Práctica 4: Programación lineal

Algoritmia y optimización

Curso 2024–25

1. Introducción

En esta práctica trabajaremos la formulación de problemas de "Programación lineal", así como su resolución mediante librerías especializadas.

2. Objetivos

- Entender la programación lineal.
- Identificar los elementos relevantes de un enunciado de programación lineal.
- Adquirir destreza en la resolución de problemas de programación lineal mediante *SciPy*.

3. Preliminares

Como hemos visto en teoría, la resolución de la programación lineal no requiere de diseño de algoritmos específicos sino que se pueden utilizar algunos generales como "Simplex". En Python, podemos utilizar la librería *SciPy* para resolver problemas de programación lineal de manera muy simple. Asumiendo el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar:

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

Su resolución se podría implementar mediante el siguiente código:

```
from scipy.optimize import linprog

c = [-3, -2]   # Maximizar 3x1 + 2x2

A = [[1, 1],   # x1 + x2 <= 4
    [2, 1]]    # 2x1 + 3x2 <= 5
b = [4, 5]

result = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(0, None))

print("Valor óptimo:", result.fun) # -9.0
print("Valores de las variables:", result.x) # [1. 3.]
```

Lo que arroja que el valor óptimo es **9** para $x_1 = 1, x_2 = 3$. Recuerda que, en esta librería, se asume que todos los objetivos se deben **minimizar**, mientras que todas las restricciones deben ser de la forma $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.

4. Ejercicio

Plantea los siguientes enunciados utilizando programación lineal, para lo cual debes identificar correctamente las variables, la función objetivo y las restricciones. Después, utiliza *scipy.optimize.linprog* para obtener tanto el valor óptimo de la función objetivo como los valores de las variables. Puedes utilizar el código proporcionado arriba como referencia.

4.1. Enunciado 1

Una fábrica produce dos tipos de camisetas: deportivas y casuales. Cada camiseta deportiva genera una ganancia de 5 euros y cada camiseta casual una ganancia de 4 euros. Para fabricar una camiseta deportiva se necesitan 2 horas de trabajo y 1 metro de tela, mientras que una camiseta casual requiere 1 hora de trabajo y 2 metros de tela. La fábrica dispone de 100 horas de trabajo y 120 metros de tela.

Plantea un modelo de programación lineal para maximizar las ganancias de la fábrica cumpliendo las restricciones.

4.2. Enunciado 2

Una empresa debe transportar productos desde tres almacenes a tres tiendas. Los almacenes tienen disponibles 120, 180 y 200 unidades de producto, respectivamente, mientras que las tiendas necesitan 100, 150 y 250 unidades, respectivamente. Los costes de transporte por unidad son los siguientes:

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Almacén 1	4	6	8
Almacén 2	5	3	7
Almacén 3	6	4	5

Plantea un modelo de programación lineal para minimizar el coste total de transporte, asegurando que se satisfagan las necesidades de las tiendas y no se exceda la capacidad de los almacenes.

4.3. Enunciado 3

Una empresa necesita planificar los turnos de trabajo para cubrir sus operaciones durante una semana. Hay tres turnos diarios: mañana, tarde y noche. Cada turno tiene diferentes necesidades de personal, y el coste por hora de los empleados varía según el turno. Los requisitos de personal y los costes por turno son:

Turno	**Mañana**	**Tarde**	**Noche**
Necesidad de personal por día	5	4	3
Coste por empleado (€/hora)	15	18	22

La empresa tiene una capacidad de producción diaria de 200 unidades y genera ingresos de 1,000 euros diarios. Cada empleado puede trabajar un máximo de 40 horas por semana y debe descansar al menos un día completo. La empresa tiene 10 empleados disponibles, pero tres de ellos han solicitado no trabajar en turnos de noche. Además, cada empleado debe trabajar al menos dos turnos de tarde durante la semana.

Plantea un modelo de programación lineal para minimizar los costes de personal mientras se cumplen los requisitos de los turnos y las restricciones de los empleados.

4.4. Enunciado 4

Una fábrica produce un compuesto químico utilizando tres ingredientes: A, B y C. Cada kilogramo del compuesto final debe contener al menos un 30 % de A, un 20 % de B y no más de un 50 % de C. El coste por kilogramo de cada ingrediente es:

- A: 5 €/kg
- B: 8 €/kg
- C: 3 €/kg

La fábrica necesita producir al menos 500 kg del compuesto final. Sin embargo, debido a limitaciones de inventario, solo tiene disponibles 300 kg de A, 200 kg de B y 400 kg de C. La prioridad es minimizar el coste de producción. La fábrica vende el compuesto final a 12 €/kg y tiene contratos pendientes para entregar 400 kg del producto en las próximas dos semanas.

Plantea un modelo de programación lineal para determinar la cantidad de cada ingrediente que debe usar para minimizar el coste de producción y cumplir las restricciones.