Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

IA EPS UA

Problemas Tema 1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones

Fundamentos de Matemática Aplicada a la Inteligencia Artificial II

1 Hallar los números reales x, y, z, u y v para los que se verifica:

$$\begin{pmatrix} -x+2u & xv \\ yu & 0 \\ -z+u & zv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificar si pueden realizarse las siguientes operaciones, y en caso afirmativo, calcular la matriz resultante:

a) AB, BA, ABC y BAC.

b) $AB+F$ y $BA+F$.

c) EC y $CE+AB$.

d) $AD+D^2$ y D^tD.

3 Sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcular: $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I$.

4 Obtener, si existe, la matriz $X = \begin{pmatrix} s & t & s \\ t & s & t \end{pmatrix}$ tal que $XX^t + 12\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$.

5 Hallar todas las matrices M de tamaño 4×4 que conmutan con la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

6 Calcular A^n y B^n ($n\in\mathbb{N}$), siendo:

a) $A=\begin{pmatrix}\alpha&0\\1&\alpha\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$

7 Hallar A^n, para $n\in\mathbb{N}$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

8 Calcular A^2 y A^3, donde A es la matriz de tamaño $n\times n$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

9 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-3&2&-1\\-2&2&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$$

Calcular el rango de las matrices A, B y BA.

10 Aplicando el método de Gauss, calcular el rango de A:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&0&3&-2\\3&2&1&6\\0&3&0&6\end{pmatrix}$$

a) Mediante operaciones elementales de tipo fila.

b) Mediante operaciones elementales de tipo columna.

11 Calcular el rango de la matriz utilizando el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 11 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

12 Determinar el rango de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Por el método de los menores.

b) Por el método de Gauss.

13 Calcular el rango de M dependiendo del valor de λ:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

14 Hallar los valores de α y β para los que el rango de la matriz A es lo más pequeño posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & \alpha & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & \beta \end{pmatrix}$$

15 Calcular las inversas de las siguientes matrices utilizando determinantes:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16 Decidir si la siguiente matriz tiene inversa para algún $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17 Aplicando el método de Gauss-Jordan, hallar la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 11 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

18 Calcular A^{-1}, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n & a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

19 Resolver la ecuación matricial $AXB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

20 Obtener la solución de la ecuación matricial:

$$5AX - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(C)B = B^t C$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

21 Resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\left[4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 3X^{-1}\right]^t = \left(2X^t\right)^{-1}$$

22 Hallar dos matrices X e Y, de tamaño 2×3, tales que:

$$\left.\begin{aligned} 3X + Y &= A \\ 4X + 2Y &= B \end{aligned}\right\}$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

23 Calcular las matrices A y B sabiendo que:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

24 Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{aligned} X + AY &= B \\ X^t + Y^t C &= D \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

25 Discutir y resolver los siguientes sistemas mediante el método de Gauss:

a) $$\left.\begin{aligned} y + z - 2t &= -3 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 4y + z - 3t &= -2 \\ x - 4y - 7z - t &= -19 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} 3x + 3y + 12z &= 6 \\ x + y + 4z &= 2 \\ 2x + 5y + 20z &= 10 \\ -x + 2y + 8z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 4 \\ x + z &= 6 \\ 2x - 3y + 5z &= 4 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

26 Determinar la forma matricial del siguiente sistema y resolverlo como una ecuación matricial:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 4y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

27 Discutir y resolver el siguiente sistema para todos los valores reales a y b:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ 3x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

28 Discutir según los valores $a,\ b \in \mathbb{R}$ el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + ay + bz &= a \\ x + by + az &= 0 \\ 3y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

29 Discutir y resolver el siguiente sistema según los parámetros a, $b \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ ax + ay + z &= b \\ ax + ay + az &= b \\ y + (b+1)\,z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

30 Estudiar según los valores de a y b el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z + t &= 1 \\ x + ay + z + t &= b \\ x + y + az + t &= b^2 \\ x + y + z + t &= b^3 \end{aligned}\right\}$$

31 Calcular a y b para que el sistema homogéneo tenga solución no trivial:

$$\left.\begin{aligned} x - ay + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ 2x - y - bz &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

32 Encontrar la factorización LU de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -8 & 5 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

33 Resolver mediante factorización LU el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z + 3t &= 45 \\ x + y + z + 4t &= 48 \\ 2x + y + 4z + 10t &= 101 \\ -x - 3y + 7z + 5t &= -4 \end{aligned}\right\}$$

34 Aplicando la factorización de Cholesky, resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ -x + 2y - z + 2t &= -3 \\ x - y + 5z + 2t &= 16 \\ 2y + 2z + 6t &= 8 \end{aligned}\right\}$$

35 Determinar, mediante algoritmo, la factorización de Cholesky de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 & 8 & -16 \\ -12 & 18 & -6 & 9 \\ 8 & -6 & 5 & -10 \\ -16 & 9 & -10 & 46 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz Q obtenida, calcular el determinante de A.

Soluciones

1 $x = 1,\ y = -1,\ z = 2,\ u = 3,\ v = 1.$

2 **a)** $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $ABC = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

y BAC no se puede calcular: BA es 2×2 y C es 3×1.

b) $AB + F$ no se pueden sumar $(3 \times 3 \neq 2 \times 2)$ y $BA + F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $EC = (-1)$ y $CE + AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

d) $AD + D^2$ no puede calcularse y $D^tD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Matriz nula de orden 3.

4 Si $s = 2$ y $t = -4$: $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Si $s = -2$ y $t = 4$: $X = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

6 **a)** $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{pmatrix}$. **b)** $B^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\operatorname{sen} n\alpha \\ \operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

7 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & s_{n-1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

8 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 6 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad s_i = 1 + 2 + \cdots + i = \frac{i(i+1)}{2}.$$

9 $\mathrm{rg}(A) = 3$ y $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(BA) = 1$.

10 **a)** **b)** $\mathrm{rg}(A) = 3$.

11 $\mathrm{rg}(A) = 3$.

12 **a)** **b)** $\mathrm{rg}(A) = 3$.

13 Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$: $\mathrm{rg}(M) = 3$.
Si $\lambda = 1$: $\mathrm{rg}(M) = 1$.
Si $\lambda = -1$: $\mathrm{rg}(M) = 2$.

14 Si $\alpha = 1$ y $\beta = 7$ el rango mínimo es 3.

15 $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$. B^{-1} no existe, pues $|B| = 0$.

$$C^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

16 A es invertible cuando $a \neq \frac{45}{11}$.

17 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

19 $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ \frac{8}{21} & -\frac{9}{7} \end{pmatrix}$.

20 $X = \frac{1}{10}A^{-1} \cdot (2B^tC + \mathrm{tr}(C)B) = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{43}{20} & \frac{21}{20} \end{pmatrix}$.

21 $X = \frac{7}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{7}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$.

22 $X = A - \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \frac{3}{2}B - 2A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

23 $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix}$.

24 $X = B - A(A - C^t)^{-1} \cdot (B - D^t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{53}{18} & -\frac{35}{18} \end{pmatrix}$.

$Y = (A - C^t)^{-1} \cdot (B - D^t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{7}{18} & -\frac{7}{18} \end{pmatrix}$.

25 **a)** SCD: $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ y $t = 3$.
b) SI: No tiene solución.
c) SCI: $x = 0$, $y = 2 - 4\alpha$, $z = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

26 Forma matricial del sistema: $AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

27 Si $b \neq -\frac{2}{3}a \rightarrow$ SCD: $x = \frac{2b}{2a+3b}$, $y = \frac{-2a}{2a+3b}$.

Si $b = -\frac{2}{3}a$ y $a \neq 0 \rightarrow$ SI: No tiene solución.

Si $b = -\frac{2}{3}a$ y $a = 0 \rightarrow$ SCI: $x = \frac{2+2\alpha}{3}$, $y = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

28 Si $a \neq b \rightarrow$ SCD.
Si $a = b = 0 \rightarrow$ SCI.
Si $a = b \neq 0 \rightarrow$ SI.

29 Si $a \neq b \rightarrow$ SI: No tiene solución.
Si $a = b = 0 \rightarrow$ SCI: $x = \alpha$, $y = 1$, $z = 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
Si $a = b = 1 \rightarrow$ SCI: $x = \alpha$, $y = 1 - 2\alpha$, $z = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.
Si $a = b \neq 0$ y $a = b \neq 1 \rightarrow$ SCD: $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

30 Si $a \neq 1,\ b \in \mathbb{R} \rightarrow$ SCD.
Si $a = 1$ y $b \neq 1 \rightarrow$ SI.
Si $a = 1$ y $b = 1 \rightarrow$ SCI.

31 El sistema tendrá solución no trivial, es decir, será SCI, si $a = -1$ y $b = 1$.

32 **a)** $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{7}{4} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{pmatrix}$.

33 $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 3 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

34 $A = QQ^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

35

$$q_{11} = \sqrt{a_{11}} = 4$$

$$q_{21} = \frac{a_{21}}{q_{11}} = -3 \qquad q_{22} = \sqrt{a_{22} - q_{21}^2} = 3$$

$$q_{31} = \frac{a_{31}}{q_{11}} = 2 \qquad q_{32} = \frac{a_{32} - q_{31} \cdot q_{21}}{q_{22}} = 0$$

$$q_{41} = \frac{a_{41}}{q_{11}} = -4 \qquad q_{42} = \frac{a_{42} - q_{41} \cdot q_{21}}{q_{22}} = -1$$

$$q_{33} = \sqrt{a_{33} - q_{32}^2 - q_{31}^2} = 1$$

$$q_{43} = \frac{a_{43} - q_{42} \cdot q_{32} - q_{41} \cdot q_{31}}{q_{33}} = -2 \quad q_{44} = \sqrt{a_{44} - q_{43}^2 - q_{42}^2 - q_{41}^2} = 5$$

$$A = QQ^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ |A| = |Q|^2 = 3600.$$