Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 11

DFESTS

UA | UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez
© Protegidos derechos de autor

TEMA 4.- TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

...

4.3. Respuesta en frecuencia de los filtros ideales
4.3.1.- Filtro paso BAJO ideal
4.3.2.- Filtro paso ALTO ideal
4.3.3.- Filtro PASO BANDA ideal
4.3.4.- Filtro ELIMINA BANDA ideal
4.3.5.- Filtros con VARIAS BANDAS de paso
4.3.6. Propiedades para obtener filtros reales

4.3. Respuesta en frecuencia de los filtros ideales

Algunas de las aplicaciones de los filtros son:

- mejorar la calidad de las señales, disminuyendo el ruido
- separar las frecuencias bajas y altas en sistemas de sonido
- transmitir distintos canales de radio o televisión por un mismo medio, utilizando distintas bandas de frecuencia

Los filtros ideales son sistemas LTI que reciben el nombre según los componentes en frecuencia que dejen pasar o eliminan.

Existen 4 tipos:

1.- Filtros paso bajo

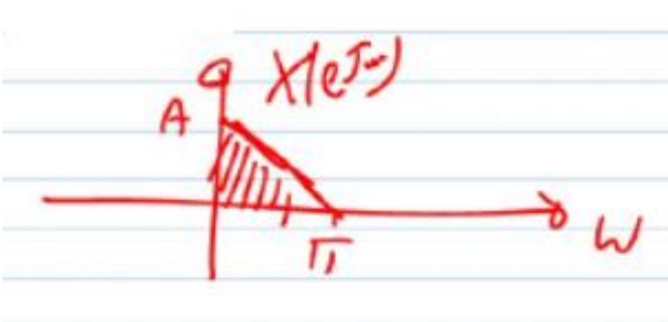
2.- Filtros paso alto

3.- Filtros paso banda

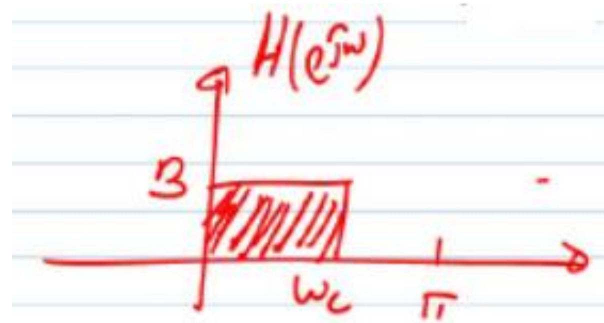
4.- Filtros elimina banda

Señales y sistemas - Teoría y problemas 11

Dada una señal



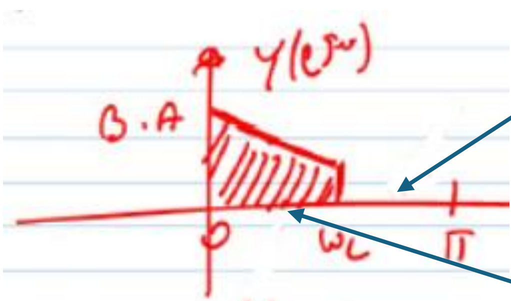
Y un filtro



$\omega_c = 2\pi \cdot f_c$ --> (pulsación de corte)
f_c --> (frecuencia de corte)

El espectro de respuesta es:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$



Componentes eliminados (banda eliminada)

$\omega_c \leq \omega \leq \pi$

→ **FILTRO PASO BAJO**

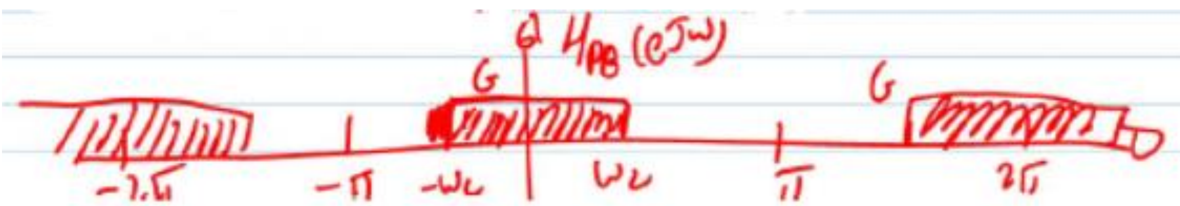
Pasan las frecuencias por debajo de ω_c

Componentes que pasan
$0 \leq \omega \leq \omega_c$

4.3.1.- Filtro paso BAJO ideal

Deja pasar las frecuencias bajas y atenúa las frecuencias altas.

Se suele utilizar para eliminar ruido en las señales.



La zona marcada, indica las frecuencias que pasan.

$$0 \leq \omega \leq \omega_c \ \ (0 \leq f \leq f_c) \ \ \Rightarrow \ \ \text{banda de paso}$$

$$\omega_c \leq \omega \leq \pi \ \ \Rightarrow \text{banda eliminada}$$

(la respuesta es simétrica para $f \leq 0 \ \ y \ \ \omega \leq 0$)

En este tipo de filtro existe solamente una banda de paso.

Expresión analítica de la respuesta en frecuencia **(FPB)**

$$H_{PB}(e^{j\omega}) = Ge^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c})$$

Centrado en $\omega = 0$

Duración $2\omega_c$ (anchura)

respuesta en frecuencia $H_{PB}(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{DTFT}^{-1}} h_{PB}(n)$ respuesta impulsiva

Ejemplo de filtro paso bajo:

Observar como en el tema Musique se utiliza un FPB para generar cambios tímbricos

0:00 (sin filtro) – **0:13** FPB – (abriendo y cerrando filtro)– **1:02** (sin filtro)

Aplicando la transformada inversa de la secuencia sinc

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega c}\right)} \xrightarrow{\text{DTFT}^{-1}} \boxed{x[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)}$$

y la propiedad de desplazamiento

$$x[n] = \delta[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} \mathrm{X}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$$

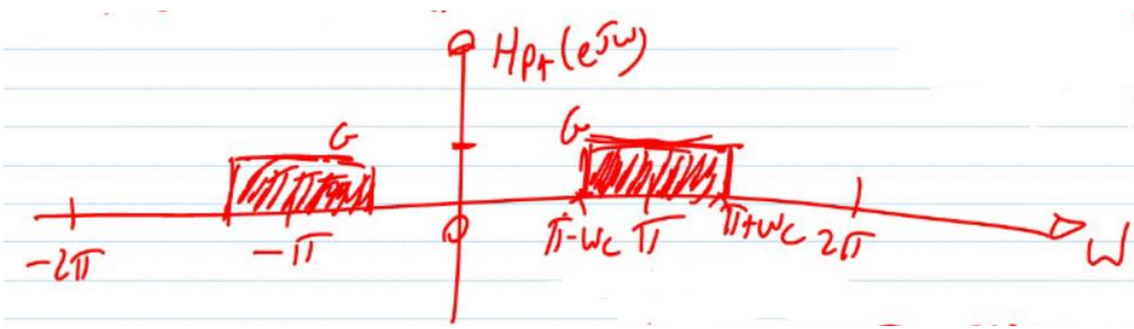
$$\boxed{h_{PB}[n] = G\,\frac{\omega_c}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(n - n_0)\right)}$$

Respuesta impulsiva de un Filtro Paso Bajo Ideal

4.3.2.- Filtro paso ALTO ideal

Deja pasar las frecuencias altas y atenúa las frecuencias bajas

Los FPA se utilizan, p.e. para redirigir las señales con frecuencias más altas a los altavoces adecuados (tweeter), en los sistemas de sonido. Igual que los FPB redirigen las frecuencias más bajas a los los (woofer).



La zona marcada, indica las frecuencias que pasan.

Centrado en $\omega = \pi$

(FPA) $$\boxed{H_{PA}(e^{j\omega}) = G e^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - \pi - 2\pi k}{2(\pi - \omega_c)}\right)}$$

Duración $2(\pi - \omega_c)$ (anchura)

Por el mismo par de transformadas que el caso anterior:

Y aplicando: DTFT[-1]

$$h_{PA}\,[n] = G\,\frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\,\left(\frac{\omega_c}{\pi}(n-n_0)\right)e^{j\omega_{0(n-n_0)}}$$

$$\boxed{h_{PA}[n] = G\,\frac{(\pi-\omega_c)}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\pi-\omega_c)}{\pi}(n-n_0)\right)e^{j\pi(n-n_0)}}$$

Respuesta impulsiva de un Filtro Paso Alto Ideal

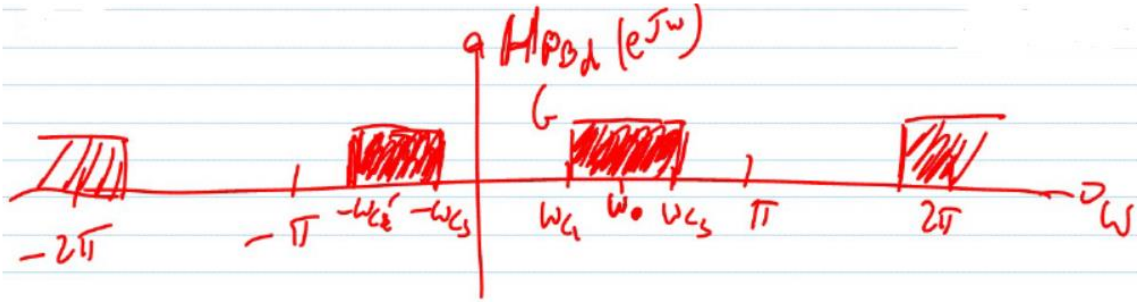
Anchura: $\omega_0 = (\pi-\omega_c)$

Desplazamiento: $\omega_0 = \pi$

4.3.3.- Filtro PASO BANDA ideal

Deja pasar cierto rango de frecuencias.

En radio y tv se pueden utilizar para separar las emisoras y canales, según la frecuencia.



La zona marcada, indica las frecuencias que pasan.

$\omega_{ci} \leq \omega \leq \omega_{cs} \quad \Rightarrow \quad$ banda de paso (con ω_0 como pulsación central)

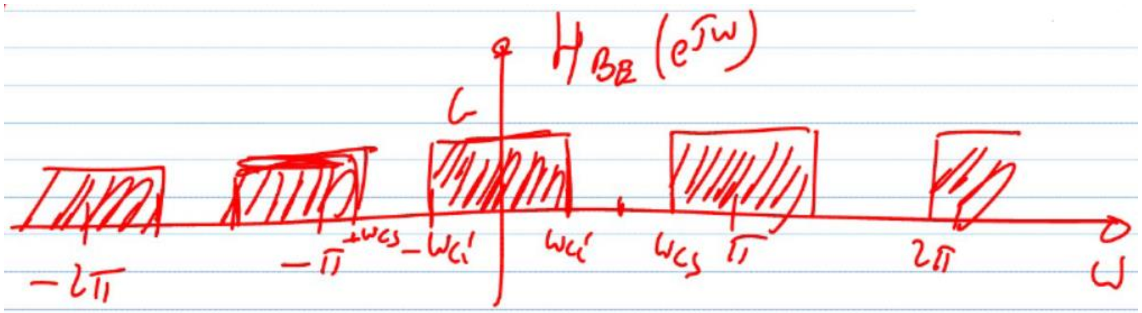
$el\ resto\ de\ \ \omega \quad \Rightarrow \quad$ banda eliminada

(FPBd)
$$\boxed{H_{PBd}(e^{j\omega}) = Ge^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{\omega + \omega_0 - 2\pi k}{(\omega_{cs} - \omega_{ci})}\right) + \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0 - 2\pi k}{(\omega_{cs} - \omega_{ci})}\right) \right]}$$

DFESTS

4.3.4.- Filtro ELIMINA BANDA ideal

No deja pasar cierto rango de frecuencias

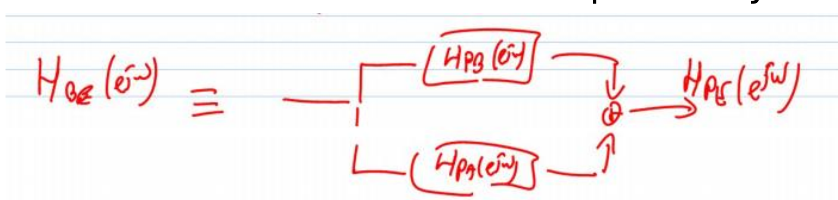


La zona marcada, indica las frecuencias que pasan.

(FBE)
$$H_{BE}(e^{j\omega}) = Ge^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_{ci}}\right) + \Pi\left(\frac{\omega - \pi - 2\pi k}{2(\pi - \omega_{cs})}\right) \right]$$

4.3.5.- Filtros con VARIAS BANDAS de paso

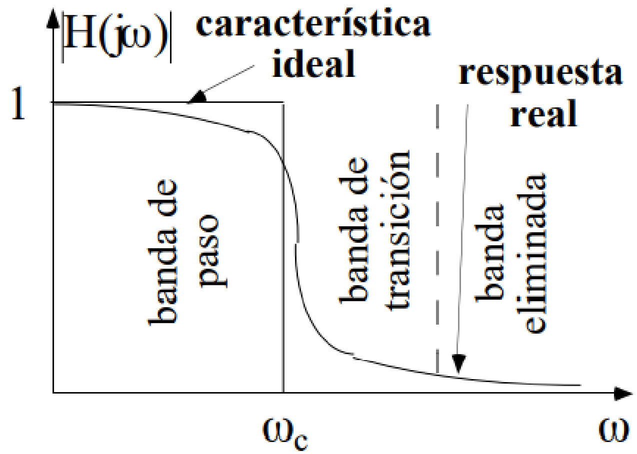
Se logran combinando arbitrariamente en paralelo y en cascada filtros de los tipos anteriores



FILTROS IDEALES vs REALES

Un filtro ideal sería el que tiene unas bandas de paso y eliminada totalmente planas, y unas zonas de transición entre ambas nulas, pero esto nunca se consigue.

En la práctica los filtros ideales no son realizables.

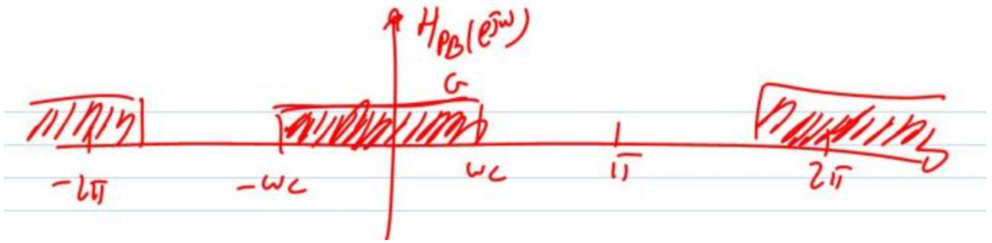


FILTROS IDEALES

- NO SON CAUSALES $\rightarrow$ $h(n) \neq 0 \text{ para } n < 0$
- NO SON ESTABLES $\rightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(n)] = \infty$

El objetivo será conseguir filtros reales a partir de los ideales.

Por ejemplo,
un Filtro Paso Bajo Ideal



$$\boxed{h_{PBideal}[n] = G\,\frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(n-n_0)\right)}$$

Respuesta impulsiva de un
Filtro Paso Bajo Ideal

Este filtro no es estable ni es causal. Por lo tanto, se aplicarán técnicas para que llegue a cumplir ambas propiedades.

4.3.6. Propiedades para obtener filtros reales

Par obtener un Filtro Paso Bajo **Real**, a partir de un Filtro Paso Bajo **Ideal**, hay que conseguir que se cumplan una serie de **propiedades**:

$$h_{PBi}[n] \quad \rightarrow \quad h_{PBr}[n] \; \equiv \; \left(\; h_{PB_{FIR}}[n] \; \right)$$

IDEAL → REAL ≡ (REAL)

Se deben cumplir 3 propiedades:

1.- Estabilidad

2.- Causalidad

3.- Rizado en amplitud

1.- ESTABILIDAD

Para conseguir la ESTABILIDAD se hace un enventanado o truncamiento, es decir, se toman un nº finito de muestras.

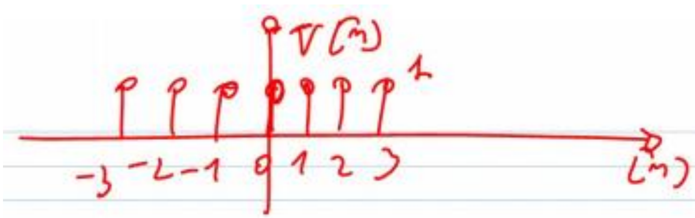
$h_{\text{ideal}}[n] \cdot \mathrm{V[n]}$

$$V[n] = \Pi\left(\frac{n + L/2}{L+1}\right)$$

desplazamiento

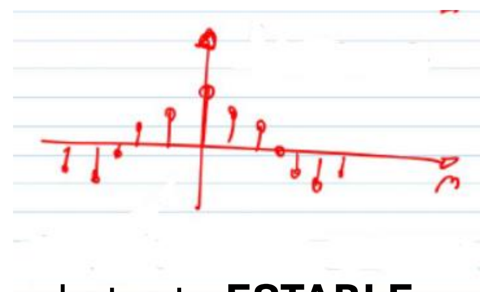
duración

Con L, un número par



Por ejemplo, si L = 6
la duración es L+1=7

$h_{\text{ideal}}[n] \cdot \mathrm{V[n]} \rightarrow$



Se obtiene un filtro de duración finita y por lo tanto **ESTABLE**.

2.- CAUSALIDAD

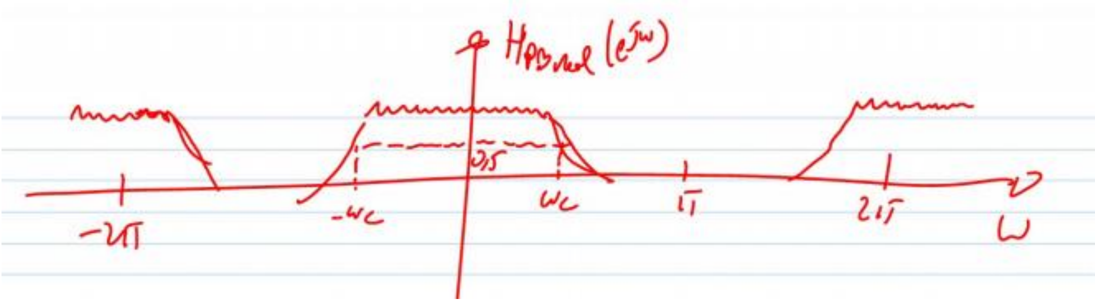
Para conseguir la CAUSALIDAD, se toman solo los valores que están en instancias positivas de la señal

$$\left(h_{\text{ideal}}[n] \cdot V(n)\right) * \left[\delta(n - \tfrac{L}{2})\right]$$

$$H_{PB_{\text{real}}}(e^{j\omega}) = \left(\left(H_{\text{ideal}}(e^{j\omega})\right) * V(e^{j\omega})\right) \cdot e^{-j\omega\frac{L}{2}}$$

Se obtiene un filtro con todos los valores positivos, por lo tanto, **CAUSAL.**

3.- RIZADO EN AMPLITUD (factor de rizado)



En un filtro real, la transición entre la banda de paso y la eliminada no es abrupta, hay un "rizado".

Margen de seguridad

Se pretende obtener un **factor de RIZADO** lo más pequeño posible, porque cuanto menor sea el factor de rizado, mejor será el filtro.

Problema 1.

A partir de la señal $\widehat{x[n]} = 2\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-3)$

se forma la señal $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n-4k)$$

1.- Calcula la DSF *(Tema 1)*

2.- Calcula la DTFT de x[n] y representa el espectro de amplitud y fase para $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$ *(Tema 4)*

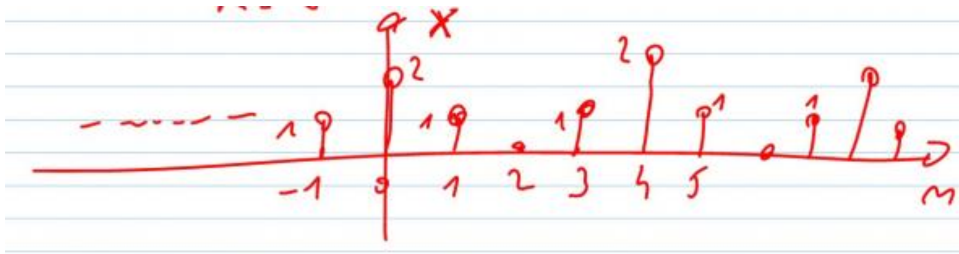
3.- Considera el filtro cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\Pi\left(\frac{\omega-\pi-2\pi k}{1{,}2\,\pi}\right)\right] \quad \textit{(Tema 4)}$$

Representa $\mathrm{H}(e^{j\omega})$ entre $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$, ¿qué tipo de filtro es?

4.- Se hace pasar $x[n]$ por el filtro, ¿cuál sería la salida $y[n]$?

1) Calcula la DSF $\quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n-4k)$



$x[n] = \{2, 1, 0, 1\} \Rightarrow N_0 = 4$ (Empezando en 0 y con periodo 4, por 4k)

$$C_K = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{4}} = \frac{1}{4}\left(2 + 1e^{-j\frac{\pi k}{2}} + 0 + 1e^{-j\frac{\pi k3}{2}}\right)$$

$C_0 = 1, C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = 0,\ C_3 = \frac{1}{2}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} C_k e^{j\frac{2\pi kn}{4}} = C_0 e^0 + C_1 e^{j\frac{2\pi n}{4?2}} + C_3 e^{j\frac{3\pi n}{2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x[n] = 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{j\frac{3}{2}\pi n}}}$$

Expresión del DSF, después de aplicar la ecuación de análisis y de síntesis

2) Calcula la DTFT de x[n] y representa el espectro de amplitud y fase

Aplicar el par de transformadas de la secuencia periódica

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_K \, e^{j\frac{2\pi K}{N_0}n}} \xrightarrow{\text{DTFT}} \boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N_0-1} 2\pi \, CK \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N_0} - 2\pi l\right)}$$

Se sustituye $\left(\frac{2\pi k}{N_0}\right)$ por la fase $(0\,, \frac{\pi}{2}\,, \frac{3\pi}{2})$

$$\mathbf{x[n]} = 1 + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2} e^{j\frac{3}{2}\pi n}$$

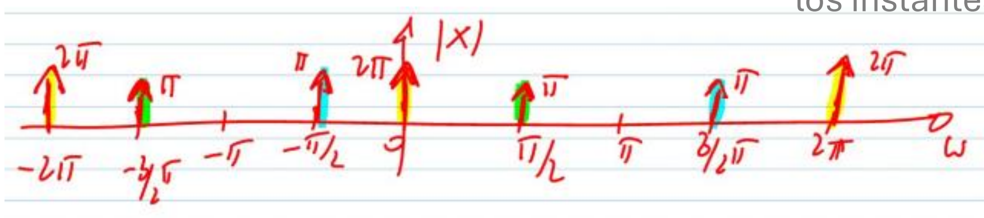
$$\mathbf{X(e^{j\omega})} = \cancel{2\pi \cdot 1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 0 - 2\pi l)} + \qquad -2\pi, 0\,, 2\pi \rightarrow \boldsymbol{2\pi}$$

(Esta componente se anula, porque no hay π)

$$+ \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi l) + \qquad -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \rightarrow \boldsymbol{\pi}$$

$$+ \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{3}{2}\pi - 2\pi l) \qquad -\frac{3\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2} \rightarrow \boldsymbol{\pi}$$

Se representa el valor en los instantes determinados



3) Representa $\mathrm{H}(e^{j\omega})$ entre $-2\pi \leq \omega \leq 2\pi$. ¿Qué tipo de filtro es?

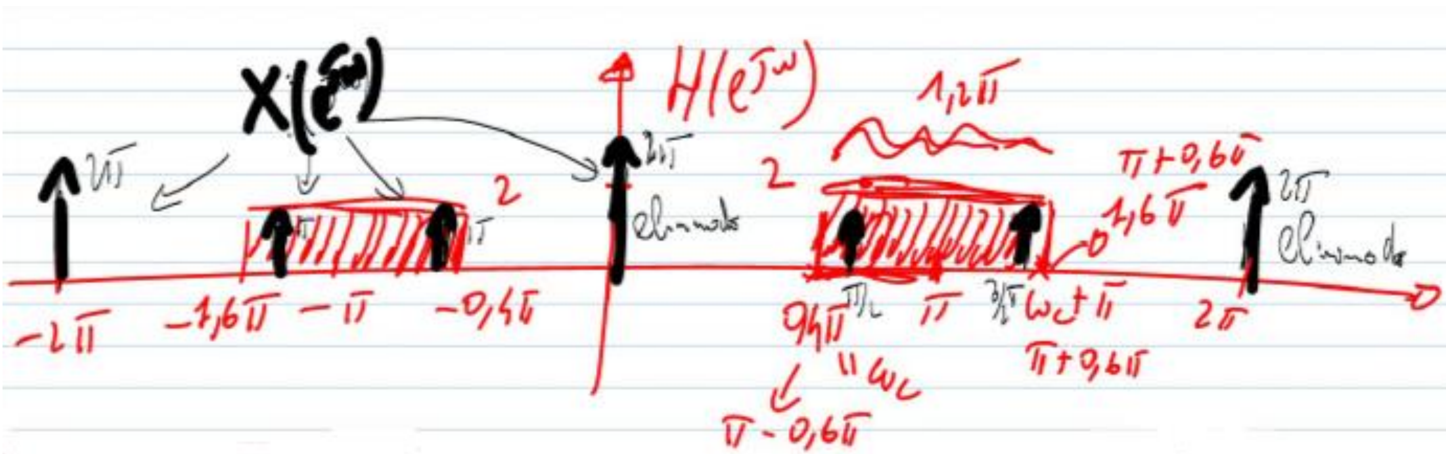
FPBd y FBE, son dobles
Y FPB, centrado en 0, no en $\boldsymbol{\pi}$

$$H(e^{j\omega}) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - \boldsymbol{\pi} - 2\pi k}{1{,}2\pi}\right)$$

$$\boxed{H_{PA}(e^{j\omega}) = Ge^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - \boldsymbol{\pi} - 2\pi k}{2(\pi - \omega_c)}\right)}$$

De la respuesta en frecuencia de **FPA**,
tenemos: $2(\pi - \omega_c) = 1{,}2\pi$ de duración

$\boxed{G = 2}$



$2(\pi - \omega_c) = 1{,}2\pi$; $\quad \pi - \omega_c = 1{,}2\pi/2$; $\quad -\omega_c = -\pi + 0{,}6\pi$; $\quad \omega_c = \pi - 0{,}6\pi = 0{,}4\pi$

$$\boldsymbol{\omega_c = 0{,}4\pi}$$

Se trata de un Filtro Paso Alto. Deja pasar las frecuencias entre 0,4 π y 1,6 π

4) Se hace pasar $x[n]$ por el filtro $H(e^{j\omega})$, ¿cuál sería la salida $y[n]$?

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\omega - \boldsymbol{\pi} - 2\pi k}{1{,}2\pi}\right)$$

$$\mathbf{x[n]} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\mathrm{n}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\frac{3}{2}\pi\mathrm{n}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = 2\pi\left[\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{3}{2}\pi - 2\pi k)\right]$$

Por la DTFT^{-1} obtenemos la respuesta al impulso y[n]

A partir de la expresión obtenida en 2) $X(e^{j\omega})$, pág. 20 se aplica el **par de transformadas de la sinusoide compleja (3)**

$$2\pi A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \omega_c - 2\pi k) \leftrightarrow A\, e^{j\omega d n}$$

$A = 1\,;\ \omega d = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

${}^{3}/_{2}\,\pi - 2\,\pi = -{}^{1}/_{2}\,\pi$

$$\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \cos\varphi$$

$$\boldsymbol{y[n]} = e^{j(\frac{\pi}{2})n} + e^{j\left(\frac{3}{2}\pi\right)n} = e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)n}$$

$$\boldsymbol{y[n] = 2\cos(\frac{\pi}{2}n)}$$

DFESTS

Problema 2. Considerar el sistema:

$$y[n] = 0{,}9\, y[n-1] + b\, x[n]$$

a) Calcular su respuesta en frecuencia y después determina la constante *b* para que $H\left(e^{j\cdot 0}\right) = 1$.

b) Representar el diagrama de bloque del sistema ¿Es un filtro IIR o FIR?

c) Suponer que b=0,1 y calcular la respuesta **y[n]** ante la señal:

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

d) Para b=0,1, calcular la respuesta $y_2[n]$ ante la señal:

$$x_2[n] = 5 + \cos\left(\tfrac{\pi}{2} n\right)$$

a) Calcular su respuesta en frecuencia y después determina la constante *b* para que $H(e^{j\cdot 0}) = 1$.

$$y[n] = 0{,}9\, y[n-1] + b\, x[n]$$

Secuencia impulso unidad desplazado (1.1)

$$\boxed{x[n] = A\delta[n \pm n_0] \quad \leftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = Ae^{\pm j\omega n_0}}$$

Aplicamos la DTFT sobre la ecuación en diferencias.

$$1Y(e^{j\omega}) = 0{,}9 \cdot Y(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega} + b\, X(e^{j\omega}); \;\; Y(e^{j\omega}) \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega}) = b\, X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega}); \; H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\mathrm{Y}(\mathrm{e}^{j\omega})}{\mathrm{X}(\mathrm{e}^{j\omega})} = \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})};$$

$$\boxed{\boldsymbol{H(e^{j\omega}) = \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}}}$$

$$\boxed{H(e^{j\cdot\omega})_{\omega\,=\,0} = 1}$$

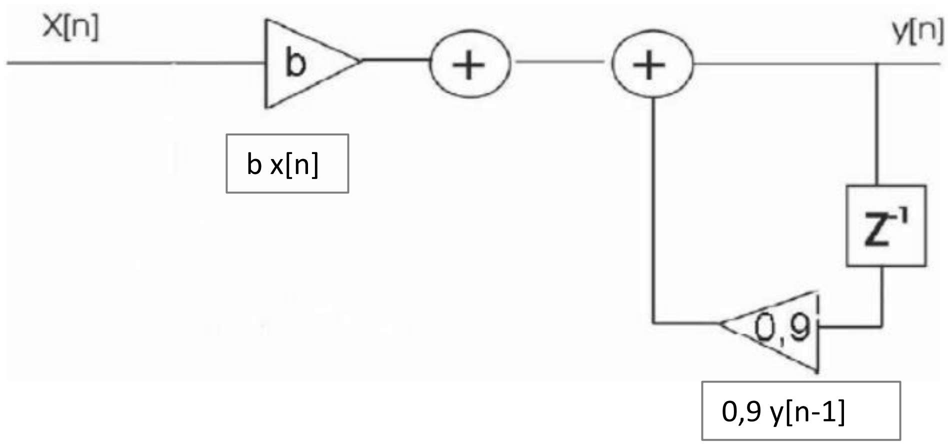
$$1 = \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j0})}; \qquad 1 = \frac{b}{(1 - 0{,}9 \cdot 1)} = \frac{b}{0{,}1}; b = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$$

$$\boxed{\boldsymbol{b = 0{,}1}}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{0{,}1}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}}$$

b) Representar el diagrama de bloques del sistema ¿Es un filtro IIR o FIR?

$$y[n] = 0{,}9\, y[n-1] + b\, x[n]$$



El diagrama de bloques tiene sólo una celda de retardo en la parte recurrente mientras que la excitación no tiene retardo

Es un **filtro IIR** de orden N=1, ya que tiene parte recurrente.

IIR (Infinite Impulse Response, Respuesta infinita al impulso). Si la entrada es una señal impulso, la salida tendrá un *número **infinito** de términos no nulos*, es decir, nunca vuelve al reposo, <u>porque tiene parte recurrente</u>.

FIR (Finite Impulse Response, Respuesta finita al impulso). La respuesta a una señal impulso como entrada tendrá un *número **finito** de términos no nulos*.

c) Suponer que b=0,1 y calcular la respuesta **y[n]** ante la señal:

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$y[n] = \begin{cases} x[n] * h[n] \\ X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \xrightarrow{DTFT^{-1}} y[n] \end{cases}$$

Para calcular Y=H·X, utilizamos H del apartado anterior y el espectro de la señal de excitación X.

Espectros de la secuencia exponencial acotada (5 y 5.1)

$$\boxed{\mathbf{X}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - {}^{1}\!/_{2}\ e^{-j\omega}}}$$

$$\boxed{a^n \cdot u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}}$$

$$\boxed{a^{n-1} \cdot u[n-1] \leftrightarrow \frac{e^{-j\omega}}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}}$$

DTFT - Transformada de Fourier en Tiempo Discreto
DTFT^{-1} - Transformada Inversa de Fourier en Tiempo Discreto

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = \frac{0{,}1}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} \cdot \frac{e^{-j\omega}}{(1 - {}^{1}/_{2}\, e^{-j\omega})}$$

La respuesta se obtiene aplicando el método de descomposición en fracciones simples.

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} + \frac{A_2}{(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})}$$

$e^{j\omega} = 0{,}9\,;\ e^{-j\omega} = {}^{1}/_{0{,}9}$

$$A_1 = \lim_{e^{j\omega}\to 0{,}9} Y(e^{j\omega})(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega}) = \lim_{e^{j\omega}\to 0{,}9} \frac{0{,}1 \cdot e^{-j\omega} \cdot \cancel{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})}}{\cancel{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} \cdot (1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})} = \frac{0{,}1 \cdot ({}^{1}/_{0{,}9})}{1 - 0{,}5 \cdot ({}^{1}/_{0{,}9})} = \frac{0{,}11}{0{,}44} = \mathbf{0{,}25}$$

$e^{j\omega} = 0{,}5\,;\ e^{-j\omega} = {}^{1}/_{0{,}5}$

$$A_2 = \lim_{e^{j\omega}\to 0{,}5} Y(e^{j\omega})(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega}) = \lim_{e^{j\omega}\to 0{,}5} \frac{0{,}1 \cdot e^{-j\omega} \cdot \cancel{(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})}}{\cancel{(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})} \cdot (1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} = \frac{0{,}1 \cdot ({}^{1}/_{0{,}5})}{1 - 0{,}9 \cdot ({}^{1}/_{0{,}5})} = \frac{0{,}2}{-0{,}8} = \mathbf{-0{,}25}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{(0{,}25) \cdot 1}{(1 - 0{,}9 \cdot e^{-j\omega})} + \frac{(-0{,}25) \cdot 1}{(1 - 0{,}5 \cdot e^{-j\omega})}$$

$\Big\downarrow$ DTFT-1

$$\boxed{\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \leftrightarrow a^n \cdot u[n]}$$

$$\boxed{\mathbf{y[n] = 0{,}25(0{,}9)^n \cdot u[n] - 0{,}25(0{,}5)^n \cdot u[n]}}$$

d) Para b=0,1, calcular la respuesta $\mathbf{y_2[n]}$ ante la señal: $x_2[n] = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

$x_2[n] = x_{2a}[n] + x_{2b}[n] = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$; $x_{2a} = 5$; A=5, φ= 0 → ω=0

$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}}$

Dominio de la frecuencia (φ (ω

$x_{2b} = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$; $A = \frac{1}{2}$, $\varphi = 0$ $\begin{cases} \omega_{d1} = \pi/2 \\ \omega_{d2} = -\omega_{d1} = -\pi/2 \end{cases}$

$\boxed{Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\,H(e^{j\omega})}$ $y_2[n] = (x_{2a}[n] + x_{2b}[n]) \cdot H(e^{j\omega})$

❶ ❷ ❸

$$y_2[n] = \left(5\,H(e^{j\omega})_{\omega=0}\right) + \left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n}\,H(e^{j\omega})_{\omega=\pi/2}\right) + \left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}\,H(e^{j\omega})_{\omega=-\pi/2}\right)$$

$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{0{,}1}{(1-0{,}9\cdot e^{-j\omega})}}$

❶ $$H(e^{j\omega})_{\omega=0} = \frac{0{,}1}{1-0{,}9e^{-j\omega}}\Big|_{\omega=0} = \frac{0{,}1}{1-0{,}9} = 1 \begin{cases} \| = 1 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\text{sen}\varphi$$

❷ $$H(e^{j\omega})_{\omega=\pi/2} = \frac{0{,}1}{1-0{,}9e^{-j\omega}}\Big|_{\omega=\pi/2} = \frac{0{,}1}{1-0{,}9e^{-j\pi/2}} = \frac{0{,}1}{1-0{,}9(\cos\pi/2 - j\text{sen}\,\pi/2)} =$$

0 1

(Ver problema n[os] complejos)

$$= \frac{0{,}1}{1-0{,}9\cdot(-j)} = \frac{0{,}1}{1+j0{,}9}\cdot\frac{1-j0{,}9}{1-j0{,}9} = \cdots = 0{,}0552 + j0{,}0497;$$

$$|| = \sqrt{(0{,}0552)^2+(0{,}0497)^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{-0{,}0497}{0{,}0552}$$

$$\begin{cases} || = 0{,}074 \\ \varphi = -0{,}732 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega})_{\omega=\pi/2} = 0{,}074\cdot e^{-j0{,}732}$$

*por el conjugado

❸ $$H(e^{j\omega})_{\omega=-\pi/2} = \left(H(e^{j\omega})_{\omega=\pi/2}\right)^* = 0{,}074\cdot e^{+j0{,}732}$$

Por último, sustituimos:

$$y_2[n] = 5\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot e^{j\pi/2 n}\cdot 0{,}074\cdot e^{-j0{,}732} + \frac{1}{2}\cdot e^{-j\pi/2 n}\cdot 0{,}074\cdot e^{+j0{,}732} =$$

$$= 5 + \frac{0{,}074}{2}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-0{,}732\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n-0{,}732\right)}\right);$$

$$\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2} = \cos\varphi$$

$$x[n] = 5 + \cos\frac{\pi}{2}n$$

$$\boxed{y_2[n] = 5 + 0{,}074\cos\left(\frac{\pi}{2}n - 0{,}732\right)}$$

DFESTS

Problema 3. Considerar un sistema discreto lineal e invariante causal, descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{9}\, y\,[n-2] = x[n]$$

a) Determinar la función de transferencia $\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right)$ y la respuesta impulsiva **h[n]**

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad y[n] = x[n] * h[n]$$

$$\boxed{x[n] = A\delta[n \pm n_0] \quad \leftrightarrow \quad X\left(e^{j\omega}\right) = Ae^{\pm j\omega n_0}}$$

$$\boxed{Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$1Y\left(e^{j\omega}\right) - \tfrac{1}{9}Y\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{-2j\omega} = \mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\left(1 - \tfrac{1}{9}\cdot e^{-2j\omega}\right) = 1\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right); \quad Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)}{\left(1 - \frac{1}{9}\cdot e^{-2j\omega}\right)}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}\cdot e^{-2j\omega}}\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\cdot \boldsymbol{e}^{-\mathbf{2}\boldsymbol{j\omega}}}}$$

Función de transferencia

Para calcular la respuesta impulsiva,tenemos que resolver la ecuación de 2º grado:

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{9} \cdot e^{-2j\omega}}}$$

$(e^{-2j\omega} = x^{-2})$ $\qquad \cdot (x^2)$

$$1 - \frac{1}{9} \cdot x^{-2} = 0\,; \quad x^2 - \frac{1}{9} = 0\,; \quad \left\langle \begin{matrix} x_1 = +\frac{1}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{matrix} \right\rangle$$

$$1 - \frac{1}{9} \cdot e^{-2j\omega} = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\right)\left(1 + \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\right) = 0$$

Para calcular la respuesta, aplicamos el método de descomposición en fracciones simples

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{9} \cdot e^{-2j\omega}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\right)\left(1 + \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\right)} =$$

$$= \frac{A_1}{\left(1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 + \frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega}\right)}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}$$

$e^{j\omega} = 1/3\,;\ e^{-j\omega} = 3$

$$A_1 = \lim_{e^{j\omega}\to 1/3} H\left(e^{j\omega}\right)\left(1 - 1/3 \cdot e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1 + 1/3 \cdot e^{-j\omega}\right)}\Bigg|_{e^{j\omega} = 1/3} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$e^{j\omega} = -1/3\,;\ e^{-j\omega} = -3$

$$A_2 = \lim_{e^{j\omega}\to -1/3} H\left(e^{j\omega}\right)\left(1 + 1/3 \cdot e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1 - 1/3 \cdot e^{-j\omega}\right)}\Bigg|_{e^{j\omega} = -1/3} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1/2}{\left(1 - \frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)} + \frac{1/2}{\left(1 + \frac{1}{3}\cdot e^{-j\omega}\right)}$$

$\Downarrow$ DTFT-1

$$\frac{1}{1 - a\cdot e^{-j\omega}} \leftrightarrow a^n \cdot u[n]$$

$$\boxed{\boldsymbol{h[n] = 1/2\left(1/3\right)^n u[n] + 1/2\left(-1/3\right)^n u[n]}}$$

Respuesta impulsiva

DFESTS