Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

IA EPS UA

Problemas Tema 2: Parte 2
Aplicaciones Lineales

Fundamentos de Matemática Aplicada a la Inteligencia Artificial II

1 Estudiar si son lineales las siguientes aplicaciones:

a) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(z,x+y,-z)$

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+y,xy)$

c) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x+2,3x-y)$

d) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(|x|,x+2y)$

e) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,t)=(2xy+3z,2xz-2t,x+4y-2z+t)$

f) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
$f(x,y,z)=(x-2y+3z,2x-2y,3x+4y-z,2x+3y+2z)$

2 Calcular la imagen y el núcleo de las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(2x+y,3y,x+y)$

b) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z)=(x-y,y-z)$

c) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x+2y,x+z,2y+z)$

d) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z)=(x+y+z,x,0,0)$

3 Sea $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y,z,t)=(x-y+z+t,2x-2y+3z+4t,3x-3y+4z+5t)$$

a) Hallar una base y la dimensión de $\operatorname{Im} f$.

b) Hallar una base y la dimensión de $\operatorname{Ker} f$.

4 Clasificar las aplicaciones lineales del problema 2.

5 Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida de la forma:

$$f(x,y)=(x+ay,ax+y,3x+(2+a)y)$$

Clasificarla en función del parámetro a y dar en cada caso una base de la imagen y una base del núcleo.

6 Dado el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido de la forma:

$$f(x, y, z) = (2x + y + az, x - y + 2az, x + 3y + (1 + a)z)$$

Hallar el valor del parámetro a para que f sea biyectiva.

7 Obtener, si es posible, en cada caso una aplicación lineal con las propiedades que se indican:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(1, -1) = (1, -1, 0)$, $f(-1, 2) = (0, 1, -1)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$f(1, 0, 1) = (-1, 0)$, $f(2, 1, 0) = (-1, 1)$, $f(0, 1, 1) = (0, 0)$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
$f(-1, -1, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $f(2, 0, -1) = (0, -1, 0, 1)$,
$f(1, -1, 1) = (1, 0, 0, 0)$.

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f(-1, -1, 0) = (0, -1, 0)$, $f(1, 0, 1) = (-1, 0, 1)$, $f(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$,
$f(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $f(1, -1, 0) = (1, 0, 0)$.

f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(1, 0) = (0, -1, 2)$.

g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, $f(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$.

8 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$\begin{aligned} f(1, 1, 0) &= (1, 0, 0, 1) \\ f(2, 1, 0) &= (0, 1, 0, 1) \\ f(0, -1, 1) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Determinar la imagen del vector $\vec{v} = \left(-\frac{5}{3}, -2, 1\right)$.

9 Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x - 3y - z, 2x + y - 4z)$$

a) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

b) Hallar la imagen del vector $\vec{v} = (3, -1, 1)$ mediante: (1) la expresión analítica de f y (2) la matriz asociada a f del apartado **a)**.

10 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, x + y + z)$$

a) Calcular unas bases de los subespacios núcleo e imagen.

b) Determinar si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

c) Determinar los subespacios $f(U)$ y $f(W)$, siendo:

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y = 0\right\}$$
$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\right\}$$

d) Determinar la imagen inversa $f^{-1}(S)$, siendo $S = L\{(2, 1)\}$.

e) Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas:

$$C_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ y } C_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

f) Calcular la imagen del vector $\vec{v} = (0, 3, -3)$ utilizando la matriz del apartado anterior.

11 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por las propiedades:

1. El núcleo de f es el subespacio vectorial de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z - 2t &= 0 \\ z + 2t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2. $f(0, 0, 0, 1) = (2, 0, 0, 0)$ y $f(1, 0, 0, 0) = (2, 0, 2, 0)$.

Resolver los siguientes apartados sobre f:

a) Calcular la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

b) Hallar una base del subespacio vectorial $f(U)$ para:

$$U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z + t = 0\right\}$$

12 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en bases canónicas, C_3 y C_2, es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcular las matrices asociadas a f en las bases:

a) C_3 canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(2, 1), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

b) $B_3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y C_2 canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) B_3 y B_2.

13 Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 3z, y + 4z)$$

a) Probar que f es una aplicación lineal.

b) Obtener la matriz de f en la base canónica.

c) Calcular el rango de f.

d) Obtener una base de $\operatorname{Ker} f$ y otra de $\operatorname{Im} f$.

14 Considerando la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x, y, z, t) = (x + y - 3t, x + 2z - t, 3x - 2y + 9z - t)$$

a) Determinar una base de $\operatorname{Ker} f$ y otra de $\operatorname{Im} f$.

b) Clasificar f.

c) Obtener la matriz de f respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

d) Obtener la matriz de f respecto a las bases:

$$\begin{aligned} B &= \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\} \\ B' &= \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

15 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 3) &= (4, -2, 1, 0) \\ f(0, 1, 1) &= (2, -1, 3, 5) \\ f(2, -1, 0) &= (2, -1, -2, -5) \end{aligned}$$

a) Verificar que $B = \{(1, 0, 3), (0, 1, 1), (2, -1, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Obtener la expresión analítica de f.

c) Determinar una base del núcleo de f y otra base de la imagen de f.

Soluciones

1 **a)** f sí es aplicación lineal.
b) f no es aplicación lineal.
c) f no es aplicación lineal.
d) f no es aplicación lineal.
e) f no es aplicación lineal.
f) f sí es aplicación lineal.

2 **a)** $\operatorname{Im} f = L\{(2,0,1),(1,3,1)\}$, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$.
b) $\operatorname{Im} f = L\{(1,0),(-1,1)\} = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker} f = L\{(1,1,1)\}$.
c) $\operatorname{Im} f = L\{(1,1,0),(2,0,2),(0,1,1)\} = \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.
d) $\operatorname{Im} f = L\{(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$, $\operatorname{Ker} f = L\{(0,1,-1)\}$.

3 **a)** $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,2,3),(0,1,1)\}$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.
b) $B_{\operatorname{Ker} f} = \{(1,1,0,0),(1,0,-2,1)\}$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

4 **a)** Inyectiva (monomorfismo).
b) Suprayectiva (epimorfismo).
c) Biyectiva (automorfismo).
d) Ni inyectiva ni suprayectiva.

5
- Si $a = 1$: la aplicación lineal f no es inyectiva ni suprayectiva.
  En este caso: $\operatorname{Im} f = L\{(1,1,3)\}$ y $\operatorname{Ker} f = L\{(1,-1)\}$.
- Si $a \neq 1$: la aplicación lineal f es inyectiva.
  En este caso: $\operatorname{Im} f = L\{(1,a,3),(a,1,2+a)\}$ y $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$.

6 El endomorfismo es biyectivo si $a \neq -\frac{1}{3}$.

7 **a)** $f(x,y) = (2x+y,-x,-x-y)$ (f es única).
b) $f(x,y,z) = \frac{1}{3}(-2x+y-z, x+y-z)$ (f es única).
c) $f(x,y,z) = \frac{1}{4}(x-y+2z,-x+y+2z,0,x-y-2z)$ (f es única).
d) No existe ninguna aplicación lineal f que cumpla las condiciones.
e) No existe ninguna aplicación lineal f que cumpla las condiciones.
f) $f(x,y) = (0,-x,2x)$ (f no es única).
g) $f(x,y,z) = (0,x+y,0)$ (f no es única).

8 $f(\vec{v}) = \left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0,-1\right)$.

9 **a)** Matriz asociada a f respecto a las bases canónicas C_3 y C_2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Usando la expresión analítica de f:

$$f(\vec{v}) = f(3,-1,1) = (3-3\cdot(-1)-1, 2\cdot 3-1-4\cdot 1) = (5,1)$$

Usando la matriz asociada A:

$$A\cdot \vec{v}^{\,t} = f(\vec{v})^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}) = (5,1)$$

10 **a)** $B_{\mathrm{Ker}\, f} = \{(0,-1,1)\}$ y $B_{\mathrm{Im}\, f} = \{(2,1),(1,1)\}$.
b) f es suprayectiva.
c) $f(U) = L\{(1,0),(1,1)\}$ y $f(W) = L\{(-1,0)\}$.
d) $f^{-1}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y+z=0\}$.
e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
f) $f(0,3,-3) = (0,0)$.

11 **a)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) $B_{f(U)} = \{(0,0,2,0),(-1,0,1,0)\}$.

12 **a)** $A' = Q^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -10 \\ 0 & -13 & 17 \end{pmatrix}$.

b) $A' = A\cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A' = Q^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 4 & -13 & 0 \end{pmatrix}$.

13 **a)** Se verifica que f es una aplicación lineal.
b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
c) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$.
d) $B_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1,-1,0),(1,0,1)\}$, $B_{\mathrm{Ker}\, f} = \{(3,-4,1)\}$.

14 **a)** $B_{\mathrm{Ker}\, f} = \{(5,-2,-2,1)\}$, $B_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1,1,3),(0,-1,-5),(0,0,-1)\}$
b) f es suprayectiva.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $A' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -9 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -6 & -3 & 12 & -1 \end{pmatrix}$.

15 **a)** B es una base de $\mathbb{R}^3$, ya que sus 3 vectores son linealmente independientes.

b) $f(x, y, z) = \frac{1}{5}(8x + 6y + 4z, -4x - 3y - 2z, 2x + 14y + z, 25y)$.

c) $B_{\text{Ker}\, f} = \{(1, 0, -2)\}$, $B_{\text{Im}\, f} = \{(4, -2, 1, 0), (6, -3, 14, 25)\}$.