TEMA 2: Estabilidad, Controlabilidad y Observabilidad

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
Curso 2025-2026 - Semanas 4 y 5

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

DFESTS

Índice

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Índice

1. Estabilidad: Puntos de equilibrio

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Dado un sistema dinámico:

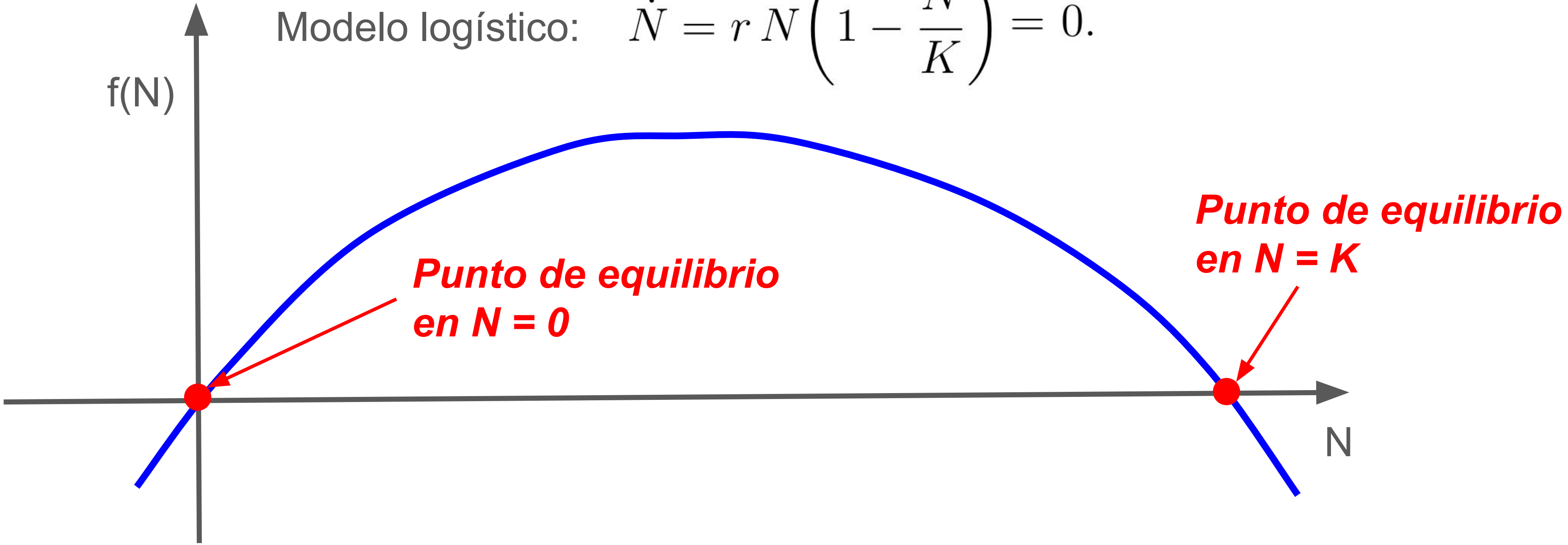
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}(t=0) = x_0$$

Un punto de equilibrio se define como:

$$f(x_e, u_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \cdot f(\mathbf{x}_k)$$

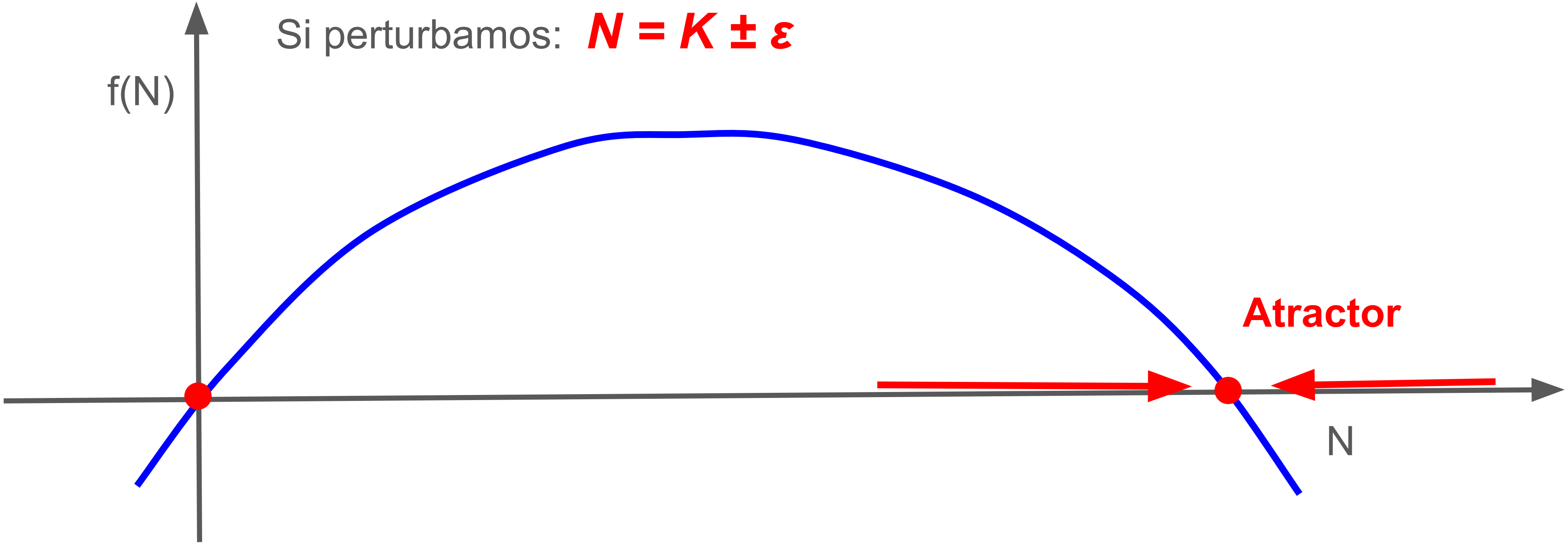
1. Estabilidad: Puntos de equilibrio

Modelo logístico: $\dot{N} = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0.$

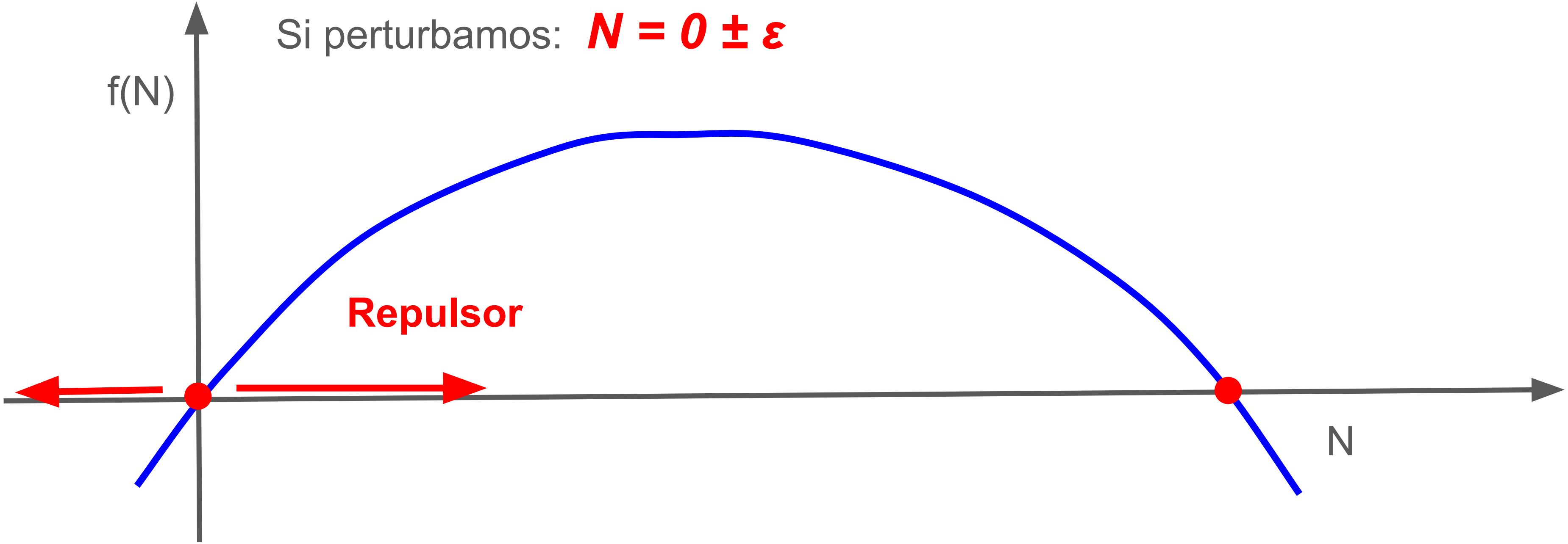


1. Estabilidad: Equilibrio estable

Si perturbamos: $N = K \pm \varepsilon$



1. Estabilidad: Equilibrio inestable



1. Estabilidad: Tipos de estabilidad

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- **Estabilidad de Lyapunov**: el sistema es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x(0) - x_e\| < \delta$, entonces $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$ para todo $t > 0$.

- **Estabilidad asintótica**: además de ser estable, se cumple que:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_e$$

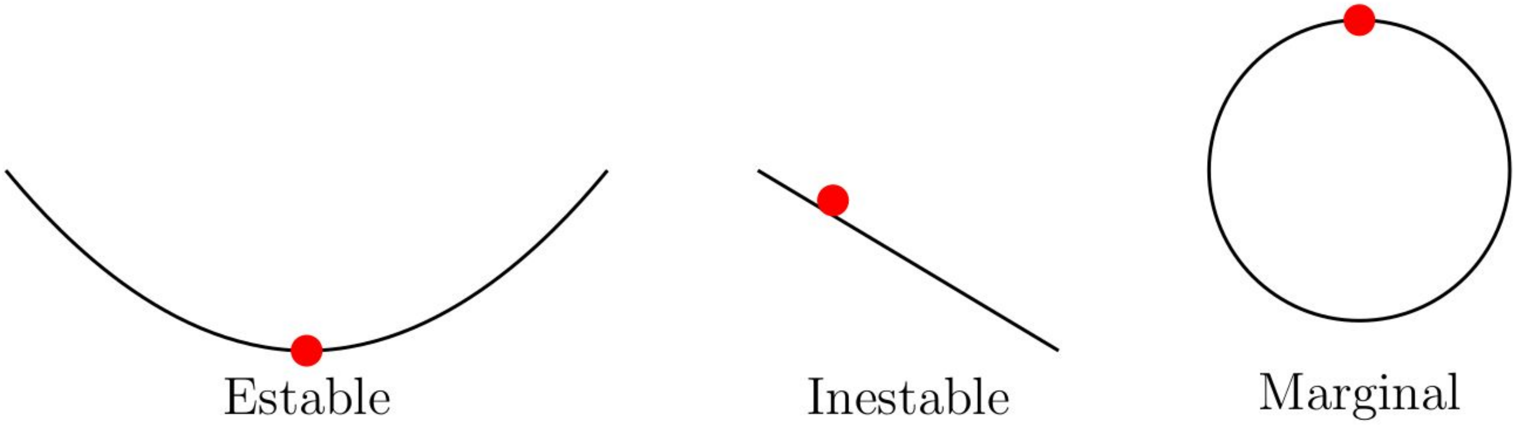
- **Estabilidad exponencial**: existe $M > 0$ y $\alpha > 0$ tal que:

$$\|x(t) - x_e\| \leq M e^{-\alpha t} \|x(0) - x_e\|$$

- **Inestabilidad**: si existen condiciones iniciales arbitrariamente cercanas a x_e cuyas trayectorias divergen, el sistema es inestable.

1. Estabilidad

- **Ejemplo ilustrativo:**

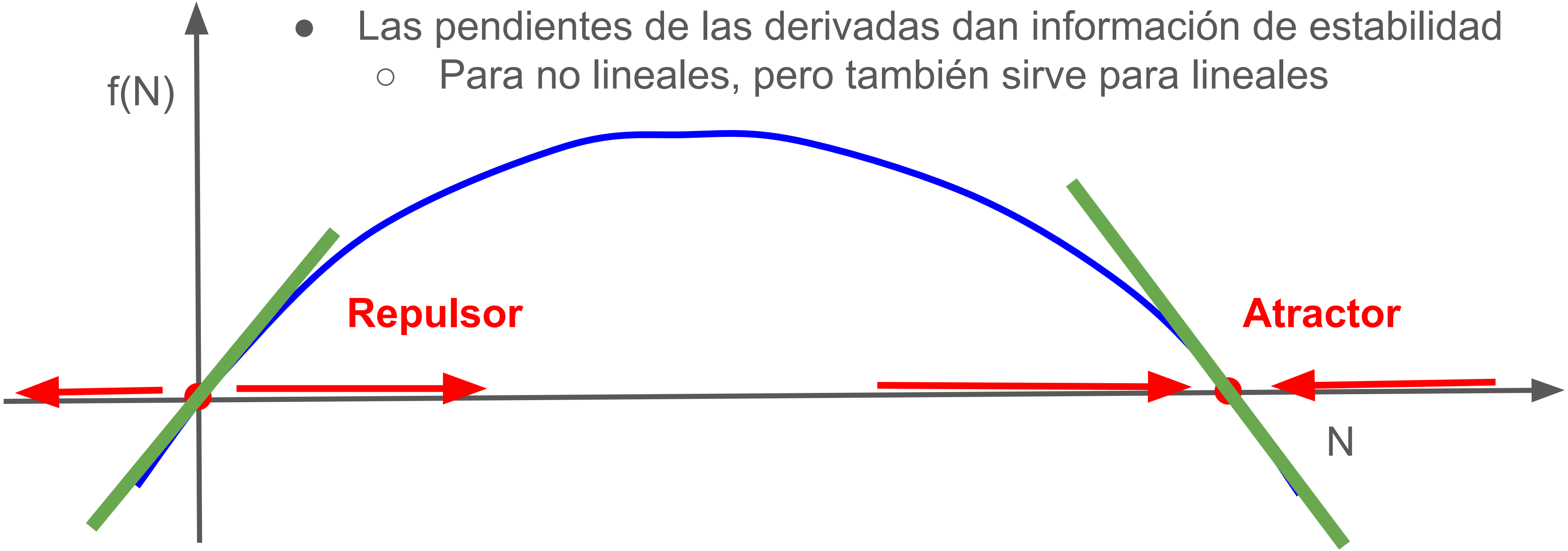


Índice

1. Definición de estabilidad en sistemas dinámicos
2. **Métodos para analizar estabilidad**
   a. **Linealización alrededor de un punto**
   b. Análisis de las raíces del sistema
   c. Criterio de Routh-Hurwitz
   d. Método de Lyapunov
3. Análisis del comportamiento
   a. Análisis Monótono u oscilatorio
   b. Análisis de amortiguamiento
4. Control
   a. Controlabilidad
   b. Observabilidad
   c. Obtener señal de control u(t)

2.a. Linealización alrededor de un punto

- Las pendientes de las derivadas dan información de estabilidad
  - Para no lineales, pero también sirve para lineales



2.a. Linealización alrededor de un punto

- Dado un sistema dinámico no lineal

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad y = g(x, u, t)$$

- Se definen variables de pequeña señal alrededor de ***f(x₀, u₀) = 0***

$$\delta x := x - x_0, \qquad \delta u := u - u_0, \qquad \delta y := y - g(x_0, u_0, t)$$

2.a. Linealización alrededor de un punto

- Series de Taylor de primer orden

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta x} &= A\,\delta x + B\,\delta u + \cancel{\mathcal{O}(\|(\delta x, \delta u)\|^2)} \\
\delta y &= C\,\delta x + D\,\delta u + \cancel{\mathcal{O}(\|(\delta x, \delta u)\|^2)}
\end{aligned}
$$

- Se obtienen las jacobianas alrededor del punto

$$
A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,t)}, \qquad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,t)}, \qquad C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0,t)}, \qquad D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0,t)}
$$

2.a. Linealización alrededor de un punto

- Criterio de estabilidad local
  - Se obtienen los autovalores **λ** de la matriz **A**:
    - Si la parte real es negativa: **ESTABLE**
    - Si alguna parte real es positiva: **INESTABLE**
    - Si la parte real es 0: **MARGINAL**

2.a. Linealización: Ejemplo

- Dado el modelo logístico para el control de población

$$\dot{N} = r\, N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- Se pueden definir las variables de pequeña señal

$$\delta \dot{N} = A\, \delta N + B\, \delta u$$

2.a. Linealización: Ejemplo

UA UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- En este caso las matrices son 1x1 $\Rightarrow$

$$C = 1, \qquad D = 0.$$

$$A = f'(N^*) = r\left(1 - \frac{2N^*}{K}\right)$$

$$\lambda = A = f'(N^*).$$

- En $N_1^* = 0$: $\lambda = f'(0) = r > 0 \Rightarrow$ autovalor positivo $\Rightarrow$ **INESTABLE**
- En $N_2^* = K$: $\lambda = f'(K) = -r < 0 \Rightarrow$ autovalor negativo $\Rightarrow$ **ESTABLE**

2.a. Linealización: Ejemplo

- Dado el modelo logístico para el control de población con variable de control

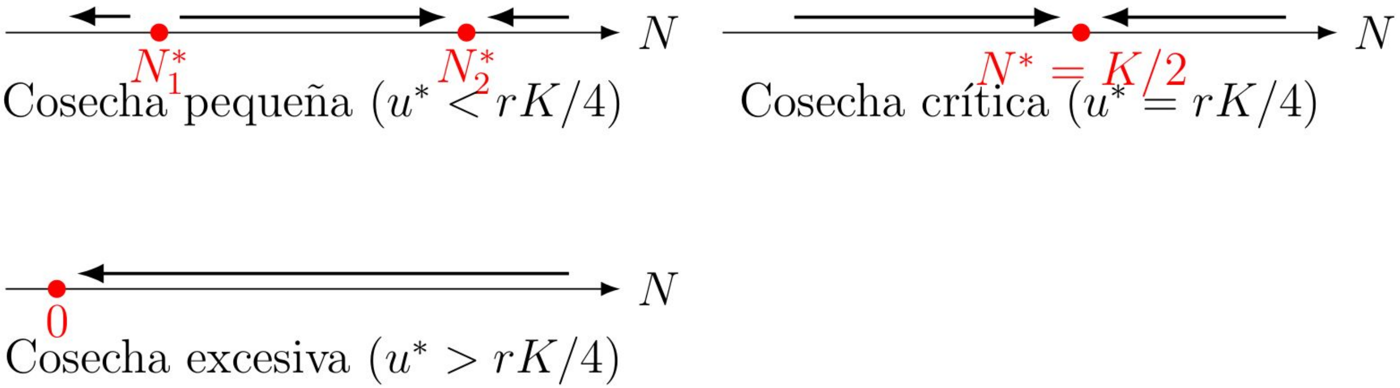
$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - u(t)$$

- Se pueden definir las variables de pequeña señal, en este caso ***B* = 1**

$$\delta\dot{N} = A\,\delta N + B\,\delta u$$

2.a. Linealización: Ejemplo

- Los puntos de equilibrio dependen de ***u*** ⇨ $N^*_{1,2} = \frac{K}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4u^*}{rK}}\right)$



Índice

2.b. Análisis de las raíces del sistema

- Dada la **ecuación diferencial característica** de un sistema:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$$

- Aplicando Transformada de Laplace, se obtiene una ecuación algebraica:
  - A eso de le llama polinomio característico

$$P(s) = s^2 + 3s + 2$$

2.b. Análisis de las raíces del sistema

- Si partimos de la **dinámica interna** del sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- Aplicando Transformada de Laplace, el polinomio seria:

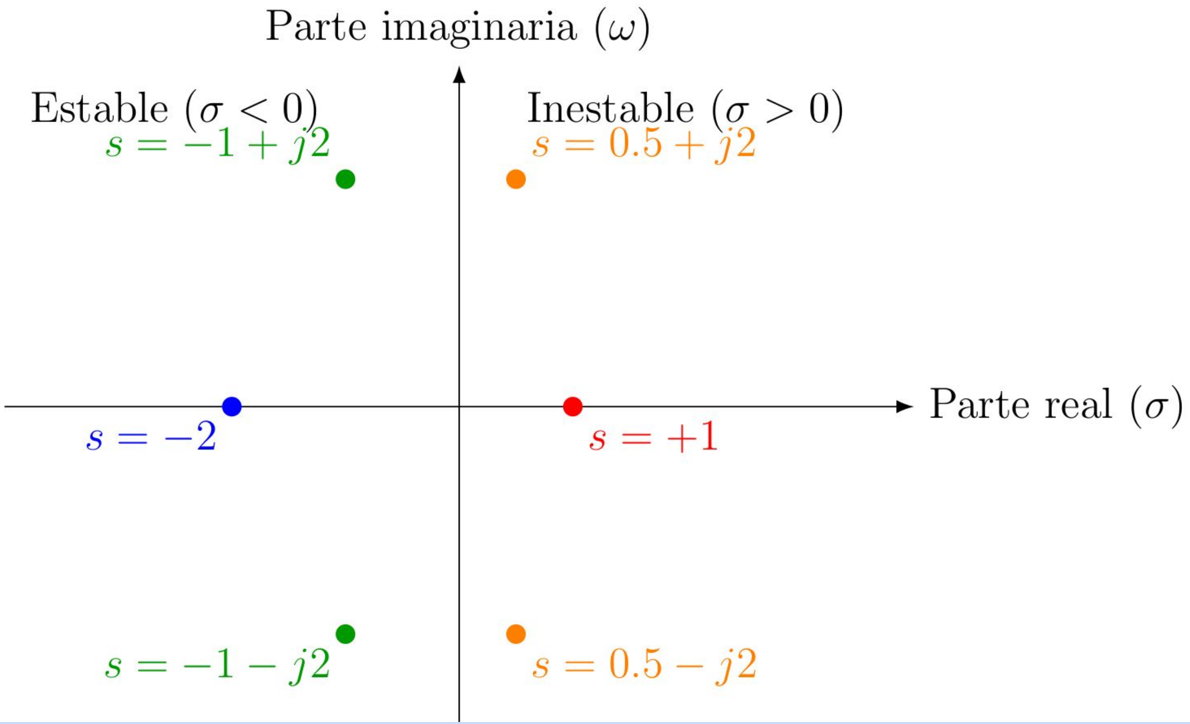
$$P(s) = \det(sI - A)$$

2.b. Análisis de las raíces del sistema

- La variable s en el dominio de Laplace es una variable compleja (parte real e imaginaria) $\Longrightarrow$ $s = \sigma + j\omega$

- Las raíces (autovalores) nos dicen si las soluciones:
  - **decaen** (parte real negativa $\rightarrow$ estable),
  - **crecen** (parte real positiva $\rightarrow$ inestable),
  - **oscilan sin decaer** (parte real cero $\rightarrow$ marginal).

2.b. Análisis de las raíces del sistema



Índice

2.c. Criterio de Routh-Hurwitz

- Método para analizar la estabilidad de un **sistema lineal**
- Encontrar las raíces para polinomios n ≥ 3 es complicado

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

2.c. Criterio de Routh-Hurwitz

- Construcción de la tabla de Routh Se organizan los coeficientes del polinomio característico en filas sucesivas:

s^n	a_0	a_2	a_4
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\boxed{b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}}$$

2.c. Criterio de Routh-Hurwitz (Ejemplo)

- **Ejemplo masa-resorte**:

$$P(s) = s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}$$

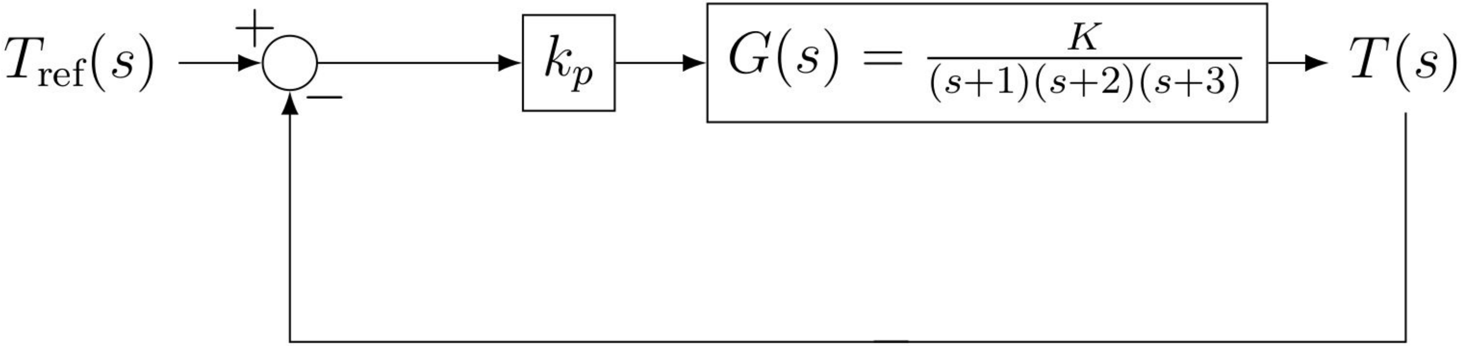
s^2	1	$\frac{k}{m}$
s^1	$\frac{b}{m}$	0
s^0	$\frac{k}{m}$	

$$\Rightarrow \boxed{1 > 0, \quad \frac{b}{m} > 0, \quad \frac{k}{m} > 0}$$

ESTABLE

2.c. Criterio de Routh-Hurwitz (Ejemplo)

- **Ejemplo horno**:



$$T(s) = \frac{Kk_p}{(s+1)(s+2)(s+3) + Kk_p}$$

2.c. Criterio de Routh-Hurwitz (Ejemplo)

- **Ejemplo horno**:

$$P(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + Kk_p).$$

s^3	1	11
s^2	6	$6 + Kk_p$
s^1	$\dfrac{6 \cdot 11 - 1(6 + Kk_p)}{6}$	0
s^0	$6 + Kk_p$	

2.c. Criterio de Routh-Hurwitz (Ejemplo)

Ejemplo horno:

ESTABLE si: $0 < Kk_p < 60$

- $1 > 0$ (siempre cierto).
- $6 > 0$ (siempre cierto).
- $\dfrac{66 - (6 + Kk_p)}{6} > 0 \quad \Rightarrow \quad Kk_p < 60.$
- $6 + Kk_p > 0 \quad \Rightarrow \quad Kk_p > -6$ (siempre cierto si $Kk_p > 0$)

Índice

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

2.d. Método de Lyapunov

Definición Sea el sistema no lineal autónomo:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Un equilibrio se encuentra en $x = 0$ (sin pérdida de generalidad, mediante un cambio de coordenadas). Una función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es candidata de Lyapunov si cumple:

1. $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ y $V(0) = 0$ (positiva definida).
2. Su derivada temporal a lo largo de trayectorias del sistema satisface:

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0.$$

Conclusiones

- Si $\dot{V}(x) \leq 0$, el equilibrio es **estable en el sentido de Lyapunov**.
- Si además $\dot{V}(x) < 0$ estrictamente, el equilibrio es **asintóticamente estable**.
- Si $\dot{V}(x)$ puede ser positiva en alguna región, no se garantiza la estabilidad.

2.d. Método de Lyapunov

Interpretación física Este método suele interpretarse como el análisis de la **energía** de un sistema:

- $V(x)$ representa la energía total (cinética + potencial).
- Si la energía nunca aumenta y tiende a disiparse, el sistema debe converger al equilibrio.

Índice

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

3.a. Análisis Monótono u oscilatorio

a) Usando autovalores de la linealización Dado un sistema no lineal, linealizado alrededor de un equilibrio:

$$\delta\dot{x} = A\delta x,$$

los autovalores de la matriz A determinan el comportamiento local:

- Autovalores reales $\Rightarrow$ respuesta monótona (crecimiento o decaimiento exponencial).
- Autovalores complejos conjugados $\Rightarrow$ respuesta oscilatoria (con frecuencia de oscilación dada por la parte imaginaria).

3.a. Análisis Monótono u oscilatorio

b) Usando las raíces del polinomio característico Dada una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0,$$

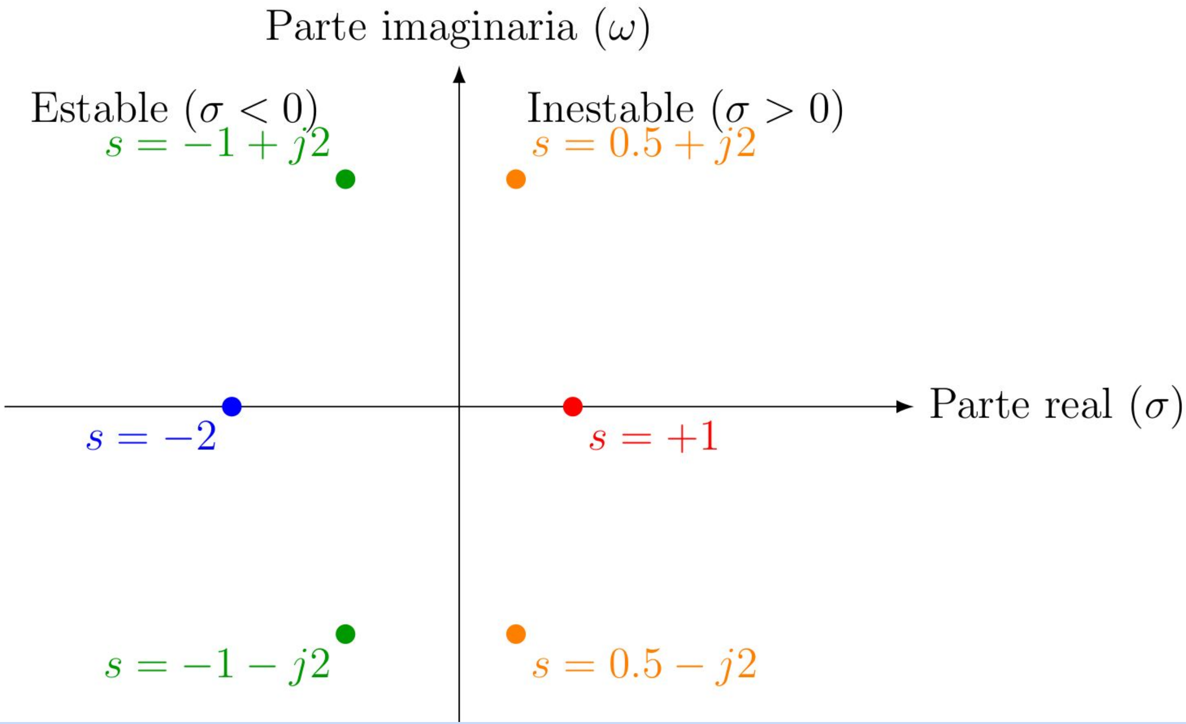
su polinomio característico es:

$$P(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0.$$

Las raíces de $P(s)$ coinciden con los autovalores de A, y la interpretación es la misma:

- Raíces reales $\Rightarrow$ comportamiento monótono.
- Raíces complejas $\Rightarrow$ comportamiento oscilatorio.

3.a. Análisis Monótono u oscilatorio



3.a. Análisis Monótono u oscilatorio

Ejemplo comparativo: masa–resorte con y sin rozamiento

- **Sin rozamiento:**

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad P(s) = ms^2 + k.$$

  Raíces: $s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$. Son puramente imaginarias $\Rightarrow$ oscilaciones persistentes (movimiento armónico simple). El sistema es **marginalmente estable y oscilatorio**.

- **Con rozamiento:**

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad P(s) = ms^2 + bs + k.$$

  Según el valor de b, las raíces pueden ser reales o complejas:

  - $b^2 > 4mk$: raíces reales negativas $\Rightarrow$ decaimiento monótono.
  - $b^2 < 4mk$: raíces complejas conjugadas con parte real negativa $\Rightarrow$ oscilaciones amortiguadas.

Índice

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

3.b. Análisis de amortiguamiento

El polinomio característico se escribe como:

$$P(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2.$$

Masa-resorte

$$\boxed{P(s) = s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

En sistemas de segundo orden, se define la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento:

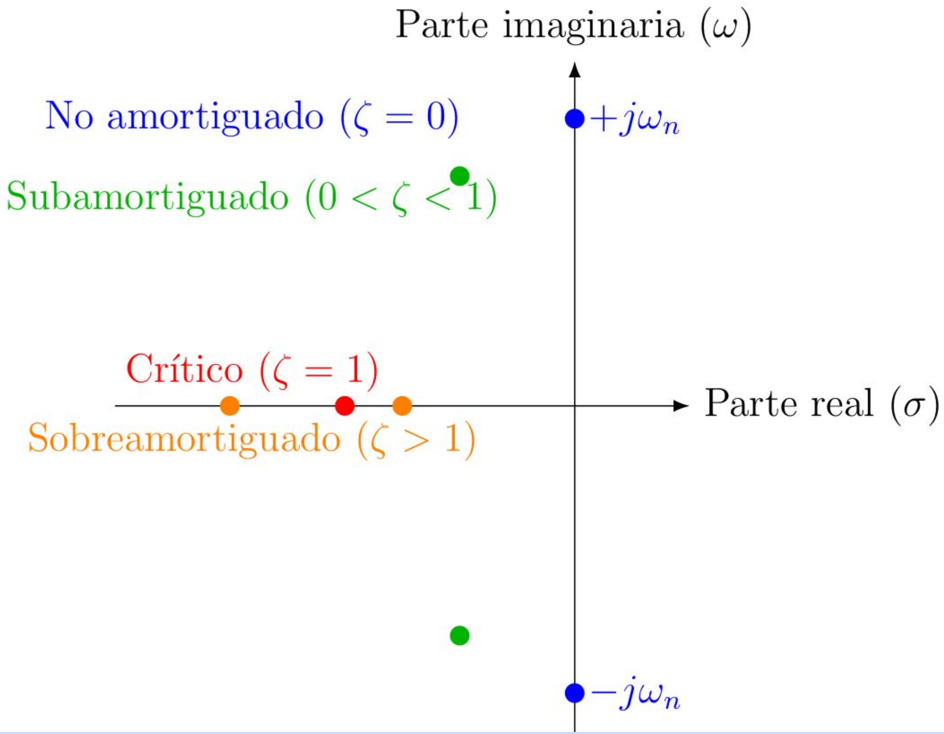
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}}.$$

3.b. Análisis de amortiguamiento

Según el valor de ζ, se distinguen cuatro casos:

- **No amortiguado ($\zeta = 0$):** raíces $s = \pm j\omega_n$. Oscilaciones persistentes (sin pérdida de energía).
- **Subamortiguado ($0 < \zeta < 1$):** raíces $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Oscilaciones amortiguadas (frecuencia menor que ω_n).
- **Amortiguamiento crítico ($\zeta = 1$):** raíz doble $s = -\omega_n$. Decaimiento monótono más rápido posible sin oscilaciones.
- **Sobreamortiguado ($\zeta > 1$):** raíces reales y distintas, ambas negativas. Decaimiento monótono pero más lento que en el caso crítico.

3.b. Análisis de amortiguamiento



Índice

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

4.a. Controlabilidad

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Definición general Un sistema dinámico es **controlable** si, partiendo de cualquier estado inicial $x(0)$, es posible encontrar una señal de control $u(t)$ que lo lleve a cualquier estado final x_f en un tiempo finito.

Para un sistema lineal en espacio de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

la **matriz de controlabilidad** se define como:

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B],$$

donde A es la matriz de dinámica $(n \times n)$ y B la matriz de entrada $(n \times m)$.

4.a. Controlabilidad

Criterio de Kalman El sistema es **completamente controlable** si y sólo si la matriz $\mathcal{C}$ tiene *rango completo*, es decir:

$$\text{rango}(\mathcal{C}) = n.$$

Interpretación El rango de una matriz indica el número de direcciones linealmente independientes que abarcan sus columnas.

- Si $\text{rango}(\mathcal{C}) = n$, las columnas de $\mathcal{C}$ abarcan todo el espacio de estados $\mathbb{R}^n$. Esto significa que las entradas, aplicadas en el tiempo, pueden mover al sistema en cualquier dirección del espacio de estados.
- Si $\text{rango}(\mathcal{C}) < n$, existen direcciones del espacio de estados inaccesibles: no se puede forzar al sistema a moverse hacia ellas mediante las entradas. El sistema es entonces **no controlable**.

Índice

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

4.b. Observabilidad

Definición general

Un sistema es **observable** si, partiendo de la salida $y(t)$ (junto con la entrada $u(t)$ conocida), es posible determinar el estado inicial $x(0)$ en un tiempo finito. En otras palabras, no hay "información oculta": las mediciones contienen toda la información necesaria para reconstruir el vector de estados.

4.b. Observabilidad

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

El **criterio de Kalman** establece que el sistema es observable si y sólo si la *matriz de observabilidad*:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene *rango completo*, es decir:

$$\text{rango}(\mathcal{O}) = n.$$

Interpretación

- Las filas de $\mathcal{O}$ representan cómo las salidas y sus derivadas dependen de los estados internos.

- Si el rango es n, significa que la información contenida en las salidas y sus derivadas abarca todo el espacio de estados. Por tanto, es posible reconstruir $x(t)$ a partir de $y(t)$.

- Si el rango es menor que n, existen componentes del estado que **no afectan a la salida**, por lo que son invisibles al observador. El sistema entonces es **no observable**.

Índice

4.c. Obtener señal de control u(t)

Definición general

En secciones anteriores vimos cómo analizar estabilidad y controlabilidad. El siguiente paso en diseño de control consiste en determinar **qué señal de entrada** $u(t)$ **aplicar** para llevar el sistema desde un estado inicial $x(0)$ hasta un estado deseado x_d.

4.c. Obtener señal de control u(t)

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Dado un sistema lineal:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

con estado deseado x_d, existen distintas estrategias de control:

- **Realimentación de estado:**

$$u(t) = -K(x(t) - x_d),$$

donde K es una matriz de ganancias elegida de modo que $A - BK$ tenga autovalores en la región deseada (por ejemplo, con parte real negativa). Este método estabiliza el error $e(t) = x(t) - x_d$.

4.c. Obtener señal de control u(t)

- **Control estacionario:** si se quiere que x_d sea un equilibrio, se puede resolver

$$0 = Ax_d + Bu_d,$$

para encontrar la entrada constante u_d que mantiene al sistema en x_d.

- **Óptimo (LQR, MPC, etc.):** en problemas más complejos, se plantea un costo y se obtiene $u(t)$ optimizando una función objetivo.

4.c. Obtener señal de control u(t): Ejemplo

El modelo cinemático del robot diferencial es:

$$\dot{x} = v\cos\theta, \qquad \dot{y} = v\sin\theta, \qquad \dot{\theta} = \omega,$$

donde $u(t) = (v, \omega)$ son las entradas.

Estado deseado Queremos llevar al robot desde (x, y, θ) hasta un estado deseado (x_d, y_d, θ_d).

4.c. Obtener señal de control u(t): Ejemplo

Control de estabilización al punto Una ley de control común es:

$$\rho = \sqrt{(x_d - x)^2 + (y_d - y)^2}, \quad \alpha = \arctan 2(y_d - y, x_d - x) - \theta, \quad \beta = -\theta - \alpha + \theta_d.$$

El control se diseña como:

$$v = k_\rho \rho, \qquad \omega = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta,$$

con ganancias $k_\rho, k_\alpha, k_\beta > 0$ elegidas adecuadamente.

Interpretación - v avanza proporcionalmente a la distancia ρ al objetivo. - ω corrige la orientación del robot hacia el punto deseado y asegura que finalice con orientación θ_d. - Con este control, el robot es capaz de alcanzar cualquier configuración deseada (x_d, y_d, θ_d) desde cualquier posición inicial.

En el siguiente tema …

- Paradigmas de simulación
  - Nos centraremos en simulación de sistemas discretos.

TEMA 2: Estabilidad, Controlabilidad y Observabilidad

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
Curso 2025-2026 - Semanas 4 y 5

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

DFESTS