Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 8

DFESTS

UA UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

TEMA 3.- SEÑALES Y SISTEMAS EN TIEMPO DISCRETO

...

3.7.2. Interconexión de sistemas

3.7.3. Propiedades adicionales de los sistemas LTI

3.7.4. Sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes.

3.7.5. Diagrama de bloques

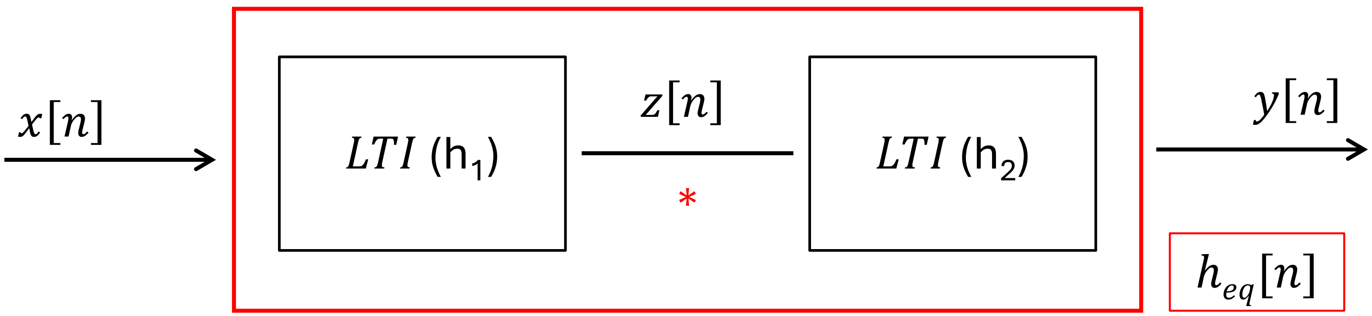
3.7.2. Interconexión de sistemas

Existen 2 tipos de conexiones para los Sistemas LTI:

1.- Conexión en serie

2.- Conexión en paralelo

1.- Sistemas LTI conectados en serie (en cascada)

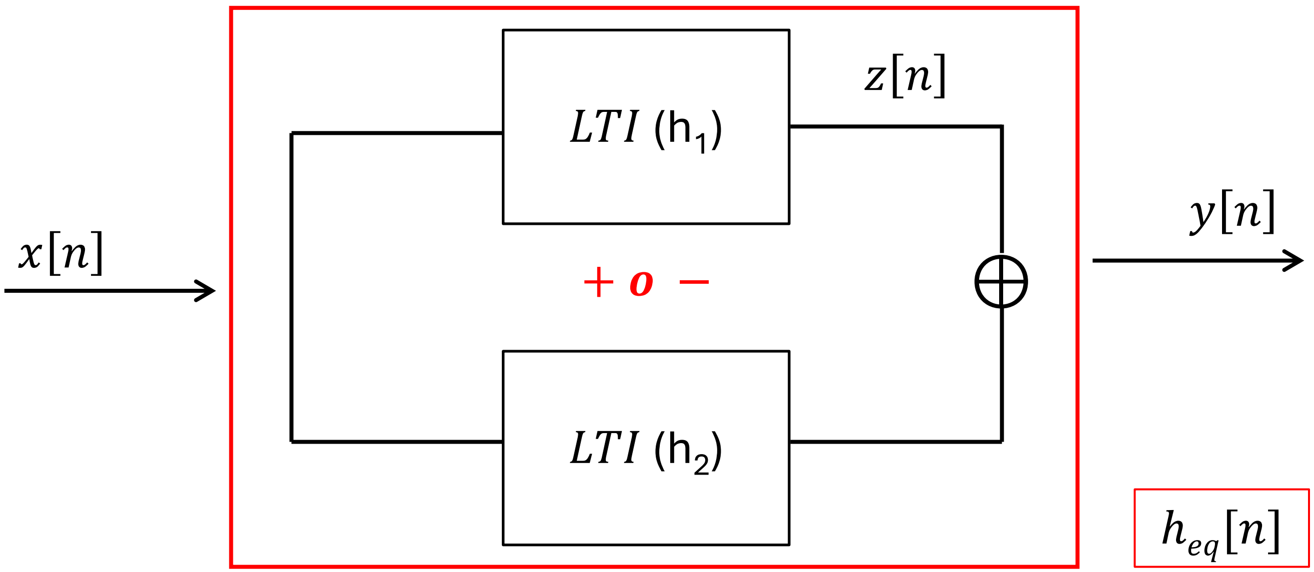


$z[n] = x[n] * h_1[n]$ $\quad$ $y[n] = z[n] * h_2[n]$

$$y[n] = z[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * heq[n]$$

$$\boxed{\boldsymbol{h_{eq}[n] = h_1[n] * h_2[n]}}$$

2.- Sistemas LTI conectados en paralelo



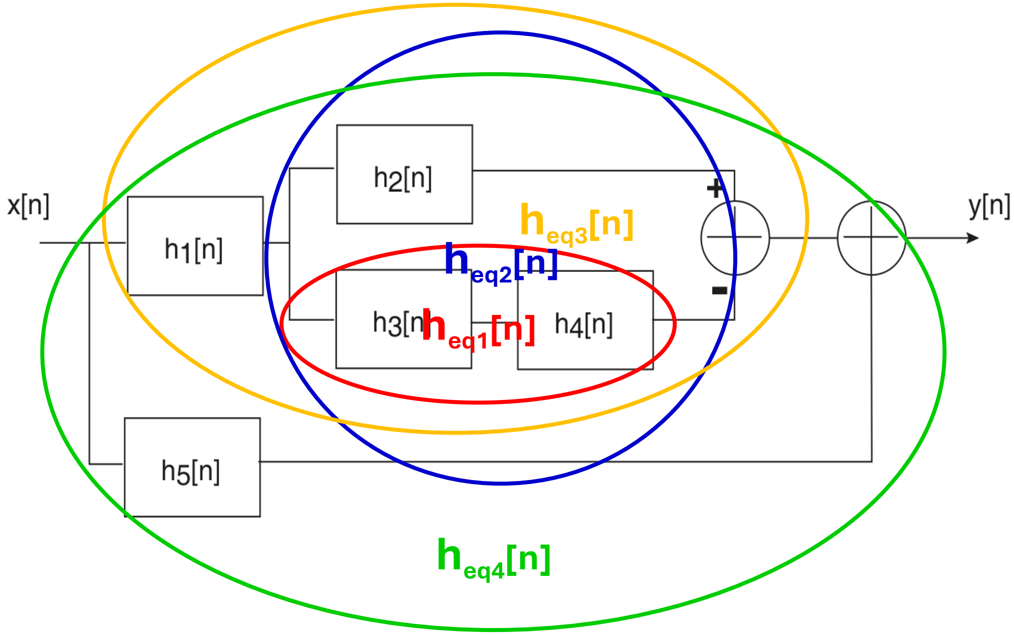
$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * ([h_{1[n]} + h_2[n]) = x[n] * heq[n]$$

La respuesta impulsiva total del sistema resultante de conectar dos sistemas **en paralelo** es la **suma o resta** de las respuestas impulsivas de estos dos.

Por defecto, si no se especifica lo contrario, se suman la respuestas.

$$\boxed{\boldsymbol{h_{eq}[n] = h_1[n] + h_2[n]}}$$

Problema 1. Dado el sistema de la figura y la definición de cada uno de los 5 subsistemas que lo forman, la expresa la respuesta impulsiva total $h_T[n]$.



$$h_1[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-3])$$

$$h_2[n] = h_3[n] = (n+1)\,u[n]$$

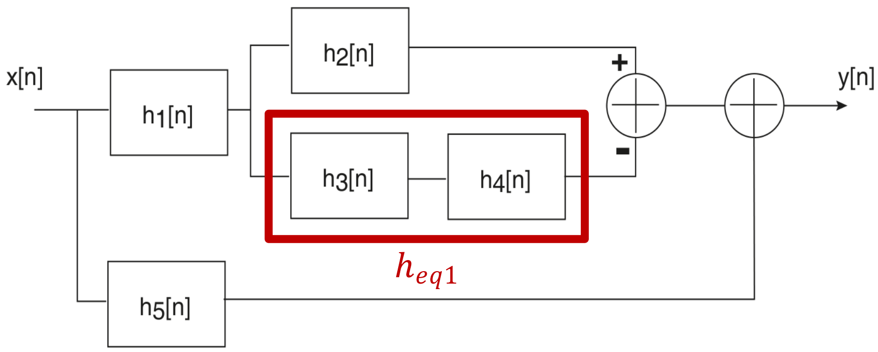
$$h_4[n] = \delta[n-1]$$

$$h_5[n] = \delta[n] - 4\delta[n-3]$$

1.- h_3 y h_4 en serie (convolución) → **$h_{eq1}[n]$**

$$h_2[n] = h_3[n] = (n+1)\,u[n]$$

$$h_4[n] = \delta[n-1]$$

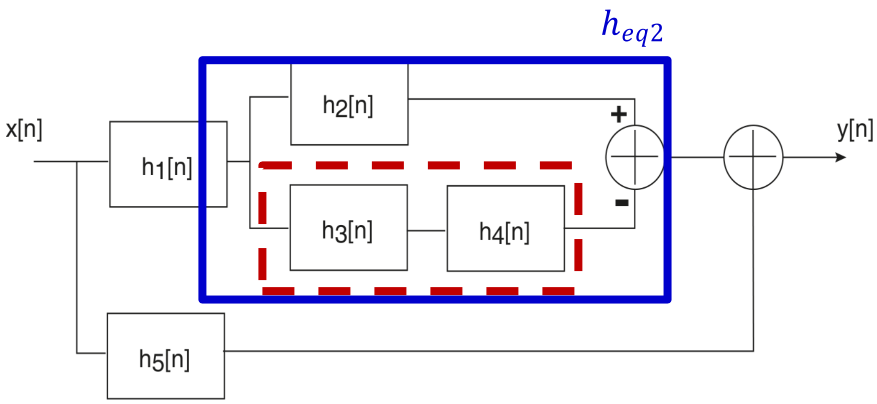


$$((n+1) * (\delta[n-1])) \cdot (U[n] * (\delta[n-1]))$$

$$\mathbf{h_{eq1}[n]} = (h_3[n] * h_4[n]) = (n+1)\,U[n] * (\delta[n-1]) = (n+1-1)\,U[n-1] = \mathbf{nU[n-1]}$$

$$\boxed{h_{eq1}[n] = nU[n-1]}$$

2.- h_2 y h_{eq1} en paralelo (suma) → **h_{eq2}[n]**



$$h_2[n] = (n+1)\,u[n]$$

$$h_{eq1}[n] = nU[n-1]$$

$$h_2 - h_{eq1} = ((n+1)U[n]) - (nU[n-1])$$

Resolvemos mediante una tabla

n	0	1	2	3	4
$(n+1)U[n]$	1	2	3	4	...
− $n\,U[n-1]$		1	2	3	...
h_{eq2}[n]	1	1	1	1	

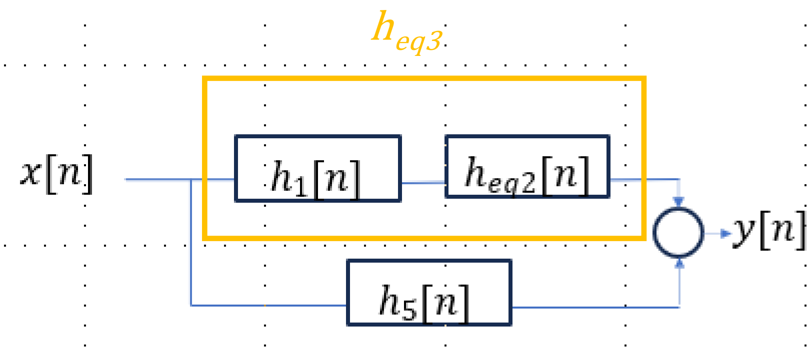
→ **U[n]**

h_{eq2}[n] = $(h_2[n] + h_{eq1}[n]) = ((n+1)\,U[n] - (n\,U[n-1]) = \mathbf{U[n]}$

3.- h_1 y h_{eq2} en serie (convolución) → **$h_{eq3}[n]$**

$$h_1[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-3])$$

$h_{eq2}[n] = U[n]$



$$\mathbf{h_{eq3}[n]} = (h_1[n] * h_{eq2}[n]) = \left(4\,(^1/_2)^n\,(U[n] - U[n-3])\right) \;*\; U[n]$$

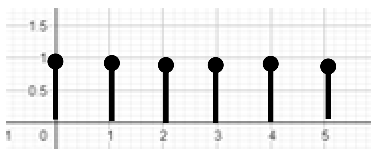
Como $h_1[n]$ incluye una exponencial, hay que desarrollarlo previamente antes de realizar la convolución

$h_1[n] = (4\,(^1/_2)^n\,(U[n] - U[n-3]))$

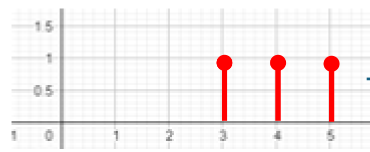
<u>*Valores*</u> <u>*Instantes*</u>

n	$h_1[n] = 4(^1/_2)^n$
0	$4 \cdot (^1/_2)^0 = 4 \cdot 1 = 4$
1	$4 \cdot (^1/_2)^1 = 4 \cdot {}^1/_2 = 2$
2	$4 \cdot (^1/_2)^2 = 4 \cdot {}^1/_4 = 1$

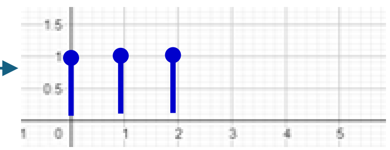
U[n]



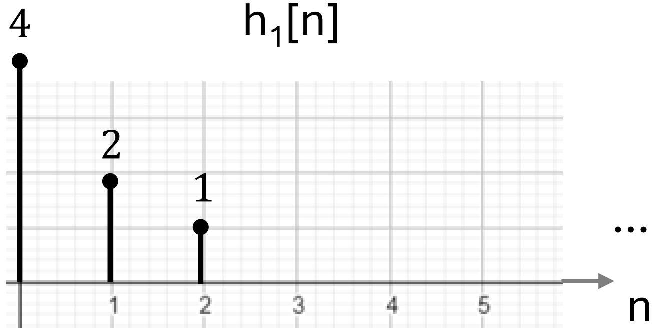
U[n-3]



U[n]–U[n-3]



$h_1[n]$



$h_1[n] = 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 1\delta[n-2]$

$\mathbf{h_{eq3}[n]} = (h_1[n] * h_{eq2}[n]) = (4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 1\delta[n-2]) * U[n] = 4U[n] + 2U[n-1] + U[n-2]$

Resolvemos mediante una tabla la suma de los 3 términos:

n	0	1	2	3	4
$4\,U[n]$	4	4	4	4	4
$2\,U[n-1]$		2	2	2	2
$U[n-2]$			1	1	1
	4	**6**	**7**	**7**	**7**

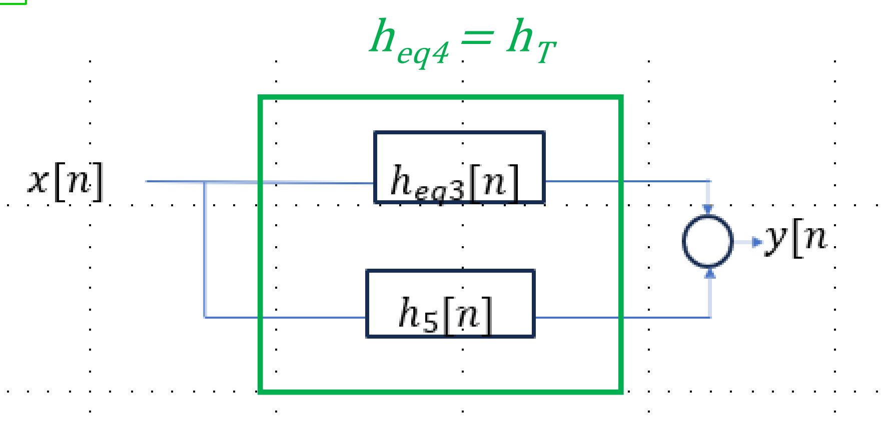
$\boxed{h_{eq3}[n] = 4\delta[n] + 6\delta[n-1] + 7U[n-2]}$

DFESTS

4.- he_{eq3} y h_5 en paralelo (suma) → **h_{eqT}[n]**

$$h_{eq3}[n] = 4\delta[n]+6\delta[n-1]+7u[n-2]$$

$$h_5[n]= \delta[n] - 4\delta[n-3]$$



Se suman por instantes

$7U[n-2]) = 7\delta[n-2]+7\delta[n-3]+7\delta[n-4]+ \ldots$

$$h_{eqT}[n] = (h_{eq3}[n] + h_5[n]) = (4\delta[n] + 6\delta[n-1] + 7U[n-2]) +$$

$$+ (1\delta[n] - 4\delta[n-3])=$$

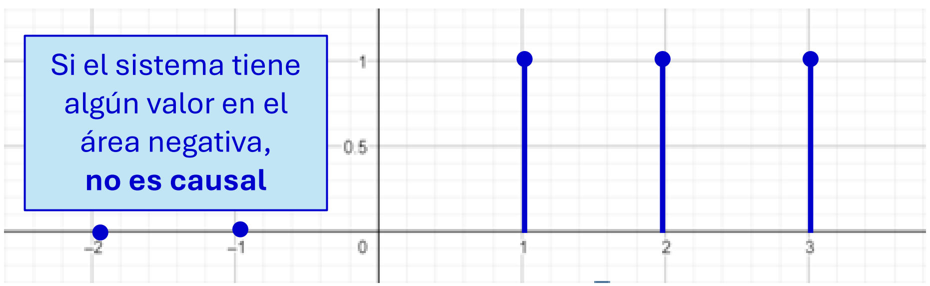
$$= (4+1)\,\delta[n] + 6\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + (7-4)\delta[n-3] + 7U[n-4]$$

$$\boxed{h_T[n] = 5\delta[n] + 6\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 7U[n-4]}$$ Respuesta impulsiva total

3.7.3. Propiedades adicionales de los sistemas LTI

1) Un sistema es **CAUSAL** si se cumple que:

$$\boxed{h[n] = 0 \quad para \quad n < 0}$$



Su respuesta solamente depende de los valores de excitación en el instante de tiempo actual y en el pasado, no en el futuro.
Puesto que no puede existir respuesta antes de producirse la excitación, si la excitación es el impulso unidad se tendrá que: **h[n]=0 para n < 0** .

2) Un sistema es **ESTABLE** si se cumple que:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty}$$

La respuesta impulsiva del sistema debe ser sumable, da un valor real.

Si la excitación es una señal acotada en todo su intervalo de definición, la respuesta también lo es.

Problema 2. Determinar la causalidad y la estabilidad de los siguientes sistemas.

$$\boxed{h[n] = 2\prod\left(\frac{n}{3}\right)}$$

Ej. Pulso cuadrado

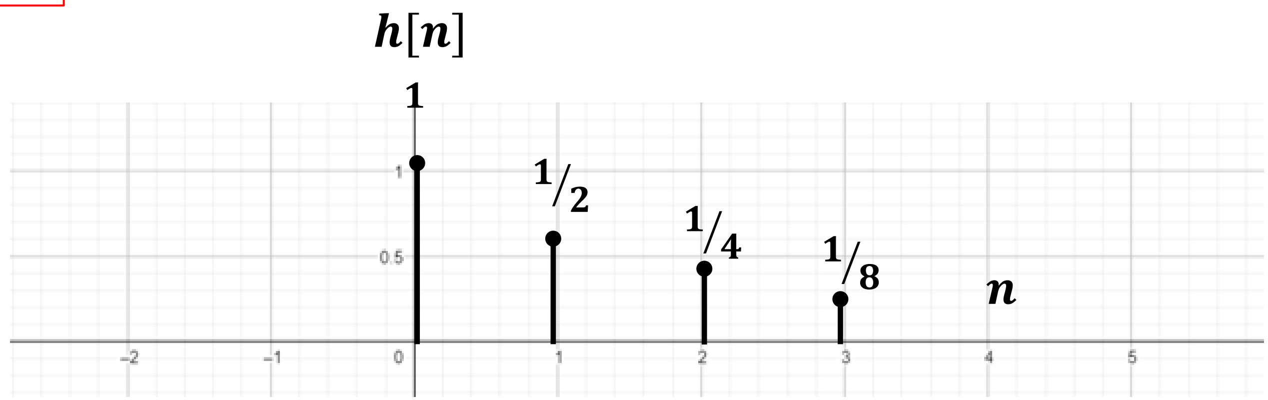
$$Dado\ que \quad h[n] = 0 \ \ para \ \ n < 0 \rightarrow \textbf{h[n] es CAUSAL}$$

$$Y\ por \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{2} |h[n]| = 2 + 2 + 2 \ = 6 \ < \ \infty \rightarrow \textbf{h[n] es ESTABLE}$$

$$a)\ \ h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n],$$

(Definido entre 0 e ∞)

n	h[n]
0	$(½)^0=1$
1	$(½)^1=1/2$
2	$(½)^2=1/4$
3	$(½)^3=1/8$



CAUSAL: $h(n) \neq 0\ \ solo\ para\ \ n \geq 0$ y $h[n] = 0\ \ para\ \ n < 0.$

Por lo tanto, el sistema **es causal**

$$\boxed{\mathbf{Si}\ \ \mathbf{0 < x < 1, x^{\infty} = 0}}$$

ESTABLE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left({}^{1}/_{2}\right)^{n}\right| = \frac{\cancelto{1}{\left({}^{1}/_{2}\right)^{0}} - \cancelto{0}{\left({}^{1}/_{2}\right)^{\infty}}}{1 - {}^{1}/_{2}} = \frac{1}{{}^{1}/_{2}} = 2 < \infty$$

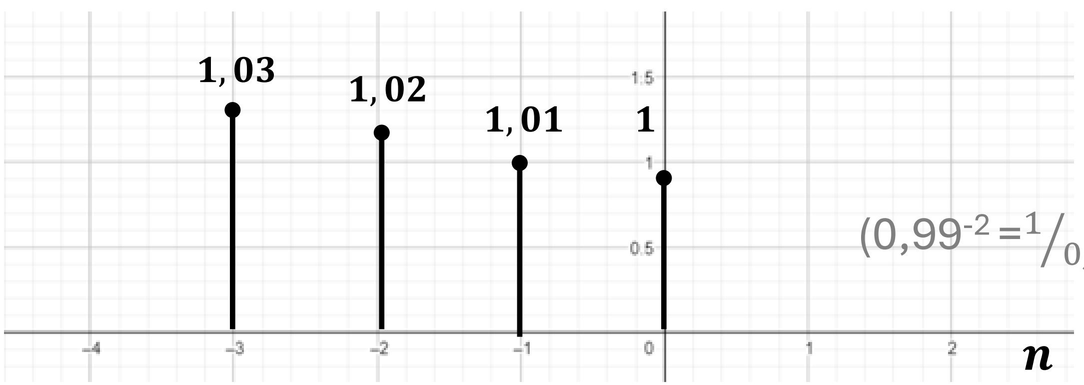
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |x| = \frac{x^{0} - x^{\infty+1}}{1 - x}}$$

Por lo tanto, el sistema **es estable**

$$\boxed{c)\ \ h[n] = 0{,}99^n u[-n],}$$

(Definido entre -∞ $y\ 0,\ por\ -n$)

$\boldsymbol{h[n]}$



$(0{,}99^{-2} = {}^{1}/_{0{,}99^2})$

n	$(0,99)^n$
0	1
-1	1/0,99 = 1,01
-2	$1/(0{,}99)^2$ = 1,02
-3	$1/(0{,}99)^3$ = 1,03

CAUSAL: $h(n) \neq 0\ \ para\ \ n\ < 0$

Por lo tanto, el sistema **no es causal**

$$\boxed{\textbf{Si}\ \ \mathbf{0 < x < 1, x^{-\infty} = \infty}}$$

ESTABLE:

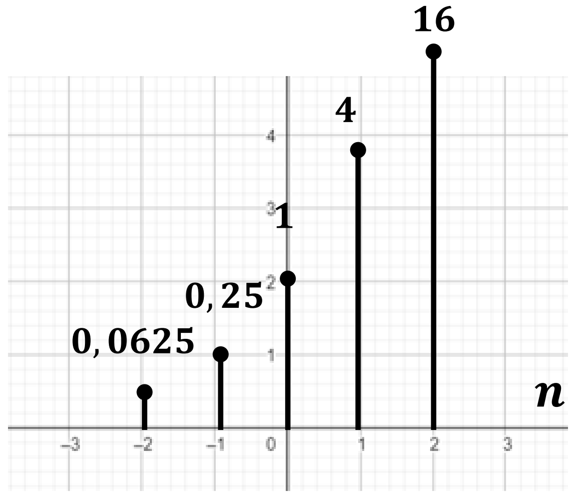
$$\sum_{n=-\infty}^{0} |(0{,}99)^n| = \frac{\overbrace{(0{,}99)^{-\infty}}^{\infty} - (0{,}99)^{0+1}}{1 - 0{,}99} = \infty$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{0} |x| = \frac{x^{-\infty} - x^{0+1}}{1 - x}}$$

Por lo tanto el sistema **no es estable**

$$d)\ \ h[n] = 4^n u[2-n],$$

(Definido entre -∞ $y\ 2,\ por\ -n$)



n	h[n]
-2	1/16 $(4^{-2} = {}^{1}/_{4^2})$
-1	1/4 (4^{-1})
0	1 (4^{0})
1	4 (4^{1})
2	16 (4^{2})

<u>CAUSAL:</u> $h(n) \neq 0\ \ para\ \ n < 0$

Por lo tanto, el sistema **no es causal**

$$\mathbf{Si}\ \ \boldsymbol{x > 1, x^{-\infty} = 0}$$
$$\mathbf{Si}\ \ \boldsymbol{x > 1, x^{\infty} = \infty}$$

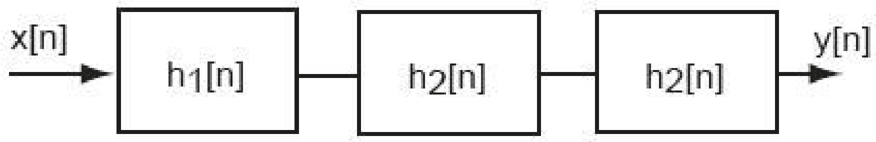
<u>ESTABLE:</u>

$$\sum_{n=-\infty}^{2} |(4)^n| = \frac{\cancelto{0}{(4)^{-\infty}} - (4)^{2+1}}{1-4} = \frac{-64}{-3} = \frac{64}{3} = 21{,}3 < \infty$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{2} |x| = \frac{x^{-\infty} - x^{2+1}}{1-x}}$$

Por lo tanto el sistema **es estable**

Problema 3. Considera la conexión en cascada (serie) de tres sistemas lineales e invariantes:



La respuesta $h_2[n]$ viene dada por:

$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$.

Considerando que la respuesta impulsiva total equivalente es:

$h_T[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$

a) Encontrar $h_1[n]$.
b) Estudiar la causalidad y la estabilidad del sistema $h_1[n]$.

a) Encontrar $h_1[n]$

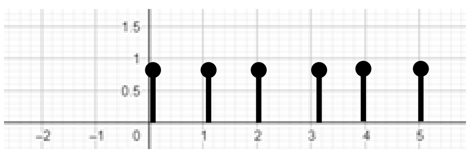
Los sistemas están en serie, entonces: $h_T[n] = h_1[n]*(h_2[n]*h_2[n]) = h_1[n]*h_{2eq}[n]$

Para hallar $h_1[n]$ hay que reducir el sistema, y antes calcular: $h_{2eq}[n] = h_2[n] * h_2[n]$

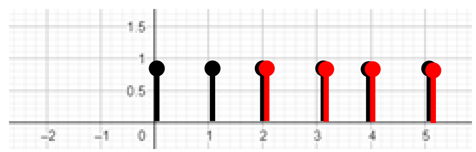
Como $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$

Aplicando las operaciones con secuencias

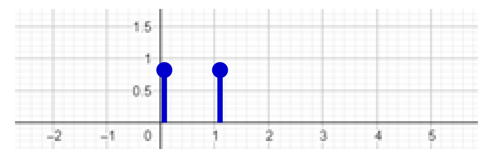
u[n]



u[n-2]



u[n]–u[n-2]



$\delta[n] + \delta[n-1] = h_2[n]$

Obtenemos $h_{2eq}[n]$, calculando la convolución mediante la "Superposición de impulsos unidad" (Método A - visto en teoría 7)

$\boldsymbol{h_{2eq}[n]} = (\delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n] + \delta[n-1]) = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

Una forma de obtener $\boldsymbol{h_1[n]}$ es realizar una tabla y calcular la convolución desplazando $h_{2eq}[n]$.

Las incógnitas serán los valores de $h_1[n]$, ya que se conocen los valores de la respuesta final $h_T[n]$ y $h_{eq2}[n]$

$h_T[n] = \mathbf{h_1[n]} * h_{eq2}[n]$; calcular h_1 conocidos h_T y h_{eq2}

Ahora calculamos el instante discreto en el que comenzará y terminará $h_1[n]$.

$h_T[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$.
$h_{2eq} = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$h_{Tini} = h_{1ini} + h_{eq2ini} \rightarrow h_{1ini} = h_{Tini} - h_{eq2ini} = -3 - 0 = -3$
$h_{Tfin} = h_{1fin} + h_{eq2fin} \rightarrow h_{1fin} = h_{Tfin} - h_{eq2fin} = 2 - (+)2 = 0$

Por lo tanto $h_1 \neq 0$ para $-3 \leq n \leq 0$

Tabla para resolver $h_1[n]$, aplicando:

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * y[n-k]$$

$h_{2eq}[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$h_T[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$

❸

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	k	h_T
❶ $h_1[k]$			X_1	X_2	X_3	X_4					
$h_{2eq}[n]$						1	2	1			
$h_{2eq}[-3-k]$	1	2	1							$k=-3$	1
$h_{2eq}[-2-k]$		1	2	1						$k=-2$	4
$h_{2eq}[-1-k]$			1	2	1					$k=-1$	7
❷ $h_{2eq}[-k]$				1	2	1				$k=0$	7
$h_{2eq}[1-k]$					1	2	1			$k=1$	4
$h_{2eq}[2-k]$						1	2	1		$k=2$	1
$h_{2eq}[3-k]$							1	2	1	$k=3$	0

$h_{2eq}[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$
$h_T[n] = \delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 7\delta[n+1] + 7\delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2]$

Ahora tenemos como incógnitas X_1, X_2, X_3 y X_4.

(n=-3) $X_1 \cdot 1 = 1$; $X_1 = 1/1 = 1$; $\mathbf{X_1 = 1}$

$\boxed{\text{Como } X_1=1}$

(n=-2) $X_1 \cdot 2 + X_2 \cdot 1 = 4$; $1 \cdot 2 + X_2 \cdot 1 = 4$; $X_2 = 4-2 = 2$; $\mathbf{X_2 = 2}$

(n=-1) $X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 2 + X_3 \cdot 1 = 7$; $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + X_3 \cdot 1 = 7$; $X_3 = 7-5 = 2$; $\mathbf{X_3 = 2}$

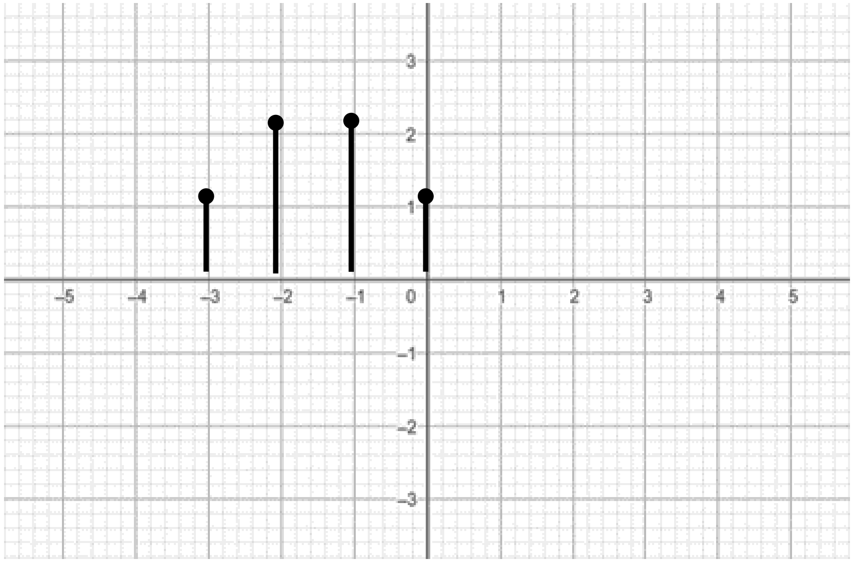
(n=0) $X_2 \cdot 1 + X_3 \cdot 2 + X_4 \cdot 1 = 7$; $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + X_4 \cdot 1 = 7$; $X_4 = 7-6 = 1$; $\mathbf{X_4 = 1}$

Por lo tanto $\mathbf{h_1[n] = \underbrace{1}_{X_1}\delta[n+3] + \underbrace{2}_{X_2}\delta[n+2] + \underbrace{2}_{X_3}\delta[n+1] + \underbrace{1}_{X_4}\delta[n]}$

b) Estudiar la causalidad y la estabilidad del sistema $h_1[n]$.

$h_1[n] = \delta[n + 3] + 2\delta[n + 2] + 2\delta[n + 1] + \delta[n]$

Analizando h1[n] se puede afirmar que el sistema **no es causal** ya que:



Tiene valores en la parte izquierda

$$h \neq 0 \;\; para \;\; n < 0.$$

n	$h_1[n]$
0	1
-1	2
-2	2
-3	1

y que el sistema **si es estable** ya que

$$\sum_{n=-3}^{0} |h_1[n]| = 1 + 2 + 2 + 1 = 6 < \infty$$

La respuesta da un valor finito

3.7.4. Sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes.

La salida de un LTI se puede calcular:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} LTI \\ \mathrm{h[n]} \end{matrix}} \longrightarrow y[n]$$

1. Mediante la convolución $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * h[n-k]$$

2. Mediante ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes

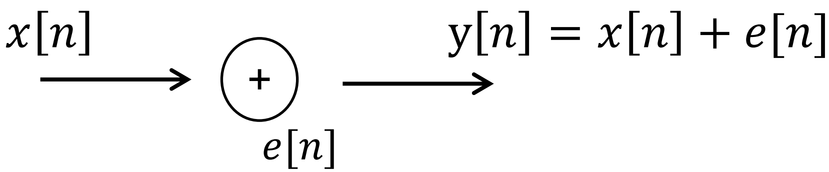
$$y[n] = \underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{n} bi\ x[n-i]}}_{\text{Parte no recurrente}} + \underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{n} ai\ y[n-i]}}_{\text{Parte recurrente}}$$

Siendo ***n****, el orden, y*
bi *y* **ai** *los coeficientes lineales*

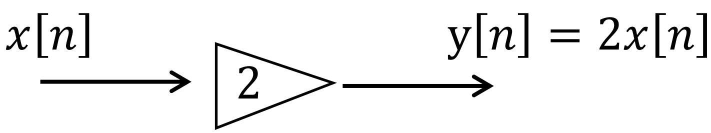
3.7.5. Diagrama de bloques

La ecuación en diferencias se puede convertir en **diagrama de bloques**.
Para poder representar el circuito y luego implementarlo en un ordenador.

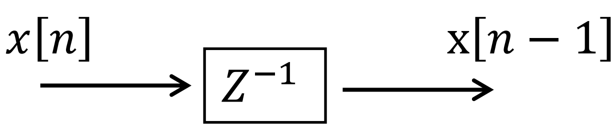
SUMADORES

1) 

MULTIPLICADORES

2) 

CELDA DE RETARDO

3) 

Problema 4: Calcular la salida del sistema y representarlo mediante diagrama de bloques

$$y[n] = x[n] + {}^{1}/_{2}\; x[n-1] - 2\,x[n-2] + 1\,y[n-1]$$

$$1y[n] = 1x[n] + {}^{1}/_{2}\; x[n-1] - 2\,x[n-2] + 1\,y[n-1]$$

Ecuación de un filtro.

$$1y[n] - \mathbf{1\; y[n-1]} = 1x[n] + {}^{1}/_{2}\; x[n-1] - 2\,x[n-2]$$

$$ai = [1 \quad -1] \qquad bi = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

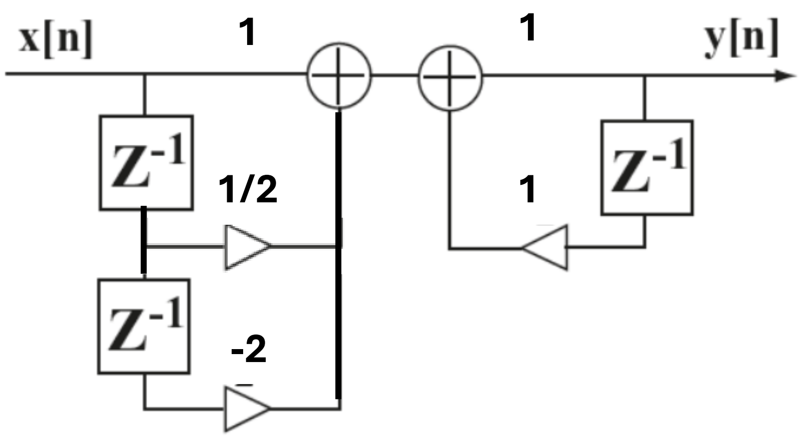
Si **no hay parte recurrente (y[n-])** , h[n] e y[n] son de duración finita.
A la ecuación se le llama FIR (Finite Impulse Response)

Si **hay parte recurrente (y[n-])** , h[n] e y[n] son de duración infinita.
A la ecuación se le llama IIR (Infinite Impulse Response)

En el caso de IIR es mejor calcular la salida con la ecuación en diferencias que con la convolución

Representación mediante diagrama de bloques

$$1y[n] = 1x[n] + {}^{1}/_{2}\ x[n-1] - 2\,x[n-2] + 1\,y[n-1]$$

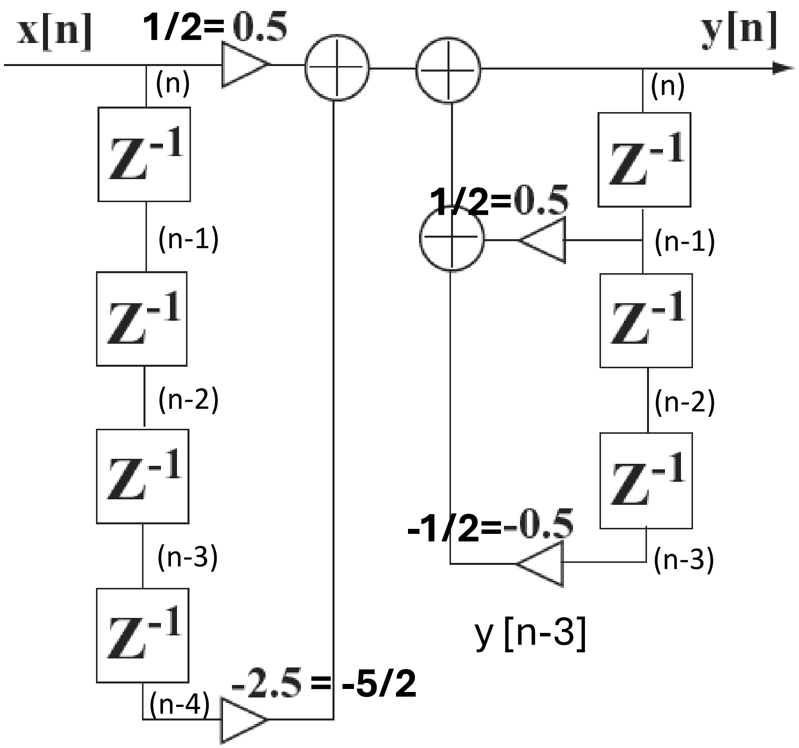


$$y[n] = 1x[n] + {}^{1}/_{2}\ x[n-1] - 2\,x[n-2] + 1\,y[n-1]$$

Es un filtro IIR

Problema 5. Representa el diagrama de bloques del siguiente sistema descrito por ecuaciones en diferencias lineales: **2**$y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$

$$y[n] = \frac{1}{2}\,x[n] - \frac{5}{2}\,x[n-4] + \frac{1}{2}\,y[n-1] - \frac{1}{2}\,y[n-3]$$

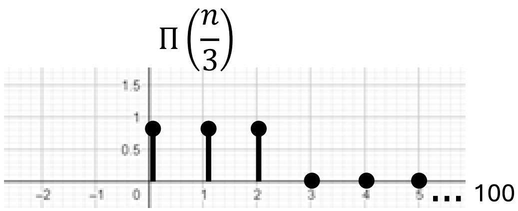


En MATLAB

```
n=[ ];
x=[ ];
a=[1/2  0  0  0 -5/2]
b=[1 -1/2 0 1/2]
y= filter (b,a,x)
```

Problema 6. Dadas x[n] e y[n], calcular en Matlab la respuesta y[n] para $0 \le n \le 100$

$$X[n] = \Pi\left(\frac{n}{3}\right)$$



$$y[n] = 1x[n] + {}^{1}/_{2}\; x[n-1] - 2\,x[n-2] + 1\,y[n-1]$$

En MatLab:

$$n = [0:1:100];$$
$$x = [1,1,1,zeros\ (1,98)]$$
$$x = [ones(1,3), zeros(1,98)]$$

** Se ve en prácticas*

En MatLab: $y[n] = x[n] \ldots$

$$b = [1\,, {}^{1}/_{2}\,, -2]$$
$$a = [1\,, -1]$$
$$y = filter[b, a, x]$$
$$stem\ (n,y)$$