Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 2

DFESTS

UA | UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

TEMA 1. INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

…

1.5.4. Desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas
1.5.4.1. Desarrollo en serie de Fourier en tiempo continuo
1.5.4.2. Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

PROBLEMAS
2.1. Cálculo del Desarrollo en Serie de Fourier en tiempo discreto
(Método 1. La señal viene definida por un gráfico y los valores que adopta)

1.5.4. DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

Una función f es periódica de periodo T_0 , si $f(x + T_0) = f(x)$, $x, T_0 \in \mathbb{R}$

El **teorema de Fourier** dice que toda onda, cualquiera que se sea su forma, puede expresarse de manera única como superposición (suma) de ondas sinusoidales de longitudes de onda y amplitudes definidas.

Es decir, las señales periódicas, independientemente de que sean en tiempo continuo o en tiempo discreto, pueden descomponerse en una suma de exponenciales complejas o sinusoides de distintas frecuencias, amplitudes y fases.

1.5.4.1. Desarrollo en serie de Fourier en tiempo continuo

Consideramos la señal de tiempo continuo periódica: $X(t) = X\ (t + T_0) \quad \forall t$

$y\ \ T_0 = \frac{1}{f_0}$ es el periodo de la señal.

X(t) puede expresarse como suma de sinusoides complejas, todas relacionadas armónicamente (con la frecuencia f_0 de la señal).

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot Sk\ (t)\ = \cdots C_{-2} \cdot S_{-2}(t) + C_{-1} \cdot S_{-1}(t) + C_0 \cdot S_0(t) + C_1 \cdot S_1(t) + \ldots$$

donde $\mathbf{C_k}$ son los coeficientes complejos del Desarrollo en Serie de Fourier (DSF)

$$C_k = |C_k| \cdot\ e^{j\phi_{ck}}$$

Y $\mathbf{S_k}$ son los exponenciales complejos $\quad S_k(t) = e^{j \cdot 2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$

$k \cdot f_0$ están relacionados con la frecuencia f_0 de la señal X(t)

Ecuaciones del Desarrollo en Serie de Fourier en tiempo continuo

ECUACIÓN DE SÍNTESIS

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| \cdot e^{j\phi_{ck}} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| \cdot e^{j\,(2\pi k f_0 t + \phi_{ck})}$$

ECUACIÓN DE ANÁLISIS

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t-\frac{T_0}{2}}^{t+\frac{T_0}{2}} X(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

1.5.4.2. Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

Cualquier señal en tiempo discreto periódica

$$X[n] = X[n+N_0]$$

donde N_0 es el periodo fundamental de $X[n]$,

puede escribirse como suma de sinusoides complejas

relacionadas armónicamente con su frecuencia discreta

$$f_d = 1 / N_0$$

$X[n] = C_0 \cdot S_0[n] + C_1 \cdot S_1[n] + C_2 \cdot S_2[n] + \ldots C_{N0-1} \cdot SN_{0-1}[n]$

Donde $\mathbf{C_k}$ son coeficientes complejos → $C_k = |C_k| \cdot e^{j\phi_{ck}}$

y **Sk** son sinusoides complejas, relacionadas con el periodo (N_0)

y la frecuencia fundamental de la señal (fd) → $S_k = [n] \cdot e^{j(2\pi \frac{k}{N_0} n)}$

$$fd_k = \frac{k}{N_0} \left\{ \begin{array}{c} k = 0 \rightarrow fd = 0 \\ k = 1 \rightarrow fd = {}^{1}/_{N_0} \\ k = 2 \rightarrow fd = {}^{2}/_{N_0} \\ \ldots \\ k = N_{0-1} \rightarrow fd = {}^{N_{0-1}}/_{N_0} \end{array} \right\}$$

K=0,1,2, ... N_{0-1}

Son múltiplos de la

frecuencia fundamental $1/N_0$

Ecuaciones del Desarrollo en Serie de Fourier en <u>tiempo discreto</u>

❷**ECUACIÓN DE SÍNTESIS** *(Expresa el sumatorio de las sinusoides complejas discretas)*

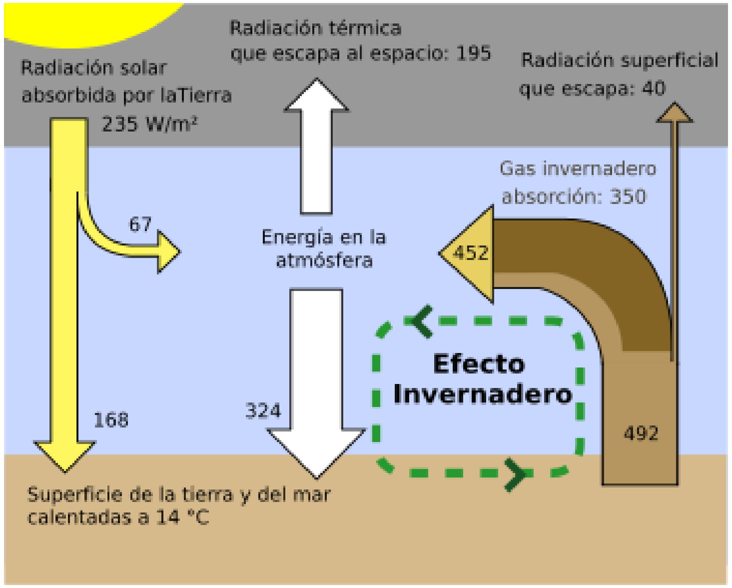
$$X[n] = \sum_{k=0}^{N_{0-1}} C_k \cdot e^{j\left(2\pi \frac{k}{N_0} n\right)} = \sum_{k=0}^{N_{0-1}} |C_k| \cdot e^{j\left(2\pi \frac{k}{N_0} n + \phi_{ck}\right)}$$

$$con \;\; C_k = |C_k| \cdot e^{j\phi_{ck}} \quad y \;\; K = 0, 1, 2, \ldots N_{0-1}$$

❶**ECUACIÓN DE ANÁLISIS** *(Sirve para calcular los coeficientes Ck)*

$$C_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_{0-1}} X[n] \cdot e^{-j\left(2\pi \frac{k}{N_0} n\right)} \qquad con \quad n = 0, 1, 2, \ldots N_{0-1}$$

*"La **ecuación de calor** permite estudiar y predecir cómo varía la temperatura de la tierra en respuesta al aumento de gases de **efecto invernadero"**.*
*El método con el que se resolvió dicha ecuación está basado en la descomposición de señales periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas **Series de Fourier**.*
El matemático y físico francés Joseph Fourier publicó sus estudios alrededor de 1822.



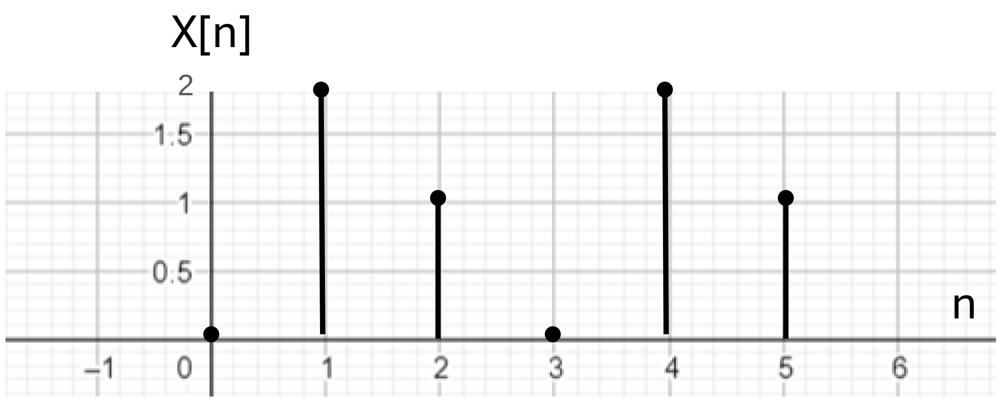
TEMA 1. INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

…

1.5.4. Desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas
1.5.4.1. Desarrollo en serie de Fourier en tiempo continuo
1.5.4.2. Desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto

PROBLEMAS
2.1. Cálculo del Desarrollo en Serie de Fourier en tiempo discreto
(Método 1. La señal viene definida por un gráfico y los valores que adopta)

Problema 1. Hallar los **coeficientes** C_k del DSF (Desarrollo en Serie de Fourier discreto) de la señal X[n], escribir su **desarrollo** y representar los **espectros** de módulo y fase.



n	**X[n]**
0	**0**
1	**2**
2	**1**
3	0
4	2
5	1

Para resolverlo se siguen los siguientes pasos:

1.- Hallar el periodo fundamental $\mathbf{N_0}$

En este caso → $N_0=3$ $X[n] = X[n+3]$
El periodo es 3 utd, cada 3 valores se repite la secuencia

2.- Utilizar la **fórmula de análisis**, para calcular los coeficientes $\mathbf{C_k}$ particularizando para $\mathbf{N_0=3}$

$$C_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} X[n]\cdot e^{-j\left(2\pi\frac{k}{N_0}n\right)}$$

$$C_k = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} X[n]\cdot e^{-j\left(2\pi\frac{k}{3}n\right)}$$

2 parámetros

N=0, 1, 2

K= 0, 1, 2

3 coeficientes

3.- Desarrollar respecto a **n**

$$C_k = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{2} X[n] \cdot e^{-j\left(2\pi \frac{k}{3} n\right)} =$$

Se sustituye para **n= 0, 1, 2** (que son instantes)
y X[n] = 0, 2, 1 (que son los valores que toma)

X[n] **n**

$e^0 = 1$

$$= \frac{1}{3}\Big[\; 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{3}\,0} = 0 \cdot e^{-j\,0} = 0 \cdot e^{0} = 0 \cdot 1 = \mathbf{0} \quad (x[0] = 0)$$

$$2 \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{3}\,1} = 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{3}} = \mathbf{2e^{-j\frac{2\pi k}{3}}} \quad (x[1] = 2)$$

$$1 \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{3}\,2} = 1 \cdot e^{-j\frac{4\pi k}{3}} = \boldsymbol{e^{-j\frac{4\pi k}{3}}}\;\Big] \quad (x[2] = 1)$$

$$= C_k = \frac{1}{3}\left[\mathbf{0} + 2e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + e^{-j\frac{4\pi k}{3}}\right]_k$$ Ec. de análisis

4.- A partir de la expresión de la ecuación de análisis obtenida, se hallan los coeficientes **C_k**

Ahora se sustituye para k = 0, 1, 2.
(K va de 0 hasta N_0-1)

$$C_k = \frac{1}{3}\left[2e^{-j\frac{2\pi k}{3}} + e^{-j\frac{4\pi k}{3}}\right]$$

K = 0

$e^0 = 1$

$$C_0 = \frac{1}{3}\left[2 \cdot e^0 + e^0\right] = \frac{1}{3}\left[2+1\right] = \frac{1}{3}\left[3\right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$|C_0| = 1$
$\phi_0 = 0$

$\boxed{K = 1}$

$$\boxed{e^{-j\,\phi} = \cos\phi - j\,\mathrm{sen}\,\phi}$$

$$\mathbf{C_1} = \frac{1}{3}\left[2e^{-j\frac{2\pi\,1}{3}} + e^{-j\frac{4\pi\,1}{3}}\right] =$$

$$\boxed{\phi = \frac{2\pi}{3}} \qquad \boxed{\phi = \frac{4\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left[2(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j\ sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)) + (cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right))\right] =$$

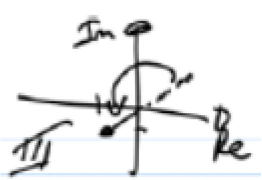
$$\frac{1}{3}\left[2(-\frac{1}{2} - j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)) + (-\frac{1}{2} - j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right))\right] = \frac{1}{3}\left[-1 - j\sqrt{3}) - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{6} = -\,0{,}5\ - j\ 0{,}28$$

$$\mathbf{C_1} = \left\{\begin{array}{l} \| = |C_1| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (-0{,}28)^2} = \mathbf{0,57} \\ \boldsymbol{\phi} = \text{arctg}\left(\frac{-0{,}28}{-0{,}5}\right) = 0{,}51 - \pi = \mathbf{-2,63}\ rad \end{array}\right\}$$

Lo correcto es expresar fase en el rango [- π, π]

$|C_1|= \mathbf{0,57}$
$\boldsymbol{\phi_1} = e^{-j2{,}63}$



(3er cuadrante, sumamos o -en este caso- restamos **π.**
0,51-3,1416=-2,63)

K = 2

$$\boldsymbol{C_2} = \frac{1}{3}\left[2e^{-j\frac{2\pi\,2}{3}} + e^{-j\frac{4\pi\,2}{3}}\right] = \frac{1}{3}\left[2e^{-j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\frac{8\pi}{3}}\right] =$$

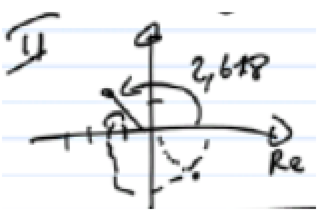
$$\boxed{\phi = \frac{4\pi}{3}} \qquad \boxed{\phi = \frac{8\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{3}\left[2\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) + \left(cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) - j\ sen\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right)\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[2\left(-\tfrac{1}{2} - j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \left(-\tfrac{1}{2} - j\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right] = \frac{1}{3}\left[-1 + j\sqrt{3}) - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{1}{2}\ +j\ \frac{\sqrt{3}}{6}\ = \text{-0,5}\ +j\ \frac{\sqrt{3}}{6}\ = -\,0{,}5 + j\ 0{,}28$$

$$\mathrm{C}_2 = \begin{cases} \| = |C2| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (+0{,}28)^2} = \ \mathbf{0,57} \\ \boldsymbol{\phi} = \text{arctg}\left(\frac{+0{,}28}{-0{,}5}\right) = -0{,}51 + \pi = \mathbf{2,63}\ rad \end{cases}$$



(2º cuadrante, sumamos π
$-\,0{,}51 + 3{,}1416 = 2{,}63$)

$|C_2|$=**0,57**
$\boldsymbol{\phi_2} = e^{j2{,}63}$

DFESTS

C_2 también se puede calcular, con la regla del **conjugado**, a partir de C_1

Si la señal periódica X[n] es real, los coeficientes son periódicos y se cumple:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{N0-k} &= C_k^* \\ C_k &= C_{N0-k}^* \end{aligned}}$$

Con $K \neq 0$
y N_0 el periodo

Conjugado: $(a+jb)^* = a-jb$
$(r \cdot e^{j\phi})^* = r \cdot e^{-j\phi}$

Por lo tanto, se podría haber calculado C2 a partir del conjugado de C1 y $N_0 = 3$

Para k=2, aplicando $C_k = C_{N0-k}^*$ -> $\mathbf{C_2 = C_{3-2}^* = C_1^*}$

$C_1 =$ $-0{,}5 \ -j \cdot 0{,}28 =$ $0{,}57 \cdot e^{-j \cdot 2{,}63}$

$C_2 = C_1^* =$ $-0{,}5 \ +j \cdot 0{,}28 =$ $0{,}57 \cdot e^{+j \cdot 2{,}63}$

Así queda $C_1 = 0{,}57 \cdot e^{-j \cdot 2{,}63}$ y $C_2 = 0{,}57 \cdot e^{+j \cdot 2{,}63}$

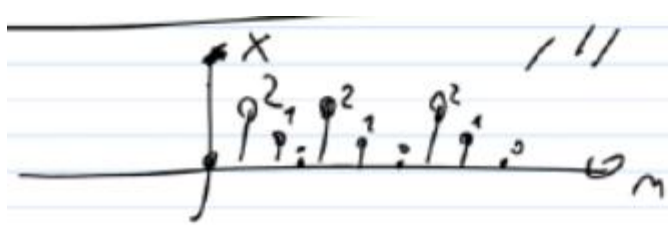
$$\boxed{\begin{aligned} |C_1| &= 0{,}57 \\ \phi_1 &= e^{-j2{,}63} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} |C_2| &= 0{,}57 \\ \phi_2 &= e^{j2{,}63} \end{aligned}}$$

5.- Finalmente se escribe el **DSF de X[n]** utilizando la ecuación de síntesis

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N_{0-1}} C_k \cdot e^{j\left(2\pi \frac{k}{N_0} n\right)} = \sum_{k=0}^{2} C_k \cdot e^{j\, 2\pi \frac{k}{3} n)} =$$

$$= C_0\, e^{j \cdot 0} \quad + \quad C_1\, e^{j \frac{2\pi \cdot 1}{3} n} \quad + \quad C_2\, e^{j \frac{2\pi \cdot 2}{3} n}$$

$$\boxed{= \mathbf{1} \quad + \quad \mathbf{0,57} \cdot \boldsymbol{e^{-j2,63}} \cdot e^{j \frac{2\pi}{3} n} \quad + \quad \mathbf{0,57} \cdot \boldsymbol{e^{j\,2,63}} \cdot e^{j \frac{4\pi}{3} n}}$$ **DSF**



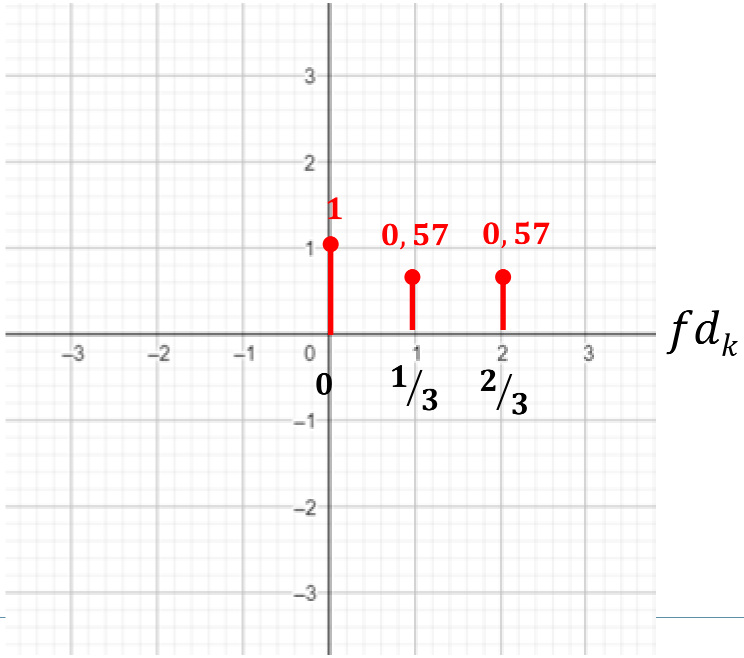
6.- Por último, se pide el **espectro del módulo** de los coeficientes C_k y el **espectro de la fase** de los coeficientes C_k, en función de fd

Para $N_0 = 3$

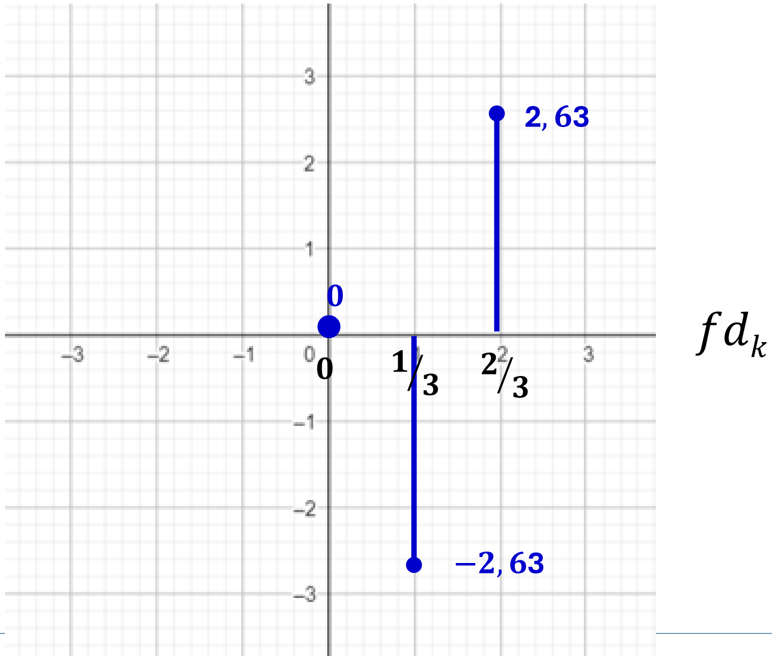
$$fd_k = \frac{k}{N_0} \quad \begin{Bmatrix} k=0 \rightarrow fd=0 \\ k=1 \rightarrow fd={}^1/_3 \\ k=2 \rightarrow fd={}^2/_3 \end{Bmatrix}$$

$\|C_0\| = 1$ $\phi_0 = 0$	$\|C_1\| = 0,57$ $\phi_1 = e^{-j2,63}$	$\|C_2\| = 0,57$ $\phi_2 = e^{j2,63}$

Espectro de módulo $|C_k|$



Espectro de fase ϕ_{ck}



Problema 2. a) Calcular el desarrollo en serie de Fourier discreto de x[n], sus coeficientes Ck y sus espectros.

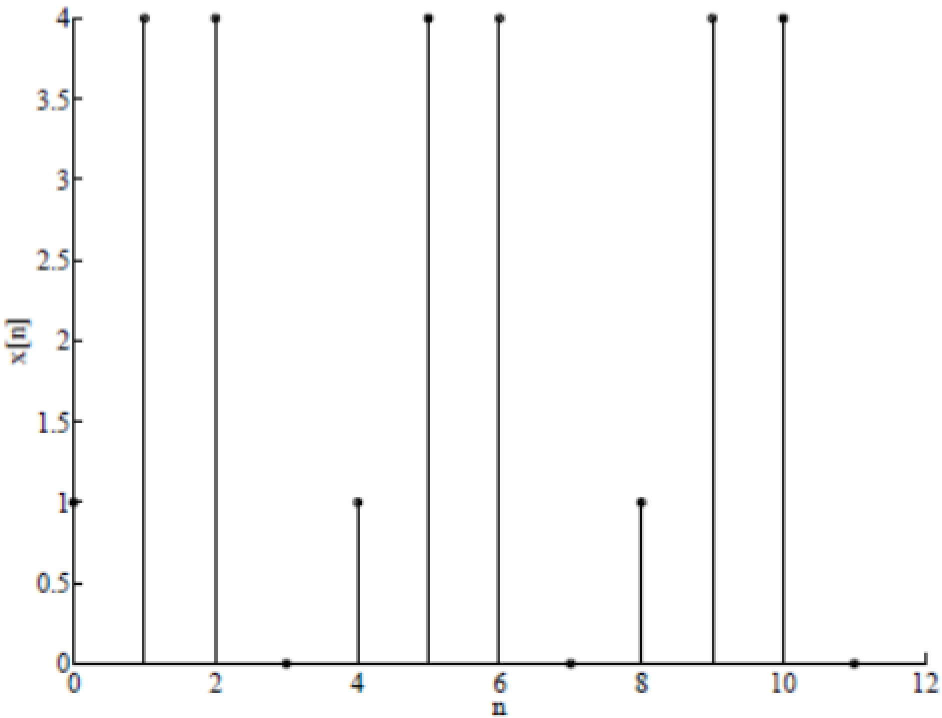


Figura 2.8. Señal periódica $x[n]$.

n	X[n]
0	1
1	4
2	4
3	0

La señal periódica es:
X[n] {1,4,4,0, 1,4,4,0, 1,4,4,0, ...}
Por lo tanto No = 4 utd
(cada 4 valores se repite la serie)

X[n]={1,4,4,0} para n=0,1,2,3. Hay que calcular 4 coeficientes (*Ck*), K= 0,1,2,3

A partir de ecuación de análisis, se calcula para **x[n]** y **n**

$$Ck = \frac{1}{No}\sum_{n=0}^{No-1} x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k}{No}n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi k}{4}n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}n} =$$

x[n] **n**

$$= \frac{1}{4}\Big[\quad 1\cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}0} = 1\cdot e^{-j\,0} = 1\cdot e^{0} = 1\cdot 1 = 1$$ (para n=0)

$$4\cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}1} = 4\cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}} = 4\cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{\pi k}{2}}$$ (para n=1)

$$4\cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}2} = 4\cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}2} = 4\cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\pi k}$$ (para n=2)

$$0\cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}3} = 0\Big] =$$ (para n=3)

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 4\cdot e^{-j\pi k} + 0\right] = Ck$$

DFESTS

Ahora se sustituye para K = 0, 1, 2, 3

$$\boldsymbol{Ck} = \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 4 \cdot e^{-j\pi k}\right]$$

K = 0

$$\boldsymbol{C}_0 = \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{-j\frac{\pi\,\mathbf{0}}{2}} + 4 \cdot e^{-j\pi\mathbf{0}}\right] = \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{0} + 4e^{0}\right] = \frac{1}{4}\left[1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1\right] = \frac{1}{4}\,[9] = \frac{9}{4}$$

$|C_0| = \frac{9}{4}$

$\phi_0 = 0$

K = 1

$$\boldsymbol{C1} = \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{-j\frac{\pi\,\mathbf{1}}{2}} + 4\cdot e^{-j\pi\mathbf{1}}\right] = \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{-j\frac{\pi}{2}} + 4\cdot e^{-j\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \left(4cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4jsen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + (4cos(\pi) - 4jsen(\pi))\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\,[1 + 0 - 4j\cdot 1 + 4\cdot(-1) - 4j\cdot 0] = \frac{1}{4}\,[1 - 4j - 4] =$$

$$= \frac{1}{4}\,[-3 - 4j] = [-\frac{3}{4} - \frac{4}{4}\,j] = -\frac{3}{4} - j$$

$$|C_1| = \sqrt{(-3/4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9/16 + 1} = \sqrt{25/16} = \frac{5}{4}$$

$$\boldsymbol{\phi_1} = \text{arctg}\left(\frac{-1}{-3/4}\right) = \text{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = 0{,}92$$

$$|C_1| = \frac{5}{4}$$

$$\boldsymbol{\phi_0} = e^{-j\,2{,}22}$$

(a,b)= (-3/4, -1) está en el III cuadrante.
Por lo tanto, se le resta π, para que esté en el **rango [- π, π]**,
0,92- π = 0,92-3,1416= -2,22

K = 2

$$C_2 = \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{-j\frac{\pi\,2}{2}} + 4e^{-j\pi\cdot 2}\right] = \frac{1}{4}\left[1 + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j2\pi}\right] =$$

$$\frac{1}{4}\,[\,1 + (4cos\,(\pi) - 4jsen(\pi)) + (4cos\,(2\pi) - 4jsen(2\pi))] =$$

$$\frac{1}{4}\,[\,1 + 4\cdot(-1) \quad - 4j\cdot 0 \quad + 4\cdot 1 \quad - 4j\cdot 0\,] =$$

$$= \frac{1}{4}\,[1 - 4 + 4] = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$|C_2| = \frac{1}{4}$$

$$\phi_2 = 0$$

K = 3

C_3 se puede obtener a partir del conjugado de C_1, con $N_0 = 4$

Ya que $C_k = C_{No-k}{}^*$; $\mathbf{C_3} = C_{4\text{-}3}{}^* = \mathbf{C_1{}^*}$

Directamente, a partir de $\boldsymbol{C_1 = \frac{5}{4} \cdot e^{-j2{,}22}}$

por el conjugado $\boldsymbol{C_3 = \frac{5}{4} \cdot e^{+j2{,}22}}$

$\boldsymbol{|C_3| = \frac{5}{4}}$

$\boldsymbol{\phi_3 = e^{j2{,}22}}$

El DSF se obtiene finalmente, multiplicando cada Ck por $e^{j\frac{2\pi k}{No}n}$

$$\boldsymbol{X[n] = \sum_{k=0}^{No-1} Ck \cdot e^{j\frac{2\pi k}{No}n}} = X[n] = \sum_{k=0}^{3} Ck \cdot e^{j\frac{2\pi k}{4}n} =$$

$$= \mathbf{C_0} \cdot e^{j\frac{\pi\, 0}{2}n} + \mathbf{C_1} \cdot e^{j\frac{\pi\, 1}{2}n} + \mathbf{C_2} \cdot e^{j\frac{\pi\, 2}{2}n} + \mathbf{C_3} \cdot e^{j\frac{\pi\, 3}{2}n} =$$

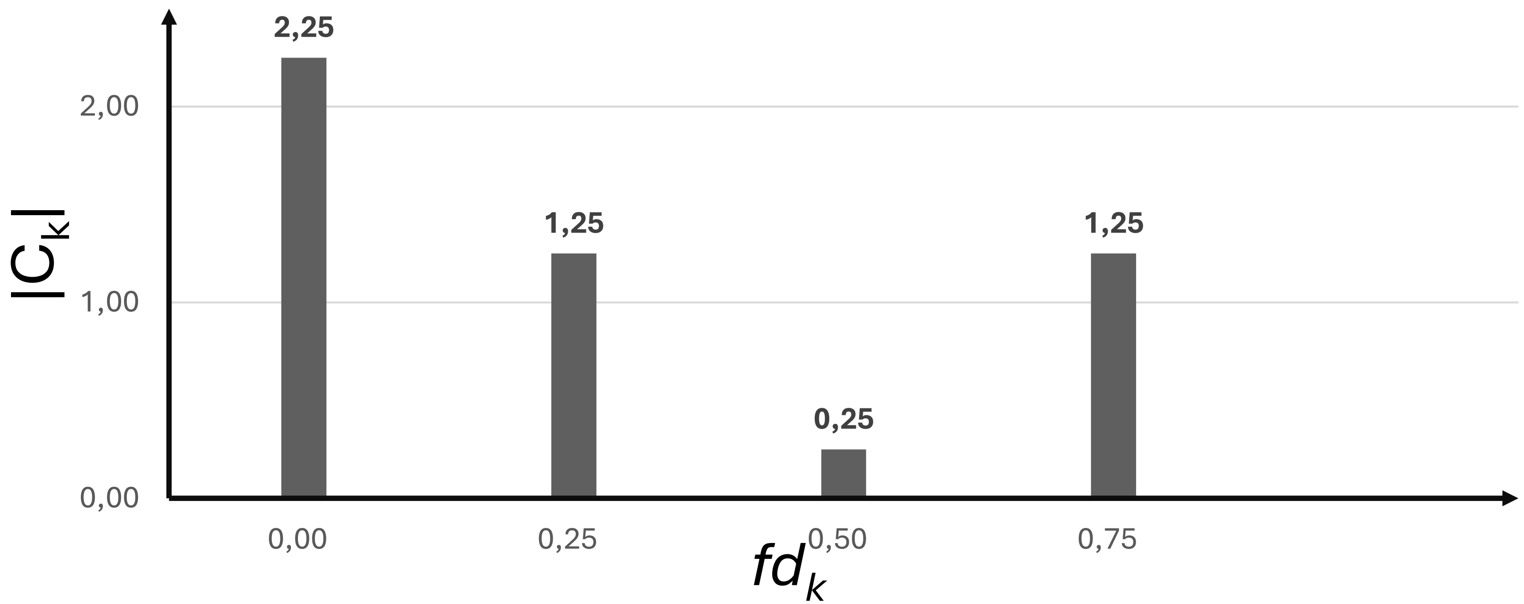
$$= \mathbf{C_0} \cdot e^{0} + \mathbf{C_1} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} + \mathbf{C_2} \cdot e^{j\,\pi n} + \mathbf{C_3} \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}n} =$$

$$\boxed{\boldsymbol{= \frac{9}{4} + \frac{5}{4} e^{j\,-2,22}\, e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{4} e^{j\,\pi n} + \frac{5}{4} e^{j\,2,22}\, e^{j\frac{3\pi}{2}n}}}$$ **DSF**

b) Representar el espectro de amplitud y de fase de los coeficientes Ck, en función de la frecuencia discreta.

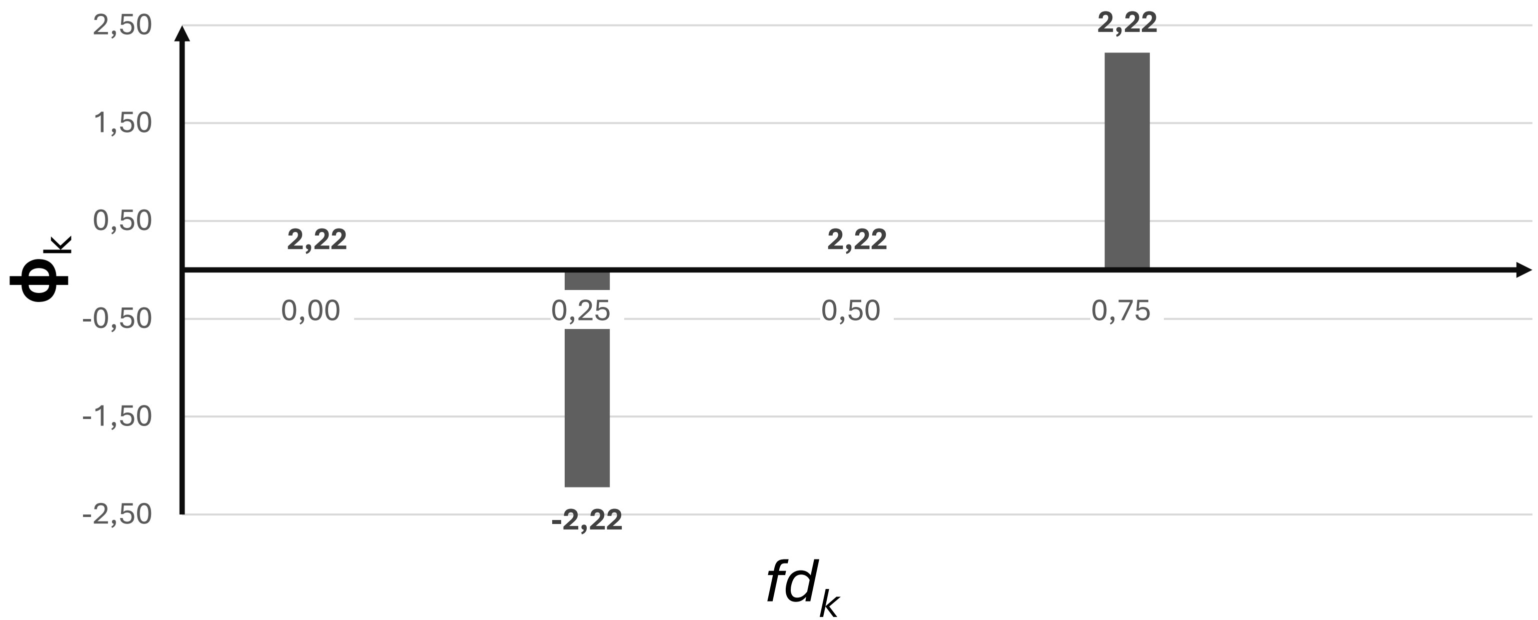
$|C_0| = \frac{9}{4} = 2{,}25$ $|C_1| = \frac{5}{4} = 1{,}25$ $|C_2| = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $|C_3| = \frac{5}{4} = 1{,}25$

ESPECTRO DE AMPLITUD: $fd_k = \frac{k}{N_0}$ K = 0, 1, 2, 3 y N_0= 4. fd_k= 0, 1/4; 2/4; 3/4



$\phi_0 = 0$ **$\phi_1 = -2{,}22$** **$\phi_2 = 0$** **$\phi_3 = +2{,}22$**

ESPECTRO DE FASE: $fd_k = \frac{k}{N_0}$ K = 0, 1, 2, 3 y N_0= 4. fd_k= 0, 1/4; 2/4; 3/4



Problema 3. A partir de la señal:

$$[n] = 4\delta[n] + 3\,\delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + \delta\,[n-3]$$

Se genera la señal periódica $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}\,[\mathrm{n} - 4\mathrm{k}]$

a) (0,5 P) Calcula el periodo N_0 y el valor medio de la señal en este periodo.
b) (4 P) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$
y sus coeficientes ck.
c) (1 P) Representa el espectro en amplitud y fase de los coeficientes ck en función de la frecuencia discreta.

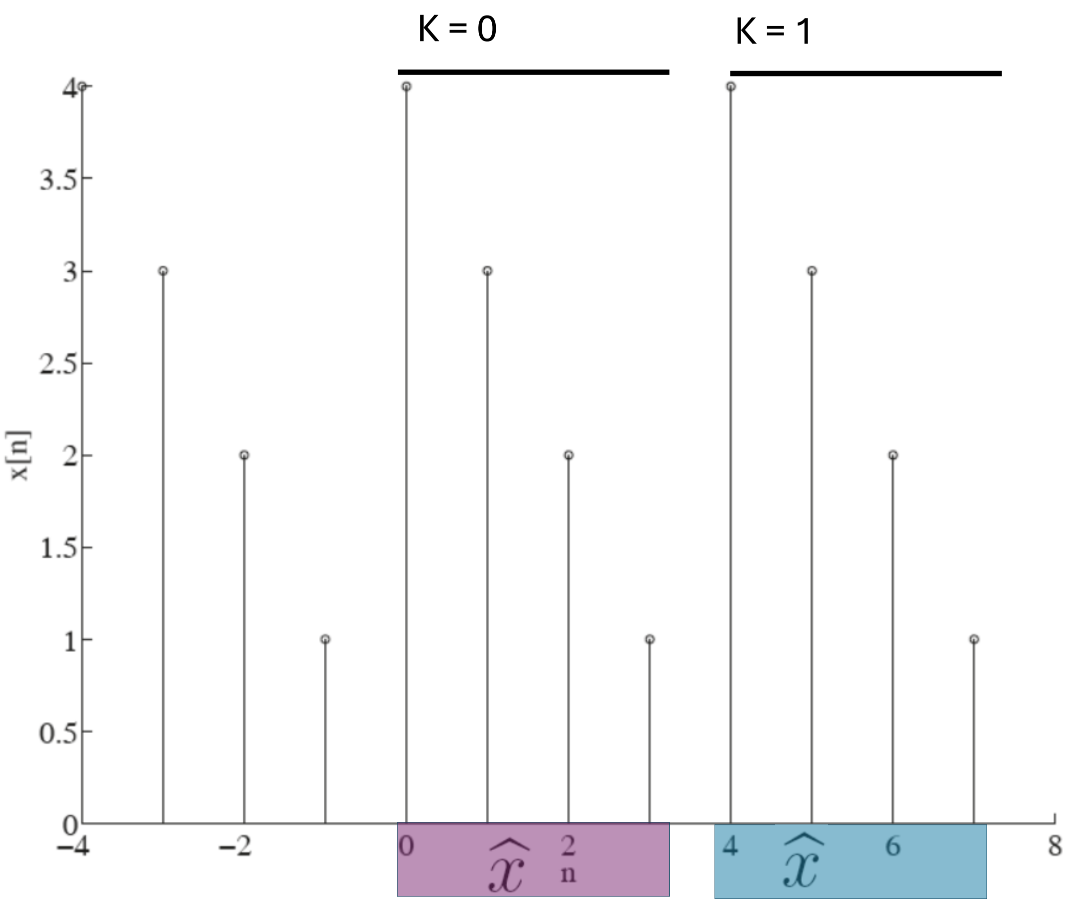
a) Calcula el periodo N_0 y el valor medio de la señal en este periodo.

Amplitud

En primer lugar, interpretamos la señal $\widehat{x}[n] = 4\delta[n] + 3\,\delta[n-1] + 2\,\delta[n-2] + 1\delta\,[n-3]$

Instante

Para cada valor de **K** hay 4 valores de **n**



$x[n] = \;\dots\dots\; + \;[n]\,\widehat{x}\; + \;[n\text{-}4]\;\widehat{x}$

x	$\widehat{x}$ [n]
0	4
1	3
2	2
3	1

La señal es periódica de periodo ***N*₀ = 4**.

Su valor medio es:

$$Vm = \frac{4+3+2+1}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

b) Calcula el desarrollo en serie de Fourier discreto de *x*[*n*] y sus coeficientes *ck*

$$\boldsymbol{X[n]} = \sum_{k=0}^{N_0-1} \boldsymbol{Ck} \cdot \boldsymbol{e}^{j\frac{2\pi k}{No}\boldsymbol{n}} = \sum_{k=0}^{3} Ck \cdot e^{j\frac{2\pi k}{4}n} = \sum_{k=0}^{3} Ck \cdot e^{j\frac{\pi k}{2}n}$$

Los valores de los **coeficientes** se calculan a partir de la ecuación de análisis del DSF:

Como el periodo es 4, calculamos 4 coeficientes. X[n]={4,3,2,1} para n=0,1,2,3.

$$\boldsymbol{Ck} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{No}} \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{No-1}} \boldsymbol{x[n]} \cdot \boldsymbol{e}^{-j\frac{2\pi k}{No}\boldsymbol{n}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{4}n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} \boldsymbol{x[n]} \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}\boldsymbol{n}} =$$

x[n] n

$$= \frac{1}{4}\Big[\ 4 \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}\mathbf{0}} = 4 \cdot e^{-j\,0} = 4 \cdot e^{0} = 4 \cdot 1 = \mathbf{4}$$ (para n=0)

$$3 \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}\mathbf{1}} = 3 \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}} = 3 \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{k}}{\mathbf{2}}}$$ (para n=1)

$$2 \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}\mathbf{2}} = 2 \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\pi k}}$$ (para n=2)

$$1 \cdot e^{-j\frac{\pi k}{2}\mathbf{3}} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j}\frac{\boldsymbol{3\pi k}}{\boldsymbol{2}}}\ \Big]$$ (para n=3)

$$\boldsymbol{Ck = \frac{1}{4}\left[4 + 3e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + 1e^{-j\frac{3\pi k}{2}}\right]}$$

Ahora se sustituye para cada valor de K = 0, 1, 2, 3

K = 0

$e^0 = 1$

$$C_0 = \frac{1}{4}\left[4 + 3e^{-j\frac{\pi 0}{2}} + 2e^{-j\pi 0} + e^{-j\frac{3\pi 0}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[4 + 3e^0 + 2e^0 + 1e^0\right] =$$

$$\frac{1}{4}[4+3+2+1] = \frac{1}{4}[10] = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

$$\boldsymbol{C_0 = \frac{5}{2} = 2{,}5}$$

K = 1

$e^{-j\phi} = \cos\phi - j\,\mathrm{sen}\,\phi$

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[4 + 3e^{-j\frac{\pi 1}{2}} + 2e^{-j\pi 1} + e^{-j\frac{3\pi 1}{2}}\right] = \frac{1}{4}\left[4 + 3e^{-j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\pi} + e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 + 3\cos(\underbrace{\pi/2}_{0}) - 3j\,sen(\underbrace{\pi/2}_{1}) + 2\cos(\underbrace{\pi}_{-1}) - 2j\,sen(\underbrace{\pi}_{0}) + \cos(\underbrace{3\pi/2}_{0}) - j\,sen(\underbrace{3\pi/2}_{-1})\right] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 - 3j - 2 + j] = \frac{1}{4}[2 - 2j] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

A forma polar: $r \cdot e^{j\phi}$

$$|C_1| = \sqrt{(1/2)^2 + (-1/2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \boldsymbol{\phi_1} = \mathrm{arctg}\left(\frac{-1/2}{1/2}\right) = \mathrm{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}}$$

DFESTS

$\boxed{K = 2}$

$$C_2 = \frac{1}{4}\left[4 + 3e^{-j\frac{\pi}{2}2} + 2e^{-j\pi 2} + e^{-j\frac{3\pi}{2}2}\right] = \frac{1}{4}\left[4 + 3e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi} + e^{-j3\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 + 3\cancelto{-1}{\cos(\pi)} - 3j\cancelto{0}{sen(\pi)} + 2\cancelto{1}{\cos(2\pi)} - 2j\cancelto{0}{sen(2\pi)} + \cancelto{-1}{\cos(3\pi)} - j\cancelto{0}{sen(3\pi)}] =$$

$$= \frac{1}{4}[4 - 3 + 2 - 1] = \frac{1}{4}[2] = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_2 = \frac{1}{2} = 0,5}}$$

$\boxed{K = 3}$

C_3 se puede obtener como el conjugado de C_1^*, ya que $C_k^* = C_{No-k}$; $C_1^* = C_{4-1} = C_3$

Como $C_1 = [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j]$ tenemos que $C_1^* = [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j]$ por lo tanto $C_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{+j\frac{\pi}{4}}$ $\boxed{\boldsymbol{C_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{+j\frac{\pi}{4}}}}$

* Igual que K=1, pero cambiando de signo la fase.

El DSF se obtiene finalmente, multiplicando cada Ck por $e^{j\frac{2\pi\, k}{No}n}$ (Ecuación de síntesis)

Sustituyendo en cada complejo por el valor de K = 0, 1, 2, 3

$$\boldsymbol{X[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} Ck \cdot e^{j\frac{2\pi\, k}{No}n}} = \sum_{k=0}^{3} Ck \cdot e^{j\frac{2\,\pi\, k}{4}n} = \sum_{k=0}^{3} Ck \cdot e^{j\frac{\pi\, k}{2}n}$$

$$= \mathbf{C_0} \cdot e^{j\frac{\pi\, 0}{2}n} + \mathbf{C_1} \cdot e^{j\frac{\pi\, 1}{2}n} + \mathbf{C_2} \cdot e^{j\frac{\pi\, 2}{2}n} + \mathbf{C_3} \cdot e^{j\frac{\pi\, 3}{2}n} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot e^{j0} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} \cdot e^{j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}n} =$$

$$= \boxed{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} \cdot e^{j\pi n} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}n}} \quad \textbf{DSF}$$

c) Espectro en amplitud y fase de los coeficientes *ck* en función de la frecuencia discreta.

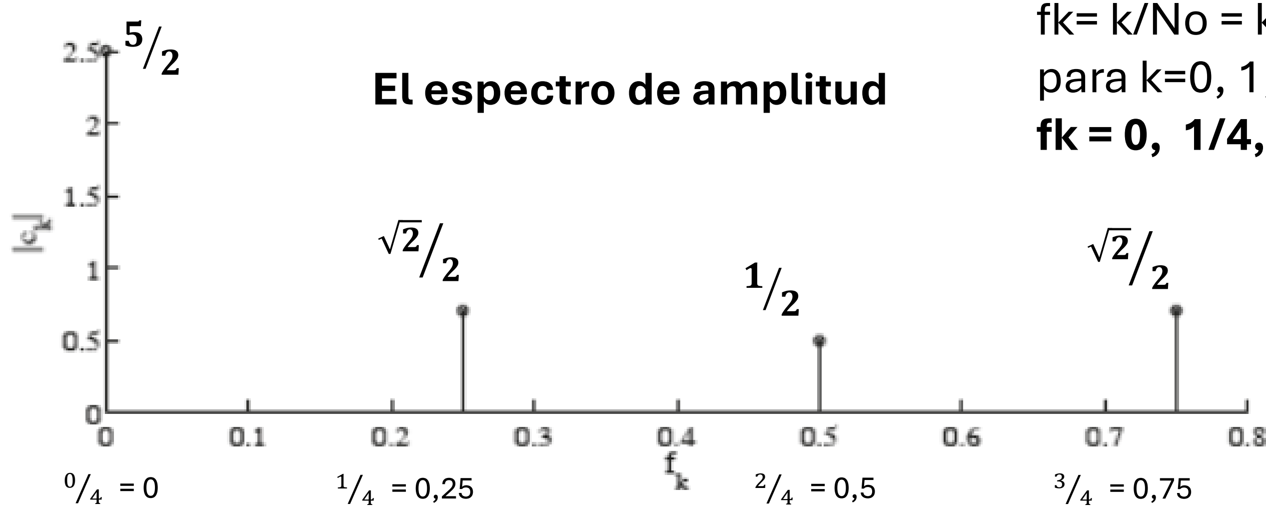
fk= k/No = k/4 ;
para k=0, 1, 2, 3;
fk = 0, 1/4, 2/4, 3/4

$$C_0 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

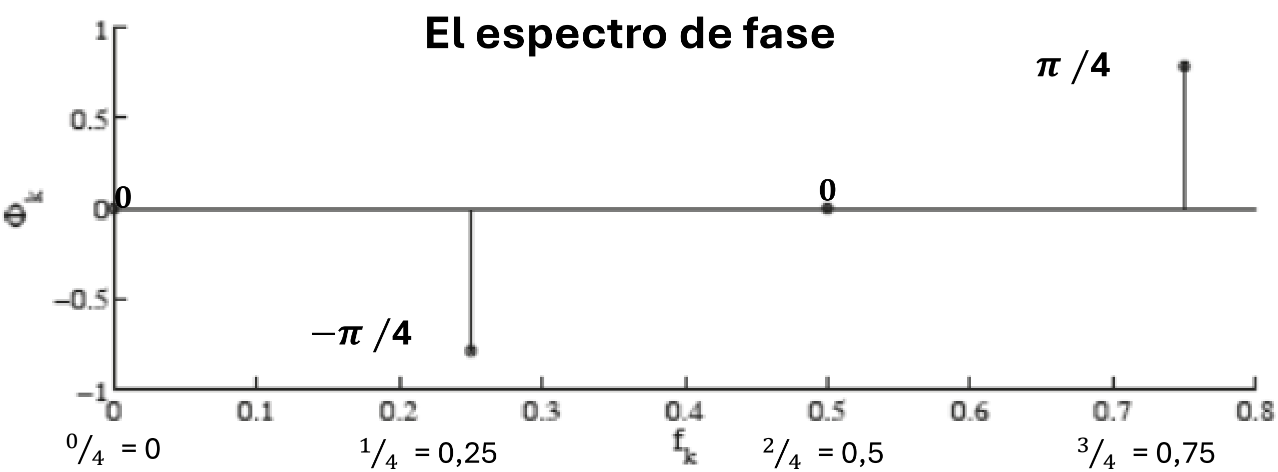
$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{+j\frac{\pi}{4}}$$



$\sqrt{2}/_2 = 0{,}7$



$\pi /4 = 0{,}78$