Hoja de Problemas de la asignatura

1. Tipo Examen

1.1. Probabilidad condicionada, total y Bayes

1. Se está investigando una nueva prueba de detección de cáncer. Si se realiza la prueba a una persona sana, la probabilidad de que la prueba experimental dé positivo es 0.05 y de que dé negativo, 0.95. Sabemos que 1 persona de cada 100.000 padece la enfermedad. Pero cuando se trata de una persona enferma, la prueba es infalible. Si una persona seleccionada al azar presenta una reacción positiva, ¿cuál es la probabilidad de que padezca el cáncer?

2. En un casino el 20 % de los dados están equilibrados, pero hay 4 partidas restantes (también al 20 %) de dados falsos. La probabilidad de obtener 6 es, respectivamente $\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}$, y $\frac{5}{6}$. Se lanza un dado una vez y sale 6. ¿Cuál es la probabilidad de que sea equilibrado? Y si repetimos el lanzamiento 10 veces y salen 7 seises. ¿Cuál es la probabilidad de que esté equilibrado?

3. En el lanzamiento de una nueva red social, se estima que el producto alcanzaría las siguientes cuotas de mercado con la probabilidad indicada en la tabla:

Cuota de mercado	Probabilidad
10 %	0.3
15 %	0.45
20 %	0.25

   Para contrastar la hipótesis, se realiza una encuesta entre 5 usuarios *beta* resultando que 2 de ellos finalmente adquieren el producto. Posteriormente se realiza una segunda encuesta a 10 potenciales usuarios, resultando que tres de ellos adquieren nuestro producto. Calcula las probabilidades de que, tras los sucesivos resultados, podamos asignar a cada una de las cuotas de mercado.

4. A y B compiten en el siguiente juego: A lanza dos dados y gana cuando la suma es 4. Si no sale 4, lanza B y gana si la suma es 6. En caso de no obtener 6, se repite la jugada de A y B sucesivamente,hasta que el primero obtenga el valor ganador. ¿Cuál es la probabilidad de ganar cada jugador?

5. En el CGPJ hay 3 componentes progresistas y 4 conservadores. Se decide crear una comisión secreta de tres miembros por sorteo. Se ha descubierto que un miembro es progresista. ¿Cuál es la probabilidad de que sea conservador el siguiente miembro que se considere de la comisión?

6. Una urna contiene tres bolas blancas y cuatro azules. Tres bolas son transferidas a una segunda urna. Una bola es seleccionada de la segunda urna y resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola azul entre las dos restantes de la segunda urna?

1.2. Variable Aleatoria

7. La calificación promedio del examen de Inferencia ha sido de 6.25 puntos con una desviación estándar de 1. Sospecho que el examen ha sido difícil, así que ajustaré las notas para que el promedio sea 7 y la desviación estándard 8. Su la nota la transformo como $Y = aX + b$, ¿Qué deberían valer a y b?

8. La siguiente distribución de probabilidad corresponde a la variable aleatoria X: *Número de veces que un modelo generativo responde tarde a los prompts de un usuario en hora punta*

x	0	1	2	3	4
p(x)	$0.3 + k$	$2k$	0.2	$0.1 + 5k^2$	0.05

a) Halla el valor de k

b) Halla la probabilidd de que el número de veces que se produzca demora sea superior a 3.

c) Halla la probabilidad que que no se produzcan demoras.

d) Halla el número más probable de tardanzas. ¿Concincide con el valor esperado?

9. En el proceso de fabricación de un robot un algoritmo de visión artificial detecta defectos. Cuando es así, la fabricación se detiene. Considera la variable aleatoria X: *Cantidad de veces que se detiene la máquina por día*. Su función de probabilidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16}{31}(0.5)^x & x = 0,1,2,3,4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga la máquina un determinado día?

b) Las detenciones en días consecutivos son independientes. Halla la probabilidad de que el máximo de detenciones comparando dos días consecutivos sea exactamente 2.

c) Halla la función de probabilidad del número máximo de detenciones por día comparando dos días consecutivos.

10. Supongamos que la probabilidad de elegir una palabra de la frase *EL PROFESOR DE INFERENCIA TIENE POCO PELO EN LA CABEZA* es proporcional al número de letras que forman dicha palabra. Si X es el número de letras de la palabra seccionada, define:

a) El espacio muestral

b) La función de probabilidad asociada

c) La variable aleatoria. Indica su tipo.

d) $E[X]$ y $Var[X]$

e) Si $X = 2$, ¿Cuál es la probabilidad de que la palabra seleccionada haya sido *EN*?

11. La duración de determinados sensores, T, sigue una función de densidad de probabilidad:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t < 0.5 \\ 0.5e^{-t-0.5} & t > 0.5 \\ 0 & si \quad \text{otros casos} \end{cases}$$

a) Halla la función de distribución acumulada F

b) Los sesores se venden como *regulares* si duran menos de tres meses, *buenos* si duran entre tres meses y tres años y *muy buenos* si duran más de tres años. ¿Qué porcentajes de sensores tendremos en el proceso de fabricación.

c) Los empaquetamos en cajas de 20. Si se encuentran uno o más artículos regulares en una caja, la fábrica proporciona una caja nueva gratuitamente. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una de regalo? Y si somos tres amigos los que hemos comprado una caja cada uno, ¿Cuál es la probabilidad de que entre los tres tengamos, al menos, una caja de regalo?

12. La función de distribución de la demanda de energía eléctrica (en MW) a la hora punta de las 12:00 en un determinado DataCenter viene dada por :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ bx^2 & si \quad 0 \le x < 1 \\ b(2(x-1)+1) & si \quad 1 \le x < 3 \\ 1 - b(x-4)^2 & si \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & si \quad x \ge 4 \end{cases}$$

a) Halla la función de densidad de la demanda de energía eléctrica.
b) Halla la demanda superada sólo el 20 % de los días a la hora punta.

13. En las próximas elecciones a Rector/a de la UA, el 30 % de las personas son seguidoras de la candidatura A, el 50 % de la candidatura B y el resto de la candidatura C. Una estimación muy fiable a concluido que van a ir a votar el 65 % de quienes siguen a A votan, el 82 % de quienes votan a B y el 50 % de quienes votan a C. El día de la votación, si seleccionamos al azar una persona en el bar (o sea que no ha votado), ¿Cuál es la probabilidad que sea seguidor de la candidatura A? ¿Cuál es la probabilidad de que una persona al azar sí haya votado?

1.3. Binomial

14. Supón que la proporción de mujeres entre los usuarios de NetPlix es del 51 % y 49 % para el resto. Calcula la probabilidad de que entre 6 usuarios se tenga:
    a) Al menos una mujer
    b) Como máximo, una mujer.
    c) Exactamente 3 mujeres.
    d) Un número par de mujeres.

15. La tasa de baja en un año entre los clientes de TicTac es del 10 %. De entre el grupo de 10 amigos que somos, cuál es la probabilidad en el próximo año:
    a) Nos demos todos de baja.
    b) La mitad se den de baja.
    c) Al menos tres se den de baja.
    d) Solo se den de baja tres.

    (Considera que somos amigos muy independientes y que lo que hagamos no depende en absoluto de lo que hagan los demás).

16. El 60 % de usuarios de InstaKilo quiere eliminar el contenido violento en los contenidos de la red social. La dueña de la Red, no estando segura, decide elegir una muestra de 20 personas y preguntar directamente. Cuál es la probabilidad de que:
    a) Entre 10 y 13 sean partidarios de la eliminación .
    b) Que no haya nadie partidario de dicha eliminación.
    c) Que haya mayoría de no filtrar el contenido violento.

17. La ruleta francesa consta de 37 casillas numeradas del 1 al 36, numeradas alternativamente como roja y negra más el cero que suele ser verde (o blanco). Si lanzo 10 veces, ¿Cuál es el número esperado de rojos que puede salir? ¿Cuál es la probabilidad de que no salga 0? ¿Cuál es la probabilidad de que salgan más rojos que del resto? ¿cuál es la probabilidad de que el primer rojo salga en la décima tirada? Han salido 7 verdes, ¿Cuál es la probabilidad de que haya más rojos que negros?

18. Un sensor de determinado tipo de polen lo detecta en un 90 % de las ocasiones que efectivamente hay presencia atmosférica de dicho polen. Si no hay presencia, detecta la ausencia con una probabilidad del 80 %. La AEMET ha informado que hoy hay una probabilidad del 20 % de tener presencia de dicho polen, calcula la probabilidad de que:

a) Que efectivamente haya presencia al haber dado positivo el sensor.

b) Que hay presencia al haber dado negativo el sensor.

c) De que haya polen y el sensor dé positivo.

d) Que no haya polen y el sensor dé negativo.

19. La probabilidad de que la bolsa suba un entero en un día es $\frac{1}{3}$ y de que baje un entero $\frac{2}{3}$. Las alzas y bajas son independientes de un día a otro. Considera X la variable que da la posición de la bolsa al cabo de 4 días, sabiendo que el día 0, $X = 100$. Se pide:

    a) función de probabilidad de X

    b) Esperanza de X

    c) Probabilidad de que haya subido subido la bolsa al cabo de 4 días.

20. En una sala con diez servidores se ha detectado un ruido excesivo que denota mal funcionamiento. Supongamos que 4 de estos 10 servidores tienen ese mal funcionamiento mientras que los otros 6 entran dentro de lo aceptable.Si se examinan al azar 5 de estos 10 servidores y se define la variable aleatoria X: *número de servidores defectuosos en la muestra*, indicar

    a) La distribución de la variable X

    b) La probabilidad de que no todos sean defectuosos.

    c) La probabilidad de que, a lo sumo, 4 sean defectuosos.

21. La compañía de vuelos JetProb sabe que el 4 % de los pasajeros que reserva un viaje Alicante-Mallorca no se presenta al vuelo. Por eso, en un avión con 70 asientos decide vender 72 billetes. ¿Cuál es la probabilidad de que puedan viajar todos los pasajeros que se presentan a embarcar? Y ¿Cuál la probabilidad de que tenga que afrontar quejas? Si esta política se sigue durante una semana, ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos un día, deba afrontar quejas?

22. En un proyecto de Learning Analytics se han definido el 30 % de los trabajos como *de calidad* y el 50 % como regulares. El 70 % del alumnado está en, al menos, uno de los proyectos. Si consideramos 5 alumnos, calcula:

    a) Probabilidad de que al menos dos del alumnado seleccionado estén exactamente en uno de esos proyectos.

    b) Probabilidad de que a lo sumo, tres estén en ambos proyectos proyectos.

    c) Probabilidad de que todos los seleccionados estén en alguno de estos proyectos.

1.4. Poisson

23. En el sistema de venta de entradas online de una cantante de éxito, el número de compradores en una hora sigue una Poisson de media 1.500. Calcula la probabilidad de que:

    a) Durante un día se vendan más de 30.000 entradas.

    b) Las dos primeras horas se vendan menos de 2.000 entradas.

24. Se estima que el número de usuarios que entran en ChatGbm en una hora sigue una distribución Poisson con $\lambda = 20$. El coste del acceso es de 2 €.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa ingrese más de 15 €la primera hora.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa ingrese más de 500 €el primer día.

c) Cuando ha ingresado 100 €¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que se produzca un aumento en el ingreso realizado?

25. Demuestra que si $X \sim Poi(\lambda)$ entonces se cumple que $P(X = k+1) = \frac{\lambda}{k+1} P(X = k)$

26. El número de automóviles que acuden a una ITV cada hora sigue una distribución Poisson de parámetro 10, siendo el 30 % el número de vehículos que no la pasan.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno pase la ITV en una hora?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen la ITV más vehículos que los que no la pasan?

    c) ¿Cuál es la función de probabilidad del número de vehículos que no pasan la ITV en una hora?

1.5. Uniforme

27. En una v.a. uniforme se sabe que su valor esperado es 15 y que $P(13 \leq x \leq 13.5) = 0.55$, halla su varianza y $P(X \leq 15)$

28. Un repartidor de *GloGlo* debe entregar un paquete a las 10 de la mañana. A consecuencia del tráfico, el tiempo que tarda en recorrer el trayecto oscila entre 35 y 45 minutos. ¿A qué hora debe partir para el tregar el paquete puntualmente con probabilidad del 0.85?

1.6. Exponencial

29. La duración del altavoz del asistente personal de *MiAlexia* y de *PearPod* se modela con una v.a. exponencial. Si el 10 % del mercado lo tiene *MiAlexia* con una duración media de 20.000 horas y el resto del sector lo tiene *PearPod* con una media de 50.000 horas, halla:

    a) La probabilidad que sea de *MiAlexia* sabiendo que su altavoz ha superado las 35.000 horas.

    b) Proporción de altavoces que fallan antes de las 60.000 horas.

    c) Probabilidad de que un altavoz que ya ha superado las 20.000 horas, supere finalmente las 40.000 horas.

30. Sabiendo que $X \sim Exp(\lambda)$, halla la distribución de $Y = CX$.

1.7. Normal

31. Sea $X \sim N(5, \sigma = 10)$. Calcula

    a) $P(X < 0), P(X > 10), P(X \geq 15)$

    b) $P(-5 < X < 30), P(-5 \leq X \leq 30), P(-20 < X \leq 15)$

    c) El valor de x que cumple que $P(X > x) = 0.05$

32. La distribución de pesos entre el alumnado de la UA sigue una distribución normal con $\mu = 75$ y $\sigma = 7$.

    a) Halla la probabilidad de un alumno elegido al azar pese más de 95 kilos.

    b) Estimar el número de alumnos de entre los 30.000 de la UA , con peso entre 80 y 95 alumnos.

    c) ¿Qué peso no superan el 10 % de los alumnos?

d) Si 10 alumnos entran en el ascensor del edificio de la Politécnica I, ¿Qué probabilidad hay de que se superen los 800 kilos que soporta el ascensor? ¿Y si son 8 alumnos?

33. El trayecto de la Playa de San Juan a la UA suele tardar un promedio de 24 minutos con una desviación de 3.8 minutos. Sabemos que la duración se ajusta a una distribución normal. Calcula:

34. Probabilidad de que hoy tarde al menos media hora en llegar a la UA desde la Playa.

35. Si la clase empieza a las 15:00 y salgo a las 14:45, ¿Qué probabilidad hay de llegar tarde?

36. Si sales de la playa a las 14:35 y ese día hay tarta entre las 14:45 y las 15:00, ¿Qué probabilidad hay de quedarte sin tarta?

37. Calcula la probabilidad de que 2 de los siguientes tres traslados duren menos de media hora.

38. En el afán de clasificar LLMs, se ha establecido un coeficiente de inteligencia para dichos modelos. Se ha constatado que los LLMs americanos tienen un coeficiente de media 100 y desviación 10 mientras que los europeos tienen media 105 y desviación 12. Todos tienen un comportamiento *normal*. Elegido un LLM al azar, se ha constatado que su coeficiente es superior a 120. Bajo ese supuesto de *normalidad* cuál es la probabilidad de que el LLM sea europeo? Elegido al azar un LLM americano y otro europeo ¿Cuál es la probabilidad de que el coeficiente de inteligencia del americano sea superior al del europeo?

39. Una empresa antivirus está desarrollando el antivirus a tres tipos nuevos que han aparecido en el mercado (A,B y C). Acabamos de recibir una muestra de 3,2 y 5 ejecutables respectivamente, pero no los sabemos distinguir. La probabilidad de que el virus A corrompa el servidor de pruebas es $P(|X| < 4)$, donde $X \sim N(3,5)$. La probabilidad de que B corrompa el servidor es $P(Y \leq 3)$ donde $Y \sim B(5, 0.7)$. Por último la probabilidad de que el virus C lo corrompa es $P(W \leq 5)$ donde $W \sim Poi(4)$. Elegimos un virus al azar y lo testeamos en el servidor y finalmente se corrompe. ¿Cuál es el tipus más probable que hemos podido utilizar?

1.8. Para nota

40. Un sensor de temperatura debe tener longitud $500mm$. En el proceso de fabricación, y una vez calibrada la máquina para que fabrique el sensor con la longitud L, se produce un error obteniendo longitud $L + X$, donde $X \sim N(0, \sigma = 3mm)$. En caso de obtener un sensor de longitud inferior a 500 mm, la pieza se descarta y se pierde. Si es mayor, la pieza se acepta, pero se pule hasta obtener los 500 mm, perdiéndose por tanto el exceso obtenido. Calcula la longitud L a la que debe calibrarse la máquina que los fabrica para minimizar el valor esperado de pérdidas de material.