Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 1

DFESTS

UA UNIVERSITAT D'ALACANT UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

© Protegidos derechos de autor

TEMA 1. INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

PROBLEMAS

1.1. Señales, sistemas y procesado de la señal

El estudio de *Señales y Sistemas* es fundamental en la formación de un Ingeniero, ya que proporciona los conocimientos esenciales sobre cómo analizar, representar y procesar **señales.** En un mundo cada vez más digitalizado, las señales son la base de la información con la que se trabaja en los **sistemas** de comunicación, control o computación.

En el ámbito de la **inteligencia artificial**, el procesamiento de señales constituye uno de los principales pilares tecnológicos. Los algoritmos de IA, como las redes neuronales profundas y los sistemas de aprendizaje automático, dependen en gran medida de técnicas avanzadas de análisis y procesamiento de señales para extraer patrones, características relevantes y tomar decisiones en base a datos complejos.

El avance significativo en la tecnología digital de los ordenadores y en la fabricación de circuitos integrados ha permitido, en los últimos años, un desarrollo impresionante en el procesado digital de señales; revolucionando multitud de sectores como la medicina, las telecomunicaciones, el entretenimiento, la automatización industrial, la seguridad y, por supuesto, la IA.

Aplicaciones del procesado digital de la señal

- **Astronomía**
  - Mejora de imágenes espaciales
  - Compresión de datos
- **Medicina**
  - Diagnóstico a partir de imágenes
  - Análisis de electrocardiogramas
  - Almacenamiento y recuperación de datos de imágenes médicas
- **Actividad Comercial**
  - Compresión de imagen y sonido para presentaciones multimedia
  - Efectos especiales en present.
  - Videoconferencia
- **Telefonía**
  - Compresión de datos y voz
  - Reducción de eco
  - Multiplexación de señales
  - Filtrado
- **Fuerzas Armadas**
  - Radar
  - Sonar
  - Comunicación segura
- **Industria**
  - Búsqueda mineral y pretrolífera
  - Control y monitorización de procesos industriales
  - Herramientas de diseño industrial
- **Ciencia**
  - Análisis y registro de seísmos
  - Adquisición de datos
  - Análisis espectral
  - Simulación y modelado

Una **Señal** se define como la representación eléctrica de una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o variables independientes.
Mientras que un **sistema** es un dispositivo físico que realiza una determinada operación sobre la señal.

Ejemplos de señales

Señal de audio

Fotografía

1.2. Clasificación de señales

Existen diferentes clasificaciones de las señales, pero nos centraremos en los siguientes aspectos:

1.- En cuanto a los valores de **tiempo** en las que están definidas (de tiempo continuo y de tiempo discreto).

- **Señal de tiempo continuo**, definidas para cada valor de tiempo y toman valores en un intervalo continuo.

- **Señal tiempo discreto**, definidas sólo para valores discretos (instantes) de tiempo.

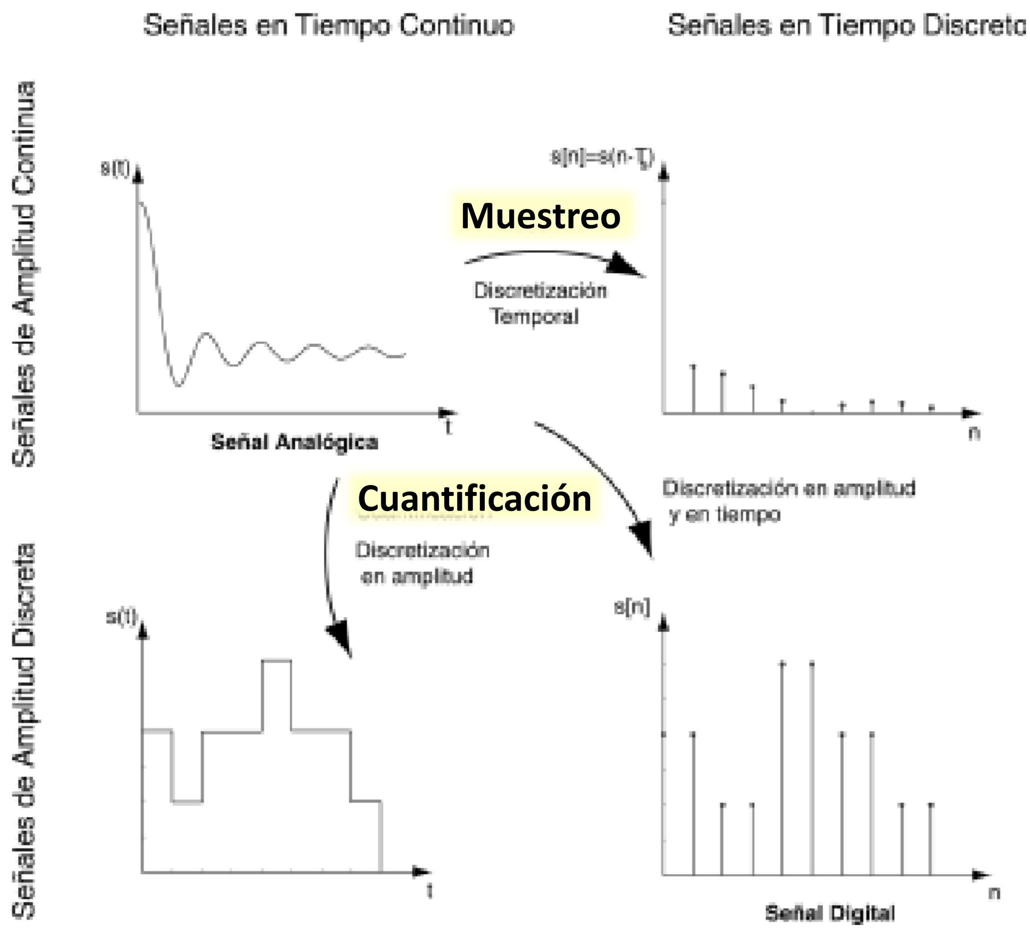
2.- En cuanto a los **valores** que puede tomar una señal (valores continuos o discretos).

- **Señal de valor continuo**, si toma todos los valores posibles de un rango.

- **Señal de valor discreto**, sólo toma valores dentro de un conjunto finito.

Una señal de tiempo discreto que toma un conjunto finito de valores discretos, se llama señal digital.

Clasificación de las señales en **4 categorías**: dependiendo de los valores que toman las señales en sí, y los valores que toman las respectivas variables independientes.



3.- En cuanto al <u>**tipo** de valores que puede tomar</u>

Si los valores que toma la señal son reales, entonces se dice que se tiene una señal **real.**

Si los valores que toma la señal son complejos, entonces se tiene una señal **compleja.**

SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO –analógicas- (SINUSOIDALES) $\begin{cases} REALES \\ COMPLEJAS \end{cases}$

SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO –digitales- (SINUSOIDALES) $\begin{cases} REALES \\ COMPLEJAS \end{cases}$

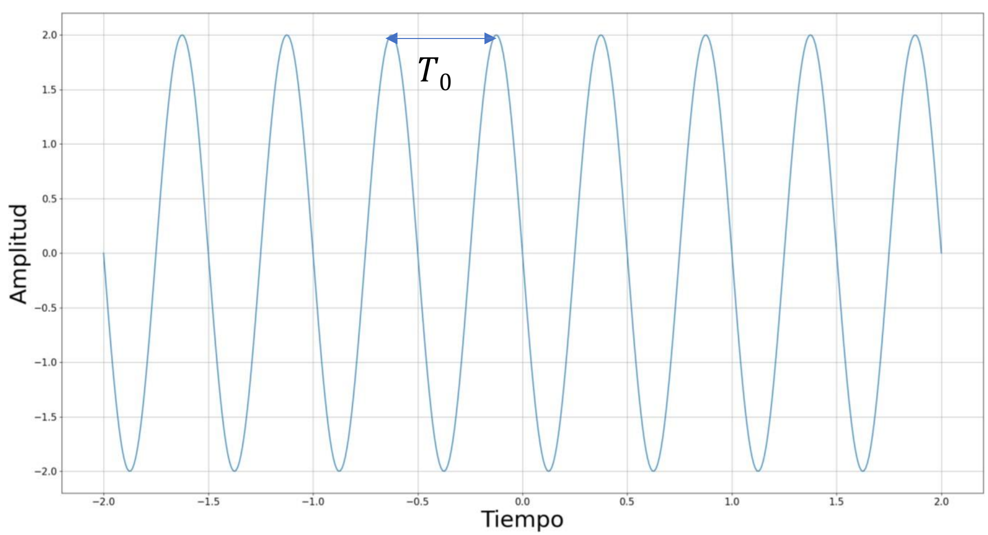
A continuación, se estudiarán las características que definen cada uno de los 4 tipos de señales sinusoidales.

1.2.1. Señales sinusoidales en tiempo continuo - REALES

Podemos modelar matemáticamente una señal sinusoidal (armónica simple) como:

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos\ \omega_0 t + \Phi_0\,,\ -\infty < t < \infty, x\ \ t\ \in \mathbb{R}}$$

$T_0 = 1/f_0$, es el periodo fundamental



- t es la variable independiente continua
- A es la amplitud de la sinusoide
- ω_0 es la pulsación de la sinusoide (rad/s), $\omega_0 = 2\pi f_0$, siendo f_0 la frecuencia fundamental (en Hz)
- Φ_0 es la fase de la sinusoide (rad)

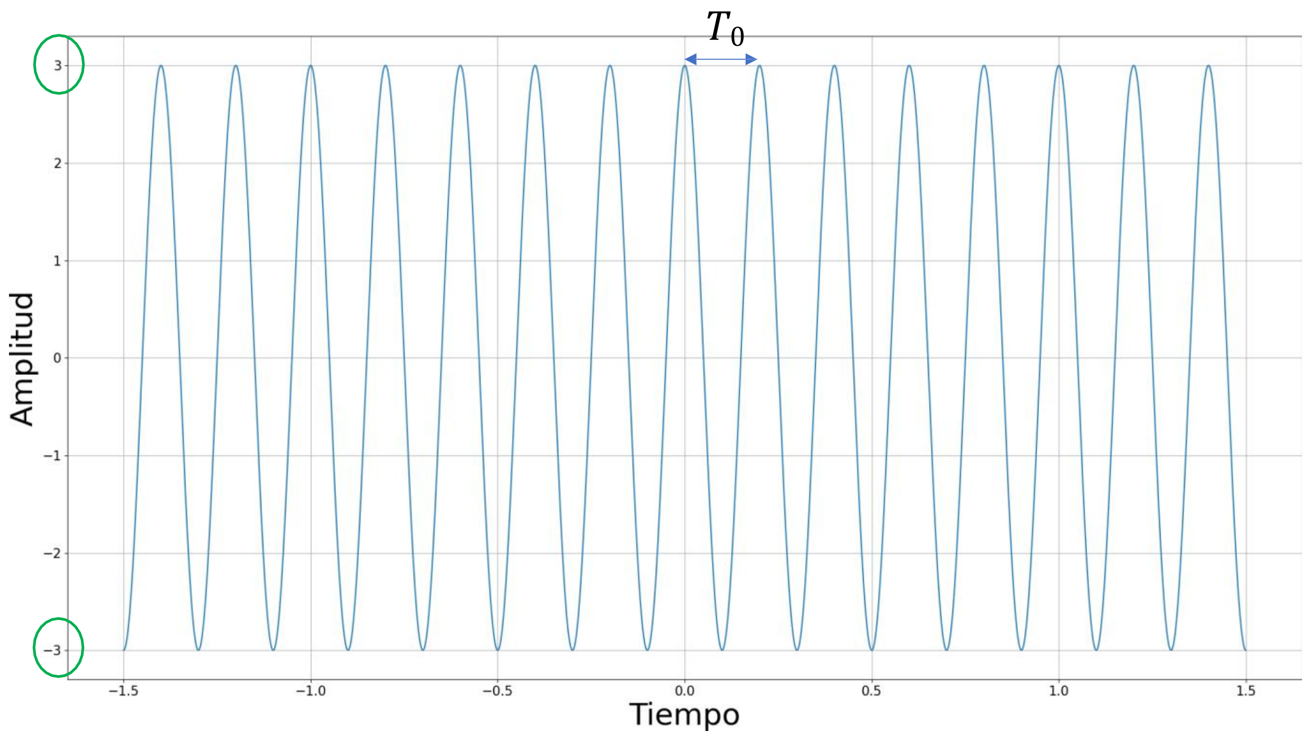
A partir de la expresión general, podemos ver

$$X(t) = A\ \cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

con $t \in [-\infty, \infty]$. Variable independiente

Un ejemplo:

$$\mathbf{X}(t) = 3\cos(2\,\pi \cdot 5 \cdot t + 0)$$



A = 3

$f_0 = 5\ Hz$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 10\pi\ rad/s$

$\Phi = 0$

En 1 s hay 5 ciclos

de la sinusoide

Propiedades (SSTC-R)

1. Todas las señales sinusoidales reales de tiempo continuo **son periódicas**, con frecuencia $\boldsymbol{f_0}$

$$x(t + T_0) = x(t),\ \text{siendo}\ T_0 = 1/f_0\ \text{el periodo fundamental de la señal.}$$

2. Si dos señales sinusoidales reales de tiempo continuo tienen **frecuencias ($\boldsymbol{f_0}$) distintas**, entonces las señales son distintas.

3. El signo de la frecuencia no influye en la descripción de la señal (podemos trabajar siempre con frecuencias positivas). **No hay frecuencias negativas**.

$$x(t) = A \cdot \cos(-\omega_0 t + \Phi_0) = A \cdot \cos(\omega_0 t - \Phi_0) \rightarrow \cos(X) = \cos(-X)$$

$$x(t) = A \cdot \mathrm{sen}(-\omega_0 t + \Phi_0) = -A \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t - \Phi_0) \rightarrow sen(-X) = -sen(X)$$

1.2.2. Señales sinusoidales en tiempo continuo - COMPLEJAS

Una señal sinusoidal en tiempo continuo y compleja (o exponencial) tomará valores en el conjunto de los números complejos y podemos expresarla como:

$$\boxed{x(t) = A \cdot e^{j(\omega 0 t + \Phi 0)}, -\infty < t < \infty, x(t) \quad \in \mathbb{C}}$$

Al igual que para el caso real:

- t es la variable independiente continua,
- A es la amplitud de la sinusoide,
- ω_0 es la pulsación de la sinusoide (rad/s), $\omega_0 = 2\pi f_0$, siendo f_0 la frecuencia fundamental (en Hz),
- Φ_0 es la fase de la sinusoide (rad)

Podemos descomponer la señal en sus componentes real e imaginaria:

$$\boxed{x(t) = A \cdot \cos\ (\omega_0 t + \Phi_0) + \mathrm{j} \cdot A \cdot \mathrm{sen}\ (\omega_0 t + \Phi_0)}$$

Sin embargo, **el signo de la frecuencia (ω_0) ahora sí que influye** para caracterizar la señal y tomará valores continuos desde $-\infty$ hasta ∞.

Propiedades (SSTC-C)

1.- Al igual que las reales, **son todas periódicas** con periodo T_0:

$x(t + T_0) = X(t)$

$T_0 = 1/f_0$ Periodo de la señal

2.- Las frecuencias pueden ser tanto **positivas como negativas**:

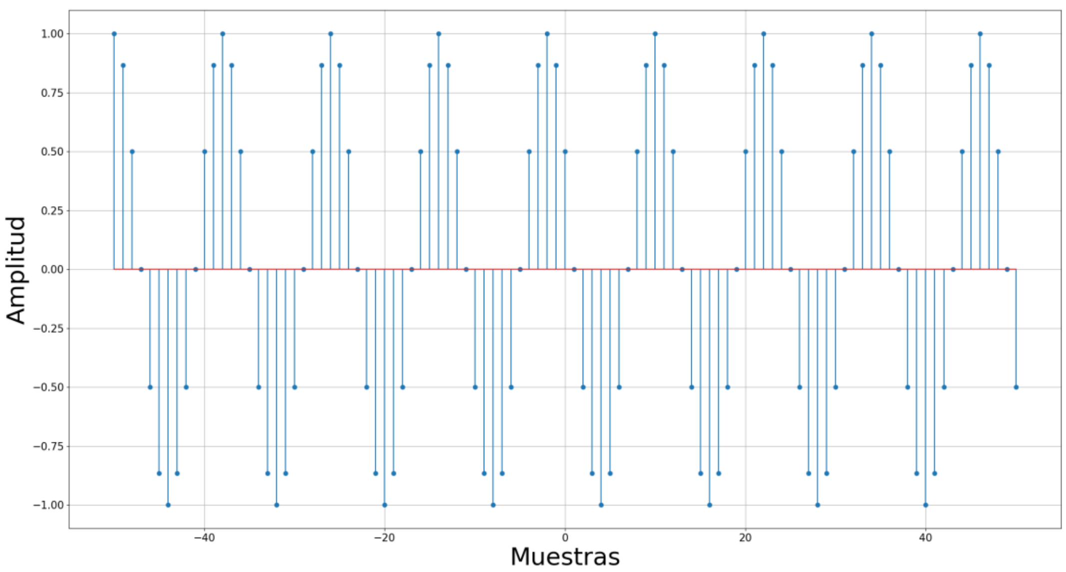
$-\infty \leq f_0 \leq \infty$

3.- El signo de la frecuencia (f_0), genera una señal diferente a la que obtendríamos con la misma frecuencia, pero de signo opuesto.

1.2.3. Señales sinusoidales en tiempo discreto - REALES

Matemáticamente, podemos expresar una señal sinusoidal real definida en tiempo discreto como:

$$\boxed{x[n] = A \cdot \cos(\omega_0 n + \Phi_0) \quad, n \in \mathbb{Z}}$$



- n es la variable independiente discreta o número de muestra,
- A es la amplitud de la sinusoide,
- ω_0 es la pulsación de la sinusoide (rad/utd), $\omega_0 = 2\pi f_0$, siendo f_0 la frecuencia fundamental (en $ciclos/utd$),
- Φ_0 es la fase de la sinusoide (rad)

Propiedades (SSTD-R)

1.- A diferencia de las definidas en tiempo continuo**, no todas las sinusoides reales en tiempo discreto son periódicas.** La señal discreta $x[n]$ es periódica con periodo N_0 si y sólo si:

$$x\,[n+N_0] = x[n]\ ,\forall n \in \mathbb{Z}$$

N_0 se denomina periodo fundamental de la señal y es el entero más pequeño que verifica la igualdad anterior.

Una sinusoide discreta será periódica si y sólo si su frecuencia fundamental es un número racional.

$$f_0 = \frac{k}{N_0}, k \in \mathbb{Z}, N_0 \in \mathbb{Z}^+, f_0 \in \mathbb{Q}$$

Para comprobar si una señal sinusoidal en tiempo discreto es o no periódica, seguimos los siguientes pasos:

1.- Se calcula fd y se averigua si es racional

2.- Se escribe fd como una fracción

3.- Se simplifica la fracción

4.- Se calcula $N_0 = \min \{ \frac{K}{\text{fd}} \}$

Con k entero y
N_0, el entero positivo más pequeño $\in \mathbb{Z}$

EJEMPLO 1:

Si $\omega d = {}^{4}/_{3}\,\pi$; $\text{fd} = \frac{\omega d}{2\pi} = \frac{{}^{4}/_{3}\,\pi}{2\pi} = \frac{4}{6} \in \boldsymbol{Q}$

$N_0 = \min \{ \frac{K}{\text{fd}} \} = \min \{ \frac{K}{{}^{4}/_{6}} \} = \min \{ \frac{6}{4}\, k \}_{K=4} = 6$ utd   Error, falta simplificar

Por *lo tanto* simplificamos, $\text{fd} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. $N_0 = \min \{ \frac{K}{{}^{2}/_{3}} \} = \min \{ \frac{3}{2}\, k \}_{K=2} = 3$ utd

EJEMPLO 2:

$$X(n) = \cos\left(\pi/_6\, n + \pi/_3\right)$$

¿La señal es periódica? ¿cuál es su periodo?

$\omega d \rightarrow fd \rightarrow$ ver si es racional.

$$\omega\mathrm{d} = \pi/_6\,; \quad \mathrm{fd} = \frac{\omega\mathrm{d}}{2\pi} = \frac{\pi/_6}{2\pi} = \frac{1}{12} \in \boldsymbol{Q}$$

Porque es una fracción

X[n] es periódica

Y su periodo es:

$$\mathrm{N_0} = \min\left\{\frac{K}{\mathrm{fd}}\right\} = \min\left\{\frac{K}{1/_{12}}\right\} = \min\{12\,\mathrm{k}\}_{K=0,1,2,3,4} =$$

$$\min\{12\,\mathrm{k}\}_{K=1} = 12 \text{ utd}$$

2.- Dos señales sinusoidales reales en tiempo discreto con la misma amplitud $A_1 = A_2$ y la misma fase $\phi d_1 = \phi d_2$ son idénticas, si sus frecuencias discretas cumplen:

$$\left\{ \begin{array}{c} fd_2 = fd_1 + k \\ \omega d_2 = \omega d_1 + 2\pi k \end{array} \right\}$$

k es un entero

$fd_1 = 0{,}1; fd_2 = 1{,}1; fd_3 = 5{,}1$

$+1$ $\quad +5$

$$\omega d1 = \pi \rightarrow \omega d2 = 3\pi = \omega d1 + 2\pi \cdot 1$$

$$X_1[n] = A_1 \cos(2\pi fd_1 n + \phi d_1)$$

$$X_2[n] = A_2 \cos(2\pi fd_2 n + \phi d_2)$$

$\rightarrow$ $A_1 = A_2$, $\phi d_1 = \phi d_2$, $fd_2 = fd_1 + k$ Con $k \in \boldsymbol{Z}$

$$X_2[n] = A_2 \cos(2\pi fd_2 n + \phi d_2) = A_1 \cos(2\pi (fd_1 + k)n + \phi d_1) =$$

$$A_1 \cos(2\pi fd_1 n + \cancel{2\pi k n} + \phi d_1) = X_1[n]$$

Son equivalentes, porque es como si quitáramos 2πkn

3.- Dos señales sinusoidales reales en tiempo discreto que tienen amplitud A_1=A_2 y fases $\phi_1 = -\phi_2$ son idénticas, si cumplen:

$$\left\{ \begin{array}{l} fd_2 = K - fd_1 \\ \omega d_2 = 2\pi k - \omega d_1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} fd_2 = 0{,}9 \equiv fd_1 = 0{,}1 \\ fd_2 = 1 - 0{,}9 = 1 - fd_1 \end{array}$$

$$X_1[n] = cos(0{,}1\pi t + {}^{\pi}/_{4})$$

$$\equiv$$

$$X_2[n] = cos(0{,}9\pi t - {}^{\pi}/_{4})$$

DFESTS

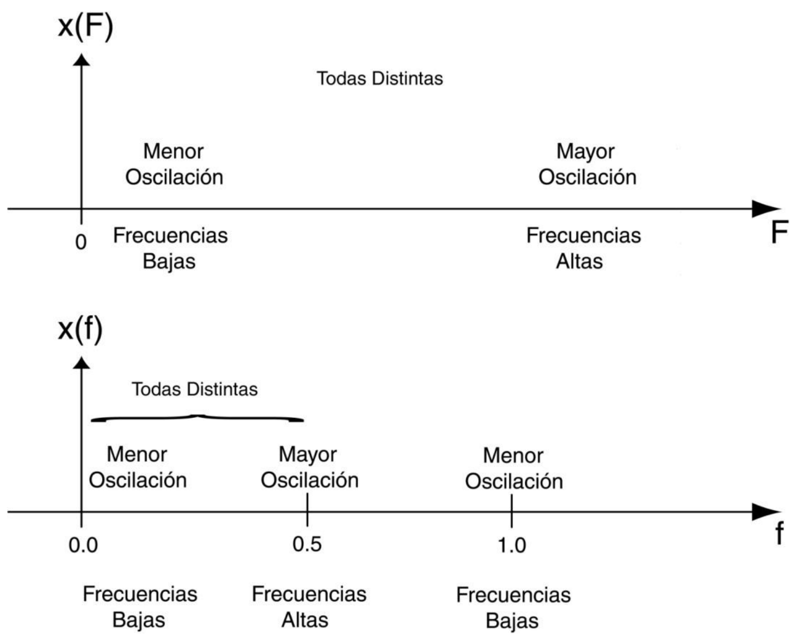
De forma general, las sinusoides de frecuencias discretas f_{01} y f_{02} son idénticas si cumplen:

$$f_{02} = k - f_{01}$$
$$\omega_{02} = 2k\pi - \omega_{01}$$

Siendo k un entero

Tiempo continuo

Tiempo discreto



1.2.4. Señales sinusoidales en tiempo discreto – COMPLEJAS

De forma general se expresa como:

$$X(n) = Ae^{j(2\pi\, fdn+\phi d)} = Ae^{j(\omega d+\phi d)} = A\cos(2\pi\, fd\, n + \phi d) + A\, j\, sen(2\pi\, fd + \phi d)$$

Propiedades (SSTD-C)

1. Periódica si y sólo si su frecuencia fundamental f_0 es racional.
   Su periodo fundamental es $N_0 = min\left(\frac{k}{f_0}\right)$, con N_0 y k números enteros.

2. Dos sinusoides complejas son idénticas si se cumple que sus frecuencias discretas están separadas en un entero (o sus pulsaciones están separadas por un múltiplo entero de 2π).

   Ejemplo:
   $$x_1[n] = e^{j(0.1\cdot 2\pi n)} \rightarrow \omega_{01} = 0.2\pi$$
   $$x_2[n] = e^{j(1.1\cdot 2\pi n)} \rightarrow \omega_{02} = 2.2\pi = 0.2\pi + 2\pi = \omega_{01} + 2\pi$$

3. El rango de frecuencias discretas que corresponde a sinusoides complejas es:
   $$-0{,}5 < f_0 \leq 0{,}5 \;\; \text{ó} \;\; -\pi < \omega_0 \leq \pi$$
   Equivalentemente:
   $$0 < f_0 \leq 1 \;\; \text{ó} \;\; 0 < \omega_0 \leq 2\pi$$

1.2.5. Señales de tiempo continuo y señales de tiempo discreto: Resumen

En cuanto al rango de frecuencias

En tiempo continuo:

- Sinusoides reales: $0 \le f < +\infty$
- Sinusoides complejas: $-\infty < f < +\infty$

En tiempo discreto:

- Sinusoides reales: $0 \le f \le +0.5$

  Las sinusoides de frecuencias f_d y f_d' son iguales si

  $f_d' = k + f_d$ $\quad$ k *entero* (señales idénticas)

  $f_d' = k - f_d$ $\quad$ k *entero* (señales de igual oscilación, pero con distinta fase)

- Sinusoides complejas: $-0.5 < f_d \le +0.5$

  $f_d' = k + f_d$ $\quad$ k *entero*

En cuanto a la periodicidad

En tiempo continuo:

Siempre periódicas. De periodo $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$ *segundos*.

En tiempo discreto:

No siempre son periódicas, sólo lo son si f_d es racional. En ese caso el periodo N_0 viene dado por la siguiente expresión:

$$N_0 = \min\left\{\frac{k}{f_d}\right\} \textit{muestras}, \qquad \textit{con } N_0 \in \mathrm{Z}^+, k \in \mathrm{Z}.$$

TEMA 1. INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

PROBLEMAS

"Si puedes imaginarlo, puedes conseguirlo". Los números imaginarios surgieron de una abstracción mental, como recurso para resolver problemas considerados imposibles en su momento.
El matemático italiano Gerolamo Cardano, concibió los números complejos sobre 1545.

1.1. NÚMEROS COMPLEJOS

1.1.1. Formas de expresión

En matemáticas la unidad imaginaria se denota por **i**, en ingeniería por **j**

Unidad imaginaria:

$$j = \sqrt{-1}$$
$$j^2 = -1$$

Forma cartesiana: **(a,b)**

a= p. real , **b**= p. imaginaria

Forma binómica: **a + j·b**

Forma trigonométrica:

r cos ϕ + r j sen ϕ

a= r cos ϕ, b= r sen ϕ

Forma polar (euler): $\mathbf{r \cdot e^{j\phi}}$

r- módulo , ϕ - fase

r = $\sqrt{a^2 + b^2}$, ϕ = $arctan\ \frac{b}{a}$ $(*)$

**Expresión válida si ϕ se encuentra en el 1er o 4º cuadrante del plano, si no, se añade π. (Ver apéndice)*
Arctang = Tan^{-1} (La arcotangente es la inversa de la Tangente de un ángulo). ***a>0***

Conjugado:

(a+jb)* = a-jb

1.1.2. Operaciones

Suma y resta de números complejos. Se utiliza la forma **binómica** o cartesiana.

$$(a+jb) \pm (c+jd) = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

Producto y división de números complejos. Se utiliza la forma **polar** o euleriana.

$$r_1 e^{j\phi_1} \cdot r_2 e^{j\phi_2} = (r_1 \cdot r_2) e^{j(\phi_1+\phi_2)}; \qquad \frac{r_1 e^{j\phi_1}}{r_2 e^{j\phi_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{j(\phi_1-\phi_2)}$$

Identidades trigonométricas

Ecuaciones trigonométricas útiles para los ejercicios de Señales y Sistemas:

Relación entre sen, cos y e (relación de Euler)

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

Relación entre sen y cos

$$\cos\phi = \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\phi = \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Funciones exponencial y logarítmica

Propiedades generales de las funciones exponenciales en base ***e*** :

$$e^{\alpha} \cdot e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} = e^{\alpha-\beta}$$

$$\left(e^{\alpha}\right)^{\beta} = e^{\alpha\beta}$$

Problema 1. Pasar de forma cartesiana a forma polar

1 + j

(1+1j) $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{\mathbf{2}}$

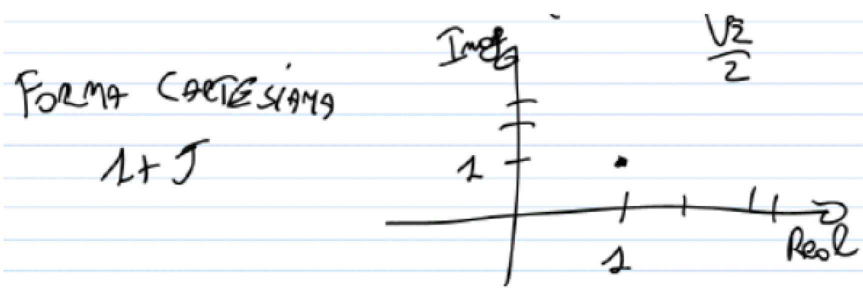
$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} = \mathbf{45°}$$

$$\boxed{\sqrt{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{e}^{\,\mathbf{j}\,\boldsymbol{\pi}/\mathbf{4}}}$$

Podemos volver a la FC aplicando: $r \cdot e^{j\phi} = r(\cos\phi + j \operatorname{sen}\phi)$

$\sqrt{2} \cdot e^{j\,\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + j \operatorname{sen}(\pi/4)) =$

$\sqrt{2}\,(\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}\sqrt{2}/2) = 2/2 + j\,2/2 = \mathbf{1 + j}$

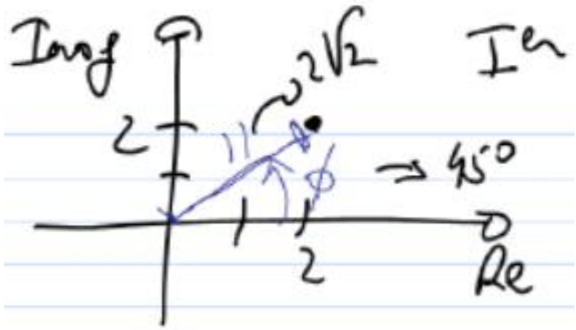


Problema 2. 2 + 2j → $r \cdot e^{j\phi}$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = \mathbf{45°}$

$\boxed{\mathbf{2\sqrt{2} \cdot e^{j\,\pi/4}}}$

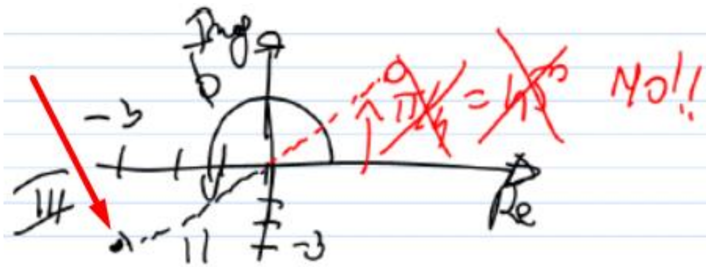


Problema 3. -3 -3j → r · $e^{j\phi}$

r = $\sqrt{a^2+b^2}$ = $\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$ = $\sqrt{18}$ = $\mathbf{3\sqrt{2}}$

ϕ = arctan $\left(\frac{b}{a}\right)$ = arctan $\left(\frac{-3}{-3}\right)$ = $\frac{\pi}{4}$ = **45°**

Mal



Según la calculadora la arctan(1) = 45°, pero al estar la fase en el 3er cuadrante, por ser (-3,-3), hay que sumarle π.

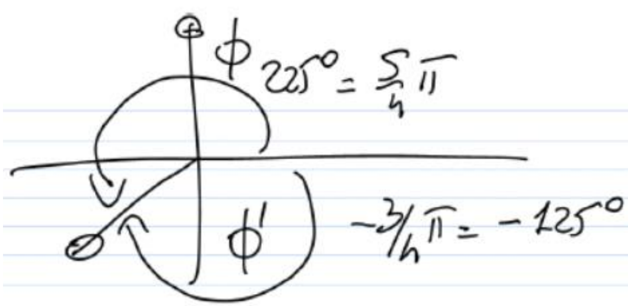
Queda ϕ= $\frac{\pi}{4}$ + π = $\frac{5\pi}{4}$ = 45° + 180° = **225°**

Ver apéndice

Por lo tanto ϕ ∈ $[-\pi, \pi]$

ϕ = resultado $+\pi$ = $\frac{\pi}{4}$ +π = $\frac{5\pi}{4}$

ϕ = resultado $-\pi$ = $\frac{\pi}{4}$ $-\pi$ = $\frac{-3\pi}{4}$



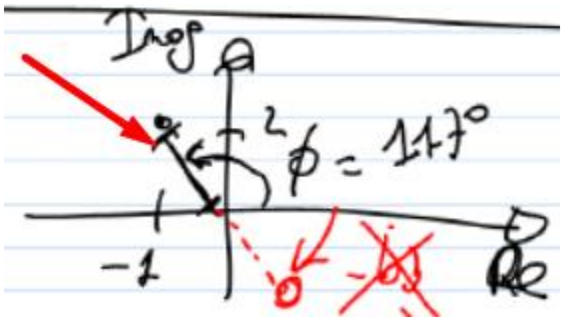
$$\boxed{3\sqrt{2}\ \cdot \mathbf{e}^{\,j\,5\pi/4}}$$

Problema 4. -1 + 2j → $r \cdot e^{j\phi}$

r = $\sqrt{a^2 + b^2}$ = $\sqrt{(-1)^2 + (2)^2}$ = $\sqrt{\mathbf{5}}$

ϕ = arctan $\left(\frac{b}{a}\right)$ = arctan $\left(\frac{2}{-1}\right)$ = arctan (-2) = -1,1 ; ϕ = **-63**° Mal

Al estar la fase en el 2º cuadrante,
hay que sumarle π.
Queda ϕ= -1,1 + π = 2,04 o
ϕ = -63 +180 = **117°**



$$\boxed{\sqrt{\mathbf{5}} \cdot \mathbf{e}^{\,j\,117^{\circ}}}$$

Problema 5. Expresar en forma binómica (a+jb) los siguientes números complejos:

a) $(1+j)^2$

Aplicando: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Y $j^2 = -1$

$(1+j)^2 = 1+2j+j^2 = 1+2j-1 =$ **2j** (No tiene parte real, a=0)

b) $\frac{1}{(1+j)}$

Multiplicando y dividiendo por el mismo valor Y aplicando $j^2 = -1$

$$\frac{1}{(1+j)} = \frac{1}{(1+j)}\frac{(1-j)}{(1-j)} = \frac{(1-j)}{(1-j+j-j^2)} = \frac{(1-j)}{(1-(-1))} = \frac{(1-j)}{(2)} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j = \frac{1}{2}(1-j) = 0,5\,(1-j) = \mathbf{0,5 - 0,5\,j}$$

DFESTS

Problema 6. Calcular el módulo (*r*) y la fase (*ϕ*) del siguiente número complejo (forma polar):

a) $\frac{(1+j)}{(1-j)}$

Aplicando:

$a + j \cdot b \rightarrow r \cdot e^{j\phi}$

$\frac{r_1 e^{j\phi_1}}{r_2 e^{j\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \rightarrow a+jb$

$(1+j) \rightarrow \quad r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$(1-j) \rightarrow \quad r_2 = \sqrt{1^2 + (-1^2)} = \sqrt{2} \quad \phi_1 = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = \frac{-\pi}{4}$

$$\frac{(1+j)}{(1-j)} = \frac{\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}}{\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j(\pi/4)-(-\pi/4)} = \mathbf{1}\, \boldsymbol{e^{j(\pi/2)}}$$

Problema 7. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $3\,e^{j\pi}$

Aplicando: $e^{j\phi}$ = (cos (ϕ) + j (sen(ϕ)
cos (π) = -1, sen(π)= 0

$3\,e^{j\pi}$ = 3 ((cos (π) + j (sen (π)))= 3(-1+j·0)= -3+3·j·0 = -3+0 = **-3**

b) j + $e^{j2\pi}$

$e^{j\phi}$ = (cos (ϕ) + j (sen(ϕ)
cos (2π) = 1, sen(2π)= 0

j + $e^{j2\pi}$ = j + (cos (2π) + j (sen (2π))) = j + 1 + j · 0 = j + 1 = **1+j**

Problema 8. Calcular el módulo ***r*** y la fase $\boldsymbol{\phi}$ en radianes de los siguientes números complejos:

a) 2j

El nº complejo 2j es 0 + 2j en forma cartesiana (a+bj)
Aplicando la expresión euleriana (forma polar) $\mathbf{r} \cdot e^{j\boldsymbol{\phi}}$

$\mathbf{r} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$ $\quad$ $\boldsymbol{\phi} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{2}{0}\right)$ (no se puede)

La arctan $\left(\frac{2}{0}\right)$ no se puede calcular, pero de la **representación del nº complejo en el plano** (0,2) obtenemos $\boldsymbol{\phi} = \frac{\pi}{2}$ **rad.**

Por lo tanto, queda: $\boxed{\mathbf{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}$

En sentido inverso, a partir de la forma euleriana, también se puede obtener la cartesiana.

$$\mathbf{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(0 + j \cdot 1) = \mathbf{2j}$$

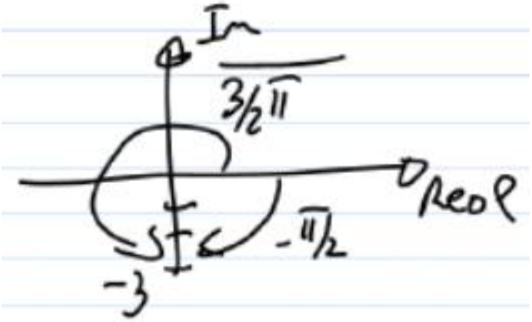
b) -3j

El nº complejo es 0 - 3j en forma cartesiana.
Aplicando la expresión euleriana (forma polar) $\mathbf{r \cdot e^{j\phi}}$

$\mathbf{r} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$

$\boldsymbol{\phi}$ = arctan $\left(\frac{b}{a}\right)$ = arctan $\left(\frac{-3}{0}\right)$ (no se puede)

En este caso la arctan tampoco se puede calcular.
Al **representar el número** (0, -3) en el eje de coordenadas vemos que ϕ es $\frac{3\pi}{2}$ rad
(también sería correcto su ángulo equivalente $-\frac{\pi}{2}$ rad)



Por lo tanto, queda: $\boxed{\mathbf{3 \cdot e^{\,j\frac{3\pi}{2}}}}$

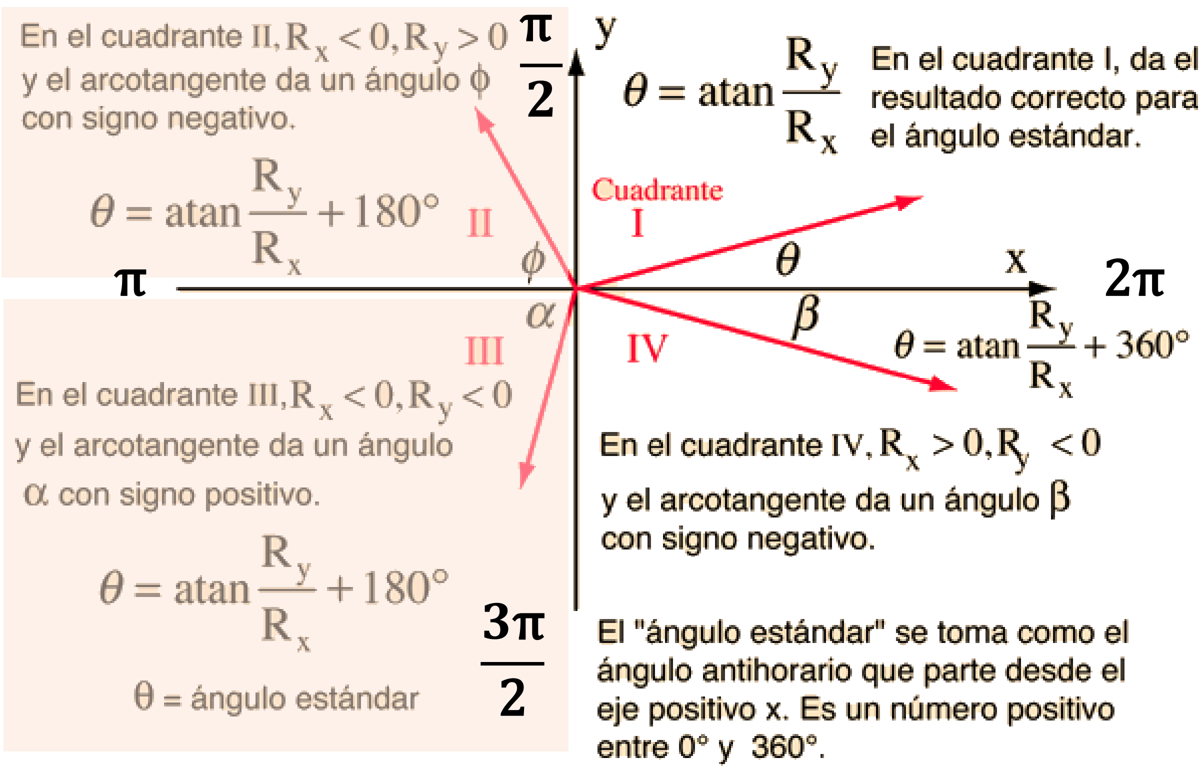
1.2.1. **Apéndices**

Apéndice 1. El problema del Arco tangente

La función arco tangente en **calculadoras y ordenadores no distinguen el cuadrante del ángulo**, porque primero calculan el argumento y luego el arco tangente**.**

Solo nos da ángulos entre -90 y 90 grados (IV y I cuadrantes). En los cuadrantes II y III hay que sumar o restar **π** al ángulo

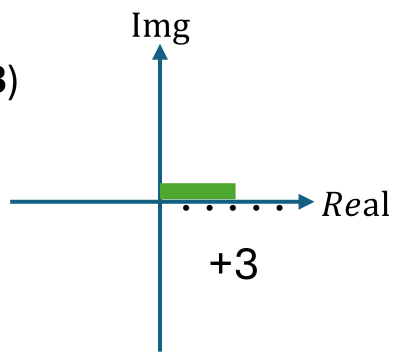
π = 180° = 3,1415926535



Apéndice 2. Representación de números reales

La representación de un número real positivo o negativo es diferente en el eje de coordenadas.

Número real positivo (**+3**)
complejo +3 +0·j



módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$r = \sqrt{3^2 + 0^2} = r = \sqrt{3^2} = 3$

fase: $\phi = arctan\,\frac{b}{a}$;

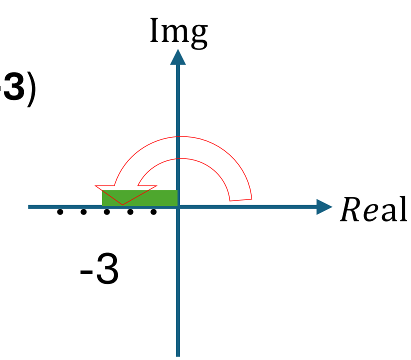
$\phi = arctan\,\frac{0}{3} = \arctan(0) = 0$

El ángulo es 0, por lo tanto, en polar $r \cdot e^{j\,\phi}$

$3 \cdot e^0 = 3 \cdot 1$

$\boxed{3}$

Número real negativo (**-3**)
complejo -3 +0·j



módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$r = \sqrt{-3^2 + 0^2} = r = \sqrt{3^2} = 3$

fase: $\phi = arctan\,\frac{b}{a}$;

$\phi = arctan\,\frac{0}{-3} = \arctan(0) = 0$

El ángulo es π, por lo tanto, en polar $r \cdot e^{j\,\phi}$ $\boxed{\mathbf{3 \cdot e^{j\pi}}}$

Podemos comprobarlo pasando de forma polar a cartesiana

$r \cdot e^{j\,\phi} = r\,(\cos\phi + j\,\mathrm{sen}\,\phi)$; $\mathbf{3 \cdot e^{j\pi}} = 3\,(cos\,(\pi) - j\,sen(\pi)) = 3(-1 - j0) = \mathbf{-3}$