- **Bases ortogonales y ortonormales :**

* Una base ortogonal de un e.v. euclídeo es una base formada por un conjunto ortogonal.

* Una base ortonormal es una base ortogonal cuyos vectores son unitarios.

Ejemplo : Para el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$, la base canónica es una base ortonormal :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \underbrace{(1,0)}_{\vec{e}_1} \cdot \underbrace{(0,1)}_{\vec{e}_2} = 0 \qquad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \quad \rightarrow \text{ son una base ortogonal}$$

$$|\vec{e}_1| = 1 \text{ y } |\vec{e}_2| = 1 \quad \text{unitarios} \quad \Rightarrow \text{ son una base ortonormal.}$$

Ejemplo : Para otros productos escalares de $\mathbb{R}^2$, la base canónica no es ortonormal ni ortogonal. Por ejemplo, si :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \ \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$\Rightarrow$ no es base ortogonal ni ortonormal

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \quad \vec{e}_1 \not\perp \vec{e}_2$$

* Una base B es ortogonal $\Leftrightarrow$ la matriz de Gram G_B es diagonal.

* Una base B es ortonormal $\Leftrightarrow$ la matriz de Gram G_B es I.

* Una matriz A es ortogonal si: $\boxed{A^{-1} = A^t}$ o $\boxed{A \cdot A^t = I}$

- Proceso de ortogonalización de Gram - Schmidt :

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de un e.v. euclídeo V.

Podemos construir una base ortogonal de V, $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$, mediante el proceso de Gram - Schmidt :

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{|\vec{w}_1|^2} \cdot \vec{w}_1$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{|\vec{w}_1|^2} \cdot \vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{|\vec{w}_2|^2} \cdot \vec{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{w}_1}{|\vec{w}_1|^2} \cdot \vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{w}_2}{|\vec{w}_2|^2} \cdot \vec{w}_2 - \dots - \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{w}_{n-1}}{|\vec{w}_{n-1}|^2} \cdot \vec{w}_{n-1}$$

Además, se satisface que :

$$L\{\vec{w}_1\} \underset{C.L}{=} L\{\vec{v}_1\}$$

$$L\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

$$\vdots$$

$$L\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\} = L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

* Base ortonormal : $B'' = \left\{ \frac{\vec{w}_1}{|\vec{w}_1|}, \frac{\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|}, \dots, \frac{\vec{w}_n}{|\vec{w}_n|} \right\}$

Ejercicio: Consideremos el e.v euclídeo de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, y en él, la base:

$$B = \{ \underbrace{(1,1,1)}_{\vec{v}_1}, \underbrace{(1,-1,0)}_{\vec{v}_2}, \underbrace{(1,0,-1)}_{\vec{v}_3} \}$$

Obtener una base ortonormal para dicho espacio.

- Subespacios ortogonales y complemento ortogonal:

* Sea V un e.v. euclídeo con U y W subespacios de V.

Diremos que U y W son ortogonales ($U \perp W$) si todos los vectores de U son $\perp$ a todos los vectores de W:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{w} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{para todo } \vec{u} \in U \text{ y } \vec{w} \in W}$$

Propiedades:

① $U \perp W \iff$ Vectores de $B_U \perp$ Vectores de B_W.

② Si $U \perp W$, entonces: $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Ejemplo: Si V es $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, los subespacios $U = L\{(1,0,0)\}$ y $W = L\{(0,1,1)\}$ son ortogonales:

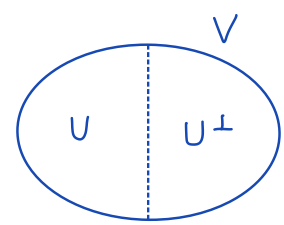
$$\left.\begin{array}{l} B_U = (1,0,0) \\ B_W = (0,1,1) \end{array}\right\} \longrightarrow (1,0,0) \cdot (0,1,1) = 0 \quad U \perp W$$

* El complemento ortogonal de U, denotado $U^{\perp}$, es el conjunto de todos los vectores de V ortogonales a todos los de U:

$$\boxed{U^{\perp} = \{ \vec{v} \in V \,/\, \vec{v} \perp \vec{u} \text{ para todo } \vec{u} \in U \}}$$

$U^{\perp}$ es subespacio de V.

Propiedades:



① U y $U^{\perp}$ son subespacios suplementarios:

$$\boxed{U \oplus U^{\perp} = V}$$

$U \cap U^{\perp} = \{\vec{0}\}$

$\dim(U) + \dim(U^{\perp}) = \dim(V)$

② $U^{\perp}$ es ortogonal a U.

③ $(U^{\perp})^{\perp} = U$

* ¿Cómo calcular $U^{\perp}$?

Buscaremos los vectores ortogonales a una base de U.

Ejercicio: En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar, se considera el subespacio:

$$U \equiv \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

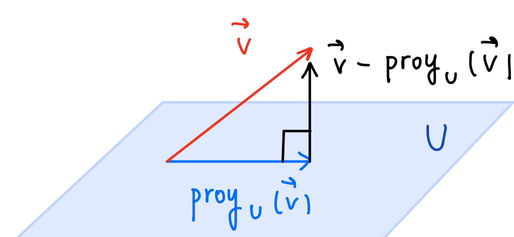
Calcular unas ecuaciones paramétricas de $U^{\perp}$.

- <u>Proyección ortogonal</u> :

Sea V un e.v. euclídeo, U un subespacio de V y $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_K\}$ una base ortogonal de U. Dado un vector cualquiera $\vec{v} \in V$, se cumple :

$$\boxed{\text{proy}_U(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{|\vec{u}_1|^2}\,\vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_K}{|\vec{u}_K|^2}\,\vec{u}_K}$$

Proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre el subespacio U.



$\rightarrow |\vec{v} - \text{proy}_U(\vec{v})|$ mínima distancia de $\vec{v}$ a U.

El vector de U que mejor aproxima a $\vec{v}$ es $\text{proy}_U(\vec{v})$

<u>Ejercicio</u>: En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, calcular la proyección del vector $(1,0,0)$ sobre el subespacio $U \equiv x + y = 0$.

- <u>Solución aproximada de sistemas incompatibles:</u>

Partimos de un sistema incompatible : $AX = B$ $\begin{cases} m \text{ ecuaciones (filas)} \\ n \text{ incógnitas (cols A)} \\ rg(A) = n \end{cases}$

Como no existe una solución X del sistema, buscamos una solución aproximada $\hat{X}$ por mínimos cuadrados, tal que :

$$A\hat{X} \underset{\substack{\text{mejor} \\ \text{aprox.}}}{\approx} B$$

Para hallar $\hat{X}$ resolvemos el siguiente SCD :

$$\boxed{A^t \cdot A \cdot \hat{X} = A^t \cdot B}$$

O despejando $\hat{X}$:

$$\boxed{\hat{X} = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot B}$$

Ejercicio: Hallar la solución aproximada por el método de los mínimos cuadrados del sistema sobredeterminado:

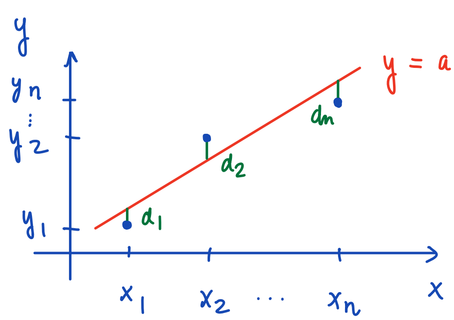
$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\}$$

- <u>Ajustes de datos por mínimos cuadrados:</u>

Supongamos que tenemos n puntos no alineados:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

y queremos encontrar la recta que mejor se ajusta a dichos puntos:



$y = ax + b$ → Recta de mínimos cuadrados

↓

Minimiza la suma de las distancias d_i.

$$\boxed{X = (A^t \cdot A)^{-1} \cdot A^t \cdot Y}$$

donde: $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Ejercicio: Ajustar los datos $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$ y $(4,5)$ mediante una función lineal utilizando el método de mínimos cuadrados.