Ejercicio : ¿ U es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

$$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = 2+4t \ , \ y = 1-2t \ , \ z = t \ , \ t \in \mathbb{R} \}$$

a) $\vec{0} = (\underset{x}{0},\underset{y}{0},\underset{z}{0}) \cancel{\in} U$?

$$2+4t = 0 \qquad 1-2t = 0 \qquad t = 0$$

$$1-2t = 0 \ \downarrow \ 2t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{2} \quad \neq$$

$$\boxed{U \text{ no es subespacio de } \mathbb{R}^3}$$

NOTAS :

- dos subconjuntos $\{\overset{\substack{\text{sub. trivial}\\ \uparrow}}{\vec{0}}\}$ y $\overset{\substack{\text{sub. total}\\ \uparrow}}{V}$ son subespacios vectoriales de V.

- Subespacios de $\mathbb{R}^2$:
  - $\{(0,0)\}$
  - $\mathbb{R}^2$
  - Rectas que pasan por el origen

- Subespacios de $\mathbb{R}^3$:
  - $\{(0,0,0)\}$
  - $\mathbb{R}^3$
  - Rectas y planos que pasan por el origen

↖ ↗ ec. lineales homogéneas

- **Combinación lineal :**

Un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_K$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$ tales que :

$$\boxed{\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_K \cdot \vec{v}_K} \rightarrow \text{SCD o SCI.}$$

Ejemplo $\vec{u} = (-7, 7, 7)$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (-1, 2, 4)$ y $\vec{w} = (5, -3, 1)$, ya que :

$$\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w} = \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_1 = 2}}{2}(-1,2,4) \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_2 = -1}}{-}(5,-3,1) = (-7,7,7)$$

Ejercicio : Escribir el vector $\vec{v} = (1,1,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (0,1,2)$ y $\vec{v}_3 = (-1,0,1)$.

Ejercicio : ¿ Puede expresarse el vector $\vec{u} = (1,-2,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1 = (1,2,3)$, $\vec{u}_2 = (0,1,2)$ y $\vec{u}_3 = (-1,0,1)$?

- ## Dependencia e independencia lineal :

Un conjunto de vectores $S = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_K \} \in V$ es

linealmente independiente (L.I) si la ecuación vectorial :

$$\boxed{\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_K \cdot \vec{v}_K = \vec{0}}$$ → SISTEMA HOMOGÉNEO .

Tiene solamente la solución trivial :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_K = 0$$

Si también hay otras soluciones , el conjunto de vectores S es

linealmente dependiente (L.D) .

Ejercicio : En $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores :

$\vec{v}_1 = (1, -1, 2, 0)$, $\vec{v}_2 = (-3, -1, 2, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 3, -6, -1)$

a) Son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ linealmente independientes ?

b) ¿ Y $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$?

Ejercicio: ¿El conjunto $S = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es linealmente independiente?

Propiedades de dependencia e indep. lineal :

- si S contiene al vector $\vec{0}$ → S es L.D.
- si $S = \{\vec{u}\}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ → S es L.I.
- si $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ proporcionales → S es L.D.
- si S es L.D y le añadimos vectores → S será L.D.
- si S es L.D, quitando vectores que sean C.L → S será L.I.
- si S es L.I, y quitamos vectores → S será L.I.
- si S es L.I, y añadimos un vector C.L → S será L.D.

* Para comprobar si S es L.I o L.D → Gauss

- **Sistema generador**: conjunto de vectores que generan un e.v.

Consideremos un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \in V$.

* Conjunto de todas las C.L de S : $\boxed{L(S)}$

↑ SUBESPACIO GENERADO POR S

* S es un sistema generador de V si todo vector de V se puede escribir como C.L de vectores de S. Es decir, si:

$$\boxed{V = L(S)}$$

Ejercicio: ¿El conjunto $S = \{(0,2),(1,4)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$?

Ejercicio: ¿El conjunto $S = \{(1,0,3),(2,0,-1),(4,0,5),(2,0,6)\}$ es sistema generador de $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio: Obtener un sistema generador del subespacio

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

- Base y dimensión :

Un conjunto de vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \in V$ es una base de V si :

① B es un sistema generador de V.

② B es L.I.

Ejemplo : Una base de $\mathbb{R}^2$ es $B = \{(1,0),(0,1)\}$.

① B es sistema generador :

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$\vdots$$

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

② B es L.I.

$B = C_{\mathbb{R}^2}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$

Ejemplo : La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es :

$$B = C_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Ejemplo : El conjunto $S = \{(1,1,1),(2,2,2)\}$ no es base.

porque S es L.D.

Ejemplo : Vimos que $S = \{(0,2),(1,4)\}$ es s. generador de $\mathbb{R}^2$. Como S es L.I → es una base de $\mathbb{R}^2$.

n° vec. sistema gen. $\geq$ n° vec. base

Ejercicio : Hallar una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\{(3,-1,-4),(1,2,1),(4,3,-1)\}$$

Ejercicio: Determinar una base del subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,4,-1,3)$, $(1,3,-1,2)$, $(2,-1,-2,-3)$ y $(-3,2,3,5)$. Extender dicha base a una base de $\mathbb{R}^4$ si es necesario.

* **Dimensión de V** : $\boxed{\dim(V) = \text{nº de vectores de una base de } V}$

Todas las bases de V tienen el mismo nº de vectores.
(∞)

$$\boxed{\text{Si } V = \{\vec{0}\} \rightarrow \dim(V) = 0} \qquad \boxed{\dim(\overset{\text{subespacio de } V}{U}) \leq \dim(V)}$$

Ejercicio : Hallar una base y la dimensión del subespacio :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z,\ y = z\}$$

Ejercicio : Obtener una base del subespacio W y su dimensión :

$$W = \{(-\beta, \alpha - \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

- Coordenadas de un vector respecto a una base :

Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V. Entonces, para cada vector $\vec{v} \in V$ existen números únicos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que :

$$\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v_n}$$

* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a la base B.

Ejercicio : Se consideran en $\mathbb{R}^3$ la base canónica y la base

$$B = \{(1,0,3),(1,1,4),(0,1,3)\}.$$

a) ¿ Cuáles son las coordenadas de $\vec{u} = (-1,-1,1)$ en la base B ?

b) Si las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B son $(3,-2,2)$, determinar sus coordenadas en la base canónica.

- Ecuaciones implícitas y paramétricas:

Las formas más comunes de dar un subespacio U de V son:

Sistema generador	$U = L(S) \rightarrow$ Todos los vectores de U se generan por C.L de S.
Base	Sistema generador L.I.
Ecuaciones paramétricas	Expresión con parámetros que al tomar distintos valores producen todos los vectores de U.
Ecuaciones implícitas	Ecuaciones que deben cumplir todos los vectores que pertenecen a U.

* Cuantas más ecuaciones implícitas haya → + pequeño será U.
(+ restricciones)

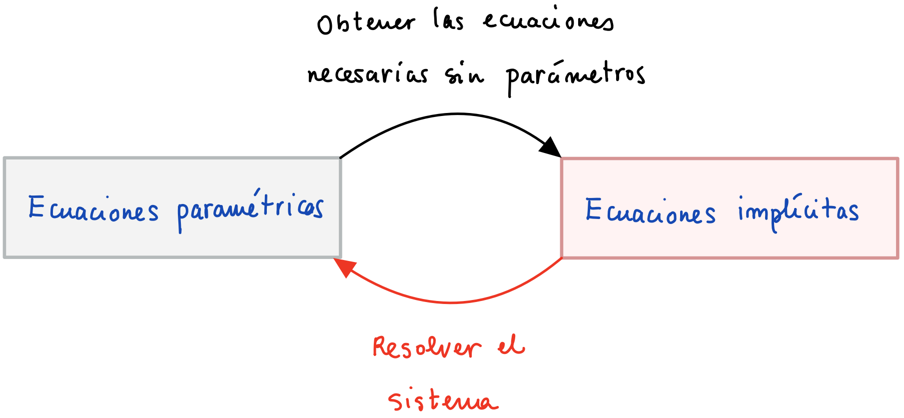
* Importante:

$$\boxed{N^{\underline{o}}\text{-ec. implícitas} = \dim(V) - \dim(U)}$$

↑

¡no redundantes!

las del sistema escalonado



Ejercicio: Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$: $U = L\{(1,2,0,1,3),(2,1,1,2,-1)\}$

Ejercicio: Determinar unas ecuaciones paramétricas, una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$U = \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$