\%$ para la proporción poblacional p es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde:

- $\hat{p} = \frac{X}{n}$ es la proporción muestral de éxitos,
- n es el tamaño de la muestra,
- $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico de la distribución normal estándar correspondiente a un nivel de confianza $1-\alpha$.

- Este intervalo de confianza es válido para muestras grandes (generalmente cuando $n\hat{p} \geq 5$ y $n(1-\hat{p}) \geq 5$, lo cual garantiza que la distribución binomial de X se aproxima a una distribución normal).
- El valor crítico $z_{\alpha/2}$ se obtiene de la tabla de la distribución normal estándar.

Un valor más *fino*

$$\frac{1}{1+\frac{Z^2_{\alpha/2}}{n}}\left(\hat{p}+\frac{Z^2_{\alpha/2}}{2n}\pm z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}+\frac{Z^2_{\alpha/2}}{4n^2}}\right)$$