Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

IA EPS UA

Problemas Tema 3: Espacio Vectorial Euclídeo

Fundamentos de Matemática Aplicada a la Inteligencia Artificial II

1 Decir si las siguientes expresiones definen productos escalares en $\mathbb{R}^2$ o no:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = 2u_1v_1 + u_2v_2 - u_1v_2 - u_2v_1$

b) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 3x_2y_2$

2 Decir si las siguientes expresiones definen productos escalares en $\mathbb{R}^3$ o no:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

b) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{4}x_2y_2 + \frac{1}{2}x_3y_3$

3 Sea V el espacio vectorial de las matrices reales 2×3 con el producto escalar $A \cdot B = \mathrm{tr}(AB^t)$. Considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $A \cdot B$, $A \cdot C$ y $B \cdot C$.

b) $(2A + 3B) \cdot 4C$.

c) El módulo o norma de A: $|A|$.

d) A normalizada.

4 Resolver los siguientes apartados:

a) Deducir la ley del paralelogramo: $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

b) Deducir la forma polar del producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2}{4}$

c) Verificar que se cumplen ambas igualdades para $\vec{u} = (1, 0, 2, \lambda)$ y $\vec{v} = (2, \mu, 0, 1)$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5 Considerando dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de un espacio euclídeo, calcular la norma de $\vec{v}$ sabiendo que: $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{6}$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{\pi}{4}$.

6 En un espacio vectorial euclídeo, se consideran dos vectores unitarios $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que forman un ángulo de 60°. Calcular $|2\vec{u} + \vec{v}|$.

7 Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, -1, 1)$, comprobar si son ortogonales:

a) Respecto al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$.

b) Respecto al producto escalar de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

8 Dado el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

a) Determinar la matriz de Gram respecto de la base canónica.

b) Determinar un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, unitario, que forme un ángulo de 45° con el vector $(1, -1, 0)$.

9 Se define el siguiente producto escalar en $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$, siendo $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

b) La matriz de Gram respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) La matriz de Gram respecto a la base:

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

d) El módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

e) El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

10 En $\mathbb{R}^3$, se considera un producto escalar tal que si $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ es una cierta base de $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$\vec{v_2} \bullet \vec{v_3} = 5 \qquad \vec{v_2} \bullet \vec{v_2} = 10$$
$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_3} = \vec{v_1} \bullet \vec{v_2} \qquad \vec{v_3} \bullet \vec{v_3} = 37$$

Calcular la matriz de Gram en la base B si se sabe que el vector $12\vec{v_1} - 5\vec{v_2}$ es ortogonal al vector $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ y que $(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \bullet (\vec{v_2} + \vec{v_3}) = 19$.

11 Sea $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$ una base del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico. Sabiendo que los vectores de dicha base son unitarios y forman entre sí un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, hallar el producto $\vec{u} \bullet \vec{v}$, siendo:

$$\vec{u} = 3\vec{u_1} - 2\vec{u_3} \text{ y } \vec{v} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$$

12 Dado el siguiente producto escalar de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = (x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

y la base $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$, determinar una base ortogonal del espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$.

13 En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, calcular una base ortonormal a partir de los vectores $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$ y $(1, 0, 0, 0)$.

14 En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar estándar, se pide:

a) Calcular un vector unitario que sea ortogonal a los vectores:

$$(1, 2, 1, 0), \ (0, -1, 1, 0), \ (1, 1, -2, 1)$$

b) Obtener una base de vectores ortonormales del subespacio U, generado por los vectores anteriores.

15 Determinar la expresión matricial de un producto escalar de $\mathbb{R}^3$ para el cual los siguientes vectores sean una base ortogonal:

$$\vec{w}_1 = (1, 1, 0), \ \vec{w}_2 = (1, -1, 1), \ \vec{w}_3 = (1, 1, 1)$$

y, además, se cumpla que $|\vec{w_1}| = 1$, $|\vec{w_2}| = \sqrt{2}$ y $|\vec{w_3}| = \sqrt{3}$, siendo $|\cdot|$ la norma definida a partir de dicho producto escalar.

16 Se considera el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$, junto con el producto escalar usual:

$$U = L\{(2, 1, 5, -1), (-1, 1, 2, 0)\}$$

Calcular una base de $U^{\perp}$.

17 Calcular el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$U \equiv \{x + y = 0, \ z + t = 0\} \qquad W \equiv \{x + y = 0, \ z = 0, \ t = 0\}$$

Determinar también la proyección ortogonal del vector $\vec{x} = (1, 1, 1, 0)$ sobre U y sobre W.

18 Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar cuya matriz de Gram, en la base canónica $C = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, viene dada por:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la proyección ortogonal de $\vec{e_3}$ sobre $U = L\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$.

19 En un espacio vectorial real V, tenemos un producto escalar que, respecto a una base $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, cumple que:

a) $|\vec{v_1}| = \sqrt{2}$, $|\vec{v_2}| = \sqrt{7}$ y $|\vec{v_3}| = \sqrt{4}$.

b) El complemento ortogonal de $U = L\{\vec{v_3}\}$ es $U^{\perp} \equiv \{5y + 4z = 0\}$.

c) La proyección ortogonal del vector $\vec{v_2} + \vec{v_3}$ sobre $W = L\{\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}\}$ es el vector $\frac{22}{25}(\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3})$.

Determinar la matriz de Gram del producto escalar en la base B.

20 Descomponer el vector $(1,3,-1,4)$ en suma de dos vectores, uno perteneciente al subespacio $U = L\{(2,1,0,1),(0,3,1,1)\}$ y el otro ortogonal a U.

21 Hallar la solución aproximada de los siguientes sistemas sobredeterminados por el método de mínimos cuadrados:

a) $$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ -x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x - y - 2z &= 1 \\ 2y - z &= 2 \\ x + y + z &= -1 \\ 2x - z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

22 Obtener la recta de regresión que mejor ajusta los siguientes pares de datos:

a) $(1,1)$, $(2,-1)$, $(-1,0)$, $(3,3)$.

b) $(-2,0)$, $(-1,2)$, $(0,3)$, $(1,5)$, $(2,6)$.

Para cada caso, representar los puntos y la recta de regresión obtenida.

Soluciones

1 **a)** La expresión sí define un producto escalar de $\mathbb{R}^2$, ya que se cumplen las 4 propiedades.
b) La expresión no define un producto escalar de $\mathbb{R}^2$, pues falla la propiedad 4: $\vec{x} \cdot \vec{x}$ puede ser negativo.

2 **a)** La expresión no define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$, pues falla la propiedad 3: $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) \neq (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v}$.
b) La expresión sí define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$, ya que se cumplen las 4 propiedades.

3 **a)** $A \cdot B = 119,\ A \cdot C = -9,\ B \cdot C = -21$.

b) $(2A + 3B) \cdot 4C = 8A \cdot C + 12B \cdot C = -324$.

c) $|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{271}$

d) $A_{\text{NORM}} = \frac{1}{|A|}A = \frac{1}{\sqrt{271}} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4 **a)** Calculamos $|\vec{u} + \vec{v}|^2$ y $|\vec{u} - \vec{v}|^2$:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \\ |\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

Sumando las dos expresiones obtenemos la ley del paralelogramo.

b) Restando las dos expresiones y despejando $\vec{u} \cdot \vec{v}$ llegamos a la forma polar del producto escalar.

c) Se cumplen ambas expresiones al sustituir los siguientes resultados:

$$\begin{array}{lll} |\vec{u} + \vec{v}|^2 = \lambda^2 + 2\lambda + \mu^2 + 14 & |\vec{u}|^2 = \lambda^2 + 5 & \\ |\vec{u} - \vec{v}|^2 = \lambda^2 - 2\lambda + \mu^2 + 6 & |\vec{v}|^2 = \mu^2 + 5 & \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda + 2 \end{array}$$

5 $|\vec{v}| = 2 - \sqrt{2}$.

6 $|2\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{7}$.

7 **a)** $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales ($\vec{u} \perp \vec{v}$), ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son ortogonales ($\vec{u} \not\perp \vec{v}$), ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \neq 0$.

8 **a)** $G_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Tomando $y = 0$ y $z = \frac{\sqrt{2}}{4}$ tenemos que: $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

9 **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$.

b) $G_C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

c) $G_B=\begin{pmatrix}4 & 4 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

d) $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=1$, $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{5}$.

e) $\alpha=\arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)=26{,}6^\circ$.

10 $G_B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 10 & 5\\ 2 & 5 & 37\end{pmatrix}$.

11 $\vec{u}\cdot\vec{v}=3-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12 Una base ortogonal podría ser: $B'=\left\{(1,1,0),\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right),\left(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{1}{7}\right)\right\}$.

13 Una base ortonormal podría ser:
$B''=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)\right\}$.

14 **a)** Un vector podría ser: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$.

b) $B_U''=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{66}},-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}},\frac{7}{\sqrt{66}},0\right),\left(\frac{4}{\sqrt{33}},-\frac{4}{3\sqrt{33}},-\frac{4}{3\sqrt{33}},\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\right)\right\}$.

15 $\vec{x}\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{9}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$.

16 $B_{U^\perp}=\{(1,1,0,3),(2,0,1,9)\}$.

17 $U^\perp=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,/\,x-y=0,\ z-t=0\right\}$.
$W^\perp=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,/\,x-y=0\right\}$.
$\text{proy}_U(\vec{x})=\left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\text{proy}_W(\vec{x})=(0,0,0,0)$.

18 $\text{proy}_U(\vec{e_3})=\vec{e_2}=(0,1,0)$.

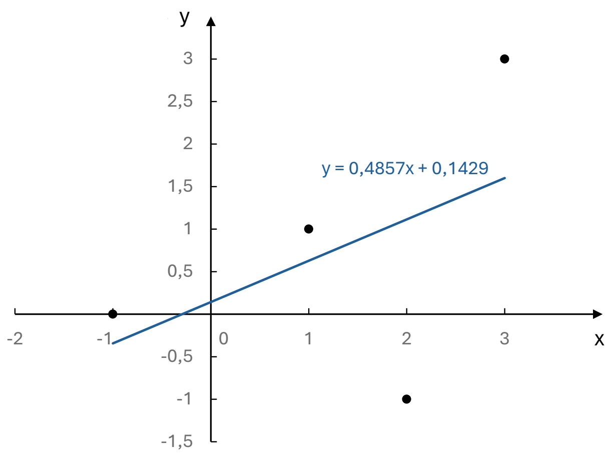
19 $G_B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 7 & 5\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

20 $(1,3,-1,4)=\vec{u}+\vec{v}$, donde:

$\vec{u}=\left(\frac{51}{25},\frac{159}{50},\frac{18}{25},\frac{87}{50}\right)\in U$ y $\vec{v}=\left(-\frac{26}{25},-\frac{9}{50},-\frac{43}{25},\frac{113}{50}\right)\in U^{\perp}$.

21 **a)** $\hat{X}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{25}\\ \frac{14}{25}\end{pmatrix}$. **b)** $\hat{X}=\begin{pmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{6}\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$.

22 **a)** $y=\frac{17}{35}x+\frac{1}{7}$.



b) $y=\frac{3}{2}x+\frac{16}{5}$.