11 Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por las propiedades:

1. El núcleo de f es el subespacio vectorial de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z - 2t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{aligned}\right\}$$

2. $f(0,0,0,1) = (2,0,0,0)$ y $f(1,0,0,0) = (2,0,2,0)$.

Resolver los siguientes apartados sobre f:

a) Calcular la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

b) Hallar una base del subespacio vectorial $f(U)$ para:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z + t = 0\}$$

a) Necesitamos conocer $f(1,0,0,0)$, $f(0,1,0,0)$, $f(0,0,1,0)$ y $f(0,0,0,1)$.

?

Obtenemos una base del núcleo:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z - 2t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\longrightarrow 2x + y + \cancel{2t} - \cancel{2t} = 0 \rightarrow y = -2x \\ &\longrightarrow z = -2t \end{aligned}$$

S.C.I : Nº par = 4 inc − 2 ec fin. = 2 par

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\alpha \\ z = -2\beta \\ t = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \qquad (x,y,z,t) = \alpha(1,-2,0,0) + \beta(0,0,-2,1)$$

S. gen del núcleo

L.I

$B_{\text{Ker } f} = \{(1,-2,0,0),(0,0,-2,1)\}$ → la imagen de estos vectores es $\vec{0}$.

Unimos los vectores cuya imagen conocemos con los de $B_{\text{Ker } f}$ y comprobamos si son base de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{vmatrix} \boxed{0 & 0 & 0 & \overline{1}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -[4] = -4 \neq 0$$

L.I → Son base de $\mathbb{R}^4$

f queda definida por las imágenes de la base anterior:

$f(1,0,0,0) = (2,0,2,0)$ $\qquad$ $f(1,-2,0,0) = (0,0,0,0)$

$f(0,0,0,1) = (2,0,0,0)$ $\qquad$ $f(0,0,-2,1) = (0,0,0,0)$

↑ enunciado $\qquad$ ↑ núcleo.

- $f(1,-2,0,0) = f(1,0,0,0) + f(0,-2,0,0) =$

$= f(1,0,0,0) - 2f(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$

✓ $\qquad$?

$$2f(0,1,0,0) = f(1,0,0,0) \rightarrow f(0,1,0,0) = \frac{1}{2}(2,0,2,0) =$$

$$= \underline{\underline{(1,0,1,0)}}$$

$$\cdot\ f(0,0,-2,1) = -2f(0,0,1,0) + f(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

?

$$2f(0,0,1,0) = f(0,0,0,1)$$

$$f(0,0,1,0) = \frac{1}{2}(2,0,0,0) = \underline{\underline{(1,0,0,0)}}$$

$$\boxed{A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

$$f(x,y,z,t) = (2x+y+z+2t,\ 0,\ 2x+y,\ 0)$$

b) $f(U) = L\{f(B_U)\} \xrightarrow{\text{Gauss}} B_{f(U)}$

Hallamos B_U : $x+y+z+t = 0 \longrightarrow x = -y-z-t$

$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta - \gamma \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \gamma \end{cases} \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

$$(x,y,z,t) = \alpha(-1,1,0,0) + \beta(-1,0,1,0) + \gamma(-1,0,0,1)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L.I$$

$F_1 \to -F_1$

$F_2 \to F_2 - F_1$

$F_3 \to F_3 - F_1$

$$B_U = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\}$$

$$f(U) = L\{f(\underset{x}{1}, \underset{y}{0}, \underset{z}{0}, \underset{t}{-1}), f(0, \underset{y}{1}, 0, \underset{t}{-1}), f(0,0,\underset{z}{1},\underset{t}{-1})\} =$$

$$= L\{\underset{F_1}{(0,0,2,0)}, \underset{F_2}{(-1,0,1,0)}, (-1,0,0,0)\} \quad L.D \quad F_3 = F_2 - \tfrac{1}{2}F_1$$

$$f(x,y,z,t) = (2x+y+z+2t,\ 0,\ 2x+y,\ 0)$$

$$\boxed{B_{f(V)} = \{(0,0,2,0),\ (-1,0,1,0)\}}$$