Curso 2023/24

FUNDAMENTOS FÍSICOS PARA INGENIERÍA

GRADO EN INGENIERÍA EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

TEMA 1. CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Manuel Gutiérrez Ramírez

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante

Contenidos

La Mecánica se ocupa de las relaciones entre los movimientos de los sistemas materiales y las causas que los producen

Mecánica

Cinemática

Estudia el movimiento sin preocuparse de las causas que lo producen

Dinámica

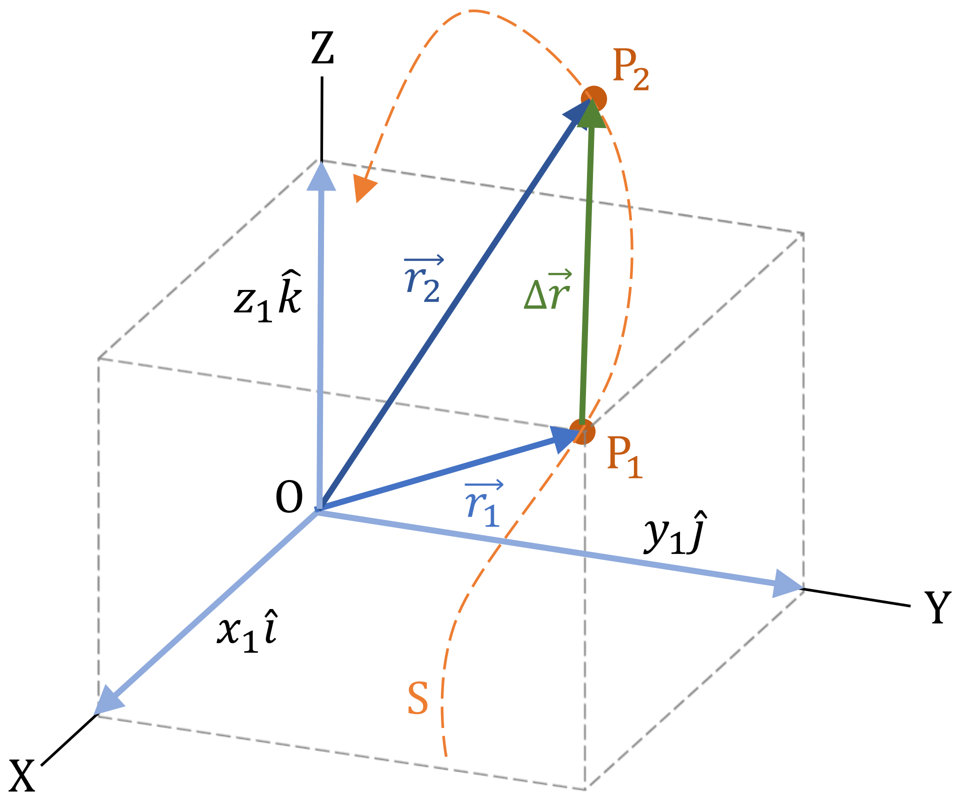
Estudia la relación entre el movimiento y las causas que lo producen

Estática

Estudia las fuerzas y el equilibrio de los cuerpos

Contenidos

1.1. Posición, velocidad y aceleración



- **Vector de posición $\vec{r}(t)$**

  Sitúa la partícula respecto de origen O de un sistema de referencia XYZ. En general es función del tiempo.

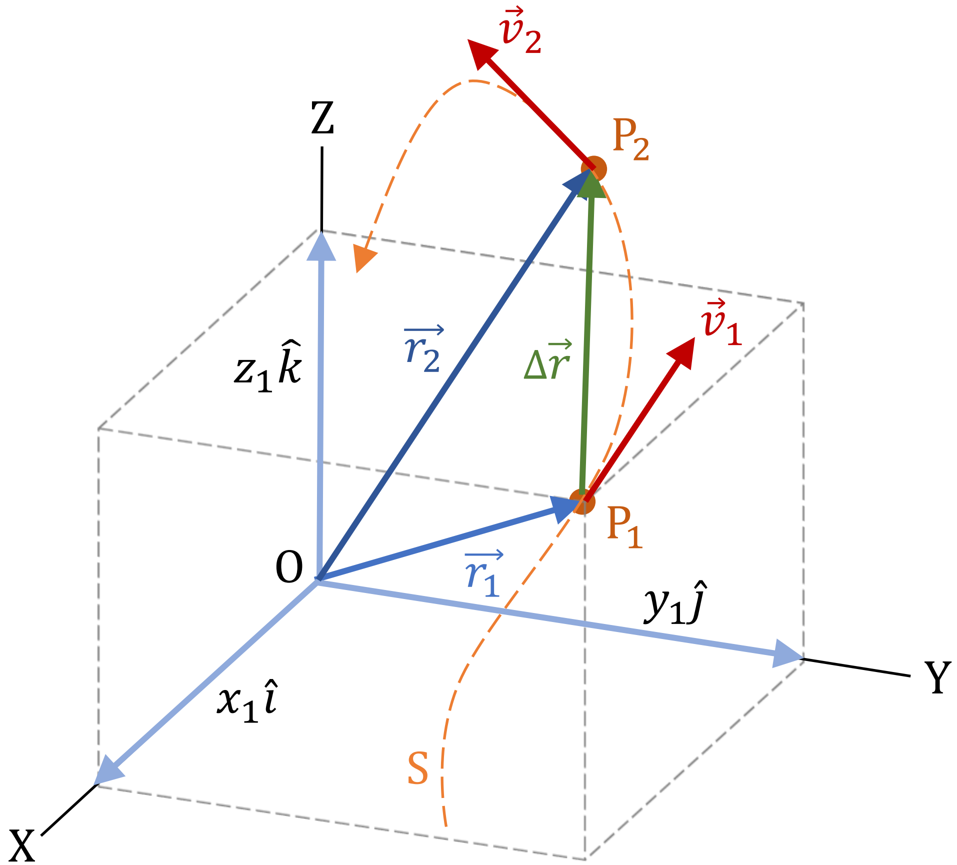
  $$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = x(t_1)\hat{\imath} + y(t_1)\hat{\jmath} + z(t_1)\hat{k}$$

- En $\Delta t = t_2 - t_1$ la partícula se mueve desde P_1 a P_2 siguiendo la trayectoria S. La distancia recorrida por la partícula en S es $s(t)$ (ley horaria del movimiento).

- **Vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$**

  $$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$

1.1. Posición, velocidad y aceleración



Velocidad media $\vec{v}_m$

Desplazamiento de la partícula durante un intervalo de tiempo Δt dividido por dicho intervalo de tiempo

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Velocidad instantánea $\vec{v}$

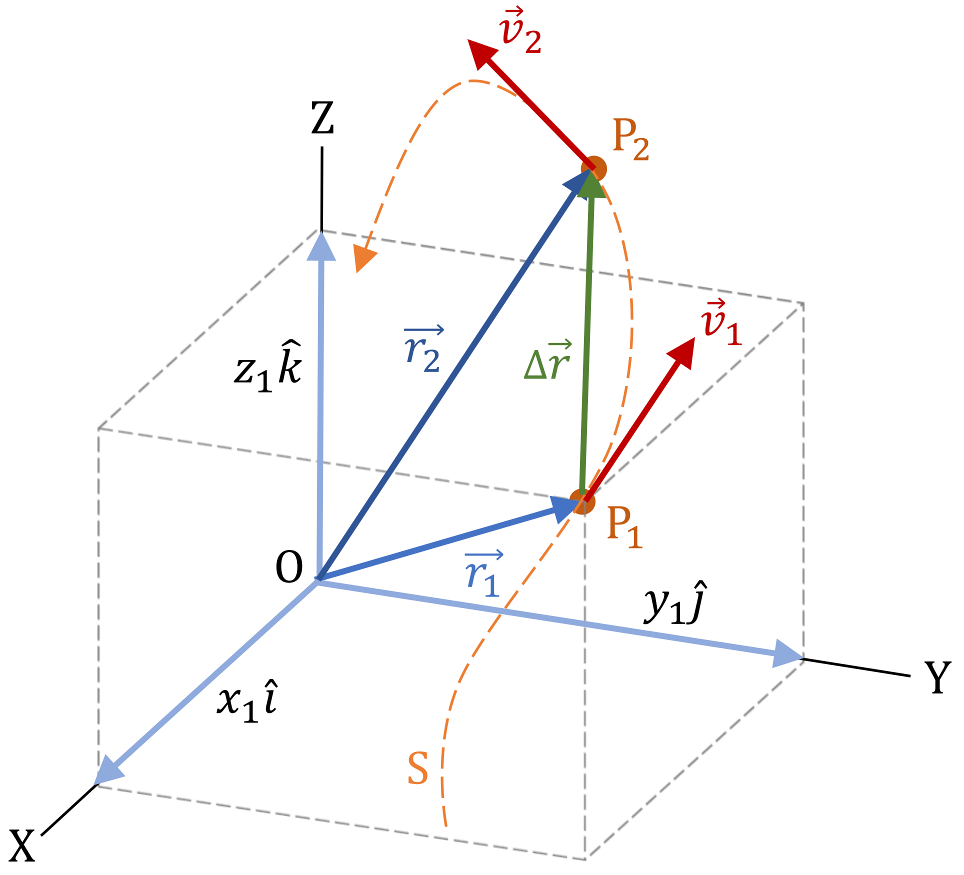
Desplazamiento de la partícula durante un intervalo de tiempo Δt dividido por dicho intervalo de tiempo

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

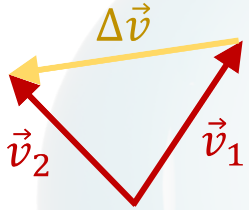
$\vec{v}$ es tangente a la trayectoria S en cada punto de la misma

1.1. Posición, velocidad y aceleración



Aceleración media $\vec{a}_m$

Cambio de la velocidad durante un intervalo de tiempo Δt dividido por dicho intervalo de tiempo



$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Aceleración instantánea $\vec{a}$

Valor límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero

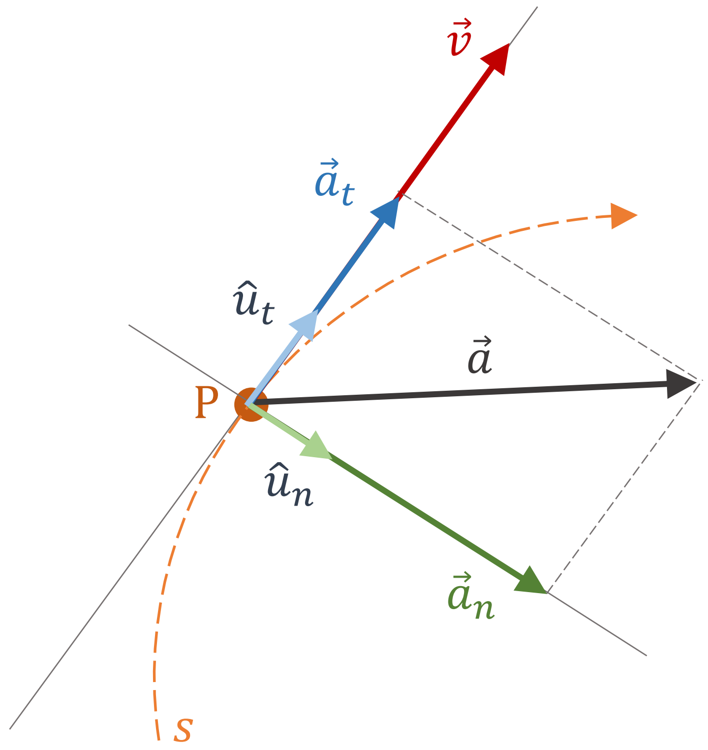
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\hat{k}$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

Contenidos

1.2. Componentes intrínsecas de la aceleración



$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Aceleración tangencial $\boxed{\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t}$

Tiene en cuenta el cambio en el módulo del vector velocidad $v = |\vec{v}|$

$\vec{a}_t \neq 0$ si v no es constante

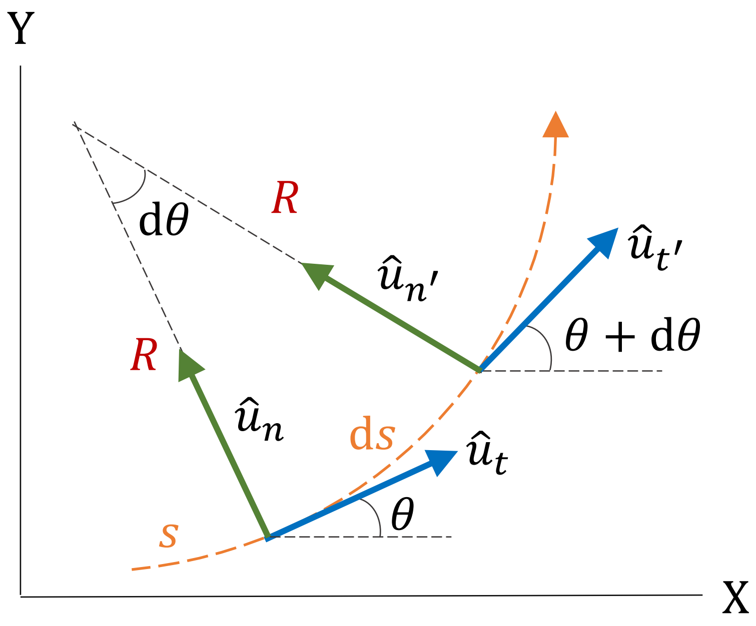
Aceleración normal o centrípeta $\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n}$

R: Radio de curvatura de la trayectoria en cada punto

Tiene en cuenta el cambio en la dirección del vector velocidad $\vec{v}$

$\vec{a}_n \neq 0$ si $R \neq 0$ (hay curvatura)

1.2. Componentes intrínsecas de la aceleración



$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\hat{u}_t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t}_{\vec{a}_t} + \underbrace{v\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}t}}_{\vec{a}_n}$$

$$\hat{u}_t = \cos(\theta)\,\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$$

$$\hat{u}_n \perp \hat{u}_t \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_n = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath}$$

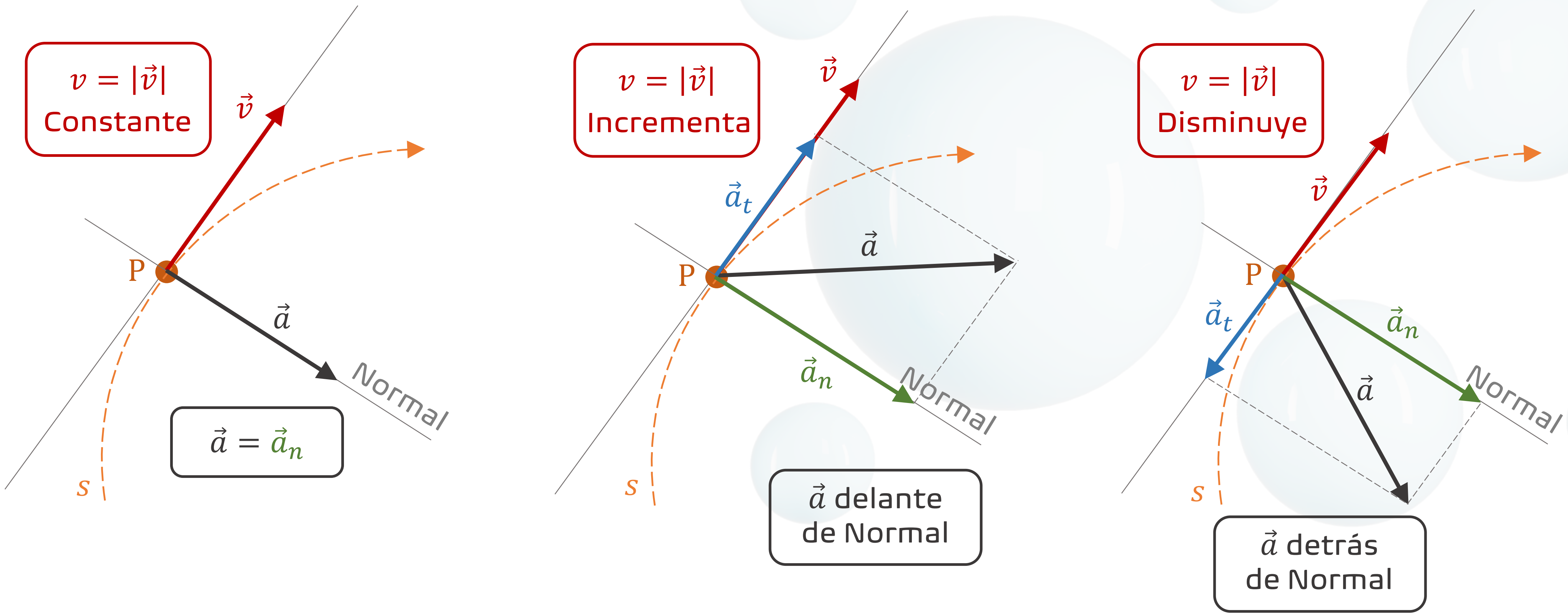
$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin(\theta)\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos(\theta)\,\hat{\jmath} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{u}_n = \frac{v}{R}\hat{u}_n$$

$$s = R\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R} = \frac{v}{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n}$$

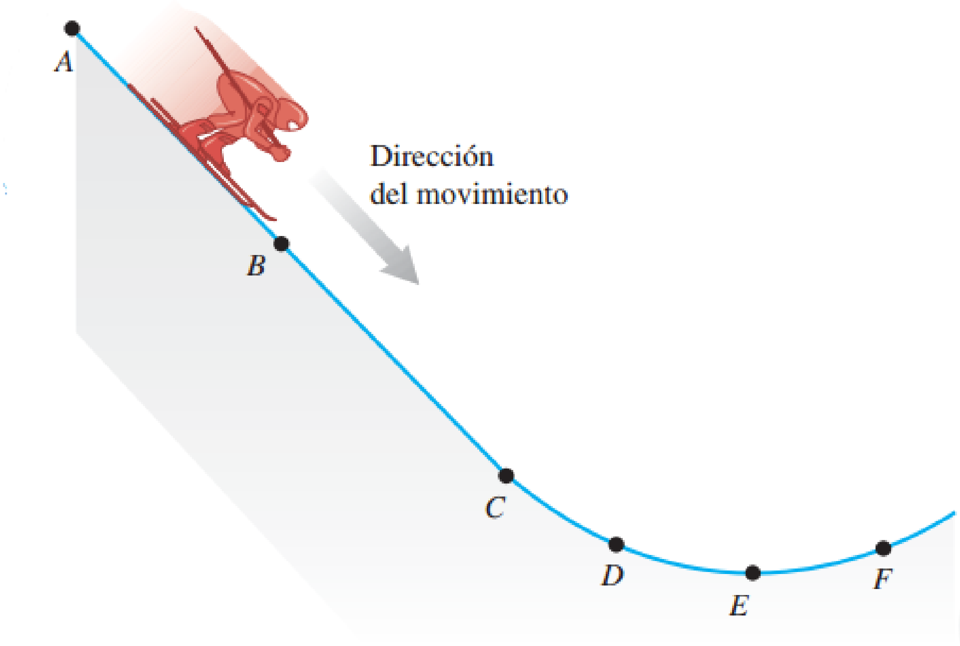
1.2. Componentes intrínsecas de la aceleración

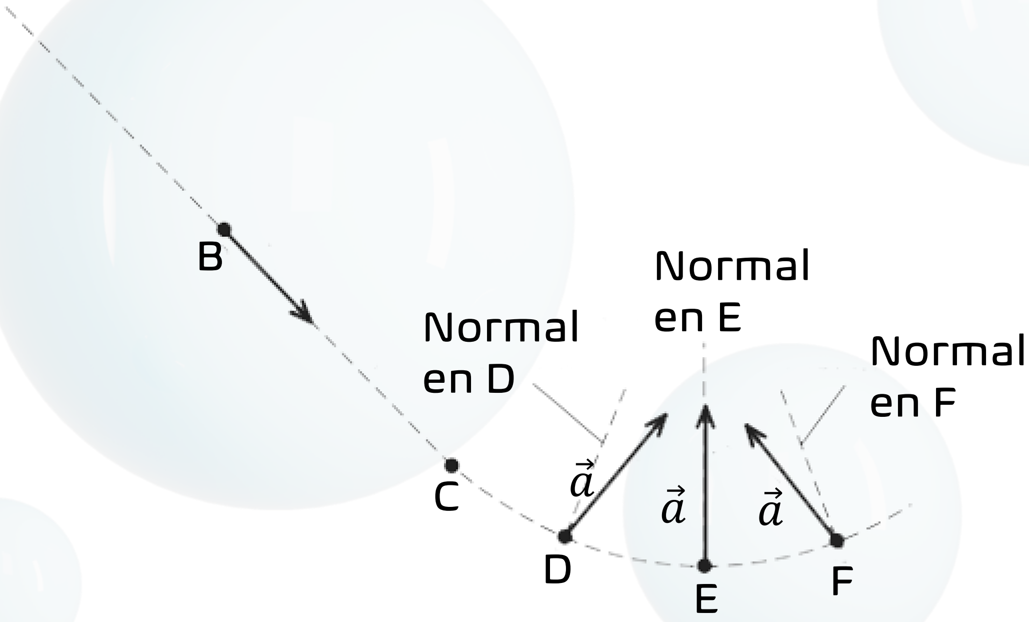
Trayectoria curva



1.2. Componentes intrínsecas de la aceleración

Dibujar la dirección del vector de aceleración en los puntos B, D, E y F





Contenidos

1.3. Clasificación de los movimientos

En función de las componentes intrínsecas de la aceleración, los movimientos se pueden clasificar en:

Movimiento rectilíneo

$\vec{a}_n = 0$

$s = |\Delta\vec{r}|$

- $\vec{a}_t = 0$ Movimiento rectilíneo uniforme
- $\vec{a}_t \neq 0$ Movimiento rectilíneo acelerado

Movimiento curvilíneo

$\vec{a}_n \neq 0$

- $R = constante$
  - $\vec{a}_t = 0$ Movimiento circular uniforme
  - $\vec{a}_t \neq 0$ Movimiento circular acelerado
- $R = no\ constante$ Movimiento general

Contenidos

1.4. Movimientos rectilíneos

Movimiento rectilíneo uniforme

$$a(t) = 0 \quad \Big| \quad v(t) = v = \frac{s}{t} = constante \quad \Big| \quad s(t) = s_0 + vt$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \Big| \quad a(t) = a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = constante$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = a\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \longrightarrow v(t) = v_0 + at \quad \Big| \quad \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = a\int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s \longrightarrow v^2 = {v_0}^2 + 2a(s - s_0)$$

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)\mathrm{d}t \longrightarrow s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

1.4. Movimientos rectilíneos

Movimiento rectilíneo acelerado

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \Big| \quad a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

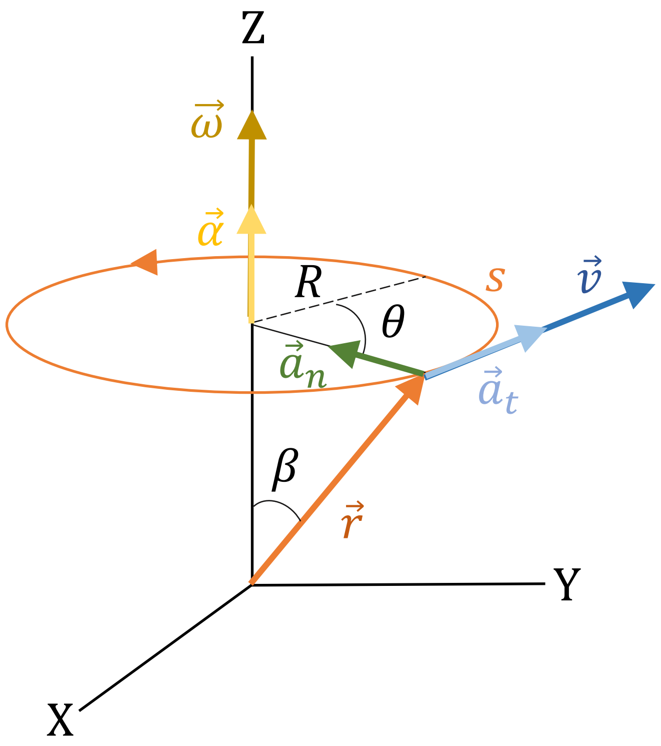
$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t \longrightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$$

Si $a = f(v)$ $\longrightarrow$ $\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)} \longrightarrow t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$ | $\int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}\mathrm{d}v = \int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s \longrightarrow s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}\mathrm{d}v$

Si $a = f(s)$ $\longrightarrow$ $\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{s_0}^{s} a(s)\mathrm{d}s \longrightarrow v^2 = {v_0}^2 + 2\int_{s_0}^{s} a(s)\mathrm{d}s$

Contenidos

1.5. Movimientos circulares



Movimiento plano. Trayectoria es una circunferencia de radio R

$$s = \theta R \longrightarrow v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}} \quad (\mathrm{rad/s})$$ Velocidad angular

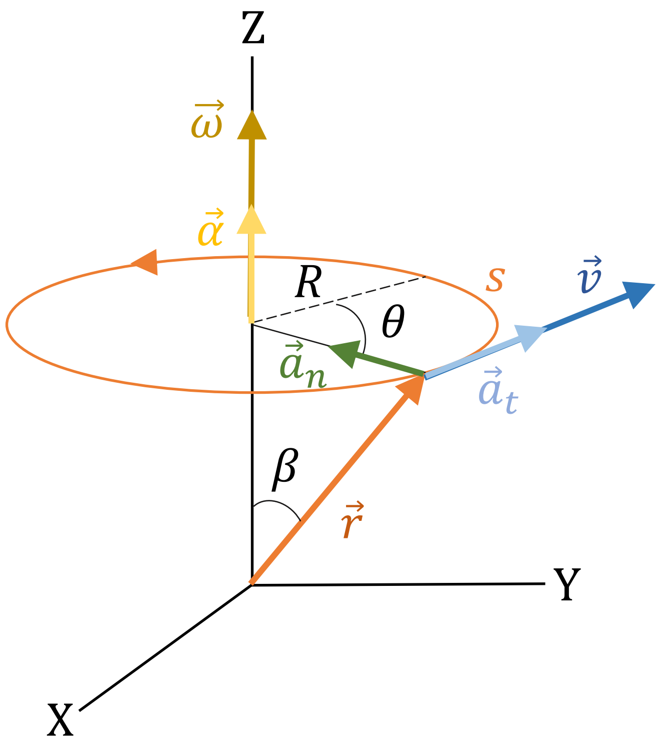
$$R = |\vec{r}|\sin(\beta) \longrightarrow v = \omega\,|\vec{r}|\sin(\beta)$$

Producto vectorial

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_x & r_x \end{vmatrix}}$$

$\vec{\omega}$ es perpendicular al plano del movimiento $\longrightarrow$ $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

1.5. Movimientos circulares



Movimiento plano. Trayectoria es una circunferencia de radio R

Si $\omega \neq constante$ ⪢ Aceleración angular $\longrightarrow$ $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

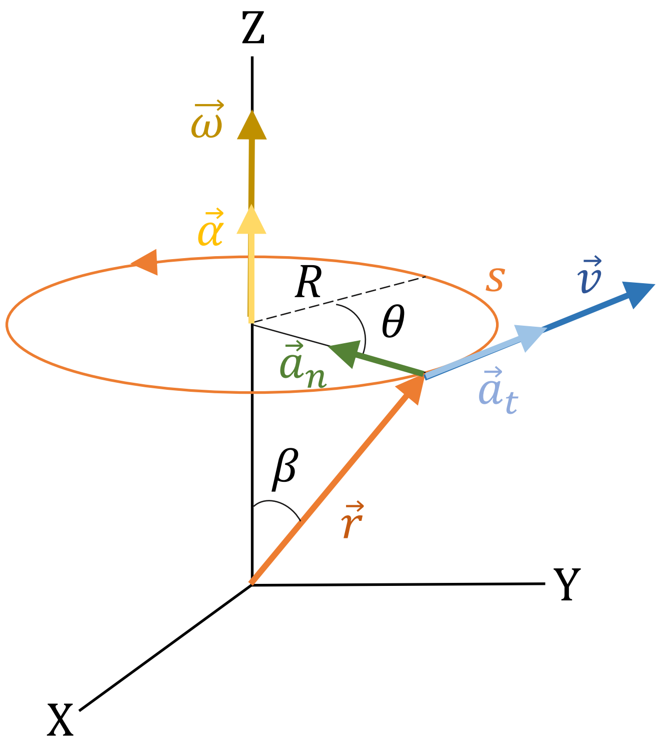
$\vec{\alpha}$ es perpendicular al plano del movimiento $\longrightarrow$ $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n$$

$\vec{a}_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t = \dfrac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t = R\alpha\hat{u}_t$ ⪢ $\boxed{\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}}$ Misma dirección que $\vec{v}$

$\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\hat{u}_n = \dfrac{(R\omega)^2}{R}\hat{u}_n = R\omega^2\hat{u}_n$ ⪢ $\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}}$ Centro circunferencia

1.5. Movimientos circulares



Movimiento circular uniforme

$\alpha(t) = 0$ | $\omega(t) = \omega = constante$ | $\vec{a}_t = 0$ | $\vec{a}_n = constante$

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ | $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

T: periodo (s)
f: frecuencia ($\mathrm{Hz} \equiv \mathrm{s}^{-1}$)

Movimiento circular uniforme acelerado

$\alpha(t) = \alpha = constante$ | $\vec{a}_t = constante$ | $\vec{a}_n = no\ constante$

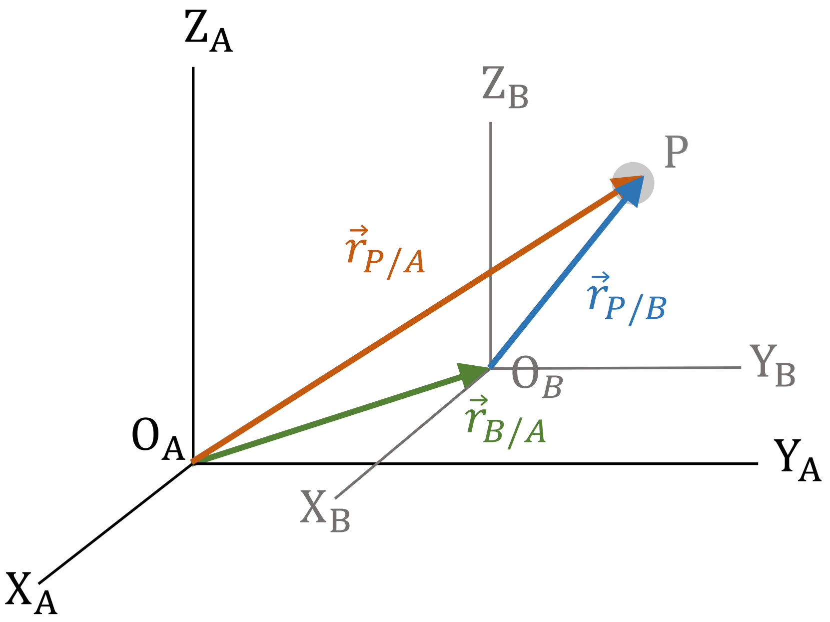
$$\omega(t) = \omega_0 + at$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)^2$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t - t_0)^2$$

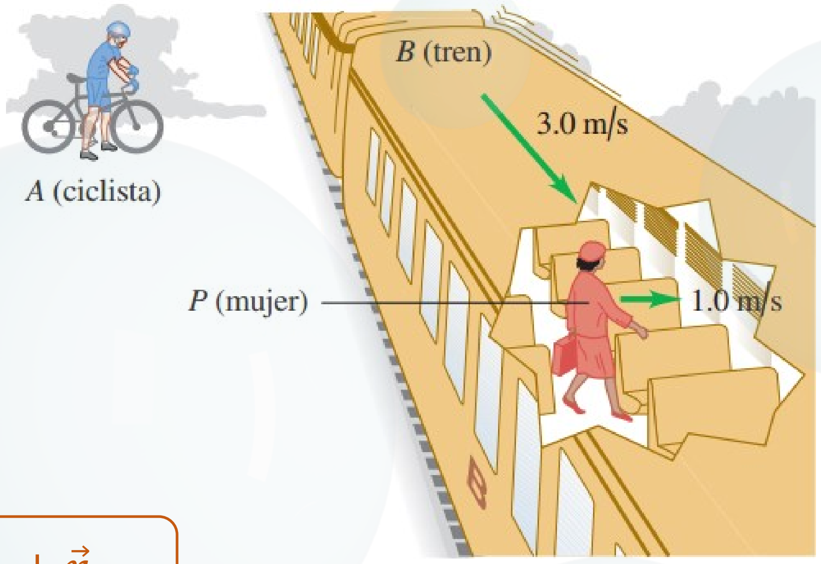
Contenidos

1.6. Movimiento relativo



$X_A Y_A Z_A$ Fijo

$X_B Y_B Z_B$ Móvil ⋙ traslada (no rota)



$$\boxed{\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A}}$$

$$\frac{\vec{r}_{P/A}}{dt} = \frac{\vec{r}_{P/B}}{dt} + \frac{\vec{r}_{B/A}}{dt} \longrightarrow \boxed{\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}}$$

$$\frac{\vec{v}_{P/A}}{dt} = \frac{\vec{v}_{P/B}}{dt} + \frac{\vec{v}_{B/A}}{dt} \longrightarrow \boxed{\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B} + \vec{a}_{B/A}}$$

1.6. Movimiento relativo

La brújula de un avión indica que va al norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

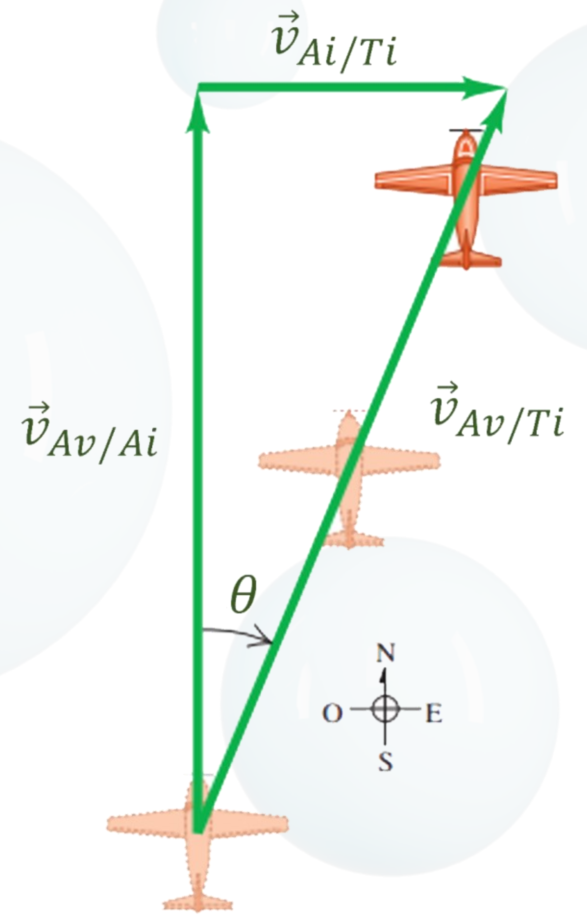
$\vec{v}_{Av/Ai} = 240\hat{\jmath}\ \mathrm{km/h}$

$\vec{v}_{Ai/Ti} = 100\hat{\imath}\ \mathrm{km/h}$

$\vec{v}_{Av/Ti} = ?$

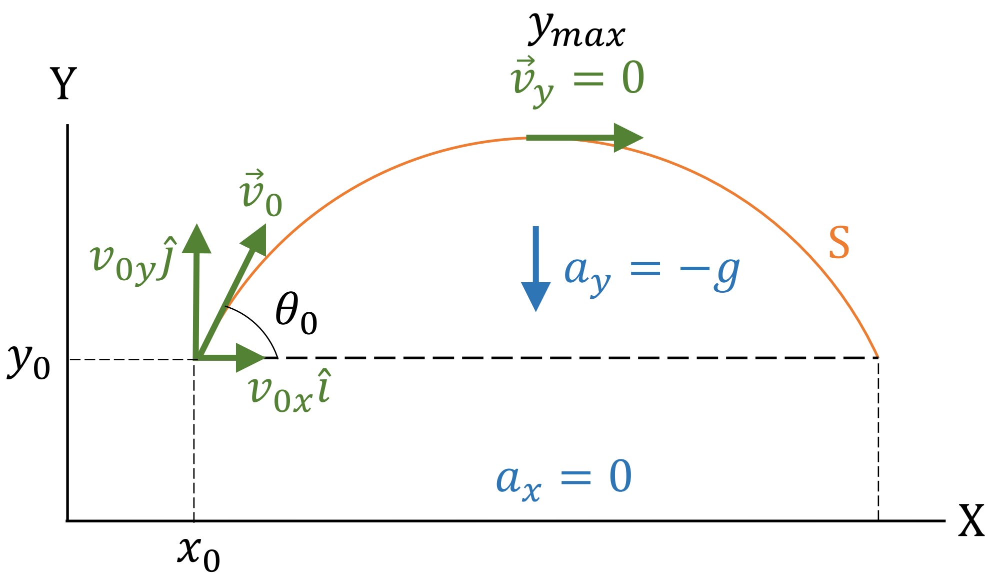
$$\vec{v}_{Av/Ti} = \vec{v}_{Av/Ai} + \vec{v}_{Ai/Ti} \longrightarrow \left|\vec{v}_{Av/Ti}\right| = 260\ \mathrm{km/h}$$

$$\theta = arctan\left(\frac{\left|\vec{v}_{Ai/Ti}\right|}{\left|\vec{v}_{Av/Ai}\right|}\right) = 23°$$



Contenidos

1.7. Composición de movimientos. Tiro parabólico



Eje X ⮞ movimiento rectilíneo uniforme

$v_x = v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos(\theta_0)$ | $x(t) = x_0 + v_{0x}t$

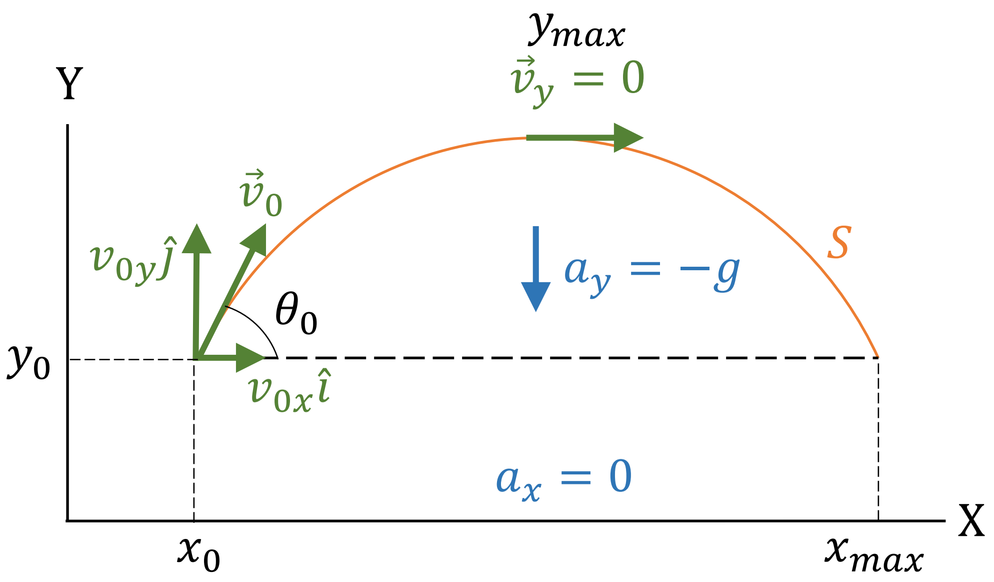
Eje Y ⮞ movimiento rectilíneo uniformemente decelerado

$v_y = v_{y0} - gt = |\vec{v}_0|\sin(\theta_0) - gt$ | $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$

Trayectoria S es parabólica

$$y(x) = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2{v_{0x}}^2}\right)x^2 = x\tan(\theta_0) - \left(\frac{g}{2|\vec{v}_0|^2\cos^2(\theta_0)}\right)x^2$$

1.7. Composición de movimientos. Tiro parabólico



Tiempo de vuelo ➤ tiempo en llegar a y_{max} es igual al tiempo de descenso

$$v_y = 0 = v_{y0} - gt \longrightarrow t = \frac{v_{y0}}{g} \longrightarrow t_{vuelo} = \frac{2|\vec{v}_0|}{g}\sin(\theta_0)$$

Alcance horizontal ➤ v_x es constante

$$x_{max} = x_0 + v_{0x}t_{vuelo} = x_0 + |\vec{v}_0|\cos(\theta_0)\left(\frac{2|\vec{v}_0|\sin(\theta_0)}{g}\right)$$

$$x_{max} = x_0 + \frac{|\vec{v}_0|^2}{g}\sin(2\theta_0)$$

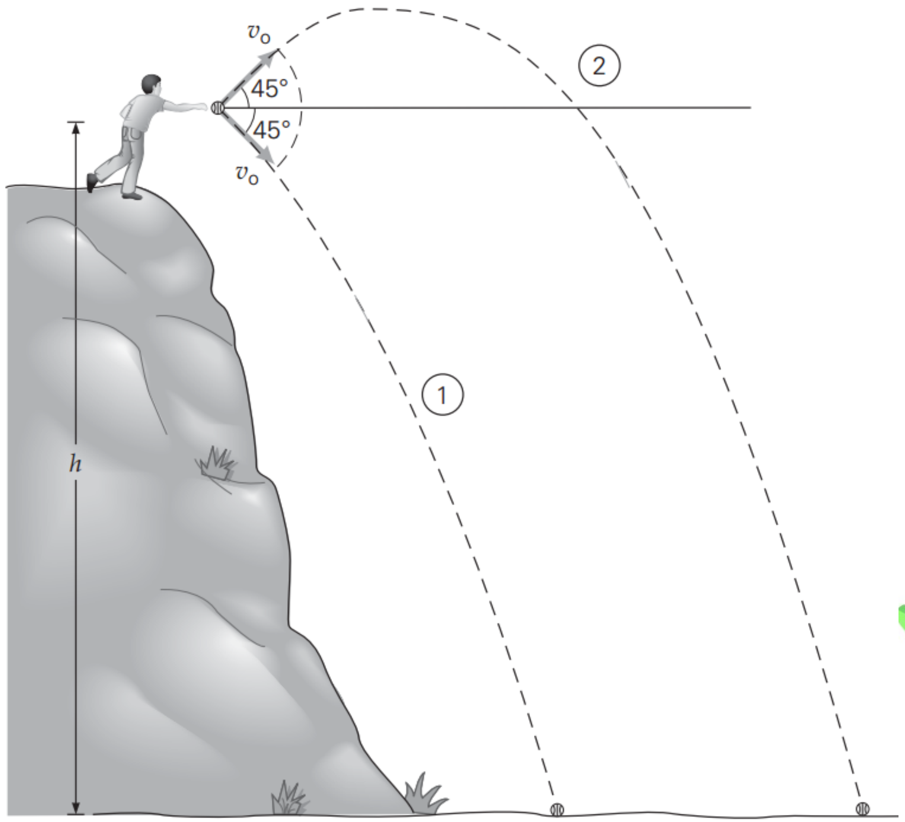
Mayor x_{max} cuando $\theta_0 = 45°$

$$x_{max}\,(\theta_0 = 45 + \alpha) = x_{max}\,(\theta_0 = 45 - \alpha)$$

Altura máxima ➤ $v_y = 0$

$$y_{max} = y_0 + \frac{|\vec{v}_0|^2}{2g}\sin^2(\theta_0)$$

1.7. Composición de movimientos. Tiro parabólico



Al llegar al suelo:

a) la pelota lanzada hacia arriba tiene mayor velocidad

b) la pelota lanzada hacia abajo tiene mayor velocidad

c) ambas tienen la misma velocidad

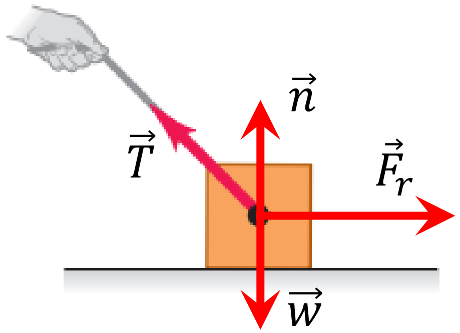
Contenidos

1.8. Interacciones y superposición de fuerzas

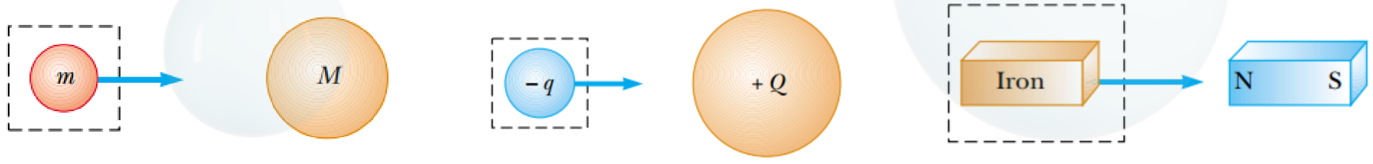
Fuerza ⪢ Toda acción o influencia capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo (imprimiéndole una aceleración que modifica el módulo, la dirección o el sentido de su velocidad), o bien de deformarlo.

Es una magnitud vectorial
- Módulo (unidad en el SI es el Newton, N)
- Dirección
- Sentido

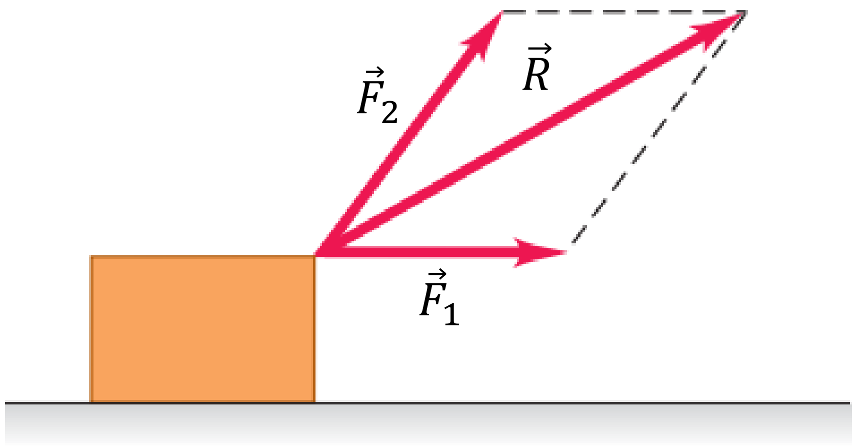
Fuerzas de contacto



Fuerzas de largo alcance



1.8. Interacciones y superposición de fuerzas



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

El efecto de cualquier cantidad de fuerzas aplicadas a un punto de un cuerpo es el mismo que aquel de una sola fuerza igual a la suma vectorial de todas las fuerzas

Fuerza neta que actúa sobre un objeto

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_2 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z = |\vec{R}_x|\hat{\imath} + |\vec{R}_y|\hat{\jmath} + |\vec{R}_z|\hat{k} \longrightarrow |\vec{R}_x| = \sum F_x \quad |\vec{R}_y| = \sum F_y \quad |\vec{R}_z| = \sum F_z$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2}$$

Contenidos

1.9. Leyes de Newton

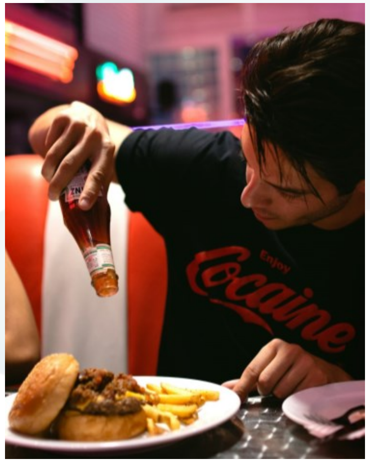
Primera ley de Newton (ley de la Inercia)

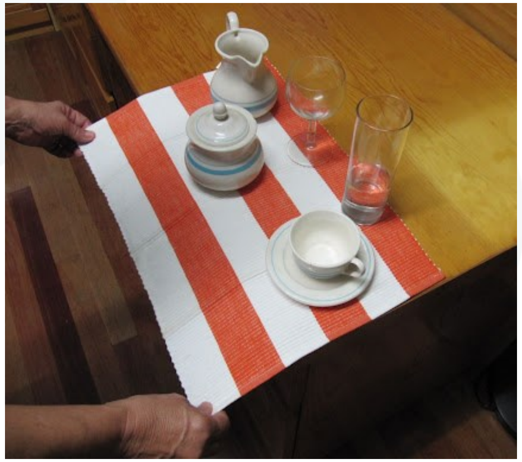
En un sistema inercial y en ausencia de fuerzas externas, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante)

Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, su aceleración es cero.

Un objeto tiende a mantener su estado original de movimiento en ausencia de fuerzas.

Inercia → Tendencia de un cuerpo a seguir moviéndose una vez iniciado su movimiento

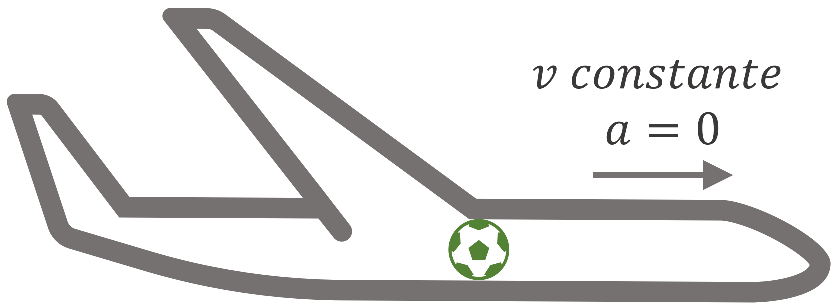




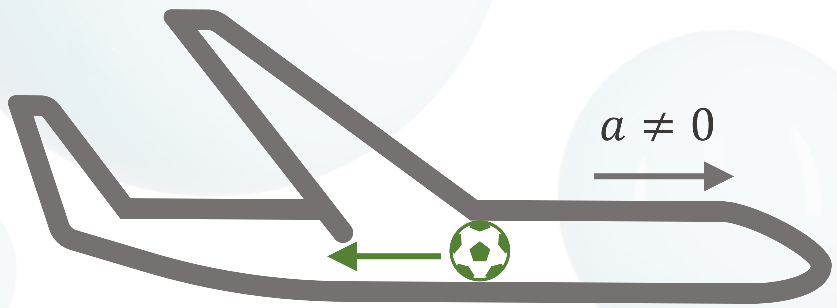
1.9. Leyes de Newton

Si sobre un objeto no actúa ninguna fuerza, cualquier sistema de referencia con respecto al cual la aceleración del objeto es cero es un *sistema de referencia inercial*

- Su comportamiento está regulado por la primera ley de Newton
- Cualquier sistema de referencia que se mueva con una velocidad constante respecto de un sistema inercial será, el mismo, un sistema inercial



Pelota en reposo con respecto al sistema de referencia del avión



Pelota retrocede acelerando con respecto al sistema de referencia del avión sin que actué ninguna fuerza sobre ella

1.9. Leyes de Newton

- Segunda ley de Newton (Ecuación fundamental de la dinámica)

En un sistema de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

m: masa inercial (masa)

- Es una ecuación vectorial $\longrightarrow$ $\vec{F}_x = \sum m\vec{a}_x \;\Big|\; \vec{F}_y = \sum m\vec{a}_y \;\Big|\; \vec{F}_z = \sum m\vec{a}_z$

- $\vec{F}_i$ son fuerzas externas $\longrightarrow$ fuerzas ejercidas sobre el cuerpo por otros cuerpos de su entorno

- Válida si la masa m es constante

- Sólo es válida en marcos de referencia inerciales

1.9. Leyes de Newton

- Segunda ley de Newton (Ecuación fundamental de la dinámica)

En un sistema de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

m: masa inercial (masa)

- La masa es una medida cuantitativa de la inercia
- Cuanto mayor sea la masa, más se "resiste" un objeto a ser acelerado

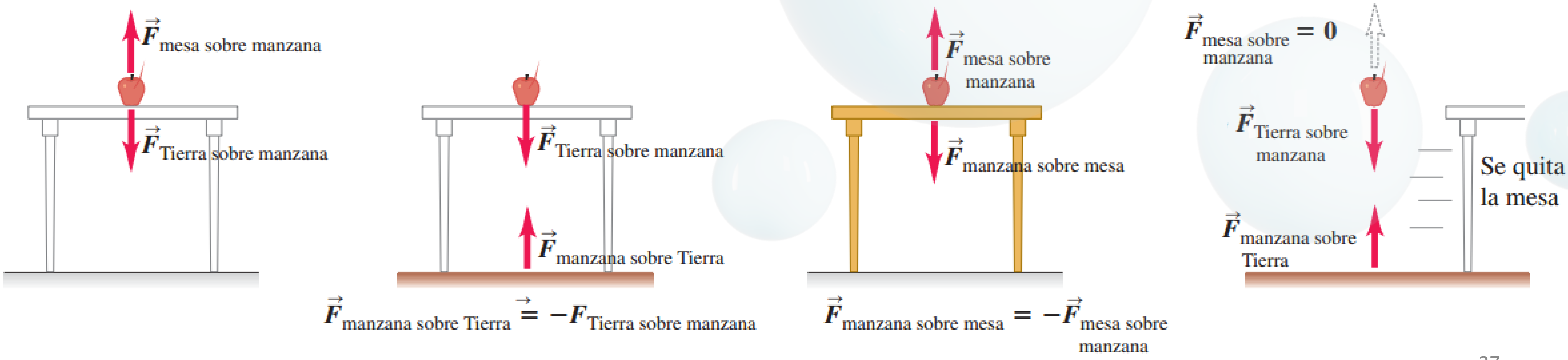
1.9. Leyes de Newton

- Tercera ley (Principio de acción-reacción)

Si un objeto A ejerce una fuerza $\vec{F}_{AB}$ (acción) sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce sobre el A una fuerza $\vec{F}_{BA}$ (reacción) de igual intensidad y dirección, pero de sentido contrario

$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}}$$

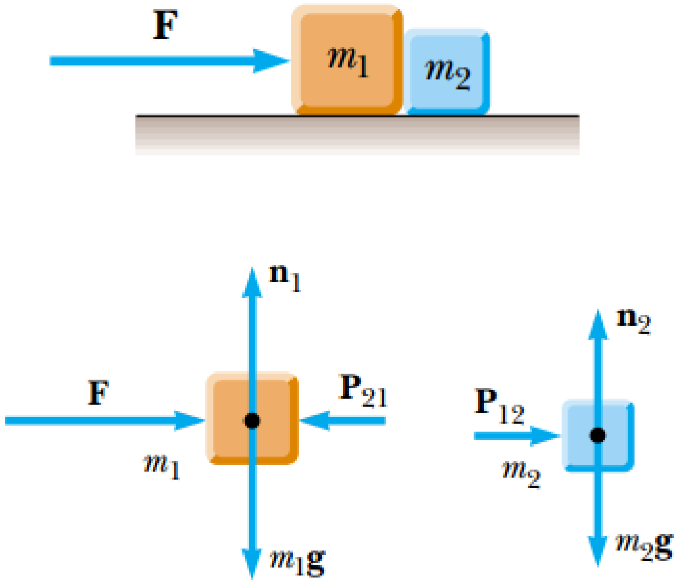
Las dos fuerzas en un par acción-reacción actúan sobre cuerpos diferentes

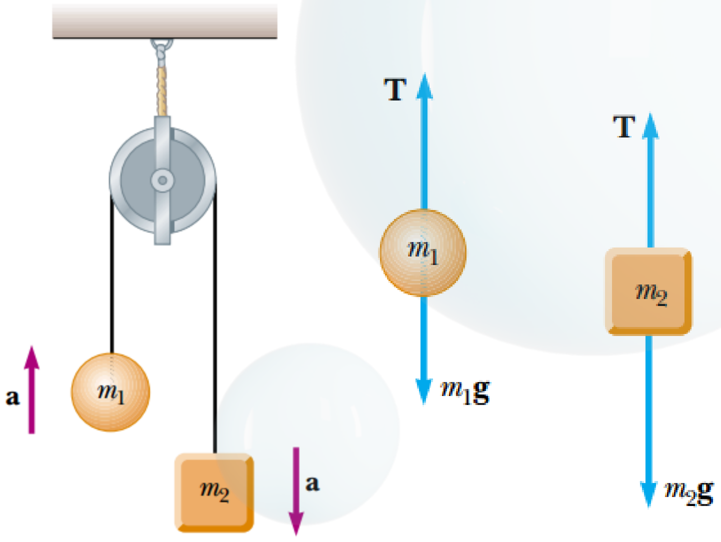


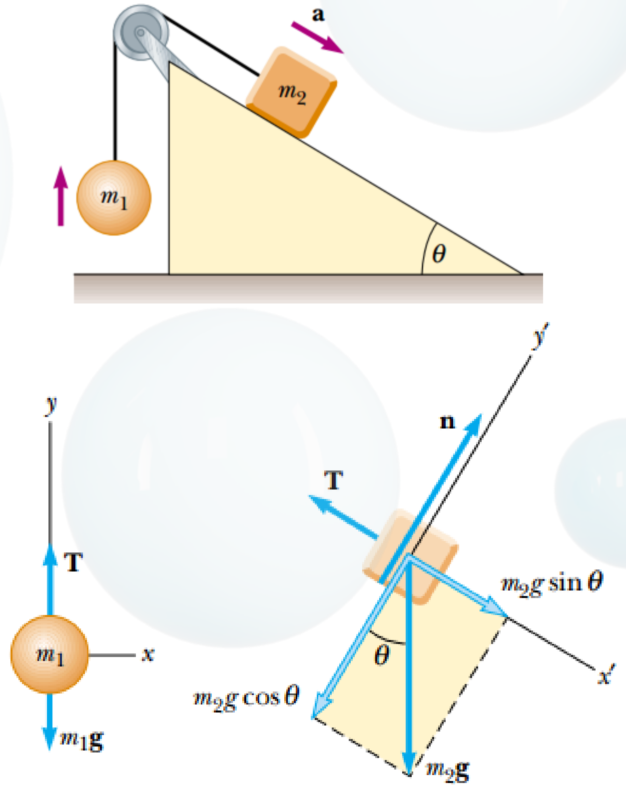
Contenidos

1.10. Diagramas del cuerpo libre

Muestra el objeto libre de su entorno, con vectores que indican las magnitudes y direcciones de todas las fuerzas aplicadas sobre el objeto por todos los objetos que interactúan con él

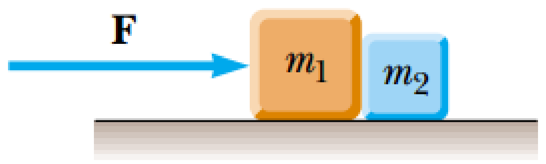


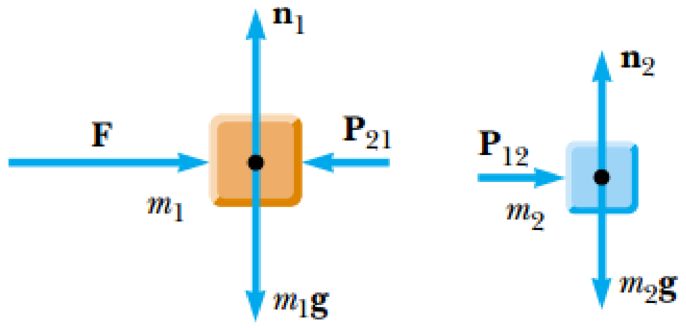




1.10. Diagramas del cuerpo libre

Muestra el objeto libre de su entorno, con vectores que indican las magnitudes y direcciones de todas las fuerzas aplicadas sobre el objeto por todos los objetos que interactúan con él





Dos bloques de masas $m_1 = 20 \text{ kg}$ y $m_2 = 40 \text{ kg}$, apoyados el uno contra el otro, descansan sobre un suelo perfectamente liso. Se aplica al bloque de masa m_1 una fuerza horizontal de $F = 40 \text{ N}$. Determinar:

a) Aceleración con la que se mueve el sistema.

b) Fuerzas de interacción entre ambos bloques.

1.10. Diagramas del cuerpo libre

Muestra el objeto libre de su entorno, con vectores que indican las magnitudes y direcciones de todas las fuerzas aplicadas sobre el objeto por todos los objetos que interactúan con él

Para la situación que se observa en la figura, determinar:

a) La aceleración del conjunto. ¿Hacia dónde se mueve?

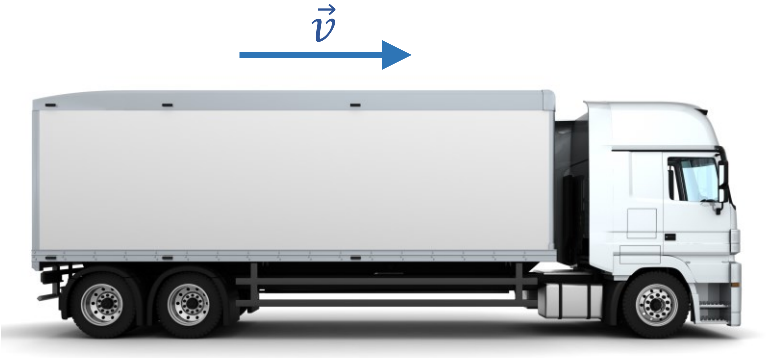
b) La tensión de la cuerda que une la bola con el bote superior.

c) La tensión en la cuerda que une los dos botes.

d) La fuerza que el techo ejerce sobre la polea

Contenidos

1.11. Momento lineal e impulso



Se necesita una mayor fuerza para detener el camión en un tiempo determinado que para detener el coche en el mismo tiempo

Medida de la dificultad de llevar el objeto hasta el reposo

Momento lineal (cantidad de movimiento) $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

- Magnitud vectorial (unidades SI: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) $\longrightarrow$ $\vec{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath} + p_z\,\hat{k}$
- Misma dirección y sentido que $\vec{v}$

1.11. Momento lineal e impulso

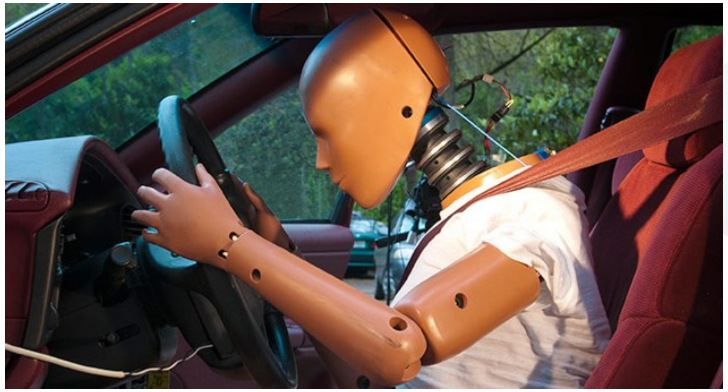
Segunda ley de Newton en términos del momento lineal $\longrightarrow$ $\boxed{\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$

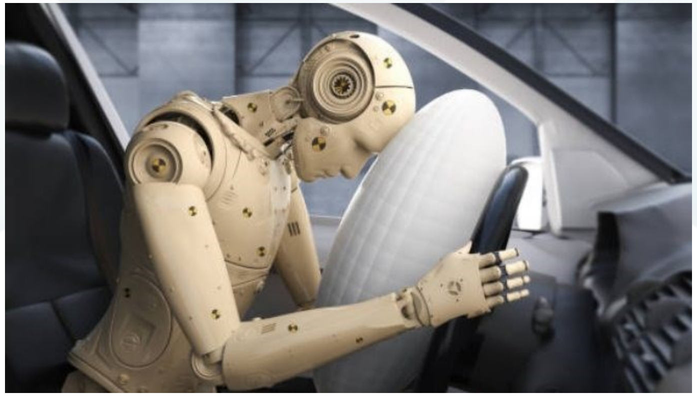
La fuerza neta (suma vectorial de todas las fuerzas) que actúa sobre una partícula es igual a la tasa de cambio del momento lineal de la partícula

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

$= 0$

En sistemas en los que la masa no cambia con el tiempo ni con la velocidad





1.11. Momento lineal e impulso

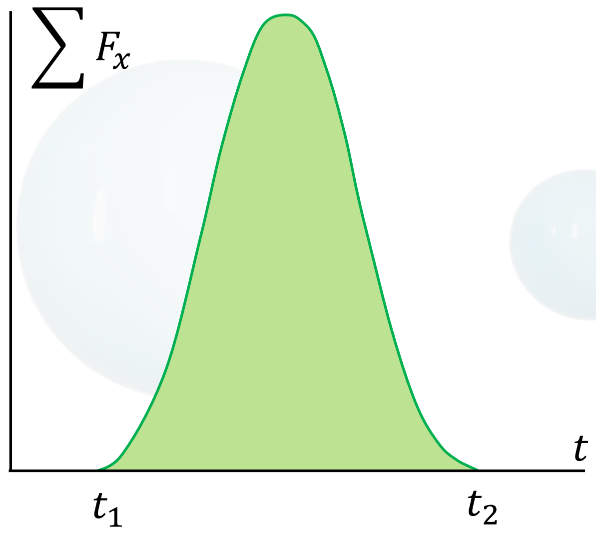
Importancia de conocer el cambio en la cantidad de movimiento causada por una fuerza neta

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \vec{F}\right) \mathrm{d}t \longrightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \vec{F}\right) \mathrm{d}t$$

Impulso ($\vec{I}$) de la fuerza neta que actúa sobre una partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \vec{F}\right) \mathrm{d}t}$$

- Cantidad vectorial. Dirección de $\vec{I}$ es la misma que $\vec{p}$.
- Unidades en SI: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$
- Tiene una magnitud igual al área bajo la curva $\sum \vec{F}$ vs t
- No es una propiedad de una partícula
- Mide el grado en el que la $\sum \vec{F}$ cambia el $\vec{p}$ de la partícula

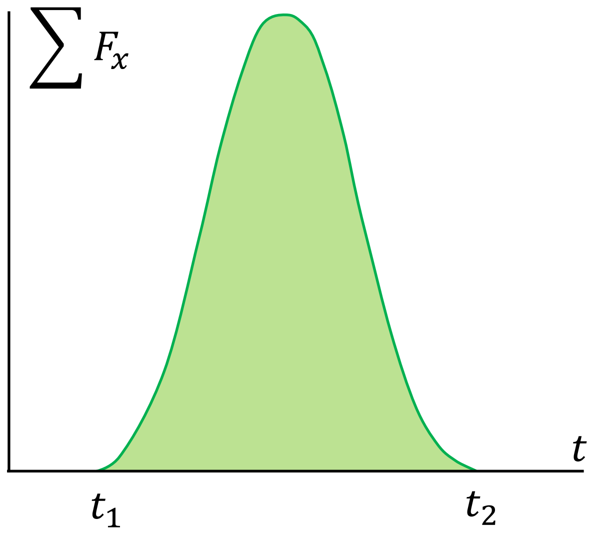


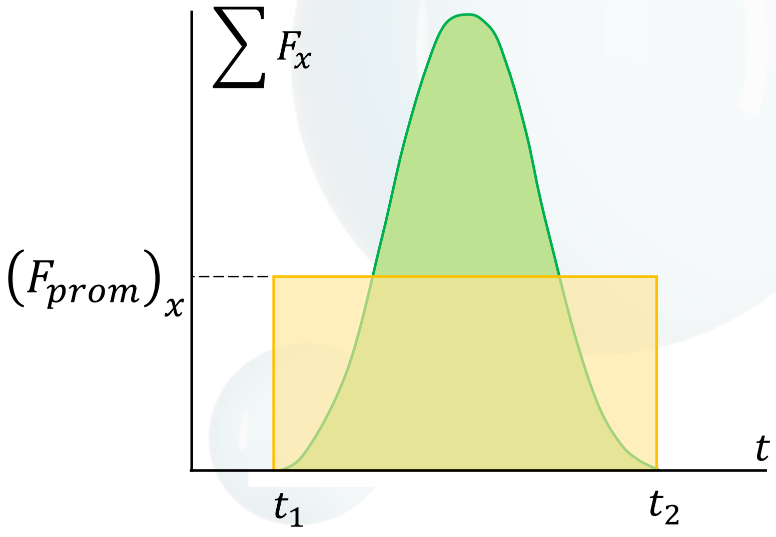
1.11. Momento lineal e impulso

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

Teorema del impulso y el momento lineal

El cambio del momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula durante ese intervalo





$$\vec{F}_{prom} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum \vec{F}\right)\mathrm{d}t$$

$$\vec{I} = \vec{F}_{prom}\Delta t$$

1.11. Momento lineal e impulso

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

Teorema del impulso y el momento lineal

El cambio del momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula durante ese intervalo

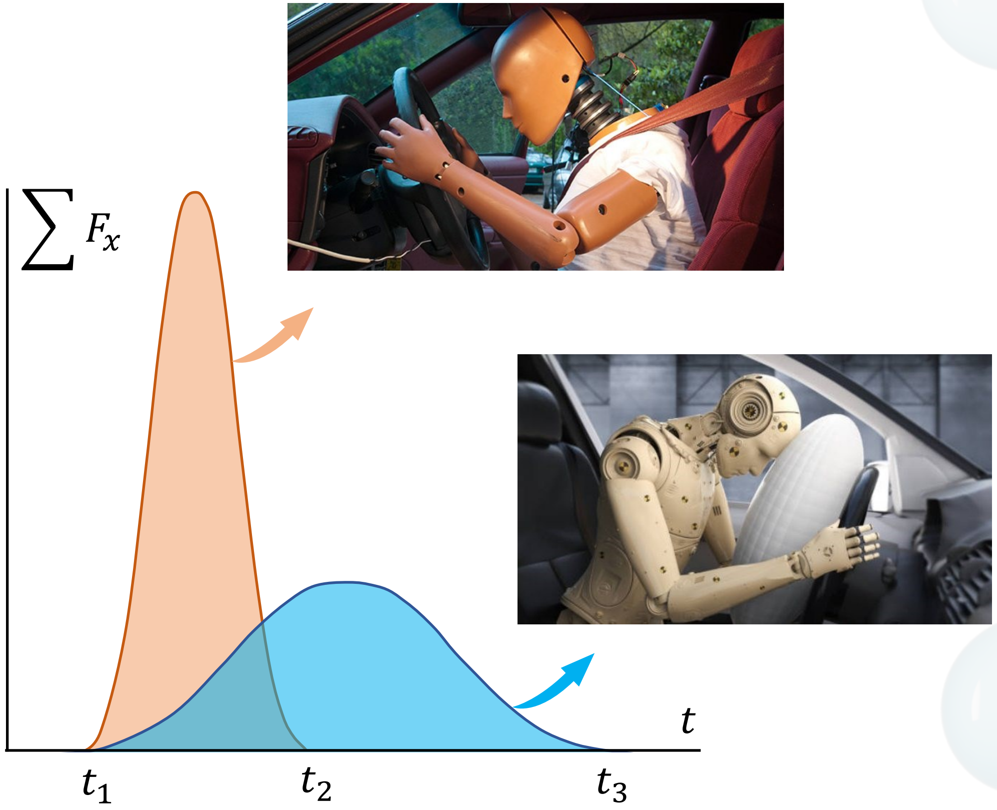
En algunos problemas es más fácil usarlas en su forma de componentes $\longrightarrow$ $\vec{I} = I_x\hat{\imath} + I_y\hat{\jmath} + I_z\hat{k}$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum F_x\right)\mathrm{dt} = \left(F_{prom}\right)_x(t_2 - t_1) = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x}$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum F_y\right)\mathrm{dt} = \left(F_{prom}\right)_y(t_2 - t_1) = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum F_z\right)\mathrm{dt} = \left(F_{prom}\right)_z(t_2 - t_1) = p_{2z} - p_{1z} = mv_{2z} - mv_{1z}$$

1.11. Momento lineal e impulso



Sí el área bajo las curvas es la misma

$\Downarrow$

Ambas fuerzas proporcionan el mismo $\vec{I}$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \vec{F} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_3} \left(\sum \vec{F} \right) \mathrm{d}t$$

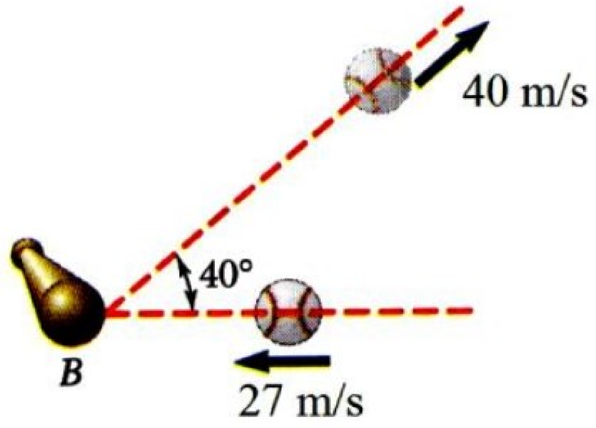
1.11. Momento lineal e impulso

Aproximación del impulso

Una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve, pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum \vec{F} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{imp} \mathrm{d}t = \vec{F}_{imp-prom} (t_2 - t_1)$$

Fuerza impulsiva   Fuerza impulsiva promedio



Una pelota de masa $113\ \mathrm{g}$ se lanza con velocidad $27\ \mathrm{m/s}$ contra el bateador. Después del golpe, sale en otra dirección con velocidad $40\ \mathrm{m/s}$, tal y como se muestra en el dibujo. Si el bate y la pelota han estado en contacto durante $0.015\ \mathrm{s}$, calcula la fuerza impulsiva media durante la interacción.

Contenidos

1.12. Fuerzas elásticas y de fricción

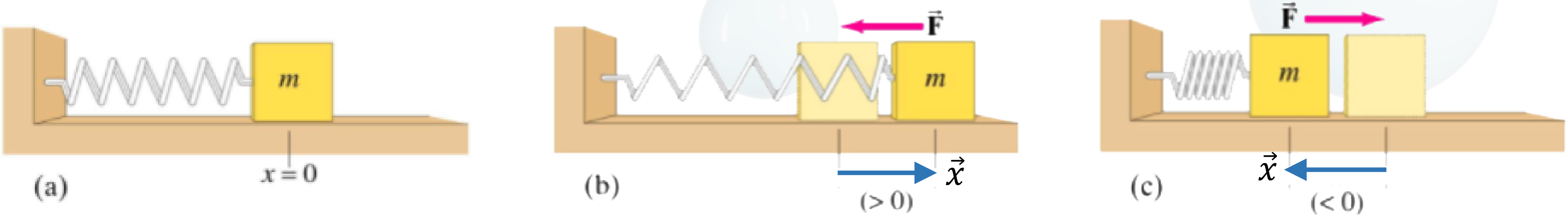
Fuerzas elásticas → Tienden a restituir la geometría en equilibrio de un sólido que experimenta una deformación respecto a su posición en equilibrio

Ley de Hooke para resortes elásticos: Si la longitud de un resorte varía en una longitud x respecto a su longitud de equilibrio, aparece una fuerza elástica cuyo módulo es directamente proporcional a x y cuya dirección y sentido tiende a hacer volver al resorte a su longitud de equilibrio.

$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{x}}$$

k: Constante elástica del resorte ($k > 0$). Unidades en SI: $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$

$\vec{x}$: Vector con la misma dirección y sentido de la deformación y con módulo igual a la longitud de la deformación



1.12. Fuerzas elásticas y de fricción

Fuerzas de fricción (rozamiento)

- Fuerzas paralelas a la superficie de contacto de dos sólidos que se oponen al movimiento relativo paralelo de las superficies

- *Fuerza de rozamiento estático*: Impide que el sólido deslice a lo largo de la superficie de contacto. Anula exactamente la fuerza de empuje (T) paralela a la superficie que tiende a producir dicho deslizamiento

$$\boxed{F_s \leq \mu_s n}$$

μ_s: Coeficiente de rozamiento estático. Adimensional

- *Fuerza de rozamiento dinámico*: Se opone al deslizamiento de un sólido sobre la superficie de contacto cuando dicho deslizamiento ya se está produciendo

$$\boxed{F_k = \mu_k n}$$

μ_k: Coeficiente de rozamiento dinámico. Adimensional

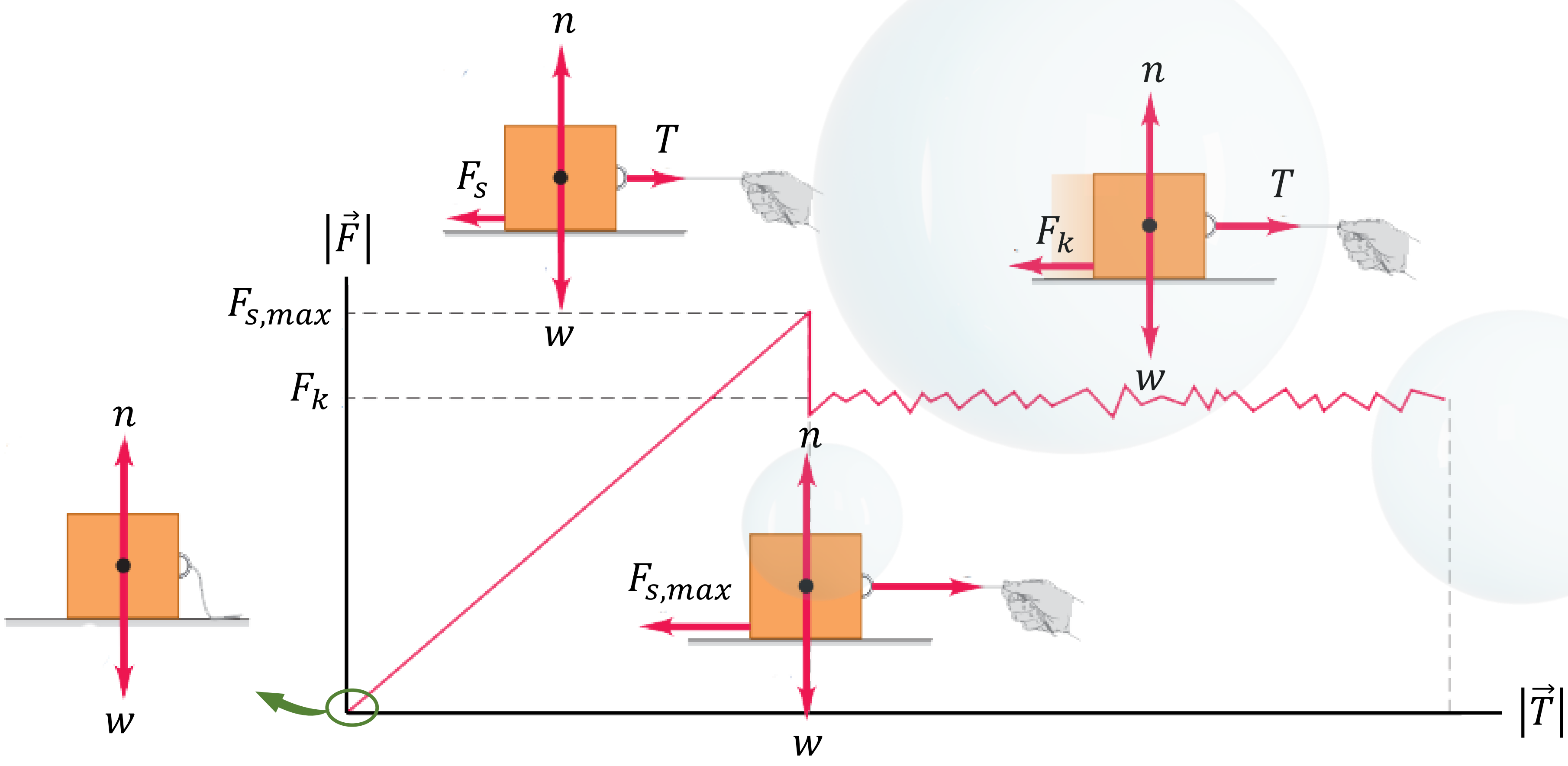
n: fuerza normal a la superficie

$\mu_s < \mu_k$

1.12. Fuerzas elásticas y de fricción

Fuerzas de fricción (rozamiento)

Fuerzas paralelas a la superficie de contacto de dos sólidos que se oponen al movimiento relativo paralelo de las superficies

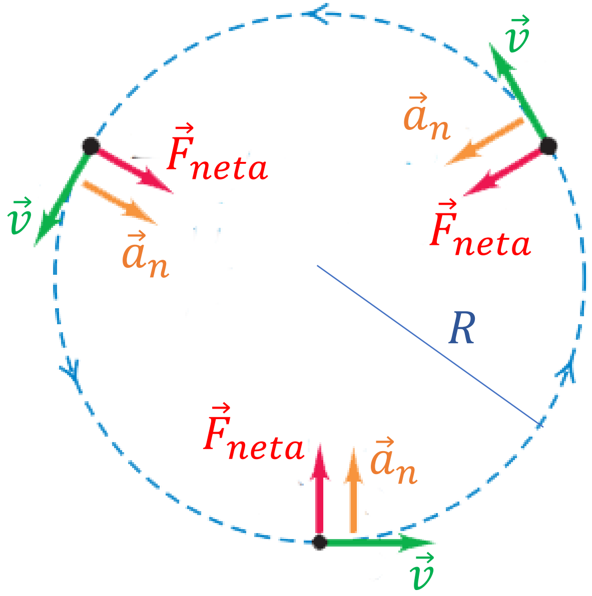


Contenidos

1.13. Dinámica del movimiento circular

Movimiento circular uniforme ($\vec{a}_n \neq 0, \vec{a}_t = 0, R = constante$)

Para que la partícula acelere hacia el centro del círculo, la fuerza neta ($\vec{F}_{neta}$) sobre la partícula debe estar dirigida siempre hacia el centro



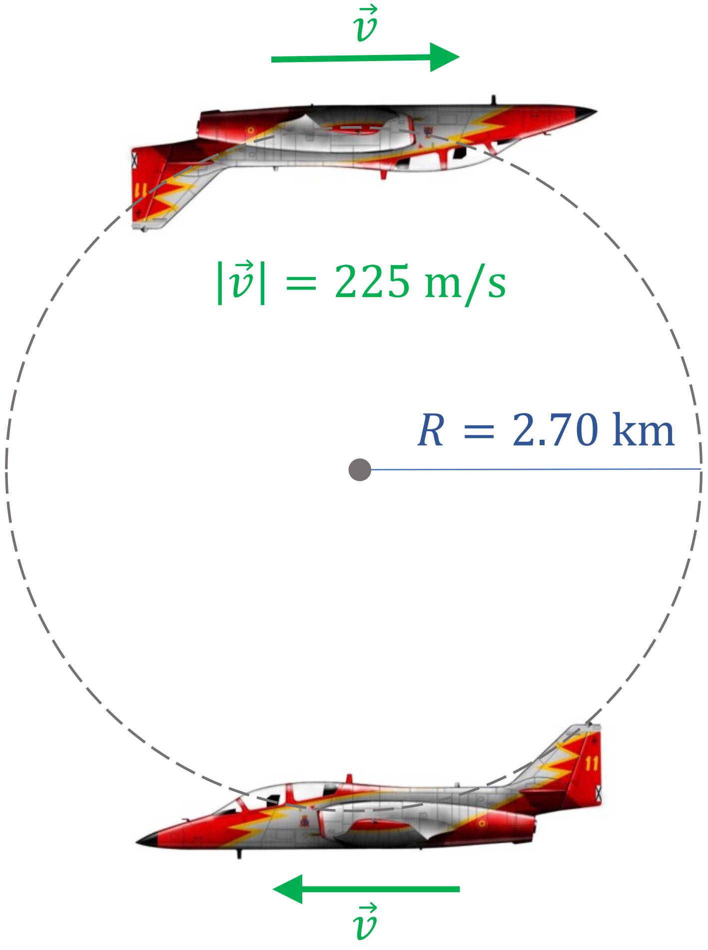
Segunda ley de Newton $\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F} = m\vec{a}_n = m\frac{v^2}{R}\hat{u}_n = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}\hat{u}_n$

$$T = \frac{2\pi R}{v} \longrightarrow a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

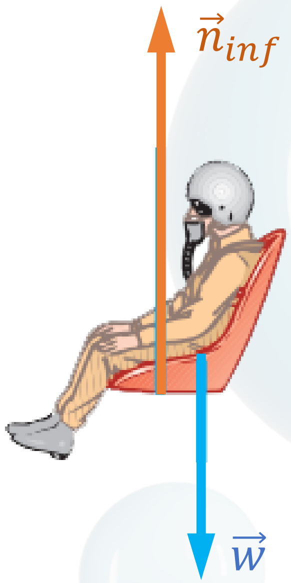
- Si deja de actuar $\vec{F}_{neta}$ hacia adentro, la partícula saldrá disparada en una línea recta tangente al círculo

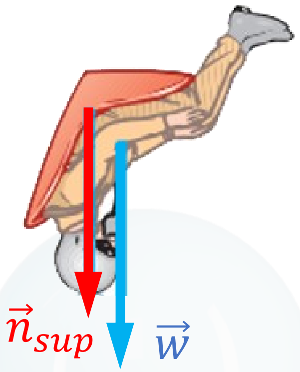
1.13. Dinámica del movimiento circular

- Movimiento circular uniforme ($\vec{a}_n \neq 0, \vec{a}_t = 0, R = constante$)



¿Fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto?





$$\sum F = n_{inf} - w = m\frac{v^2}{R}$$

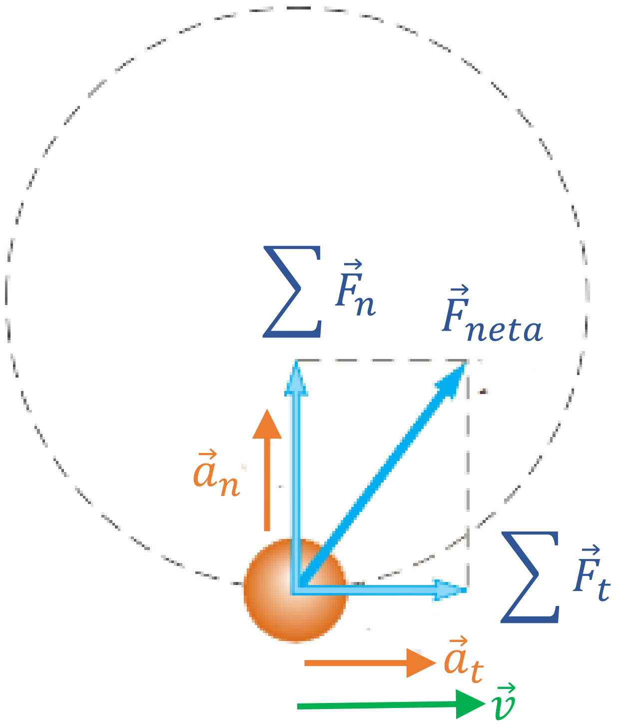
$$n_{inf} = 2.91w$$

$$\sum F = n_{sup} + w = m\frac{v^2}{R}$$

$$n_{inf} = 0.91w$$

1.13. Dinámica del movimiento circular

- Movimiento circular acelerado ($\vec{a}_n \neq 0, \vec{a}_t \neq 0, R = constante$)



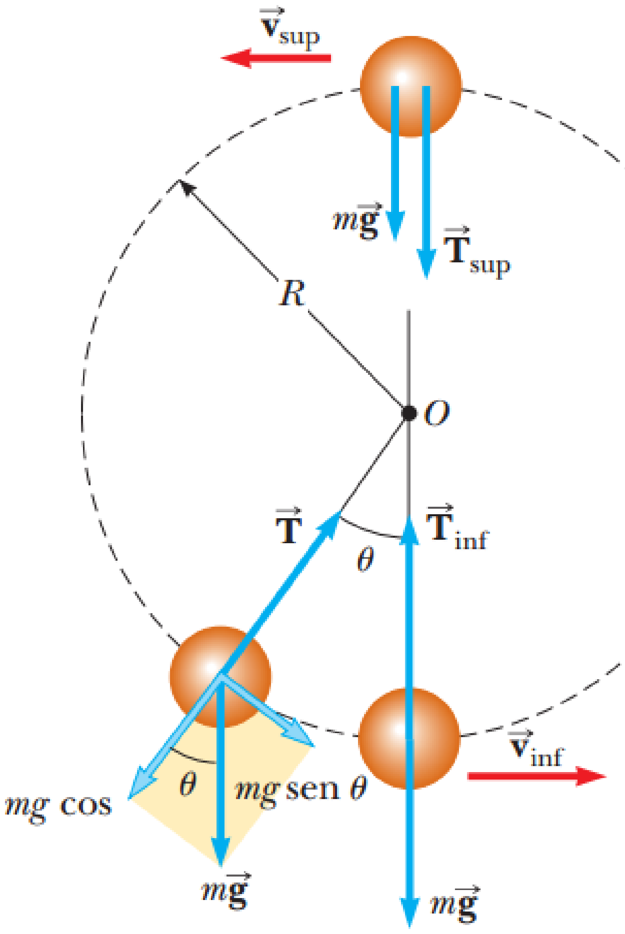
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F} = \sum \vec{F}_t + \sum \vec{F}_n = m\vec{a}_t + m\vec{a}_n = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t + m\frac{v^2}{R}\hat{u}_n$$

Las fuerzas tangencial y normal se expresan como fuerzas netas con la notación suma dado que cada fuerza podría consistir en múltiples fuerzas que se combinan

1.13. Dinámica del movimiento circular

- Movimiento circular acelerado ($\vec{a}_n \neq 0, \vec{a}_t \neq 0, R = constante$)



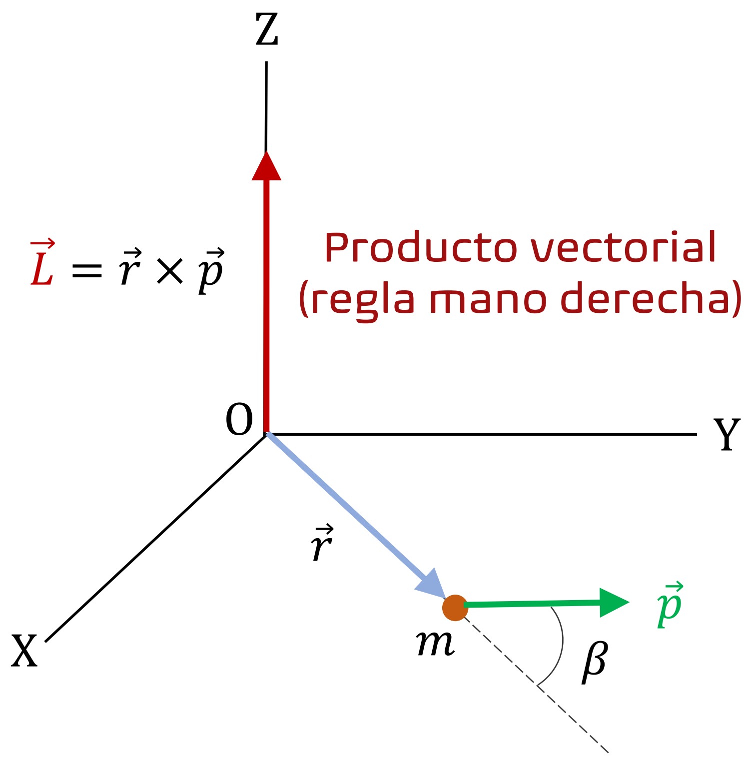
¿Tensión de la cuerda (T) en función de la velocidad y el ángulo θ?

$$\sum F_t = mg\sin(\theta) = ma_t \longrightarrow a_t = g\sin(\theta)$$

$$\sum F_n = T - mg\cos(\theta) = m\frac{v^2}{R} \longrightarrow T = mg\left(\frac{v^2}{Rg} + \cos(\theta)\right)$$

Contenidos

1.14. Momento angular



XYZ: Sistema referencia inercial

Momento angular de una partícula $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$

- Análisis de movimientos de rotación
- Magnitud vectorial. Unidades SI: $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$
- Depende del origen O elegido

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F}_{neta} = \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$: momento de la fuerza $\vec{F}_{neta}$ respecto del punto fijo O

- La variación del $\vec{L}$ de una partícula es igual al $\vec{\tau}$ de la $\vec{F}_{neta}$ que actúa sobre ella