Programación lineal

Algoritmia y optimización
Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

Programación lineal

Introducción

- Optimizar un **objetivo lineal** sujeto a un conjunto de restricciones **lineales**.

Variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Objetivo

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Restricciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

Programación lineal

Ejemplo

- Una empresa que produce dos productos A y B: **Variables**
  - El producto A genera 40 euros por unidad.
  - El producto B genera 30 euros por unidad.

Objetivo

- La producción está limitada por la disponibilidad de recursos:
  - Cada unidad de A requiere 2 horas y 3 unidades de materia.
  - Cada unidad de B requiere 1 hora y 2 unidades de materia.
- Se dispone de 100 horas de trabajo y 180 unidades de materia prima.

Restricciones

Programación lineal

Ejemplo

Maximizar: $Z = 40x_1 + 30x_2$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 100 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 180 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Programación lineal

Interpretación geométrica

- En un espacio definido por *n* variables y *m* restricciones, las soluciones factibles forman un **politopo**.
- Cada vértice de este politopo representa una solución factible básica, que satisface exactamente *n* restricciones en igualdad.
- La función objetivo se representa como un plano que se desplaza sobre el politopo.

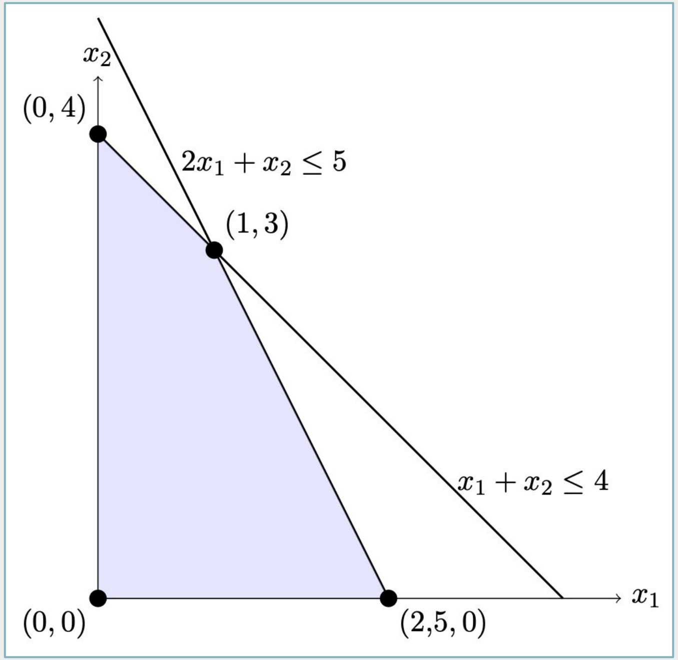
Programación lineal

Interpretación geométrica

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$



Programación lineal

Búsqueda de soluciones

- La programación lineal puede resolverse de manera exacta mediante algoritmos específicos.
- Se garantiza encontrar la solución óptima cuando existe e identifican cuando no la hay (inviable o no acotada).
- Vamos a introducir el método **Simplex**: el algoritmo más popular, ampliamente utilizado por su eficiencia práctica.

Simplex

Programación lineal

Método Simplex

- Desarrollado por George Dantzig en 1947.
- Recorrer las soluciones potencialmente óptimas y factibles del problema.
- Encuentra la solución óptima, de manera eficiente en la mayoría de los casos prácticos.

Programación lineal

Método Simplex

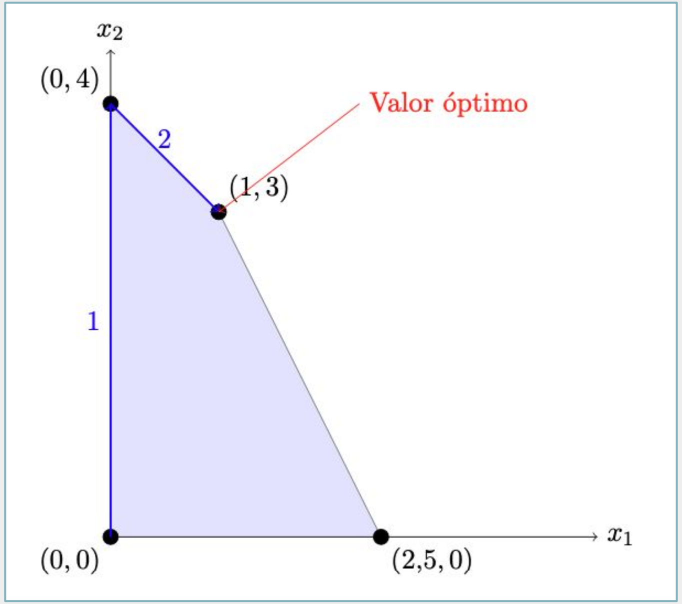
- Desde un punto de vista geométrico, el método Simplex recorre los vértices del politopo que forma el problema.
- Se mueve de manera iterativa entre los vértices hasta encontrar la solución óptima.

Programación lineal

Método Simplex

Maximizar: $Z = 3x_1 + 2x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5$$



Implementación

Programación lineal

Implementación

- El reto en programación lineal no radica en la resolución computacional del problema, sino en su correcta identificación.
- Existen multitud de librerías que implementan el método Simplex y otros algoritmos eficientes.
- Es esencial identificar la función objetivo, las variables de decisión y las restricciones que modelan el problema real.

Programación lineal

Implementación

$$\boxed{\min} c^T \mathbf{x}, \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\boxed{\text{Maximizar:}}\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

```
from scipy.optimize import linprog

c = [-3, -2]

A = [[1, 1],    # x1 + x2 <= 4
     [2, 1]]   # 2x1 + x2 <= 5
b = [4, 5]

result = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(0, None))

print("Valor óptimo:", result.fun)
print("Valores de las variables:", result.x)
```

Ejercicios

Programación lineal

Un nutricionista quiere diseñar una dieta utilizando dos alimentos: avena y manzanas. Cada ración de avena cuesta 2 euros y cada ración de manzanas 3 euros. Cada ración de avena aporta 3 unidades de proteína y 4 unidades de fibra, mientras que cada ración de manzanas aporta 2 unidades de proteína y 5 unidades de fibra. Se desea cubrir al menos 18 unidades de proteína y 20 unidades de fibra con el menor coste posible.

Programación lineal

Una empresa de marketing tiene un presupuesto de 15.000 € para anunciarse en redes, televisión y prensa. Cada euro gastado en redes llega a 40 personas, en televisión llega a 70 y en prensa a 50 personas. Por políticas internas se requiere que:

- Al menos 25% del presupuesto debe destinarse a redes sociales.
- El gasto en televisión no debe superar al gasto en prensa escrita.
- No se puede gastar más de 5,000 euros en prensa escrita.
- Plantea un modelo de programación lineal para maximizar el alcance publicitario de la empresa.

Programación lineal

Una fábrica produce un compuesto químico utilizando los ingredientes A, B y C. Cada kg del compuesto final debe contener al menos un 30 % de A, un 20 % de B y no más de un 50 % de C. El coste de cada ingrediente es, respectivamente, 5 €/kg, 8 €/kg y 3 €/kg. La fábrica necesita producir al menos 500 kg del compuesto final. Debido a limitaciones de inventario, solo hay disponible 300 kg de A, 200 kg de B y 400 kg de C. La fábrica vende el compuesto final a 12 €/kg y tiene contratos pendientes para entregar 400 kg del producto en las próximas dos semanas. Hay que determinar la cantidad de cada ingrediente que debe usar para minimizar el coste de producción.