Ejercicio: Verificar que la siguiente expresión define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1, u_2)\cdot(v_1, v_2) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$

① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$? ✓

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = v_1 u_1 + 2 v_2 u_2 = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

② $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$? ✓ $\qquad \vec{w} = (w_1, w_2)$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (u_1, u_2)\cdot(v_1+w_1, v_2+w_2) =$$

$$= u_1(v_1+w_1) + 2u_2\cdot(v_2+w_2) = u_1 v_1 + u_1 w_1 + 2u_2 v_2 + 2u_2 w_2 =$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

③ $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\cdot\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$? ✓

$$\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \alpha u_1 v_1 + 2\alpha u_2 v_2 \leftarrow$$

$$(\alpha\cdot\vec{u})\cdot\vec{v} = (\alpha u_1)v_1 + 2(\alpha u_2)v_2 \leftarrow$$

$$\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = u_1(\alpha v_1) + 2u_2(\alpha v_2) \leftarrow$$

4 $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$?

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (u_1, u_2) \cdot (u_1, u_2) = u_1^2 + 2u_2^2 \geq 0$$

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ define un producto escalar en } \mathbb{R}^2}$

Ejercicio: Considérense los vectores $\vec{u} = (1,5)$ y $\vec{v} = (3,4)$ en $\mathbb{R}^2$.

Hallar:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ con respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^2$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ con respecto al producto escalar de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 3 u_2 v_2$$

c) $|\vec{v}|$ empleando el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^2$.

d) $|\vec{v}|$ empleando el producto escalar del apartado b).

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3 + 20 = \boxed{23}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\underset{u_1}{1}, \underset{u_2}{5}) \cdot (\underset{v_1}{3}, \underset{v_2}{4}) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{44}$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \longrightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{33}}$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = (\underset{u_1}{3}, \underset{u_2}{4}) \cdot (\underset{v_1}{3}, \underset{v_2}{4}) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 4 = 33$

<u>Ejercicio</u>: Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores de un e.v euclídeo, determinar la norma de $\vec{v}$ sabiendo que:

$|\vec{u}| = 1$, $|\vec{u} + \vec{v}| = 2$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = 3$

Ley del paralelogramo: $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

$2^2 + 3^2 = 2 \cdot 1^2 + 2|\vec{v}|^2 \longrightarrow 2|\vec{v}|^2 = 13 - 2 = 11$

$|\vec{v}|^2 = \frac{11}{2} \longrightarrow |\vec{v}| = \pm\sqrt{\frac{11}{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{11}{2}}}$

Ejercicio: Calcular la distancia y el ángulo entre los vectores

$\vec{u} = (0, -1, 4)$ y $\vec{v} = (4, 3, -1)$, utilizando:

a) El producto escalar usual.

b) El producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + 2u_2 v_2 - u_3 v_2 - u_2 v_3 + u_3 v_3$$

a) $$d(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 5^2} = \boxed{\sqrt{57}}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-4, -4, 5)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{-7}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{26}}\right) = \boxed{109'4^{\circ}}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -7$$

b) $d(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{145}$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = (-4,-4,5)\cdot(-4,-4,5) =$

$= (-4)^2+(-4)^2+(-4)^2+2(-4)^2-5\cdot(-4)-(-4)\cdot 5+5^2 = 145$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{-27}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{65}}\right) = \boxed{131'1^\circ}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cancel{0\cdot 4} - 1\cdot 4 + \cancel{0\cdot 3} + 2(-1)\cdot 3 - 4\cdot 3 - (-1)^2 + 4(-1) =$

$= -4-6-12-1-4 = -27$

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{26}$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = 2(-1)^2-4(-1)-(-1)\cdot 4+4\cdot 4 = 2+4+4+16 = 26$

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{65}$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = 16+12+12+18+3+3+1 = 65$

Ejercicio: Consideramos el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Calcular la matriz de Gram respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$B = C_3 = \{ \underset{\vec{v}_1}{(1,0,0)}, \underset{\vec{v}_2}{(0,1,0)}, \underset{\vec{v}_3}{(0,0,1)} \}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 1$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = 1$$

$$\boxed{G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio: Calcular la matriz de Gram del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $B = \{\underbrace{(1,1,2)}_{\vec{v}_1}, \underbrace{(3,1,1)}_{\vec{v}_2}, \underbrace{(-2,-1,2)}_{\vec{v}_3}\}$.

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 + 1 + 4 = 6$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 + 1 + 2 = 6 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = -2 - 1 + 4 = 1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 9 + 1 + 1 = 11$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -6 - 1 + 2 = -5$$

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = 4 + 1 + 4 = 9$$

$$\boxed{G_B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 6 & 11 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio: Verificar si las siguientes expresiones definen un producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_3y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_3$

b) $(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

a) $(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{sí es prod. escalar en } \mathbb{R}^3}$

G_B ? $\rightarrow$ s.d.p ?

Matriz simétrica ✓

$A_1 = 2 > 0 \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \qquad A_3 = 1 > 0$ def. pos. ✓

b) No es prod. escalar ya que la matriz no es simétrica.

Ejercicio: Comprobar que el siguiente conjunto de vectores es ortogonal:

$$\left\{ \underset{\vec{v}_1}{\left(-\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15} \right)}, \underset{\vec{v}_2}{\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0 \right)} \right\}$$

Normalizar el conjunto de vectores para que sea ortonormal.

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{-2}{15} \cdot \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \cdot \frac{2}{15} + 0 = 0 \checkmark \quad \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \rightarrow \text{Conj. ortogonal} \checkmark$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{\left(\frac{-2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{15^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{4}{15^2}} = \sqrt{\frac{9}{15^2}} = \frac{3}{15} =$$

$$= \frac{1}{5} \neq 1 \longrightarrow \text{El conjunto NO es ortonormal.}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{15^2} + \frac{4}{15^2}} = \sqrt{\frac{5}{15^2}} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

$$\left\{ 5 \cdot \left(\frac{-2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15} \right), \frac{15}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0 \right) \right\}$$

$$= \boxed{\left\{ \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right) \right\}} \rightarrow \text{conjunto ortonormal} \checkmark$$

Ejercicio: En el e.v. euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, determinar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $(1,2,1,0)$, $(0,-1,1,0)$ y $(1,1,-2,1)$.

Queremos un vector $\vec{u} = (x,y,z,t)$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z,t)\cdot(1,2,1,0) = 0 \longrightarrow x+2y+z=0 \\ (x,y,z,t)\cdot(0,-1,1,0) = 0 \longrightarrow -y+z=0 \\ (x,y,z,t)\cdot(1,1,-2,1) = 0 \longrightarrow x+y-2z+t=0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+3z=0 \longrightarrow x=-3z \\ y=z \\ -3z+z-2z+t=0 \longrightarrow t=4z \end{array}\right. \overset{1\text{ par}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x=-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \\ t=4\alpha \end{array}\right. \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

Por ej., si $\alpha=1$: $\vec{u}=(-3,1,1,4)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2+4^2} = \sqrt{9+1+1+16} = \sqrt{27}$$

Un vector unitario ortogonal a los 3 vectores será:

$$\boxed{\left(\frac{-3}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{4}{\sqrt{27}} \right)}$$