Curso 2023/24

FUNDAMENTOS FÍSICOS PARA INGENIERÍA

GRADO EN INGENIERÍA EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

TEMA 3. SISTEMAS DE PATÍCULAS

Manuel Gutiérrez Ramírez

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante

Contenidos

1.1. Introducción

Modelo de partícula → Válido en los movimientos de traslación y cuando la precisión en la localización de un cuerpo es del orden de sus dimensiones

¿Qué sucede cuando se deben considerar las dimensiones del cuerpo en estudio?

Modelo de sistemas de partículas

Conjunto de partículas que interaccionan. El sistema puede plantearse tratando cada partícula por separado y solucionando la segunda ley de Newton para cada una de ellas, pero esto resulta complicado. El planteamiento se simplifica al realizar un tratamiento conjunto

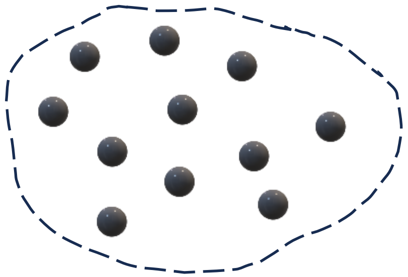
Los sistemas reales son sistemas de partículas

1.1. Introducción

Sistemas de partículas

- **Sistema discreto**

  El cuerpo está formado por un número finito de partículas



  - **Indeformable**

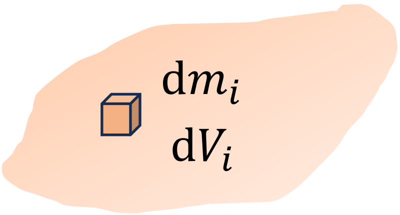
    Distancias relativas entre partículas no se ven modificadas bajo la acción de fuerzas

  - **Deformable**

    Distancias relativas entre las partículas se ven modificadas bajo la acción de fuerzas

- **Sistema continuo**

  Distribución continua de materia que llena el volumen del sistema



  - **Indeformable**

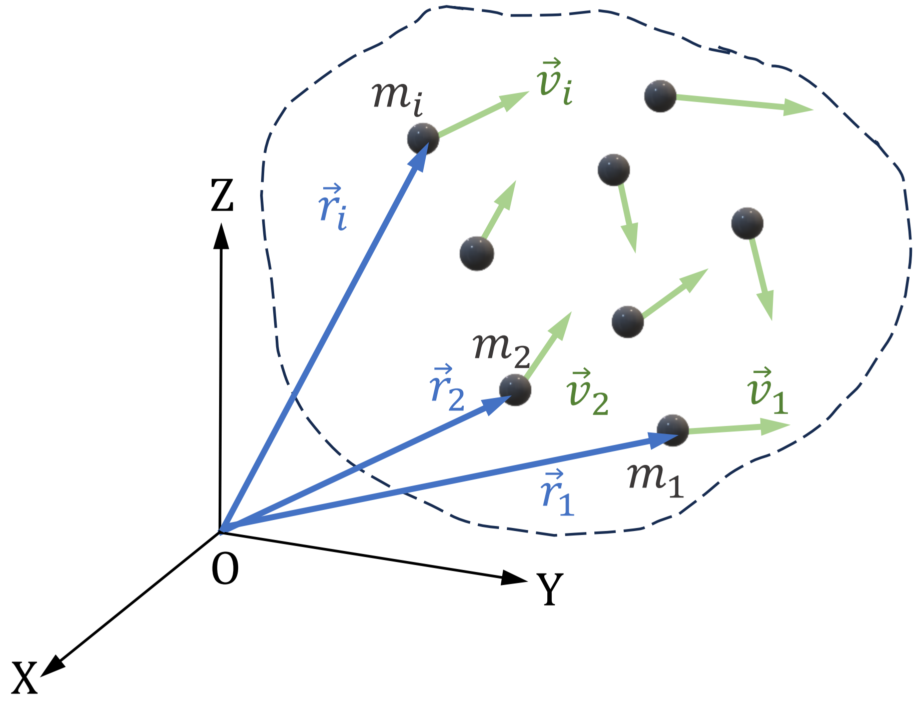
    No cambia su forma bajo la acción de fuerzas externas (sólido rígido)

  - **Deformable**

    Su forma cambia bajo la acción de fuerzas externas (elasticidad)

1.1. Introducción

Sistema discreto compuesto por n partículas ≫ $1 \leq i \leq n$



Cada partícula i tiene:

Masa m_i, Posición $\vec{r}_i$, Velocidad $\vec{v}_i$,

Momento lineal $\vec{p}_i$, Aceleración $\vec{a}_i$,

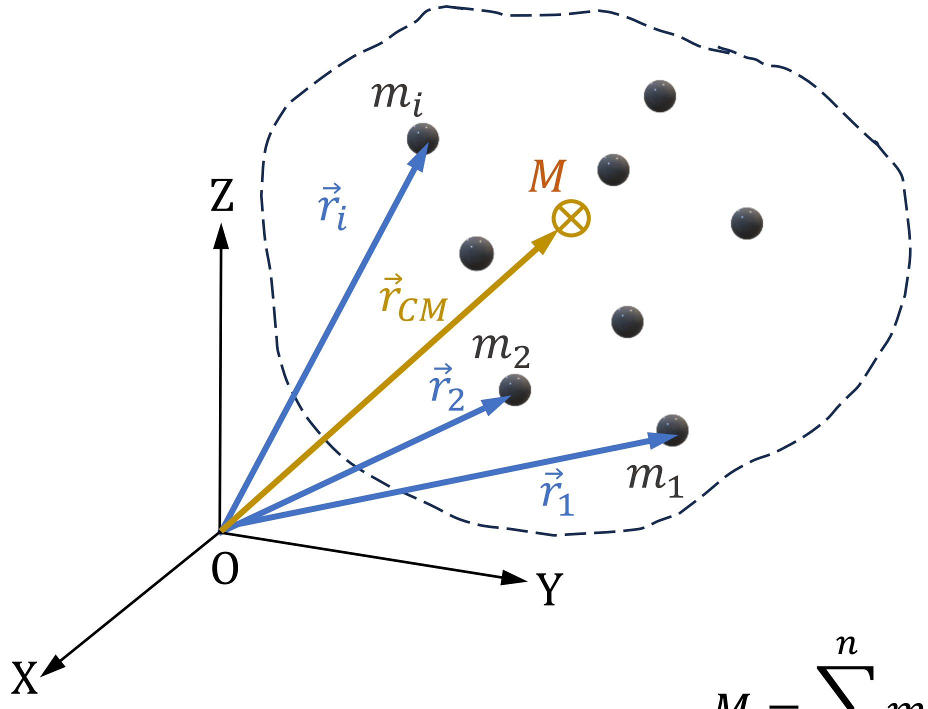
Momento angular $\vec{L}_i$, Energía cinética K_i, Energía potencial U_i,

Fuerza ejercida por otras partículas del sistema $\vec{F}_{ij}$, Fuerza ejercida por partículas externas del sistema $\vec{F}_i$

Contenidos

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Sistema discreto compuesto por n partículas ⮞ $1 \leq i \leq n$



El centro de masas (CM) es el punto en el que se considera concentrada toda la masa del sistema

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i^n m_i \vec{r}_i}{\sum_i^n m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i\vec{r}_i}$$

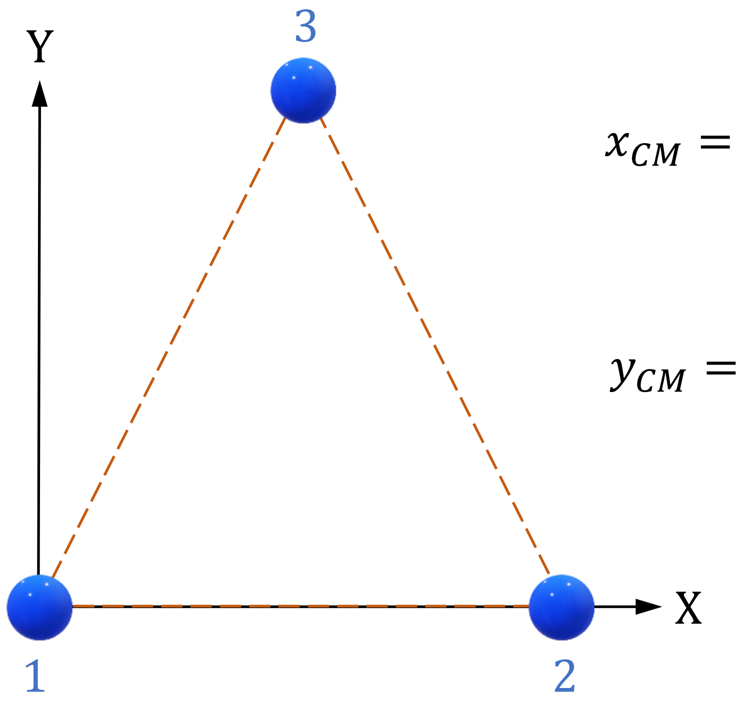
$$\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$$

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\imath} + y_{CM}\hat{\jmath} + z_{CM}\hat{k}$$

$$M = \sum_i^n m_i \quad \Big| \quad x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i x_i \quad \Big| \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i y_i \quad \Big| \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i z_i$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

En un instante dado, tres partículas de masas $m_1 = 1\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 2.2\ \mathrm{kg}$ y $m_3 = 3.4\ \mathrm{kg}$ están situadas formando un triángulo equilátero siendo sus posiciones en cm: $r_1 = (0{,}0)$, $r_2 = (140{,}0)$ y $r_3 = (70{,}121)$. Obtener la posición del centro de masas.

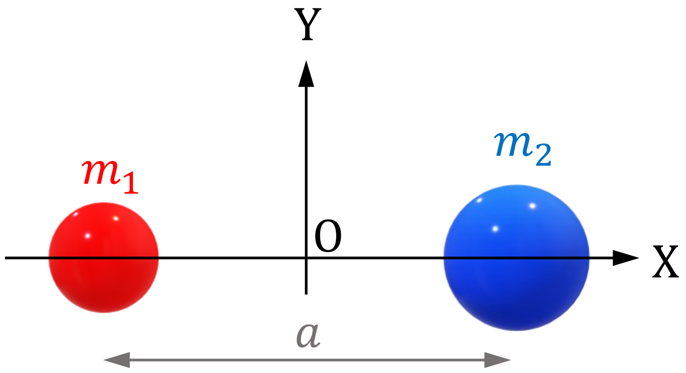


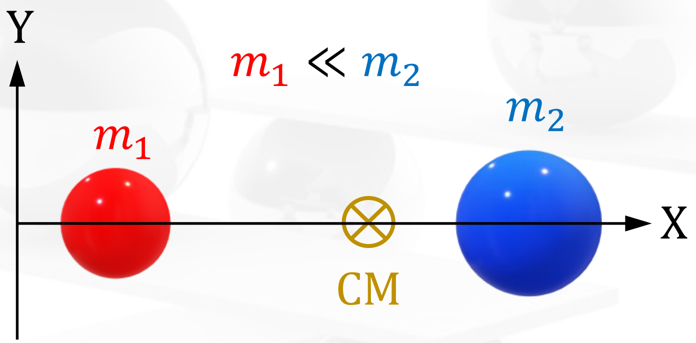
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.0 \cdot 0 + 2.2 \cdot 1.4 + 3.4 \cdot 0.7}{6.6} = 0.83\ \mathrm{m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.0 \cdot 0 + 2.2 \cdot 0 + 3.4 \cdot 1.21}{6.6} = 0.62\ \mathrm{m}$$

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\imath} + y_{CM}\hat{\jmath} = 0.83\hat{\imath} + 0.62\hat{\jmath}\ \mathrm{m}$$

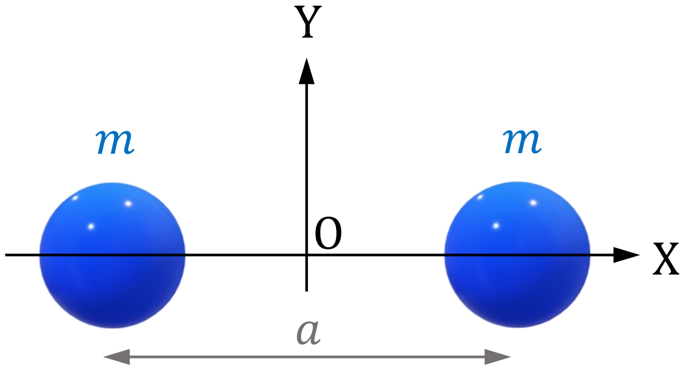
1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide





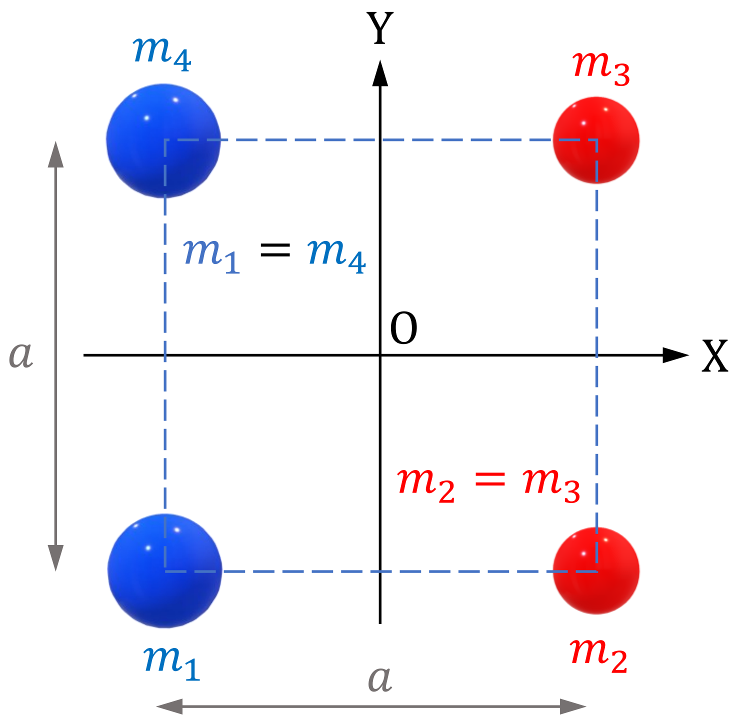
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i^n m_i \vec{r}_i}{\sum_i^n m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) \frac{a}{2} \hat{\imath}$$

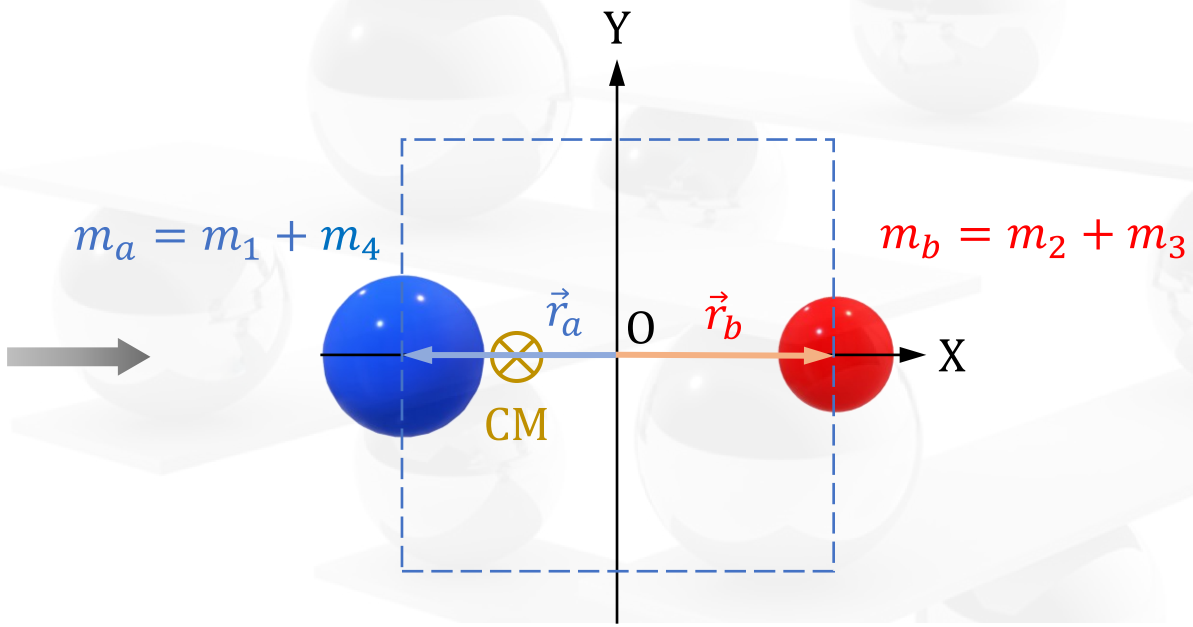
El CM de dos partículas de masas diferentes se encuentra entre ambas y más cerca de aquella que posee mayor masa



Si el sistema tiene algún plano, eje o punto de simetría, el CM estará sobre él

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide



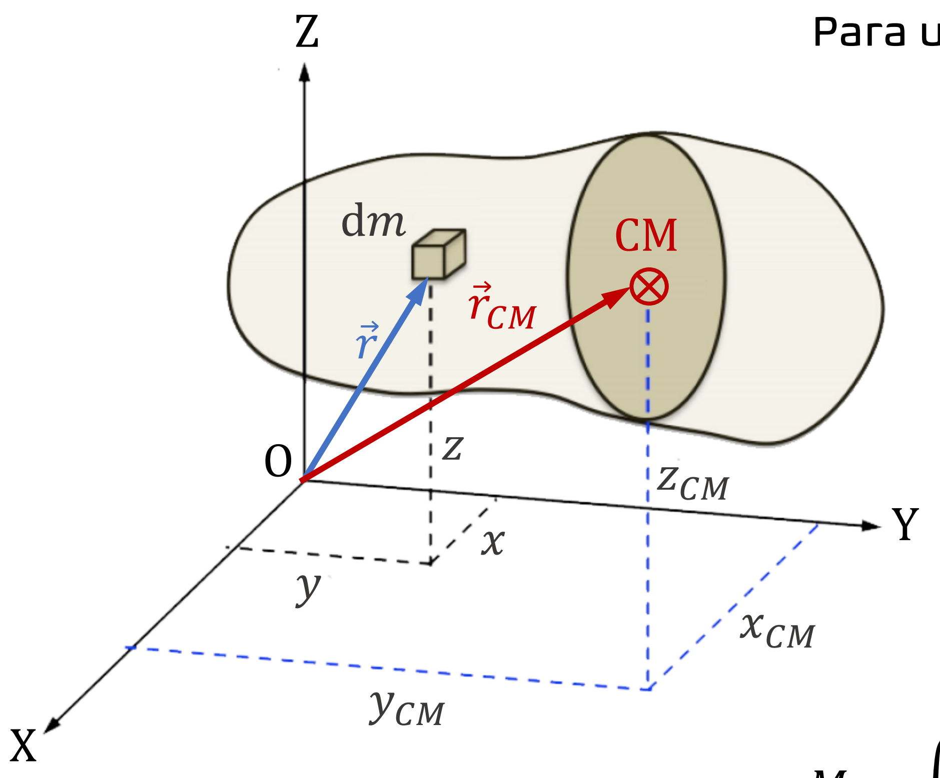


$$\vec{r}_a = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_4} = -\frac{a}{2}\hat{\imath} \qquad \vec{r}_b = \frac{m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_2 + m_3} = \frac{a}{2}\hat{\imath}$$

Se puede calcular el CM como una composición de partes del sistema

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_a\vec{r}_a + m_b\vec{r}_b}{m_a + m_b}$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide



Para un sistema continuo ➢ Las masas se sustituyen por integrales extendidas a toda la masa del cuerpo

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\int_M \vec{r}\,dm}{\int_M dm} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm}$$

$$\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$$

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\imath} + y_{CM}\hat{\jmath} + z_{CM}\hat{k}$$

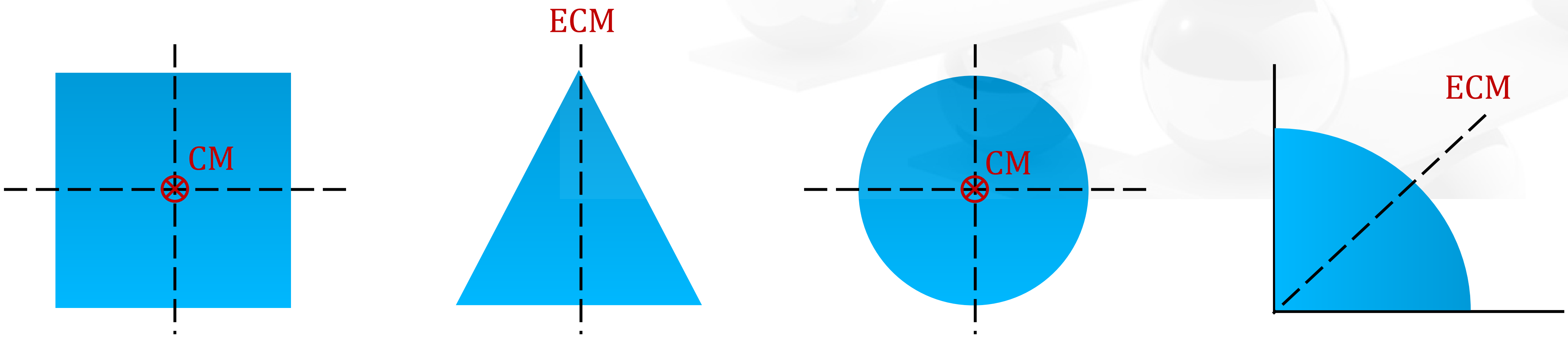
$$M = \int_M dm \quad\Big|\quad x_{CM} = \frac{1}{M}\int_M x\,dm \quad\Big|\quad y_{CM} = \frac{1}{M}\int_M y\,dm \quad\Big|\quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int_M z\,dm$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Si la distribución de masa presenta simetría respecto a un plano, el centro de masa está contenido en él

Si presenta simetría respecto a varios planos que se cortan en una recta, el centro de masa está situado en ella

Si presenta simetría respecto de varios planos que se cortan en un punto, éste es el centro de masa del cuerpo

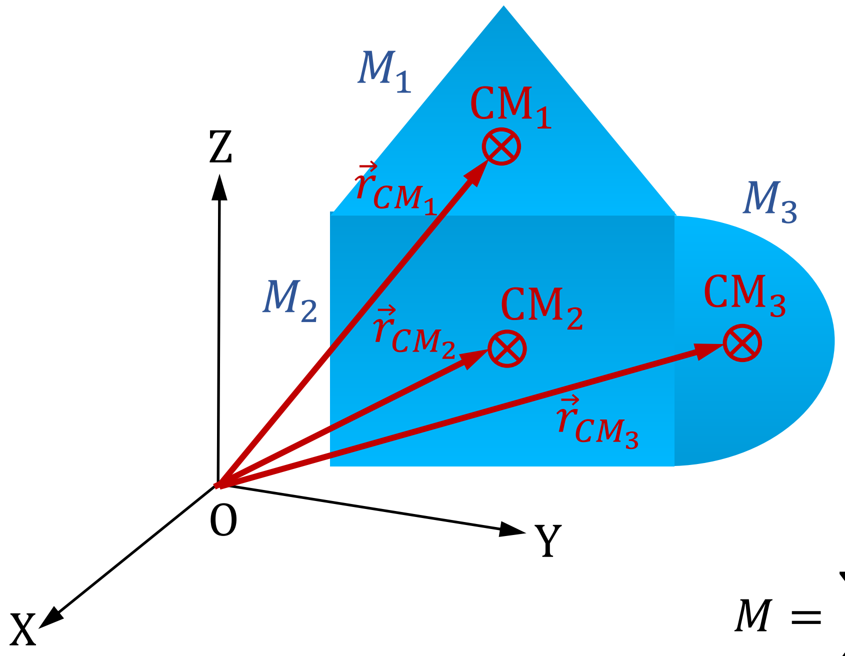


ECM ⮞ Eje que contiene al centro de masa

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

Cualquier cuerpo de masa M puede considerarse como la unión de n cuerpos de masas $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_N$



$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i^n M_i \vec{r}_{CM_i}}{\sum_i^n M_i} = \frac{1}{M}\sum_i^n M_i \vec{r}_{CM_i}}$$

$$\vec{r}_{CM_i} = x_{CM_i}\hat{\imath} + y_{CM_i}\hat{\jmath} + z_{CM_i}\hat{k}$$

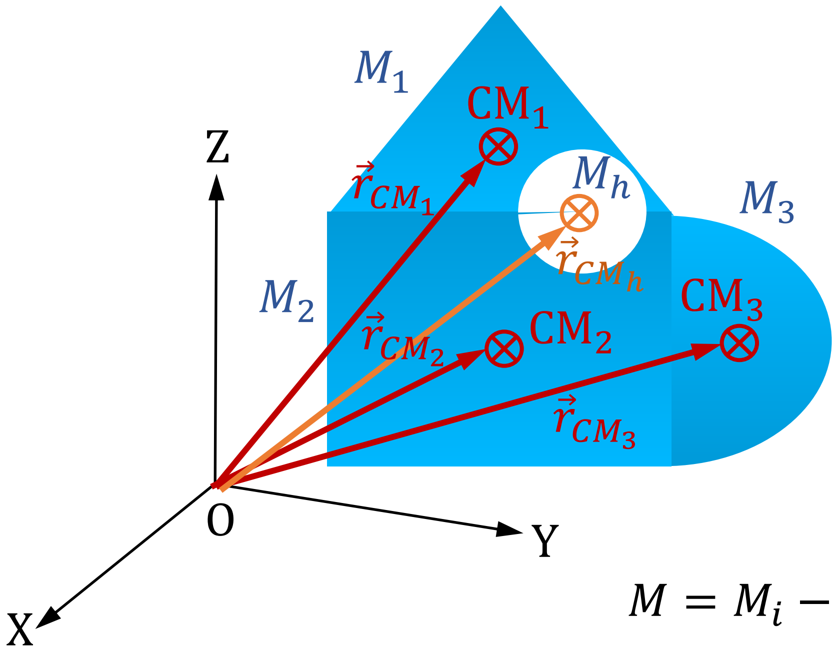
$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\imath} + y_{CM}\hat{\jmath} + z_{CM}\hat{k}$$

$$M = \sum_i^n M_i \quad \Bigg| \quad x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^n M_i x_{CM_i} \quad \Bigg| \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^n M_i y_{CM_i} \quad \Bigg| \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^n M z_{CM_i}$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

Un cuerpo con huecos puede considerarse como la unión de n cuerpos de masa total M_t y n' huecos con masa total negativa $(-M_h)$



$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i^n M_{ti}\vec{r}_{CMt_i} + \sum_j^{n'}(-M_{hj})\vec{r}_{CMh_j}}{M}}$$

$$\vec{r}_{CMt_i} = x_{CMt_i}\hat{\imath} + y_{CMt_i}\hat{\jmath} + z_{CMt_i}\hat{k} \quad \Bigg| \quad \vec{r}_{CMh_j} = x_{CMh_j}\hat{\imath} + y_{CMh_j}\hat{\jmath} + z_{CMh_j}\hat{k}$$

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\imath} + y_{CM}\hat{\jmath} + z_{CM}\hat{k}$$

$$M = M_i - M_h = \sum_i^n M_{ti} - \sum_i^{n'} M_{hi} \quad \Bigg| \quad x_{CM} = \frac{1}{M}\left(\sum_i^n M_{ti}x_{CMt_i} + \sum_j^{n'}(-M_{hj})x_{CMh_j}\right)$$

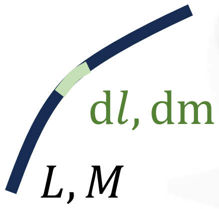
Ecuaciones análogas para y_{CM} y z_{CM}

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

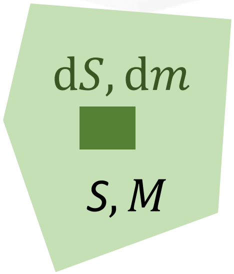
Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

Línea → Densidad lineal de masa (λ)



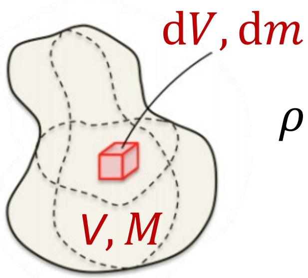
$\lambda = \dfrac{dm}{dl}$ ➤ $dm = \lambda dl$ | $\lambda = \dfrac{M}{L}$ Si λ constante

Superficie → Densidad superficial de masa (σ)



$\sigma = \dfrac{dm}{dS}$ ➤ $dm = \sigma dS$ | $\sigma = \dfrac{M}{S}$ Si σ constante

Volumen → Densidad volumétrica de masa (ρ)



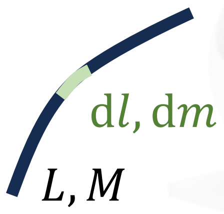
$\rho = \dfrac{dm}{dV}$ ➤ $dm = \rho dV$ | $\rho = \dfrac{M}{V}$ Si ρ constante

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

Línea → Densidad lineal de masa (λ)



$$\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$$

$$\lambda = \frac{M}{L} \quad \text{Si } \lambda \text{ constante}$$

Si λ constante

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_M \vec{r}\mathrm{d}m}{\int_M \mathrm{d}m} = \frac{\int_L \vec{r}\lambda \mathrm{d}l}{\int_L \lambda \mathrm{d}l} = \frac{\lambda \int_L \vec{r}\mathrm{d}l}{\lambda \int_L \mathrm{d}l} = \frac{\int_L \vec{r}\mathrm{d}l}{\int_L \mathrm{d}l} = \frac{1}{L}\int_L \vec{r}\mathrm{d}l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{L}\int_L \vec{r}\mathrm{d}l}$$

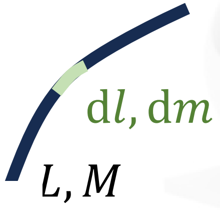
Cuerpo mucho más largo que grueso se puede aproximar por una *distribución lineal de masa*, con una sola dimensión

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

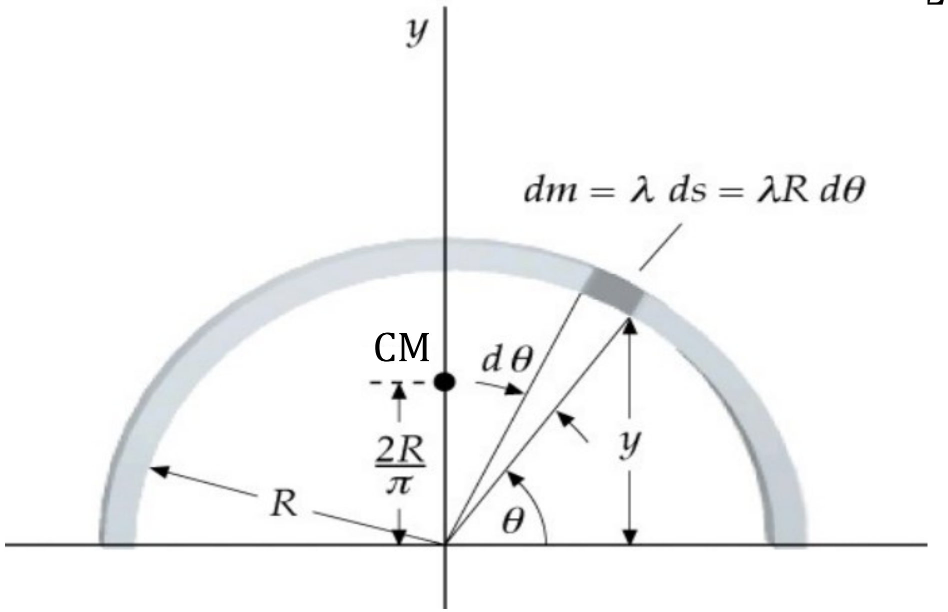
Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

Línea → Densidad lineal de masa (λ)



$$\lambda = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dl}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dm} = \lambda \mathrm{dl}$$

$$\lambda = \frac{M}{L}$$ Si λ constante



$$x_{CM} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi R} x\mathrm{dl} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} R\cos(\theta)\, R\mathrm{d}\theta = \frac{R^2}{L}\int_0^{\pi} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$$

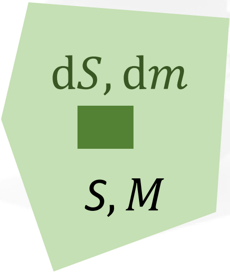
$$y_{CM} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi R} y\mathrm{dl} = \frac{1}{L}\int_0^{\pi} R\sin(\theta)\, R\mathrm{d}\theta = \frac{R^2}{\pi R}\int_0^{\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

Superficie → Densidad superficial de masa (σ)



$$\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S \qquad \Big| \qquad \sigma = \frac{M}{S} \quad \text{Si } \sigma \text{ constante}$$

Si σ constante $\Rightarrow$ $$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_M \vec{r}\mathrm{d}m}{\int_M \mathrm{d}m} = \frac{\int_S \vec{r}\sigma\mathrm{d}S}{\int_S \sigma\mathrm{d}S} = \frac{\sigma\int_S \vec{r}\mathrm{d}S}{\sigma\int_S \mathrm{d}S} = \frac{\int_S \vec{r}\mathrm{d}S}{\int_S \mathrm{d}S} = \frac{1}{S}\int_S \vec{r}\mathrm{d}S \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{S}\int_S \vec{r}\mathrm{d}S}$$

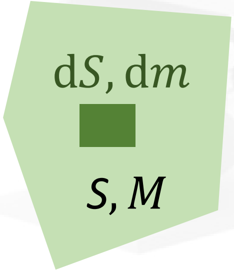
Cuerpo muy delgado en una de las tres dimensiones, se puede aproximar por una *distribución superficial de masas*, con dos dimensiones

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

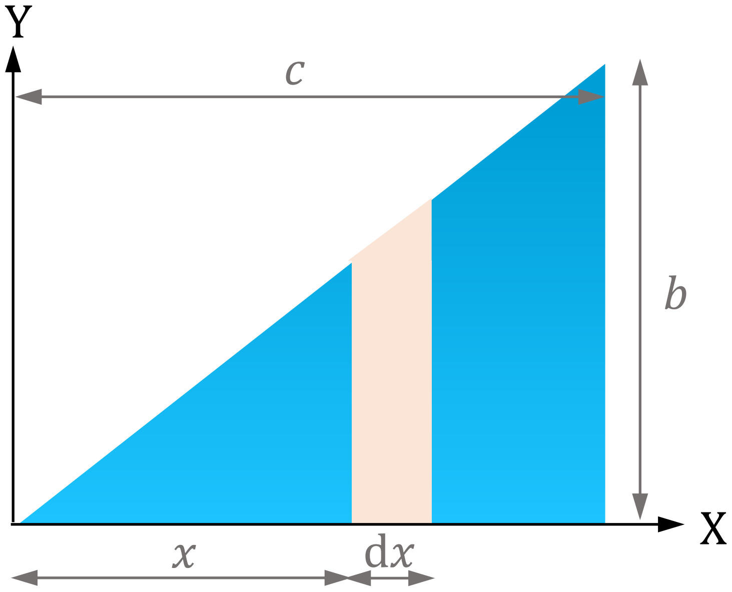
Centro de masas de cuerpos compuestos

Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

Superficie → Densidad superficial de masa (σ)



$$\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S \qquad \Big| \qquad \sigma = \frac{M}{S} \quad \text{Si } \sigma \text{ constante}$$



$$y(x) = \frac{b}{c}x \quad \Rightarrow \quad dS = y(x)\mathrm{d}x = \frac{b}{c}x\mathrm{d}x$$

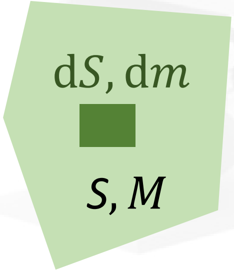
$$x_{CM} = \frac{1}{S}\int_S x\mathrm{d}S = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}cb}\right)\int_0^c x\frac{b}{c}x\mathrm{d}x = \frac{2}{c^2}\int_0^c x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}c$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

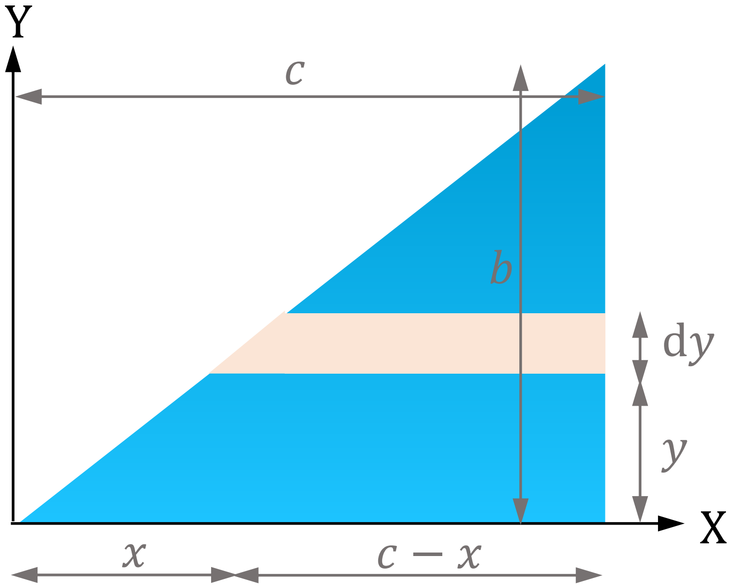
Centro de masas de cuerpos compuestos

Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

Superficie → Densidad superficial de masa (σ)



$$\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}S} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S \qquad \sigma = \frac{M}{S} \text{ Si } \sigma \text{ constante}$$



$$x(y) = \frac{c}{b} y \;\Rightarrow\; dS = [c - x(y)]\mathrm{d}y$$

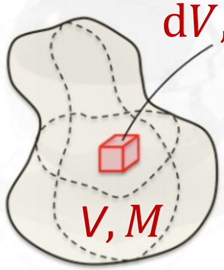
$$y_{CM} = \frac{1}{S} \int_S y \mathrm{d}S = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}cb}\right) \int_0^b y\left(c - \frac{b}{c}y\right) \mathrm{d}y = \frac{2}{b}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b}\right]_0^b = \frac{1}{3} b$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

Volumen → Densidad volumétrica de masa (ρ)



$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V \qquad \rho = \frac{M}{V} \quad \text{Si } \rho \text{ constante}$$

Si ρ constante

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_M \vec{r}\mathrm{d}m}{\int_M \mathrm{d}m} = \frac{\int_V \vec{r}\rho \mathrm{d}V}{\int_V \sigma \mathrm{d}V} = \frac{\rho \int_V \vec{r}\mathrm{d}V}{\rho \int_V \mathrm{d}V} = \frac{\int_V \vec{r}\mathrm{d}V}{\int_V \mathrm{d}V} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\mathrm{d}V}$$

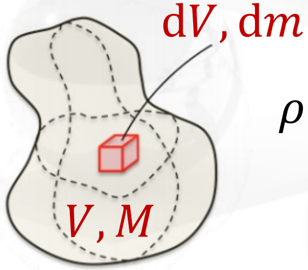
Cuerpo con tres dimensiones se puede aproximar con una *distribución volumétrica de masas*, con tres dimensiones

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de masas de cuerpos compuestos

Si la masa M está localizada en una línea, una superficie o un volumen, se puede calcular el centro de masa mediante integrales de línea, superficie o volumen, respectivamente

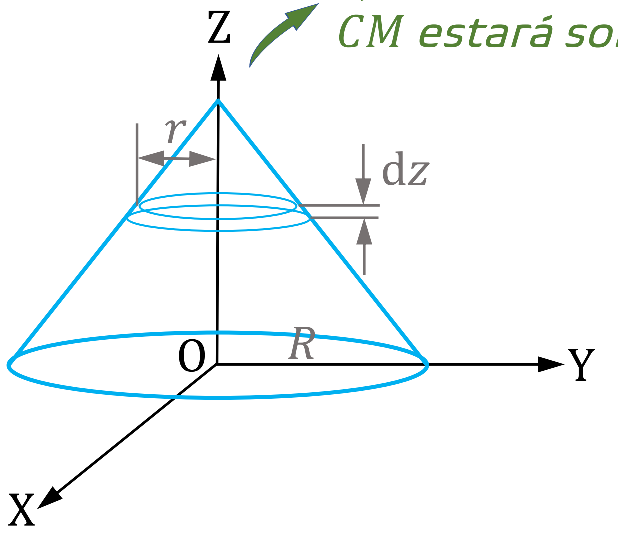
Volumen → Densidad volumétrica de masa (ρ)

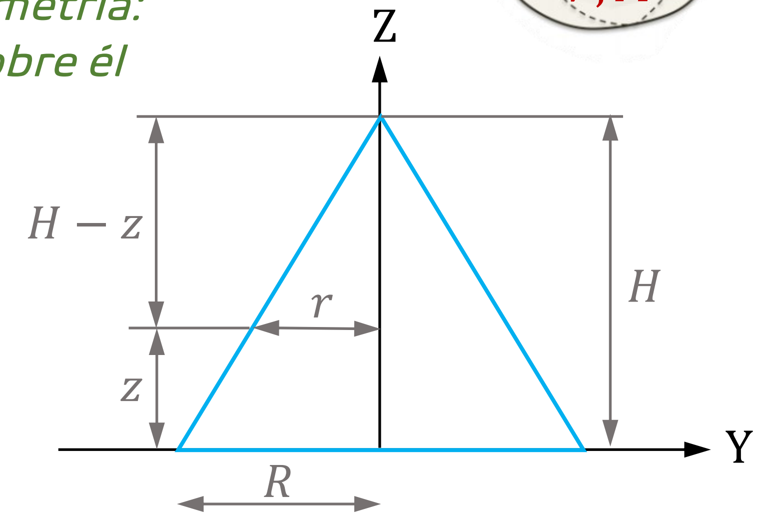


$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{Si } \rho \text{ constante}$$

Eje de simetría: CM estará sobre él



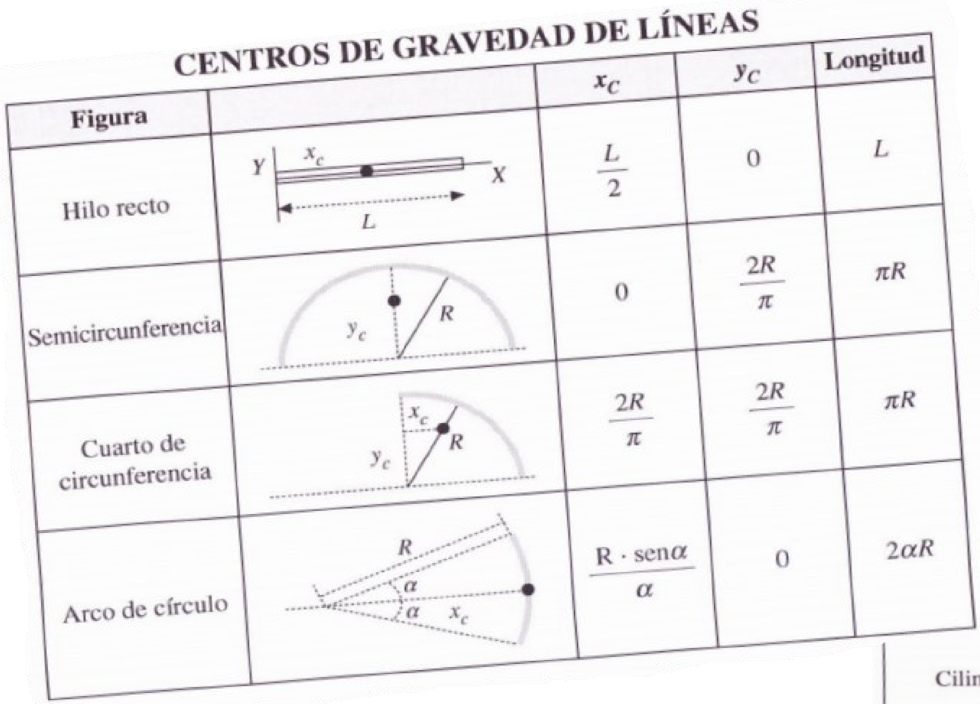


$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2 (H-z)^2}{H^2} \mathrm{d}z$$

$$z_{CM} = \frac{1}{V} \int_V z \mathrm{d}V = \left(\frac{1}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} \right) \int_0^H \frac{\pi R^2 (H-z)^2}{H^2} z \mathrm{d}z$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

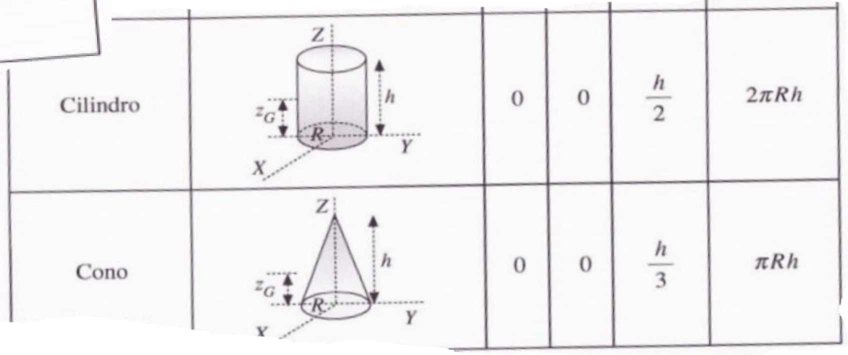
Centro de masas de cuerpos compuestos



CENTROS DE GRAVEDAD DE LÍNEAS

Figura		x_C	y_C	Longitud
Hilo recto		$\frac{L}{2}$	0	L
Semicircunferencia		0	$\frac{2R}{\pi}$	πR
Cuarto de circunferencia		$\frac{2R}{\pi}$	$\frac{2R}{\pi}$	πR
Arco de círculo		$\frac{R \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha R$

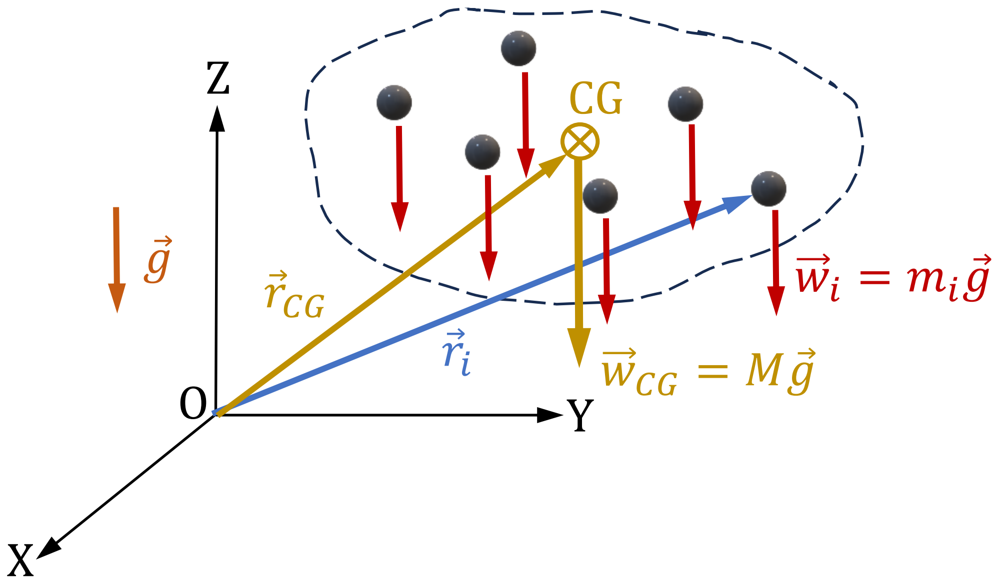
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$



Cilindro		0	0	$\frac{h}{2}$	$2\pi R h$
Cono		0	0	$\frac{h}{3}$	$\pi R h$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

- Centro de gravedad (CG) → El peso w de un cuerpo es la resultante de las fuerzas másicas distribuidas que la Tierra ejerce sobre los puntos materiales que constituyen el cuerpo. El punto en el que actúa el peso w es el *centro de gravedad* del cuerpo



$$\boxed{\vec{r}_{CG} = \frac{\sum_i^n w\vec{r}_i}{\sum_i^n w_i} = \frac{\sum_i^n m_i g\vec{r}_i}{\sum_i^n m_i g}}$$

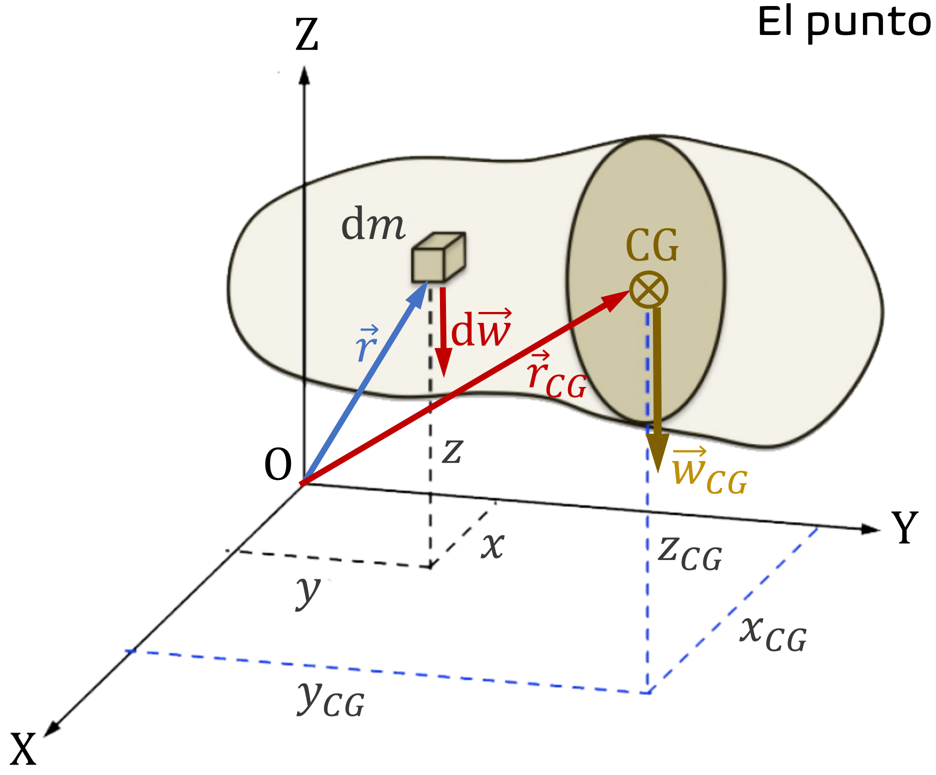
Cercanías de la superficie terrestre → Campo gravitatorio es constante; Aceleración es g en todos los puntos

$$\boxed{\vec{r}_{CG} \equiv \vec{r}_{CM}}$$

$$M = \sum_i^n m_i \quad\Big|\quad x_{CG} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i x_i \quad\Big|\quad y_{CG} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i y_i \quad\Big|\quad z_{CG} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i z_i$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

Centro de gravedad (CG) → El peso w de un cuerpo es la resultante de las fuerzas másicas distribuidas que la Tierra ejerce sobre los puntos materiales que constituyen el cuerpo. El punto en el que actúa el peso w es el *centro de gravedad* del cuerpo



Para un sistema continuo

$$\boxed{\vec{r}_{CG} = \frac{\int_w \vec{r}\mathrm{d}w}{\int_w \mathrm{d}w} = \frac{1}{w}\int_w \vec{r}\mathrm{d}w}$$

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}_{CG} = x_{CG}\hat{\imath} + y_{CG}\hat{\jmath} + z_{CG}\hat{k}$$

$$dw = gdm$$

$$w = Mg$$

$$g = \text{constante}$$

$$\vec{r}_{CG} = \frac{1}{w}\int_w \vec{r}\mathrm{d}w = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\mathrm{d}m$$

$$w = \int_w \mathrm{d}w = \int_M g\mathrm{d}m \qquad x_{CG} = \frac{1}{w}\int_w x\mathrm{d}w \qquad y_{CG} = \frac{1}{w}\int_w y\mathrm{d}w \qquad z_{CG} = \frac{1}{w}\int_w z\mathrm{d}w$$

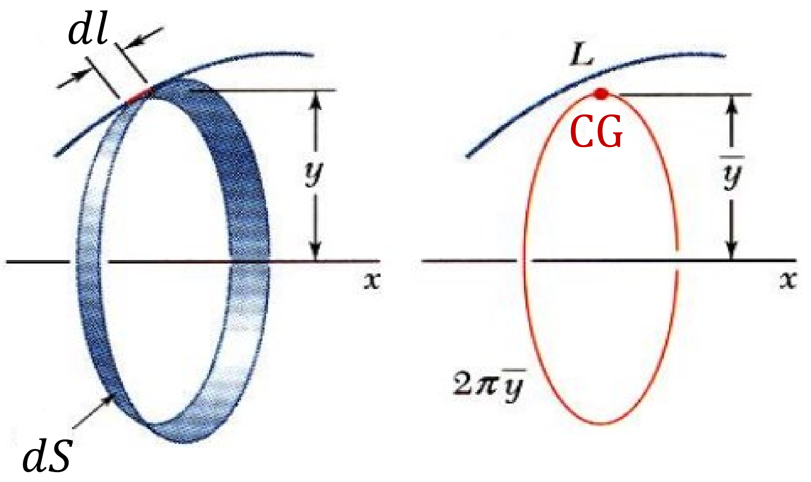
1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

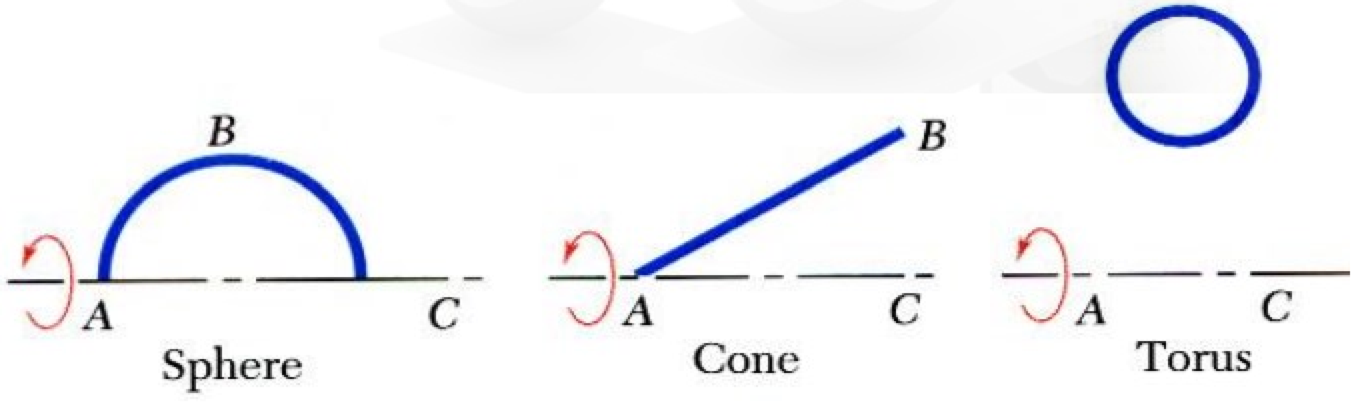
- Teoremas de Pappus-Guldin → Teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución

Un sólido de revolución es un cuerpo que puede obtenerse mediante una operación geométrica de rotación de una superficie plana alrededor de una recta contenida en su mismo plano

Primer teorema de Pappus-Guldin

El *área lateral* es igual al producto de la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la línea por la longitud de la línea misma





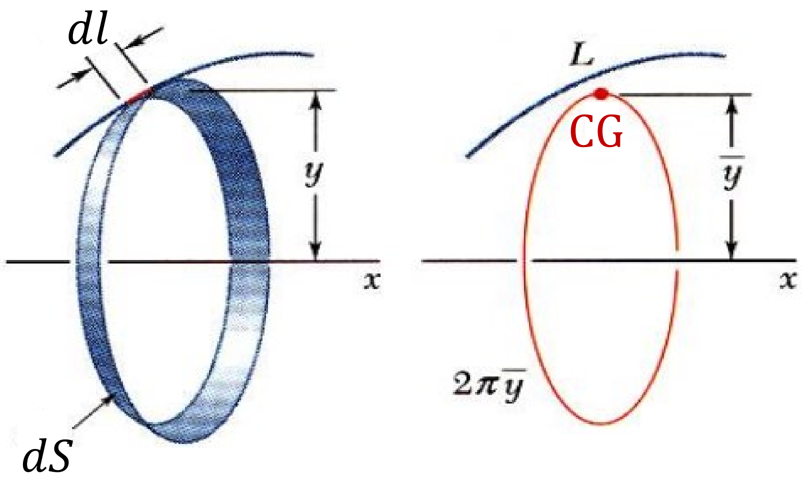
1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

- Teoremas de Pappus-Guldin → Teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución

Un sólido de revolución es un cuerpo que puede obtenerse mediante una operación geométrica de rotación de una superficie plana alrededor de una recta contenida en su mismo plano

Primer teorema de Pappus-Guldin

El *área lateral* es igual al producto de la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la línea por la longitud de la línea misma



$$dS = 2\pi y dl$$

$$S = \int_S dS = \int_L 2\pi y dl = 2\pi \int_L y dl = 2\pi y_{CG} L \quad \boxed{S = 2\pi y_{CG} L}$$

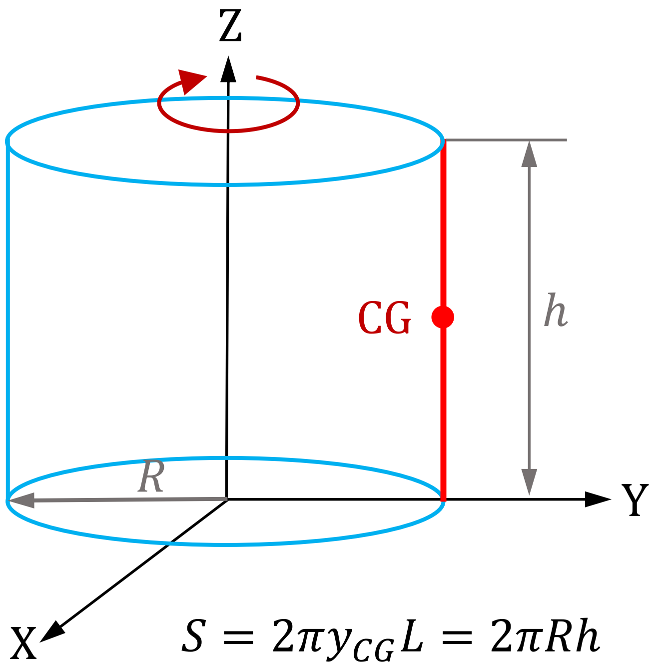
Sí la revolución se limita a un ángulo φ $\boxed{S = \varphi y_{CG} L}$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

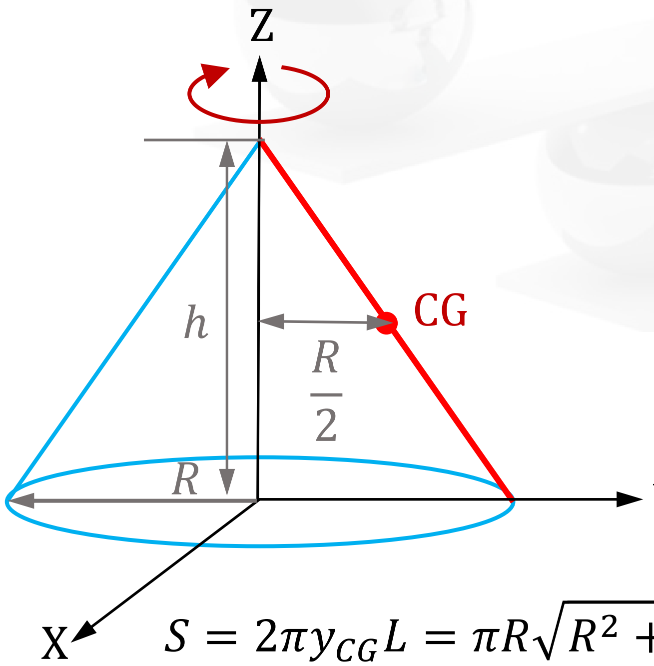
- Teoremas de Pappus-Guldin → Teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución

Primer teorema de Pappus-Guldin

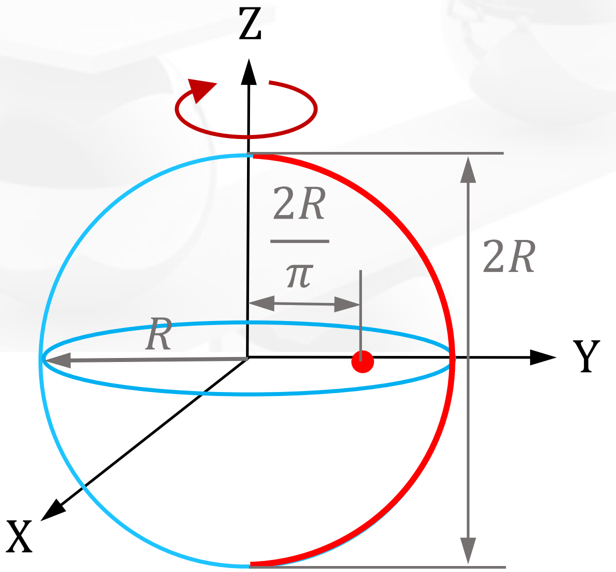
Conocido el centro de gravedad de la curva generatriz, se puede calcular el área de la superficie de revolución



$$S = 2\pi y_{CG} L = 2\pi R h$$



$$S = 2\pi y_{CG} L = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$



$$S = 2\pi y_{CG} L = 2\pi \frac{2R}{\pi} \pi R = 4\pi R^2$$

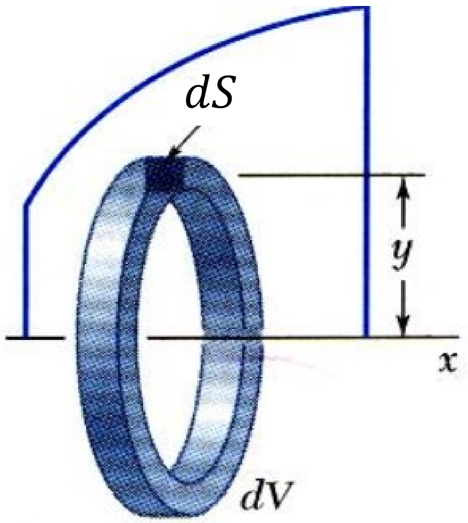
1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

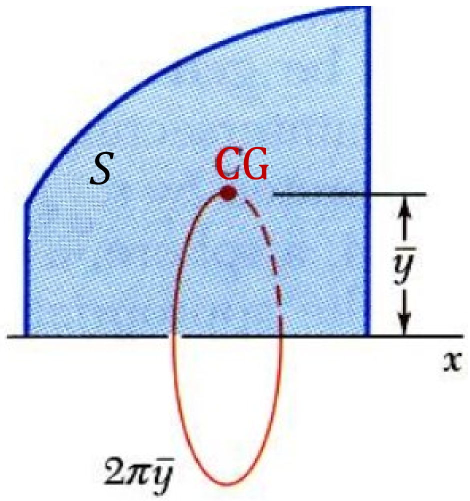
- Teoremas de Pappus-Guldin → Teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución

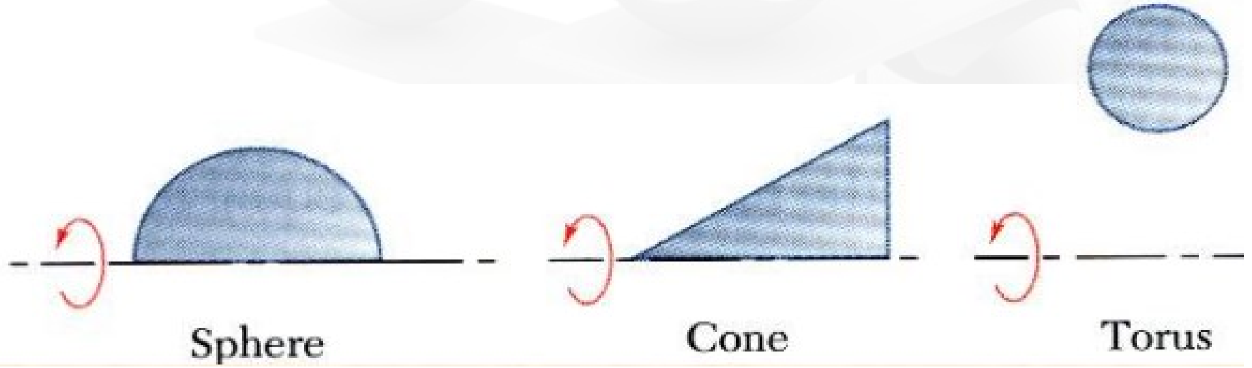
Un sólido de revolución es un cuerpo que puede obtenerse mediante una operación geométrica de rotación de una superficie plana alrededor de una recta contenida en su mismo plano

Segundo teorema de Pappus-Guldin

El *volumen* es igual al producto de la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la línea por el área de la superficie







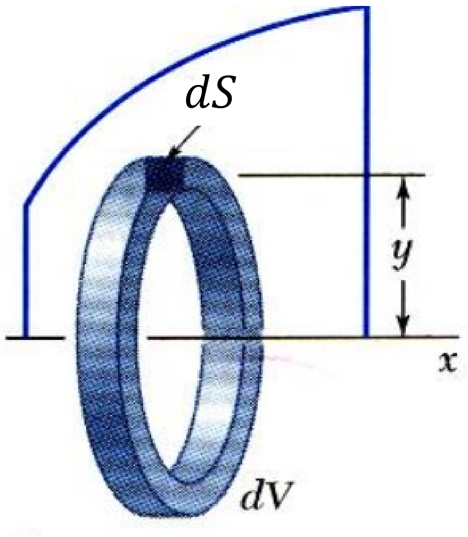
1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

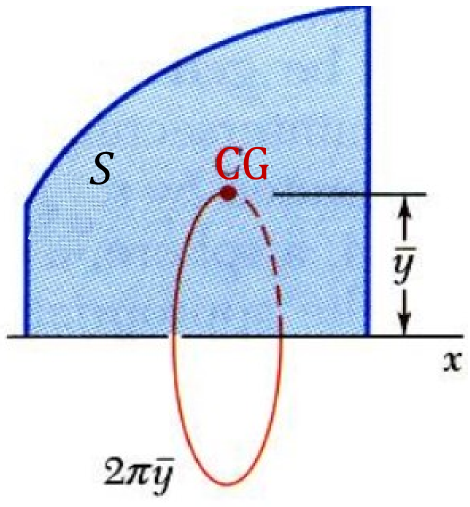
- Teoremas de Pappus-Guldin → Teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución

Un sólido de revolución es un cuerpo que puede obtenerse mediante una operación geométrica de rotación de una superficie plana alrededor de una recta contenida en su mismo plano

Segundo teorema de Pappus-Guldin

El *volumen* es igual al producto de la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la línea por el área de la superficie





$$dS = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$dV = [\pi(y + \mathrm{d}y)^2 - \pi \mathrm{d}y]\mathrm{d}x = 2\pi y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi y \mathrm{d}S$$

$$V = \int_V \mathrm{d}V = \int_S 2\pi y \mathrm{d}S = 2\pi \int_S y \mathrm{d}S = 2\pi y_{CG} S \quad \boxed{V = 2\pi y_{CG} S}$$

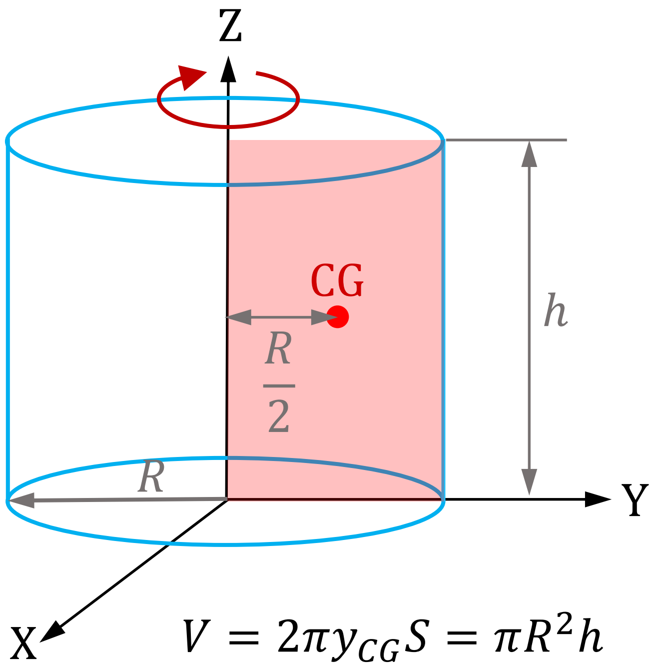
Sí la revolución se limita a un ángulo φ $\boxed{V = \varphi y_{CG} S}$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

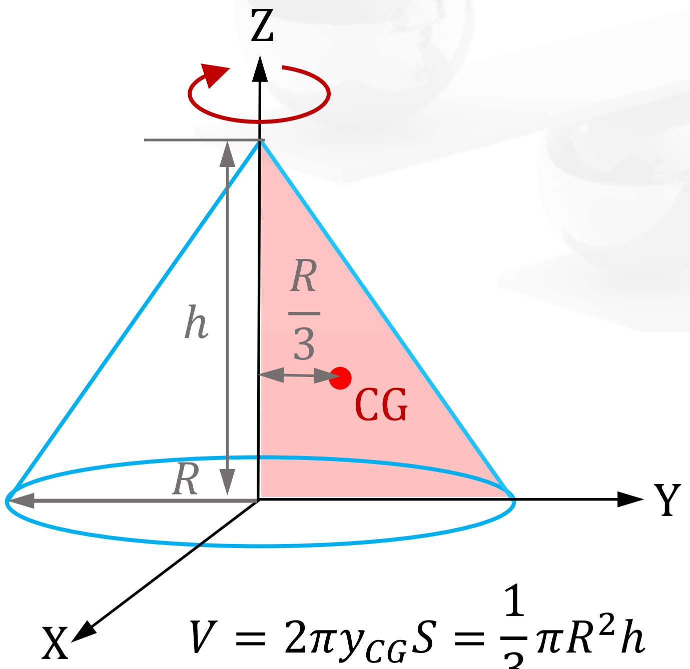
Teoremas de Pappus-Guldin → Teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución

Segundo teorema de Pappus-Guldin

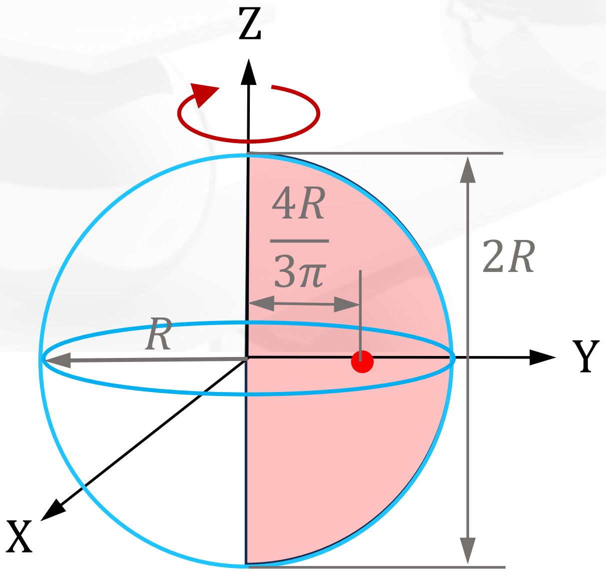
Conocido el área de la superficie generatriz se puede calcular el volumen del cuerpo de revolución



$$V = 2\pi y_{CG} S = \pi R^2 h$$



$$V = 2\pi y_{CG} S = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$



$$V = 2\pi y_{CG} S = \frac{4}{3}\pi R^3$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

- Centroide (C) → Se utiliza en relación con figuras geométricas (volúmenes, superficies y líneas). Los términos centro de masa y centro de gravedad se utilizan con cuerpos físicos

Si el cuerpo es homogéneo (densidad de masa es constante) → $\boxed{\vec{r}_C \equiv \vec{r}_{CM}}$ → Campo gravitatorio g es constante → $\boxed{\vec{r}_C \equiv \vec{r}_{CM} \equiv \vec{r}_{CG}}$

- *Centroide de una línea*

$$\vec{r}_C = \frac{1}{L}\int_L \vec{r}\mathrm{dl} \rightarrow x_C = \frac{1}{L}\int_L x\mathrm{dl} \quad \Big| \quad y_C = \frac{1}{L}\int_L y\mathrm{dl} \quad \Big| \quad z_C = \frac{1}{L}\int_L z\mathrm{dl}$$

Si λ constante → $\vec{r}_C = \frac{1}{L}\int_L \vec{r}\mathrm{dl} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\mathrm{dm} = \vec{r}_{CM}$ →

$$x_C = x_{CM}$$
$$y_C = y_{CM}$$
$$z_C = z_{CM}$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

- Centroide (C) ➡ Se utiliza en relación con figuras geométricas (volúmenes, superficies y líneas). Los términos centro de masa y centro de gravedad se utilizan con cuerpos físicos

- *Centroide de una superficie*

$$\vec{r}_C = \frac{1}{S}\int_S \vec{r}\,\mathrm{d}S \rightarrow x_C = \frac{1}{S}\int_S x\,\mathrm{d}S \quad \Big| \quad y_C = \frac{1}{S}\int_S y\,\mathrm{d}S \quad \Big| \quad z_C = \frac{1}{S}\int_S z\,\mathrm{d}S$$

Si σ constante ➡ $\vec{r}_C = \frac{1}{S}\int_S \vec{r}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,\mathrm{d}m = \vec{r}_{CM}$ ➡

$$x_C = x_{CM}$$
$$y_C = y_{CM}$$
$$z_C = z_{CM}$$

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

- Centroide (C) ➔ Se utiliza en relación con figuras geométricas (volúmenes, superficies y líneas). Los términos centro de masa y centro de gravedad se utilizan con cuerpos físicos

- *Centroide de un volumen*

$$\vec{r}_C = \frac{1}{V}\int_S \vec{r}\mathrm{d}V \rightarrow x_C = \frac{1}{V}\int_V x\mathrm{d}V \quad \Big| \quad y_C = \frac{1}{V}\int_V y\mathrm{d}V \quad \Big| \quad z_C = \frac{1}{V}\int_V z\mathrm{d}V$$

Si ρ constante ➔

$$\vec{r}_C = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\mathrm{d}V = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\mathrm{d}m = \vec{r}_{CM} \rightarrow \begin{cases} x_C = x_{CM} \\ y_C = y_{CM} \\ z_C = z_{CM} \end{cases}$$

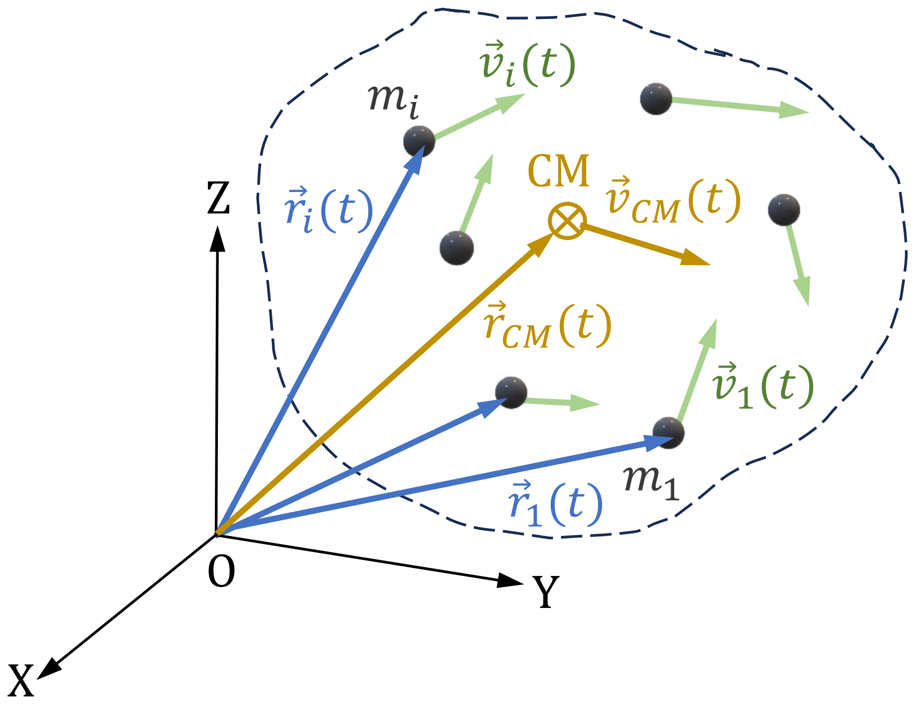
Cuando la aceleración de la gravedad pueda considerarse constante (en módulo, dirección y sentido) para todos los puntos del cuerpo y éste sea homogéneo, el centro de masa, el centro de gravedad y el centroide coinciden, pudiéndose usar estos tres términos indistintamente

1.2. Centro de masa, centro de gravedad y centroide

- **Estabilidad** → Si la vertical que pasa por el centro de masa cae dentro de la base del cuerpo, éste está estable. Por el contrario, si la vertical que pasa por el centro de masa cae fuera de la base del cuerpo, este vuelca

Contenidos

1.3. Movimiento del sistema de partículas



Si las partículas se mueven, la posición del CM varía en el tiempo

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i \vec{r}_i\,(t)$$

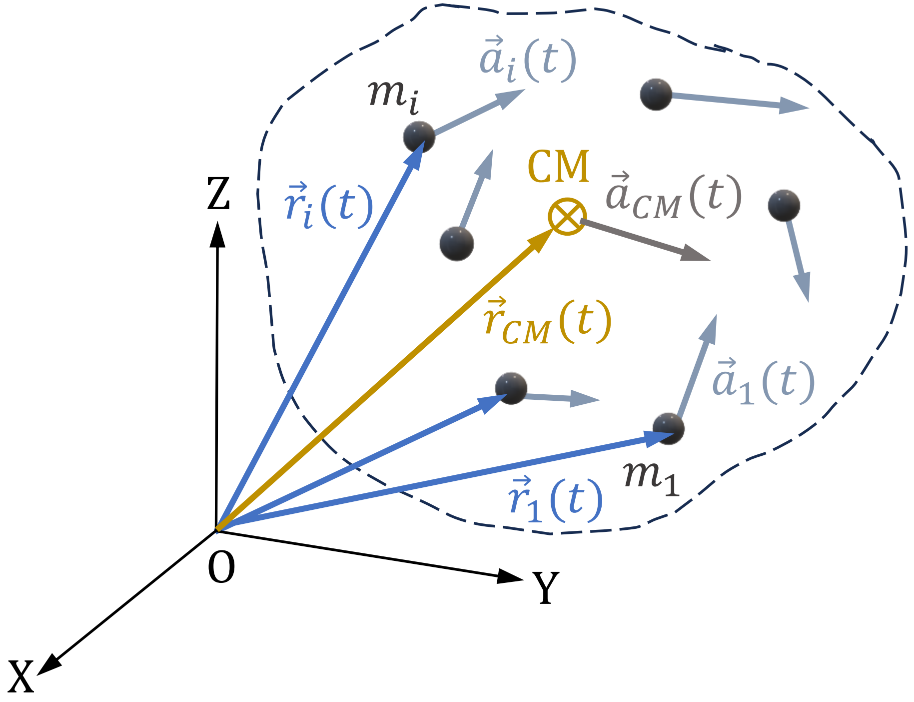
- Velocidad del CM (sistema discreto)

$$\vec{v}_{CM}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i \vec{v}_i(t)$$

Sistema discreto $\Rightarrow$ $$\boxed{M\vec{v}_{CM}(t) = \sum_i^n m_i \vec{v}_i(t)}$$

Sistema continuo $\Rightarrow$ $$\boxed{M\vec{v}_{CM}(t) = \int_M \vec{v}(t)\,\mathrm{d}m}$$

1.3. Movimiento del sistema de partículas



Si las partículas se mueven, la posición del CM varía en el tiempo

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i \vec{r}_i\,(t)$$

- Aceleración del CM (sistema discreto)

$$\vec{a}_{CM}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CM}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i \vec{a}_i(t)$$

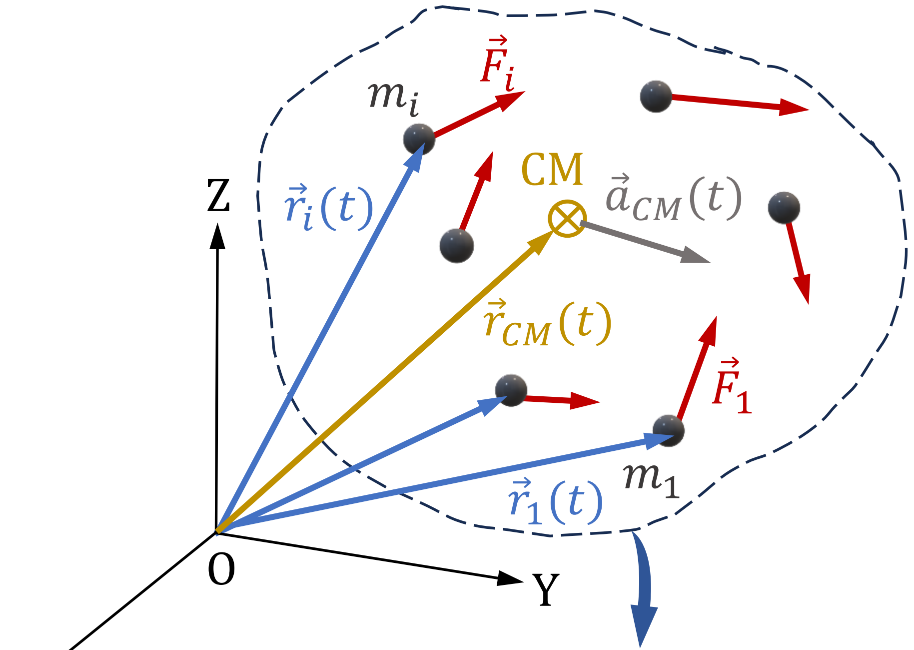
Sistema discreto

$$\boxed{M\vec{a}_{CM}(t) = \sum_i^n m_i \vec{a}_i(t)}$$

Sistema continuo

$$\boxed{M\vec{a}_{CM}(t) = \int_M \vec{a}(t)\,\mathrm{d}m}$$

1.3. Movimiento del sistema de partículas



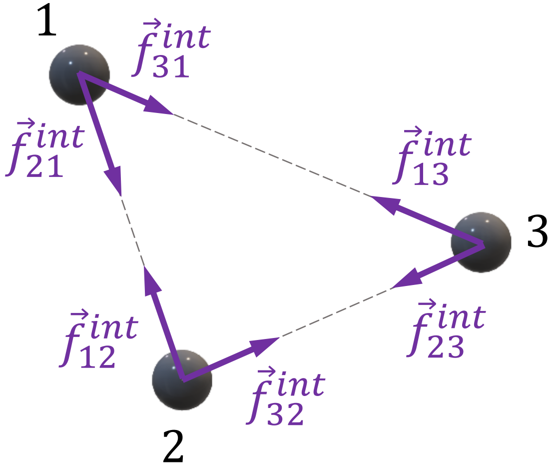
La fuerza total sobre cada partícula ($\vec{F}_i$) tiene una componente externa y otra interna

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i}^{n} \vec{f}_{ji}^{int}$$

$\vec{F}_i$ ≫ Fuerza total sobre la partícula i

$\vec{F}_i^{ext}$ ≫ Resultante de las fuerzas externas (fuera del sistema)

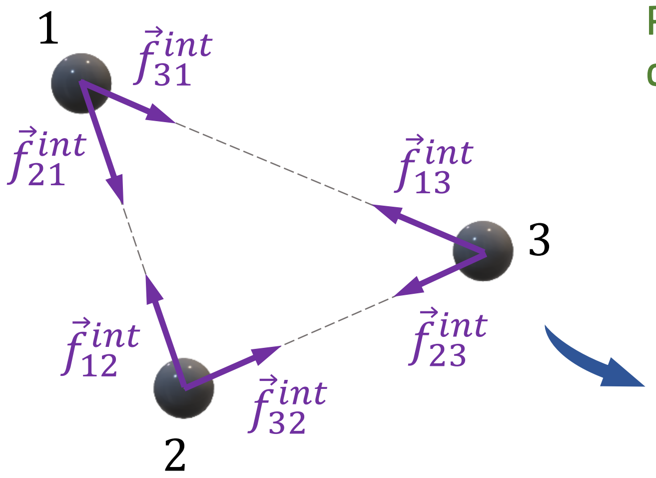
$\vec{F}_i^{int}$ ≫ Resultante de las fuerzas de interacción con las otras $n-1$ partículas del sistema



Por la tercera Ley de Newton, las fuerzas internas se anulan dos a dos y la componente interna de la fuerza total sobre el sistema de partículas es cero

$$\vec{F}^{int} = \sum_{i}^{n} \vec{F}_i^{int} = \sum_{i}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \vec{f}_{ji}^{int} = 0 \Leftarrow \vec{f}_{ji}^{int} = -\vec{f}_{ij}^{int}$$

1.3. Movimiento del sistema de partículas



Por la tercera Ley de Newton, las fuerzas internas se anulan dos a dos y la componente interna de la fuerza total sobre el sistema de partículas es cero

$$\vec{F}^{int} = \sum_{i}^{n} \vec{F}_i^{int} = \sum_{i}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \vec{f}_{ji}^{int} = 0 \Leftarrow \vec{f}_{ji}^{int} = -\vec{f}_{ij}^{int}$$

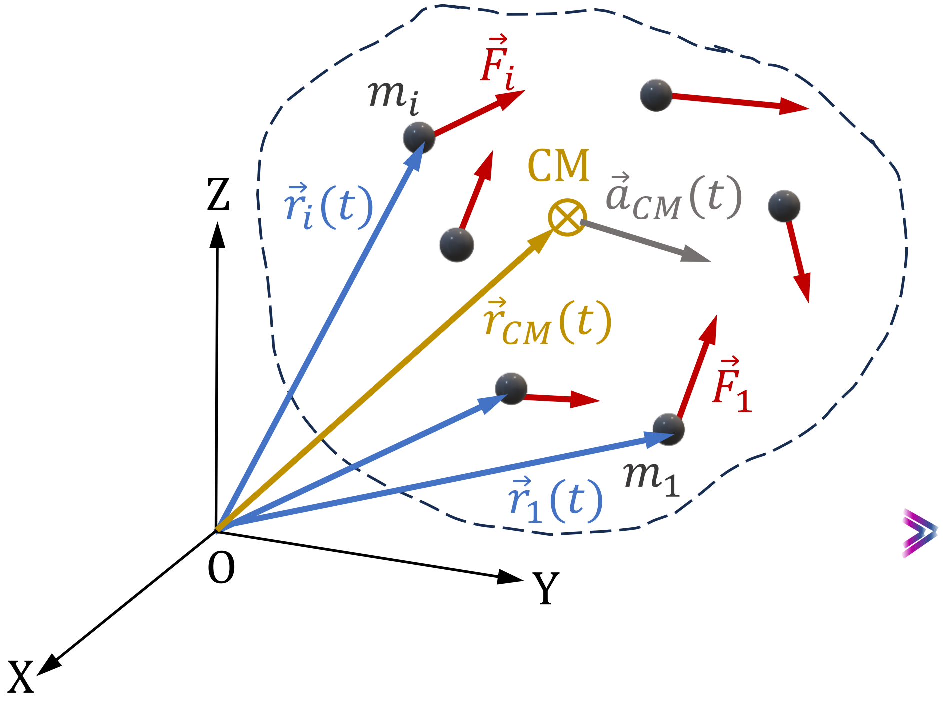
$$\vec{F}^{int} = \sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_i^{int} = \vec{F}_1^{int} + \vec{F}_2^{int} + \vec{F}_3^{int} = \sum_{j\neq 1}^{n=3} \vec{f}_{j1}^{int} + \sum_{j\neq 2}^{n=3} \vec{f}_{j2}^{int} + \sum_{j\neq 3}^{n=3} \vec{f}_{j3}^{int} =$$

$$= \left(\vec{f}_{21}^{int} + \vec{f}_{31}^{int}\right) + \left(\vec{f}_{12}^{int} + \vec{f}_{32}^{int}\right) + \left(\vec{f}_{13}^{int} + \vec{f}_{23}^{int}\right) = 0$$

- Los momentos de las fuerzas internas también se anulan (fuerzas internas son fuerzas centrales)

$$\vec{\tau}^{int} = \sum_{i}^{n} \vec{\tau}_i^{int} = \sum_{i}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}^{int} = 0 \Leftarrow \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}^{int} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij}^{int} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}^{int} + \vec{r}_j \times \left(-\vec{f}_{ji}^{int}\right) = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{f}_{ji}^{int} = 0$$

1.3. Movimiento del sistema de partículas



- Aplicando la segunda Ley de Newton

Para una partícula $\rightarrow$ $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$

$$M\vec{a}_{CM}(t) = \sum_i^n m_i\vec{a}_i(t) = \sum_i^n \vec{F}_i = \sum_i^n \vec{F}_i^{ext} + \sum_i^n \vec{F}_i^{int} = \sum_i^n \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

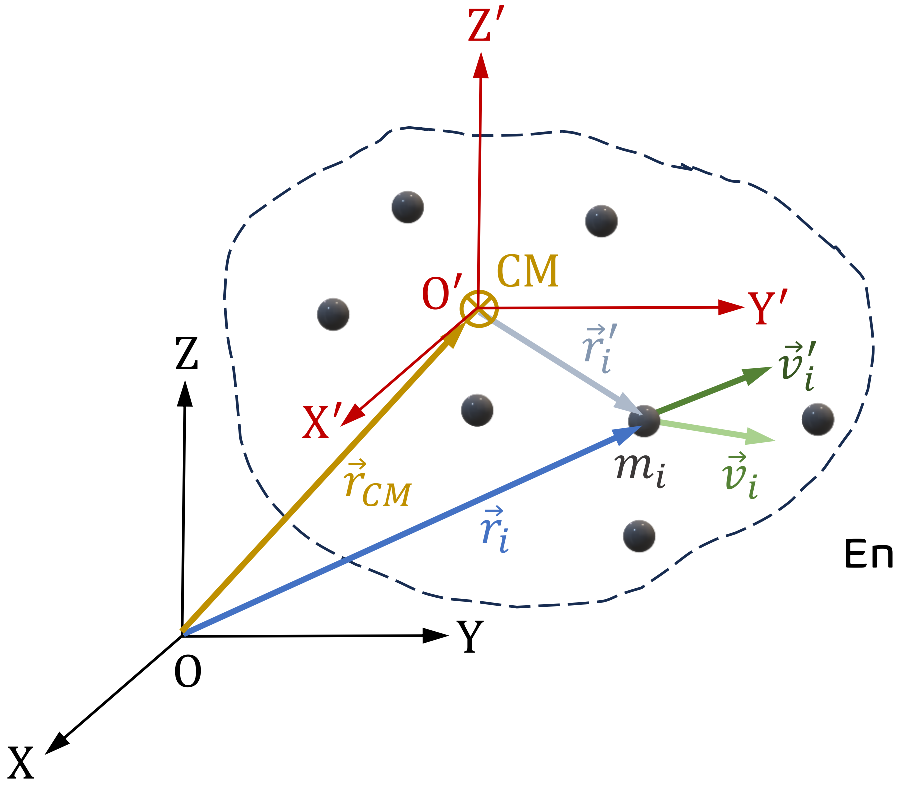
$$\boxed{M\vec{a}_{CM}(t) = \sum_i^n \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext}}$$

- El centro de masas se mueve como una sola partícula de masa M, sometida a la acción de la fuerza resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema

- En ausencia de fuerzas externas, el centro de masas se mueve con velocidad uniforme

1.3. Movimiento del sistema de partículas

Sistema de referencia del centro de masas



Si se describe las posiciones, velocidades y aceleraciones de todas las partículas del sistema con respecto a un sistema de referencia con origen en el centro de masas (SR-CM):

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_i' + \vec{a}_{CM}$$

En el SR-CM, la posición y velocidad del CM es nula puesto está en el origen

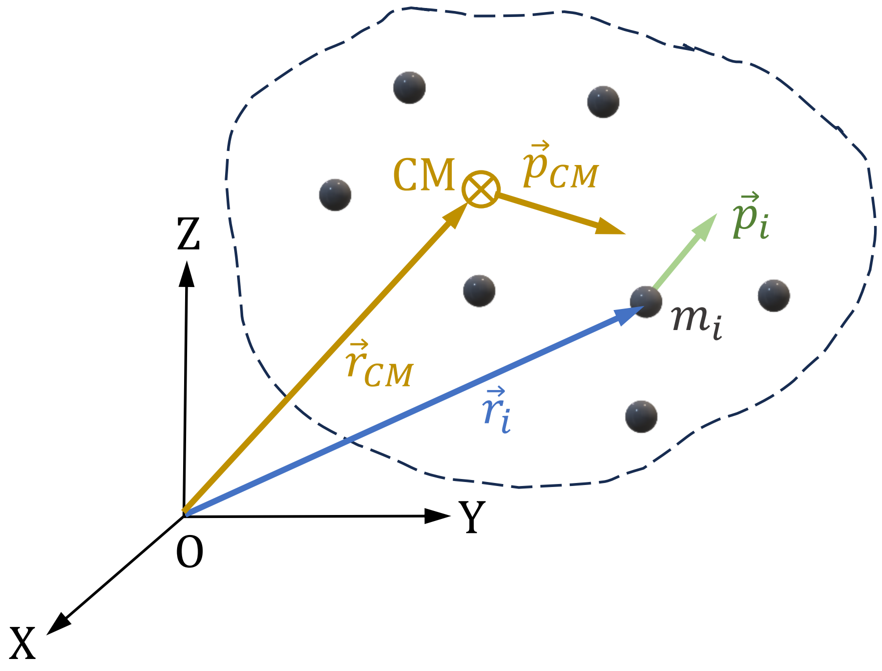
$$M\vec{r}_{CM}' = \sum_i^n m_i \vec{r}_i' = 0 \qquad M\vec{v}_{CM}' = \sum_i^n m_i \vec{v}_i' = 0$$

Contenidos

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

Momento lineal de un sistema de partículas $\vec{p}_{sist}$

El momento lineal total de un sistema de partículas es la suma de los momentos de cada una de las partículas que integran el sistema



Sistema discreto

$$\boxed{\vec{p}_{sist} = \sum_i^n \vec{p}_i = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM} = \vec{p}_{CM}}$$

Sistema continuo

$$\boxed{\vec{p}_{sist} = \int_M \mathrm{d}\vec{p} = \int_M \vec{v}\mathrm{d}m}$$

$\vec{p}_{sist}$ es como si toda su masa estuviera concentrada en el CM y se moviera con velocidad $\vec{v}_{CM}$

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

- Momento lineal de un sistema de partículas $\vec{p}_{sist}$

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{sist}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_{CM}(t) = \sum_{i}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i}^{n} \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_{neta}^{ext}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{sist}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_{CM}(t) = \vec{F}_{neta}^{ext}}$$

- El cambio del $\vec{p}_{sist}$ en un sistema de partículas sólo puede ser producido por las fuerzas externas
- Las fuerzas internas no pueden cambiar el $\vec{p}_{sist}$ del sistema y, por tanto, tampoco su posición

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

- Momento lineal de un sistema de partículas $\vec{p}_{sist}$

Conservación del momento lineal

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{sist}}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_{CM}(t) = \vec{F}^{ext}_{neta}} \rightarrow \vec{F}^{ext}_{neta} = \sum_i^n \vec{F}^{ext}_i = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{sist}}{\mathrm{d}t} = 0 \rightarrow \vec{p}_{sist} = constante$$

Si alguna componente de la fuerza es nula se conserva el momento lineal en esa componente

- $\sum_i^n \vec{F}^{ext}_{i,x} = 0 \rightarrow \vec{p}_{sist,x} = constante$

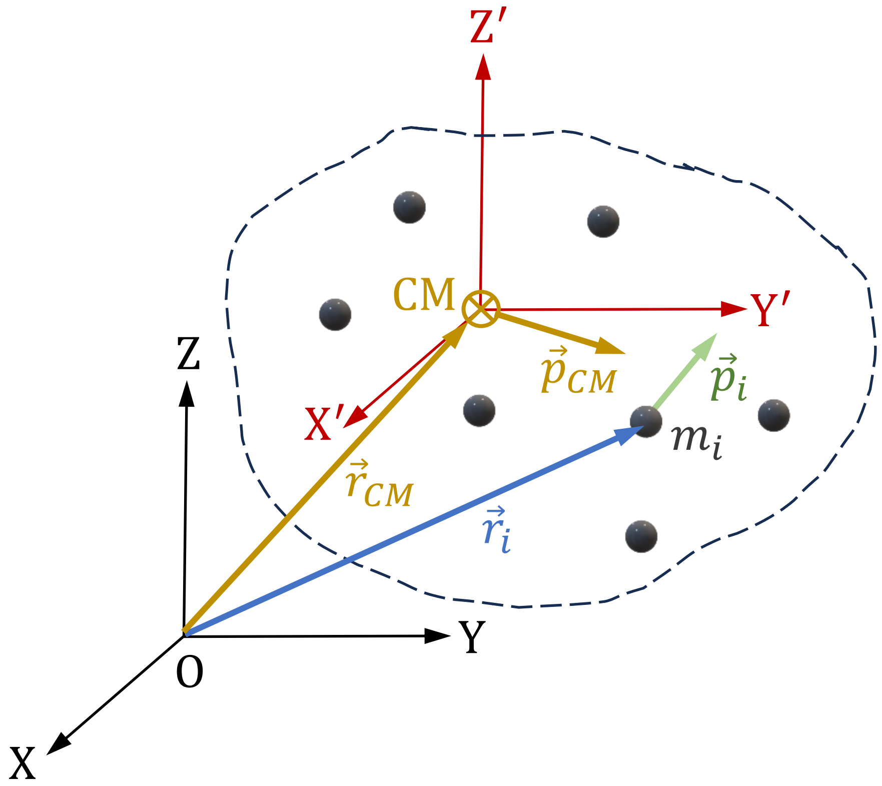
De forma análoga para las componentes y y z

- La cantidad de movimiento de un sistema se conserva si la fuerza neta sobre él es nula
- Si la fuerza neta es nula, el centro de masas o esta quieto o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

Momento lineal de un sistema de partículas $\vec{p}_{sist}$

$\vec{p}_{sist}$ respecto sistema de referencia con origen en el centro de masas (SR-CM) → $\vec{p}'_{sist}$



La velocidad del CM en el SR-CM es nula puesto está en el origen

$$M\vec{v}'_{CM} = \sum_i^n m_i \vec{v}'_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}'_{sist} = \sum_i^n \vec{p}'_i = 0$$

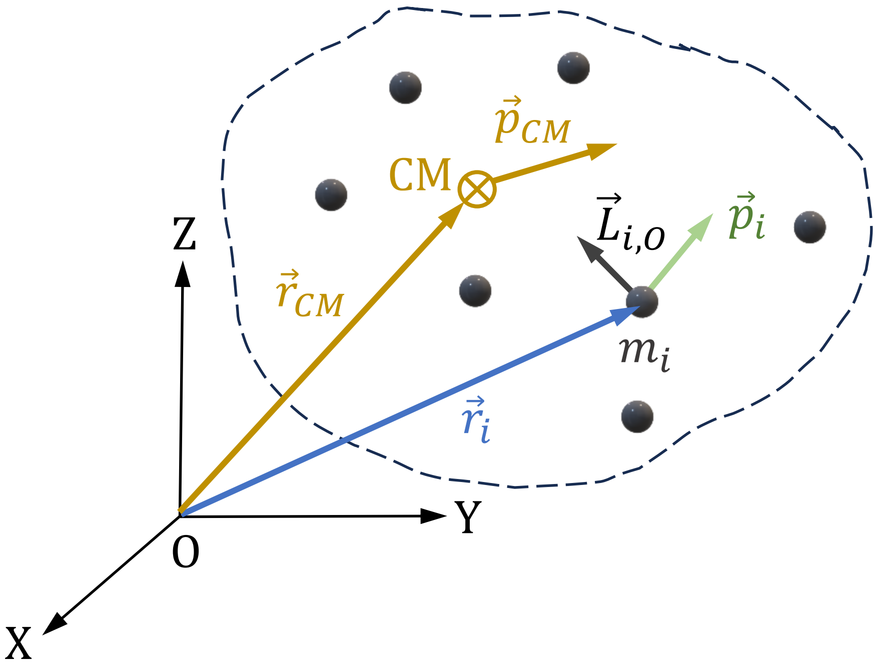
$$\vec{p}_{sist} = M\vec{v}_{CM} = \sum_i^n \vec{p}_i = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = \sum_i^n m_i(\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i^n m_i \vec{v}'_i + \sum_i^n m_i \vec{v}_{CM} = \vec{p}'_{sist} + M\vec{v}_{CM} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}'_{sist} = 0$$

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

Momento angular de un sistema de partículas $\vec{L}_{sist}$

El momento angular del sistema respecto del punto O ($\vec{L}_{sist,o}$) es la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas que lo componen respecto del mismo punto



- $\vec{L}$ depende del origen O elegido

Sistema discreto

$$\boxed{\vec{L}_{sist,O} = \sum_i^n \vec{L}_{i,O} = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

Sistema continuo

$$\boxed{\vec{L}_{sist,O} = \int_M \mathrm{d}\vec{L}_O = \int_M \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{p} = \int_M \vec{r} \times \vec{v}\mathrm{d}m}$$

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

- Momento angular de un sistema de partículas $\vec{L}_{sist}$

$$\boxed{\vec{L}_{sist,O} = \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{sist,O}}{\mathrm{dt}} = \sum_{i}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{dt}} \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{dt}} = \sum_{i}^{n} \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i =$$

$$= \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \overbrace{\sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int}}^{=0} = \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i}^{n} \vec{\tau}_{i,O}^{ext} = \vec{\tau}_O^{ext}$$

$$\sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int} = \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i}^{n} \vec{f}_{ji}^{int} \right) = \sum_{i}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}^{int} = \sum_{i}^{n} \vec{\tau}_i^{int} = 0$$

- Las fuerzas internas no modifican el $\vec{L}_{sist}$
- La variación del $\vec{L}_{sist}$ es igual al $\vec{\tau}^{ext}$ resultante de las fuerzas externas que actúa sobre las partículas

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

Momento angular de un sistema de partículas $\vec{L}_{sist}$

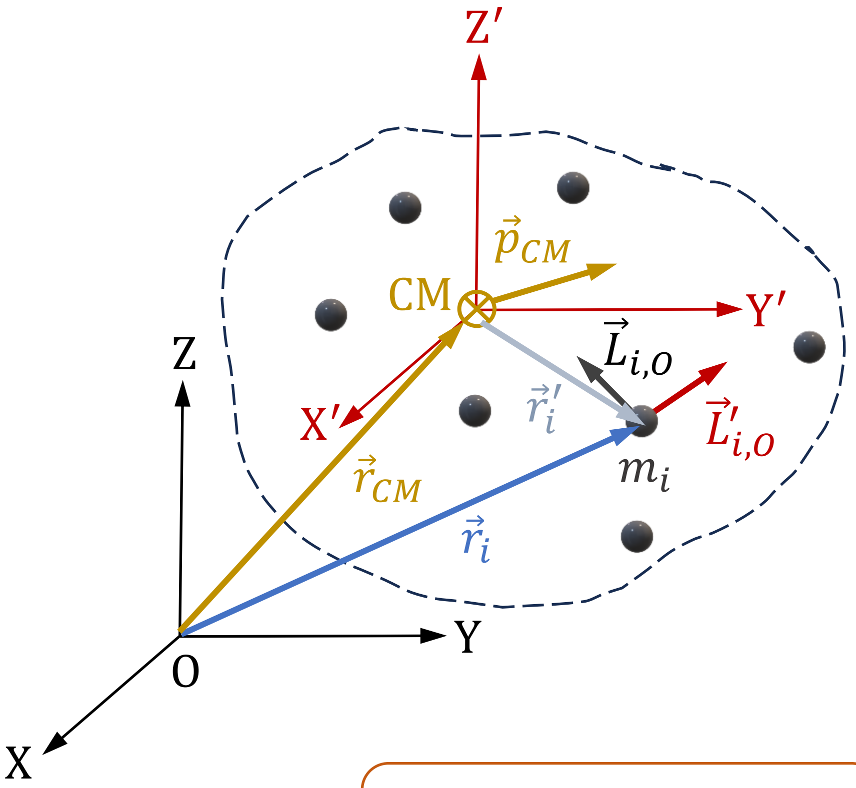
Conservación del momento angular

$$\boxed{\vec{L}_{sist,O} = \sum_{i}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{\tau}_O^{ext}} \rightarrow \vec{\tau}_O^{ext} = \sum_{i}^{n} \vec{\tau}_{i,O}^{ext} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{sist,O}}{\mathrm{d}t} = 0 \rightarrow \vec{L}_{sist,O} = constante$$

Si el momento de las fuerzas exteriores respecto a un punto es nulo, o el sistema es aislado ($\vec{F}^{ext}$), el momento angular del sistema de partículas respecto del mismo punto permanece constante en magnitud y dirección

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

Momento angular de un sistema de partículas $\vec{L}_{sist}$



$$\vec{L}_{sist,O} = \sum_i^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i^n (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i(\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_i^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_i^n \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i^n \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} =$$

$$= \sum_i^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \underbrace{\left(\sum_i^n m_i \vec{r}_i'\right)}_{=0} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \underbrace{\left(\sum_i^n m_i \vec{v}_i'\right)}_{=0} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_i^n m_i\right) \vec{v}_{CM} =$$

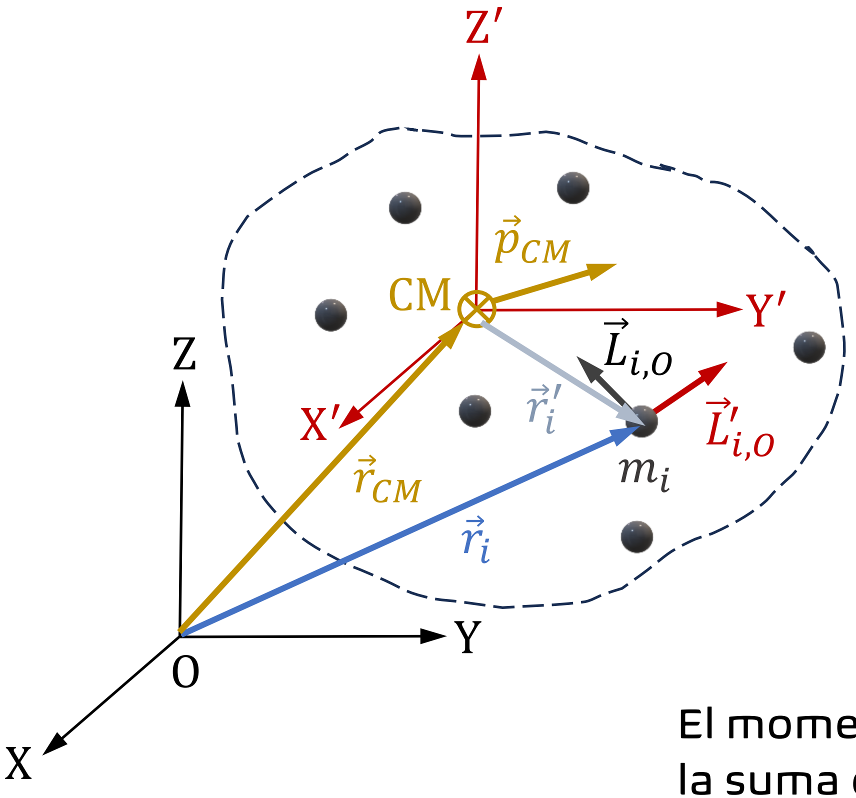
$$= \vec{L}'_{sist} + 0 \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times 0 + \vec{L}^{CM}_{sist,O} = \vec{L}'_{sist} + \vec{L}^{CM}_{sist,O}$$

$$\boxed{\vec{L}_{sist,O} = \vec{L}^{CM}_{sist,O} + \vec{L}'_{sist}}$$

- $\vec{L}_{sist,O}$ → Momento angular del sistema respecto del punto O
- $\vec{L}^{CM}_{sist,O}$ → Momento angular del CM respecto del punto O
- $\vec{L}'_{sist}$ → Momento angular del sistema respecto del CM

1.4. Momento lineal y momento angular. Conservación

Momento angular de un sistema de partículas $\vec{L}_{sist}$



$$\boxed{\vec{L}_{sist,O} = \vec{L}_{sist,O}^{CM} + \vec{L}_{sist}' = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \sum_i^n \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}$$

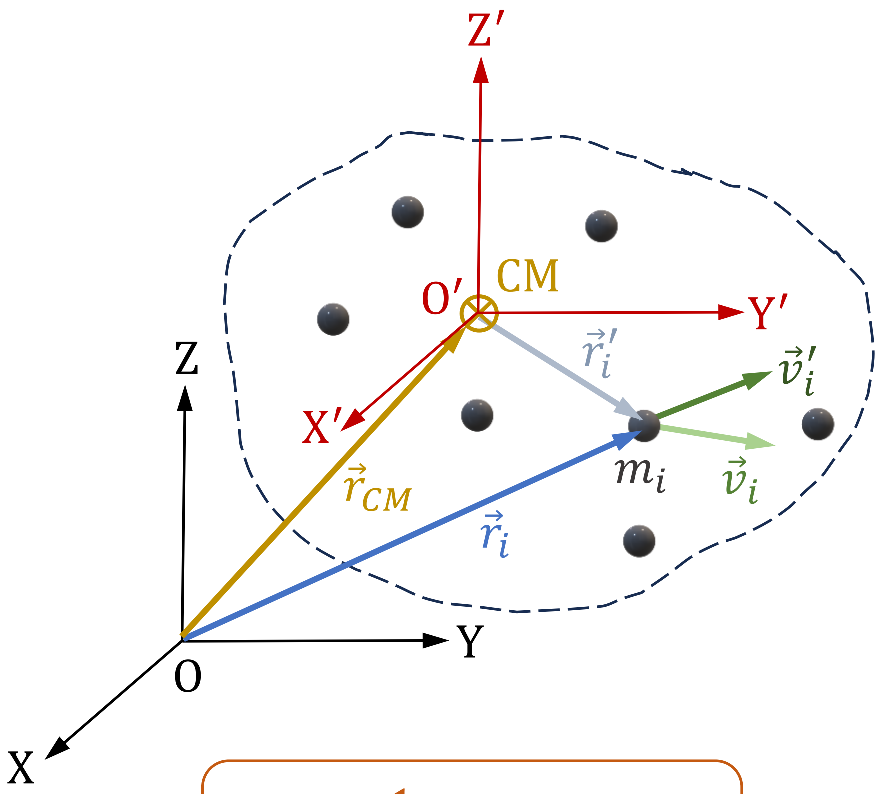
- $\vec{L}_{sist,O}$ — Momento angular del sistema respecto del punto O
- $\vec{L}_{sist,O}^{CM}$ — Momento angular del CM respecto del punto O
- $\vec{L}_{sist}'$ — Momento angular del sistema respecto del CM

El momento angular del sistema respecto del sistema de referencia OXYZ es igual a la suma del momento angular del centro de masas respecto de O y la resultante de los momentos angulares de las partículas respecto del centro de masas

Contenidos

1.5. Energía y principio de conservación

Energía cinética de un sistema de partículas K_{sist}



$$K_{sist} = \sum_i^n K_i = \sum_i^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 = \sum_i^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'|^2 =$$

$$= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i (|\vec{v}_{CM}|^2 + |\vec{v}_i'|^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i') =$$

$$= \sum_i^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_{CM}|^2 + \sum_i^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i'|^2 + \sum_i^n \frac{1}{2} m_i 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i^n m_i\right)|\vec{v}_{CM}|^2 + \sum_i^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i'|^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \overbrace{\left(\sum_i^n m_i \vec{v}_i'\right)}^{=0} =$$

$$= \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + K'$$

$$M\vec{v}_{CM}' = \sum_i^n m_i \vec{v}_i' = 0$$

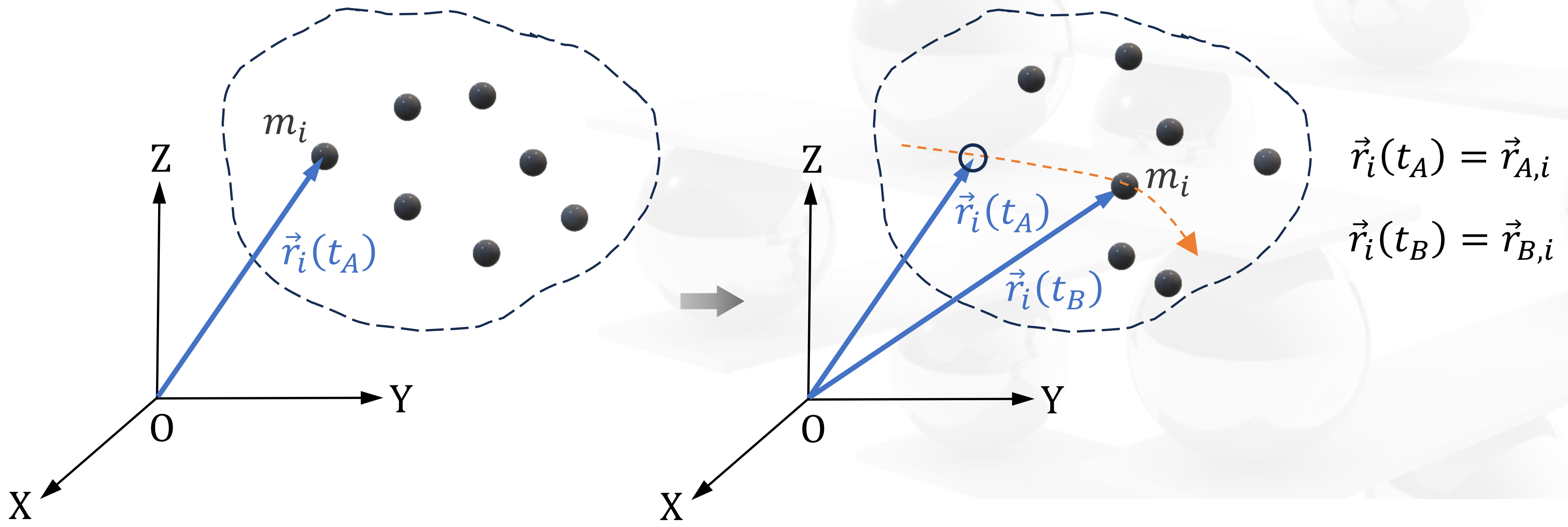
$$\boxed{K_{sist} = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + K'}$$

Energía cinética de traslación del CM. Debida a fuerzas externas

Energía cinética relativa al CM. Debida a fuerzas internas

1.5. Energía y principio de conservación

Energía cinética de un sistema de partículas K_{sist}



$$W_{Total} = \sum_i^n W_i = \sum_i^n \int_{\vec{r}_{A,i}}^{\vec{r}_{B,i}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i^n \int_{\vec{r}_{A,i}}^{\vec{r}_{B,i}} \left(\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}\right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_i^n \int_{\vec{r}_{A,i}}^{\vec{r}_{B,i}} \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i^n \int_{\vec{r}_{A,i}}^{\vec{r}_{B,i}} \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}_i =$$

$$= \sum_i^n \int_{\vec{r}_{A,i}}^{\vec{r}_{B,i}} \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i^n \sum_{j\neq i}^n \int_{\vec{r}_{A,i}}^{\vec{r}_{B,i}} \vec{f}_{ji}^{int} \cdot d\vec{r}_i = W_{ext} + W_{int} = \sum_i^n [K_i(t_B) - K_i(t_A)] = \sum_i^n \Delta K_i = \Delta K_{sist}$$

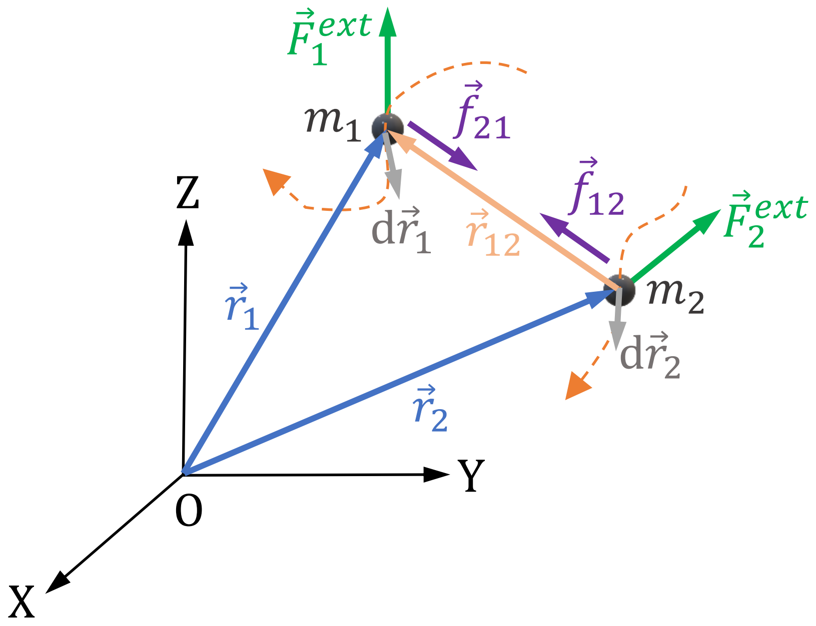
1.5. Energía y principio de conservación

Energía cinética de un sistema de partículas K_{sist}

El trabajo total de las fuerzas qua actúan sobre el sistema de partículas es igual a la suma del trabajo realizado por las fuerzas externas y el trabajo realizado por las fuerzas internas

$$\boxed{W_{Total} = \sum_{i}^{n} W_i = W_{ext} + W_{int} = \sum_{i}^{n} \Delta K_i = \Delta K_{Sist}}$$

El trabajo realizado por las fuerzas internas no tiene por qué ser cero



$$dW = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{f}_{21}\right) \cdot d\vec{r}_1 + \left(\vec{F}_2^{ext} + \vec{f}_{12}\right) \cdot d\vec{r}_2 =$$

$$= \vec{F}_1^{ext} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{ext} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1^{ext} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{ext} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_{12}$$

$$d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d\vec{r}_{12} \quad \Big| \quad \vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

Las fuerzas interiores $\vec{f}_{21}$ y $\vec{f}_{12}$ realizan trabajo siempre que haya un desplazamiento relativo de la partícula 1 respecto de la 2

1.5. Energía y principio de conservación

Energía potencial interna U^{int} y energía propia E_{propia} de un sistema de partículas

Si las fuerzas internas son conservativas se puede definir una energía potencial interna U^{int} → $W_{C,int} = -\Delta U^{int}$

Si las F^{int} dependen sólo de la posición relativa, U^{int} no depende del sistema de referencia

En un sólido rígido, U^{int} es constante

Energía interna del sistema

Energía propia del sistema → $E_{propia} = K_{sist} + U^{int} = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{CM}|^2 + K' + U_{int} = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{CM}|^2 + E_{int}$

- La variación de la energía propia del sistema es igual al trabajo de las fuerzas externas

$$\Delta E_{propia} = \Delta\left(K_{sist} + U^{int}\right) = \Delta K_{sist} + \Delta U^{int} = W_{ext} + W_{C,int} + \Delta U^{int} = W_{ext}$$

1.5. Energía y principio de conservación

Conservación de la energía mecánica de un sistema de partículas

Si además todas las *fuerzas externas que hacen trabajo son conservativas* → $W_{C,ext} = -\Delta U^{ext}$

$$W_{Total} = W_{C,ext} + W_{C,int} = -\Delta U^{ext} - \Delta U^{int} = \Delta K_{sist} \quad \Rightarrow \quad \Delta\left(K_{sist} + U^{int} + U^{ext}\right) = 0$$

$$E_{sist} = K_{sist} + U^{int} + U^{ext} = E_{propia} + U^{ext} = constante$$

La energía total del sistema se conserva

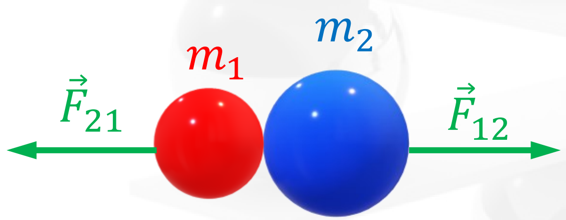
Si una parte de las *fuerzas externas* que hacen trabajo *son conservativas* y otra parte *son no conservativas*, la energía mecánica del sistema no se conserva

$$E_{sist} = K_{sist} + U^{int} + U^{ext} = E_{propia} + U^{ext} = W_{NC,ext}$$

Contenidos

1.6. Colisiones

Una colisión es una interacción entre dos o más cuerpos que tiene lugar en un intervalo muy corto de tiempo y en una región delimitada del espacio. Cuando esto ocurre se produce un intercambio de momento lineal y de energía



Las fuerzas internas que se ejercen las partículas son relativamente intensas y de corta duración

Su valor no tiene por qué ser constante mientras dura la colisión

Son difíciles de cuantificar

Son más intensas que las exteriores y por tanto se puede considerar un sistema aislado

1.6. Colisiones

Sistema aislado $\vec{F}_{neta}^{ext} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{sist}}{\mathrm{d}t} = 0 \rightarrow \vec{p}_{sist} = \sum_{i}^{n} \vec{p}_i = const. \rightarrow \left(\sum_{i}^{n} \vec{p}_i\right)_{Antes} = \left(\sum_{i}^{n} \vec{p}_i\right)_{Después}$

Colisión elástica

La energía cinética total y la cantidad de movimiento total del sistema es la misma antes y después de la colisión

Colisión inelástica

La energía cinética total del sistema no es la misma antes ni después de la colisión. La cantidad de movimiento del sistema se conserva

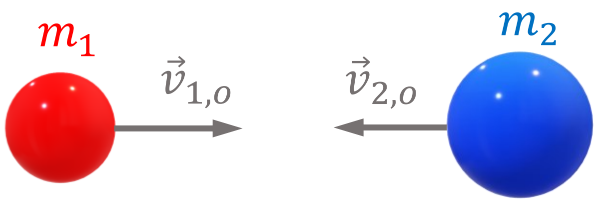
Colisión perfectamente inelástica

La energía cinética total del sistema no se conserva. La cantidad de movimiento del sistema se conserva. Las partículas quedan unidas después del choque

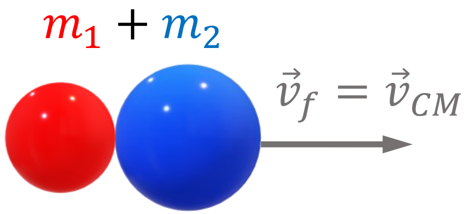
1.6. Colisiones

Colisión perfectamente inelástica unidimensional

Antes del choque



Después del choque



$$\vec{p}_{sist} = const. \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{v}_{1,o} + m_2\vec{v}_{2,o} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

$$\boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1,o} + m_2\vec{v}_{2,o}}{m_1 + m_2}}$$

Si $\vec{v}_{2,o} = 0$ $\Rightarrow$

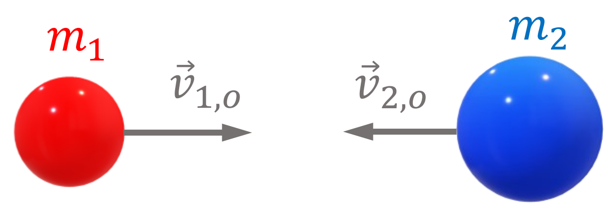
$$\vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1,o} \xrightarrow{m_1 = m_2} \vec{v}_f = \frac{\vec{v}_{1,o}}{2}$$

$$\Delta K = \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\frac{m_1 v_{1,o}^2}{2} \xrightarrow{m_1 = m_2} \Delta K = -\frac{K_1}{2}$$

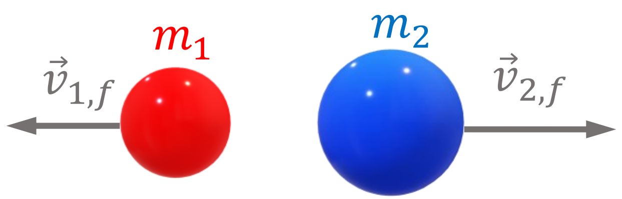
1.6. Colisiones

Colisión elástica unidimensional

Antes del choque



Después del choque



$$\vec{p}_{sist} = const. \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{v}_{1,o} + m_2\vec{v}_{2,o} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$$

$$K_{sist} = const. \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 v_{1,o}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2,o}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1,f}^2}{2} + \frac{m_f v_{2,f}^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_{1,o} - v_{2,o} = -(v_{1,f} - v_{2,f})}$$

Velocidades relativas

$$\boxed{v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,o} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2,o}}$$

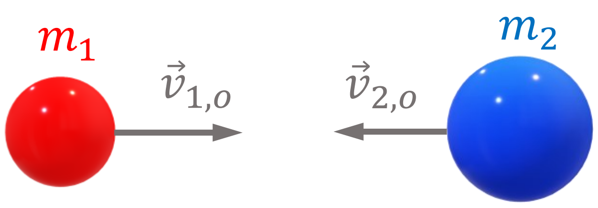
$$\boxed{v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,o} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2,o}}$$

Usar los signos apropiados para $v_{1,o}$ y $v_{2,o}$

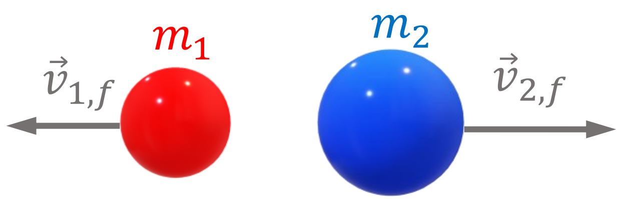
1.6. Colisiones

Colisión elástica unidimensional

Antes del choque



Después del choque



$$\boxed{v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,o} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2,o}}$$

$$\boxed{v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,o} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2,o}}$$

- Las partículas intercambian velocidades si tienen masas iguales

Sí $m_1 = m_2$ ➡ $v_{1,f} = v_{2,o}$ | $v_{2,f} = v_{1,o}$

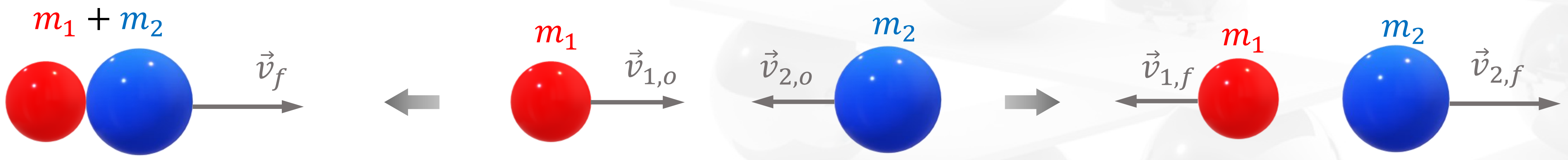
- Si $\vec{v}_{2,o} = 0$ ➡

$$v_{1,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1,o} \xrightarrow{m_1 \gg m_2} v_{1,f} \approx v_{1,o}$$

$$v_{2,f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,o} \xrightarrow{m_1 \gg m_2} v_{2,f} \approx 2v_{1,o}$$

1.6. Colisiones

Coeficiente de restitución C_R



$$\boxed{C_R = \frac{-(v_{1,f} - v_{2,f})}{v_{1,o} - v_{2,o}}} \Rightarrow 0 \leq C_R \leq 1 \Rightarrow$$

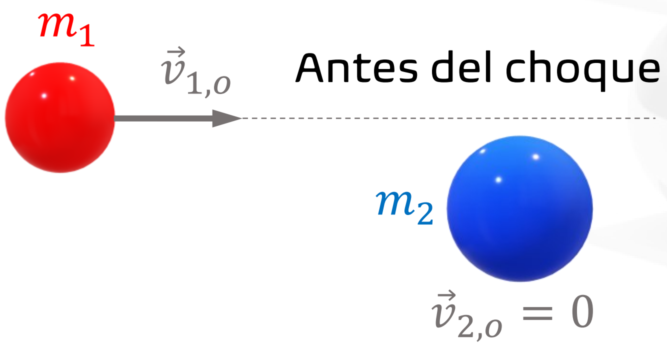
$C_R = 1$ Choque elástico

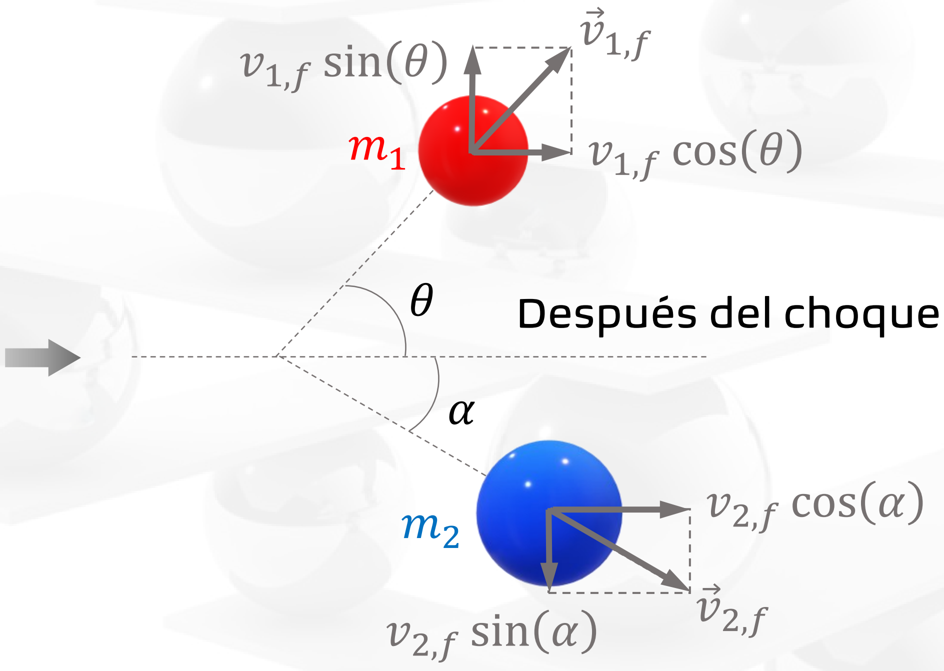
$C_R = 0$ Choque perfectamente inelástico

$0 < C_R < 1$ Choque inelástico

1.6. Colisiones

Colisión no unidimensional (colisión oblicua)





$$m_1 v_{1,ox} + m_2 v_{2,ox} = m_1 v_{1,fx} + m_2 v_{2,fx} \rightarrow m_1 v_{1,o} = m_1 v_{1,f}\cos(\theta) + m_2 v_{2,f}\cos(\alpha)$$

$$m_1 v_{1,oy} + m_2 v_{2,oy} = m_1 v_{1,fy} + m_2 v_{2,fy} \rightarrow 0 = v_{1,f}\sin(\theta) - v_{2,f}\sin(\alpha)$$

Si la colisión en elástica $\rightarrow$ $$\frac{m_1 v_{1,o}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1,f}^2}{2} + \frac{m_f v_{2,f}^2}{2}$$