1.- **1 Punto** Sabemos que el 55 % de la población utiliza TikTuk, el 30 % feisbuk y el 20 % ambos. Si elegimos una persona al azar:

a) Sabiendo que utiliza TikTuk, ¿Cuál es la probabilidad de que también utilice feisbuk?

b) Si utiliza feisbuk, ¿Cuál es la probabilidad de que no utilice TikTuk?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no utilice ninguna de estas dos redes sociales?

Solución

Consideramos

- El suceso A: La persona utiliza TikTuk.
- El suceso B: La persona utiliza Feisbuk.

Con esta reinterpretación, tendríamos que:

$$P(A) = 0.55, \quad P(B) = 0.30, \quad P(A \cap B) = 0.20$$

a) Nos están preguntando la siguiente probabilidad condicional:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Sustituyendo los valores:

$$P(B \mid A) = \frac{0.20}{0.55} \approx 0.364$$

Por lo tanto, la probabilidad es aproximadamente 36.4 %.

b) Si utiliza Feisbuk, ¿cuál es la probabilidad de que no utilice TikTuk?
La probabilidad de que no utilice TikTuk dado que utiliza Feisbuk es:

$$P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

Primero calculamos $P(A \mid B)$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.20}{0.30} \approx 0.667$$

Entonces:

$$P(\bar{A} \mid B) = 1 - 0.667 = 0.333$$

Por lo tanto, la probabilidad es aproximadamente 33.3 %.

c) Primero calculamos la probabilidad de que una persona utilice al menos una de las dos redes sociales:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sustituyendo los valores:

$$P(A \cup B) = 0.55 + 0.30 - 0.20 = 0.65$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no utilice ninguna de estas redes sociales es el complementario:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

Así que la probabilidad es 35 %.

2.- **1,5 Punto** Considera $X \sim N(3, \sigma = 5)$, $Y \sim N(4, \sigma^2 = 6)$, $W \sim F_{4,5}$. Calcula:

a) Los percentiles 25,50 y 75 de X. b) Los percentiles 20,30,60 y 80 de $X + Y$
c) El percentil 10 de W d) Un intervalo de confianza al 80 % para W.

Solución

a) Percentiles 25, 50 y 75 de X:

Para calcular el percentil 50, P_{50}, solo cabe tener presente las propiedades de simetría de la normal. Así, tenemos que $P_{50} = 3$. Por otro lado y también basándonos en la simetría, solo habría que calcular un percentil ya que el otro se deduciría con facilidad a partir del anterior. Por ejemplo el Percentil 75: Observa que $\frac{X-3}{5} = Z$, entendiendo por Z una normal estándar $N(0,1)$ que tenemos tabulada. Así que calculamos el percentil el percentil 75 de Z, que venimos representando como $Z_{0.25} \approx 0.674$

Barrios et al. Tablas de Probabilidades 30

Tabla 6B. Probabilidades acumuladas p de la distribución normal estándar.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	[illegible]	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	[illegible]	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Los valores de z_p son:

$$z_{0.25} = 0.674, \quad z_{0.50} = 0, \quad z_{0.75} = -0.674$$

Cálculos:

$$P_{25} = 3 + (-0.674) \cdot 5 = 3 - 3.37 = -0.37$$

$$P_{50} = 3 + (0) \cdot 5 = 3$$

$$P_{75} = 3 + (0.674) \cdot 5 = 3 + 3.37 = 6.37$$

b) Percentiles 20, 30, 60 y 80 de $X + Y$:

Sabemos que $X + Y \sim N(\mu_{X+Y}, \sigma^2_{X+Y}) \sim N(7, \sqrt{31})$. Observa que:
$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y = 5^2 + 6 = 25 + 6 = 31, \quad \sigma_{X+Y} = \sqrt{31} \approx 5.57$
Repetimos el razonamiento anterior, después de haber calculado los respectivos percentiles de la $N(0,1)$:

$$z_{0.20} = 0.841, \quad z_{0.70} = 0.524, \quad z_{0.40} = 0.253, \quad z_{0.80} = -0.841$$

Percentiles de $X + Y$:

$$P_{20} = 7 + (-0.841) \cdot 5.57 \approx 7 - 4.68 = 2.32$$

$$P_{30} = 7 + (-0.524) \cdot 5.57 \approx 7 - 2.92 = 4.08$$

$$P_{60} = 7 + (0.253) \cdot 5.57 \approx 7 + 1.41 = 8.41$$

$$P_{80} = 7 + (0.841) \cdot 5.57 \approx 7 + 4.68 = 11.68$$

c) Percentil 10 de $W \sim F_{4,5}$:

El percentil 10 se define como el valor w tal que:

$$P(W \leq w) = 0.10$$

Usando tablas o software estadístico, obtenemos:

$$F_{0.10,4,5} = \frac{1}{F_{0.9,5,4)}} \approx \frac{1}{4.05} \approx 0.2469$$

Por lo tanto:

$$P_{10} \approx 0.2469$$

d) Intervalo de confianza al 80 % para $W \sim F_{4,5}$:

Un intervalo de confianza al 80 % para W está definido por los valores w_1 y w_2 tales que:

$$P(w_1 \leq W \leq w_2) = 0.80$$

Esto implica:

$$P(W \leq w_1) = 0.10 \quad \text{y} \quad P(W \leq w_2) = 0.90$$

Usando tablas o software estadístico, obtenemos:

$$F_{0.10,4,5} \approx 0.2469, \quad F_{0.90,4,5} \approx 3.52$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza al 80 % es:

$$[0.25, 3.52]$$

Tabla 9A. Valores críticos $F_{(\alpha;n_1,n_2)}$ de la distribución F.

$p = 0.90$ $\alpha = 0.10$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	50	75	100	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.69	62.90	63.01	63.32
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.47	9.48	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.80	3.78	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.15	3.13	3.13	3.11
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.77	2.75	2.75	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.52	2.51	2.50	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.35	2.33	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.22	2.20	2.19	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.12	2.10	2.09	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.04	2.02	2.01	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	1.97	1.95	1.94	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.92	1.89	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.87	1.85	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.83	1.80	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.79	1.77	1.76	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.76	1.74	1.73	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.70	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.71	1.69	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.69	1.66	1.65	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.67	1.64	1.63	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.65	1.63	1.61	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.64	1.61	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.62	1.59	1.58	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.61	1.58	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.59	1.57	1.55	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.58	1.55	1.54	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.57	1.54	1.53	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.56	1.53	1.52	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.55	1.52	1.51	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.48	1.45	1.43	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.41	1.38	1.36	1.29
80	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68	1.63	1.57	1.51	1.47	1.38	1.34	1.32	1.25
100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66	1.61	1.56	1.49	1.45	1.35	1.32	1.29	1.22
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.44	1.34	1.30	1.28	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.95	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.26	1.22	1.19	1.03

3.- **1.5 Punto** X se distribuye normalmente con media 200. Se sabe que la probabilidad de que X sea superior a 250 es 0,2. Calcular:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea inferior a 150?

b) ¿Cuál es la varianza de X?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que $X > 300$?

d) ¿Cuántos valores de X, independientes, deben observarse para tener una probabilidad mayor que 0,5 de que al menos el mayor de ellos sea superior a 300?

Solución

a) Para este cálculo, primero debemos calcular la varianza. Así adelantaremos ya la respuesta al apartado siguiente. usamos el dato $P(X > 250) = 0.2$. Sabemos que:

$$P(X > 250) = P\left(Z > \frac{250 - 200}{\sigma}\right) = 0.2$$

Esto implica:

$$P\left(Z > \frac{50}{\sigma}\right) = 0.2$$

De las tablas o software, sabemos que:

$$P(Z > 0.8416) = 0.2$$

Por lo tanto:

$$\frac{50}{\sigma} = 0.8416 \implies \sigma = \frac{50}{0.8416} \approx 59.39$$

Ahora calculamos $P(X < 150)$:

$$P(X < 150) = P\left(Z < \frac{150 - 200}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{-50}{59.39}\right)$$

$$P(X < 150) = P(Z < -0.8416)$$

De las tablas, $P(Z < -0.8416) \approx 0.2$. Por lo tanto:

$$P(X < 150) \approx 0.2$$

Nota: Podríamos haber llegado a la misma conclusión simplemente aplicando simetría de la normal, puesto que la media es 200 y se está planteando la probabilidad en un valor simétrico al valor donde se conoce ya la probabilidad.

Barrios et al. Tablas de Probabilidades

Tabla 6B. Probabilidades acumuladas p de la distribución normal estándar.

0.845

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

b) La varianza de X es: $Var(X) = \sigma^2 = 59.39^2 \approx 3536.26$

c) $P(X > 300) = P\left(Z > \frac{300-200}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{100}{59.39}\right) = P(Z > 1.683)$

De las tablas, $P(Z > 1.683) \approx 1 - 0.954 \approx 0.046 \rightarrow P(X > 300) \approx 0.046$

Barrios et al. Tablas de Probabilidades 30

Tabla 6B. Probabilidades acumuladas p de la distribución normal estándar.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

d) La probabilidad de que al menos uno de los n valores sea superior a 300 es:

$$P(\text{al menos uno superior a } 300) = 1 - P(X \leq 300)^n = 1 - P(X > 300) = 1 - 0.046 = 0.954$$

Queremos que:

$$1 - (0.954)^n > 0.5 \rightarrow (0.954)^n < 0.5$$

Tomamos logaritmos:

$$n \cdot \ln(0.954) < \ln(0.5) \to n > \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.954)} \approx \frac{-0.6931}{-0.0469} \approx 14.77$$

Por lo tanto, se necesitan al menos $n = 15$ observaciones de X.

4.- **2 Puntos** En el tiempo de respuesta, medido en segundos, a determinado tipo de preguntas de dos tipos de redes neuronales artificiales (RNA), A y B, se han registrado los siguientes datos:

	n	$\bar{x}$	s^2
RNA A	15	16.2	23.7
RNA B	11	14.9	26.4

a) ¿Muestran los datos que hay evidencia de diferencias en el tiempo de respuesta de cada una? Si debes realizar uno o varios contrastes, utiliza el *p-valor* en alguno de ellos.

Solución

Es un ejercicio similar al realizado en el examen de diciembre de 2024.

1. Primero contrastamos si las varianzas son iguales para poder determinar el siguiente contraste

Para comparar las varianzas de dos poblaciones, se realiza una prueba F, donde la hipótesis nula establece que las varianzas son iguales:

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

El estadístico de prueba es:

$$F = \frac{s_A^2}{s_B^2}$$

Donde:

$$s_A^2 = 23.7, \quad s_B^2 = 26.4$$

Sustituyendo los valores:

$$F = \frac{23.7}{26.4} \approx 0.8978$$

Los grados de libertad son:

$$df_A = n_A - 1 = 15 - 1 = 14, \quad df_B = n_2 - 1 = 11 - 1 = 10$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$, consultamos los valores críticos de $F(14, 10)$ en tablas:

$$F_{\alpha/2,14,10} \approx 3.55, \quad F_{1-\alpha/2,14,10} = \frac{1}{F_{\alpha/2,10,14}} \approx \frac{1}{3.15} \approx 0.318$$

El valor calculado $F = 1.113$ se encuentra entre los valores críticos, $[0.318, 3.55]$ por lo que:

Conclusión: No se rechaza H_0. Las varianzas pueden considerarse iguales a un nivel de significación $\alpha = 0.05$

2. Contrastar si hay diferencias en los tiempos de soporte (su media)

Ya que no se rechazó la igualdad de varianzas, realizamos una prueba t de Student para muestras independientes asumiendo que las varianzas son iguales. Las hipótesis son:

- H_0: $\mu_A = \mu_B$ (las medias son iguales).
- H_a: $\mu_A \neq \mu_B$ (las medias son diferentes).

El estadístico de prueba es:

$$t = \frac{|\bar{x}_A - \bar{x}_B|}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

donde:

- s_p^2 es la varianza agrupada (pooled variance), calculada como:

$$s_p^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

- n_A, n_B son los tamaños de las muestras.
- $\bar{x}_A$, $\bar{x}_B$ son las medias muestrales.

Sustituyendo los valores:

$$s_p^2 = \frac{14 \cdot 23.7 + 10 \cdot 26.4}{24} = \frac{331.8 + 264}{24} = \frac{595.8}{24} \approx 24.825 \to s_p = \sqrt{24.825} \approx 4.982$$

El estadístico t es:

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} = \frac{16.2 - 14.9}{4.982 \cdot \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{11}}} \approx 0.657$$

Los grados de libertad son $df = n_1 + n_2 - 2 = 15 + 11 - 2 = 24$

Para $t = 0.657$ con $df = 24$, el p-valor superior a 0.25, tal y como se aprecia en la tabla, por lo que es mayor a 0.05, por lo tanto no hay evidencia para rechazar la hipótesis.

Tabla 8. Valores críticos $t_{(\alpha;n)}$ de la distribución t de Student.

p	0.75	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.9999
n \ α	0.25	0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
1	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619	3183.099
2	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599	70.700
3	0.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924	22.204
4	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610	13.034
5	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869	9.678
6	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959	8.025
7	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408	7.063
8	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041	6.442
9	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781	6.010
10	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587	5.694
11	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437	5.453
12	0.695	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318	5.263
13	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221	5.111
14	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140	4.985
15	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073	4.880
16	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015	4.791
17	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965	4.714
18	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922	4.648
19	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883	4.590
20	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850	4.539
21	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819	4.493
22	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792	4.452
23	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768	4.415
24	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745	4.382
25	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725	4.352
26	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707	4.324
27	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690	4.299
28	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674	4.275
29	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659	4.254
30	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646	4.234
40	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551	4.094

Conclusión: No se rechaza H_0. No hay evidencia significativa para afirmar que existen diferencias en los tiempos de soporte entre las dos versiones del juego.

5.- **2 Puntos** En un experimento se han registrado los minutos transcurridos (t) y el nivel de bilirrubina (Y) en los testers de un nuevo videojuego:

3	$3,5$	4	$2,5$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	14
18	14	$11,8$	$21,5$	$7,87$	$6,36$	$5,07$	$3,72$	$3,33$	$2,86$	$2,46$	$2,34$	$2,03$	$1,69$	$1,98$

Se ha obtenido que $\bar{t} = 8.2$, $\bar{y} = 7.002$, $\sum t_i Y_i = 539.6$, $\sum t_i^2 = 1253.5$.

¿Crees que hay relación lineal entre ambas variables. Suponiendo que la respuesta fuera que sí, al cabo de 20 minutos, ¿cuál sería el nivel de bilirrubina? Razona todas las respuestas.

Solución

Consúltese ejercicio 12 de la hoja de ejercicios clase de Repaso .

Dejaremos responder a la pregunta de si existe relación lineal entre las variables para el final. Para ello necesitaremos calcular R. Bajo la suposición de que sí existe relación lineal, debemos ajustar un modelo de regresión lineal simple para las variables t (tiempo en minutos) e Y (nivel de bilirrubina):

$$Y = a + bt$$

donde:

- a es la ordenada en el origen,
- b es la pendiente de la recta.

Las fórmulas para calcular b y a son:

$$b = \frac{\sum t_i Y_i - n\bar{t}\bar{Y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{t}.$$

Datos conocidos

- Media de t: $\bar{t} = 8.2$
- Media de Y: $\bar{y} = 7.002$
- Suma de productos: $\sum t_i Y_i = 539.6$
- Suma de cuadrados: $\sum t_i^2 = 1253.5$
- Número de observaciones: $n = 15$

Pendiente b:

$$b = \frac{\sum t_i Y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum t_i^2 - n\bar{t}^2} = \frac{539.6 - 15(8.2)(7.002)}{1253.5 - 15(8.2)^2} \approx \frac{-321.646}{244.9} \approx -1.313$$

Ordenada en el origen a:

$$a = \bar{y} - b\bar{t} = 7.002 - (-1.313)(8.2) = 17.772$$

Ecuación de la recta

La ecuación de la regresión lineal es:

$$Y = 17.77 - 1.31t$$

Predicción para $t = 20$

Para predecir el nivel de bilirrubina cuando $t = 20$, sustituimos en la ecuación de la recta:

$$Y(20) = 17.77 - 1.31(20) = -8.50$$

Relación lineal Calcularemos el Coeficiente de regresión R^2. Sabemos que un valor próximo a 1 nos permite afirmar que sí hay relación lineal. Un valor alejado, nos haría dudar de los resultados.

Aprovechando algunos cálculos realizados, sabemos que

$$r = \frac{\sum(t_i - \bar{t})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(t_i - \bar{t})^2 \cdot \sum(Y_i - \bar{Y})^2}} = \frac{-321.646}{S_t \cdot S_Y} = \frac{-321.646}{\sqrt{244.9} S_Y}$$

Por lo que solo tendríamos que calcular S_Y. Así, obtenemos que Por otro lado, R^2 es $0,739117516$, suficientemente alejado de 1. Tanto como para no tener mucha confianza en la linealidad de la relación.

Conclusión

- La pendiente $b = -1.31$ indica que, en promedio, el nivel de bilirrubina disminuye en 1.31 unidades por cada minuto adicional.
- La predicción para $t = 20$ es $Y = -8.50$. Sin embargo, dado que el nivel de bilirrubina no puede ser negativo, el modelo lineal no es adecuado para extrapolar más allá del intervalo observado ($2.5 \leq X \leq 15$).

6.- **2 Puntos** El nuevo Chat de la UA(*Aitana*) ha registrado los siguientes usuarios (medidos en centenares) durante 10 semanas:

Lunes	26	37	22	55	23	38	46	25	25	23	$\bar{X}_1 = 32.2$	$\bar{S}_1 = 11.36$
Martes	35	20	28	12	17	17	57	42	25	63	$\bar{X}_2 = 31.5$	$\bar{S}_2 = 17.46$
Mircoles	25	40	63	18	62	30	38	23	37	26	$\bar{X}_3 = 36.1$	$\bar{S}_3 = 15.63$
Jueves	51	20	30	13	42	28	17	73	25	22	$\bar{X}_4 = 31.9$	$\bar{S}_4 = 18.16$
Viernes	30	62	40	15	26	37	52	12	16	25	$\bar{X}_5 = 31.4$	$\bar{S}_5 = 16.41$

¿Crees que podemos afirmar que todos los días de la semana hay la misma afluencia de usuarios?

(Suponer normalidad, independencia y homogeneidad de varianzas)

Solución

Consúltese ejercicio 11 de la hoja de ejercicios clase de Repaso .

Hipótesis a contrastar - H_0: Las medias de número de usuarios registrados son iguales para todos los días de la semana. - H_a: No todos los días se registra una misma media de usuarios.

Metodología Para realizar el contraste, utilizamos un análisis de varianza (ANOVA) de una vía. El estadístico F se calcula como:

$$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSW}} = \frac{\frac{\text{SSB}}{k-1}}{\frac{\text{SSW}}{n-k}},$$

donde: - k es el número de grupos (días de la semana). - n es el número total de observaciones. - SSB es la suma de cuadrados entre los grupos. - SSW es la suma de cuadrados dentro de los grupos.

El valor F calculado se compara con la distribución F para determinar el valor p.

Si realizamos los cálculos y no nos fiamos de los valores medios aportados, veremos que los datos medios aportados (media y desviación muestral) están mal calculados. Realmente serían los mismos que los del ejercicio 11 referenciado, por lo que la solución vendría dada por aquella solución. Si damos por buenos los cálculos aportados, tendríamos que:

Resultados

- Estadístico $F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSW}} = \frac{\frac{\text{SSB}}{k-1}}{\frac{\text{SSW}}{n-k}} = \frac{\frac{155}{48}}{\frac{11500.3}{45}} \approx \frac{38.87}{255.5622} \approx 0.1521$ - p-valor $p = 0.9611$

Conclusión Dado que el valor $p = 0.9611$ es mucho mayor que el nivel de significación típico ($\alpha = 0.05$), no se puede rechazar la hipótesis nula (H_0).

Alternativamente podríamos razonar diciendo que Se rechaza H_0 si $0.1521 > F_{0.05;4,45} = 2.5787$.

Tabla 9B. Valores críticos $F_{(\alpha;n_1,n_2)}$ de la distribución F.

	$p = 0.95$																	$\alpha = 0.05$
									n_1									
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	50	75	100	∞
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.26	251.77	252.62	253.04	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.48	19.48	19.49	19.5
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.58	8.56	8.55	8.5
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.70	5.68	5.66	5.6
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.44	4.42	4.41	4.3
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.75	3.73	3.71	3.6
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.32	3.29	3.27	3.2
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.02	2.99	2.97	2.9
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.80	2.77	2.76	2.7
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.64	2.60	2.59	2.5
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.51	2.47	2.46	2.4
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.40	2.37	2.35	2.3
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.31	2.28	2.26	2.2
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.24	2.21	2.19	2.1
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.18	2.14	2.12	2.0
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.12	2.09	2.07	2.0
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.08	2.04	2.02	1.9
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.04	2.00	1.98	1.9
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.00	1.96	1.94	1.8
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	1.97	1.93	1.91	1.8
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	1.94	1.90	1.88	1.8
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.91	1.87	1.85	1.7
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.88	1.84	1.82	1.7
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.86	1.82	1.80	1.7
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.84	1.80	1.78	1.7
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.82	1.78	1.76	1.6
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.81	1.76	1.74	1.6
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.79	1.75	1.73	1.6
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.77	1.73	1.71	1.6
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.76	1.72	1.70	1.6
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.66	1.61	1.59	1.5
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.56	1.51	1.48	1.3
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.79	1.70	1.64	1.51	1.45	1.43	1.3
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.77	1.68	1.62	1.48	1.42	1.39	1.2
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.60	1.46	1.40	1.37	1.2
∞	3.84	3.00	2.61	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.51	1.35	1.28	1.25	1.0

Por esta vía tampoco rechazamos H_0.

Por lo tanto, **no hay evidencia suficiente para afirmar que las medias de afluencia de usuarios son diferentes entre los días de la semana**. Esto implica que la afluencia diaria puede considerarse similar en promedio y también en dispersión.