Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Apuntes de teoría nº 2

Antonio Valle Sánchez

DFESTS
UA | UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

TEMA 2

DIGITALIZACIÓN DE SEÑALES ANALÓGICAS

2.1. Introducción

2.2. Muestreo de señales analógicas

2.3. Teorema de muestreo de Nyquist

2.4. Cuantificación

2.5. Codificación

2.6. Conversión digital-analógica

2.7. Señales y sistemas digitales frente a señales y sistemas en tiempo discreto

DIGITALIZACIÓN DE SEÑALES ANALÓGICAS

2.1 Introducción

La mayoría de señales sobre las que existe un interés práctico en su procesado son analógicas. Algunos ejemplos son señales de voz, biológicas, sísmicas, señales de radar, de sonar, etc.

Para poder procesarlas utilizando técnicas de tratamiento digital hay que convertirlas previamente a formato digital. A este proceso se le conoce como *conversión analógica-digital*. Conceptualmente se puede modelar este proceso en tres pasos: *muestreo*, *cuantificación* y *codificación*. Veamos en que consisten:

MUESTREO

Consiste en realizar una discretización temporal de la señal analógica, esto es, con el muestreo se convierte la señal en tiempo continuo $x(t)$ en una señal en tiempo discreto $x[n]$. La señal discreta no es más que una secuencia de muestras de la señal continua. Por lo general se trabaja con *muestreo periódico* que consiste en tomar muestras cada cierto tiempo fijo que denotamos por T_S (ver Fig. 2.1). Analíticamente se tiene que:

$$x[n] = x(t)\big|_{t=n\cdot T_S} = x(n \cdot T_S), \quad -\infty < n < +\infty$$

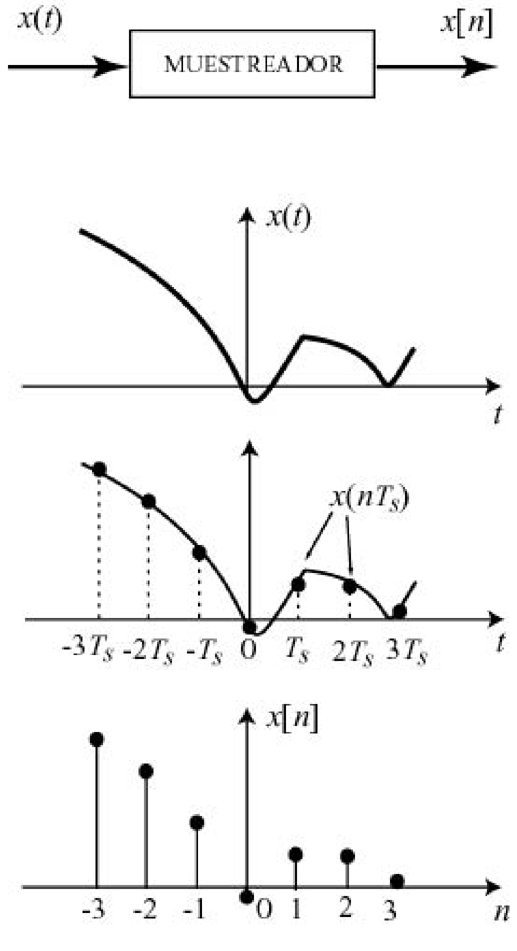

Figura 2.1 *Muestreo periódico.*

CUANTIFICACIÓN

Se trata de ahora de realizar una discretización en amplitud. Un cuantificador convierte la señal discreta de valores de amplitud continuos, $x[n]$, en una señal de valores de amplitud discretos, $x_q[n]$ (ver Fig. 2.2). El conjunto de valores que puede tomar la señal en tiempo discreto pasa a ser un conjunto finito de valores. A cada uno de estos valores se le llama *nivel*.

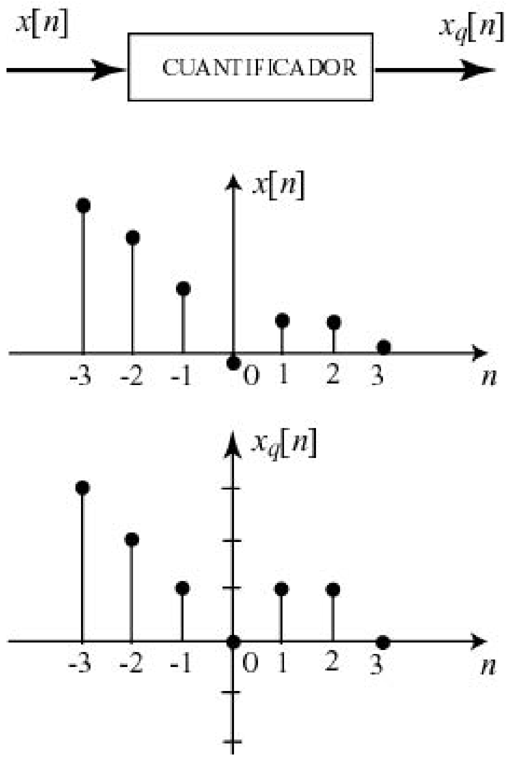

Figura 2.2 *Cuantificación.*

Un ejemplo de cuantificación sería por el ejemplo el que se realiza al aproximar un número decimal por otro número con sólo una cifra decimal. Realizamos por tanto una cuantificación cuando hacemos un truncamiento o redondeo de números decimales (y acotamos el intervalo de valores a aproximar). Siguiendo con este ejemplo, si tenemos una señal $x[n]$ que toma valores comprendidos entre 0 y 1, y la cuantificamos al conjunto de niveles {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1}, se obtienen las siguientes secuencias $x_{q1}[n]$ y $x_{q2}[n]$. En la primera se lleva a cabo un redondeo y en la segunda un truncamiento.

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$x[n]$	0.01234	0.23450	0.51200	0.66787	0.43251	0.35621
$x_{q1}[n]$	0.0	0.2	0.5	0.7	0.4	0.4
$x_{q2}[n]$	0.0	0.2	0.5	0.6	0.4	0.3

Tabla 2.1 *Ejemplos de cuantificación de una señal en tiempo discreto.*

A la diferencia entre cada muestra cuantificada y la muestra original se le llama *error de cuantificación*, $e_q[n]$:

$$e_q[n] = x_q[n] - x[n]$$

CODIFICACIÓN

Es el proceso mediante el cual cada valor discreto cuantificado se transforma en una secuencia binaria de cierto número de bits. Aquí terminará la tarea del conversor analógico-digital.

Para ello, lo que se hace es asignar a cada uno de los niveles de cuantificación una *palabra-código* binaria, a priori. Si b es el número de bits de cada palabra código y L es el número de niveles, se cumplirá siempre que

$$L \leq 2^b .$$

Al dispositivo físico que toma la señal analógica y produce una señal digital, de acuerdo con el proceso estudiado, se le llama *conversor analógico-digital*.

En muchos casos es deseable convertir de nuevo las señales digitales a forma analógica tras el procesado digital. Al proceso de conversión de una señal digital a una analógica se la conoce como *conversión digital-analógica*.

Básicamente este proceso consiste en "unir" los valores de la señal digital mediante algún tipo de interpolación. La calidad del proceso de conversión D/A dependerá del tipo de interpolación realizada.

Algunos ejemplos pueden ser:

- Aproximación por escalones con un circuito mantenedor.
- Interpolación lineal
- Interpolación cuadrática.

En el caso de señales analógicas con un ancho de banda finito (con una componente de frecuencia máxima finita) es posible reconstruir la señal original a partir de sus muestras sin pérdida alguna de información. Existe pues en este caso una forma óptima de interpolación, un *interpolador ideal*. Se verá con más detalle al estudiar más adelante el *Teorema de Muestreo de Nyquist*.

2.2 Muestreo de señales analógicas

Centraremos nuestro estudio en el muestreo periódico o uniforme, que es el que más se emplea en la práctica. Matemáticamente se describe como:

$$x[n] = x(n \cdot T_S), \quad -\infty < n < +\infty$$

En esta expresión $x[n]$ es la señal en tiempo discreto obtenida tomando muestras de la señal en tiempo continuo cada T_S segundos. Al tiempo T_S se le conoce como periodo o intervalo de muestreo. A la inversa de este tiempo se le llama frecuencia de muestreo y se suele denotar por f_S:

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

El valor de f_S indica el número de muestras que se toman por segundo y se mide en hertzios (Hz.) en el Sistema Internacional.

El muestreo periódico establece una relación entre las variables de tiempo continuo y discreto, t y n, a través del periodo o la frecuencia de muestreo:

$$t = n \cdot Ts; \quad t = \frac{n}{f_S}.$$

Como consecuencia de esto también existirá una relación entre la variable frecuencia de las señales analógicas y la variable frecuencia de las señales discretas. Para determinar esta relación vamos a considerar el muestro de una señal analógica sinusoidal real:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \phi_o).$$

Si se muestrea a una velocidad de f_S muestras por segundo, resulta la secuencia:

$$x[n] = x(n \cdot T_S),$$
$$x[n] = A\cos(2\pi f_o n T_S + \phi_o) = A\cos\left(2\pi f_o \frac{n}{f_S} + \phi_o\right).$$

Observando la secuencia $x[n]$ resulta que su expresión es la de una sinusoide real en tiempo discreto

$$x[n] = A\cos(2\pi f_d n + \phi_d),$$

de frecuencia

$$f_d = \frac{f_o}{f_S}.$$

Esta relación entre las variables frecuencia continua y discreta se cumple de forma general siempre. Se puede obtener el mismo resultado fácilmente para señales sinusoidales complejas. También es habitual expresar esta relación utilizando pulsaciones (frecuencias angulares),

$$\omega_d = \frac{\omega_o}{f_S},$$

donde ω_d es la pulsación discreta y ω_o la pulsación analógica.

De acuerdo con esto, es posible obtener la misma secuencia $x[n]$ muestreando señales analógicas de frecuencias distintas $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Por ejemplo, suponga que muestreamos dos señales analógicas de la misma amplitud y misma fase, pero de frecuencias $f_{o1} = 200$ Hz y $f_{o2} = 500$ Hz, respectivamente. Para ello se emplea una frecuencia de muestreo de 1000 Hz en el primer caso y de 2500 Hz en el segundo. De este modo, las secuencias de muestras $x_1[n]$ y $x_2[n]$ serán idénticas y su frecuencia discreta será $f_{d1} = f_{d2} = 0.2$ u.t.d^{-1}.

Volviendo al estudio de la relación entre las frecuencias continua y discreta tras el muestreo, surge una importante cuestión con respecto a los rangos de definición de ambas variables. Vimos que para el conjunto de señales sinusoidales complejas en tiempo continuo la frecuencia podía tomar valores entre $-\infty$ y $+\infty$. Sin embargo, en el caso discreto bastaba con considerar el intervalo

$$-0.5 < f_d \leq 0.5$$

para tener caracterizada toda la familia completa de sinusoides complejas discretas. Sustituyendo entonces ahora el valor de f_d por $\frac{f_o}{f_S}$ resulta que tras el muestreo se ha de cumplir que

$$-0.5 < \frac{f_o}{f_S} \leq 0.5,$$
$$-\frac{f_S}{2} < f_o \leq \frac{f_S}{2}.$$

Por tanto, la frecuencia de la señal analógica a muestrear debe ser menor que la mitad de la frecuencia de muestreo empleada. Si se sobrepasa para una sinusoide real el valor máximo de

$$f_{o\max} = \frac{f_S}{2},$$

lo que ocurre es que el muestreo introduce ambigüedad y no se podrá determinar de nuevo la señal original. Se dice entonces que se ha cometido *aliasing* o *solapamiento espectral*.

Estudiemos el efecto de cometer *aliasing* con un ejemplo de muestreo de señales sinusoidales reales. Suponga que se muestrea a 40 Hz. las siguientes señales analógicas:

$$x_1(t) = \cos(20\pi t),$$
$$x_2(t) = \cos(100\pi t).$$

Las frecuencias de estas sinusoides son, pues, $f_{01} = 10$ Hz y $f_{02} = 50$ Hz, respectivamente. La expresión matemática de la señal discreta que se obtiene en cada caso es:

$$x_1[n] = \cos(0.5\pi n),$$
$$x_2[n] = \cos(2.5\pi n) = (2.5\pi n - 2\pi n) = \cos(0.5\pi n).$$

Las señales discretas son iguales. Observe que en el segundo caso la frecuencia analógica es mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo ($f_2 / 2 = 40$ Hz.). Si se introducen las secuencias por un conversor digital-analógico trabajando a 40 Hz., se obtendrá la misma señal analógica, $x_{r1}(t) = x_{r2}(t) = x_1(t)$. Por lo tanto, ya no es posible recuperar de nuevo la señal $x_2(t)$ porque se produjo *aliasing*.

En resumen, sólo es posible reconstruir sin ambigüedad señales que sean muestreadas a una frecuencia de muestreo f_S que sea mayor que el doble de la máxima frecuencia de la señal:

$$f_S = 2 f_{o\max}.$$

Esto es precisamente lo que dice formalmente el Teorema de Muestreo de Nyquist.

2.3 Teorema de muestreo de Nyquist

Dada una señal analógica $x(t)$ de energía finita, con un ancho de banda finito $B = f_{o\max}$, ésta puede ser muestreada y después ser recuperada totalmente a partir de sus muestras $x[n]$ si se emplea una frecuencia de muestreo

$$f_S \geq 2B.$$

Así, se recupera $x(t)$ sin pérdida de información utilizando la función de interpolación

$$h_r(t) = \frac{sen(2\pi Bt)}{2\pi Bt} = \sin c(2Bt),$$

de acuerdo con la siguiente fórmula de interpolación:

$$x(t) = x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \sin c(2B(t - nT_S)).$$

La mínima frecuencia f_S necesaria para muestrear correctamente cierta señal se denomina frecuencia de Nyquist:

$$f_{Nyquist} = 2B = 2f_{o\max}.$$

En el caso de que $x(t)$ esté definida en términos de potencia, entonces se ha de emplear una frecuencia de muestreo que sea estrictamente mayor que el doble de la frecuencia máxima:

$$f_S > 2f_{o\max}.$$

Cuando se utiliza la frecuencia de Nyquist, la fórmula de interpolación ideal puede expresarse así:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_S) \cdot \sin c\left(\frac{1}{T_S}(t - nT_S)\right).$$

La figura 2.3 ilustra la conversión D/A ideal realizada con esta interpolación. Se observa como la señal recuperada es la suma de señales tipo *sinc* centradas en múltiplos enteros del periodo de muestreo -en los instantes nT_S - y cuyas amplitudes son los valores de las muestras de la señal en dichos instantes, $x(nT_S)$.

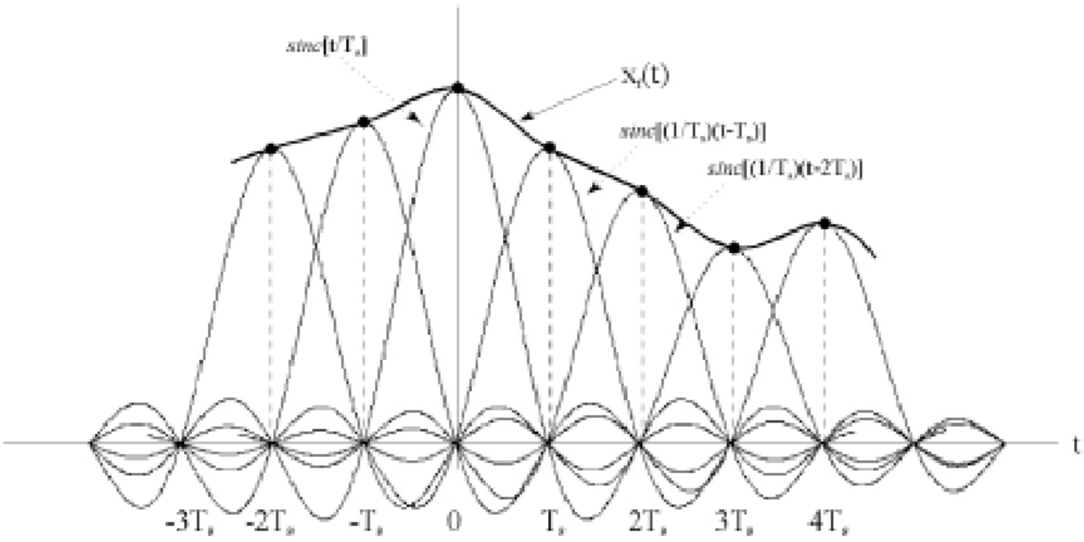

Figura 2.3 *Recuperación de una señal analógica muestreada a la frecuencia de Nyquist.*

En la práctica, se dispone siempre de un número finito muestras de la señal y no es posible generar funciones *sinc* perfectas, por lo que está fórmula de interpolación ideal es sólo de interés teórico. Los sistemas reales se implementan en base a otros métodos de interpolación aproximados.

Es importante mencionar que en los conversores A/D, para evitar el problema del solapamiento espectral o *aliasing*, antes de realizar el muestreo se hace pasar a la señal analógica por un filtro paso bajo de frecuencia de corte:

$$f_c = \frac{f_S}{2}.$$

Así se evita el paso de componentes de la señal de mayor frecuencia que la máxima permitida por el Teorema de Nyquist. A este sistema se le llama *filtro antialiasing* o *filtro antisolapamiento*.

2.4 Cuantificación

Es el proceso de convertir una señal discreta de amplitud continua en una señal digital, expresando cada muestra por medio de un número finito de dígitos (precisión finita).

Al error cometido al representar la señal de valor continuo utilizando un conjunto finito de valores se denomina error de cuantificación. Para cada muestra el error será:

$$e_q[n] = x_q[n] - x[q].$$

Puede por tanto modelarse el funcionamiento de un cuantificador como un sumador que suma a la señal original $x[n]$ una señal de ruido $e_q[n]$ (Fig. 2.4). Es por ello y por sus características estadísticas que también se llama a $e_q[n]$ *ruido de cuantificación*.

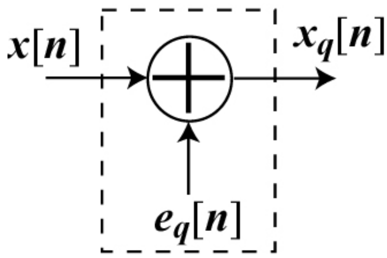

Figura 2.4 *Modelo sumador de un cuantificador.*

La función que describe la operación de cuantificación se conoce como *curva característica del cuantificador*, $x_q = Q(x)$, y siempre es una función escalonada. Esta curva relaciona los valores de las muestras a la entrada con el valor que toman a la salida del cuantificador.

La figura 2.5 muestra el ejemplo de un cuantificador con $L = 8$ niveles. Estos niveles están distribuidos de manera uniforme. A la diferencia que existe entre niveles consecutivos se la denota Δ y se la conoce como *escalón del cuantificación* o *resolución*.

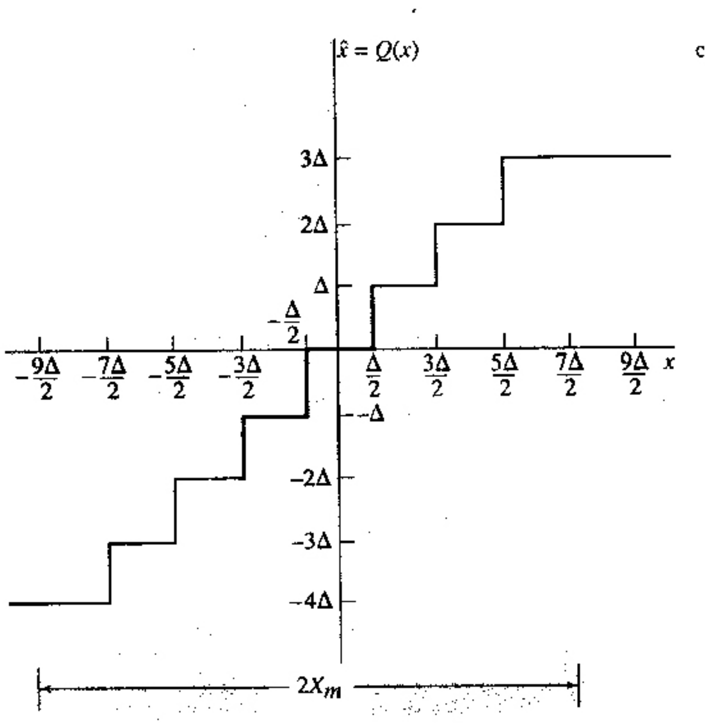

Figura 2.5 *Curva característica de un cuantificador uniforme.*

En la zona normal de funcionamiento del cuantificador, el error estará siempre acotado por un valor que depende directamente del tamaño del escalón de cuantificación. Existe un valor mínimo y un valor máximo a la entrada, $x_{\min}$ y $x_{\max}$, que limitan la zona donde debe encontrarse la señal para ser correctamente cuantificada. Esta zona recibe el nombre de *zona granular*. Si los valores de la señal sobrepasan estos límites entonces el error cometido no estará acotado. El efecto observado será un recorte de la señal en los intervalos de tiempo donde se han superado los límites. A está región de funcionamiento se la conoce como *zona de saturación o sobrecarga*.

Llamaremos margen dinámico del cuantificador, $2X_m$, a

$$2X_m = x_{\max} - x_{\min}$$

El tamaño del escalón de cuantificación está directamente relacionado con el margen dinámico y el número de niveles (que a su vez depende del número de bits por palabra código):

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L} = \frac{2X_m}{2^b}.$$

También se cumple que

$$\Delta = \frac{x_{q\max} - x_{q\min}}{L-1},$$

donde $x_{q\max}$ y $x_{q\max}$ son los valores cuantificados máximo y mínimo, respectivamente.

Fijado el margen dinámico, cuanto mayor sea el número de niveles, menor será el escalón de cuantificación y por tanto el error de cuantificación.

También es importante elegir adecuadamente el margen dinámico en función de la señal de entrada a digitalizar:

- Si se hace pequeño el valor de $2X_m$, aunque también disminuya el escalón de cuantificación, la señal puede verse recortada porque entra en la zona de saturación. Entonces ocurrirá que en vez de conseguir que el error disminuya, en ciertas zonas se disparará: el error máximo cometido será muy alto y no estará controlado.

- Si $2X_m$ es demasiado grande frente al valor de pico de la señal, entonces ésta al ser cuantificada sólo utilizará los niveles de cuantificación de menor valor. El error relativo cometido será muy elevado. Además estaremos desaprovechando bits, ya que apenas se emplearán las palabras código de los niveles más altos, y por tanto podría expresarse la misma información empleando un menor número de bits por nivel.

Para medir la calidad de la conversión A/D, en lo que se refiere a la cuantificación, se emplea la relación entre las potencias de la señal de entrada y la del ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{P_x}{P_{e_q}}.$$

Recibe este valor el nombre de relación señal a ruido de cuantificación y se suele expresar en decibelios:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q (dB) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_x}{P_{e_q}}\right) \text{ dB.}$$

Evidentemente, cuanto mayor sea la relación señal a ruido, mejor será la calidad de la conversión.

Bajo los siguientes supuestos es posible llegar a una expresión de la relación señal a ruido en función del número de bits b y el margen dinámico de cuantificación $2X_m$, y del valor cuadrático medio de la señal original σ_x:

- La señal está siempre dentro del margen dinámico del cuantificador. El ruido de cuantificación estará acotado, se cumplirá que

$$\left|e_q[n]\right| \leq \frac{\Delta}{2}.$$

- El número de niveles es suficientemente elevado como para considerar al ruido de cuantificación estadísticamente independiente de la señal. La secuencia $e_q[n]$ se estudia entonces como una señal aleatoria de distribución uniforme que se suma a las muestras originales $x[n]$.

En ese caso se puede demostrar que la relación señal a ruido de cuantificación viene dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6.02 \cdot (b-1) + 10.8 - 20\log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \text{ dB},$$

donde se ha supuesto que $b = \log_2 L$. Como ya habíamos visto, esta expresión también nos muestra que, cuando se trabaja en la zona granular:

1. Si se aumenta el número de bits, mejora la relación señal a ruido y por tanto la calidad de la cuantificación realizada.

2. Si se aumenta el margen dinámico, disminuye la relación señal a ruido.

Como ejemplo, las grabaciones en CD de audio, donde se utiliza un frecuencia de muestreo de 44.1 kHz., 16 bits de codificación por muestra, y un margen dinámico $2X_m \approx 8\sigma_x$. Esto proporciona relaciones señal a ruido por encima de 90 dB.

2.5 Codificación

La codificación se basa en la asociación de un binario único a cada nivel de cuantificación. Así, si se dispone de L niveles, se necesitarán al menos un número b de bits tal que

$$b \geq \log_2 L.$$

Ya hemos visto que cuanto mayor sea el número de bits, mayor es el número de niveles de que podemos disponer y mejor será la relación señal a ruido de cuantificación.

En general, cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo y mayor el número de bits de cuantificación del conversor A/D, más caro resultará el dispositivo.

La codificación de los niveles puede realizarse de cualquier forma siempre que cada nivel quede identificado por un número binario único. A continuación se muestran algunos ejemplos típicos de codificación, utilizando un cuantificador de 8 niveles (3 bits por nivel):

	Codificación correlativa		Cod. complemento a dos		Cod. signo-magnitud	
x_q	**Palabra código**	***Valor decimal***	**Palabra código**	***Valor decimal***	**Palabra código**	***Valor decimal***
3Δ	111	*7*	011	*3*	011	*+3*
2Δ	110	*6*	010	*2*	010	*+2*
Δ	101	*5*	001	*1*	001	*+1*
0	100	*4*	000	*0*	000	*+0*
$-\Delta$	011	*3*	111	*-1*	100	*-0*
-2Δ	010	*2*	110	*-2*	101	*-1*
-3Δ	001	*1*	101	*-3*	110	*-2*
-4Δ	000	*0*	100	*-4*	111	*-3*

Tabla 2.2 *Ejemplos de codificación para 8 niveles de cuantificación.*

2.6 Conversión digital-analógica

El dispositivo que permite convertir una señal digital en analógica se denomina *conversor digital-analógico*. El cometido del conversor D/A no es más que interpolar entre muestras. Existen distintas técnicas de interpolación:

- Retención de orden cero: Consiste en realizar una aproximación por escalones, manteniendo el valor de cada muestra durante T_S segundos. Es el sistema más sencillo y usado en la práctica.
- Interpolación lineal y de órdenes superiores: Técnicas más sofisticadas que también se utilizan y proporcionan una mejor recuperación de la señal analógica.
- Interpolador ideal (Teorema de Nyquist): Es muy difícil de implementar y no se usa en la práctica.

En la figura 2.6 se muestra el diagrama de bloques de un conversor D/A que se basa en el empleo de un circuito de retención de orden cero. El filtro paso bajo de interpolación compensado es un filtro de suavizado cuya función es mejorar la conversión. El filtro compensa el efecto de emplear la retención de orden cero suavizando las transiciones abruptas y consiguiendo una recuperación que se asemeja a la interpolación ideal.

Figura 2.6 *Conversor D/A.*

2.7 Señales y sistemas digitales frente a señales y sistemas en tiempo discreto

Hemos visto que las señales digitales son una serie ordenada de números de precisión finita. El índice de ordenación es la variable independiente n de la que es función la señal. El término "precisión finita" hace referencia al hecho de que los valores de la señal digital pertenecen a un conjunto finito de valores, $\{x_q\}$, que son representados con palabras binarias de un número finito de cifras. La longitud de estas palabras binarias generalmente es múltiplo de 8 bits.

Éstas son las señales que se tratan en los procesadores digitales de señal. Debido a que la longitud de las palabras código es finita, surgen problemas de aritmética de precisión finita al operar con dichas señales. Estos problemas han de ser tenidos en cuenta en el diseño del software y el hardware digital de procesado. Pueden acumularse errores de redondeo al realizar los cálculos, obteniéndose resultados erróneos. También la precisión finita de los coeficientes de los sistemas digitales diseñados puede tener efectos no lineales en el filtrado.

En este curso no tendremos en cuenta en los análisis todos estos efectos, supondremos que las señales y sistemas con las que trabajaremos son simplemente en tiempo discreto y de valor continuo. No consideraremos su naturaleza digital y los problemas que esto conlleva.