PROBLEMAS RESUELTOS DE SEÑALES Y SISTEMAS

STEPHAN MARINI
ENCARNACIÓN GIMENO NIEVES

PROBLEMAS RESUELTOS DE SEÑALES Y SISTEMAS

PUBLICACIONS DE LA UNIVERSITAT D'ALACANT

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado por evaluadores ajenos a la Universidad de Alicante, con el fin de garantizar la calidad científica del mismo.

Publicacions de la Universitat d'Alacant
03690 Sant Vicent del Raspeig
publicaciones@ua.es
http://publicaciones.ua.es
Telèfon: 965 903 480

ISBN: 978-84-9717-372-8
Dipòsit legal: A 504-2015

Disseny de coberta: candela ink
Composició: Marten Kwinkelenberg
Impressió i enquadernació:
Epes, Artes Gráficas, S.L.

une
Unión de Editoriales
Universitarias Españolas
www.une.es

Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización nacional y internacional de sus publicaciones.

ÍNDICE

Introducción

Con la presente obra se pretende realizar una recopilación de problemas en el ámbito del procesado digital de señales para el futuro graduado en Ingeniería Multimedia. A nivel de contenidos, el libro está dividido en 3 capítulos más un apéndice. Los problemas del primer capítulo son problemas básicos que pueden desarrollarse en el transcurso de las clases. Este capítulo está dividido en 4 secciones temáticas: Introducción al procesado digital de la señal; Digitalización de señales analógicas; Señales y sistemas en tiempo discreto; y Transformada de Fourier en tiempo discreto. Los dos capítulos siguientes, que reciben el título de ejercicios de exámenes del Grado en Ingeniería Multimedia y ejercicios de exámenes antiguos, recogen problemas más completos que se engloban dentro del extenso campo del procesado y tratamiento digital de la señal. La última parte del libro consiste en un apéndice que resume las principales relaciones matemáticas útiles para la asignatura e incluye ejercicios de repaso sobre los números complejos.

Esta publicación puede utilizarse como libro de problemas en la asignatura de *Señales y Sistemas*, ubicada en el primer semestre del segundo año del Grado en Ingeniería Multimedia de la Universidad de Alicante. Esta asignatura, con una duración de 6 créditos ECTS (30 horas de teoría, 15 horas de problemas y 15 horas de prácticas de laboratorio con ordenador), supone el primer contacto de los alumnos con las técnicas de tratamiento de señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Aunque el libro puede ser complementado con otros títulos que incluyan problemas centrados sobre aspectos más específicos, está orientado a cubrir aspectos fundamentales de esta materia, que también se impartía como asignatura obligatoria en la antigua titulación de Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas.

Con el objeto de facilitar la tarea de estudio y aprendizaje, todos los problemas propuestos en el libro tienen asociados sus soluciones numéricas correspondientes. Además, los problemas de exámenes del capítulo dos y tres incluyen resoluciones detalladas de estos. Los autores recomiendan a los lectores que, en primer lugar, intenten resolver los problemas sólo a partir de los enunciados y, a continuación, utilicen la sección de resolución para comprobar si el resultado obtenido es el correcto. La sección de resolución, además, es útil para que el lector pueda ejercitar su comprensión observando el procedimiento de resolución propuesto por los autores y las distintas interpretaciones que se pueden ir extrayendo de los resultados obtenidos.

Indicar por último que esta publicación es una obra todavía abierta que pretende ir creciendo con nuevos tomos que incluyan los problemas que se vayan desarrollando durante los siguientes cursos académicos. Por dicha razón, los autores agradecen de antemano todas las correcciones, sugerencias y erratas que los lectores, en especial sus alumnos, les hagan llegar, para así poder mejorar futuras ediciones.

Los autores

Alicante, Noviembre de 2014.

CAPÍTULO 1

EJERCICIOS BÁSICOS

1.1. Problemas - Tema 1: Introducción al procesado digital de la señal.

Enunciados

1.1. 1 Determina si cada una de las siguientes señales es periódica. Para las que sean periódicas calcula su periodo:

a) $x[n] = e^{j(\pi n/6)}$,

b) $x[n] = e^{(j3n/4)}$,

c) $x[n] = \frac{\operatorname{sen}(\pi n/3)}{2\pi n}$,

d) $x[n] = 2\cos(\sqrt{2}\,\pi n + \pi/4)$,

e) $x[n] = 2\operatorname{sen}(5\pi n/16 - \pi/2)$,

f) $x[n] = \cos(\pi n/2) - \operatorname{sen}(\pi n/8) + 3\cos(\pi n/4 + \pi/3)$,

g) $x[n] = 2\cos(\pi n/4) + \cos(\pi n/2) + \cos(3\pi n/4)$.

1.1. 2 La señal de la figura 1.1 es una secuencia periódica de periodo N_0, y, por tanto, puede expresarse como la suma de N_0 sinusoides complejas discretas, con diferentes amplitudes y fases, relacionadas armónicamente,

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi k}{N_0}n},$$

donde los coeficientes complejos c_k de esta combinación lineal vienen dados por,

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N_0}n} \quad \text{con} \quad k = 0, \cdots, N_0 - 1.$$

A esta forma de descomponer una secuencia periódica se la conoce como *desarrollo en serie de Fourier discreto*. La primera expresión es la ecuación de síntesis y la segunda la ecuación de análisis de dicho desarrollo en serie.

a) Halla los coeficientes c_k del desarrollo en serie de Fourier discreto de la secuencia $x[n]$.

b) Introduce ahora los c_k obtenidos en la ecuación de síntesis del desarrollo en serie de Fourier discreto y comprueba que se obtiene la secuencia original $x[n]$.

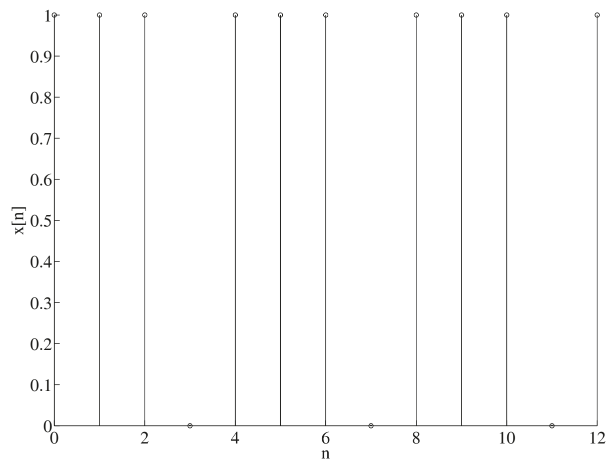

Figura 1.1. Secuencia $x[n]$ periódica.

1.1. 3 Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de la señal periódica $x_1[n]$ representada en la figura 1.2 y halla sus coeficientes c_k.

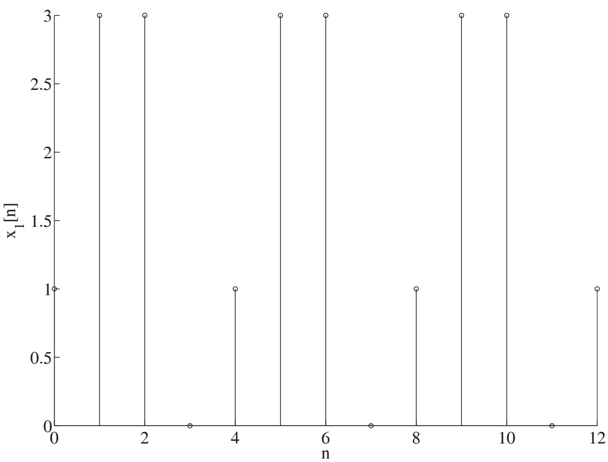

Figura 1.2. Secuencia $x_1[n]$ periódica.

1.1. 4 Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de la señal periódica $x_2[n]$ representada en la figura 1.3 y halla sus coeficientes c_k.

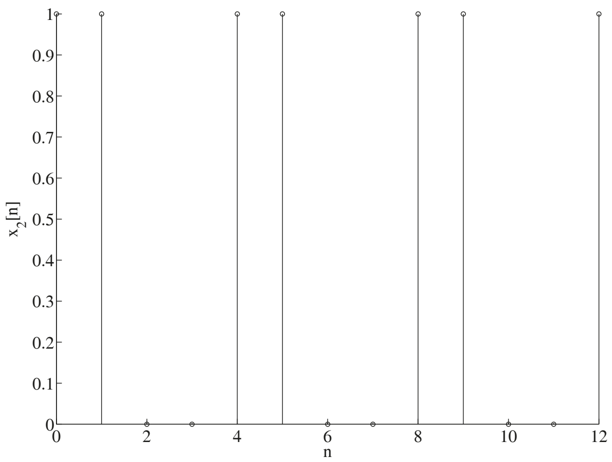

Figura 1.3. Secuencia $x_2[n]$ periódica.

1.1. 5 Determina los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier discreto de las siguientes secuencias periódicas:

a) $x[n] = \text{sen}\,(\pi(n-1)/4)$,

b) $x[n] = \cos(11\pi n/4 - \pi/3)$,

c) $x[n] = \sin(\pi n/8) + 3\cos(\pi n/4 + \pi/3)$.

Soluciones

1.1. 1 *a*) $N_0 = 12$ muestras.

b) No es periódica.

c) No es periódica.

d) No es periódica.

e) $N_0 = 32$ muestras.

f) $N_0 = \text{MCM}\{N_{01}, N_{02}, N_{03}\} = 16$ muestras.

g) $N_0 = \text{MCM}\{N_{01}, N_{02}, N_{03}\} = 8$ muestras.

1.1. 2 *a*) $c_0 = 0{,}75 \quad c_1 = -0{,}25j \quad c_2 = 0{,}25 \quad c_3 = 0{,}25j.$

b) $x[n] = 0{,}75 - 0{,}25j\, e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0{,}25\, e^{j\pi n} + 0{,}25j\, e^{j\frac{3\pi}{2}n} = 0{,}75 + 0{,}25\, e^{-j\frac{\pi}{2}}\, e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0{,}25\, e^{j\pi n} + 0{,}25 e^{j\frac{\pi}{2}}\, e^{j\frac{3\pi}{2}n}$, puede comprobarse la igualdad operando con la expresión o dando valores a n en un periodo.

1.1. 3 *a*) $c_0 = 2{,}25 \quad c_1 = -0{,}75 - j \quad c_2 = 0{,}25 \quad c_3 = -0{,}75 + j.$

b) $x_1[n] = 2{,}25 + \frac{5}{4}\, e^{-j2{,}214}\, e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0{,}25\, e^{j\pi n} + \frac{5}{4}\, e^{j2{,}214}\, e^{j\frac{3\pi}{2}n}$.

1.1. 4 *a*) $c_0 = 0{,}5 \quad c_1 = 0{,}25 - 0{,}25j \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0{,}25 + 0{,}25j.$

b) $x_2[n] = 0{,}5 + \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\, e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\, e^{j\frac{3\pi}{2}n}$.

1.1. 5 *a*) $c_1 = 0{,}5e^{-j3\pi/4}, \quad c_7 = 0{,}5e^{j3\pi/4}$. El resto de coeficientes son cero.

b) $c_3 = 0{,}5e^{-j\pi/3}, \quad c_5 = 0{,}5e^{j\pi/3}$. El resto de coeficientes son cero.

c) $c_1 = 0{,}5e^{-j\pi/2}, \quad c_{15} = 0{,}5e^{j\pi/2}, \quad c_2 = 1{,}5e^{j\pi/3}, \quad c_{14} = 1{,}5e^{-j\pi/3}$. El resto de coeficientes son cero.

1.2. Problemas - Tema 2: Digitalización de señales analógicas

Enunciados

1.2. 1 Un electrocardiograma (ECG) analógico contiene frecuencias útiles hasta los 100 Hz.

a) ¿Cuál es la frecuencia de Nyquist de esta señal?

b) Supón que muestreamos esta señal a una velocidad de 250 muestras/segundo. ¿Cuál es la frecuencia más alta que podemos representar de forma unívoca a esta velocidad de muestreo?

1.2. 2 Cierta forma de onda, $x(t) = 10\cos(1000\pi t + \pi/3) + 20\cos(2000\pi t + \pi/6)$, se muestrea para su almacenamiento en formato digital.

a) ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo necesaria para asegurar una recuperación perfecta de la señal analógica?

b) Si se pretende poder reproducir una hora de esta forma de onda, ¿cuántas muestras se necesita almacenar?

1.2. 3 Considera la señal analógica $x(t) = \mathrm{sen}(480\pi t) + 3\,\mathrm{sen}(720\pi t)$.

a) Determina la frecuencia de Nyquist de la señal $x(t)$.

b) Si se muestrea 600 veces por segundo, ¿cuál es la señal resultante en tiempo discreto, $x[n]$?

c) Si $x[n]$ se pasa a través de un conversor D/A ideal, ¿cuál es la señal reconstruida $x_r(t)$ que se obtiene?

1.2. 4 Se quiere cuantificar la señal en tiempo discreto $x[n] = 6{,}35\cos(\pi n/10)$ con una resolución de:

a) $\Delta = 0{,}1$,

b) $\Delta = 0{,}02$.

¿Cuántos bits necesita el conversor A/D en cada caso?

1.2. 5 Se dispone de un cuantificador de 4 bits cuyo margen de funcionamiento está comprendido entre -1 y 1 voltios . Se aplican a dicho cuantificador muestras de señal cuyos valores son:

- $x_1[n] = 1{,}117314$ V,
- $x_2[n] = 0{,}086726$ V,
- $x_3[n] = 0{,}714236$ V.

La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) Indica para cada una de las muestras el valor a la salida del cuantificador y su palabra código. También calcula el error absoluto de cuantificación,

$$e_q[n] = |x_q[n] - x[n]|,$$

y el error relativo de cuantificación,

$$e_{q\%}[n] = \frac{|x_q[n] - x[n]|}{|x[n]|} 100\ \%,$$

cometido para cada muestra.

b) Calcula el intervalo de amplitudes de la señal de entrada que produce el mismo código binario que la muestra de valor $0{,}714236$ voltios.

1.2. 6 Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) Considera las muestras $x_1 = 0{,}07$ V y $x_2 = -0,48$ V, que se han obtenido muestreando la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}2\pi t - \frac{\pi}{4})$. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) Considera ahora estos dos otros cuantificadores uniformes, cuyas características son

$2)\quad bits = 4, \qquad 2X_m = 1.$

$3)\quad bits = 6, \qquad 2X_m = 0{,}5.$

Entre las tres opciones de cuantificación (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

c) Suponiendo que el margen dinámico del cuantificador sea $2X_m = 5\sigma_x$, es decir 5 veces el valor cuadrático medio de la señal, y si se exige un $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 65$ dB, ¿cuál es el mínimo número de niveles que asegura este requerimiento?

Emplea la siguiente fórmula de la relación señal a ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB}.$$

Soluciones

1.2. 1 *a*) $f_{s_{Nyq}} = 200$ Hz.

b) $f_{0_{max}} = 125$ Hz.

1.2. 2 *a*) $f_s = 2000$ Hz.

b) $N = E[(t_{fin}(s) - t_{in}(s)) \cdot f_s] + 1 = 7200001$ muestras, si se muestrea a la frecuencia f_s del apartado a).

1.2. 3 *a*) $f_{s_{Nyq}} = 720$ Hz.

b) $x[n] = \text{sen}(0{,}8\pi n) + 3\,\text{sen}(1{,}2\pi n) = -2\,\text{sen}(0{,}8\pi n)$.

c) $x(t) = -2\,\text{sen}(480\pi t)$.

1.2. 4 *a*) 7 bits.

b) 10 bits.

1.2. 5 *a*) La solución será:

x (V)	código binario	x_q (V)	e_q (V)	e_{qr} (%)
1,117314	0111	0,9375	0,1798	16,1
0,086726	0000	0,0625	0,0242	27,9
0,714236	0101	0,6875	0,0267	3,7

b) $0{,}625 \leq x < 0{,}750$.

1.2. 6 *a*) $\Delta = \frac{1}{32} = 0{,}03125\,V$, $x_{q1} = 0{,}07812$ V, palabra binaria 00010, $e_{q1} = 11{,}6\,\%$
$x_{q2} = -0{,}48437$ (V), palabra binaria 11111, $e_{q2} = 0{,}91\,\%$.

b) $\Delta_1 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$ V, $\Delta_2 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ V, $\Delta_3 = \frac{1}{132} = 0{,}00781$ V.
La mejor opción es la primera ya que se ajusta mejor a las características de la señal $x(t)$

$(2X_m = 1)$.

c) $b = 12, \quad L = 2^{12} = 4096$ niveles.

1.3. Problemas - Tema 3: Señales y sistemas en tiempo discreto

Enunciados

1.3. 1 Dada la señal de tiempo discreto, $x[n]$, de la figura 1.4, calcula las siguientes señales:

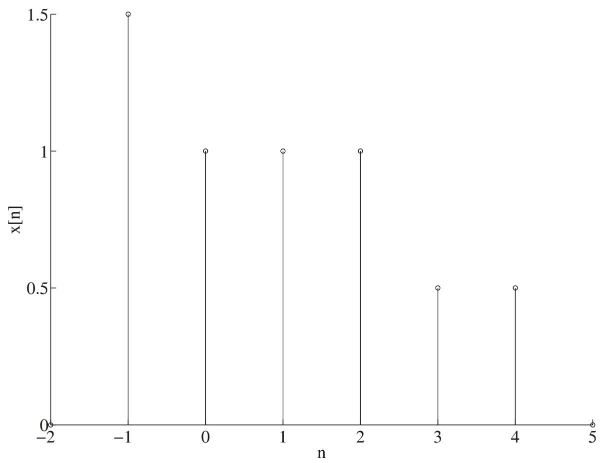

Figura 1.4. Secuencia $x[n]$.

a) $x[n-2]$,

b) $x[4-n]$,

c) $x[2n]$,

d) $x[n] \cdot u[2-n]$,

e) $x[n-1]\ \delta[n-3]$,

f) $x[n-1] * \delta[n-3]$.

1.3. 2 Calcula la convolución $z[n] = x[n] * y[n]$ de las siguientes secuencias:

a)

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n-3], \\ y[n] &= \delta[n+1] + 2\delta[n] - 3\delta[n-1], \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\delta[n+1] - \delta[n-5], \\ y[n] &= \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3], \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x[n] &= a^n \cdot u[n], \quad a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1, \\ y[n] &= b^n \cdot u[n], \quad b \in \mathbb{R},\ 0 < b < 1, \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x[n] &= u[n] - u[n-n_o], \quad n_o \in \mathbb{N}, \\ y[n] &= a^n \cdot u[n], \quad a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1, \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \prod\left(\frac{n}{3}\right), \\ y[n] &= u[n], \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n], \\ y[n] &= u[n]. \end{aligned}$$

1.3. 3 Considera dos sistemas en cascada (en serie) cuyas respuestas impulsivas son:

$$h_1[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$h_2[n] = \delta[n] + \tfrac{3}{2}u[n-1].$$

Si la secuencia de entrada es $x[n] = u[n]$, obtén la salida $y[n]$ de dos formas distintas:

a) Calculando primero $w[n] = x[n] * h_1[n]$ y después $y[n] = w[n] * h_2[n]$.

b) Calculando primero $h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$ y después $y[n] = x[n] * h_{eq}[n]$.

¿Son iguales las respuestas obtenidas?

1.3. 4 Determina la respuesta $y[n]$ para la conexión en cascada de los sistemas,

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \operatorname{sen}(8n), \\ h_2[n] &= a^n u[n], \quad |a| < 1, \end{aligned}$$

siendo la excitación $x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$.

1.3. 5 Dado el sistema de la figura 1.5, expresa la respuesta impulsiva total de éste, $h_T[n]$, siendo:

$$\begin{aligned} h_1[n] &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-3]), \\ h_2[n] &= h_3[n] = (n+1)u[n] \\ h_4[n] &= \delta[n-1], \\ h_5[n] &= \delta[n] - 4\delta[n-3]. \end{aligned}$$

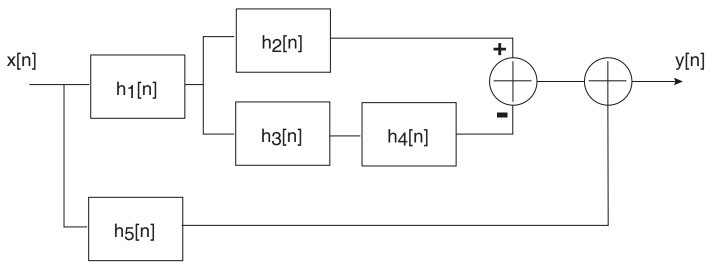

Figura 1.5. Interconexión de sistemas.

Dibuja la respuesta del sistema para la señal $x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$.

1.3. 6 Considera la conexión en cascada de tres sistemas lineales e invariantes causales (ver figura 1.6).

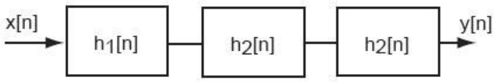

Figura 1.6. Conexión en serie de tres sistemas LTI.

La respuesta impulsiva $h_2[n]$ viene dada por:

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2].$$

La respuesta impulsiva total equivalente $h_T[n]$ del sistema es:

$$h_T[n] = \delta[n+3] + 5\delta[n+2] + 10\delta[n+1] + 11\delta[n] + 8\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + \delta[n-3].$$

a) Encuentra $h_1[n]$.

b) Calcula la respuesta del sistema $y[n]$ a la excitación $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

1.3. 7 Las siguientes expresiones corresponden a las respuestas impulsivas de sistemas lineales e invariantes en tiempo discreto. Determina en cada caso si el sistema es estable y/o causal.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$,

b) $h[n] = 0{,}99^n u[n+3]$,

c) $h[n] = 0{,}99^n u[-n]$,

d) $h[n] = 4^n u[2-n]$,

e) $h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + 0{,}99^n u[n-1]$,

f) $h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + 1{,}01^n u[1-n]$,

g) $h[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Para el último apartado ten en cuenta la siguiente expresión:

$$\sum_{n=0}^{N} n \cdot r^n = \frac{r\cdot\left(1-(N+1)\cdot r^N + N\cdot r^{N+1}\right)}{(1-r)^2}.$$

1.3. 8 *a*) Calcula y representa la respuesta impulsiva de un sistema lineal e invariante descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3] - 3x[n-4].$$

b) Calcula y representa la respuesta de este sistema a la señal de entrada de la figura 1.7.

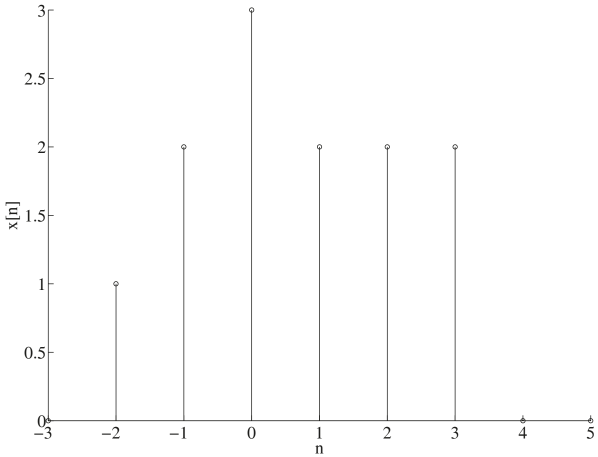

Figura 1.7. Secuencia de entrada $x[n]$.

c) Atendiendo a la duración de su respuesta impulsiva, ¿qué tipo de filtro es?

1.3. 9 Un sistema responde de acuerdo con la ecuación en diferencias

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2].$$

a) Encuentra la respuesta del sistema a la secuencia representada en la figura 1.7.

b) ¿De qué tipo de filtro se trata?

1.3. 10 Representa los diagramas de bloques de los siguientes sistemas descritos por ecuaciones en diferencias lineales:

a) $y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3] - 3x[n-4]$,

b) $y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$,

c) $2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$.

Soluciones

1.3. 1 *a*)

$$x[n-2] = 1{,}5\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + 0{,}5\delta[n-5] + 0{,}5\delta[n-6].$$

b)

$$x[4-n] = 0{,}5\delta[n] + 0{,}5\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + 1{,}5\delta[n-5].$$

c)

$$x[2n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 0{,}5\delta[n-2].$$

d)

$$x[n]u[2-n] = 1{,}5\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2].$$

e)

$$x[n-1]\delta[n-3] = \delta[n-3].$$

f)

$$x[n-1] * \delta[n-3] = 1{,}5\delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5] + \delta[n-6] + 0{,}5\delta[n-7] + 0{,}5\delta[n-8].$$

1.3. 2 *a*)

$$z[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] - 5\delta[n-1] + \delta[n-2] - 5\delta[n-3] + 3\delta[n-4].$$

b)

$$\begin{aligned} z[n] =& 2\delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 6\delta[n+1] + 4\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + \\ & - \delta[n-3] - 2\delta[n-4] - 3\delta[n-5] - 2\delta[n-6] - 2\delta[n-7] - 3\delta[n-8]. \end{aligned}$$

c)

$$z[n] = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \cdot u[n].$$

d)

$$z[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq n_0 - 1, \\ \frac{a^{n-n_0+1}-a^{n+1}}{1-a}, & n > n_0 - 1. \end{cases}$$

e)

$$z[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] + \frac{7}{4}u[n-2].$$

f)

$$z[n] = \frac{3}{4}u[n] + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

1.3. 3 *a*) $y[n] = (n+1)u[n]$.

b) $y[n] = (n+1)u[n]$. Las respuestas obtenidas son iguales.

1.3. 4 $y[n] = \mathrm{sen}(8n)$.

1.3. 5 *a*) $h_T[n] = 5\delta[n] + 6\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 7u[n-4]$.

b) $y[n] = 15\delta[n]+28\delta[n-1]+43\delta[n-2]+35\delta[n-3]+41\delta[n-4]+41\delta[n-5]+49u[n-6]$.

1.3. 6 *a*) $h_1[n] = \delta[n+3] + 3\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$.

b) $y[n] = \delta[n+3]+4\delta[n+2]+5\delta[n+1]+\delta[n]-3\delta[n-1]-4\delta[n-2]-3\delta[n-3]-\delta[n-4]$.

1.3. 7 *a*) Causal y estable.

b) No causal y estable.

c) No causal y no estable.

d) No causal y estable.

e) Causal y estable.

f) No causal y estable.

g) Causal y estable.

1.3. 8 *a*) $h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3] - 3\delta[n-4]$.

b)

$$\begin{aligned} y[n] =& \delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1] - 5\delta[n-2] + \\ & - 5\delta[n-3] - 11\delta[n-4] - 8\delta[n-5] - 4\delta[n-6] - 6\delta[n-7]. \end{aligned}$$

c) FIR.

1.3. 9 *a*) Utilizando la ecuación en diferencias que caracteriza el sistema, es posible obtener los sucesivos valores de $y[n]$. Condición inicial: $y[n] = 0$. Así, resulta:

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$y[n]$	...	0	1	0	5	-4	16	-26	56	-108	216	-432	864	...

b) El sistema lineal e invariante en el tiempo IIR es causal y no estable.

1.3. 10 Se representan los diagramas de bloques correspondientes:

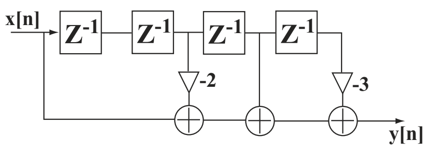

Figura 1.8. Diagrama de bloques caso a).

a)

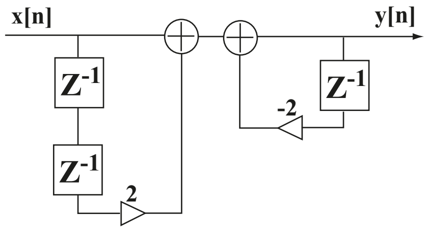

Figura 1.9. Diagrama de bloques caso b).

b)

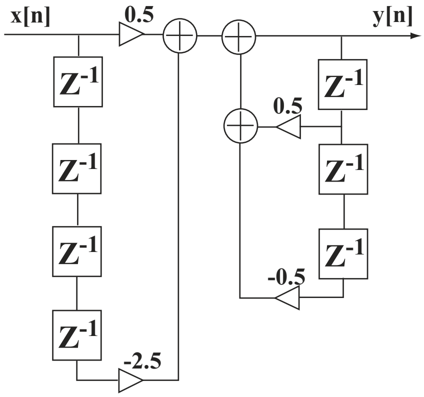

Figura 1.10. Diagrama de bloques caso c).

c)

1.4. Problemas - Tema 4: Transformada de Fourier en tiempo discreto

Enunciados

1.4. 1 Calcula la transformada de Fourier para cada una de las secuencias siguientes:

a) $x[n] = \prod\left[\frac{n}{5}\right]$,

b) $x[n] = 2^n u[-n]$,

c) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$,

d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (u[n+3] - u[n-2])$,

e) $x[n] = na^n\, u[n]$,

f) $x[n] = \cos(18\pi n/7) + \mathrm{sen}(2n)$,

g) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right) \delta[n-3k]$.

1.4. 2 Se tiene un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo con

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}.$$

Calcula el espectro de la respuesta para cada una de las siguientes entradas:

a) $x[n] = \mathrm{sen}(2\pi n/4)$,

b) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$.

1.4. 3 Calcula la transformada de Fourier inversa de los siguientes espectros:

a) Para el periodo $-\pi \leq \omega \leq \pi$,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & 0 \leq |\omega| < W, \\ 1 & W \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

y para el resto de periodos se repite lo mismo.

b) $X(e^{j\omega}) = 1 - 2e^{-j2\omega} + 4e^{j2\omega} + 3e^{-j6\omega}$,

c) $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,\delta(\omega - \pi k/2)$,

d) $X(e^{j\omega}) = \cos^2\omega$,

e) $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-3e^{-j\omega}}$.

1.4. 4 Considera el espectro de la secuencia $x[n]$ de la figura 1.11.

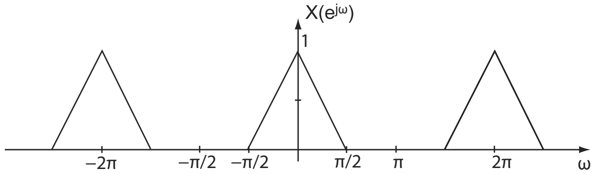

Figura 1.11. Transformada de Fourier $X(e^{(j\omega)})$.

Calcula y representa la Transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $z[n] = x[n]{\cdot}p[n]$ para cada una de las siguientes señales $p[n]$:

a) $p[n] = \cos(\pi n)$,

b) $p[n] = \cos(\pi n/2)$,

c) $p[n] = \mathrm{sen}(\pi n/2)$,

d) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]$.

1.4. 5 Queremos diseñar un sistema lineal e invariante en el tiempo que tenga la propiedad de que si la entrada es

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1],$$

la salida es

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

a) Calcula la función de transferencia $H(e^{j\omega})$ de este sistema.

b) Encuentra la ecuación en diferencias del sistema.

1.4. 6 Considera un sistema con respuesta impulsiva

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

Determina la ecuación en diferencias que relaciona respuesta y excitación.

1.4. 7 Considera un sistema discreto lineal e invariante causal, descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n].$$

a) Determina la función de transferencia $H\left(e^{j\omega}\right)$.

b) Determina la respuesta impulsiva $h[n]$.

c) Calcula la respuesta $y[n]$ a las siguientes excitaciones:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],$$

$$x[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n],$$

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1],$$

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

d) Calcula la respuesta a las entradas que tienen los espectros siguientes:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}},$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}},$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 1 + 2e^{-3j\omega}.$$

1.4. 8 Repite los dos primeros apartados del problema anterior con la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n].$$

1.4. 9 Dado el sistema lineal e invariante causal descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-4],$$

calcula la función de transferencia $H\left(e^{j\omega}\right)$.

1.4. 10 Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \tfrac{5}{6}y[n-1] - \tfrac{1}{6}y[n-2].$$

a) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

b) Calcula $h[n]$.

c) Encuentra la salida $y[n]$ ante la señal de entrada $x[n] = 3 \cdot e^{j\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}$.

Soluciones

1.4. 1 *a*)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j2\omega}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

b)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}.$$

c)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

d)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{8e^{j3\omega}-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

e)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{ae^{-j\omega}}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^{2}}.$$

f)

$$\begin{aligned}X\left(e^{j\omega}\right)= \quad & \pi\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{4\pi}{7}+2\pi k\right)+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{4\pi}{7}+2\pi k\right)+\\ &+\pi e^{-j\frac{\pi}{2}}\textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2+2\pi k)+\pi e^{j\frac{\pi}{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+2+2\pi k).\end{aligned}$$

g)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\pi}{6}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{2}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{3}k+2\pi l\right).$$

1.4. 2 *a*)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=0{,}6\pi e^{-j\frac{\pi}{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+0{,}6\pi e^{j\frac{\pi}{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}+2\pi k\right).$$

b)

$$\begin{gathered}Y\left(e^{j\omega}\right)=\tfrac{\pi}{2}\textstyle\sum_{l=-\infty}^{\infty}[3\delta\left(\omega+2\pi l\right)+\\ +\tfrac{3}{5}\delta\left(\omega-\tfrac{\pi}{2}+2\pi l\right)+\tfrac{1}{3}\delta\left(\omega-\pi+2\pi l\right)+\tfrac{3}{5}\delta\left(\omega-\tfrac{3\pi}{2}+2\pi l\right)].\end{gathered}$$

1.4. 3 *a*)

$$x[n] = (-1)^n \frac{W}{\pi} sinc\left(\frac{W}{\pi} n\right).$$

b)

$$x[n] = 4\delta[n+2] + \delta[n] - 2\delta[n-2] + 3\delta[n-6].$$

c)

$$x[n] = \frac{(-j)^n}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right).$$

d)

$$x[n] = -\frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-2].$$

e)

$$x[n] = -3^n\, u[-n-1].$$

1.4. 4 *a*)

$$Z\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right).$$

b)

$$Z\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\pi/2)}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\pi/2)}\right).$$

c)

$$Z\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}X\left(e^{j(\omega-\pi/2)}\right) + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}X\left(e^{j(\omega+\pi/2)}\right).$$

d)

$$Z\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}X\left(e^{j\omega}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right).$$

1.4. 5 *a*)

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{7}{12}e^{-j\omega}+\frac{1}{12}e^{-j2\omega}}.$$

b)

$$y[n] - \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1].$$

1.4. 6

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = \frac{3}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1].$$

1.4. 7 *a*)

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

b)

$$h[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n].$$

c)

$$y[n]=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}\right)\cdot u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\delta[n-2k],$$

$$y[n]=(n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n],$$

$$y[n]=\delta[n],$$

$$y[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=\delta[n]+2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n-1].$$

d)

$$y[n]=\left(\frac{3}{2}n+1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n],$$

$$y[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n],$$

$$y[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}u[n]+2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3}u[n-3].$$

1.4. 8

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{9}e^{-j2\omega}}.$$

1.4. 9

$$h[n]=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{-1}{3}\right)^{n}\right)u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\delta[n-2k].$$

1.4. 10

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-2e^{-j2\omega}+e^{-j4\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}.$$

1.4. 11 *a*)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-2j\omega}}.$$

b)

$$h[n] = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

c)

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n + \phi_0'\right)} = 3 \cdot 1{,}2 e^{j\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)} = 3{,}6 e^{j\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{3}{4}\pi\right)}.$$

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS DE EXÁMENES DEL GRADO EN INGENIERÍA MULTIMEDIA

2.1. Examen 1

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen convocatoria de Enero 2012

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 16 de Enero de 2012 Duración: 2:30 h

Problema 1. (3 PUNTOS) Sea la secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi n}{7}\right).$$

a) (1,0 P) Calcula los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto.

b) (1,5 P) Calcula la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ discreta. Representa su espectro en amplitud y fase en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

c) (0,5 P) Obtén la expresión completa de la respuesta $y[n]$ a la señal $x[n]$ de un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ es la siguiente:

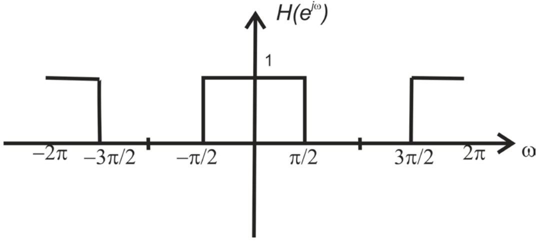

Figura 2.1. Respuesta en frecuencia.

Problema 2. (2 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 4 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (1,75 P) Considera las muestras $x_1 = 0,16$ V y $x_2 = -0,21$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (0,25 P) Suponiendo que el margen dinámico sea $2X_m = 4\sigma_x$, es decir 4 veces el valor cuadrático medio de la señal. Calcula la relación señal a ruido de cuantificación utilizando la siguiente formula:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB}.$$

Problema 3. (3 PUNTOS) Dado el sistema LTI representado en el diagrama de bloque

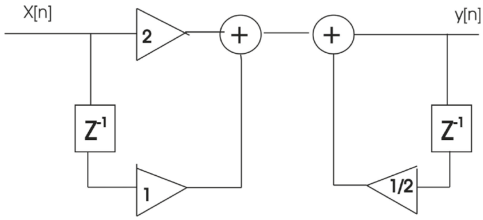

Figura 2.2. Diagrama de bloques del sistema LTI.

a) (0,5 P) Calcula la expresión de la ecuación en diferencias. ¿Que tipo de filtro es IIR o FIR? ¿Cuál es su orden?

b) (0,5 P) Calcula $H(e^{j\omega})$.

c) (1 P) Calcula la respuesta $y_1[n]$ del sistema a la entrada

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

d) (1 P) Calcula la respuesta $y_2[n]$ del sistema a la entrada

$$x_2[n] = 3e^{j(3\pi n + \frac{7\pi}{4})}.$$

Problema 4. (2 PUNTOS) Considera la conexión en cascada de tres sistemas lineales e invariantes

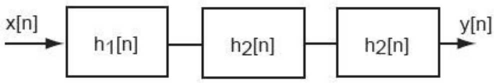

Figura 2.3. Conexión en serie de tres sistemas LTI.

La respuesta impulsiva $h_2[n]$ viene dada por:

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2].$$

Considerando que la respuesta impulsiva total equivalente es

$$h_T[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

a) (1,5 P) Encuentra $h_1[n]$.

b) (0,5 P) Estudia la causalidad y la estabilidad del sistema $h_1[n]$.

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen convocatoria de Enero 2012

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 16 de Enero de 2012 Duración: 2:30 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (3 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es la suma de dos sinusoides. las frecuencias angular y lineal de la primera sinusoide son:

$$\omega_{d1} = \frac{\pi}{7} \text{ rad/utd}, \quad f_{d1} = \frac{\omega_{d1}}{2\pi} = \frac{1}{14} \text{ 1/utd}.$$

Como la frecuencia es racional, la primera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{01} = \text{mín}\{\frac{k}{f_{d1}}\} = \text{mín}\{\frac{k}{\frac{1}{14}}\} = 14 \text{ utd}.$$

Para la segunda sinusoide se tiene:

$$\omega_{d2} = \frac{5\pi}{7} \text{ rad/utd}, \quad f_{d2} = \frac{\omega_{d2}}{2\pi} = \frac{5}{14} \text{ 1/utd}.$$

Como la frecuencia también es racional, la segunda sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{02} = \text{mín}\{\frac{k}{f_{d2}}\} = \text{mín}\{\frac{k}{\frac{5}{14}}\} = 14 \text{ utd}.$$

La señal $x[n]$ es por tanto periódica de periodo:

$$N_0 = M.C.M.\{N_{01}, N_{02}\} = 14 \text{ utd}.$$

Para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$ es más cómodo transformar su expresión hasta obtener una suma de sinusoides complejas. Para ello, primero se expresa como suma de funciones coseno:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) + \text{sen}\left(\frac{5\pi n}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi n}{7} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Y ahora expresamos cada señal coseno como suma de dos sinusoides complejas:

$$x[n] = \tfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{7}} + \tfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{7}} + \tfrac{1}{2}e^{j(\frac{5\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} + \tfrac{1}{2}e^{-j(\frac{5\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})}.$$

El DSF de $x[n]$ es de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{13} c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}}.$$

Comparando ambas expresiones de $x[n]$ se obtienen los coeficientes c_k:

$$\tfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{7}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = 1;\ c_1 = \tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{7}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = -1;\ k' = k + N_0 = -1 + 14 = 13;\ c_{13} = \tfrac{1}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}e^{j(\frac{5\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = 5;\ c_5 = \tfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$
$$\tfrac{1}{2}e^{-j(\frac{5\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = -5;\ k' = k + N_0 = -5 + 14 = 9;\ c_9 = \tfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

El resto de coeficientes son cero.

b) La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de la señal $x[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \tfrac{\pi}{7} - 2\pi k\right) + 2\pi\tfrac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega + \tfrac{\pi}{7} - 2\pi k\right) +$$
$$2\pi\tfrac{1}{2}e^{-\frac{j\pi}{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \tfrac{5\pi}{7} - 2\pi k\right) + 2\pi\tfrac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega + \tfrac{5\pi}{7} - 2\pi k\right)$$

El espectro en amplitud y fase es representado en la figura 2.4.

c) El sistema es un filtro con pulsación de corte $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ rad/utd. Por lo tanto el filtro eliminará las componentes de $x[n]$ de frecuencia más alta. El espectro de la salida será:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \tfrac{\pi}{7} - 2\pi k\right) + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega + \tfrac{\pi}{7} - 2\pi k\right).$$

En el dominio del tiempo la salida entonces será:

$$y[n] = \cos\left(\tfrac{\pi n}{7}\right).$$

Problema 2. (2 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

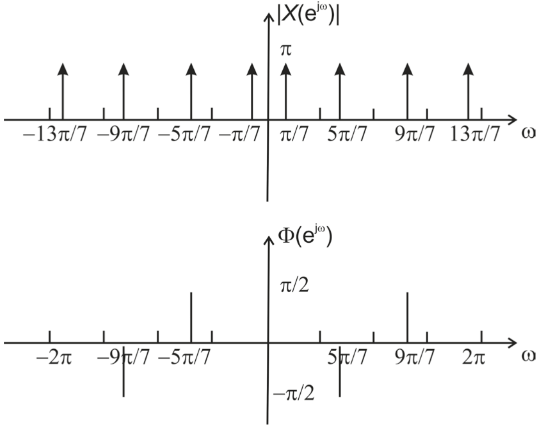

Figura 2.4. Espectro en amplitud y fase de $X(e^{j\omega})$ en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

$$L = 2^b = 2^4 = 16 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 3 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta} \right] \right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta} \right] + \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}16|}{0{,}0625} \right] + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16} = \left(2 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{16} = \frac{5}{32} \text{ V,}$$
$$x_{q1} = 0{,}156 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|} 100 = \frac{|0{,}156 - 0{,}16|}{|0{,}16|} 100 = 2{,}5\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta} \right] \right) = \left(E\left[\frac{|0{,}16|}{0{,}0625} \right] \right) = 2.$$

Por lo que le corresponde esta palabra código: 0010.

Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \tfrac{1}{2})\Delta \cdot \mathrm{sign}(x_2) = (E[\tfrac{|-0{,}21|}{0{,}0625}] + \tfrac{1}{2})\tfrac{1}{16}(-1) = (3 + \tfrac{1}{2})\tfrac{-1}{16} = \tfrac{-7}{32}\text{ V},$$
$$x_{q2} = -0{,}218\text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \tfrac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \tfrac{|-0{,}218+0{,}21|}{|0{,}21|}100 = 3{,}8\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = \left(E\left[\tfrac{|x_2|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\tfrac{|-0{,}21|}{0{,}0625}\right]\right) = 3.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 1011.

b) Siendo un cuantificador a 4 bits, la relación señal a ruido de cuantificación será

$$\left(\tfrac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\tfrac{2X_m}{2\sigma_x}\right) = 22,8\,\text{dB}.$$

Problema 3. (3 PUNTOS)

a) Desde el diagrama de bloque se puede deducir la ecuación en diferencias

$$y[n] = 2x[n] + x[n-1] + \tfrac{1}{2}y[n-1].$$

El filtro es un filtro IIR y su orden es $N = 1$.

b) Para obtener $H(e^{j\omega})$ hay que calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto de la expresión

$$H(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \tfrac{1}{2}(e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}).$$

Por lo tanto

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{2+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva. En frecuencia se cumple,

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

donde

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Entonces se obtiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \frac{2+2}{1-2\frac{1}{3}} = 12,$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{3}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{3}e^{-j\omega}) = \frac{2+3}{1-3\frac{1}{2}} = -10.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ es:

$$y[n] = 12\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 10\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n].$$

d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x[n] = A\, e^{j(\omega_d n+\phi_0)},$$

la respuesta será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En nuestro caso

$$A' = 3 \cdot |H(e^{j3\pi})| = 3 \cdot \frac{2+e^{-j3\pi}}{1-\frac{1}{2}e^{-j3\pi}} = 3\frac{2}{3} = 2,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j3\pi}) = \frac{7}{4}\pi.$$

Y, por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n + \phi_0'\right)} = 2e^{j(3\pi n + \frac{7}{4}\pi)}.$$

El sistema sólo ha afectado a la amplitud de la sinusoide.

Problema 4. (2 PUNTOS)

a) Para hallar $h_1[n]$ hay que reducir el sistema, y primero calcular $h_{2eq}[n] = h_2[n] * h_2[n]$, con

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1],$$

sabiendo que se obtiene,

$$h_{2eq} = (\delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n] + \delta[n-1]) = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

Una forma de obtener $h_1[n]$ es realizar una tabla y calcular la convolución desplazando $h_{2eq}[n]$. Las incógnitas serán los valores de $h_1[n]$, ya que se conocen los valores de la respuesta final $h_T[n]$. Además $h_1[n]$ tendrá que empezar en el instante $n = -3$ y acabar en el instante $n = 0$ ya que $h_T[n]$ está comprendida entre los instantes $[-3, 2]$:

$$n_{INh_1} = n_{INh_T} - n_{INh_{2eq}} = -3 - 0 = -3,$$

$$n_{FIh_1} = n_{FIh_T} - n_{FIh_{2eq}} = 2 - 2 = 0.$$

Por lo tanto considerando el solape de las muestras se obtiene:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	k	h_T
$h_1[k]$			?	?	?	?					
$h_{2eq}[k]$						1	2	1			
$h_{2eq}[-3-k]$	1	2	1							$k=-3$	1
$h_{2eq}[-2-k]$		1	2	1						$k=-2$	4
$h_{2eq}[-1-k]$			1	2	1					$k=-1$	7
$h_{2eq}[-k]$				1	2	1				$k=0$	7
$h_{2eq}[1-k]$					1	2	1			$k=1$	4
$h_{2eq}[2-k]$						1	2	1		$k=2$	1
$h_{2eq}[3-k]$							1	2	1	$k=3$	0

Tabla 2.1. Tabla para el cálculo de $h_1[n]$.

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	k	h_T
$h_1[k]$			1	2	2	1					
$h_{2eq}[k]$						1	2	1			
$h_{2eq}[-3-k]$	1	2	1							$k=-3$	1
$h_{2eq}[-2-k]$		1	2	1						$k=-2$	4
$h_{2eq}[-1-k]$			1	2	1					$k=-1$	7
$h_{2eq}[-k]$				1	2	1				$k=0$	7
$h_{2eq}[1-k]$					1	2	1			$k=1$	4
$h_{2eq}[2-k]$						1	2	1		$k=2$	1
$h_{2eq}[3-k]$							1	2	1	$k=3$	0

Tabla 2.2. Resultado final del cálculo de $h_1[n]$.

Es decir,

$$h_1[n] = \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n].$$

b) Analizando $h_1[n]$ se puede afirmar que el sistema no es causal ya que

$$h_1[n] \neq 0 \qquad \text{para } n < 0$$

y que el sistema es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid h_1[n] \mid = \sum_{n=-3}^{0} \mid h_1[n] \mid = 6 < \infty.$$

2.2. Examen 2

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segunda convocatoria, Julio 2012

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 2 de Julio de 2012 Duración: 2:30 h

Problema 1. (3 PUNTOS) Sea la secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) (1,5 P) Calcula los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto.

b) (1,0 P) Calcula la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ en tiempo discreto. Representa su espectro en amplitud y fase en el intervalo $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

c) (0,5) Obtén analíticamente y gráficamente la expresión de la función $H(e^{j\omega})$ para que la respuesta del sistema a la entrada $x[n]$ sea

$$y[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right).$$

Problema 2. (2 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \operatorname{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \operatorname{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (1,75 P) Considera las muestras $x_1 = 0,26$ V y $x_2 = -0,51$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (0,25 P) Suponiendo que el margen dinámico sea $2X_m = 4\sigma_x$, es decir 4 veces el valor cuadrático medio de la señal. Calcula la relación señal a ruido de cuantificación utilizando la siguiente formula:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB}.$$

Problema 3. (2,5 PUNTOS) Dado el sistema de la figura 2.5

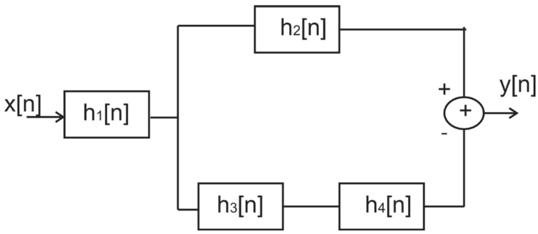

Figura 2.5. Sistema LTI.

siendo

$$h_1[n] = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n-3]),$$

$$h_2[n] = h_3[n] = (n+1)u[n],$$

$$h_4[n] = \delta[n-1].$$

a) (2 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_t[n]$.

b) (0,5 P) Indica si el sistema es causal y estable.

Problema 4. (2,5 PUNTOS) Considera el sistema LTI causal descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = \tfrac{3}{4}x[n] - \tfrac{1}{2}x[n-1] - \tfrac{1}{4}y[n-1].$$

a) (0,5P) Determina la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema.

b) (0,5P) Calcula su respuesta al impulso $h[n]$.

c) (1,5P) Calcula cuál será la respuesta del sistema $y[n]$ ante la señal de entrada

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n].$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segunda convocatoria, Julio 2012

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 2 de Julio de 2012 Duración: 2:30 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (3 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es la suma de dos sinusoides. Las frecuencias angular y lineal discreta de la primera de ellas son:

$$\omega_{d1} = \tfrac{\pi}{7} \text{ rad/utd}, \quad f_{d1} = \tfrac{\omega_{d1}}{2\pi} = \tfrac{1}{14} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia lineal es racional, la primera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{01} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d1}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{1}{14}}\} = 14 \text{ utd.}$$

Para la segunda sinusoide:

$$\omega_{d2} = \tfrac{6\pi}{7} \text{ rad/utd, ;} \quad f_{d2} = \tfrac{\omega_{d2}}{2\pi} = \tfrac{6}{14} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia lineal también es racional, la segunda sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{02} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d2}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{3}{7}}\} = 7 \text{ utd.}$$

La señal $x[n]$ es por tanto periódica de periodo:

$$N_0 = M.C.M.\{N_{01}, N_{02}\} = 14 \text{ utd.}$$

Para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$ es más cómodo transformar su expresión hasta obtener una suma de sinusoides complejas. Para ello en primer lugar se expresa $x[n]$ como suma de funciones coseno:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) + \text{sen}\left(\frac{6\pi n}{7} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi n}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi n}{7} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Y ahora expresamos cada señal coseno como suma de dos sinusoides complejas:

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{7}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{7}} + \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{6\pi n}{7} - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{6\pi n}{7} - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

El DSF de $x[n]$ es de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{13} c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}}.$$

Comparando ambas expresiones de $x[n]$ se obtienen los coeficientes c_k:

$$\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{7}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = 1;\ c_1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{7}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = -1;\ k' = k + N_0 = -1 + 14 = 13;\ c_{13} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{6\pi n}{7} - \frac{\pi}{4}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = 6;\ c_6 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{6\pi n}{7} - \frac{\pi}{4}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = -6;\ k' = k + N_0 = -6 + 14 = 8;\ c_8 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

El resto de coeficientes son cero.

b) La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de la señal $x[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{\pi}{7} - 2\pi k\right) + 2\pi\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega + \frac{\pi}{7} - 2\pi k\right) +$$
$$+2\pi\frac{1}{2}e^{-\frac{j\pi}{4}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - \frac{6\pi}{7} - 2\pi k\right) + 2\pi\frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{4}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega + \frac{6\pi}{7} - 2\pi k\right).$$

El espectro en amplitud y fase es representado en la figura 2.6.

c) Para obtener como respuesta la señal

$$x[n] = cos\left(\frac{\pi n}{7}\right),$$

hay que filtrar el sistema con un filtro paso-bajo que seleccione solo las deltas de Dirac centradas en las frecuencias $\omega_d = \pm\frac{\pi}{7} + 2\pi k$. Una posible solución sería emplear un filtro paso bajo de pulsación de corte $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ rad/utd (ver figura 2.7).

Su expresión analítica es:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\prod\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\prod\left(\frac{\omega - 2\pi k}{\pi}\right).$$

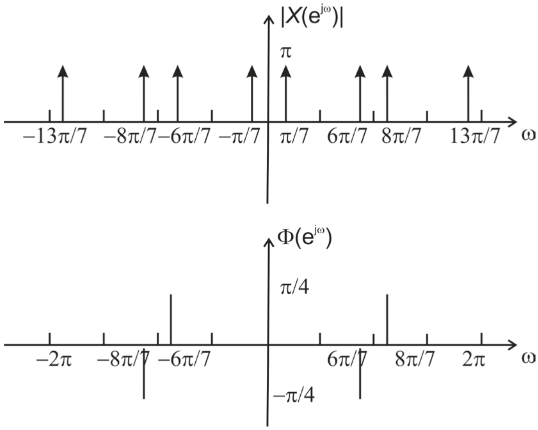

Figura 2.6. Espectro en amplitud y fase de $X(e^{j\omega})$ en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

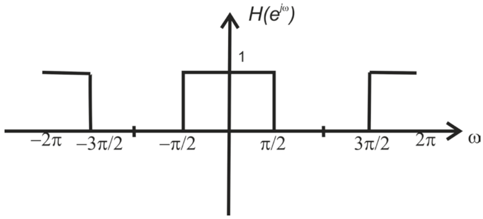

Figura 2.7. Filtro de pulsación de corte $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ rad/utd.

Problema 2. (2 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son: $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, la muestra x_1 cae en la zona granular y la segunda muestra x_2 cae en zona de saturación. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right)\cdot\Delta\cdot\mathrm{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}26|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \left(8+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{32}\text{ V},$$
$$x_{q1} = 0{,}2656\text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1}-x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}2656-0{,}26|}{|0{,}26|}100 = 2{,}15\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}26|}{0{,}03125}\right]\right) = 8.$$

Por lo que le corresponde a esta muestra: 01000
Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = \frac{L-1}{2}\cdot\Delta\cdot\mathrm{sign}(x) = \left(\frac{(32-1)}{2}\right)\frac{1}{32}(-1) = \frac{-31}{64} = -0{,}48437\text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}48437+0{,}51|}{|0{,}51|}100 = 5\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud el máximo nivel posible $N2 = -15$. Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 11111.

b) Siendo un cuantificador a 5 bits, la relación señal a ruido de cuantificación será

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6{,}02\cdot(b-1) + 10{,}8 - 20\cdot\log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) = 28{,}86\,\text{dB}$$

Problema 3. (2,5 PUNTOS)

a) Vamos deduciendo poco a poco el sistema. En primer lugar,

$$h_{eq1}[n] = h_3[n] * h_4[n] = (n+1)u[n] * \delta[n-1] = nu[n-1].$$

Luego

$$h_{eq2}[n] = h_2[n] - h_{eq1}[n] = (n+1)u[n] - nu[n-1].$$

De forma gráfica o mediante una tabla es fácil deducir que $h_{eq2}[n] = u[n]$.

Finalmente se obtiene que

$$\begin{aligned} h_T[n] = h_1[n] * h_{eq2}[n] = [9\left(\tfrac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n-3])] * u[n] = \\ = (9\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2]) * u[n] = 9u[n] + 3u[n-1] + u[n-2]. \end{aligned}$$

Ahora, sacando los términos comunes, se obtiene la expresión final:

$$\begin{aligned} h_T[n] = 9\delta[n] + 9\delta[n-1] + 9u[n-2] + 3\delta[n-1] + 3u[n-2] + u[n-2] = \\ = 9\delta[n] + 12\delta[n-1] + 13u[n-2]. \end{aligned}$$

b) El sistema es causal ya que $h_T[n] = 0$ para $n < 0$, mientras no es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid h_T[n] \mid = \sum_{n=0}^{+\infty} \mid h_T[n] \mid = \infty.$$

Problema 4. (2,5 PUNTOS)

a) Para obtener $H(e^{j\omega})$ hay que calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de la ecuación en diferencias. Resulta

$$Y(e^{j\omega}) + \tfrac{1}{4}(e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = \tfrac{3}{4}X(e^{j\omega}) - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}X(e^{j\omega}),$$

de tal forma que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

b) La respuesta impulsiva $h[n]$ se encuentra calculando la transformada inversa de la respuesta en frecuencia:

$$h[n] = DFTF^{-1}\left\{H(e^{j\omega})\right\} = \tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva. En frecuencia se cumple

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

donde

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Entonces se obtiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = -\tfrac{1}{6},$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to-\frac{1}{4}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1+\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = \tfrac{11}{12}.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ será:

$$y[n] = -\tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \tfrac{11}{12}\left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u[n].$$

2.3. Examen 3

SEÑALES Y SISTEMAS

Primer Parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 30 de Octubre de 2012 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5,5 PUNTOS) Dada la señal de la figura 2.8:

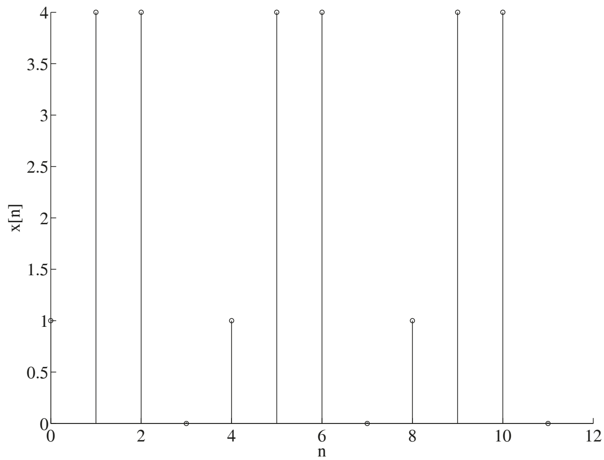

Figura 2.8. Señal periódica $x[n]$.

a) (4 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ y sus coeficientes c_k.

b) (1,5 P) Representa el espectro de amplitud y de fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2. (4,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (3 P) Considera las muestras $x_1 = 0,073$ V y $x_2 = -0,452$ V, que se han obtenido muestreando la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}2\pi t)$. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1,5 P) Considera ahora estos dos otros cuantificadores uniformes, cuya características son
   2) $bits = 4, \qquad 2X_m = 1,$
   3) $bits = 6, \qquad 2X_m = 2.$
   Entre las tres opciones de cuantificación (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

SEÑALES Y SISTEMAS

Primer Parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 30 de Octubre de 2012 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (5,5 PUNTOS)

a) El periodo es $N_0 = 4$ utd. La señal es $x[n] = \{1, 4, 4, 0\}$ en $n = 0, 1, 2, 3$. Su DSF discreto será de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi kn}{2}}.$$

Los valores de los coeficientes c_k se calculan con la ecuación de análisis del DSF discreto:

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi kn}{2}} \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Sustituyendo se obtiene

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi kn}{2}} = \frac{1}{4}(x[0]+x[1]e^{-j\frac{\pi k}{2}}+x[2]e^{-j\pi k}+x[3]e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) = \frac{1}{4}(1+4e^{-j\frac{\pi k}{2}}+4e^{-j\pi k})$$
$$\text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

O bien,

$$c_0 = \frac{9}{4} = 2{,}25,$$

$$c_1 = \frac{-3}{4} - j = \left(\frac{5}{4}\right)e^{-j2{,}2143} = \left(\frac{5}{4}\right)e^{j4{,}0689} = \left(\frac{5}{4}\right)e^{-j2{,}2143},$$

$$c_2 = \frac{1}{4},$$

$$c_3 = \frac{-3}{4} + j = \left(\frac{5}{4}\right)e^{j2{,}2143} = \left(\frac{5}{4}\right)e^{-j4{,}0689}.$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

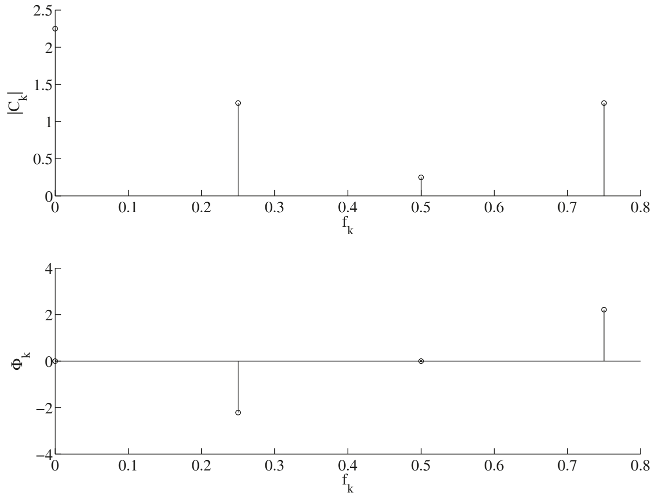

Figura 2.9. Espectro de amplitud y de fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

$$x[n] = \tfrac{9}{4} + \left(\tfrac{5}{4}\right) e^{-j2{,}214} e^{j\frac{\pi n}{2}} + \left(\tfrac{1}{4}\right) e^{j\pi n} + \left(\tfrac{5}{4}\right) e^{j2{,}214} e^{j\frac{3\pi n}{2}}$$

b) Se representa el espectro de amplitud y del espectro de fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta en la figura 2.9.

Problema 2. (4,5 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \tfrac{x_{max} - x_{min}}{L} = \tfrac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}073|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \\ = 0{,}0781 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}0781 - 0{,}073|}{|0{,}073|}100 = 6{,}98\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}073|}{0{,}03125}\right]\right) = 2.$$

Por lo que le corresponde a esta secuencia binaria: 00010.
Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2})\Delta \cdot \text{sign}(x_2) = (E[\frac{|-0{,}452|}{0{,}03125}] + \frac{1}{2})\frac{1}{32}(-1) = (14 + \frac{1}{2})\frac{-1}{32} = \\ = -0{,}4531 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2} - x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}4531 - (-0{,}452)|}{|-0{,}404|}100 = 0{,}24\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|-0{,}452|}{0{,}03125}\right]\right) = 14.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 11110.

b) Calculamos el escalón de cuantificación Δ, para los otros dos cuantificadores:

$$\Delta_2 = \frac{2X_m}{2^b} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \text{ V,}$$

$$\Delta_3 = \frac{2X_m}{2^b} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V.}$$

A partir de las Δ se podría pensar que la mejor opción para cuantificar la señal $x(t)$ sería la tercera opción. Sin embargo si nos fijamos en el margen dinámico de la señal, con este cuantificador sólo se utilizarían los niveles de menor valor ya que el margen dinámico de la señal está entre $-0,5$ y $0{,}5$, desaprovechando bits. Por lo tanto, de las tres opciones la primera es la que cuantifica mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características.

2.4. Examen 4

SEÑALES Y SISTEMAS

Segundo Parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2012 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura 2.10,

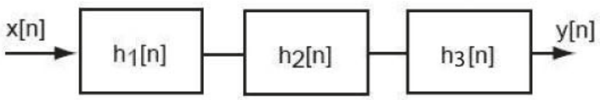

Figura 2.10. Sistema LTI.

siendo

$$h_3[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n (u[n] - u[n-3]),$$

$$h_2[n] = \delta[n+2],$$

$$h_1[n] = u[n-1].$$

a) (2,5 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$.

b) (1 P) Indica si el sistema total es estable y causal.

c) (1,5 P) Encuentra $y[n]$ cuando la entrada del sistema es $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n-1]$.

Problema 2. (5 PUNTOS) Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2].$$

a) $(0{,}5$ P) Dibuja el diagrama de bloques del sistema.

b) $(0{,}5$ P) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) $(2{,}5$ P) Calcula $h[n]$.

d) $(1{,}5$ P) Encuentra la salida $y[n]$ ante la señal de entrada $x[n] = 2 \cdot e^{j(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segundo parcial, curso 2012-13

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2012 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (5 PUNTOS)

a) La $h_T[n]$ es la convolución de los tres sistemas:

$$h_T[n] = (h_1[n] * h_2[n]) * h_3[n].$$

El resultado de la primera convolución será

$$(h_1[n] * h_2[n]) = \delta[n+2] * u[n-1] = u[n+1].$$

Finalmente $h_T[n]$ será

$$\begin{gathered} h_T[n] = u[n+1] * h_3[n] = u[n+1] * \left[\left(\tfrac{1}{4}\right)^n (u[n] - u[n-3])\right] = \\ = u[n+1] * \left(\delta[n] + \tfrac{1}{4}\delta[n-1] + \tfrac{1}{16}\delta[n-2]\right) = u[n+1] + \tfrac{1}{4}u[n] + \tfrac{1}{16}u[n-1]. \end{gathered}$$

Extrayendo los elementos correspondientes a mismos instantes de tiempo o realizando una tabla se obtiene que

$$h_T[n] = \delta[n+1] + \tfrac{5}{4}\delta[n] + \tfrac{21}{16}u[n-1].$$

b) El sistema global no es causal ya que $h_T[n] \neq 0$ para $n < 0$, y no es estable ya que es de duración infinita y

$$\sum_{n=-1}^{+\infty} |h_T[n]| = \infty.$$

c) La salida del sistema ante la entrada $x[n]$ será

$$y[n] = x[n] * h_T[n] = (\delta[n+1] + \tfrac{5}{4}\delta[n] + \tfrac{21}{16}u[n-1]) * (\delta[n+1] - 2\delta[n-1]).$$

Después de realizar las convoluciones correspondientes y simplificando factores, se obtiene

$$y[n] = \delta[n+2] + \tfrac{5}{4}\delta[n+1] - \tfrac{11}{16}\delta[n] - \tfrac{19}{16}\delta[n-1] - \tfrac{21}{16}u[n-2].$$

Problema 2. (5 PUNTOS)

a)) El diagrama de bloques del sistema se muestra en la figura 2.11.

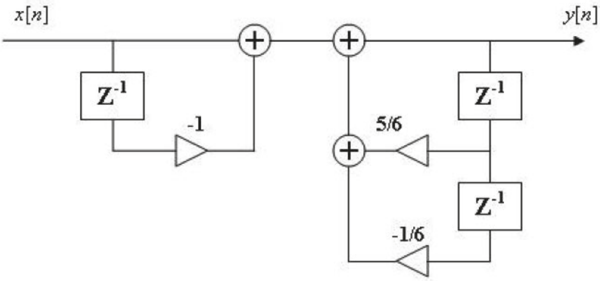

Figura 2.11. Diagrama de bloques del sistema.

b) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) - \tfrac{5}{6}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \tfrac{1}{6}Y(e^{j\omega})e^{-2j\omega} = X(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})e^{-j\omega}.$$

Así que

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-2j\omega}}.$$

c) Antes de descomponer en fracciones parciales, hay que buscar los dos polos del denominador, que resolviendo la ecuación de segundo grado del denominador son $p_1 = 1/2$ y $p_2 = 1/3$. Factorizando el denominador de $H(e^{j\omega})$,

$$1 - \tfrac{5}{6}e^{-j\omega} + \tfrac{1}{6}e^{-2j\omega} = (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{3}e^{-j\omega}),$$

entonces se obtiene que

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{1-e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})\cdot(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}.$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-2j\omega}} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} H(e^{j\omega}) \cdot (1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \frac{1-2}{1-\frac{2}{3}} = -3,$$

$$B = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{3}} H(e^{j\omega}) \cdot (1-\tfrac{1}{3}e^{-j\omega}) = \frac{1-3}{1-\frac{3}{2}} = 4.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $H(e^{j\omega})$ es, aplicando la propiedad de linealidad y conocido el par de transformadas de una exponencial limitada por la izquierda:

$$h[n] = -3\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n].$$

d) La salida del sistema ante una entrada $x[n] = A\, e^{j(\omega_d n+\phi_0)}$, dado que el sistema es LTI, será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En nuestro caso

$$A' = 2 \cdot |H(e^{j\pi/2})|,$$

$$\phi_0' = \tfrac{\pi}{4} + \Phi_H(e^{j\pi/2}).$$

Es decir, hay que calcular $H(e^{j\omega_d})$ a la pulsación $\omega_d = \pi/2$ rad/utd. Se obtiene un numero real positivo (argumento cero):

$$H(e^{j\pi/2}) = \frac{1-e^{-j\pi/2}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2})\cdot(1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/2})} = \frac{1+j}{5/6+j5/6} = 6/5 = 1{,}2,$$

$$|H(e^{j\pi/2})| = 1{,}2, \qquad \Phi_H(e^{j\pi/2}) = 0 \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)} = 2\cdot 1{,}2 e^{j(\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{4}\pi)} = 2{,}4 e^{j(\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{4}\pi)}.$$

El filtro amplifica la señal de entrada y no afecta a su fase.

2.5. Examen 5

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación de un parcial, Enero 2013

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 14 de Enero de 2013 Duración: 1:00 h

Problema 1. (6 PUNTOS) Sea la secuencia

$$x[n] = 3 + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right).$$

a) (1,0 P) Calcula el periodo N_0.

b) (3.5P) Calcula los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto.

c) (1,5 P) Representa el espectro de amplitud y de fase de los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en función de la frecuencia discreta.

Problema 2. (4 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 1$ y $x_{min} = -1$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (3 P) Considera las muestras $x_1 = 0,424$ V y $x_2 = -0,091$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1 P) Suponiendo que el margen dinámico sea $2X_m = 5\sigma_x$, es decir 5 veces el valor cuadrático medio de la señal. Calcula la relación señal a ruido de cuantificación utilizando la siguiente formula:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB}.$$

Problema 3. (5 PUNTOS) Considera una asociación en cascada de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Se sabe que la respuesta al impulso del primer sistema es

$$h_1[n] = \delta[n+1] + 3\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2],$$

y la respuesta al impulso equivalente del sistema global es,

$$h_{eq}[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 6\delta[n-4] + 5\delta[n-5] + 3\delta[n-6] + \delta[n-7].$$

a) (1 P) Estudia la causalidad y estabilidad del primer sistema LTI.

b) $(2,5$ P) Calcula la respuesta al impulso del segundo sistema, $h_2[n]$.

c) $(1,5$ P) Determina la ecuación en diferencias que describe el comportamiento del sistema equivalente. Justifica si se trata de un filtro FIR o IIR.

Problema 4. (5 PUNTOS) Considera el sistema discreto lineal e invariante, descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] + \tfrac{1}{4}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1].$$

a) $(0,5$ P) Calcula la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\omega})$.

b) (1 P) Calcula la respuesta impulsiva del sistema $h[n]$.

c) (2 P) Calcula la respuesta $y[n]$ cuando

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n].$$

d) $(1,5$ P) Calcula la respuesta $y_1[n]$ cuando

$$x_1[n] = 2\cos(\tfrac{\pi n}{2}).$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación de un parcial, Enero 2013

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 14 de Enero de 2013 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (6 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es la suma de tres sinusoides más la componente continua. Hay que calcular y averiguar las frecuencias de las tres sinusoides. Para la primera de ellas se tiene:

$$\omega_{d1} = \tfrac{\pi}{2} \text{ rad/utd}, \quad f_{d1} = \tfrac{\omega_{d1}}{2\pi} = \tfrac{1}{4} \text{ 1/utd}.$$

Como la frecuencia es racional, la primera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{01} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d1}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{1}{4}}\} = 4 \text{ utd}.$$

Para la segunda sinusoide:

$$\omega_{d2} = \tfrac{\pi}{8} \text{ rad/utd}, \quad f_{d2} = \tfrac{\omega_{d2}}{2\pi} = \tfrac{1}{16} \text{ 1/utd}.$$

Como la frecuencia también es racional, la segunda sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{02} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d2}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{1}{16}}\} = 16 \text{ utd}.$$

Para la tercera:

$$\omega_{d3} = \tfrac{\pi}{4} \text{ rad/utd}, \quad f_{d2} = \tfrac{\omega_{d2}}{2\pi} = \tfrac{1}{8} \text{ 1/utd}.$$

Como la frecuencia también es racional la tercera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{03} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d3}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{1}{8}}\} = 8 \text{ utd}.$$

La señal $x[n]$ es por tanto periódica de periodo:

$$N_0 = M.C.M.\{N_{01}, N_{02}, N_{03}\} = 16 \text{ utd.}$$

b) Para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$ es más cómodo transformar su expresión hasta obtener una suma de sinusoides complejas. primero se expresa $x[n]$ como suma de funciones coseno:

$$x[n] = 3+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\text{sen}\left(\frac{\pi n}{8}\right)+3\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = 3+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi n}{8}-\frac{\pi}{2}\right)+3\cos\left(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{3}\right).$$

Y ahora expresamos cada señal coseno como suma de sinusoides complejas:

$$x[n] = 3 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi n}{8}-\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi n}{8}-\frac{\pi}{2})} + \frac{3}{2}e^{j(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{3})} + \frac{3}{2}e^{-j(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{3})}.$$

El DSF de $x[n]$ es de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi k n}{N_0}} = \sum_{k=0}^{15} c_k e^{j\frac{\pi k n}{8}}.$$

Comparando ambas expresiones de $x[n]$ se obtienen los coeficientes c_k:

$$c_0 = 3,$$
$$\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{2}} = c_k e^{j\frac{\pi k n}{8}} \Leftrightarrow k = 4;\ c_4 = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{2}} = c_k e^{j\frac{\pi k n}{8}} \Leftrightarrow k = -4;\ k' = k + N_0 = -4+16 = 12;\ c_{12} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}e^{j(\frac{\pi n}{9}-\frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi k n}{8}} \Leftrightarrow k = 1;\ c_1 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$
$$\frac{1}{2}e^{-j(\frac{\pi n}{8}-\frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi k n}{8}} \Leftrightarrow k = -1;\ k' = k + N_0 = -1+16 = 15;\ c_{15} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{3}{2}e^{j(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{3})} = c_k e^{j\frac{\pi k n}{8}} \Leftrightarrow k = 2;\ c_2 = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}},$$
$$\frac{3}{2}e^{-j(\frac{\pi n}{4}+\frac{\pi}{3})} = c_k e^{j\frac{\pi k n}{8}} \Leftrightarrow k = -2;\ k' = k + N_0 = -2+16 = 14;\ c_{14} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}.$$

El resto de coeficientes son cero.

c) Los respectivos espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta se representan en la figura 2.12.

Problema 2. (4 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son: $x_{min} = -1$ V y $x_{max} = 01$ V; las muestras x_1 y x_2 caen las dos en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

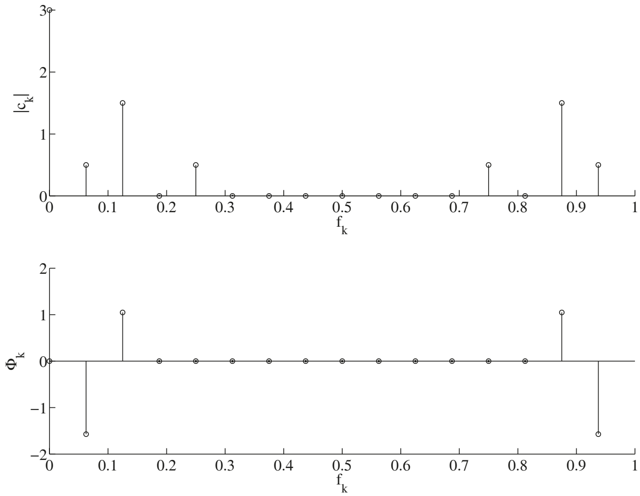

Figura 2.12. Espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta.

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \tfrac{x_{max}-x_{min}}{L} = \tfrac{2}{32} = 0{,}0625 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\tfrac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\tfrac{|x_1|}{\Delta}\right] + \tfrac{1}{2}\right)\cdot\Delta\cdot\text{sign}(x_1) = \left(E\left[\tfrac{|0{,}424|}{0{,}0625}\right] + \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{16} = \left(6+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{16} \text{ V,}$$
$$x_{q1} = 0{,}40625 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \tfrac{|x_{q1}-x_1|}{|x_1|}100 = \tfrac{|0{,}40625-0{,}424|}{|0{,}424|}100 = 4{,}2\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}424|}{0{,}0625}\right]\right) = 6.$$

Por lo que le corresponde a esta secuencia binaria: 00110.
Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x_2) = \left(E\left[\frac{|-0{,}091|}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{16}(-1) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{-1}{16}\ \mathrm{V},$$
$$x_{q2} = -0{,}09375\ \mathrm{V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2} - x_2|}{|x_2|} 100 = \frac{|-0{,}09375 - (-0{,}091)|}{|0{,}091|} 100 = 3\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 porque la muestra es negativa y la magnitud del nivel posible será $N = 1$. Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 10001.

b) Siendo un cuantificador a 5 bits, con $2X_m = 5\sigma_x$ la relación señal a ruido de cuantificación será

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) = 6{,}02(5-1) + 10{,}8 - 20 \cdot \log(2{,}5)\ \mathrm{dB},$$
$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 26{,}921\ \mathrm{dB}.$$

Problema 3. (5 PUNTOS)

a) El sistema $h_1[n]$ es no causal ya que

$$h_1[n] = \delta[n+1] + 3\delta[n] + 3\delta[n] + \delta[n-2]$$

es distinto de cero para $n < 0$. Además es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\ h_1[n]\ | = \sum_{n=-1}^{2} |\ h_1[n]\ | = 8 < \infty.$$

b) Una forma de obtener $h_2[n]$ es realizar una tabla y calcular la convolución desplazando $h_1[n]$. Las incógnitas serán los valores de $h_2[n]$, ya que se conocen los valores de la respuesta final $h_{eq}[n]$ (tabla 2.3). Además $h_2[n]$ tendrá que empezar en el instante $n = 1$ y acabar en el instante $n = 5$ ya que $h_{eq}[n]$ está comprendida entre los instantes $n = 0$ y $n = 7$:

$$n_{INh_2} = n_{INh_{eq}} - n_{INh_1} = 0 - (-1) = 1,$$

$$n_{FIh_2} = n_{FIh_{eq}} - n_{FIh_1} = 7 - 2 = 5.$$

Finalmente obtendremos, después de realizar los cálculos correspondientes que se muestran en la tabla 2.4.

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	k	h_{eq}
$h_2[k]$				?	?	?	?	?				
$h_1[k]$		1	3	3	1							
$h_1[-k]$	1	3	3	1							$k=0$	1
$h_1[1-k]$		1	3	3	1						$k=1$	2
$h_1[2-k]$			1	3	3	1					$k=2$	2
$h_1[3-k]$				1	3	3	1				$k=3$	4
$h_1[4-k]$					1	3	3	1			$k=4$	6
$h_1[5-k]$						1	3	3	1		$k=5$	5
$h_1[6-k]$							1	3	3	1	$k=6$	3
$h_1[7-k]$								1	3	3	$k=7$	1

Tabla 2.3. Tabla para el cálculo de $h_2[n]$.

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	k	h_{eq}
$h_2[k]$				1	-1	2	0	1				
$h_1[k]$		1	3	3	1							
$h_1[-k]$	1	3	3	1							$k=0$	1
$h_1[1-k]$		1	3	3	1						$k=1$	2
$h_1[2-k]$			1	3	3	1					$k=2$	2
$h_1[3-k]$				1	3	3	1				$k=3$	4
$h_1[4-k]$					1	3	3	1			$k=4$	6
$h_1[5-k]$						1	3	3	1		$k=5$	5
$h_1[6-k]$							1	3	3	1	$k=6$	3
$h_1[7-k]$								1	3	3	$k=7$	1

Tabla 2.4. Resultado final del cálculo de $h_2[n]$.

Así que $h_2[n]$ se puede escribir como

$$h_2[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-5].$$

c) Para obtener la ecuación en diferencias que describe el comportamiento del sistema equivalente hay que tener en cuenta que

$$y[n] = x[n] * h_{eq}[n],$$
$$y[n] = x[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 6\delta[n-4] + \\ +5\delta[n-5] + 3\delta[n-6] + \delta[n-7]).$$

Por lo tanto se tiene

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + 2x[n-2] + 4x[n-3] + 6x[n-4] + 5x[n-5] + 3x[n-6] + x[n-7].$$

El sistema está compuesto solo por la parte no recurrente, por lo tanto es un filtro de tipo FIR.

Problema 4. (5 PUNTOS)

a) Para obtener $H(e^{j\omega})$ hay que calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de la ecuación en diferencias. Resulta

$$Y(e^{j\omega}) + \tfrac{1}{4}(e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2e^{-j\omega}X(e^{j\omega}),$$

de tal forma que

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{1+2e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

b) La respuesta impulsiva $h[n]$ se encuentra calculando la transformada inversa de la respuesta en frecuencia:

$$h[n] = DFTF^{-1}\left\{H(e^{j\omega})\right\} = DFTF^{-1}\left\{\tfrac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \tfrac{2e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right\} = \\ = \left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(-\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1].$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva. En frecuencia se cumple

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

Donde

$$X(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Entonces se obtiene que

$$Y(e^{j\omega}) = \tfrac{1+2e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \lim_{e^{j\omega}\to -\frac{1}{4}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 + \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = -\tfrac{7}{2},$$

$$B = \lim_{e^{j\omega}\to \frac{1}{4}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = \tfrac{9}{2}.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ será:

$$y[n] = -\tfrac{7}{2}\left(-\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + \tfrac{9}{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n].$$

d) La señal de entrada introducida se puede expresar mediante la ecuación de Euler como la suma de dos sinusoidales complejas:

$$x_2[n] = 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) = (e^{(j\frac{\pi}{2}n)} + e^{(-j\frac{\pi}{2}n)}).$$

La señal de entrada solamente contiene información en dos frecuencias angulares concretas, $\pi/2$ y $-\pi/2$. Por lo tanto, la señal $y[n]$ pedida únicamente podrá contener información en esas mismas frecuencias. Así, la señal de salida $y[n]$ serán las dos mismas sinusoidales complejas de la señal de entrada con una variación en su amplitud y en su fase inicial, producidas por la respuesta en frecuencia del filtro. Para determinar estas variaciones es necesario evaluar la respuesta en frecuencia del filtro en las frecuencias de las dos sinusoides complejas de entrada. Para la frecuencia $\pi/2$ rad/utd,

$$H(e^{j\omega_d}) = H(e^{j\pi/2}) = \frac{1+2e^{-j\pi/2}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}} = \frac{1-2j}{1-j\frac{1}{4}} = \tfrac{24}{17} - j\tfrac{28}{17}.$$

Por lo tanto, el módulo y la fase serán

$$|H(e^{j\pi/2})| = \sqrt{(\tfrac{24}{17})^2 + (-\tfrac{28}{17})^2} = 2{,}1693,$$

$$\Phi_H(e^{j\pi/2}) = \arctan(-\tfrac{28}{24}) = -0{,}8622\,\text{rad}.$$

Para la frecuencia $-\pi/2$ rad/utd,

$$H(e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}) = \tfrac{24}{17} + j\tfrac{28}{17} = 2{,}1693e^{j0{,}8622} = H^*(e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}).$$

Por lo que

$$y[n] = 2{,}1693e^{j\left(\frac{\pi}{2}n - 0{,}8622\right)} + 2{,}1693e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n + 0{,}8622\right)},$$

y, usando la ecuación de Euler,

$$y[n] = 4{,}3386\cos(\tfrac{\pi}{2}n - 0{,}8622).$$

El sistema ha afectado a la amplitud y a la fase de la sinusoide real de entrada.

2.6. Examen 6

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segunda convocatoria, Julio 2013

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 27 de Junio de 2013 Duración: 2:30 h

Problema 1. (3 PUNTOS) A partir de la señal

$$\widehat{x}[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2],$$

se genera la señal periódica

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}[n-4k].$$

a) (2 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ y sus coeficientes c_k.

b) (1 P) Calcula la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ en tiempo discreto de la señal periódica. Representa su espectro en amplitud y fase en el intervalo $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

Problema 2. (2 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \operatorname{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \operatorname{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (1,75 P) Considera las muestras $x_1 = 0,42$ V y $x_2 = -0,09$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (0,25 P) Suponiendo que el margen dinámico sea $2X_m = 6\sigma_x$, es decir 6 veces el valor cuadrático medio de la señal. Calcula la relación señal a ruido de cuantificación utilizando la siguiente formula:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB.}$$

Problema 3. (2 PUNTOS) Dadas las respuestas impulsivas de dos sistemas,

$$h_1[n] = u[n+1],$$

$$h_2[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-4]).$$

a) (0,5 P) Indica si la respuesta $h_1[n]$ es estable y causal.

b) (1,5 P) Calcula $h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]$.

Problema 4. (3 PUNTOS) Se pretende diseñar un sistema LTI que tenga la propiedad de que si la entrada es

$$x[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1],$$

la salida es

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n].$$

a) (0,5 P) Determina la respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ del sistema.

b) (1,5 P) Calcula su respuesta al impulso $h[n]$.

c) (1 P) Calcula cuál será la respuesta del sistema $y[n]$ ante la señal de entrada

$$x[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{4}\delta[n-1].$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segunda convocatoria, Julio 2013

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 27 de Junio de 2013 Duración: 2:30 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (3 PUNTOS)

a) A partir de

$$\widehat{x}[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

se forma la señal

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{x}[n-4k],$$

representada en la figura 2.13.

La señal $x[n]$ es periódica de periodo $N_0 = 4$. Su DSF discreto será de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi kn}{2}}.$$

Los valores de los coeficientes c_k se calculan con la ecuación de análisis del DSF discreto

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{\pi kn}{2}} \qquad \text{con} \qquad k = 0, \ldots, 3.$$

Sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{\pi kn}{2}} &= \frac{1}{4}(x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi k}{2}} + x[2]e^{-j\pi k} + x[3]e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) = \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) \qquad \text{con} \qquad k = 0, \ldots, 3. \end{aligned}$$

O bien,

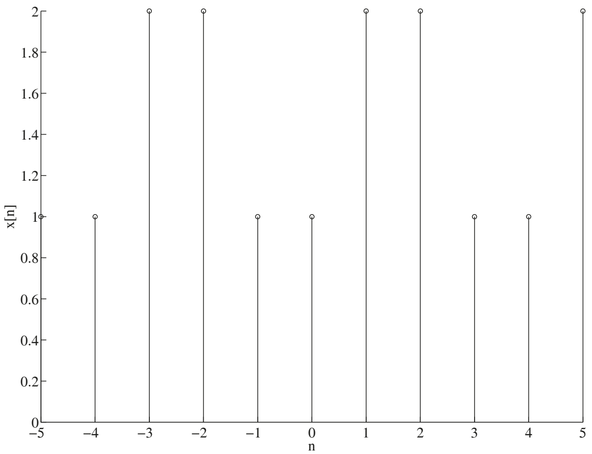

Figura 2.13. La señal $x[n]$ periódica.

$$c_k = \tfrac{1}{4}(1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) = \tfrac{1}{4}(1 + 2(-j)^k + 2(-1)^k + (j)^k) \quad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Particularizando para cada valor del índice k, se tiene:

$$c_0 = \tfrac{1}{4}(1 + 2 + 2 + 1) = \tfrac{6}{4} = 1{,}5,$$

$$c_1 = \tfrac{1}{4}(1 - 2j - 2 + j) = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{j}{4},$$
$$|c_1| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{-0{,}25}{-0{,}25}\right) = \tfrac{\pi}{4} + \pi = \tfrac{5\pi}{4} = \tfrac{5\pi}{4} - 2\pi = -\tfrac{3\pi}{4} \text{ rad},$$

$$c_2 = \tfrac{1}{4}(1 - 2 + 2 - 1) = 0,$$

$$c_3 = c_1^* = \tfrac{1}{4}(1 + 2j - 2 - j) = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{j}{4},$$
$$|c_3| = |c_1| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c3} = -\Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{0{,}25}{-02{,}5}\right) = -\tfrac{\pi}{4} + \pi = \tfrac{3\pi}{4} \text{ rad}.$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi k n}{2}} = c_0 + c_1 e^{j\frac{\pi n}{2}} + c_2 e^{j\pi n} + c_3 e^{j\frac{3\pi n}{2}} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{4} e^{-j\frac{3\pi}{4}} e^{j\frac{\pi n}{2}} + \tfrac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{3\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi n}{2}}.$$

b) A partir de la expresión de $x[n]$ en forma de desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto, y conocido el par de transformadas siguientes,

$$Ae^{j(\omega_d n+\phi_0)} \Longrightarrow 2\pi Ae^{j\phi_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_d-2\pi k),$$

se obtiene el espectro de amplitud y de fase representado en la figura 2.14 entre $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$ y cuya expresión matemática será

$$X(e^{j\omega}) = 3\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-2\pi k)+$$
$$+\pi\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\tfrac{\pi}{2}-2\pi k)+\pi\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\tfrac{3\pi}{2}-2\pi k).$$

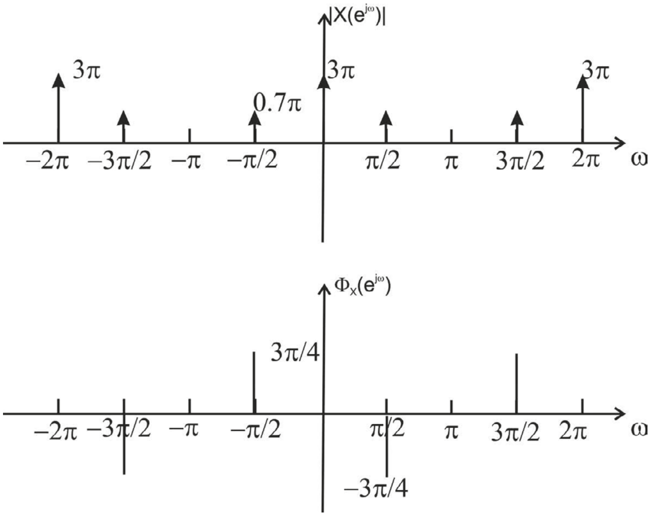

Figura 2.14. Espectro de amplitud y de fase de $x[n]$ en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

Problema 2. (2 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V; las muestras x_1 y x_2 caen las dos en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max}-x_{min}}{L} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V}.$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right)\cdot\Delta\cdot\text{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}42|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \left(13+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} \text{ V},$$
$$x_{q1} = 0{,}42187 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1}-x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}42187-0{,}42|}{|0{,}42|}100 = 0{,}44\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}42|}{0{,}03125}\right]\right) = 13.$$

Por lo que le corresponde a esta muestra la secuencia de bits: 01101.
Para la segundo muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right)\cdot\Delta\cdot\text{sign}(x_2) = \left(E\left[\frac{|-0{,}09|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32}(-1) = \left(2+\frac{1}{2}\right)\frac{-1}{32} \text{ V},$$
$$x_{q2} = -0{,}07812 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}07812-(-0{,}09)|}{|0{,}09|}100 = 13{,}2\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 porque la muestra es negativa y la magnitud del nivel posible será $N = 2$. Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 10010.

b) Siendo un cuantificador a 5 bits, con $2X_m = 6\sigma_x$ la relación señal a ruido de cuantificación será

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02\cdot(b-1)+10,8-20\cdot\log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) = 6{,}02(5-1)+10{,}8-20\cdot\log(3) = 25{,}34 \text{ dB}.$$

Problema 3. (2 PUNTOS)

a) El sistema $h_1[n]$ es no causal ya que es distinto de cero para $n < 0$. Además no es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mid h_1[n] \mid = \sum_{n=1}^{+\infty} \mid u[n+1] \mid = \infty.$$

b) Para realizar la convolución hay que tener en cuenta que se puede expresar $h_2[n]$ como

$$h_2[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-4]) = \delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1] + \tfrac{1}{4}\delta[n-2] + \tfrac{1}{8}\delta[n-3].$$

Por lo tanto

$$h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n] = u[n+1] * \left[\delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1] + \tfrac{1}{4}\delta[n-2] + \tfrac{1}{8}\delta[n-3]\right].$$

Utilizando las propiedades del impulso unidad, tendremos

$$\begin{aligned} h_{eq}[n] &= u[n+1] * \left[\delta[n] + \tfrac{1}{2}\delta[n-1] + \tfrac{1}{4}\delta[n-2] + \tfrac{1}{8}\delta[n-3]\right] = \\ &= u[n+1] + \tfrac{1}{2}u[n] + \tfrac{1}{4}u[n-1] + \tfrac{1}{8}u[n-2]. \end{aligned}$$

La duración de esta convolución será infinita, y el instante inicial será -1. En la tabla 2.5 se muestran los valores de $h_{eq}[n]$ (para $n = -1, 0, 1, 2, 3, 4...$) para agrupar términos comunes.

n	-1	0	1	2	3	4	...
$u[n+1]$	1	1	1	1	1	1	...
$\frac{1}{2}u[n]$		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	...
$\frac{1}{4}u[n-1]$			0,25	0,25	0,25	0,25	...
$\frac{1}{8}u[n-2]$				0,125	0,125	0,125	...
$h_{eq}[n]$	1	3/2	7/4	15/8	15/8	15/8	...

Tabla 2.5. Tabla para el calculo de $h_{eq}[n]$.

Finalmente se puede escribir $h_{eq}[n]$ como

$$h_{eq}[n] = \delta[n+1] + \tfrac{3}{2}\delta[n] + \tfrac{7}{4}\delta[n-1] + \tfrac{15}{8}u[n-2].$$

Problema 4. (3 PUNTOS)

a) Para obtener $H(e^{j\omega})$ hay que calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de las señales $x[n]$ y $y[n]$:

$$X(e^{j\omega}) = DTFT\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]\right\} = \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \tfrac{1}{4}\tfrac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}},$$

$$Y(e^{j\omega}) = DTFT\left\{\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]\right\} = \tfrac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Ahora se puede calcular la respuesta en frecuencia como

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}.$$

b) La respuesta impulsiva $h[n]$ se encuentra calculando la transformada inversa $DFTF^{-1}$ de la expresión anterior, por lo tanto hay que reescribir $H(e^{j\omega})$ en fracciones simples,

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \tfrac{A}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \tfrac{B}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})},$$

con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{3}} H(e^{j\omega})\cdot(1-\tfrac{1}{3}e^{-j\omega}) = -2,$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{4}} H(e^{j\omega})\cdot(1-\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = 3.$$

Finalmente, la transformada inversa de $H(e^{j\omega})$ será:

$$h[n] = DTFT^{-1}\left\{\tfrac{-2}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \tfrac{3}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}\right\} = -2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n].$$

c) La solución más rápida para obtener $y[n]$ ante la entrada $x[n]$ es operar en el dominio de la frecuencia y luego realizar una transformada inversa. El espectro de la señal de entrada es

$$X(e^{j\omega}) = 1 - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega},$$

y el de la señal de salida,

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \tfrac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})} = \tfrac{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} = \tfrac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} - \tfrac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ será:

$$y[n] = DTFT^{-1}\left\{\tfrac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} - \tfrac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})}\right\} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1].$$

2.7. Examen 7

SEÑALES Y SISTEMAS

Primer Parcial, curso 2013-14

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 29 de Octubre de 2013 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5,5 PUNTOS) Sea la secuencia

$$x[n] = 2 + 3\cos\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

a) (1 P) Calcula el periodo N_0.

b) (3,5 P) Calcula los coeficientes c_k de su desarrollo en serie de Fourier discreto.

c) (1 P) Representa el espectro de amplitud y de fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2. (4,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \operatorname{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \operatorname{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (3 P) Considera la muestra $x_1 = 0{,}35$ V que se ha obtenido muestreando la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}4\pi t - \frac{\pi}{3})$, y la muestra $x_2 = -0,53$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1 P) Considera ahora estos dos otros cuantificadores uniformes, cuyas características son

2) $bits = 4, \qquad 2X_m = 1.$

3) $bits = 6, \qquad 2X_m = 2.$

Entre las tres opciones de cuantificación (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

c) (0,5 P) Suponiendo que el margen dinámico del cuantificador sea $2X_m = 6\sigma_x$, es decir 6 veces el valor cuadrático medio de la señal, y se exige un $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 70$ dB. ¿cuál es el mínimo número de niveles que asegura este requerimiento?

Emplea la siguiente fórmula de la relación señal a ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB}.$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Primer Parcial, curso 2013-14

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 29 de Octubre de 2013 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (5,5 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es la suma de tres sinusoides más la componente continua. Hay que calcular y averiguar las frecuencias de las tres sinusoides. Para la primera de ellas:

$$\omega_{d1} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad/utd}, \quad f_{d1} = \frac{\omega_{d1}}{2\pi} = \frac{3}{4} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia es racional, la primera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{01} = \text{mín}\{\frac{k}{f_{d1}}\} = \text{mín}\{\frac{k}{\frac{3}{4}}\} = 4 \text{ utd.}$$

Para la segunda sinusoide:

$$\omega_{d2} = \frac{11\pi}{4} \text{ rad/utd}, \quad f_{d2} = \frac{\omega_{d2}}{2\pi} = \frac{11}{8} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia también es racional, la segunda sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{02} = \text{mín}\{\frac{k}{f_{d2}}\} = \text{mín}\{\frac{k}{\frac{11}{8}}\} = 8 \text{ utd.}$$

Para la tercera:

$$\omega_{d3} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad/utd}, \quad f_{d2} = \frac{\omega_{d2}}{2\pi} = \frac{7}{8} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia también es racional la tercera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{03} = \text{mín}\{\frac{k}{f_{d3}}\} = \text{mín}\{\frac{k}{\frac{7}{8}}\} = 8 \text{ utd.}$$

La señal $x[n]$ es por tanto periódica de periodo:

$$N_0 = M.C.M.\{N_{01}, N_{02}, N_{03}\} = 8 \text{ utd.}$$

b) Para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$ es más cómodo transformar su expresión hasta obtener una suma de sinusoides complejas. La señal $x[n]$ es una suma de señales coseno:

$$x[n] = 2 + 3\cos\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Expresamos ahora cada señal coseno como suma de sinusoides complejas:

$$x[n] = 2 + \frac{3}{2}e^{j\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{3}{2}e^{-j\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{2}e^{j(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{11\pi n}{8} - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{4}e^{j(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4})} + \frac{1}{4}e^{-j(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4})}.$$

El DSF de $x[n]$ es de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{7} c_k e^{j\frac{\pi kn}{4}}.$$

Comparando ambas expresiones de $x[n]$ se obtienen los coeficientes c_k:

$$c_0 = 2,$$
$$\frac{3}{2}e^{j\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{4}} \Leftrightarrow k = 6;\ c_6 = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}},$$
$$\frac{3}{2}e^{-j\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{4}} \Leftrightarrow k = -6;\ k' = k + N_0 = -6 + 8 = 2;\ c_2 = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{2}e^{j(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{4}} \Leftrightarrow k = 11;\ k'' = k - N_0 = 11 - 8 = 3;\ c_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$
$$\frac{1}{2}e^{-j(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{4}} \Leftrightarrow k = -11;\ k' = k + 2N_0 = -11 + 16 = 5;\ c_5 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{1}{4}e^{j(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{4}} \Leftrightarrow k = 7;\ c_7 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}},$$
$$\frac{1}{4}e^{-j(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{4}} \Leftrightarrow k = -7;\ k' = k + N_0 = -7 + 8 = 1;\ c_1 = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

El resto de coeficientes son cero.

c) Los respectivos espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta se representan en la figura 2.15.

Problema 2. (4,5 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V; las muestras x_1 y x_2 caen la primera en la zona granular y la segunda en zona de saturación. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

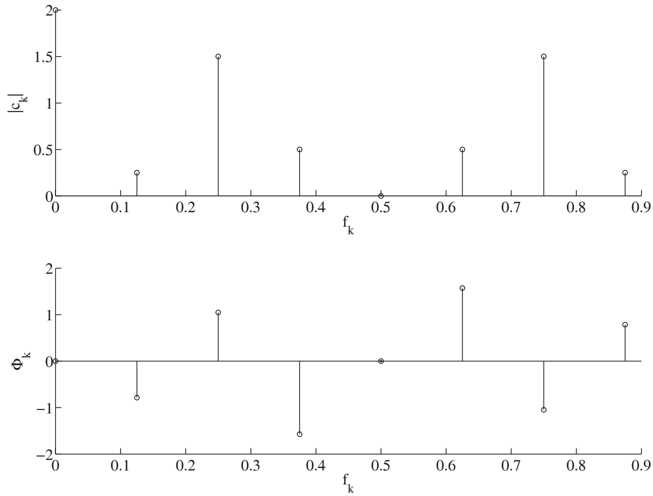

Figura 2.15. Espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta.

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}35|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \left(11 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} \text{ V,}$$
$$x_{q1} = 0{,}35937 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}35937 - 0{,}35|}{|0{,}35|}100 = 2{,}7\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}35|}{0{,}03125}\right]\right) = 11.$$

Por lo que le corresponde a esta muestra la palabra de código: 01011.
Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x) = (\frac{(32-1)}{2})\frac{1}{32}(-1) = \frac{-31}{64} = -0{,}48437 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}48437+0{,}53|}{|-0{,}53|}100 = 8{,}6\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud el máximo nivel posible $N2 = -15$. Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 11111.

b) El escalón de cuantificación de cada cuantificador es: $\Delta_1 = \frac{1}{32} = 0{,}03125\,V, \quad \Delta_2 = \frac{1}{16} = 0{,}0625\,V, \quad \Delta_3 = \frac{1}{32} = 0{,}03125\,V.$
Sin embargo el margen dinámico del tercer cuantificador varía entre -1 y 1 V. Por lo tanto la mejor opción es la primera, ya que se ajusta mejor a las características de la señal $x(t)$ ($2X_m = 1$).

c) Aplicando la formula

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) > 70\,\text{dB},$$

y teniendo en cuenta que $b = 5$ y $2X_m = 6\sigma_x$, obtenemos

$$b > 12{,}4 = 13,$$
$$2^b = 2^{13} = 8192 \text{ niveles}.$$

2.8. Examen 8

SEÑALES Y SISTEMAS

Segundo Parcial, curso 2013-14

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2013 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura 2.16,

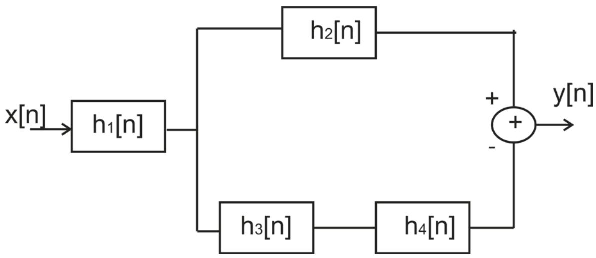

Figura 2.16. Sistema LTI.

siendo

$$h_1[n] = \left(-\tfrac{1}{6}\right)^n u[n],$$

$$h_2[n] = 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2],$$

$$h_3[n] = 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-3]),$$

$$h_4[n] = u[n-1].$$

a) (4 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$.

b) (1 P) Indica si $h_1[n]$ es estable y causal.

Problema 2. (5 PUNTOS) Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + \tfrac{1}{2}y[n-1],$$

a) (0,5 P) Dibuja el diagrama de bloques del sistema.

b) (0,5 P) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) (2,5 P) Calcula la salida $y1[n]$ ante la señal de entrada $x1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.

d) (1,5 P) Encuentra la salida $y2[n]$ ante la señal de entrada $x2[n] = 4 \cdot e^{j(\frac{\pi n}{2}+1{,}249)}$.

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segundo parcial, curso 2013-14

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 18 de Diciembre de 2013 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (5 PUNTOS)

a) Se procede a simplificar el sistema completo poco a poco. En primer lugar:

$$h_{eq1}[n] = h_3[n] * h_4[n],$$

donde $h_3[n]$ se puede escribir en función de señales tipo impulso unidad:

$$h_3[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

Por lo tanto,

$$h_{eq1}[n] = h_3[n]*h_4[n] = u[n-1]*(4\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]) = 4u[n-1]+2u[n-2]+u[n-3].$$

Sacando los términos que se encuentran en el mismo instante de tiempo discreto, se obtiene también

$$h_{eq1}[n] = h_3[n] * h_4[n] = 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 7u[n-3].$$

El sistema ahora a considerar será el paralelo entre $h_2[n]$ y $h_{eq1}[n]$, es decir la diferencia entre estas dos respuestas:

$$h_{eq2}[n] = h_2[n] - h_{eq1}[n] = 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] - (4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 7u[n-3]) = \\ = -7u[n-3].$$

El último paso es considerar las dos respuestas $h_1[n]$ y $h_{eq2}[n]$ en serie, siendo esta última convolución de duración infinita. Gráficamente se puede obtener que el resultado de esta convolución es diferente de cero a partir de $n \geq 3$ (invirtiendo $h_{eq2}[n]$):

$$h_t[n] = h_1[n] * h_{eq2}[n] = \begin{cases} 0, & n < 3, \\ \sum_{k=0}^{-3+n} h_1[k] \cdot h_{eq2}[n-k], & n \geq 3. \end{cases}$$

$$h_t[n] = h_1[n] * h_{eq2}[n] = \begin{cases} 0, & n < 3, \\ \sum_{k=0}^{n-3} -7 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^k = -7\frac{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-2}}{\frac{7}{6}}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Es decir

$$h_t[n] = -6\left(1 - \left(-\tfrac{1}{6}\right)^{n-2}\right) u[n-3].$$

b) El sistema es causal, ya que $h_1[n] = 0$ para $n < 0$, y es estable, ya que aunque es de duración infinita la suma de sus valores tiende a un valor finito:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h_1[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{6}\right)^n = \tfrac{6}{5} < \infty.$$

Problema 2. (5 PUNTOS)

a) El diagrama de bloques del sistema es el de la figura 2.17.

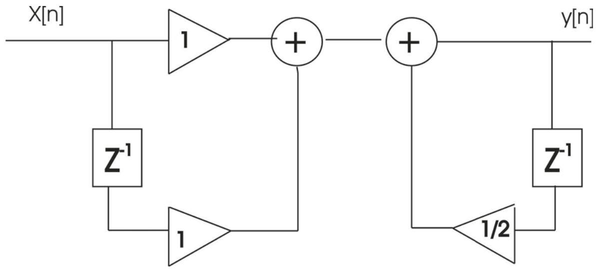

Figura 2.17. Diagrama de bloques del sistema.

b) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) - \tfrac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega}.$$

Así que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva. En frecuencia se cumple entonces

$$Y1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X1(e^{j\omega}),$$

donde

$$X1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Se obtiene la salida

$$Y1(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir la transformada de Fourier de la salida, hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y1(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y1(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \frac{1+2}{1-\frac{1}{2}} = 6,$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{4}} Y1(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = \frac{1+4}{1-4\frac{1}{2}} = -5.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y1(e^{j\omega})$ es:

$$y1[n] = 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 5\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n].$$

d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x2[n] = A\, e^{j(\omega_d n+\phi_0)},$$

la respuesta será

$$y2[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En nuestro caso:

$$|H(e^{j\pi/2})| = \frac{1+e^{-j\pi/2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}} = |\tfrac{2}{5} - j\tfrac{6}{5}| = 1{,}265,$$

$$\Phi_H(e^{j\pi/2}) = \arctan(\tfrac{-6/5}{2/5}) = \arctan(-3) = -1{,}249 \text{ rad.}$$

Por lo tanto,

$$A' = A \cdot |H(e^{j\pi/2})| = 4 \cdot 1{,}265 = 5{,}06,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\pi/2}) = 1{,}249 - 1{,}249 = 0 \text{ rad.}$$

Finalmente, la respuesta del sistema a la señal $x2[n]$ será

$$y2[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n + \phi_0'\right)} = 5{,}06 \cdot e^{j(\pi/2n)}.$$

El sistema amplifica la amplitud de la sinusoide y cancela su fase inicial.

2.9. Examen 9

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación de un parcial, Enero 2014

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 17 de Enero de 2014 Duración: 1:00 h

Problema 1. (5,5 PUNTOS) A partir de la señal

$$\widehat{x}[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3],$$

se genera la señal periódica discreta

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}[n-4k].$$

a) (0,5 P) Calcula el periodo N_0 y el valor medio de la señal en este periodo.

b) (4 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ y sus coeficientes c_k.

c) (1 P) Representa el espectro en amplitud y fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2. (4,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 6 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (3,75 P) Considera las muestras $x_1 = 0,06$ V, $x_2 = -0,472$ V y $x_3 = 0,782$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (0,75 P) Suponiendo que el margen dinámico del cuantificador sea $2X_m = 5\sigma_x$, es decir 5 veces el valor cuadrático medio de la señal, si se exige un $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 85$ dB, ¿cuál es el mínimo número de niveles que asegura este requerimiento?
Emplea la siguiente fórmula de la relación señal a ruido de cuantificación:

$$\left(\tfrac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\tfrac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB}.$$

Problema 3. (4,5 PUNTOS) Considera una asociación en cascada (serie) de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI). Se sabe que la respuesta al impulso del primer sistema es

$$h_1[n] = \prod\left(\frac{n+1}{4}\right)$$

y la respuesta al impulso equivalente del sistema global es

$$h_{eq}[n] = 2\delta[n+3] + \delta[n+2] + 5\delta[n+1] + 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] - \delta[n-3] + 2\delta[n-4].$$

a) $(2,5$ P) Calcula la respuesta al impulso del segundo sistema, $h_2[n]$.

b) $(0,5$ P) Estudia la causalidad y estabilidad del primer sistema LTI, $h_1[n]$.

c) $(1,5$ P) Calcula la convolución entre $h_1[n]$ y $x[n] = 2^n\left(u[n] - u[n-3]\right)$.

Problema 4. (5,5 PUNTOS) Considera el sistema:

$$y[n] = \tfrac{1}{2}y[n-1] + bx[n] - \tfrac{1}{4}x[n-1]$$

a) (1 P) Calcula su respuesta en frecuencia y después determina la constante b para que $H\left(e^{j\cdot 0}\right) = 1$.

b) (0,5 P) Representa el diagrama de bloques del sistema. ¿Qué tipo de filtro es? ¿IIR o FIR?

c) (2 P) Supón ahora que $b = \frac{3}{4}$. Calcula la respuesta ante la señal de excitación

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n].$$

d) (2 P) Para $b = \frac{3}{4}$. Calcula la respuesta ante la señal de entrada

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right).$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen recuperación de un parcial, Enero 2014

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 17 de Enero de 2014 Duración: 1:00 h

SOLUCIÓN

Problema 1. ($5{,}5$ PUNTOS)

a) A partir de

$$\widehat{x}[n] = 4\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3],$$

se forma la señal

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{x}[n-4k],$$

que se ha representado en la figura 2.18.

La señal $x[n]$ es periódica de periodo $N_0 = 4$ de valor medio $c_0 = \frac{4+3+2+1}{4} = 2{,}5$.

b) Su DSF discreto será de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi kn}{2}}.$$

Los valores de los coeficientes c_k se calculan con la ecuación de análisis del DSF discreto:

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi kn}{2}} \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{\pi kn}{2}} = \frac{1}{4}(x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi k}{2}} + x[2]e^{-j\pi k} + x[3]e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) = \\ &= \frac{1}{4}(4 + 3e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 3. \end{aligned}$$

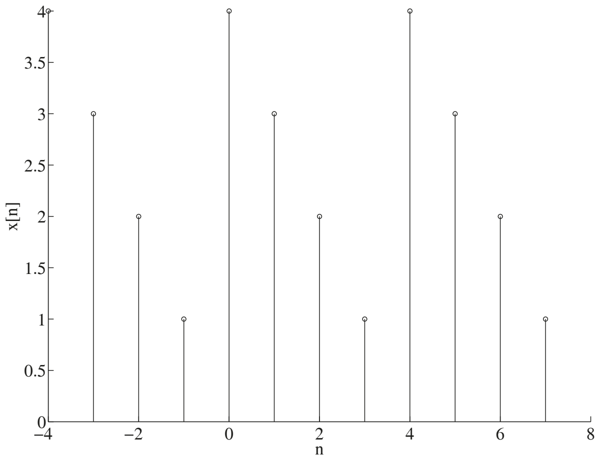

Figura 2.18. La señal $x[n]$.

O bien,

$$c_k = \frac{1}{4}(4 + 3e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) = \frac{1}{4}(4 + 3(-j)^k + 2(-1)^k + (j)^k) \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Particularizando para cada valor del índice k, se tiene

$$c_0 = \frac{1}{4}(4 + 3 + 2 + 1) = \frac{10}{4} = 2{,}5,$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(4 - 3j - 2 + j) = \frac{1}{2} - \frac{j}{2},$$
$$|c_1| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{-0{,}5}{0{,}5}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad},$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(4 - 3 + 2 - 1) = 0{,}5,$$

$$c_3 = c_1^* = \frac{1}{2} + \frac{j}{4},$$
$$|c_3| = |c_1| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \Phi_{c3} = -\Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{0{,}5}{0{,}5}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi k n}{2}} = c_0 + c_1 e^{j\frac{\pi n}{2}} + c_2 e^{j\pi n} + c_3 e^{j\frac{3\pi n}{2}} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi n}{2}} + \frac{1}{2} e^{j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi n}{2}}.$$

c) Los respectivos espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta se representan en la figura 2.19.

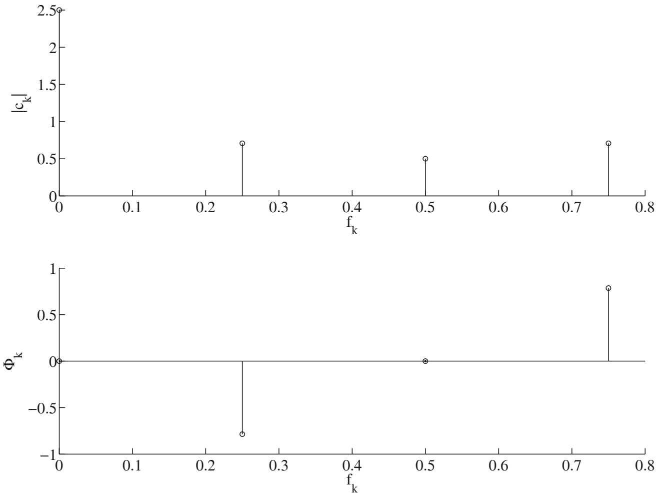

Figura 2.19. Espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta.

Problema 2. (4,5 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son: $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular y la muestra x_3 en la zona de saturación. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^6 = 64 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{1}{64} = 0{,}015625 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 5 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\tfrac{|x_1|}{\Delta}\right] + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x_1) = \left(E\left[\tfrac{|0{,}06|}{0{,}015625}\right] + \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{64} = \left(3 + \tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{64}\text{ V},$$
$$x_{q1} = 0{,}05469\text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \tfrac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|}100 = \tfrac{|0{,}06 - 0{,}05469|}{|0{,}06|}100 = 8{,}85\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\tfrac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\tfrac{|0{,}06|}{0{,}015625}\right]\right) = 3.$$

Por lo que le corresponde a esta muestra: 000011.
Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\tfrac{|x_2|}{\Delta}\right] + \tfrac{1}{2})\Delta \cdot \mathrm{sign}(x_2) = (E[\tfrac{|-0{,}472|}{0{,}015625}] + \tfrac{1}{2})\tfrac{1}{64}(-1) = (30 + \tfrac{1}{2})\tfrac{-1}{64}\text{ V},$$
$$x_{q2} = -0{,}47656\text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \tfrac{|x_{q2} - x_2|}{|x_2|}100 = \tfrac{|0{,}47656 - (-0{,}472)|}{|0{,}472|}100 = 0{,}97\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = \left(E\left[\tfrac{|x_2|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\tfrac{|-0{,}472|}{0{,}015625}\right]\right) = 30.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 111110.

Para la tercera muestra tenemos:

$$x_{q3} = Q(x_3) = \tfrac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot sign(x) = \tfrac{63}{128} = 0{,}49219\text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr3} = \tfrac{|x_{q3} - x_3|}{|x_3|}100 = \tfrac{|0{,}782 - (-0{,}49219)|}{|0{,}782|}100 = 37{,}6\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud será el nivel más alto que corresponde la secuencia de bits: 011111.

b) Aplicando la fórmula

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) > 85\,\text{dB},$$

y teniendo en cuenta que $b = 6$ y $2X_m = 5\sigma_x$, se obtiene

$$b > 14{,}64 = 15,$$
$$2^b = 2^{15} = 32768 \quad \text{niveles.}$$

Problema 3. (4,5 PUNTOS)

a) Una forma de obtener $h_2[n]$ es realizar una tabla y calcular la convolución desplazando $h_1[n]$. Las incógnitas serán los valores de $h_2[n]$, ya que se conocen los valores de la respuesta final $h_{eq}[n]$. Además $h_2[n]$ tendrá que empezar en el instante $n = -2$ y acabar en el instante $n = 2$ ya que $h_{eq}[n]$ está comprendida entre los instantes $n = -3$ y $n = 4$:

$$n_{INh_2} = n_{INh_{eq}} - n_{INh_1} = -3 - (-1) = -2,$$

$$n_{FIh_2} = n_{FIh_{eq}} - n_{FIh_1} = 4 - 2 = 2.$$

Por lo tanto se tiene la convolución mostrada en la tabla 2.6.

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	k	h_{eq}
$h_2[k]$			?	?	?	?	?					
$h_1[k]$				1	1	1	1					
$h_1[-3-k]$	1	1	1								$k=-3$	2
$h_1[-2-k]$	1	1	1	1							$k=-2$	1
$h_1[-1-k]$		1	1	1	1						$k=-1$	5
$h_1[-k]$			1	1	1	1					$k=0$	2
$h_1[1-k]$				1	1	1	1				$k=1$	2
$h_1[2-k]$					1	1	1	1			$k=2$	3
$h_1[3-k]$						1	1	1	1		$k=3$	-1
$h_1[4-k]$							1	1	1	1	$k=4$	2

Tabla 2.6. Tabla para el calculo de $h_2[n]$.

Después de realizar los cálculos correspondientes, se obtendrá el resultado que se puede ver en la tabla 2.7. Expresado en función de señales impulsos unidad,

$$h_2[n] = 2\delta[n+2] - \delta[n+1] + 4\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2].$$

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	k	h_{eq}
$h_2[k]$			2	-1	4	-3	2					
$h_1[k]$				1	1	1	1					
$h_1[-3-k]$	1	1	1								$k=-3$	2
$h_1[-2-k]$	1	1	1	1							$k=-2$	1
$h_1[-1-k]$		1	1	1	1						$k=-1$	5
$h_1[-k]$			1	1	1	1					$k=0$	2
$h_1[1-k]$				1	1	1	1				$k=1$	2
$h_1[2-k]$					1	1	1	1			$k=2$	3
$h_1[3-k]$						1	1	1	1		$k=3$	-1
$h_1[4-k]$							1	1	1	1	$k=4$	2

Tabla 2.7. Resultado final para $h_2[n]$.

b) El sistema $h_1[n]$ no es causal, ya que $h_1[n] \neq 0$ por $n < 0$, pero sí es estable, ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} | h_1[n] |= \sum_{n=-1}^{2} | h_1[n] |= 4 < \infty.$$

c) La señal $x[n]$ se puede escribir como

$$x[n] = 2^n \left(u[n] - u[n-3]\right) = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2].$$

Por lo tanto, la solución de la convolución será

$$\begin{aligned} y[n] = h_1[n] * x[n] &= (\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]) * x[n] = \\ &= x[n+1] + x[n] + x[n-1] + x[n-2]. \end{aligned}$$

Substituyendo los valores de $x[n]$ y sumando términos en común, se llega a

$$y[n] = h_1[n] * x[n] = \delta[n+1] + 3\delta[n] + 7\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + 6\delta[n-3] + 4\delta[n-4].$$

Problema 4. (5,5 PUNTOS)

a) Aplicando la DTFT sobre la ecuación en diferencias y las propiedades de esta transformada, se llega a que

$$Y(e^{j\omega}) = bX(e^{j\omega}) - \tfrac{1}{4}e^{j\omega}X(e^{j\omega}) + \tfrac{1}{2}e^{j\omega}Y(e^{j\omega}),$$

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{b-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

De la condición de que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$, cuando la pulsación $\omega = 0$ rad/utd, se obtiene que el valor de b:

$$H(e^{j\cdot 0}) = \frac{b-0{,}25}{1-0{,}5\cdot 1} = 1 \Longrightarrow b = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

b) El diagrama de bloques se obtiene a partir de la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-1].$$

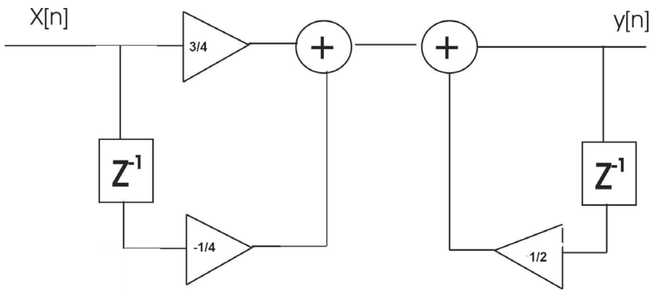

Figura 2.20. Diagrama de bloque del sistema.

Como se puede ver en la figura 2.20, el filtro es un filtro IIR ya que tiene parte recurrente.

c) En frecuencia tenemos que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

con

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}},$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}.$$

Por lo tanto

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir el espectro de la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \tfrac{5}{12},$$

$$B = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{5}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{5}e^{-j\omega}) = \tfrac{1}{3}.$$

se puede entonces expresar

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ es:

$$y[n] = \tfrac{5}{12}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n].$$

d) La señal de entrada introducida se puede expresar, mediante la ecuación de Euler, como la suma de dos sinusoidales complejas:

$$x_2[n] = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}n\right) = \tfrac{1}{2}(e^{(j\frac{\pi}{6}n)} + e^{(-j\frac{\pi}{6}n)}).$$

La señal de entrada solamente contiene información en dos frecuencias angulares concretas, en $\pi/6$ y $-\pi/6$. Por lo tanto, la señal $y[n]$ pedida únicamente podrá contener información en esas mismas frecuencias. Así, la señal de salida $y[n]$ será la suma de esas mismas sinusoidales complejas de la señal de entrada con una variación en su amplitud y en su fase inicial producidas por la respuesta en frecuencia del filtro. Para determinar estas variaciones es necesario evaluar la respuesta en frecuencia del filtro en las frecuencias de las dos sinusoides de entrada:

$$H(e^{j\cdot\frac{\pi}{6}}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}} = 0{,}869 - j0{,}1628 = 0{,}88e^{-j0{,}185},$$

$$H(e^{-j\cdot\frac{\pi}{6}}) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{6}}}{1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}} = 0{,}869 + j0{,}1628 = 0{,}88e^{j0{,}185}.$$

Por lo que:

$$y[n] = 0{,}44e^{j\left(\frac{\pi}{6}n-0{,}185\right)} + 0{,}44e^{-j\left(\frac{\pi}{6}n+0{,}83\right)},$$

y, usando la ecuación de Euler,

$$y[n] = 0{,}88\cos(\tfrac{\pi}{6}n - 0{,}185).$$

2.10. Examen 10

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segunda convocatoria, Julio 2014

Grado en Ingeniería multimedia

Fecha: 30 de Junio de 2014 Duración: 2:30 h

Problema 1. (3 PUNTOS) Sea la secuencia

$$x[n] = 2 + \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi n}{3}\right) + \cos\left(\frac{17\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right).$$

a) (1,5 P) Calcula los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto.

b) (1,0 P) Calcula la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ en tiempo discreto. Representa su espectro en amplitud y fase en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

c) (0,5 P) Obtén la expresión completa de la respuesta $y[n]$ a la señal $x[n]$ de un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$ se muestra en la figura 2.21:

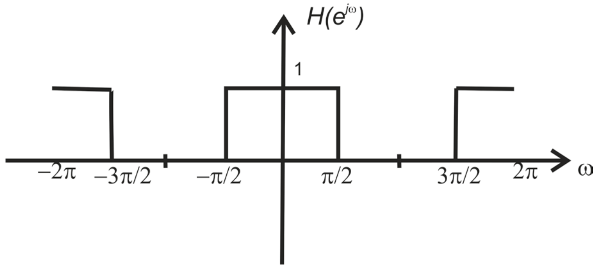

Figura 2.21. Respuesta en frecuencia de $H(e^{j\omega})$.

Problema 2. (2 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (1,5 P) Considera las muestras $x_1 = 0,08$ V y $x_2 = -0,42$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (0,5 P) Suponiendo que el margen dinámico sea $2X_m = 4\sigma_x$, es decir 4 veces el valor cuadrático medio de la señal, si se exige un $\left(\frac{S}{N}\right)_q > 80$ dB, ¿cuál es el mínimo número de niveles que asegura este requerimiento?

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB}.$$

Problema 3. (2 PUNTOS) Dado el sistema LTI de la figura 2.22,

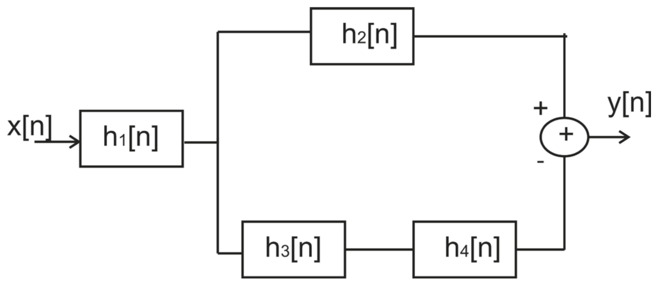

Figura 2.22. Diagrama del sistema LTI.

siendo,

$$h_1[n] = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-4]),$$

$$h_2[n] = (n+1)u[n],$$

$$h_3[n] = \delta[n+2],$$

$$h_4[n] = u[n-2].$$

a) (1,5 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$.

b) (0,5 P) Indica si $h_2[n]$ es estable y causal.

Problema 4. (3 PUNTOS) Dado el sistema LTI representado en el diagrama de bloques en la figura 2.23.

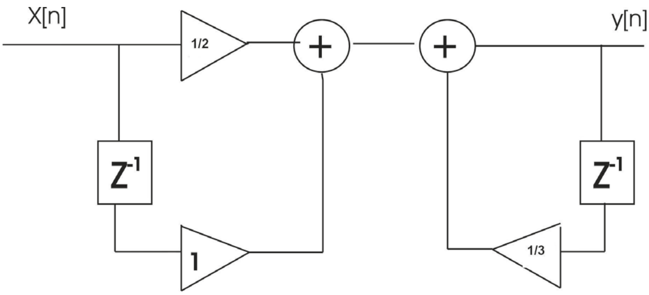

Figura 2.23. Diagrama de bloques del sistema LTI.

a) (0,5 P) Calcula la expresión de la ecuación en diferencias. ¿Qué tipo de filtro es, IIR o FIR?

b) (0,5 P) Calcula $H(e^{j\omega})$.

c) (1P) Calcula la respuesta $y_1[n]$ del sistema a la entrada

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

d) (1 P) Calcula la respuesta $y_2[n]$ del sistema a la entrada

$$x_2[n] = 2e^{j\left(\frac{\pi n}{2}+1{,}429\right)}.$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Examen segunda convocatoria, Julio 2014

Grado en Ingeniería Multimedia

Fecha: 30 de Junio de 2014 Duración: 2:30 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (3 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es la suma de tres sinusoides. Para la primera sinusoide se tiene:

$$\omega_{d1} = \tfrac{\pi}{6} \text{ rad/utd}, \quad f_{d1} = \tfrac{\omega_{d1}}{2\pi} = \tfrac{1}{12} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia lineal es racional, la primera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{01} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d1}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{1}{112}}\} = 12 \text{ utd.}$$

Para la segunda sinusoide:

$$\omega_{d2} = \tfrac{5\pi}{3} \text{ rad/utd}, \quad f_{d2} = \tfrac{\omega_{d2}}{2\pi} = \tfrac{5}{6} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia también es racional, la segunda sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{02} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d2}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{5}{6}}\} = 6 \text{ utd.}$$

Para la tercera:

$$\omega_{d3} = \tfrac{17\pi}{6} = \tfrac{17\pi}{6} - 2\pi = \tfrac{5\pi}{6} \text{ rad/utd}, \quad f_{d3} = \tfrac{\omega_{d2}}{2\pi} = \tfrac{5}{12} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia también es racional, la tercera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{02} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d3}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{5}{12}}\} = 12 \text{ utd.}$$

La señal $x[n]$ es por tanto periódica de periodo:

$$N_0 = M.C.M.\{N_{01}, N_{02}, N_{03}\} = 12 \text{ utd.}$$

Para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$ es más cómodo transformar su expresión hasta obtener una suma de sinusoides complejas. Para ello primero se expresa $x[n]$ en función de cosenos:

$$x[n] = 2 + \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{5\pi n}{3}\right) + \cos\left(\frac{17\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$2 + \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{5\pi n}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Y ahora expresamos cada señal coseno como suma de dos sinusoides complejas:

$$x[n] = 2 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{6}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{6}} + e^{j\left(\frac{5\pi n}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{5\pi n}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

El DSF de $x[n]$ es de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{11} c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}}.$$

Comparando ambas expresiones de $x[n]$ se obtienen los coeficientes c_k:

$$c_0 = 2,$$
$$\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{6}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}} \Leftrightarrow k = 1;\ c_1 = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{6}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}} \Leftrightarrow k = -1;\ k' = k + N_0 = -1 + 12 = 11;\ c_{11} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{5\pi n}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}} \Leftrightarrow k = 10;\ c_{10} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$
$$\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{5\pi n}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}} \Leftrightarrow k = -10;\ k' = k + N_0 = -10 + 12 = 2;\ c_2 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}} \Leftrightarrow k = 5;\ c_5 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}},$$
$$\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{6}} \Leftrightarrow k = -5;\ k' = k + N_0 = -5 + 12 = 7;\ c_7 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

El resto de coeficientes son cero.

b) La transformada de Fourier en tiempo discreto de la señal $x[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right) +$$
$$+2\pi e^{-\frac{j\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{5\pi}{3} - 2\pi k\right) + 2\pi e^{\frac{j\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{5\pi}{3} - 2\pi k\right) +$$
$$+\pi e^{\frac{j\pi}{4}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{5\pi}{6} - 2\pi k\right) + \pi e^{\frac{-j\pi}{4}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \frac{5\pi}{6} - 2\pi k\right).$$

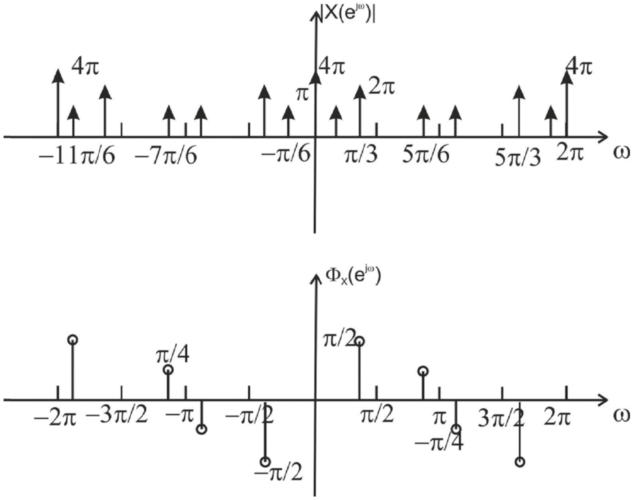

Figura 2.24. Espectro de amplitud y fase de $X(e^{j\omega})$ en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

La figura 2.24 muestra la representación de su espectro de amplitud y de fase en $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$.

c) El sistema es un filtro con pulsación de corte $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ rad/utd. Por lo tanto el filtro eliminará las componentes de $x[n]$ de frecuencia más alta (es decir, mayor que $\omega_c = \frac{\pi}{2}$). en este caso:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - 2\pi k\right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \tfrac{\pi}{6} - 2\pi k\right) +$$
$$+\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \tfrac{\pi}{6} - 2\pi k\right) + 2\pi e^{-\frac{j\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \tfrac{5\pi}{3} - 2\pi k\right) + 2\pi e^{\frac{j\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega + \tfrac{5\pi}{3} - 2\pi k\right).$$

La salida entonces será:

$$x[n] = 2 + \cos\left(\tfrac{\pi n}{6}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{5\pi n}{3}\right).$$

Problema 2. (2 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son: $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max}-x_{min}}{L} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V}.$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}08|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{64} = \frac{5}{32} \text{ V},$$
$$x_{q1} = 0{,}07812 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1}-x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}07812-0{,}008|}{|0{,}008|}100 = 2{,}35\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}08|}{0{,}03125}\right]\right) = 2.$$

Por lo que le corresponde la secuencia binaria: 00010.
Para la segundo muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2})\Delta \cdot \mathrm{sign}(x_2) = (E[\frac{|-0{,}42|}{0{,}03125}] + \frac{1}{2})\frac{1}{32}(-1) = (13 + \frac{1}{2})\frac{-1}{32} = \frac{-27}{64} \text{ V},$$
$$x_{q2} = -0{,}42187 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}42187+0{,}42|}{|0{,}42|}100 = 0{,}44\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|-0{,}42|}{0{,}003125}\right]\right) = 13.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 11011.

b) Teniendo en cuenta los requerimientos exigidos, resulta:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) > 80 \text{ dB}.$$

$$b > 13{,}49, \quad b_{min} = 14,$$
$$2^{b_{min}} = 2^{14} = 16384 \text{ niveles}.$$

Problema 3. (2 PUNTOS)

a) El procedimiento habitual es ir simplificando el sistema calculando primero los sistemas equivalentes más sencillos. Así:

$$h_{eq1}[n] = h_3[n] * h_4[n] = u[n-2] * \delta[n+2] = u[n].$$

El sistema ahora a considerar será el paralelo entre $h_2[n]$ y $h_{eq1}[n]$. La respuesta al impulso equivalente $h_{eq2}[n]$ es:

$$h_{eq2}[n] = h_2[n] - h_{eq1}[n] = (n+1)u[n] - u[n].$$

Esta respuesta al impulso se puede simplificar gráficamente o mediante una tabla, obteniéndose el resultado

$$h_{eq2}[n] = h_2[n] - h_{eq1}[n] = n\, u[n-1],$$

que es equivalente a $h_{eq2}[n] = n\, u[n]$.

El último paso es considerar las dos respuestas $h_1[n]$ y $h_{eq2}[n]$ en serie, donde $h_1[n]$ se puede escribir en función de señales impulso unidad:

$$h_1[n] = 8\delta[n] + 4\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3].$$

Mediante una convolución se obtiene la respuesta al impulso total $h_T[n]$:

$$\begin{aligned} h_T[n] = h_1[n] * h_{eq2}[n] &= n\, u[n] * (8\delta[n] + 4\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3]) = \\ &= 8n\, u[n] + 4(n-1)\, u[n-1] + 2(n-2)\, u[n-2] + (n-3)\, u[n-3]. \end{aligned}$$

Sumando los términos que se encuentran en el mismo instante de tiempo discreto, se logra simplificar un poco la expresión de $h_T[n]$, llegándose a:

$$h_T[n] = 8\delta[n-1] + 20\delta[n-2] + (15n-11)\, u[n-3].$$

b) El sistema es causal, ya que $h_2[n] = 0$ para $n < 0$, y no es estable, ya que el sumatorio de los valores de $|h_2[n]|$ tiende a un valor infinito

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h_2[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, u[n] = \infty.$$

Problema 4. (3 PUNTOS)

a) Del el diagrama de bloques se puede deducir la ecuación en diferencias

$$y[n] = \tfrac{1}{2}x[n] + x[n-1] + \tfrac{1}{3}y[n-1].$$

El filtro es un filtro IIR y su orden es $N = 1$.

b) Para obtener $H(e^{j\omega})$ hay que calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto de la ecuación en diferencias del sistema LTI:

$$Y(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \tfrac{1}{3}(e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}).$$

Por lo tanto,

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva. En el dominio de la frecuencia

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

donde

$$X(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Se obtiene que la transformada de Fourier de la señal de salida es

$$Y(e^{j\omega}) = \tfrac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir $Y(e^{j\omega})$ hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \tfrac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \tfrac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{2}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{2}e^{-j\omega}) = \tfrac{15}{2},$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to\frac{1}{3}} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{3}e^{-j\omega}) = -7.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ es:

$$y[n] = \tfrac{15}{2} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - 7 \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n].$$

d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x[n] = A\, e^{j(\omega_d n + \phi_0)},$$

la respuesta será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n + \phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En nuestro caso

$$A' = 2 \cdot |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 2 \cdot \left| \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}} \right| = 2 \cdot \left| \frac{\frac{1}{2} - j}{1 + j\frac{1}{3}} \right| = 2 \left| \frac{3 - j21}{20} \right| = 2 \cdot 1{,}06 = 2{,}12,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 1{,}429 + \arctan(-7) = 1{,}429 - 1{,}429 = 0\,\text{rad}.$$

Y por lo tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será

$$y[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n + \phi_0'\right)} = 2{,}12 e^{j(\frac{\pi}{2} n)}.$$

CAPÍTULO 3

EJERCICIOS DE EXÁMENES ANTIGUOS

3.1. Examen 1

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 14 de Enero de 2010 Duración: 2:30 h

Problema 1. (2,5 PUNTOS) A partir de la señal

$$\widehat{x}[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

se genera la señal periódica discreta

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}[n-4k].$$

a) (1,5 P) Determina $x[n]$ y calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto.

b) (1 P) Representa gráficamente el módulo y el argumento de los coeficientes de Fourier respecto a la frecuencia discreta.

Problema 2. (2,5 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 4 bits cuya zona granular esté comprendida entre los valores $x_{max} = 1$ y $x_{min} = -1$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (1,5 P) Considera las muestras $x_1 = 0,20$ V y $x_2 = -0,85$ V. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (0,5 P) Calcula el intervalo de amplitudes en voltios que produce el mismo código binario que x_2.

c) (0,5 P) Supón que el margen dinámico sea $2X_m = 4\sigma_x$, es decir 4 veces el valor cuadrático medio de la señal. Si se exige un $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 70$ dB, ¿cuál es el mínimo número de niveles que asegura este requerimiento?
Emplea la siguiente fórmula de la relación señal a ruido de cuantificación:

$$\left(\tfrac{S}{N}\right)_q = 6,02 \cdot (b-1) + 10,8 - 20 \cdot \log\left(\tfrac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad \text{dB},$$

donde b es el número de bits por muestra.

Problema 3. (2,5 PUNTOS) Dado el diagrama de bloques de la figura 3.1.

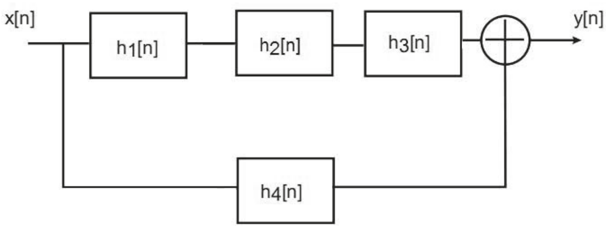

Figura 3.1. Diagrama de bloques del sistema.

a) (1,5 P) Calcula la respuesta impulsiva total del sistema $h_T[n]$, siendo

$$h_1[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2],$$

$$h_2[n] = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n-3]),$$

$$h_3[n] = \delta[n+1],$$

$$h_4[n] = u[n] - u[n-2].$$

b) (1 P) Calcula la respuesta del sistema cuando a la entrada se introduce la señal

$$x[n] = -2\delta[n] + 3(u[n] - u[n-3]).$$

Problema 4. (2,5 PUNTOS) Dado el sistema LTI representado en la figura 3.2.

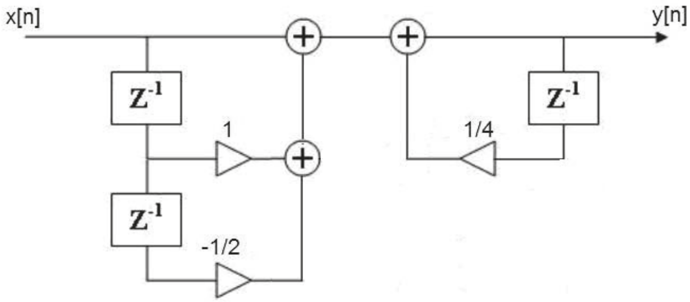

Figura 3.2. Diagrama de bloques del sistema LTI.

a) (0,25 P) Obtén la ecuación en diferencias del sistema.

b) (1 P) Calcula la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\omega})$.

c) (1,25 P) Calcula la respuesta $y[n]$ del sistema a la entrada

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 14 de Enero de 2010 Duración: 2:30 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (2,5 PUNTOS)

a) La suma de las sucesivas versiones desplazadas de la señal $\tilde{x}[n]$ cada 4 utd conforma la señal periódica $x[n]$. Con ayuda de una tabla es posible determinar los valores de $x[n]$:

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{x}[n+8]$	2	1	1	1													
$\hat{x}[n+4]$				1	2	1	1	1									
$\hat{x}[n]$								1	2	1	1	1					
$\hat{x}[n-4]$												1	2	1	1	1	
$\hat{x}[n-8]$																1	2
$x[n]$	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2

Tabla 3.1. Tabla para el calculo de $x[n]$.

El periodo es 4 utd. La señal es $x[n] = \{2, 1, 1, 2\}$ en $n = 0, 1, 2, 3$. Su DSF discreto será de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi kn}{2}}.$$

Los valores de los coeficientes c_k se calculan con la ecuación de análisis del DSF discreto:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{\pi kn}{2}} \qquad \text{con} \qquad k = 0, \ldots, 3.$$

Sustituyendo se obtiene:

$$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{\pi kn}{2}} = \frac{1}{4}(x[0] + x[1]e^{-j\frac{\pi k}{2}} + x[2]e^{-j\pi k} + x[3]e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) =$$
$$\frac{1}{4}(2 + e^{-j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) \qquad \text{con} \qquad k = 0, \ldots, 3.$$

O bien,

$$c_k = \frac{1}{4}(2 + e^{-j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\pi k} + 2e^{-j\frac{3\pi k}{2}}) = \frac{1}{4}(2 + (-j)^k + (-1)^k + 2(j)^k) \qquad \text{con} \quad k = 0, \ldots, 3.$$

Particularizando para cada valor del índice k, se tiene

$$c_0 = \frac{1}{4}(2 + 1 + 1 + 2) = \frac{6}{4} = 1{,}5,$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(2 - j - 1 + 2j) = \frac{1}{4} + \frac{j}{4},$$
$$|c_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{0{,}25}{0{,}25}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad},$$

$$c_2 = \frac{1}{4}(2 - 1 + 1 - 2) = 0,$$

$$c_3 = c_1^* = \frac{1}{4}(2 + j - 1 - 2j) = \frac{1}{4} - \frac{j}{4},$$
$$|c_3| = |c_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad \Phi_{c3} = -\Phi_{c1} = \arctan\left(\frac{-0{,}25}{0{,}25}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación del DSF discreto de $x[n]$ se obtiene

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{\pi k n}{2}} = c_0 + c_1 e^{j\frac{\pi n}{2}} + c_2 e^{j\pi n} + c_3 e^{j\frac{3\pi n}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi n}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{-\pi}{4}} e^{j\frac{3\pi n}{2}}.$$

b) Los espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k se muestran en la figura 3.3.

Problema 2. (2,5 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son $x_{min} = -1$ V y $x_{max} = 1$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^4 = 16 \text{ niveles}.$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{2}{16} = 0{,}125 \text{ V}.$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 3 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

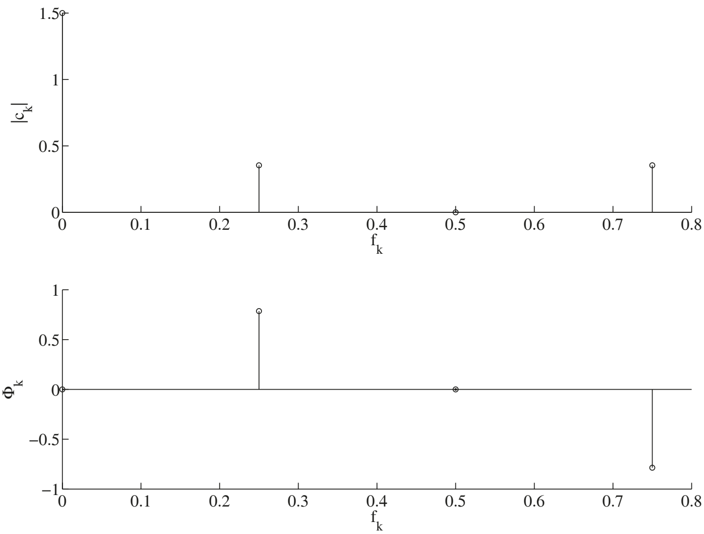

Figura 3.3. Espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta.

$$N = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right].$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}20|}{0{,}125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{8} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{8} = 0{,}1875 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}1875 - 0{,}20|}{|0{,}20|}100 = 6{,}25\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] = E\left[\frac{|0{,}20|}{0{,}125}\right] = 1.$$

Por lo que le corresponde a esta muestra la palabra de código: 0001.

Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \tfrac{1}{2})\Delta \cdot \mathrm{sign}(x_2) = (E[\tfrac{|-0{,}85|}{0{,}125}] + \tfrac{1}{2})\tfrac{1}{8}(-1) = (6 + \tfrac{1}{2})\tfrac{-1}{8} \text{ V,}$$
$$x_{q2} = -0{,}8125 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}8125+0{,}85|}{|0{,}85|}100 = 4{,}4\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] = E\left[\frac{|-0{,}85|}{0{,}125}\right] = 6.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 1110.

b) Se asigna el valor cuantificado x_{q2} a cualquier muestra negativa x cuyo valor cumpla $N = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] = 6$. Esto es:

$$-7 \leq \frac{x}{\Delta} \leq -6,$$

$$-7\Delta \leq x \leq -6\Delta \quad \Longrightarrow \quad -0{,}875 \leq x \leq -0{,}75 \text{ V}.$$

Visto de otro modo, el valor cuantificado x_q es el valor medio del intervalo de cuantificación correspondiente. Téngase en cuenta que el error de cuantificación máximo en la zona granular es $\Delta/2$. Por tanto, otro modo de obtener el resultado es:

$$x_q - \Delta/2 \leq x \leq x_q + \Delta/2 \quad \Longrightarrow \quad -0{,}875 \leq x \leq -0{,}75 \text{ V}.$$

c) Se tiene que cumplir que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6,02\cdot(b-1) + 10,8 - 20\cdot\log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) > 70\,\text{dB}.$$

Sustituyendo los datos del enunciado y operando

$$b > 11{,}8,\;\; b_{min} = 12 \;\text{ bits},$$
$$2^{b_{min}} = 2^{12} = 4096 \;\text{ niveles}.$$

Problema 3. (2,5 PUNTOS)

a) Antes de empezar es conveniente simplificar las respuestas al impulso que describen a los distintos elementos del diagrama de bloques:

$$h_1[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2],$$

$$h_2[n] = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n (u[n] - u[n-3]) = \delta[n] - \tfrac{1}{3}\delta[n-1] + \tfrac{1}{9}\delta[n-2],$$

$$h_3[n] = \delta[n+1],$$

$$h_4[n] = u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1].$$

Una vez hecho esto pasamos a calcular las respuestas al impulso equivalentes a cada subconjunto del diagrama de bloques:

$$\begin{aligned} h_{12}[n] = h_1[n] * h_2[n] &= \delta[n-1] - \tfrac{1}{3}\delta[n-2] + \tfrac{1}{9}\delta[n-3] + \delta[n-2] - \tfrac{1}{3}\delta[n-3] + \tfrac{1}{9}\delta[n-4] = \\ &= \delta[n-1] + \tfrac{2}{3}\delta[n-2] - \tfrac{2}{9}\delta[n-3] + \tfrac{1}{9}\delta[n-4]. \end{aligned}$$

Luego,

$$h_{123}[n] = h_{12}[n] * h_3[n] = \delta[n] + \tfrac{2}{3}\delta[n-1] - \tfrac{2}{9}\delta[n-2] + \tfrac{1}{9}\delta[n-3].$$

Finalmente se obtiene que

$$h_T[n] = h_{123}[n] + h_4[n] = 2\delta[n] + \tfrac{5}{3}\delta[n-1] - \tfrac{2}{9}\delta[n-2] + \tfrac{1}{9}\delta[n-3].$$

b) Para calcular la salida del sistema ante la entrada $x[n]$, es conveniente reescribir la ecuación que describe a la señal de entrada:

$$x[n] = -2\delta[n] + 3(u[n] - u[n-3]) = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2].$$

La salida del sistema se obtendrá mediante la convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso total del sistema:

$$y[n] = x[n] * h_T[n] = 2\delta[n] + \tfrac{23}{3}\delta[n-1] - \tfrac{97}{9}\delta[n-2] + \tfrac{40}{9}\delta[n-3] - \tfrac{1}{3}\delta[n-4] + \tfrac{1}{3}\delta[n-5].$$

Problema 4. (2,5 PUNTOS)

a) Por simple inspección del diagrama de bloques propuesto se puede deducir que la ecuación en diferencias del sistema es:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] - \tfrac{1}{2}x[n-2] + \tfrac{1}{4}y[n-1].$$

b) A partir de la ecuación en diferencias anterior se puede obtener la función de transferencia del sistema calculando su transformada de Fourier,

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) - \tfrac{1}{2}e^{-2j\omega}X(e^{j\omega})\tfrac{1}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}),$$

$$Y(e^{j\omega})(1 - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 + e^{-j\omega} - \tfrac{1}{2}e^{-2j\omega}),$$

y despejando la relación entre la salida y la entrada,

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{1+e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

c) La señal de entrada introducida se puede expresar mediante la ecuación de Euler como la suma de dos sinusoidales complejas

$$x_2[n] = 2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right) = (e^{(j\frac{\pi}{2}n)} + e^{(-j\frac{\pi}{2}n)}).$$

La señal de entrada solamente contiene información en dos frecuencias angulares concretas, en $\pi/2$ y $-\pi/2$ rad/utd. Por lo tanto, la señal $y[n]$ pedida únicamente podrá contener información en esas mismas frecuencias. Así, la señal de salida $y[n]$ serán las dos mismas sinusoidales complejas de la señal de entrada con una variación en su amplitud y en su fase inicial, producidas por la respuesta en frecuencia del filtro. Para determinar estas variaciones es necesario evaluar la respuesta en frecuencia del filtro en las frecuencias de las dos sinusoides de entrada:

$$H(e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}) = \tfrac{1-j+0{,}5}{1+0{,}25j} = 1{,}1765 - j1{,}2941 = 1{,}75e^{-j0{,}83},$$

$$H(e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}) = \tfrac{1+j+0{,}5}{1-0{,}25j} = 1{,}1765 + j1{,}2941 = 1{,}75e^{j0{,}83} = H^*(e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}).$$

Por lo que,

$$y[n] = 1{,}75e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-0{,}83\right)} + 1{,}75e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n+0{,}83\right)},$$

y usando la ecuación de Euler

$$y[n] = 3{,}5\cos(\tfrac{\pi}{2}n - 0{,}83).$$

3.2. Examen 2

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 14 de Julio de 2008 Duración: 2:15 h

Problema 1. (3 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 4 bits cuya zona granular esté comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (2 P) Considera las muestras $x_1 = 0,44$ V y $x_2 = -0,35$ V, que se han obtenido muestreando la señal $x(t) = 0{,}5sen(0{,}1\pi t)$. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) (1 P) Considera ahora estos dos otros cuantificadores uniformes, cuya características son:
$2)\quad bits = 3, \qquad 2X_m = 1,$
$3)\quad bits = 5, \qquad 2X_m = 2.$
Entre las tres opciones (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$, ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

Problema 2. (3,5 PUNTOS) Considera la conexión en cascada de tres sistemas lineales e invariantes de la figura 3.4.

La respuesta impulsiva $h_2[n]$ viene dada por:

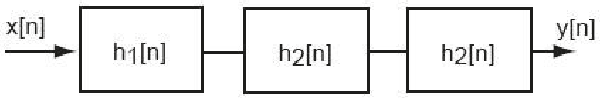

Figura 3.4. Cascada de tres sistemas LTI.

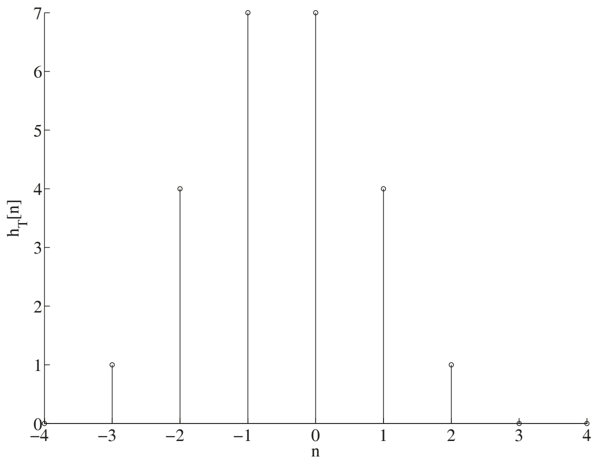

Figura 3.5. Respuesta impulsiva total equivalente $h_T[n]$.

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2].$$

Considerando que la respuesta impulsiva total equivalente $h_T[n]$ se representa en la figura 3.5.

a) (2 P) Encuentra $h_1[n]$.

b) $(0{,}5$ P) Estudia la causalidad y la estabilidad del sistema global.

c) (1 P) Encuentra la respuesta del sistema a la excitación

$$x[n] = u[n] - u[n-2].$$

Problema 3. $(3{,}5$ PUNTOS) Considera el sistema:

$$y[n] = 0{,}9\, y[n-1] + b\, x[n]$$

a) (0,5 P) Calcula su respuesta en frecuencia y después determina la constante b para que $H\left(e^{j\cdot 0}\right) = 1$.

b) (0,5 P) Representa el diagrama de bloque del sistema.¿Se trata de un filtro IIR o FIR?

c) (1 P) Supón ahora que $b = 0{,}1$. Calcula la respuesta ante la señal

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1].$$

d) (1,5 P) Para $b = 0{,}1$, calcula la respuesta ante la señal

$$x_2[n] = 5 + \cos\left(\tfrac{\pi}{2} n\right).$$

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 14 de Julio de 2008 Duración: 2:15 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (3 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^4 = 16 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 3 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right].$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}44|}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{16} = \left(7 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{16} = \frac{15}{32} \text{ V,}$$
$$x_{q1} = 0{,}46875 \text{ V.}$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}46875 - 0{,}44|}{|0{,}44|}100 = 6{,}5\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] = E\left[\frac{|0{,}44|}{0{,}0625}\right] = 7.$$

Por lo que le corresponde esta palabra código: 0111.

Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \tfrac{1}{2})\Delta \cdot \text{sign}(x_2) = (E[\tfrac{|-0{,}35|}{0{,}0625}] + \tfrac{1}{2})\tfrac{1}{16}(-1) = (5 + \tfrac{1}{2})\tfrac{-1}{16} = \tfrac{-11}{32}\text{ V},$$
$$x_{q2} = -0{,}34375 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2}-x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}34375+0{,}35|}{|-0{,}35|}100 = 1{,}78\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] = E\left[\frac{|-0{,}35|}{0{,}0625}\right] = 5.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 1101.

b) Calculamos el escalón de cuantificación Δ, para los otros dos cuantificadores:

$$\Delta_2 = \frac{2X_m}{2^b} = \frac{1}{8} = 0{,}125 \text{ V},$$

$$\Delta_3 = \frac{2X_m}{2^b} = \frac{2}{32} = 0{,}0625 \text{ V}.$$

La resolución es mejor en el primer y tercer cuantificador:$\Delta_1 = \Delta_3 < \Delta_2$. Sin embargo, si nos fijamos en el margen dinámico de la señal, con el tercer cuantificador sólo se utilizarían los niveles de menor valor ya que el margen dinámico de la señal está entre $-0,5$ y $0{,}5$, desaprovechando bits. Por lo tanto, de las tres opciones la primera es la que cuantifica mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características.

Problema 2. ($3{,}5$ PUNTOS)

a) Para hallar $h_1[n]$ primero se simplifica el sistema, calculando $h_{2eq}[n] = h_2[n] * h_2[n]$:

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1],$$

$$h_{2eq} = (\delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n] + \delta[n-1]) = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2].$$

Una forma de obtener $h_1[n]$ es realizar una tabla y calcular la convolución desplazando $h_{2eq}[n]$. Las incógnitas serán los valores de $h_1[n]$, ya que se conocen los valores de la respuesta final $h_T[n]$. Además $h_1[n]$ tendrá que empezar en el instante $n = -3$ y acabar en el instante $n = 0$ ya que $h_T[n]$ está comprendida entre los instantes -3 y 2, y $h_{2eq}[n]$ está comprendida entre 0 y 2:

$$n_{INh_1} = n_{INh_T} - n_{INh_{2eq}} = -3 - 0 = -3,$$

$$n_{FIh_1} = n_{FIh_T} - n_{FIh_{2eq}} = 2 - 2 = 0.$$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	k	h_T
$h_1[k]$			?	?	?	?					
$h_{2eq}[k]$						1	2	1			
$h_{2eq}[-3-k]$	1	2	1							$k=-3$	1
$h_{2eq}[-2-k]$		1	2	1						$k=-2$	4
$h_{2eq}[-1-k]$			1	2	1					$k=-1$	7
$h_{2eq}[-k]$				1	2	1				$k=0$	7
$h_{2eq}[1-k]$					1	2	1			$k=1$	4
$h_{2eq}[2-k]$						1	2	1		$k=2$	1
$h_{2eq}[3-k]$							1	2	1	$k=3$	0

Tabla 3.2. Tabla para el calculo de $h_1[n]$.

Por lo tanto considerando el solape de las muestras se obtiene:

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	k	h_T
$h_1[k]$			1	2	2	1					
$h_{2eq}[k]$						1	2	1			
$h_{2eq}[-3-k]$	1	2	1							$k=-3$	1
$h_{2eq}[-2-k]$		1	2	1						$k=-2$	4
$h_{2eq}[-1-k]$			1	2	1					$k=-1$	7
$h_{2eq}[-k]$				1	2	1				$k=0$	7
$h_{2eq}[1-k]$					1	2	1			$k=1$	4
$h_{2eq}[2-k]$						1	2	1		$k=2$	1
$h_{2eq}[3-k]$							1	2	1	$k=3$	0

Tabla 3.3. Resultado final para $h_1[n]$.

Es decir,

$$h_1[n] = \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + \delta[n].$$

b) Analizando $h_T[n]$ se puede afirmar que el sistema no es causal ya que no se cumple

$$h_T[n] = 0 \text{ para } n < 0,$$

y que el sistema es estable ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} | h_T[n] | = \sum_{n=-3}^{+2} | h_T[n] | = 24 < \infty.$$

c) La excitación se puede también escribir como

$$x[n] = u[n] - u[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1].$$

Por lo tanto,

$$y[n] = x[n] * h_T[n] = (\delta[n] + \delta[n-1]) * h_T[n].$$

Utilizando las propiedades de las deltas

$$y[n] = \delta[n+3] + 5\delta[n+2] + 11\delta[n+1] + 14\delta[n] + 11\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + \delta[n-3].$$

Problema 3. (3,5 PUNTOS)

a) Aplicando la DTFT sobre la ecuación en diferencias, y las propiedades de esta transformada, se llega a que

$$Y(e^{j\omega}) = 0{,}9e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + bX(e^{j\omega}),$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b}{1-0{,}9e^{-j\omega}}.$$

De la condición $H(e^{j\cdot 0}) = 1$ (cuando la pulsación $\omega = 0$), se obtiene que el valor de b:

$$H(e^{j\cdot 0}) = \frac{b}{1-0{,}9\cdot 1} = 1 \Longrightarrow b = 0{,}1.$$

b) El diagrama de bloques es fácil de obtener, ya que existe solo una celda de retardo en la parte recurrente mientras que la excitación no tiene retardo (ver figura 3.6).

El filtro es un filtro IIR ya que tiene parte recurrente.

c) En frecuencia tenemos que

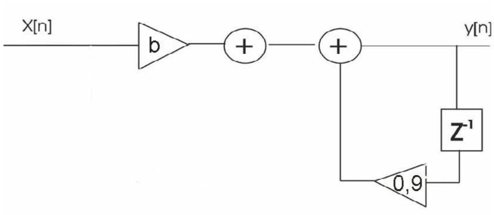

Figura 3.6. Diagrama de bloques del sistema.

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

con

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0,1}{1-0,9e^{-j\omega}},$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1-0,5e^{-j\omega}}.$$

Por lo tanto,

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{0,1}{1-0,9e^{-j\omega}} \cdot \frac{e^{-j\omega}}{1-0,5e^{-j\omega}}.$$

Para invertir el espectro de la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1-0,9e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-0,5e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \text{lím}_{e^{j\omega}\to 0,9} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - 0,9e^{-j\omega}) = \frac{\frac{0,1}{0,9}}{1-\frac{0,5}{0,9}} = 0,25,$$

$$B = \text{lím}_{e^{j\omega}\to 0,5} Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - 0,5e^{-j\omega}) = \frac{\frac{0,1}{0,5}}{1-\frac{0,9}{0,5}} = -0,25.$$

Podemos entonces escribir

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{0,25}{1-0,9e^{-j\omega}} - \frac{0,25}{1-0,5e^{-j\omega}}.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y(e^{j\omega})$ es:

$$y[n] = 0{,}25\,(0{,}9)^n\ u[n] - 0{,}25\,(0{,}5)^n\ u[n] = 0{,}25\,[(0{,}9)^n - (0{,}5)^n]\ u[n-1].$$

d) Esta vez se tiene en el dominio de la frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{0{,}1}{1-0{,}9e^{-j\omega}},$$

$$X(e^{j\omega}) = 10\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \tfrac{\pi}{2} - 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \tfrac{\pi}{2} - 2\pi k).$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac, a la salida se tiene

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = H(e^{j\cdot 0}) \cdot 10\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) +$$
$$+H(e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}) \cdot \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \tfrac{\pi}{2} - 2\pi k) + H(e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}) \cdot \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \tfrac{\pi}{2} - 2\pi k),$$

donde el valor de la respuesta en frecuencia para las pulsaciones 0, y $\pm\frac{\pi}{2}$ rad/utd, con $b = 0{,}1$, es

$$H(e^{j\cdot 0}) = 1,$$

$$H(e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}) = \tfrac{0{,}1}{1+j0{,}9} = 0{,}0743e^{-j0{,}7328},$$

$$H(e^{j\cdot\frac{-\pi}{2}}) = \tfrac{0{,}1}{1-j0{,}9} = 0{,}0743e^{j0{,}7328}.$$

Para terminar se aplica la DTFT^{-1} y se obtiene

$$y[n] = 5 + 0{,}0743\cos\left(\tfrac{\pi}{2}n - 0{,}7328\right).$$

3.3. Examen 3

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 9 de Febrero de 2005 Duración: 2:15 h

Problema 1. (4,5 PUNTOS) Se dispone de la señal en tiempo discretode la figura 3.7.

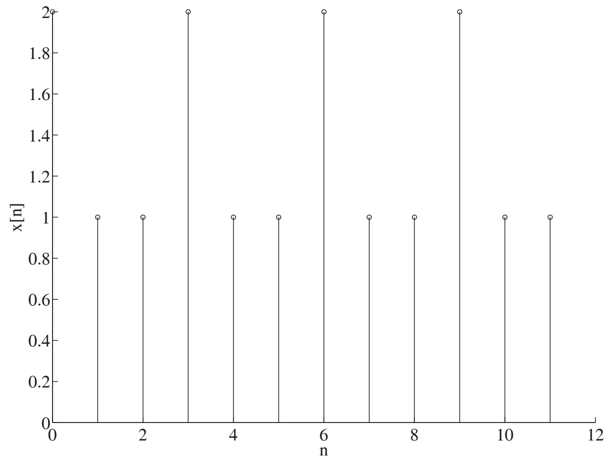

Figura 3.7. Secuencia $x[n]$ periódica.

a) $(1{,}5$ P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$.

b) $(1$ P) A partir del anterior DSF, calcula su transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$.

c) $(1$ P) Considera ahora un filtro digital ideal real del que conocemos que $H(e^{j\omega}) = 0$ en el intervalo de frecuencias $1{,}5 \leq f \leq 1{,}9$ y que $H(e^{j\omega}) = 1$ para los valores de frecuencia $-0{,}1 < f \leq 0$.

   Dibuja la respuesta en frecuencia del filtro $H(e^{j\omega})$ para pulsaciones comprendidas entre -2π y 2π.

d) $(0{,}25$ P) ¿De qué tipo de filtro (paso bajo, paso alto, paso banda, etc) se trata?

e) (0,75 P) La secuencia $x[n]$ se hace pasar por este filtro digital. Calcula cuál será la señal de salida $y[n]$ y su espectro $Y(e^{j\omega})$.

Problema 2. (3,5 PUNTOS) Se dispone de un sistema LTI causal descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{2}{15}y[n-1] - \frac{1}{15}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{15}x[n-1].$$

a) (0,75 P) Calcula la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\omega})$.

b) (1,50 P) Calcula la respuesta el impulso del sistema $h[n]$.

Para los siguientes apartados considera

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - 0{,}5e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}.$$

c) (0,50 P) Calcula el valor de $|H(e^{j\omega})|$ y $\Phi_h(e^{j\omega})$ para la pulsación $\omega = \frac{\pi}{2}$.

d) (0,75 P) A partir del resultado anterior indica cuál será la salida $y[n]$ si la entrada es

$$x[n] = 3e^{j(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})}.$$

Problema 3. (2 PUNTOS) Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $x_{max} = 0,5$ y $x_{min} = -0,5$ voltios. La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$x_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| < x_{max}, \\ \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x), & |x| \geq x_{max}. \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de x_q se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y viceversa.

a) (1,5 P) Considera las muestras $x_1 = 0,099$ V y $x_2 = -0,404$ V, que se han obtenido muestreando la señal $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}2\pi t)$. Calcula su valor cuantificado, su palabra de código y el error relativo de cuantificación en tanto por ciento.

b) $(0{,}5$ P) Considera ahora estos dos otros cuantificadores uniformes, cuya características son

$2)\quad bits = 4, \qquad 2X_m = 1.$

$3)\quad bits = 6, \qquad 2X_m = 2.$

Entre las tres opciones (la primera y estas últimas dos), ¿cuál es la que cuantificaría mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 9 de febrero de 2005 Duración: 2:15 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (2,5 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es periódica de periodo $N_0 = 3$ muestras. Su desarrollo en serie de Fourier discreto será:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N_0}kn},$$

donde los coeficientes c_k toman el valor,

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_0}kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N_0 - 1.$$

Cálculo de los coeficientes:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}kn}, \quad k = 0, 1, 2; \\
c_k &= \frac{1}{3}\left(x[0] + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + x[2]e^{-j\frac{4\pi}{3}k}\right), \quad k = 0, 1, 2; \\
c_k &= \frac{1}{3}\left(2 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{4\pi}{3}k}\right), \quad k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Particularizando para cada valor de k:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{3}(2+1+1) = \frac{4}{3};\\
c_1 &= \frac{1}{3}\left(2 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) =\\
&= \frac{1}{3}\left(2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =\\
&= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3};\\
c_2 &= \frac{1}{3}\left(2 + e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\frac{8\pi}{3}}\right) =\\
&= \frac{1}{3}\left(2 + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) =\\
&= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Luego entonces el DSF discreto de $x[n]$ es:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{2} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}kn} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}n} + \frac{1}{3}e^{j\frac{4\pi}{3}n}.$$

b) Conocidos los pares de transformadas de una señal constante y de una sinusoide compleja,

$$A \quad \longleftrightarrow \quad 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k),$$

$$Ae^{j(\omega_d n + \phi_0)} \quad \longleftrightarrow \quad 2\pi A e^{j\phi_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k),$$

y por la propiedad de linealidad, la DTFT de $x[n]$ es:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{8\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi k) + \frac{2\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k) + \frac{2\pi}{3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{4\pi}{3} - 2\pi k).$$

c) Las condiciones

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = 0, & 1{,}5 \le f \le 1{,}9,\\ H(e^{j\omega}) = 1, & -0{,}1 < f \le 0, \end{cases}$$

por la periodicidad de la DTFT son equivalentes a las siguientes:

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = 0, & -\pi + 2\pi k \leq \omega \leq -0{,}2\pi + 2\pi k, \\ H(e^{j\omega}) = 1, & -0{,}2\pi + 2\pi k < \omega \leq 0 + 2\pi k. \end{cases}$$

Como se trata de un filtro real, cumplirá también su respuesta en frecuencia las siguientes propiedades de simetría:

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|,$$

$$\Phi_h(e^{j\omega}) = -\Phi_h(e^{-j\omega}).$$

Luego entonces:

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = 0, & 0{,}2\pi + 2\pi k \leq \omega \leq \pi + 2\pi k, \\ H(e^{j\omega}) = 1, & 2\pi k < \omega \leq 0{,}2\pi + 2\pi k. \end{cases}$$

Uniendo las dos ecuaciones anteriores resulta finalmente que $H(e^{j\omega})$ es

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - 2\pi k}{0{,}4\pi}\right).$$

d) Es un filtro paso bajo de pulsación de corte:

$$\omega_c = 0{,}2\pi \text{ rad/utd.}$$

e) En el dominio de la frecuencia se cumple para los sistemas LTI que:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}).$$

Multiplicando gráficamente en un periodo espectral obtenemos que la salida es:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{8\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

Ésta es la transformada de una constante. En el dominio del tiempo entonces:

$$y[n] = \frac{4}{3}.$$

Al filtrar paso bajo sólo nos hemos quedado con la componente continua de la señal $x[n]$, esto es, con su valor medio $c_0 = \frac{4}{3}$.

Problema 2. (3,5 PUNTOS)

a) Por la propiedad de la convolución de la DTFT se cumple para los sistemas LTI en el dominio de la frecuencia que:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}),$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}.$$

Partiendo de la ecuación en diferencias hay que tratar de encontrar la relación entre los espectros de la salida y de la entrada. Así que aplicamos la DTFT y sus propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo sobre nuestra ecuación en diferencias:

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{2}{15}Y(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega} - \frac{1}{15}Y(e^{j\omega}) \cdot e^{-j2\omega} = X(e^{j\omega}) + \frac{1}{15}X(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega}.$$

Sacando factor común $Y(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$ a cada lado de la igualdad y despejando la relación entre la salida y la entrada, se llega a:

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\omega}}{1 - \frac{2}{15}e^{-j\omega} - \frac{1}{15}e^{-j2\omega}}.$$

Y esta última ecuación es justo la respuesta en frecuencia que se buscaba.

b) Para invertir $H(e^{j\omega})$ hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\omega}}{1 - \frac{2}{15}e^{-j\omega} - \frac{1}{15}e^{-j2\omega}} = \frac{A_1}{1 - p_1 e^{-j\omega}} + \frac{A_2}{1 - p_2 e^{-j\omega}},$$

donde p_1 y p_2 son los valores de $e^{j\omega}$ que hacen que se anule el denominador de $H(e^{j\omega})$. Una vez determinemos p_1 y p_2 y las constantes A_1 y A_2, la inversa de la respuesta en frecuencia será:

$$h[n] = A_1 \cdot p_1^n u[n] + A_2 \cdot p_2^n u[n],$$

por la propiedad de linealidad de la DTFT y el conocimiento del par de transformadas,

$$x[n] = a^n u[n] \quad \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; \quad |a| < 1.$$

Comenzamos a calcular las raíces del denominador de $H(e^{j\omega})$. Hacemos el cambio $x = p^{-1} = e^{-j\omega}$:

$$1 - \frac{2}{15}x - \frac{1}{15}x^2 = 0,$$

$$x = \frac{\frac{2}{15} \pm \sqrt{\frac{4}{15^2} + \frac{4}{15}}}{-\frac{2}{15}} = \frac{\frac{2}{15} \pm \frac{8}{15}}{-\frac{2}{15}} = -1 \mp 4,$$

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 3.$$

Así que

$$p_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{-1}{5}, \quad p_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3}.$$

Calculamos a continuación A_1 y A_2:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\omega}}{\left(1 + \frac{1}{5}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)},$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{e^{j\omega}=-1/5} H(e^{j\omega})\left(1 + \frac{1}{5}e^{-j\omega}\right) = \lim_{e^{j\omega}=-1/5} \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{1 + \frac{1}{15}(-5)}{1 - \frac{1}{3}(-5)} = \frac{1}{4}, \\ A_2 &= \lim_{e^{j\omega}=1/3} H(e^{j\omega})\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) = \lim_{e^{j\omega}=1/3} \frac{1 + \frac{1}{15}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{5}e^{-j\omega}} = \frac{1 + \frac{1}{15}(3)}{1 + \frac{1}{5}(3)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $H(e^{j\omega})$ es:

$$h[n] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{5}\right)^n u[n].$$

c) El valor que toma la respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - 0{,}5e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}$$

para la pulsación $\omega = \pi/2$ rad/utd es

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 - 0{,}5e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\frac{\pi}{2}}} = \frac{1 + j}{0{,}5j} = 2 - 2j.$$

El módulo de $H(e^{j\omega})$ en $\omega = \pi/2$ rad/utd es entonces:

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Y su argumento:

$$\Phi_h(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \text{arctg}\left(\frac{-2}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}\,\text{rad}.$$

d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x[n] = Ae^{j(\omega_d n + \phi_0)},$$

la respuesta será

$$y[n] = A'e^{j(\omega_d n + \phi_0')},$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A \cdot |H(e^{j\omega_d})|, \\ \phi_0' &= \phi_0 + \Phi_h(e^{j\omega_d}). \end{aligned}$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} A' &= 3 \cdot |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 3 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}, \\ \phi_0' &= \phi_0 + \Phi_h(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0\,\text{rad}. \end{aligned}$$

Y, por tanto, la respuesta del sistema a la señal $x[n]$ será:

$$y[n] = 6\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}.$$

Problema 3. (2 PUNTOS)

a) Como los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son: $x_{min} = -0{,}5$ V y $x_{max} = 0{,}5$ V, las muestras x_1 y x_2 caen en la zona granular. El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits:

$$L = 2^b = 2^5 = 32 \text{ niveles.}$$

Para calcular los valores cuantificados x_{q1} y x_{q2} necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \tfrac{x_{max} - x_{min}}{L} = \tfrac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V.}$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits. Es sencillo comprobar que el valor de la magnitud N viene dado en este caso por:

$$N = \left(E\left[\tfrac{|x|}{\Delta}\right]\right).$$

Para la primera muestra:

$$x_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sign}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}099|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} = \left(3 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{32} \text{ V},$$
$$x_{q1} = 0{,}1093 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr1} = \frac{|x_{q1} - x_1|}{|x_1|}100 = \frac{|0{,}1093 - 0{,}099|}{|0{,}099|}100 = 10{,}4\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 0 y la magnitud

$$N1 = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|0{,}099|}{0{,}03125}\right]\right) = 3.$$

Por lo que le corresponde: 00011.
Para la segunda muestra:

$$x_{q2} = Q(x_2) = (E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2})\Delta \cdot \mathrm{sign}(x_2) = (E[\frac{|-0{,}404|}{0{,}03125}] + \frac{1}{2})\frac{1}{32}(-1) = (12 + \frac{1}{2})\frac{-1}{32} \text{ V},$$
$$x_{q2} = -0{,}3906 \text{ V}.$$

El error de cuantificación relativo cometido en tanto por ciento es:

$$e_{qr2} = \frac{|x_{q2} - x_2|}{|x_2|}100 = \frac{|-0{,}3906 - (-0{,}404)|}{|-0{,}404|}100 = 3{,}3\,\%.$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 y la magnitud

$$N2 = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right]\right) = \left(E\left[\frac{|-0{,}404|}{0{,}03125}\right]\right) = 12.$$

Así que a la segunda muestra le corresponde la secuencia de bits: 11100.

b) Calculamos el Δ, para los otros dos cuantificadores:

$$\Delta_2 = \frac{2X_m}{2^b} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 \text{ V},$$

$$\Delta_3 = \frac{2X_m}{2^b} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \text{ V}.$$

A partir de las Δ se podría pensar que las mejores opciones para cuantificar la señal $x(t)$ serían la primera y tercera opción. Sin embargo, si nos fijamos en el margen dinámico de la señal, con el tercer cuantificador sólo se utilizarían los niveles de menor valor, ya que el margen dinámico de la señal está entre $-0,5$ y $0{,}5$ V, desaprovechando bits. Por lo tanto, de las tres opciones la primera es la que cuantifica mejor la señal $x(t)$ ajustándose a sus características.

3.4. Examen 4

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 13 de Septiembre de 2004. Duración: 2:30 h

Problema 1. (3 PUNTOS) Sea la secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi n}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi n}{7}\right).$$

a) Calcula los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto.

b) Representa su espectro de amplitud y de fase.

c) Obtén la expresión completa de la respuesta $y[n]$ a la señal $x[n]$ de un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura 3.8.

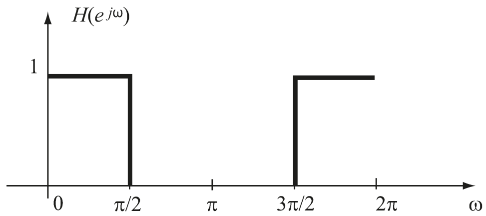

Figura 3.8. Transformada de Fourier de la respuesta al impulso $h[n]$.

d) Supón ahora que la secuencia $x_1[n] = \cos(\frac{5\pi n}{7})$ proviene de una señal continua $x_1(t)$ que ha sido muestreada con una frecuencia de 2000 Hz. Obtén la expresión de la señal analógica.

Problema 2. (2 PUNTOS) Dado el sistema LTI causal de la figura 3.9.

a) Calcula la respuesta del sistema LTI ante la excitación

$$x[n] = \prod\left(\frac{n+1}{4}\right) * \prod\left(\frac{n+1}{4}\right).$$

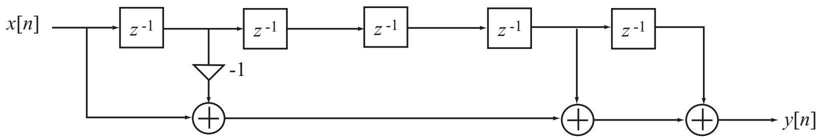

Figura 3.9. Filtro discreto.

b) Halla la expresión que muestra cómo responde este filtro en frecuencia.

Problema 3. (2 PUNTOS) La respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo es

$$h[n] = u[n].$$

a) Determina la respuesta de este sistema a la entrada

$$x[n] = a^n \cdot \Pi\left(\frac{n}{N_1+1}\right),$$

siendo a un número real de valor comprendido entre 0 y 1.

Problema 4. (3 PUNTOS) Considera el sistema LTI descrito por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + \tfrac{1}{4}y[n-1].$$

a) Dibuja el diagrama de bloques del sistema.

b) Encuentra $H(e^{j\omega})$.

c) Calcula la salida $y1[n]$ ante la señal de entrada $x1[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$.

d) Encuentra la salida $y2[n]$ ante la señal de entrada $x2[n] = 3 \cdot e^{j(\frac{\pi n}{2})}$.

SEÑALES Y SISTEMAS

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas

Fecha: 13 de Septiembre de 2004 Duración: 2:15 h

SOLUCIÓN

Problema 1. (3 PUNTOS)

a) La señal $x[n]$ es la suma de dos sinusoides . Hay que calcular y averiguar las frecuencias de las sinusoides. Para la primera de ellas:

$$\omega_{d1} = \tfrac{5\pi}{7} \text{ rad/utd}, \quad f_{d1} = \tfrac{\omega_{d1}}{2\pi} = \tfrac{5}{14} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia f_{d1} es racional, la primera sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{01} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d1}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{5}{14}}\} = 14 \text{ utd.}$$

Para la segunda sinusoide:

$$\omega_{d2} = \tfrac{3\pi}{7} \text{ rad/utd}, \quad f_{d2} = \tfrac{\omega_{d2}}{2\pi} = \tfrac{3}{14} \text{ 1/utd.}$$

Como la frecuencia f_{d2} también es racional, la segunda sinusoide es periódica y su periodo es

$$N_{02} = \text{mín}\{\tfrac{k}{f_{d2}}\} = \text{mín}\{\tfrac{k}{\frac{3}{14}}\} = 14 \text{ utd.}$$

La señal $x[n]$ es por tanto periódica de periodo:

$$N_0 = M.C.M.\{N_{01}, N_{02}\} = 14 \text{ utd.}$$

Para calcular los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier (DSF) discreto de $x[n]$ es más cómodo transformar su expresión hasta obtener una suma de sinusoides complejas. Para ello, se puede expresar primero en función de cosenos:

$$x[n] = \cos\left(\tfrac{5\pi n}{7}\right) + \cos\left(\tfrac{3\pi n}{7} - \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Y después de expresa cada señal coseno como una suma de dos sinusoides complejas, resultando:

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi n}{7}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi n}{7}} + \frac{1}{2}e^{j(\frac{3\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2}e^{-j(\frac{3\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})}.$$

El DSF de $x[n]$ es de la forma

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N_0}} = \sum_{k=0}^{13} c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}}.$$

Comparando ambas expresiones de $x[n]$ se obtienen los coeficientes c_k:

$$\frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi n}{7}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = 5;\ c_5 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi n}{7}} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = -5;\ k' = k + N_0 = -5 + 14 = 9;\ c_9 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}e^{j(\frac{3\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = 3;\ c_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

$$\frac{1}{2}e^{-j(\frac{3\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} = c_k e^{j\frac{\pi kn}{7}} \Leftrightarrow k = -3;\ k' = k + 2N_0 = -3 + 14 = 11;\ c_{11} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

El resto de coeficientes son cero.

b) Los respectivos espectros de amplitud y fase de los coeficientes c_k en función de la frecuencia discreta se representan en la figura 3.10.

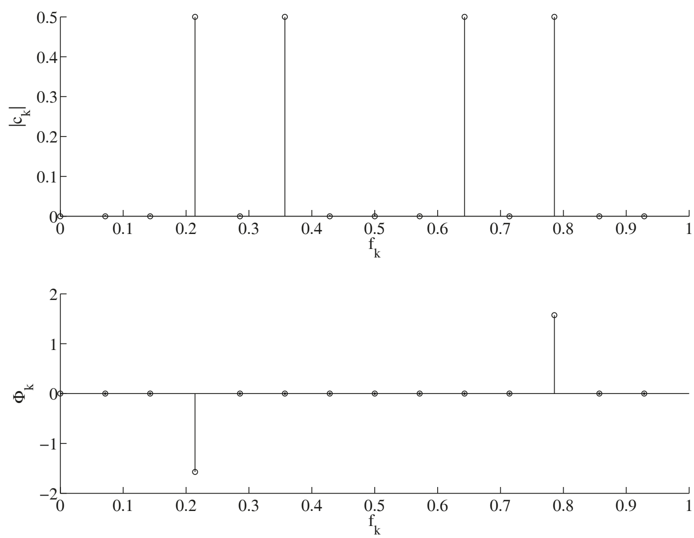

Figura 3.10. Espectros de amplitud y fase de los coeficiente c_k en función de la frecuencia discreta.

c) El sistema es un filtro con pulsación de corte $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ rad/utd. Por lo tanto el filtro eliminará las componentes de $x[n]$ de frecuencia más alta, en concreto, las asociadas a los coeficientes c_5 y c_9.

La salida entonces será:

$$y[n] = \tfrac{1}{2}e^{j(\frac{3\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} + \tfrac{1}{2}e^{-j(\frac{3\pi n}{7}-\frac{\pi}{2})} = \cos\left(\tfrac{3\pi n}{7} - \tfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi n}{7}\right).$$

d) Si la señal discreta $x_1[n]$ proviene de muestreo de una señal analógica $x_1(t)$ entonces se debe cumplir que

$$x_1[n] = x_1(nT_s),$$

donde T_s es la inversa de la frecuencia de muestreo. Como $x_1[n]$ es una sinusoide real discreta, la señal $x_1(t)$ será también una señal sinusoidal real pero continua

$$x_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi).$$

Entonces,

$$\cos\left(\tfrac{5\pi}{7}n\right) = A\cos(2\pi f_0 n T_s + \phi).$$

La señal analógica deberá tener la misma amplitud y misma fase inicial que la señal de muestras, es decir $A = 1$ y $\phi = 0$. De acuerdo con todo esto,

$$\cos\left(\tfrac{5\pi}{7}n\right) = \cos(2\pi f_0 n T_s),$$

por lo que sólo queda por determinar el valor de la frecuencia continua f_0 resolviendo esta ecuación trigonométrica:

$$\begin{gathered} \tfrac{5\pi}{7}n + 2\pi k n = 2\pi f_0 n T_s, \quad k\varepsilon Z, \\ f_0 T_s = \tfrac{5\pi}{14} + k, \\ f_0 = \tfrac{5}{14}f_s + k f_s \quad k\varepsilon Z. \end{gathered}$$

De aquí se deduce que podemos obtener la misma secuencia de muestras $x_1[n]$ a partir de distintas sinusoides continuas. Para el caso $k = 0$ y con $f_s = 2000$ Hz, la señal continua es

$$x_1(t) = \cos\left(2\pi\tfrac{5000}{7}t\right) = \cos\left(\tfrac{10000\pi}{7}t\right).$$

Problema 2. (2 PUNTOS)

a) La ecuación en diferencias que corresponde al diagrama de bloques de la figura 3.9 es

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-4] + x[n-5],$$

y se trata de un filtro FIR.

La señal de entrada es una convolución de 2 señales iguales. La señal $x_1[n]$ es un pulso cuadrado de duración finita $L = 4$ y adelantado una unidad de tiempo discreto. Por lo tanto, la excitación $x[n] = x_1[n] * x_1[n]$ comenzará en el instante $n_1 = -1-1 = -2$ y terminará en $n_2 = 2+2 = 4$. En la tabla 3.4 se calcula la convolución de estos dos pulsos cuadrados.

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	n	$x[n]$
$x_1[k]$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		
$x_1[-2-k]$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	-2	1
$x_1[-1-k]$	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	-1	2
$x_1[-k]$	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	3
$x_1[1-k]$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	4
$x_1[2-k]$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	2	3
$x_1[3-k]$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	3	2
$x_1[4-k]$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4	1

Tabla 3.4. Tabla para el calculo de $x[n] = x_1[n] * x_1[n]$.

Para hallar la respuesta del sistema a $x[n]$ no hay más que seguir la ecuación en diferencias (ver tabla 3.5)

n	-2	-1	-0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$	1	2	3	4	3	2	1	0	0	0	0	0
$-x[n-1]$	0	-1	-2	-3	-4	-3	-2	-1	0	0	0	0
$x[n-4]$	0	0	0	0	1	2	3	4	3	2	1	0
$x[n-5]$	0	0	0	0	0	1	2	3	4	3	2	1
$y[n]$	1	1	1	1	0	2	4	6	7	5	3	1

Tabla 3.5. Tabla para el calculo de $y[n]$ utilizando la ecuación en diferencias.

Así que se tiene

$$y[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + 2\delta[n-3] + 4\delta[n-4] + 6\delta[n-5]+$$
$$+7\delta[n-6] + 5\delta[n-7] + 3\delta[n-8] + \delta[n-9].$$

b) De la ecuación en diferencias del sistema FIR, se deduce fácilmente su respuesta al impulso:

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-4] + \delta[n-5].$$

En el dominio de la frecuencia, la respuesta en frecuencia del filtro es:

$$Y(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} + e^{-4j\omega} + e^{-5j\omega}.$$

Problema 3. (2 PUNTOS)

a) La respuesta del sistema LTI a la excitación será:

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Por las propiedades de la operación de convolución, los instances inicial y final de la salida serán:

$$n_{y1} = n_{h1} + n_{x1} = 0 + 0 = 0,$$
$$n_{y2} = n_{h2} + n_{x2} = \infty + N_1 = \infty.$$

La convolución es por tanto de duración infinita, así que la calcularemos a partir del sumatorio que la define:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k].$$

Para $n < 0$ esta suma vale cero, porque las señales $x[k]$ y $h[n-k]$ no se solapan en k (ver figura 3.11(a)).

Por $n \geq 0$ hay que distinguir dos casos. de acuerdo con la figura 3.11(b), mientras n sea menor o igual que N_1, $x[k]$ y $h[n-k]$ se solaparán para $0 \leq k \leq n$.

La convolución valdrá entonces,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot 1 = \tfrac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

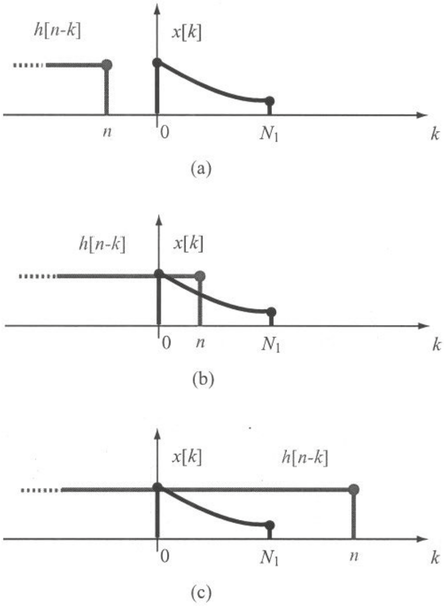

Figura 3.11. Cambios en la zona de solape de $x[k]$ y $h[n-k]$ en el cálculo de la convolución.

Sin embargo, si $n > N_1$, la zona de solape entre $x[k]$ y $h[n-k]$ será siempre $0 \leq k \leq N_1$ (ver figura 3.11(c)). Así que, para estos valores de n, la salida será constante:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N_1} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{N_1} a^k \cdot 1 = \tfrac{1-a^{N_1+1}}{1-a}.$$

La respuesta del sistema a $x[n]$ es por tanto:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N_1, \\ \frac{1-a^{N_1+1}}{1-a}, & n > N_1. \end{cases}$$

Problema 4. (3 PUNTOS)

a) El diagrama de bloques del sistema es el de la figura 3.12.

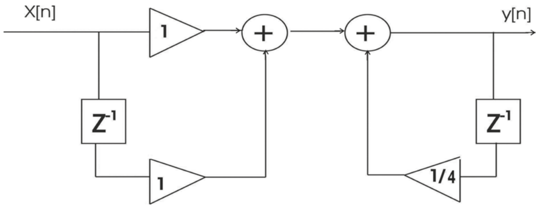

Figura 3.12. Diagrama de bloques del sistema.

b) Pasando la ecuación en diferencias a frecuencia se obtiene

$$Y(e^{j\omega}) - \tfrac{1}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega}.$$

Así que

$$H(e^{j\omega}) = \tfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \tfrac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

c) La respuesta del sistema a la entrada $x1[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ es la convolución entre la entrada y la respuesta impulsiva. En frecuencia,

$$Y1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X1(e^{j\omega}),$$

donde

$$X1(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}},$$

Entonces se obtiene que

$$Y1(e^{j\omega}) = \tfrac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}.$$

Para invertir la DTFT de la salida hay que aplicar el método de descomposición en fracciones simples,

$$Y1(e^{j\omega}) = \tfrac{A}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \tfrac{B}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}},$$

con

$$A = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{4}} Y1(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{4}e^{-j\omega}) = \tfrac{1+4}{1-\frac{4}{5}} = 25,$$

$$B = \lim_{e^{j\omega}\to\frac{1}{5}} Y1(e^{j\omega}) \cdot (1 - \tfrac{1}{5}e^{-j\omega}) = \tfrac{1+5}{1-\frac{5}{4}} = -24.$$

Luego, finalmente, la DTFT inversa de $Y1(e^{j\omega})$ es:

$$y1[n] = 25\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] - 24\left(\tfrac{1}{5}\right)^n u[n].$$

d) Las sinusoides son autofunciones de los sistemas LTI. Por ello se cumple en estos sistemas que ante una excitación de la forma

$$x2[n] = A\, e^{j(\omega_d n+\phi_0)},$$

la respuesta será

$$y2[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)},$$

donde

$$A' = A \cdot |H(e^{j\omega_d})|,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\omega_d}).$$

En nuestro caso

$$|H(e^{j\pi/2})| = \tfrac{1+e^{-j\pi/2}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\pi/2}} = |\tfrac{12}{17} - j\tfrac{20}{17}| = 1{,}372,$$

$$\Phi_H(e^{j\pi/2}) = \arctan(\tfrac{-20/17}{12/17}) = \arctan(\tfrac{-20}{12}) = -1{,}0304 \text{ rad.}$$

Por lo tanto

$$A' = A \cdot |H(e^{j\pi/2})| = 3 \cdot 1{,}372 = 4{,}116,$$

$$\phi_0' = \phi_0 + \Phi_H(e^{j\pi/2}) = -1{,}0304 \text{ rad.}$$

Finalmente la respuesta del sistema a la señal $x2[n]$ será

$$y2[n] = A'\, e^{j\left(\omega_d n+\phi_0'\right)} = 4{,}116 \cdot e^{j(\pi/2n-1{,}0304)}.$$

El sistema amplifica la amplitud de la sinusoide y añade una fase.

APÉNDICE A

RELACIONES MATEMÁTICAS ÚTILES Y EJERCICIOS DE REPASO SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS

A.1. Relaciones matemáticas útiles

A.1.1. Números complejos

Unidad imaginaria:

$j = \sqrt{-1}$

$j^2 = -1$

Expresión binómica de un número complejo:

Parte real $+\ j \cdot$ *Parte imaginaria* $= a + j{\cdot}b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

Expresión cartesiana de un número complejo:

(Parte real, Parte imaginaria) $= (a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}$

Expresión polar de un número complejo:

Módulo$\angle$*Argumento* $= r\angle\phi; \quad r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \angle\phi = \arctan\dfrac{b}{a}$

La expresión de la fase es válida si el número complejo se encuentra en el primer y cuarto cuadrante del plano complejo, en caso contrario hay que añadir un factor π a la solución.

Expresión euleriana de un número complejo:

$r{\cdot}e^{j\phi}; \quad r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \angle\phi = \arctan\dfrac{b}{a}$

Expresión trigonométrica de un número complejo:

$r\cos\phi + jr\operatorname{sen}\phi; \quad a = r\cos\phi,\ b = r\operatorname{sen}\phi$

Suma y resta de números complejos. Es más conveniente utilizar las formas binómica o cartesiana:

$(a + jb) \pm (c + jd) = (a{\pm}c) + j(b{\pm}d)$

Producto y división de números complejos. Es más conveniente usar las formas euleriana o polar:

$r_1e^{j\phi_1}{\cdot}r_2e^{j\phi_2} = (r_1{\cdot}r_2)e^{j(\phi_1+\phi_2)}; \qquad \dfrac{r_1e^{j\phi_1}}{r_2e^{j\phi_2}} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)e^{j(\phi_1-\phi_2)}$

A.1.2. Identidades trigonométricas

Ecuaciones trigonométricas útiles para los ejercicios de la asignatura de Señales y Sistemas:

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j \operatorname{sen}\phi$$
$$\cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$
$$\operatorname{sen}\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

$$\cos\phi = \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}\phi = \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$$
$$\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi = \cos 2\phi$$
$$\cos^2\phi = \frac{1 + \cos 2\phi}{2}$$
$$\operatorname{sen}^2\phi = \frac{1 - \cos 2\phi}{2}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

A.1.3. Funciones exponencial y logarítmica

Propiedades generales de las funciones exponenciales en base e :

$e^{\alpha}\cdot e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$

$\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} = e^{\alpha-\beta}$

$(e^{\alpha})^{\beta} = e^{\alpha\beta}$.

La función logaritmo en base b , $y = \log_b(x)$, es la inversa de la función exponencial en base b, $y = b^x$.

Por ello se cumple:

$\log_b b^{\alpha} = \alpha,$

$b^{\log_b \alpha} = \alpha, \qquad b^{-\log_b \alpha} = b^{lob_b\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \dfrac{1}{\alpha}.$

Y en el caso de logaritmos neperianos $(b = e = 2,71828...)$

$e^{\ln \alpha} = \alpha, \qquad e^{-\ln \alpha} = e^{ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \dfrac{1}{\alpha}.$

Cambio de base:

$\log_{b1} \alpha = \log_{b1} b2 \cdot \log_{b2} \alpha.$

Propiedades generales de las funciones logarítmicas:

$\log(\alpha\cdot\beta) = \log\alpha + \log\beta$

$\log\dfrac{\alpha}{\beta} = \log\alpha - \log\beta$

$\log\alpha^{\beta} = \beta\log\alpha.$

A.1.4. Sumas de series

De números naturales:

$$\sum_{k=1}^{N} 1 = N$$
$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}.$$

De series exponenciales:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} r^n = \frac{r^{N_1} - r^{N_2} \cdot r}{1-r} = \frac{r^{N_1} - r^{N_2+1}}{1-r}, \quad |r| \neq 1.$$

A.2. Ejercicios sobre números complejos

4.2.1 Expresa en la forma binómica $a + jb$ los siguientes números complejos:

a) $(1+j)^2$,

b) $1/j$,

c) $1/(1+j)$,

d) $(2+3j)(3-4j)$,

e) $(1+j)(1-2j)$,

f) $j^5 + j^6$,

g) $1 + j + j^2 + j^3$,

h) $0{,}5(1+j)(1+j^{-8})$.

4.2.2 Calcula el modulo r de los números complejos siguientes:

a) $1+j$,

b) $3+4j$,

c) $(1+j)/(1-j)$,

d) $(2+3j)(3-4j)$,

e) $1+j+j^2$,

f) $j^7 + j^{10}$,

g) $2(1-j) + 3(2+j)$.

4.2.3 Expresa en la forma binómica $a + jb$ los siguientes números complejos:

a) $e^{j\pi/2}$,

b) $2e^{-j\pi/2}$,

c) $3e^{j\pi}$,

d) $-e^{-j\pi}$,

e) $j + e^{j2\pi}$,

f) $e^{j\pi/4}$,

g) $e^{j\pi/4} - e^{-j\pi/4}$,

h) $\frac{1-e^{j\pi/2}}{1+e^{j\pi/2}}$.

4.2.4 Calcula el modulo r y el argumento α en radianes de cada uno de los números complejos siguientes:

a) $2j$,

b) $-3j$,

c) -1,

d) 1,

e) $-3 + j\sqrt{3}$,

f) $(1+j)/\sqrt{2}$,

g) $(-1+j)^3$,

h) $(-1-j)^3$,

i) $1/(1+j)$,

j) $1/(1+j)^2$.

Soluciones

4.2.1
a) $2j$.
b) $-j$.
c) $0{,}5 - 0{,}5j$.
d) $18 + j$.
e) $3 - j$.
f) $-1 + j$.
g) 0.
h) $1 + j$.

4.2.2
a) $\sqrt{2}$.
b) 5.
c) 1.
d) 1.
e) $\sqrt{2}$.
f) $\sqrt{65}$.

4.2.3
a) j.
b) $-2j$.
c) -3.
d) 1.
e) $1 + j$.
f) $(1 + j)/\sqrt{2}$.
g) $j\sqrt{2}$.
h) $-j$.

4.2.4
a) $r = 2$, $\alpha = \pi/2$ rad.
b) $r = 3$, $\alpha = -\pi/2$ rad.
c) $r = 1$, $\alpha = \pi$ rad.

d) $r = 1,\ \alpha = 0$ rad.

e) $r = 2\sqrt{3},\ \alpha = 5\pi/6$ rad.

f) $r = 1,\ \alpha = \pi/4$ rad.

g) $r = 2\sqrt{2},\ \alpha = \pi/4$ rad.

h) $r = 2\sqrt{2},\ \alpha = -\pi/4$ rad.

i) $r = \sqrt{2}/2,\ \alpha = -\pi/4$ rad.

j) $r = 1/2,\ \alpha = -\pi/2$ rad.