Ejercicio: Clasificar las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+2y,\ x+z,\ 2y+z)$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z) = (x+y+z,\ x,\ 0,\ 0)$.

a) Calculamos el Ker f:

$$\left.\begin{aligned} x+2y &= 0 \\ x+z &= 0 \\ 2y+z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\longrightarrow -z+2y = 0 \rightarrow z = 2y = \boxed{0} \\ &\rightarrow x = -z = \boxed{0} \\ &\longrightarrow 2y+2y = 0 \rightarrow 4y = 0 \rightarrow \boxed{y=0} \end{aligned}$$

$\text{Ker } f = \{(0,0,0)\} \rightarrow \dim(\text{Ker } f) = 0$ ✓

$\dim(\text{Im } f) = \underset{\mathbb{R}^3}{\dim(V)} - \dim(\text{Ker } f) = 3 - 0 = 3 = \underset{\mathbb{R}^3}{\dim(V')}$ ✓

$\boxed{f \text{ es biyectiva (automorfismo)}}$

b) Calculamos Im f:

$f(1,0,0) = (1,1,0,0)$

$f(0,1,0) = (1,0,0,0)$

$f(0,0,1) = (1,0,0,0)$

$$\text{Im } f = L\{\underbrace{(1,1,0,0),(1,0,0,0)}_{L.I},\cancel{(1,0,0,0)}\}$$

$$B_{\text{Im } f} = \{(1,1,0,0),(1,0,0,0)\} \rightarrow \dim(\text{Im } f) = 2 \neq \dim(\underset{\mathbb{R}^4}{\underset{\shortparallel}{V'}})$$

$$\dim(\text{Ker } f) = \dim(\underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\shortparallel}{V}}) - \dim(\text{Im } f) = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$\boxed{f \text{ no es inyectiva ni supreayectiva}}$

Ejercicio: Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple:

$$f(-2,1) = (1,0,1)$$

$$f(-1,0) = (2,-1,1)$$

a) Verificar que f queda totalmente determinada por sus imágenes.

b) Obtener la expresión analítica de f.

a) Los vectores $(-2,1)$ y $(-1,0)$ deben ser base de $\mathbb{R}^2$.

$B = \{(-2,1),(-1,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ $\to$ f queda completamente determinada por sus imág.

b) Debemos escribir un vector de $\mathbb{R}^2$ (x,y) como C.L de B:

$$(x,y) = \alpha \cdot (-2,1) + \beta(-1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -2\alpha - \beta \\ y &= \alpha \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \beta = -2\alpha - x = -x-2y \\ &\to \alpha = y \end{aligned}$$

$$(x,y) = y(-2,1) + (-x-2y)(-1,0)$$

$$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

$$f(x,y) = f\big(y(-2,1) + (-x-2y)\cdot(-1,0)\big) =$$

$$= y\, f(-2,1) + (-x-2y)\, f(-1,0) =$$

$$= y\cdot(1,0,1) + (-x-2y)\cdot(2,-1,1) =$$

$$= (y,0,y) + (-2x-4y,\ x+2y,\ -x-2y) =$$

$$= \boxed{(-2x-3y,\ x+2y,\ -x-y)}$$

Ejercicio: Consideramos el endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que verifica:

$$f(1,1) = (1,-1) \quad y \quad f(1,0) = (3,2)$$

Verificar que f existe y es única. Hallar $f(5,2)$.

Como $B = \{(1,1),(1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2 \rightarrow f$ existe y es única ✓

$$(5,2) = \alpha(1,1) + \beta(1,0) \rightarrow (5,2) = 2(1,1) + 3(1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= \alpha + \beta \\ 2 &= \alpha \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \beta = 5 - \alpha = 5 - 2 = 3 \\ &\rightarrow \alpha = 2 \end{aligned}$$

$$f(5,2) = 2f(1,1) + 3f(1,0) = 2(1,-1) + 3(3,2) =$$

$$= \boxed{(11,4)}$$

> **Ejercicio:** Decidir si existe alguna aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:
>
> $$f(1,0,0) = (1,2,3)$$
> $$f(1,1,1) = (0,0,1)$$
> $$f(0,-1,-1) = (1,2,5)$$

Comprobamos si los vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \text{No forman base de } \mathbb{R}^3.$$

$\leftarrow$ L.D

$$\begin{cases} \text{Si se cumple la linealidad} \to \infty \text{ a.l.} \\ \text{Si NO se cumple la linealidad} \to \nexists \text{ a.l.} \end{cases}$$

$$(0,-1,-1) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\alpha}}(1,0,0) + \overset{-1}{\overset{\shortparallel}{\beta}}(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha + \beta \\ -1 = \beta \\ \cancel{-1 = \beta} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \alpha = -\beta = 1 \\ \to \beta = -1 \end{array}$$

Comprobamos la linealidad:

$$f(0,-1,-1) = 1 \cdot f(1,0,0) - 1 \cdot f(1,1,1) =$$

$$= (1,2,3) - (0,0,1) = (1,2,2) \neq (1,2,5)$$

No se cumple la linealidad

$$\boxed{\text{No existe una } f \text{ que cumpla las condiciones}}$$

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2,3)$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \end{array} \longrightarrow rg(A) = \dim(\operatorname{Im} f) = 2 \neq \dim(V') = 3$$

$$\dim(V') = \dim(\mathbb{R}^3)$$

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im} f) =$$

$$\dim(V) = \dim(\mathbb{R}^2)$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$$\boxed{f \text{ es inyectiva}}$$

$$\vec{v} = (2,3)$$

$$A \cdot \vec{v}^{\,t} = f(\vec{v})^t \longrightarrow \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{f(\vec{v}) = (5,-1,0)}$$

Ejercicio: Utilizando la matriz asociada a f respecto a la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$\mathbb{R}^3 \leftarrow \mathbb{R}^3$

Calcular unas bases del núcleo e imagen de f.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo.

· Núcleo de f:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vector de V $\quad$ $\vec{0}$ de V'

$$\left.\begin{array}{l} x - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ \cancel{2x + y - z = 0} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = z \\ \xrightarrow{:2} y + z = 0 \rightarrow y = -z \\ \rightarrow 2z - z - z = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad \text{S.C.I} \end{array}$$

N° par $= 3$ inc $- 2$ ec. fin $= 1$ par (α)

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha \end{cases} \longrightarrow (x, y, z) = \alpha\,(1, -1, 1)$$

↳ s. gen de Ker f

$$\text{Ker } f = L\{(1,-1,1)\} = \{(\alpha,-\alpha,\alpha) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

L.I

$$\boxed{B_{\text{Ker } f} = \{(1,-1,1)\}}$$

• Imagen de f: $\text{Im } f = L\{(1,0,2),(0,2,1),(-1,2,-1)\}$

columnas de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \end{pmatrix} \qquad \boxed{B_{\text{Im } f} = \{(1,0,2),(0,2,1)\}}$$

$F_3 \to F_3 + F_1$

$$\dim \text{Im } f = \dim(V) - \dim(\text{Ker } f) =$$

$$= 3 - 1 = 2$$

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x,y) = (x+y,\ x-y,\ 0)$$

Calcular la matriz asociada a f en bases:

$$B = \{(1,1),(1,-1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$B' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Utilizar la matriz calculada para hallar la imagen de $\vec{v} = (5,3)$ en coordenadas de B'.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{v} & f(\vec{v}) \\
C_2 \arrow[r, "A"] & C_3 \arrow[d, dotted, bend right, "Q^{-1}"'] \\
B \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'"] & B' \arrow[u, "Q"'] \\
\vec{v}_B & f(\vec{v}_B)_{B'}
\end{tikzcd}$$

camino indirecto: $B \xrightarrow{P} C_2 \xrightarrow{A} C_3 \xrightarrow{Q^{-1}} B'$

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P =$$

$\uparrow$

al revés!

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

poner vectores de B'
en columnas

poner vectores de B
en columnas

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

← mismo tamaño que A

$\vec{v} = (5,3) \longrightarrow f(\vec{v}_B)_{B'}$

$A' \cdot P^{-1} \cdot \vec{v}^{\,t} = f(\vec{v}_B)^t_{B'}$

$$\begin{tikzcd} \vec{v} & f(\vec{v}) \\ C_2 \arrow[r, "A"] & C_3 \\ B \arrow[u, "P"] \arrow[r, "A'"'] & B' \arrow[u, "Q"'] \\ \vec{v}_B & f(\vec{v}_B)_{B'} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \vec{v} & \\ C_2 \arrow[d, "P^{-1}"'] & \\ B \arrow[r, "A'"'] & B' \\ & f(\vec{v}_B)_{B'} \end{tikzcd}$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot -\frac{1}{2} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \underset{3\times \underline{\underline{2}}}{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\underline{\underline{2}}\times 1}{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{f(\vec{v}_B)_{B'} = (5, 3, -3)}$$

Comprobación: $f(\vec{v}) = f(\underset{x}{5}, \underset{y}{3}) = (8, 2, 0)$

$$\begin{tikzcd} C_3 \quad f(\vec{v}) \\ B' \arrow[u, "Q"'] \\ f(\vec{v}_B)_{B'} \end{tikzcd}$$

$$Q \cdot f(\vec{v}_B)^t_{B'} = f(\vec{v})^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$