Tema 2. Lógica Formal

Razonamiento y representación del conocimiento

Lógica formal

- El ser humano siempre ha representado y transmitido el conocimiento utilizando el lenguaje (natural)
- Ahora queremos representar ese conocimiento en una computadora para que un programa (agente) inteligente pueda hacer uso de él

Lógica formal

- Problemas del lenguaje natural:
  - Redundancias
    - “Soy más mayor que mi hermano”
    - “Sube arriba”
  - Ambigüedades
    - “Vi un elefante en mi patio”

Lógica formal

- La lógica formal nos proporciona una herramienta de representación del conocimiento sin redundancias ni ambigüedades.
- También nos permite establecer los principios de la inferencia básica

Lógica formal

- Tipos de lógica formal
  - Lógica proposicional → elemento básico: proposición
  - Lógica de primer orden → elementos básicos: términos y predicados

Lógica proposicional

- Lenguaje del cálculo proposicional
  - Enunciado:
    - Pensamiento expresable por palabras o por escrito
    - Puede ser: verdadero, falso, absurdo, improbable, etc.
    - “¿Tienes hambre?”, “buenas tardes”
  - Proposiciones: enunciados a los que solamente se les puede dar valor de **verdadero** o **falso**:
    - “Llueve”, “es tarde”, “hace calor”, “El coche es rojo”

Lógica proposicional

- Conectivas
  - Elementos que permiten construir nuevas proposiciones a partir de otras ya existentes
  - Negación lógica: ¬
  - Disyunción lógica: V
  - Conjunción lógica: Λ
- Establecemos dos tipos de proposiciones
  - Simples → se representan con letras p, q, r, …, A, B, …
  - Compuestas → Se obtienen de las simples mediante conectivas: ¬a, aVb, aΛb, ...

Lógica proposicional

- Negación lógica:
  - Si p es una proposición, llamaremos negación lógica de p a la proposición no p y la denotaremos por ¬p, p’ o $\overline{p}$
  - Ejemplo:
    - p: llueve, ¬p: no llueve
    - q: hace frío, ¬q: no hace frío

Lógica proposicional

- Disyunción lógica:
  - Disyunción lógica inclusiva: (pVq) p ó q será verdadera cuando p sea verdadera, q sea verdadera o p y q sean verdaderas
    - Ejemplo: p: el coche es rojo

      q: el coche es un deportivo

      (pVq): el coche es rojo o es un deportivo
  - Disyunción lógica exclusiva (XOR): $(p\overline{V}q)$ p o q será verdadera cuando p sea verdadera o q sea verdadera pero no cuando ambas lo sean
    - Ejemplo: p: juan practica el fútbol

      q: juan practica el baloncesto

      $(p\overline{V}q)$: juan o practica el fútbol o el baloncesto

Lógica proposicional

- Conjunción lógica:
  - Sean p y q dos proposiciones, $(p \wedge q)$ p y q es verdad sí y solo sí p es verdad y q es verdad
    - Ejemplo: p: el coche es rojo

      q: el coche es un deportivo

      $(p \wedge q)$: el coche es un deportivo rojo

Lógica proposicional

- Conectivas lógicas secundarias
  - Implicación material
    - Si p entonces q, $p \rightarrow q$
    - Toma valor de verdad a menos de que p sea verdad y q falso $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ (Ejercicio: comprobarlo)

      p: llueve, q: me mojo, $(p \rightarrow q)$: Si llueve entonces me mojo
  - Implicación recíproca
    - Dada la proposición $p \leftarrow q$ llamaremos implicación recíproca de la dada a la proposición $p \rightarrow q$
  - Implicación bidireccional
    - p si y solo si q, $p \leftrightarrow q$
    - Falsa cuando p y q toman diferentes valores de verdad

Lógica proposicional

- Tablas de verdad

p	¬p
V	F
F	V

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p\overline{\vee}q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Lógica proposicional

- Dada una proposición compuesta, ésta puede ser:
  - Tautología: si los valores de verdad son todos verdaderos
  - Contradicción: si los valores de verdad son todos falsos
  - Contingencia: si los valores de verdad son verdaderos y falsos

p	q	proposición
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	proposición
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	proposición
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Lógica proposicional

- Ejercicios. Determina el valor de verdad de las siguientes expresiones lógicas:
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$
- $(p \wedge \neg q) \wedge q$
- $(r \vee p) \wedge \neg (q v p)$
- Si se conoce que $(q \wedge \neg r) \rightarrow p$ es FALSO
- Determina el valor de verdad de: $(\neg r \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg r)$

Lógica de primer orden

- La lógica proposicional no es suficiente para hacer inferencias del tipo:
  - Confuncio es un hombre
  - Todos los hombres son mortales
  - Entonces, Confuncio es mortal
- La lógica de primer orden (LPO) incluye el concepto de **término** que hace referencia a los elementos que constituyen las proposiciones

Lógica de primer orden

- **Alfabeto**, compuesto de
  - Símbolos de variables: x, y, z, …, x_1, y_1, …
  - Símbolos de constantes: primeras letras del alfabeto, mayúsculas o minúsculas
  - Símbolos de función: f, g, h, …
    - La aridad hace referencia al número de parámetros
  - Símbolos de predicado: P, Q, R, K, …
  - Símbolos de conectivas: ¬, ∨, ∧, →, ↔
  - Cuantificadores:
    - Universal, para todo: ∀
    - Existencial, existe un: ∃
  - Símbolos de puntuación: paréntesis y coma

Lógica de primer orden

- **Alfabeto – ejemplos**
  - Lenguaje de teoría de conjuntos
    - Igualdad: sí tiene
    - Predicados: n-arios: Un predicado binario → pertenece
    - Constantes: una: conjunto vacío
    - Funciones: no tiene
  - Lenguaje de teoría elemental de números
    - Igualdad: sí tiene
    - Predicados n-arios: Un predicado binario → $<$
    - Constantes: 0
    - Funciones:
      - Una unaria: S (sucesor)
      - Dos binarias: + (suma) y · (producto)

Lógica de primer orden

- Ejemplo de predicado
  - Queremos representar: “Uno sumado a dos es igual a tres”
  - Identificamos:
    - **Términos**: “Uno”, “dos”, “tres” y “Uno sumado a dos”
    - Relaciones o **predicados**:

“es igual a” → ES_IGUAL(a, b)

    - **Funciones**: “sumado a” → sumadoa(a, b)

ES_IGUAL(sumadoa(1, 2), 3)

Lógica de primer orden

- Funciones
  - Operan con términos y como resultado devuelven un término (concepto de función bien formada fbf)
- Predicados
  - Operan con términos y como resultado devuelven verdadero o falso
  - Pedro es el jefe de Luis
    - Términos: “Pedro”, “Luis”
    - Predicados: ES_JEFE(a, b)

ES_JEFE(Pedro, Luis)

Lógica de primer orden

- Cuantificador universal (∀)
  - ∀x se interpreta: “para todo valor que pueda tomar x...”
  - Nos pemite formar expresiones y reglas del tipo “Todos los seres humanos son mortales”

$$\forall x \; ES\_HUMANO(x) \rightarrow ES\_MORTAL(x)$$

- Cuantificador existencial (∃)
  - ∃x se interpreta: “existe al menos un x tal que…” o “Para algún x...”

Hay por lo menos un satélite: $\exists x \; SATÉLITE(x)$

Lógica de primer orden

- La lógica de primer orden tiene como principal característica un gran potencia expresiva
- Esto permite representar cualquier conocimiento en forma de expresión lógica…
  - Y analizarlo
    - Comprobar su validez
    - Extraer nuevo conocimiento
    - Aprender
    - Etc.