Curso 2023/24

FUNDAMENTOS FÍSICOS PARA INGENIERÍA

GRADO EN INGENIERÍA EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

TEMA 4. CINEMÁTICA Y DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Manuel Gutiérrez Ramírez

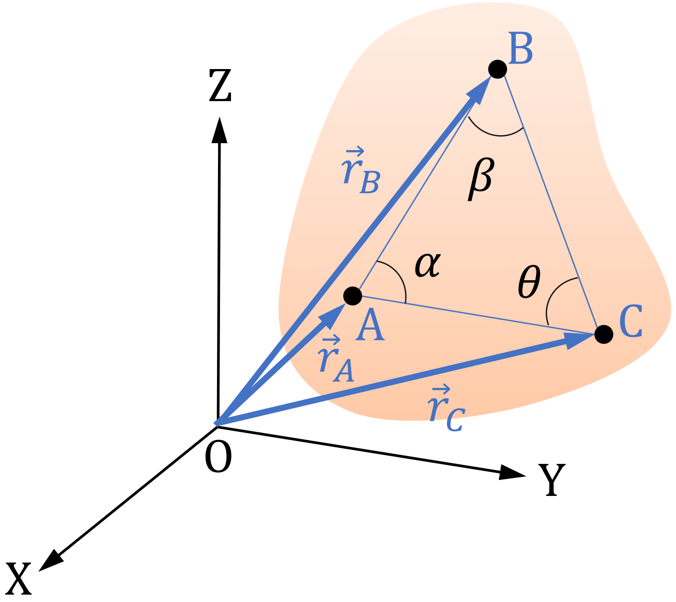
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante

Contenidos

1.1. Movimiento del sólido rígido

Sólido rígido

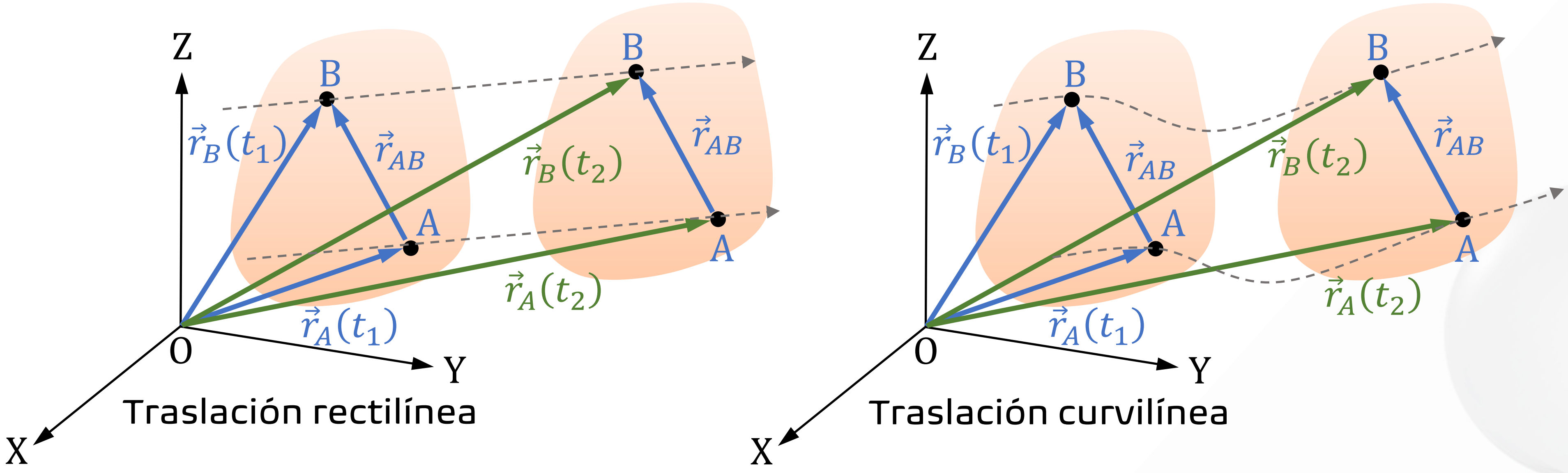
- Compuesto por un conjunto de puntos materiales tales que las distancias entre dos puntos cualesquiera permanecen fija e independiente del tiempo
- Cada uno de los puntos describe su correspondiente trayectoria, con una velocidad y una aceleración determinadas



- Cinco tipos de movimiento de un sólido rígido
  - Traslación pura
  - Rotación alrededor de un eje fijo
  - Rotación en torno a un punto fijo
  - Movimiento plano general
  - Movimiento general

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento de traslación pura



Todos los puntos del sólido rígido recorren trayectorias paralelas e idénticas, y tienen la misma velocidad y aceleración para un instante determinado

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{AB} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{r}_B(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_A(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{AB}}{\mathrm{d}t}$$

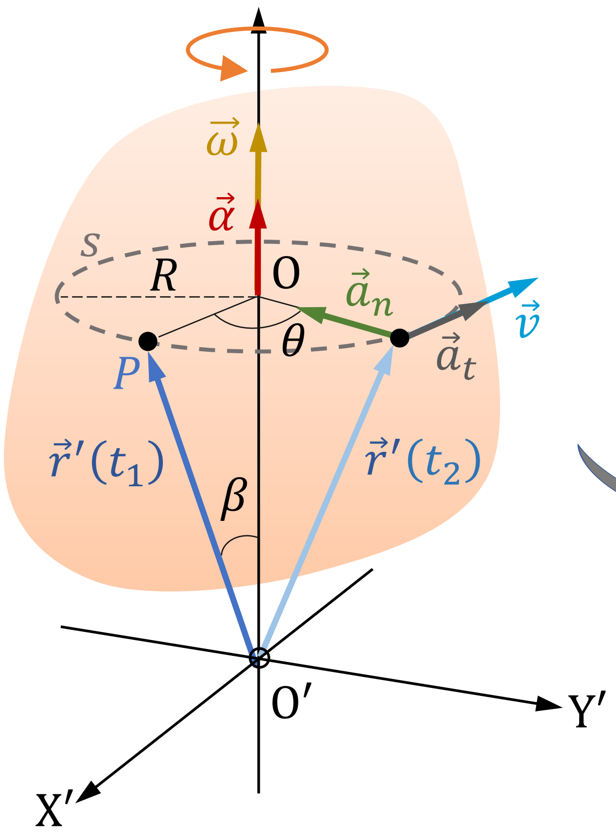
$\vec{r}_{AB}$ → Constante en módulo y dirección → $\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{AB}}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_B(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_A(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow \vec{v}_B(t) = \vec{v}_A(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_B(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_A(t)}{\mathrm{d}t^2} \rightarrow \vec{a}_B(t) = \vec{a}_A(t)$$

1.1. Movimiento del sólido rígido

Rotación alrededor de un eje fijo



Todos los puntos del sólido rígido describen trayectorias circulares cuyos centros se encuentran en el eje de rotación. Los puntos situados sobre el eje de rotación tienen velocidad nula

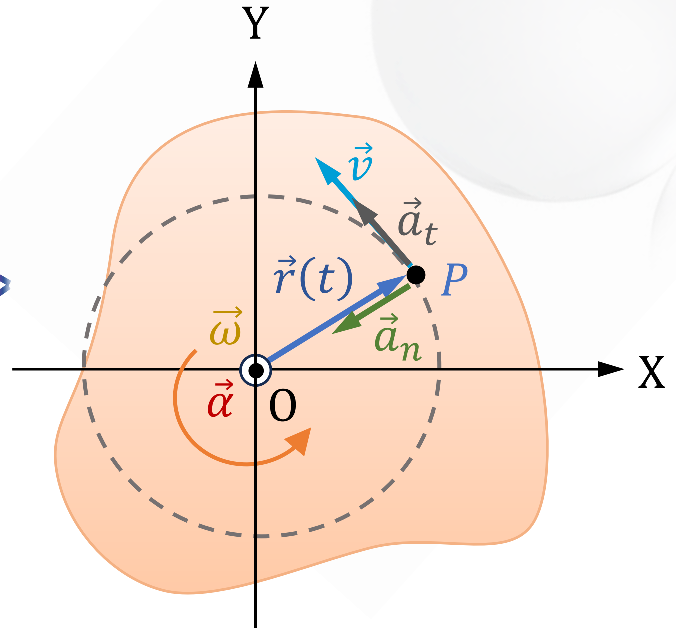
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r'_x & r'_y & r'_y \end{vmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \omega\, |\vec{r}'| \sin(\beta) = \omega R$$

Considerando el plano del movimiento

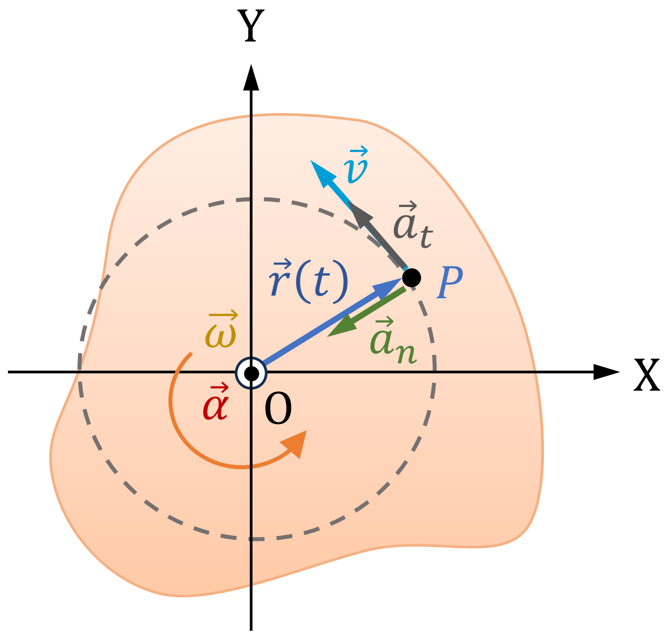
$$O \equiv O'$$

$$\vec{r}'(t) \equiv \vec{r}(t)$$



1.1. Movimiento del sólido rígido

Rotación alrededor de un eje fijo



Velocidad $\Rightarrow$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_x & r_x \end{vmatrix}$

$\vec{\omega}$ es perpendicular al plano del movimiento $\longrightarrow$ $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

Aceleración $\Rightarrow$ $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Aceleración tangencial $\gg$ $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

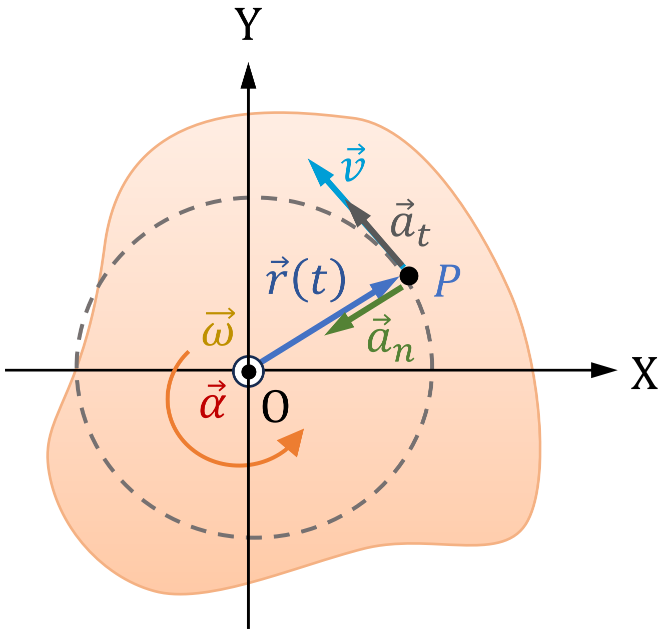
Aceleración normal $\gg$ $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

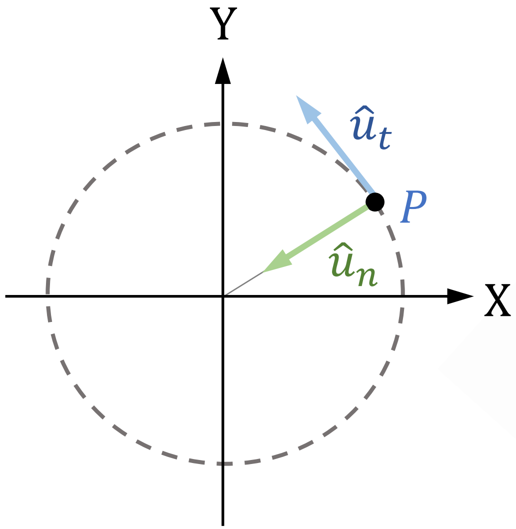
$\vec{\alpha}$ es perpendicular al plano del movimiento $\longrightarrow$ $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$

1.1. Movimiento del sólido rígido

Rotación alrededor de un eje fijo

Utilizando los vectores unitarios tangente ($\hat{u}_t$) y normal ($\hat{u}_n$) a la trayectoria





$$\vec{v} = |\vec{v}|\hat{u}_t = v\hat{u}_t$$

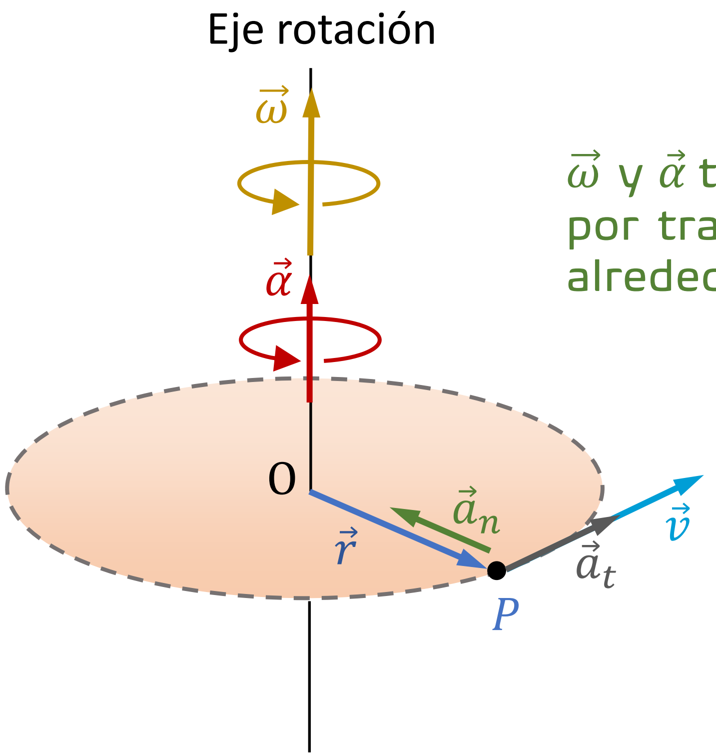
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\hat{u}_t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t + v\frac{\mathrm{d}\hat{u}_t}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t = \frac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t = R\alpha\hat{u}_t$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\hat{u}_n = \frac{(R\omega)^2}{R}\hat{u}_n = R\omega^2\hat{u}_n$$

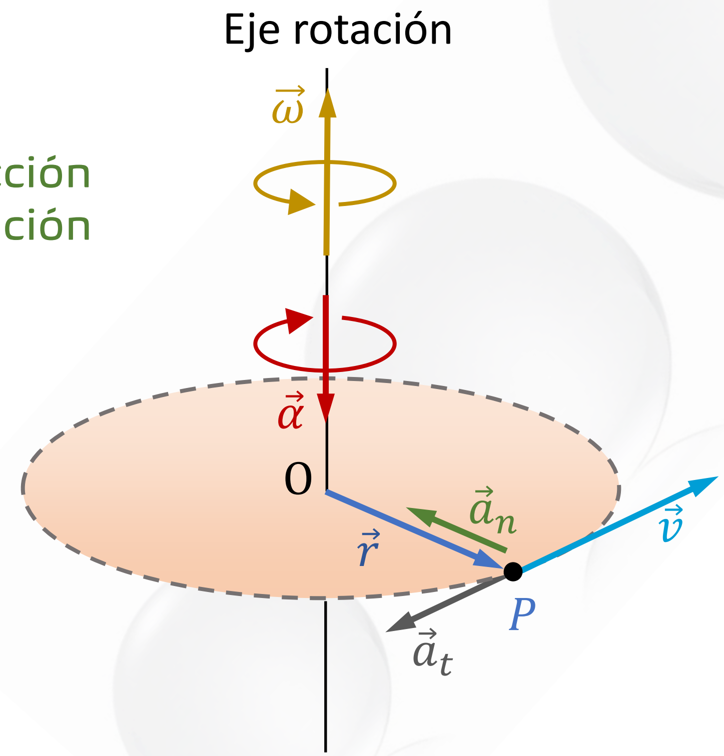
1.1. Movimiento del sólido rígido

Rotación alrededor de un eje fijo



Cuando $\vec{\alpha}$ tiene el mismo sentido que $\vec{\omega}$ el sólido gira cada vez rápido

$\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ tienen misma dirección por tratarse de una rotación alrededor de un eje fijo



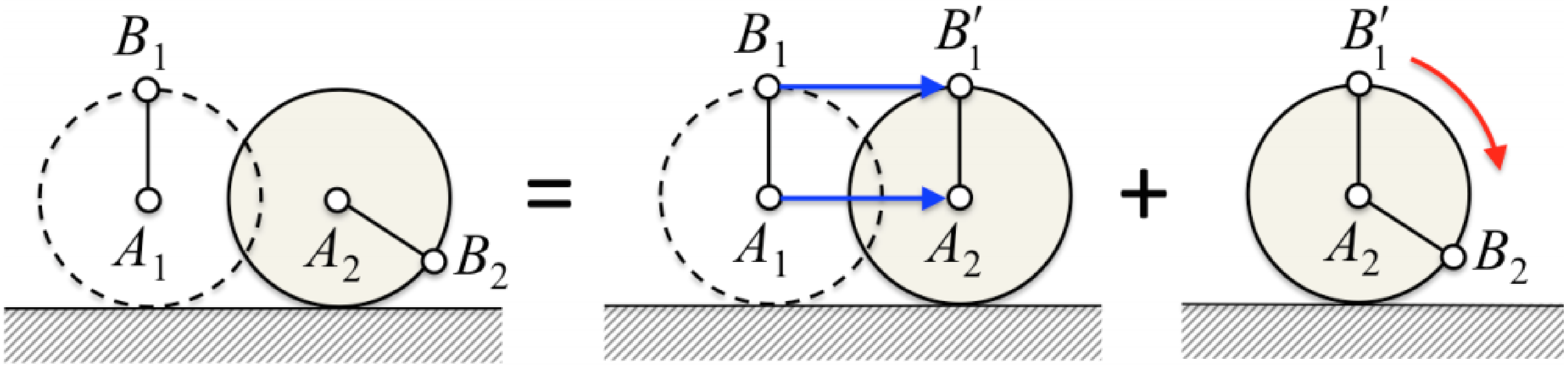
Si $\vec{\alpha}$ tiene sentido opuesto a $\vec{\omega}$, el sólido está frenando

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento plano general

En un movimiento plano cada punto del sólido rígido permanece en un plano

Un movimiento plano general siempre se puede considerar como la suma de una traslación y una rotación



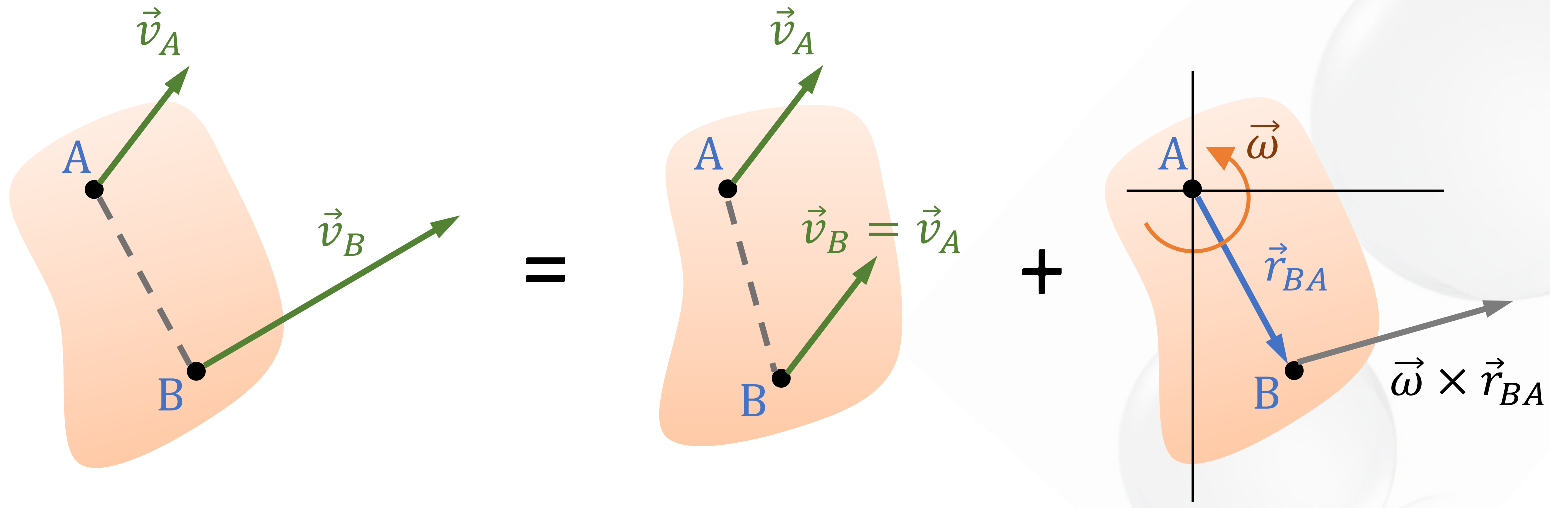
Movimiento plano = Traslación con A + Rotación alrededor de A

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento plano general

En un movimiento plano cada punto del sólido rígido permanece en un plano

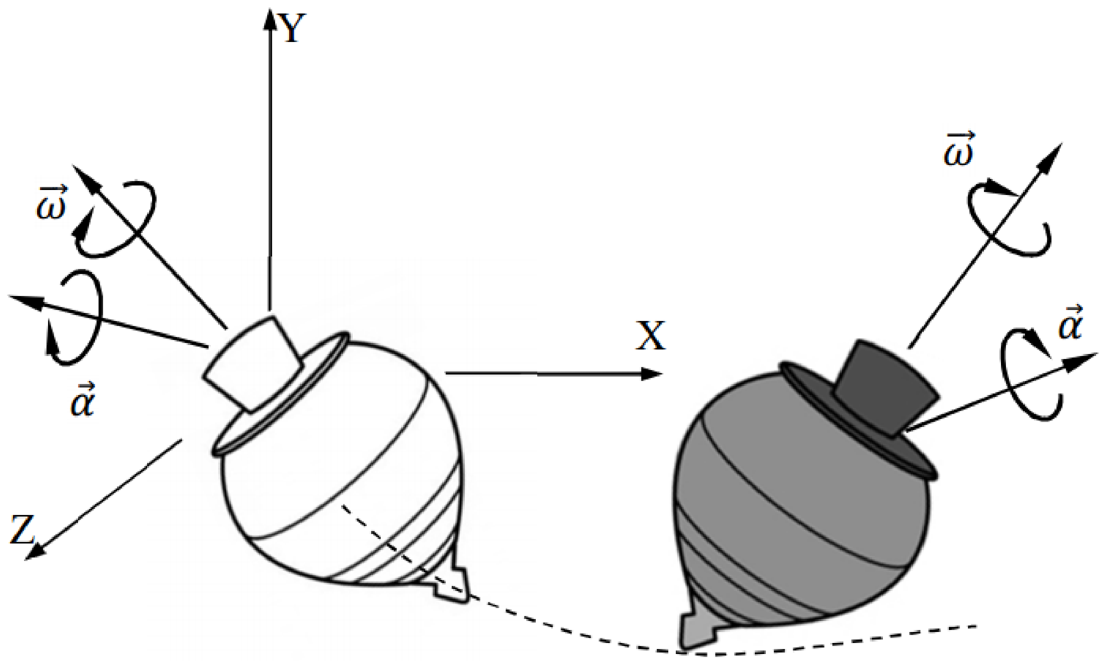
Un movimiento plano general siempre se puede considerar como la suma de una traslación y una rotación



Movimiento plano = Traslación con A + Rotación alrededor de A

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento general



La peonza puede girar en un punto fijo, variando la orientación del eje de rotación, o desplazarse, en cuyo caso el eje de rotación además de cambiar de orientación se desplaza

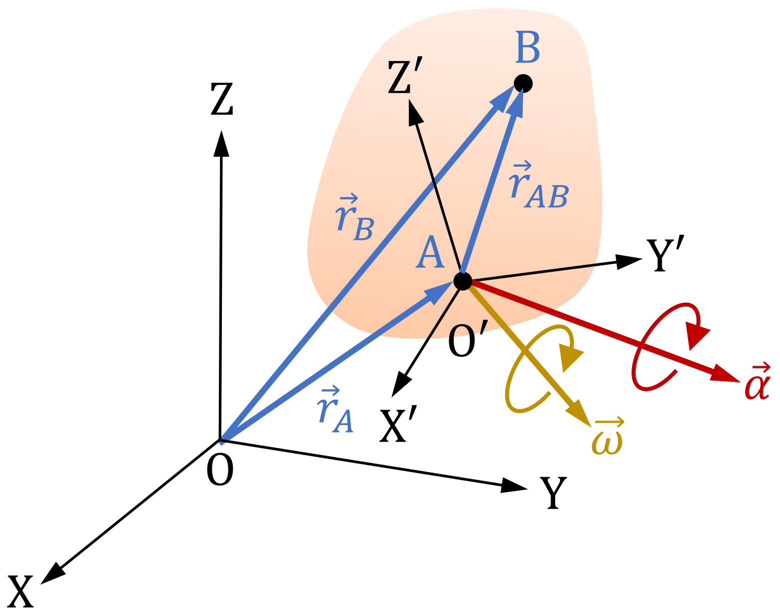
$\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ no tienen misma dirección por tratarse de un movimiento general

$\vec{\omega}$: dirección del eje instantáneo de rotación variable en el tiempo

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento general. Campo de velocidades y aceleraciones

¿Cuál es la relación que existe entre las velocidades (y las aceleraciones) de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido?



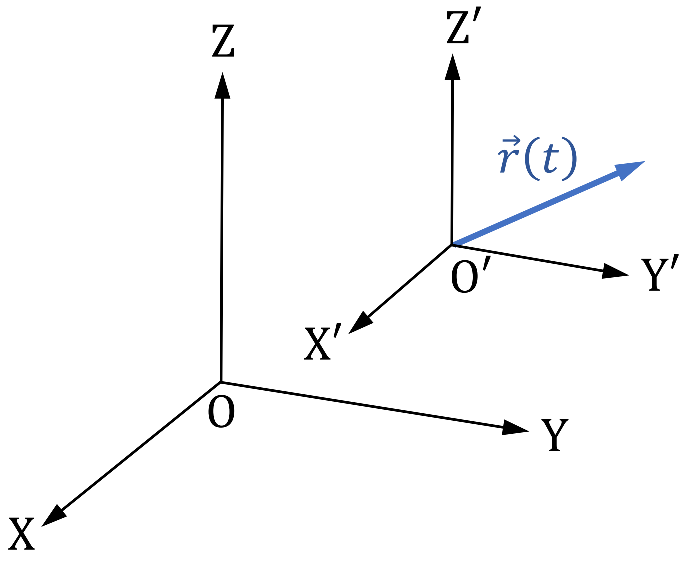
Sistema de referencia fijo OXYZ

Sólido rígido se mueve libremente

Sistema móvil O´X´Y´Z´ unido rígidamente al sólido

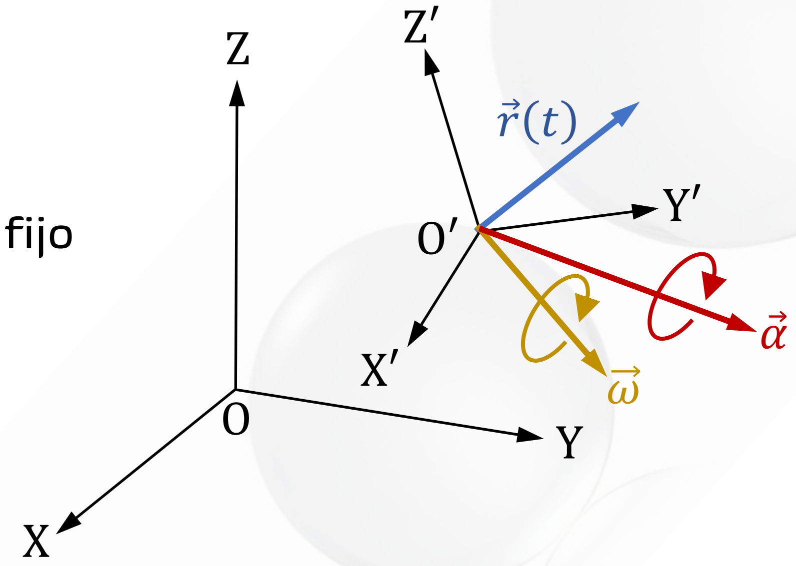
1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento general



O′X′Y′Z′: Sistema referencia móvil
(traslación)

OXYZ: Sistema referencia fijo
$\vec{r}$ se define en O′X′Y′Z′



O′X′Y′Z′: Sistema referencia móvil
(rotación)

$$\left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{OXYZ} = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{O'X'Y'Z'}$$

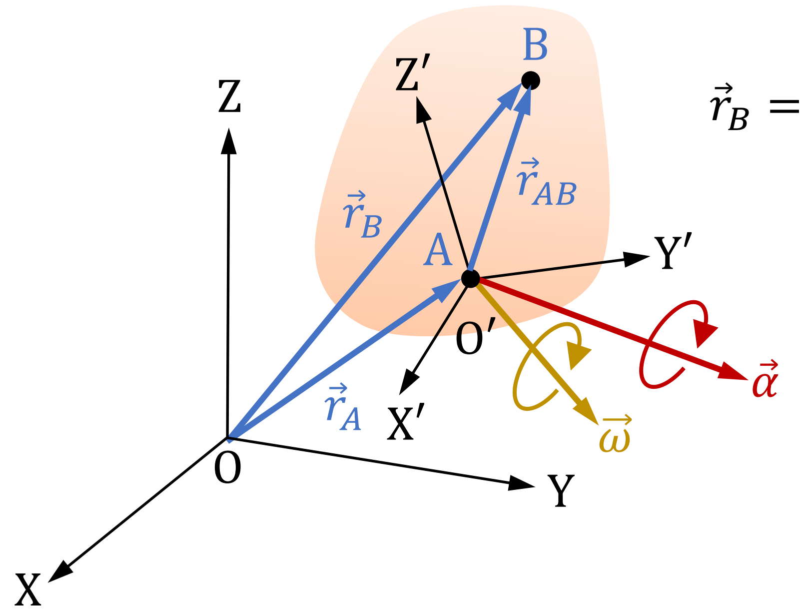
Ley de Boure

$$\left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{OXYZ} = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{O'X'Y'Z'} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento general. Campo de velocidades y aceleraciones

¿Cuál es la relación que existe entre las velocidades (y las aceleraciones) de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido?



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \;\Rightarrow\; \left.\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right|_{OXYZ} = \left.\frac{d\vec{r}_B}{dt}\right|_{OXYZ} + \left.\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}\right|_{OXYZ} \;\Rightarrow\; \vec{v}_B = \vec{v}_A + \left.\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}\right|_{OXYZ}$$

$$\left.\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}\right|_{OXYZ} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}\right|_{O'X'Y'Z'}}_{=0} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$$

$\vec{r}_{AB}$ módulo constante y no cambia su dirección visto desde el sistema móvil

Sistema de referencia fijo OXYZ

Sólido rígido se mueve libremente

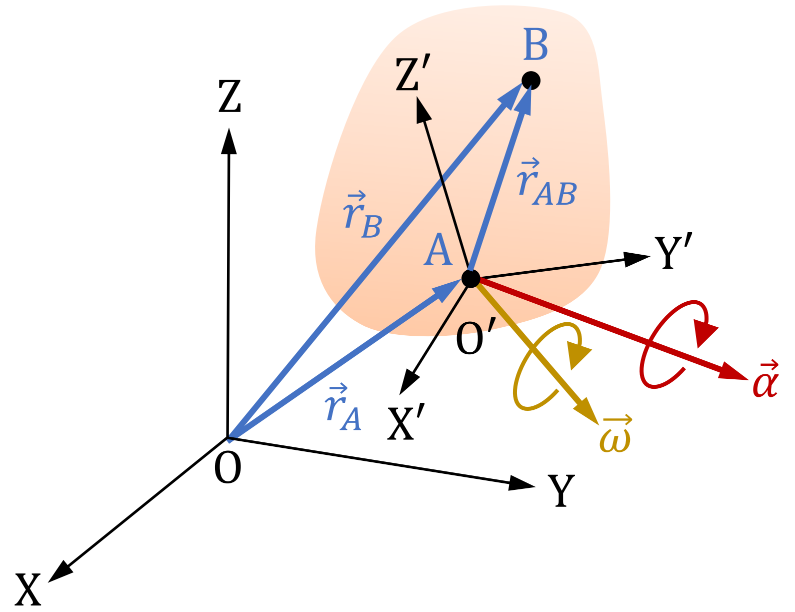
Sistema móvil O´X´Y´Z´ unido al sólido

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}}$$

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento general. Campo de velocidades y aceleraciones

¿Cuál es la relación que existe entre las velocidades (y las aceleraciones)
de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido?



$$\left.\frac{d\vec{v}_B}{dt}\right|_{OXYZ} = \left.\frac{d\vec{v}_A}{dt}\right|_{OXYZ} + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_{OXYZ} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}\right|_{OXYZ}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})}$$

Sistema de referencia fijo OXYZ

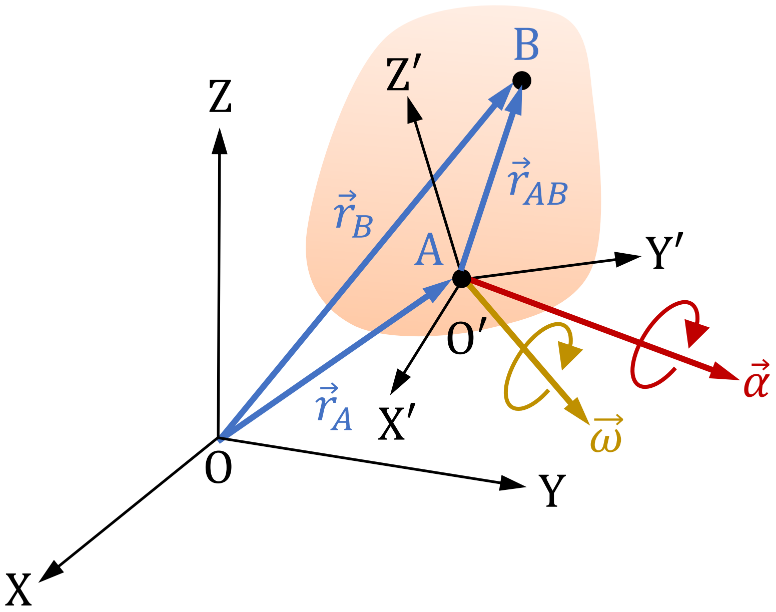
Sólido rígido se mueve libremente

Sistema móvil O´X´Y´Z´ unido al sólido

1.1. Movimiento del sólido rígido

Movimiento general. Campo de velocidades y aceleraciones

¿Cuál es la relación que existe entre las velocidades (y las aceleraciones) de dos puntos cualesquiera pertenecientes a un sólido rígido?



$$\vec{v}_B = \boxed{\vec{v}_A} + \boxed{\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}}$$

$$\vec{a}_B = \boxed{\vec{a}_A} + \boxed{\vec{\alpha} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})}$$

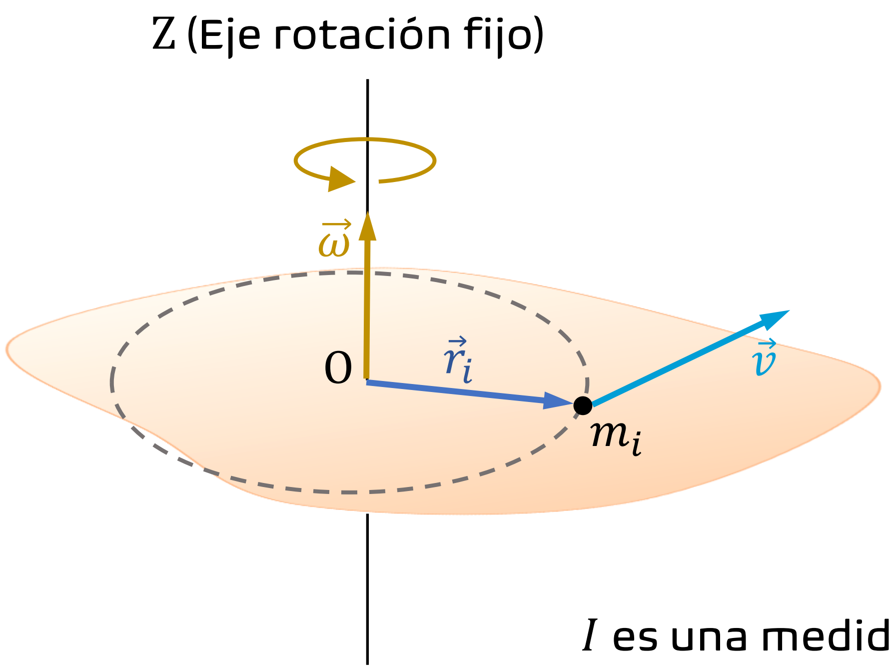
Traslación de A

Rotación de B alrededor de A

La velocidad y/o aceleración de un punto B cualquiera del sólido puede calcularse como la suma de la velocidad y/o aceleración de un punto cualquiera A y la velocidad y/o aceleración debidas a la rotación del punto B alrededor de un eje que pasa por el punto A

Contenidos

1.2. Energía cinética rotacional, momento de inercia y energía potencial



$$K_R = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i r_i^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i^n m_i r_i^2\right)\omega^2$$

Momento de inercia ➡ $\boxed{I = \sum_i^n m_i r_i^2}$ Unidades $\mathrm{kg\cdot m^2}$

Energía cinética rotacional ➡ $\boxed{K_R = \frac{1}{2} I\omega^2}$ ω: rad/s; K_R: J

I es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional

(La masa es una medida de la tendencia de un objeto a resistir cambios en su movimiento traslacional)

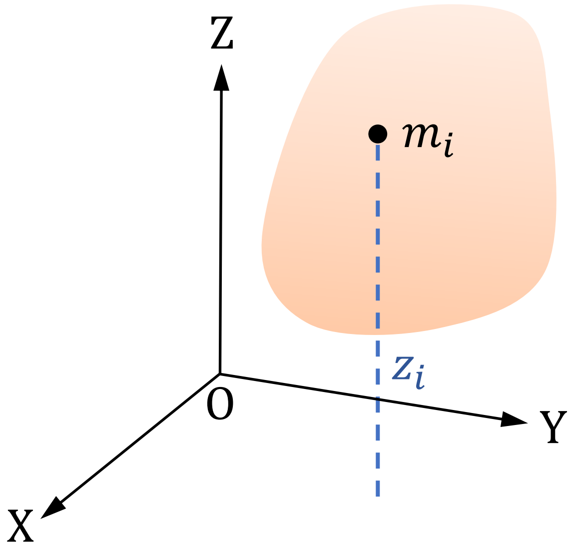
I depende de la distribución de masa del objeto respecto al eje de rotación

Cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando

1.2. Energía cinética rotacional, momento de inercia y energía potencial

Si la aceleración de la gravedad g es la misma en todos los puntos del cuerpo

La energía potencial gravitacional U_g sería la misma si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa del cuerpo



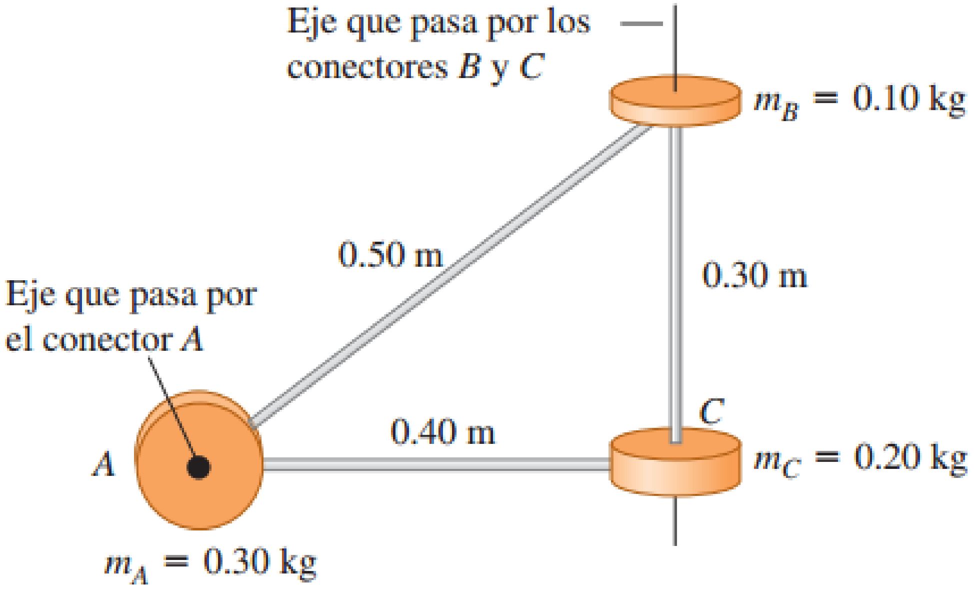
$$U_g = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \cdots = \sum_i^n m_i g z_i = \left(\sum_i^n m_i z_i\right) g = M g z_{CM}$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i^n m_i z_i$$

$$\boxed{U_g = M g z_{CM}}$$

Válida para cualquier cuerpo extendido, sea rígido o no

1.2. Energía cinética rotacional, momento de inercia y energía potencial



¿I del cuerpo alrededor del eje que pasa por el centro del disco A y es perpendicular al plano del diagrama?

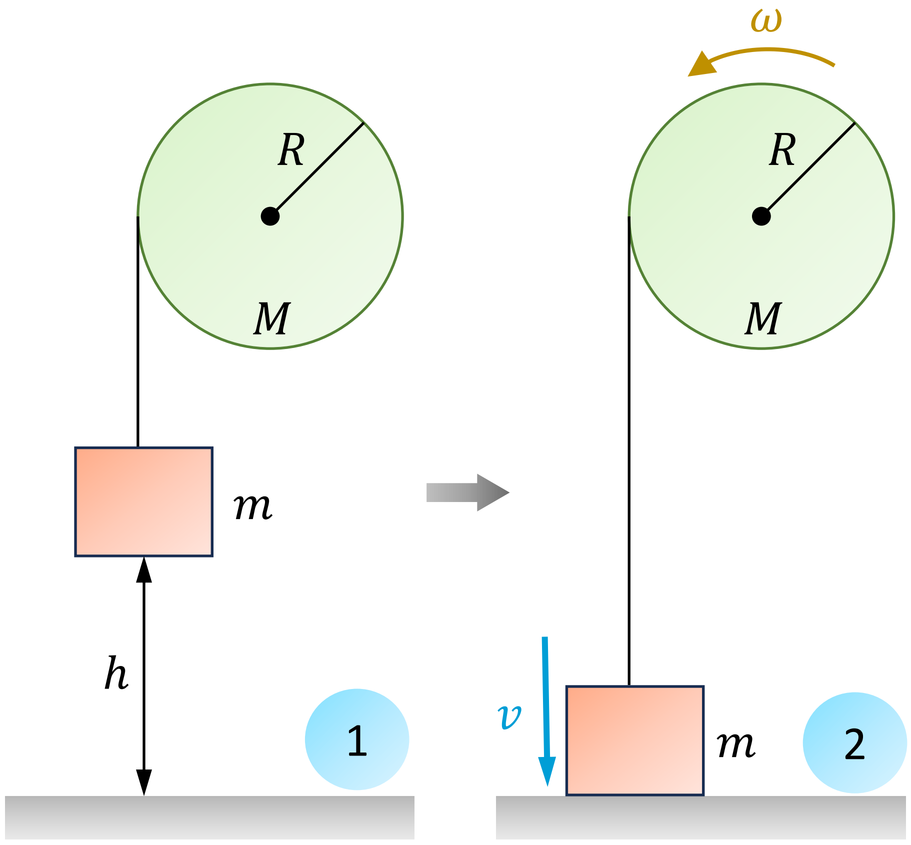
$$I = \sum_{i}^{n} m_i r_i^2 = 0.10 \cdot 0.50^2 + 0.20 \cdot 0.40^2 = 0.057\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

¿I del cuerpo alrededor del eje que pasa por el centro de los discos B y C?

$$I = \sum_{i}^{n} m_i r_i^2 = 0.30 \cdot 0.40^2 = 0.048\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

$I\ (\text{eje A}) > I(\text{eje B y C})$ → Es más fácil hacer girar la pieza sobre el eje B y C

1.2. Energía cinética rotacional, momento de inercia y energía potencial



Cilindro gira sin fricción. El cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar. ¿Cuál es la celeridad v y la velocidad angular ω cuando el bloque golpea el suelo?

$$E_{m,1} = E_{m,2}$$

$$K_1 + U_{g,1} = K_2 + U_{g,2}$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{M}{2m}}} \quad \Big| \quad \omega = \frac{v}{R}$$

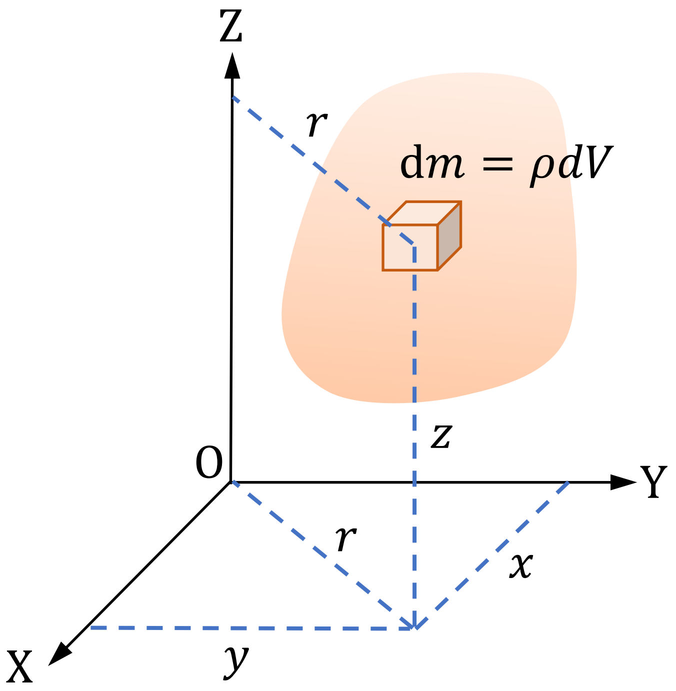
Contenidos

1.3. Cálculo del momento inercia

Sistemas discretos de partículas ➜ $I = \sum_{i}^{n} m_i r_i^2$

Sistemas continuos ➜ $I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i}^{n} (\Delta m_i) r_i^2 = \int r^2 \, \mathrm{dm} = \int r^2 \rho dV$

Más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen, superficie o línea



$r^2 = x^2 + y^2$ ➜

$$I_Z = \int (x^2 + y^2) \rho dV = \rho \int (x^2 + y^2) \, dV$$

$$I_X = \int (y^2 + z^2) \rho dV = \rho \int (y^2 + z^2) \, dV$$

$$I_Y = \int (x^2 + z^2) \rho dV = \rho \int (x^2 + z^2) \, dV$$

Si el cuerpo es homogéneo

1.3. Cálculo del momento inercia

Sistemas discretos de partículas → $$I = \sum_{i}^{n} m_i r_i^2$$

Sistemas continuos → $$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i}^{n} (\Delta m_i) r_i^2 = \int r^2\, \mathrm{dm} = \int r^2\, \rho dV$$

Más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen

$$I_Z = \int (x^2 + y^2)\, \rho dV = \rho \int (x^2 + y^2)\, dV$$

$$I_X = \int (y^2 + z^2)\, \rho dV = \rho \int (y^2 + z^2)\, dV$$

$$I_Y = \int (x^2 + z^2)\, \rho dV = \rho \int (x^2 + z^2)\, dV$$

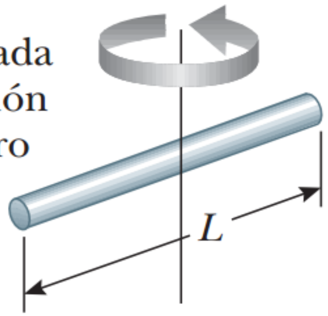
Para una placa delgada de espesor constante y homogénea ≫ $z \approx 0$

$$I_Z = I_X + I_Y$$

1.3. Cálculo del momento inercia

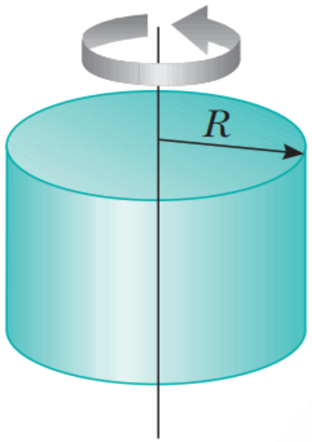
Barra larga delgada con eje de rotación a través del centro

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$



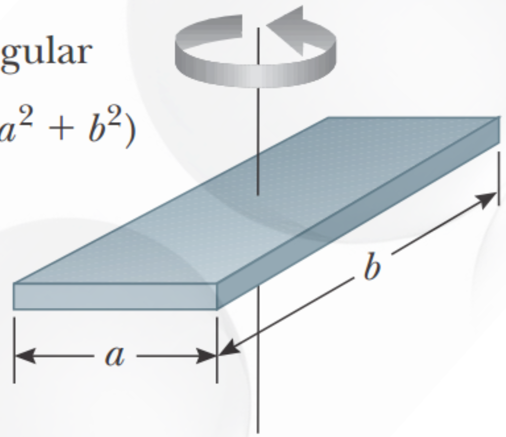
Cilindro sólido o disco

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$$



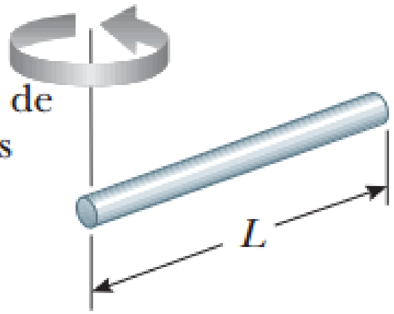
Placa rectangular

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



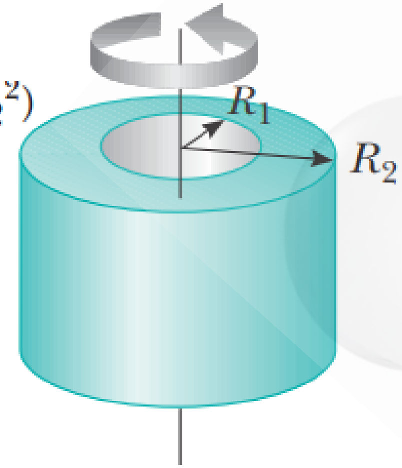
Barra larga delgada con eje de rotación a través de un extremo

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



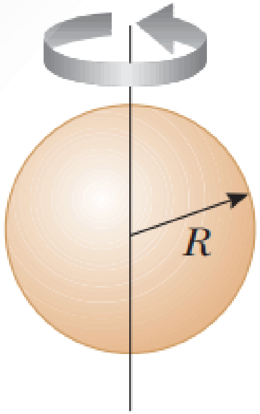
Cilindro hueco

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M({R_1}^2 + {R_2}^2)$$

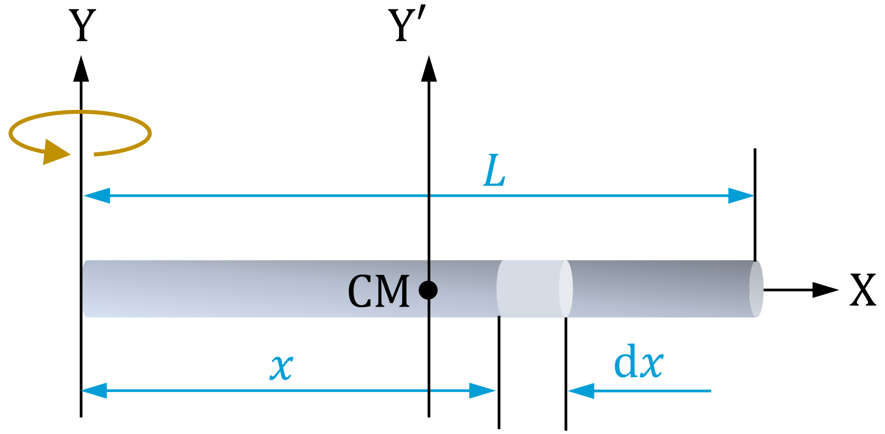


Esfera sólida

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$$



1.3. Cálculo del momento inercia



- I respecto al eje perpendicular a la barra que pasa por uno de sus extremos

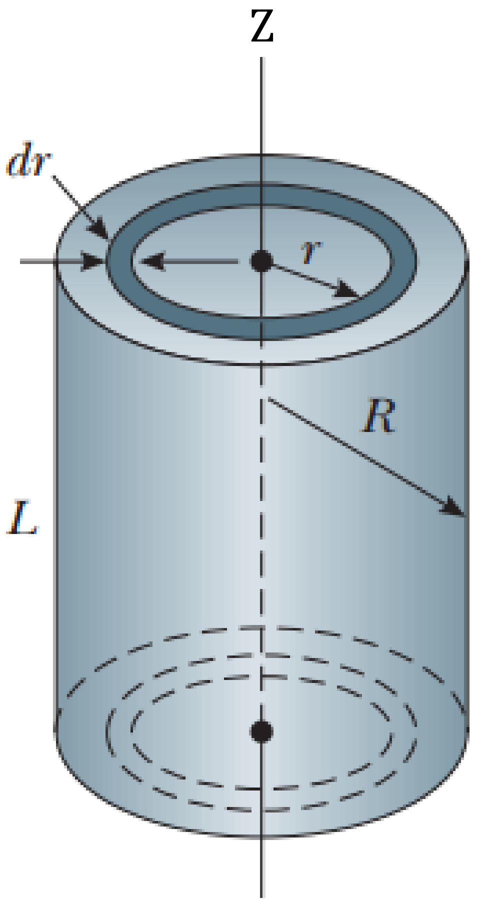
$$I_{\mathrm{Y}} = \int_0^L x^2 \mathrm{d}m = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} M L^2$$

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = \frac{M}{L} \mathrm{d}x$$

- I respecto al eje perpendicular a la barra que pasa el centro de masa

$$I_{\mathrm{CM}} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12} M L^2$$

1.3. Cálculo del momento inercia



- I respecto al eje central Z

$$I_Z = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int \rho r^2\,dV = \int_0^R \rho r^2 2\pi L r \mathrm{d}r = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}(\pi r^2 L) = 2\pi L r \mathrm{d}r$$

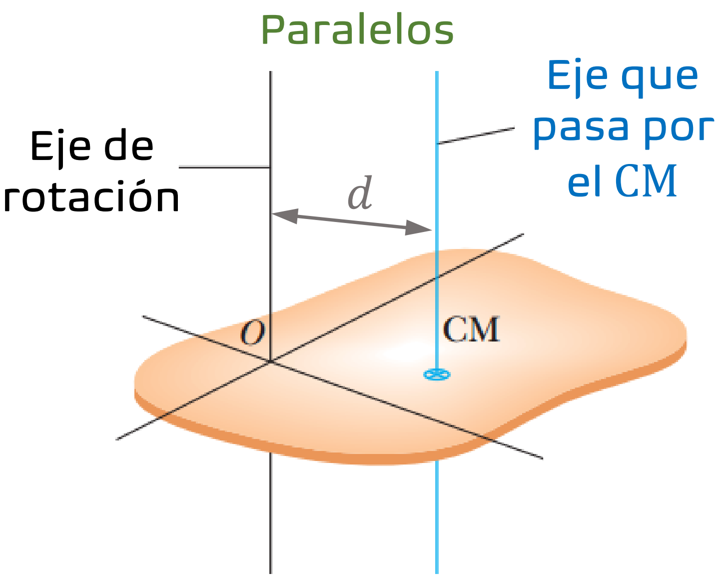
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L} \quad \Rightarrow \quad I_Z = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{M}{\pi R^2 L}\right) L R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

Contenidos

1.4. Teorema de los ejes paralelos (Steiner)

Un cuerpo no tiene un número infinito de momento de inercia porque el número de ejes sobre los que podría girar es infinito

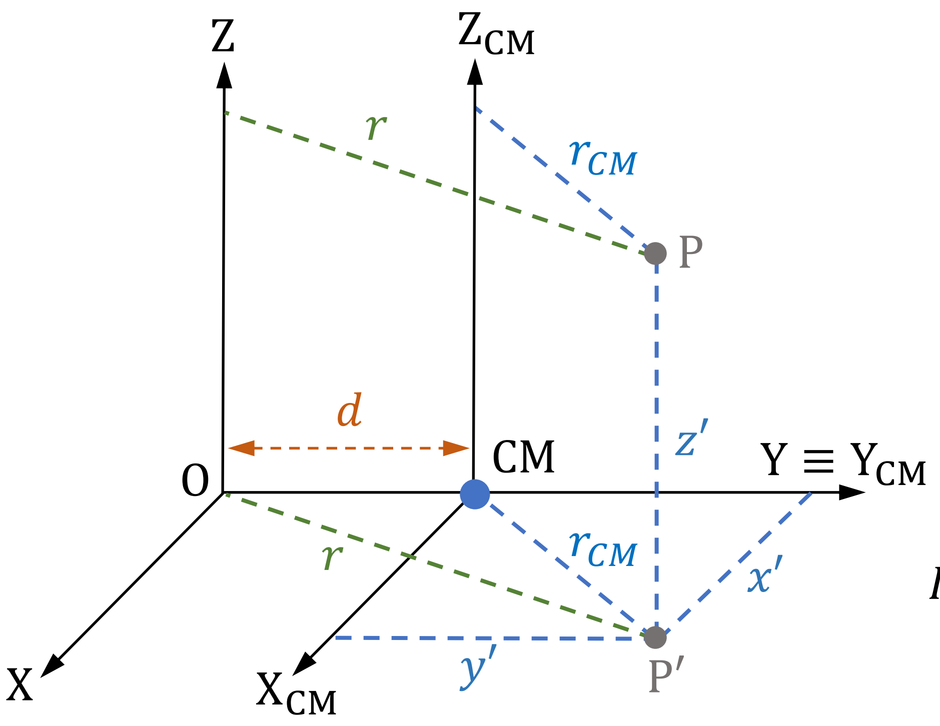
Simplificación del cálculo de los momentos de inercia ➤ *Teorema de los ejes paralelos (Steiner)*



$$\boxed{I = I_{CM} + Md^2}$$

Relaciona el momento de inercia de un eje que pasa por el centro de masa de un objeto con el momento de inercia respecto a otro eje paralelo al primero

1.4. Teorema de los ejes paralelos (Steiner)



$\mathrm{P}(x', y', z')$ Coordenadas de un punto cualquiera P del cuerpo en el sistema de referencia centrado en el CM

$\mathrm{CM}(0{,}0{,}0)$ Coordenadas del CM en el sistema $X_{\mathrm{CM}}\ Y_{\mathrm{CM}}\ Z_{\mathrm{CM}}$

$$0 = \frac{\sum my'}{\sum m} \rightarrow \sum my' = 0$$

$$r_{\mathrm{CM}}^2 = x'^2 + y'^2$$

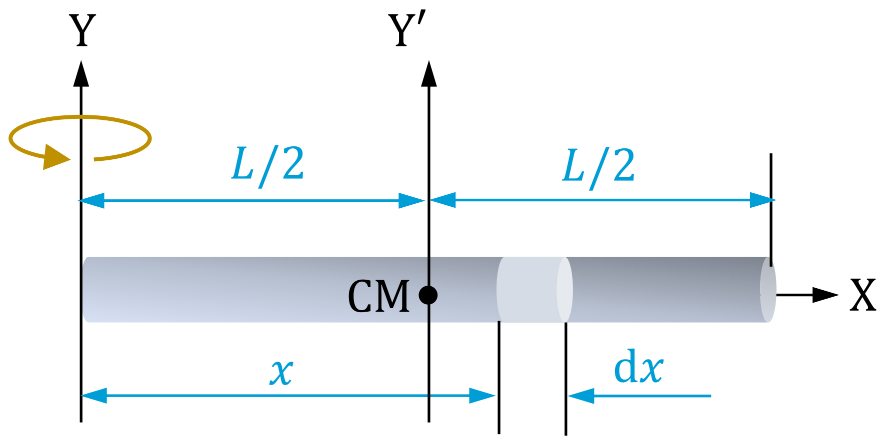
$$r^2 = x'^2 + (d + y')^2 = x'^2 + y'^2 + d^2 + 2y'd = r_{\mathrm{CM}}^2 + d^2 + 2y'd$$

$$I_{\mathrm{Z}} = \sum mr^2 = \sum m\left(r_{\mathrm{CM}}^2 + d^2 + 2y'd\right) = \sum mr_{\mathrm{CM}}^2 + d^2\sum m + 2d\sum my'$$

$$\sum mr_{\mathrm{CM}}^2 = I_{\mathrm{CM}} \quad \Big| \quad d^2\sum m = Md^2 \quad \Big| \quad 2d\sum my' = 0$$

$$\boxed{I = I_{\mathrm{CM}} + Md^2}$$

1.4. Teorema de los ejes paralelos (Steiner)



$$I_{CM} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I_Y = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I_Y = \int_0^L x^2 \mathrm{d}m = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} \mathrm{d}x = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} ML^2$$

Contenidos

1.5. Momentos de inercia de figuras compuestas

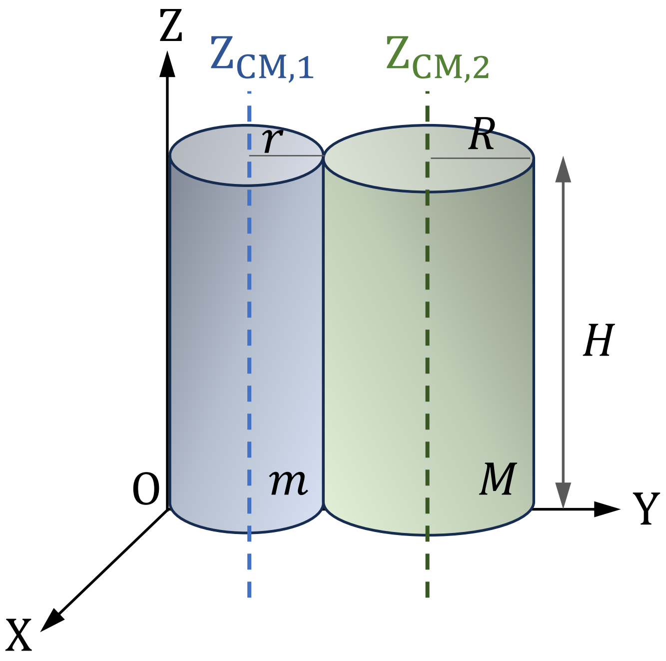
El momento de inercia del cuerpo compuesto, respecto a un eje cualquiera, es igual a la suma de los momentos de inercia respecto de dicho eje de las distintas partes del cuerpo

$$I_{\mathrm{X}} = \int_{M} (y^2 + z^2)\mathrm{d}m = \int_{M_1} (y^2 + z^2)\mathrm{d}m_1 + \int_{M_2} (y^2 + z^2)\mathrm{d}m_2 + \cdots + \int_{M_N} (y^2 + z^2)\mathrm{d}m_N = I_{X_1} + I_{X_2} + \cdots + I_{X_N}$$

De forma análoga para I_{Y} e I_{Z}

Cuando una de las partes componentes es un hueco, su momento de inercia deberá restarse del momento de inercia de la parte total para obtener el momento de inercia del cuerpo compuesto

1.5. Momentos de inercia de figuras compuestas



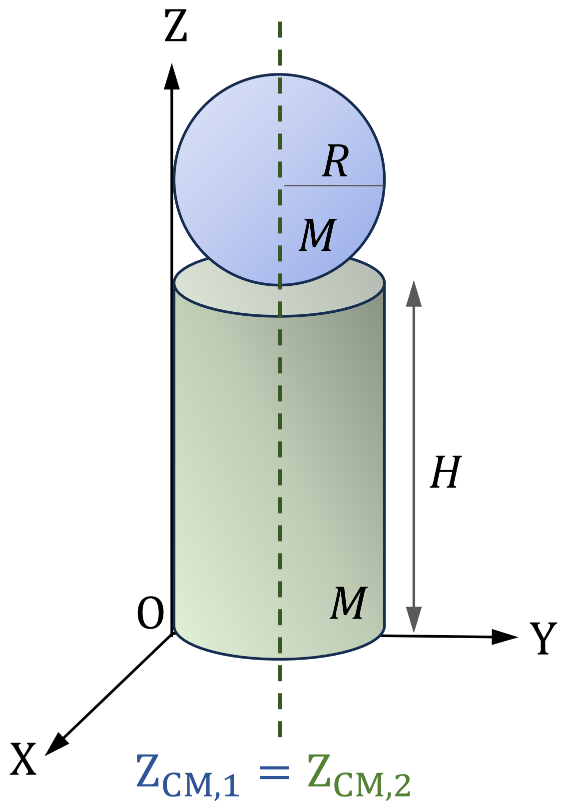
Obtener el momento de inercia del sistema formado por dos cilindros soldados de radios R y r, altura H y masas M y m, respectivamente, respecto del eje Z

$$I_{Z,1} = I_{CM,1} + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$I_{Z,2} = I_{CM,2} + M(R+2r)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M(R+2r)^2$$

$$I_Z = I_{Z,1} + I_{Z,2} = \frac{3}{2}mr^2 + \frac{1}{2}MR^2 + M(R+2r)^2$$

1.5. Momentos de inercia de figuras compuestas



Obtener el momento de inercia respecto del eje Z del sistema formado por una esfera de radio R y un cilindro soldado de radio R y altura H. Ambos tienen masas M.

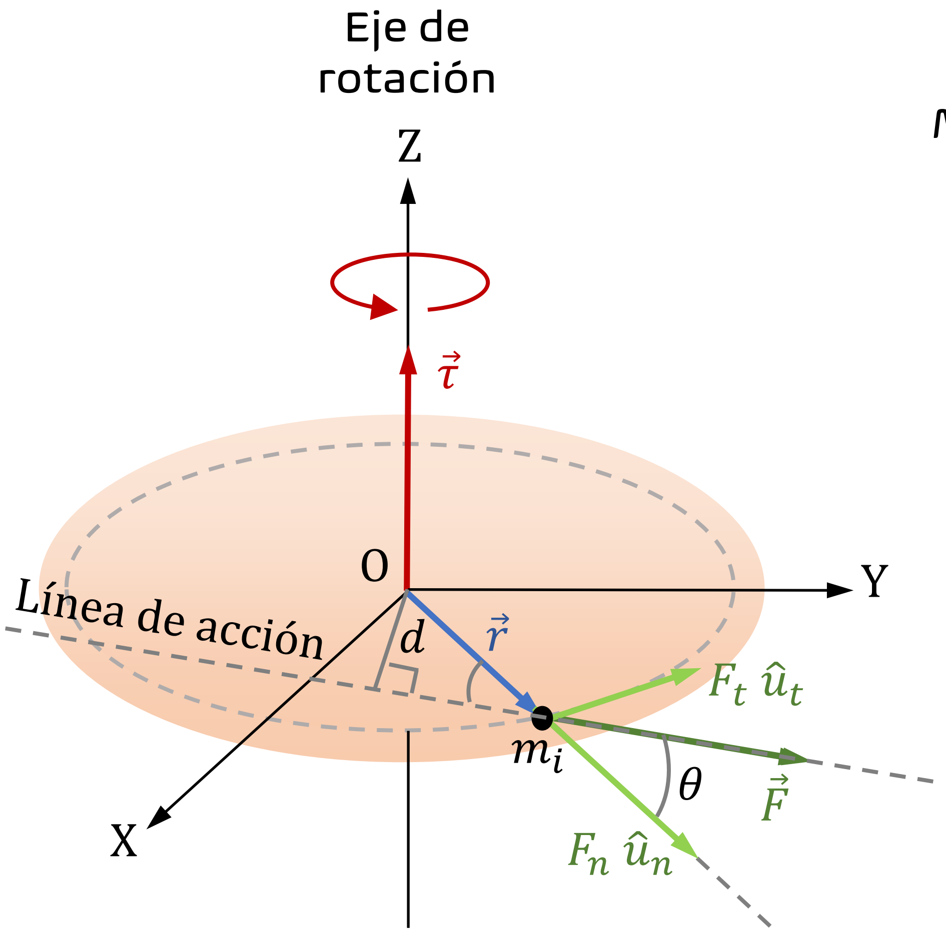
$$I_{Z,1} = I_{CM,1} + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

$$I_{Z,2} = I_{CM,2} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$I_Z = I_{Z,1} + I_{Z,2} = \frac{7}{5}MR^2 + \frac{3}{2}MR^2 = \frac{29}{10}MR^2$$

Contenidos

1.6. Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional



Momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto del punto O ➤ $\boxed{\vec{\tau}_F = \vec{r} \times \vec{F}}$

Medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo

$$|\vec{\tau}_F| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin(\theta) = |\vec{r}|F_t$$

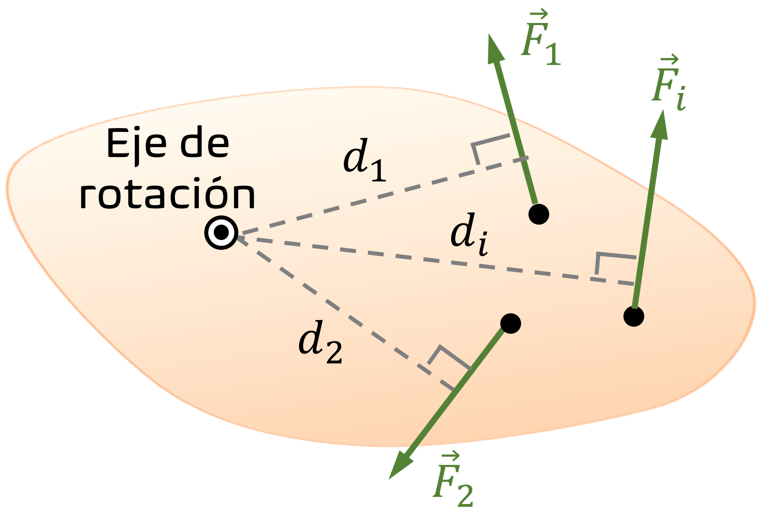
Línea de acción de $\vec{F}$ ➤ Línea paralela a $\vec{F}$ y que pasa por su punto de aplicación

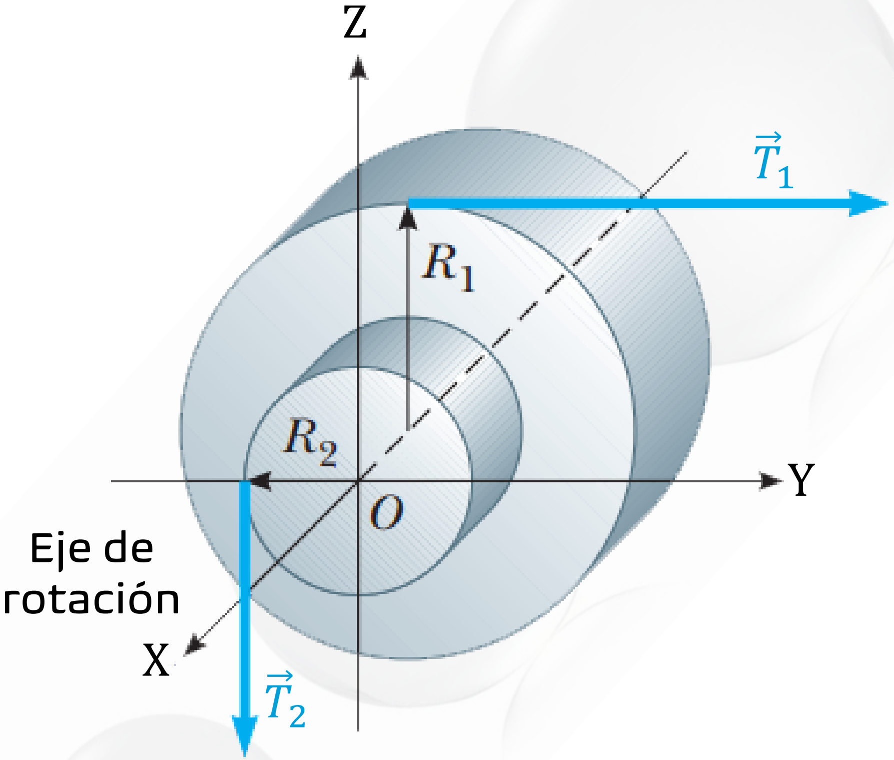
Brazo de palanca d ➤ Distancia perpendicular entre el eje de rotación y la línea de acción

$$\boxed{|\vec{\tau}_F| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin(\theta) = d|\vec{F}|}$$

Unidades del τ ➤ $\mathrm{N \cdot m}$

1.6. Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional





Para distinguir entre el sentido de giro diferente que causan las fuerzas, se puede tomar como convenio

$\vec{\tau}_1$ (+) | $\vec{\tau}_2$ (−)

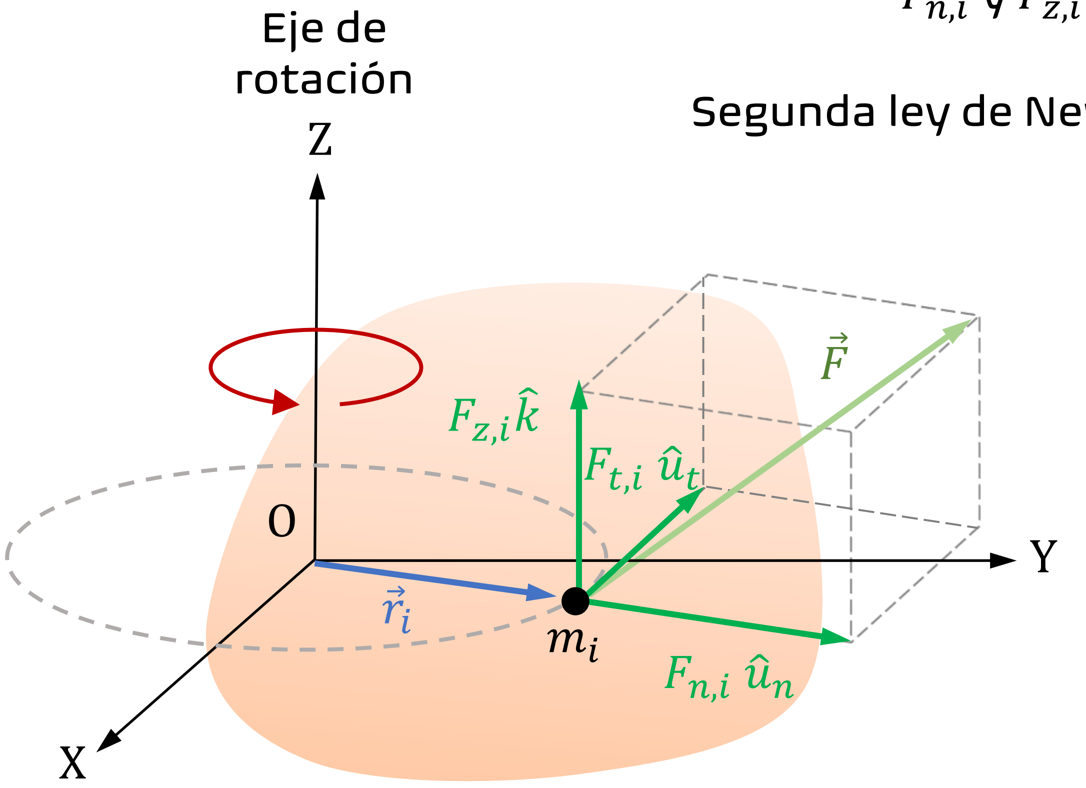
$$\tau_{neto} = \tau = \sum_{i}^{n} \tau_i = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \cdots + \tau_{F_i}$$

$$= d_1|\vec{F}_1| - d_2|\vec{F}_2| + \cdots - d_i|\vec{F}_i|$$

$$\tau_{neto} = \sum_{i}^{n} \tau_i = -R_1|\vec{T}_1| + R_2|\vec{T}_2|$$

Si $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$ ➤ $\vec{\tau}_{neto} < 0 \ (R_1 > R_2)$

1.6. Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional



$F_{n,i}$ y $F_{z,i}$ no contribuyen al momento alrededor del eje de rotación

Segunda ley de Newton para la componente tangencial ⋙ $F_{t,i} = m_i a_{t,i} = m_i r_i \alpha$

$$\tau_i = r_i F_{t,i} = m_i a_{t,i} = m_i r_i^2 \alpha$$

$$\tau_{neto} = \sum_i^n \tau_i = \sum_i^n m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum_i^n m_i r_i^2\right)\alpha = I\alpha$$

Segunda ley de Newton para la rotación ⋙ $\boxed{\tau_{neto} = I\alpha}$

Sólo es válida para sólido rígidos en los que todas las partículas se mueven con la misma α

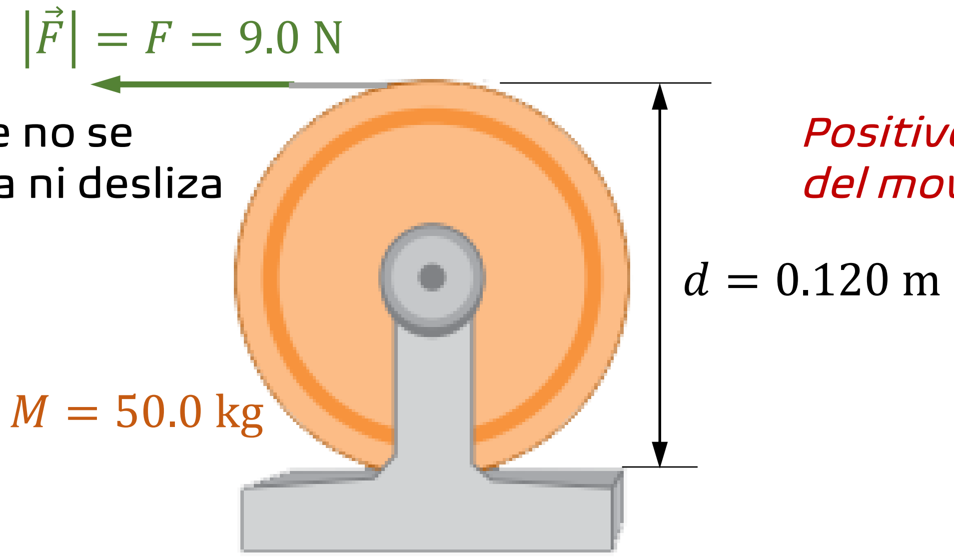
El $\vec{\tau}_{neto}$ solo incluye los momentos debido a las fuerzas externas ⋙ $\vec{\tau}_{neto} = \vec{\tau}_{neto}^{\,ext}$

La suma de momentos internos es cero ⋙ $\sum_i^n \vec{\tau}_i^{\,int} = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,int} = 0$

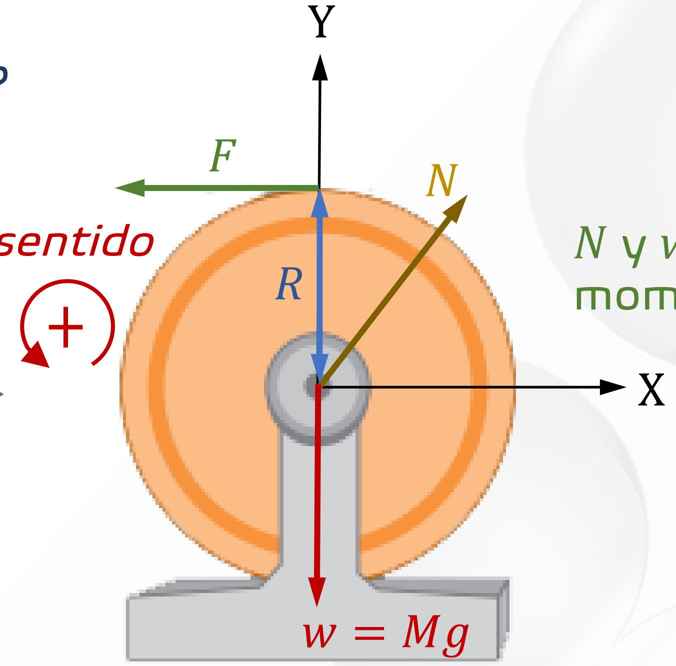
1.6. Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional

¿Aceleración del cable?

Cable no se estira ni desliza



Positivo hacia el sentido del movimiento



N y w no producen momento

Cuando no hay deslizamiento, la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a él

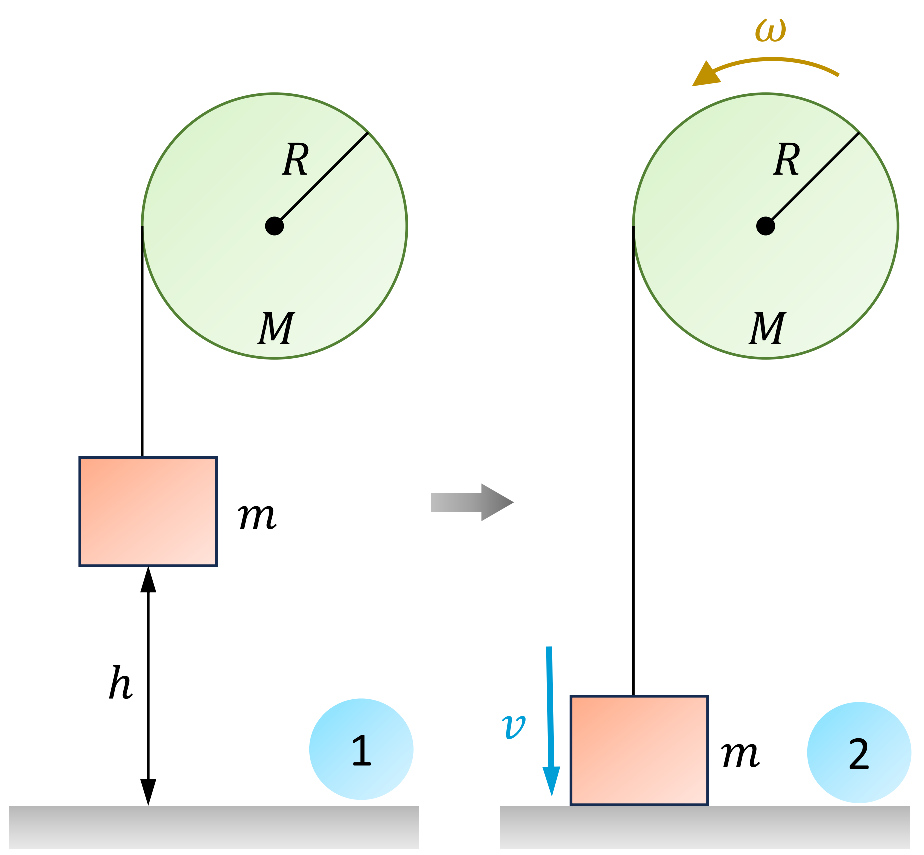
$$\tau_{neto} = \tau_F = I\alpha$$

$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t = R\alpha\hat{u}_t$$

$$\alpha = \frac{\tau_F}{I} = \frac{RF}{MR^2/2} = \frac{|\vec{a}_t|}{R}$$

$$|\vec{a}_t| = \frac{2F}{M} = 0.36\ \mathrm{m/s^2}$$

1.6. Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional



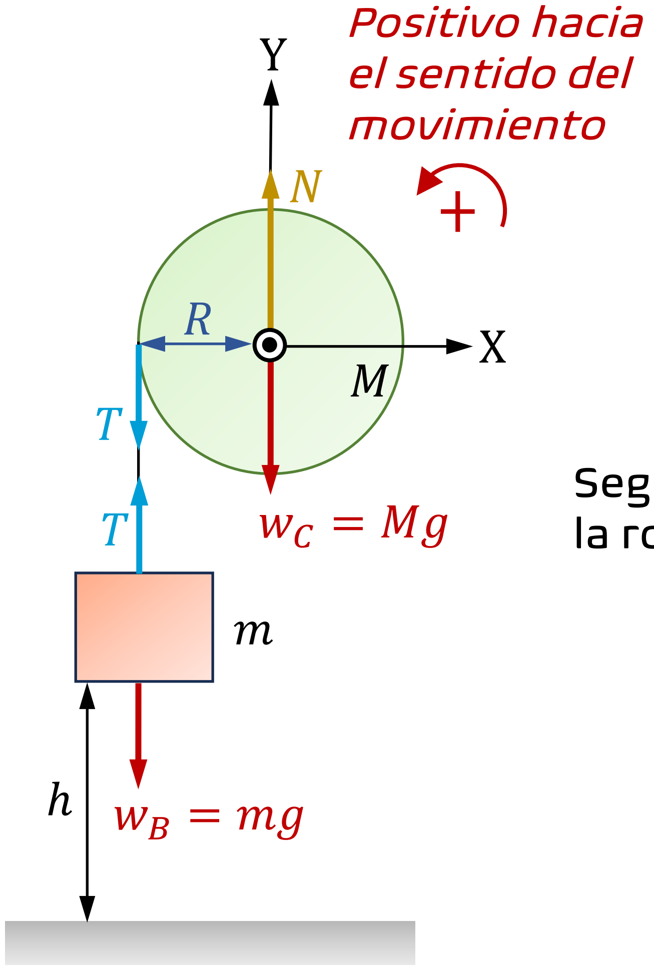
Cilindro gira sin fricción. El cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar. ¿Cuál es la celeridad v cuando el bloque golpea el suelo?

$$E_{m,1} = E_{m,2} \quad \gg \quad v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{M}{2m}}}$$

¿Cuál es la celeridad a cuando el bloque golpea el suelo?

$$v^2 = v_0^2 + 2ah = 2ah \quad \gg \quad a = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}}$$

1.6. Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional



¿Cuál es la celeridad a cuando el bloque golpea el suelo?

Mediante dinámica rotacional

Segunda ley de Newton aplicada al bloque $\gg$ $\sum F_y^{ext} = w_B - T = mg - T = ma$

Segunda ley de Newton para la rotación aplicada al cilindro $\gg$ $\tau_{neto} = \sum_i^n \tau_i = \tau_T = RT = I\alpha = \frac{MR^2}{2}\alpha$ $\gg$ $T = \frac{M}{2}a$

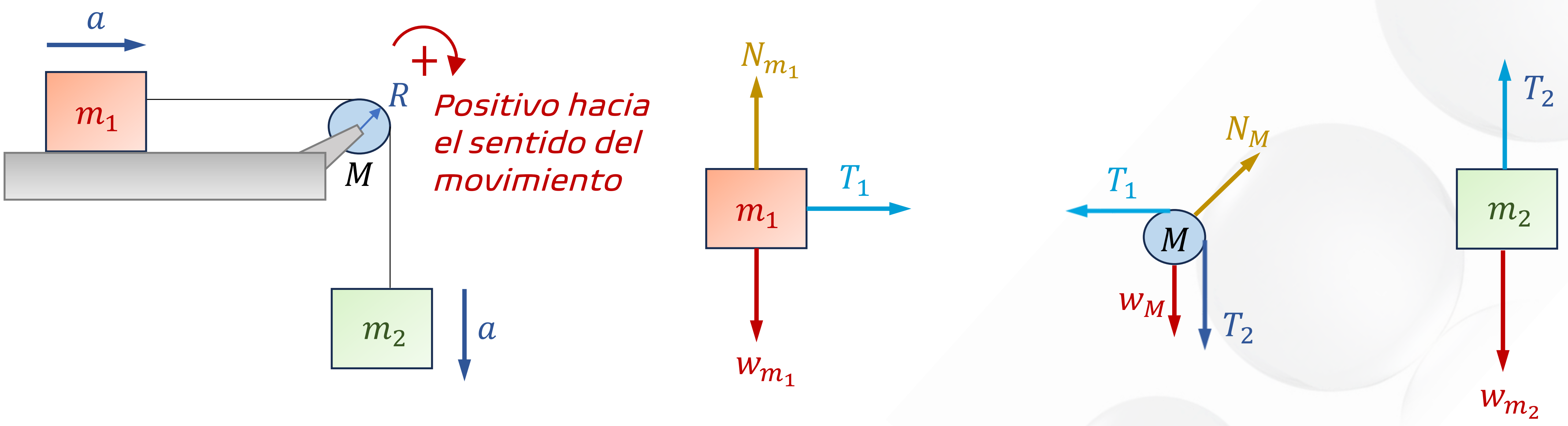
$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u}_t = R\alpha\hat{u}_t \gg |\vec{a}_t| = R\alpha$$

$$mg - T = ma \gg mg - \frac{M}{2}a = ma \gg a = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}}$$

1.6. Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional

La tensión del cable es mayor a un lado que al otro debido al rozamiento y a la inercia

El cable debe ejercer un momento sobre la rueda para que gire



No hay deslizamiento ⪢ $|\vec{a}_t| = R\alpha$

$$T_1 = m_1 a$$

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

$$w_{m_2} - T_2 = m_2 a$$

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + I/_{R^2}}$$

$$T_1 = \frac{m_2 m_1 g}{m_1 + m_2 + I/_{R^2}}$$

$$T_2 = \frac{\left(m_2 + I/_{R^2}\right) m_2 g}{m_1 + m_2 + I/_{R^2}}$$

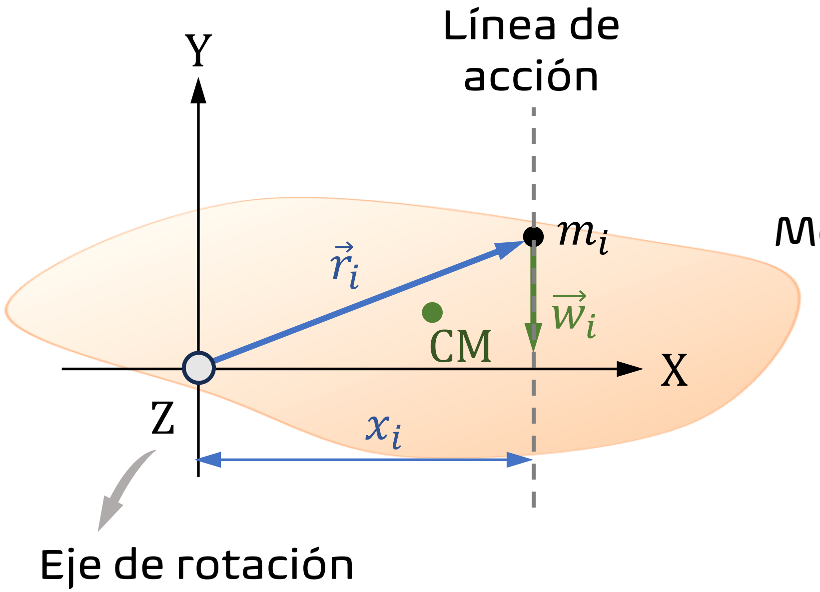
Contenidos

1.7. Momento debido a la gravedad

Momento de una partícula m_i debido a la gravedad ⮞ $\vec{\tau}_{g,i} = \vec{r}_i \times \vec{w}_i$

$$|\vec{\tau}_{g,i}| = \tau_{g,i} = |\vec{r}_i \times \vec{w}_i| = x_i|\vec{w}_i| = x_i m_i g$$

x_i ⮞ Brazo de palanca de la fuerza $\vec{w}_i$

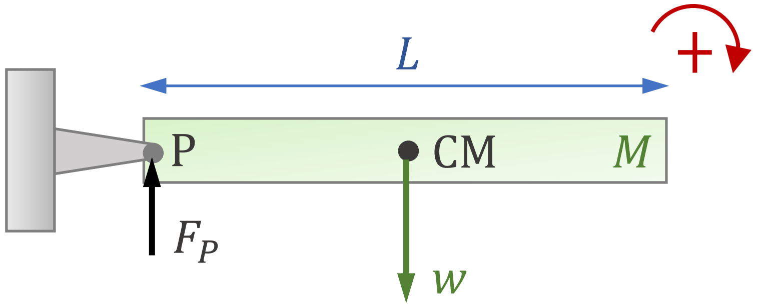


Momento gravitatorio neto ⮞ $\tau_g = \sum_i^n \tau_{g,i} = \sum_i^n x_i m_i g = g \sum_i^n x_i m_i = M g x_{CM}$

g tiene el mismo valor en todo el objeto

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i^n m_i x_i$$

1.7. Momento debido a la gravedad



Barra uniforme pivota sobre P (no hay rozamiento). La barra se coloca horizontal y se deja en libertad. ¿Cuál es el valor de la aceleración angular y de la fuerza ejercida por el pivote sobre la barra justo después de dejarla en libertad?

Segunda ley de Newton para la rotación $\tau_{neto} = \tau_{neto}^{ext} = \tau_g = I\alpha$ $\alpha = \frac{\tau_g}{I} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$

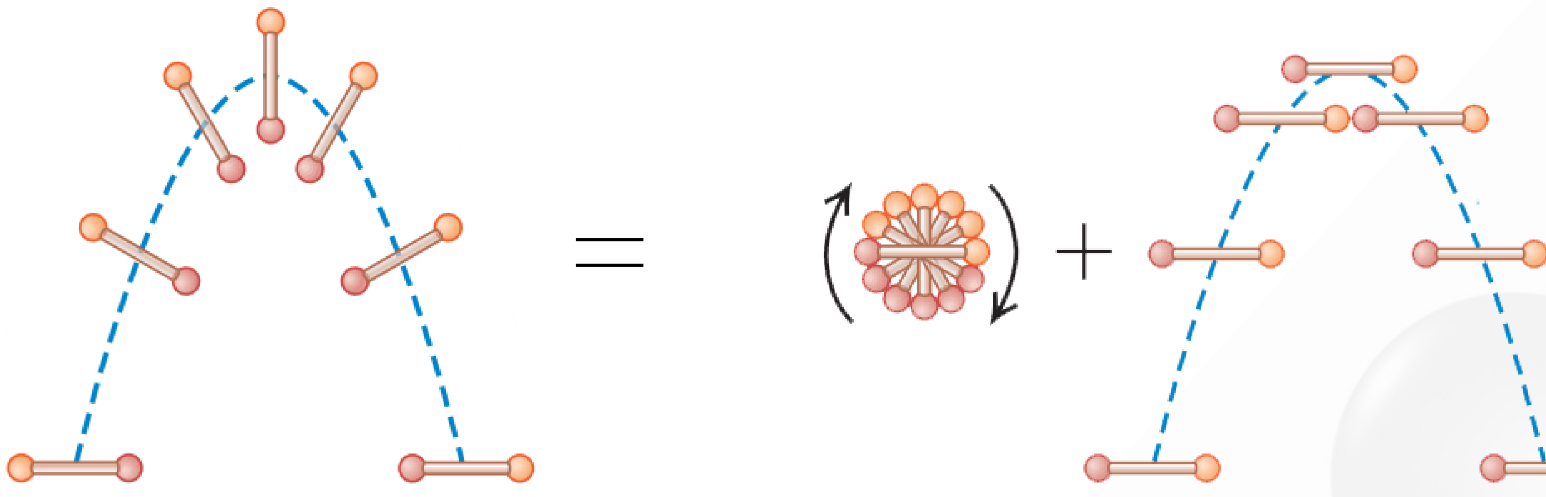
Segunda ley de Newton para la barra $\sum F_y^{ext} = Mg - F_P = Ma_{CM}$

$$|\vec{a}_n| = R\omega^2 \quad |\vec{a}_{n,CM}| = R_{CM}\omega^2 = \frac{L}{2}\omega^2 = 0 \longrightarrow a_{CM} = a_{t,CM} = R\alpha = \frac{L}{2}\alpha$$

$$\frac{Mg - F_P}{M} = \frac{L}{2}\frac{3g}{2L} \quad F_P = \frac{1}{4}Mg$$

Contenidos

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)



Translación y rotación combinadas

Rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa (Rotación pura)

Movimiento traslacional del centro de masa (Traslación pura)

Energía cinética de un sólido rígido con movimiento tanto traslacional como rotacional

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$

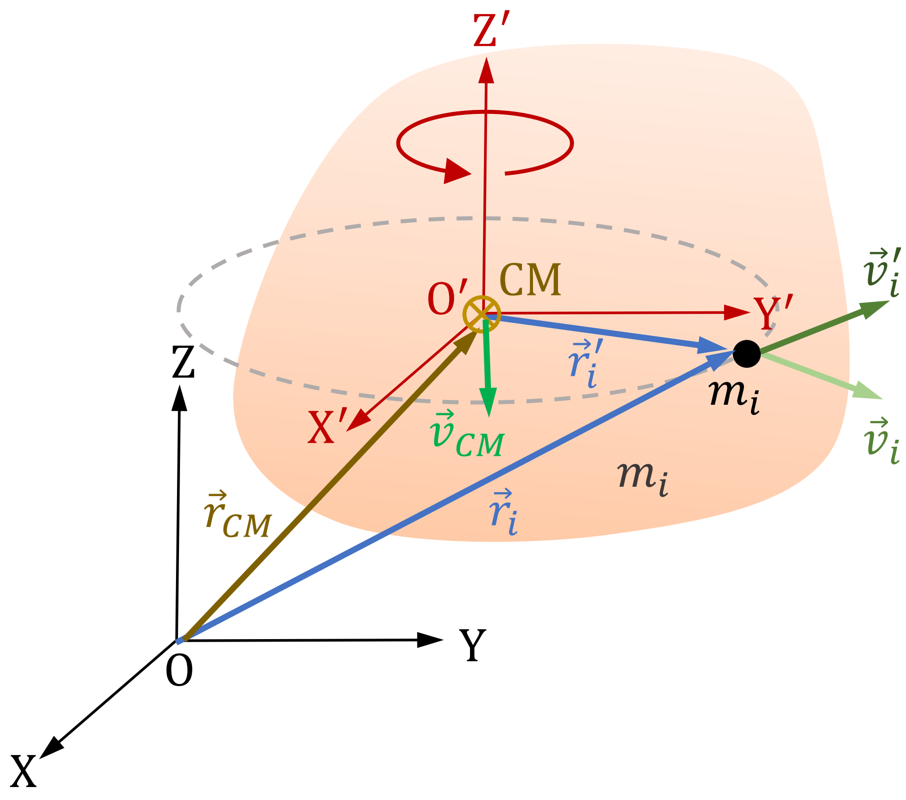
1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Energía cinética de un sólido rígido con movimiento tanto traslacional como rotacional

$$K = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Energía cinética traslacional del centro de masa

Energía cinética rotacional en torno a su centro de masa



$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

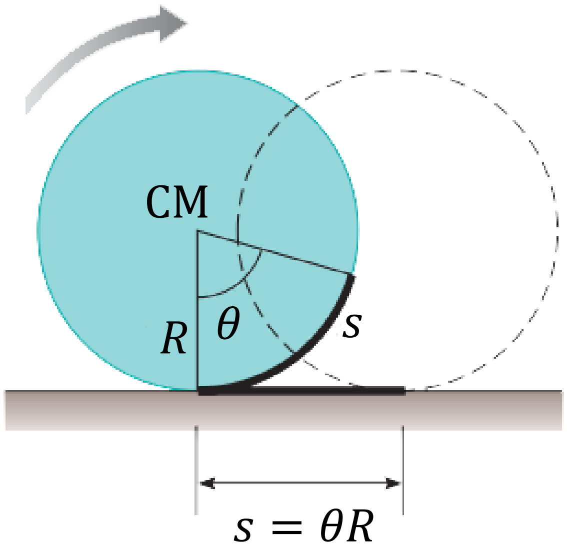
$$K = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \sum_i^n \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i'|^2 = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} \sum_i^n m_i \vec{r}_i'^2 \, \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_i^n m_i \vec{r}_i'^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Movimiento de rodamiento sin deslizamiento

Cilindro uniforme rodando sin deslizar



Distancia lineal recorrida por el CM

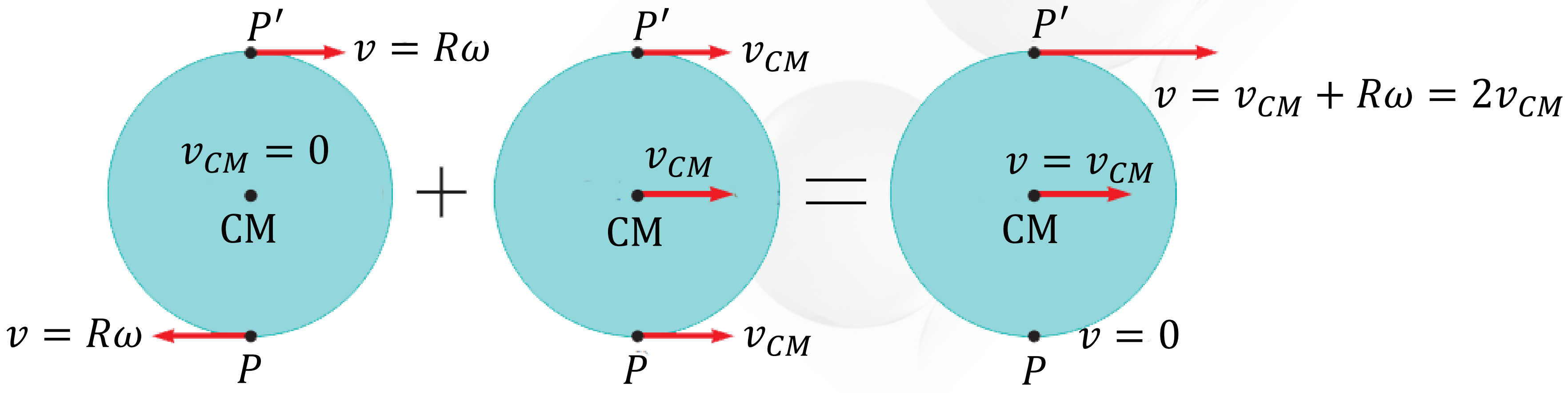
Velocidad de traslación del centro de masa

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

Condición para movimiento de rodamiento puro

Aceleración lineal del centro de masa para movimiento de rodamiento puro

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

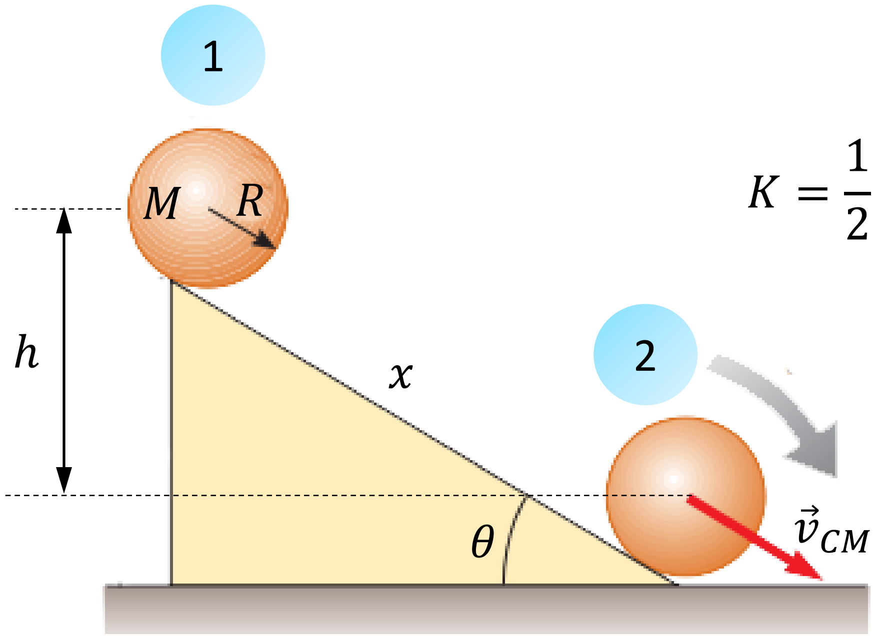


Rotación pura — Traslación pura — Rotación + Traslación

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Movimiento de rodamiento sin deslizamiento

Si un sólido rígido cambia de altura al moverse se debe considerar la energía potencial gravitacional



Sólido rígido rueda sin deslizar $\Rightarrow$ $v_{CM} = R\omega$

$$K = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{CM}|^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{|\vec{v}_{CM}|}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)|\vec{v}_{CM}|^2$$

$$E_{m,1} = E_{m,2}$$

$$K_1 + U_{g,1} = K_2 + U_{g,2}$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)|\vec{v}_{CM}|^2 + 0$$

$$v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + (I_{CM}/MR^2)}\right]^{1/2}$$

Se puede despreciar la fricción de rodamiento si tanto el cuerpo como la superficie sobre la que rueda son perfectamente rígidos

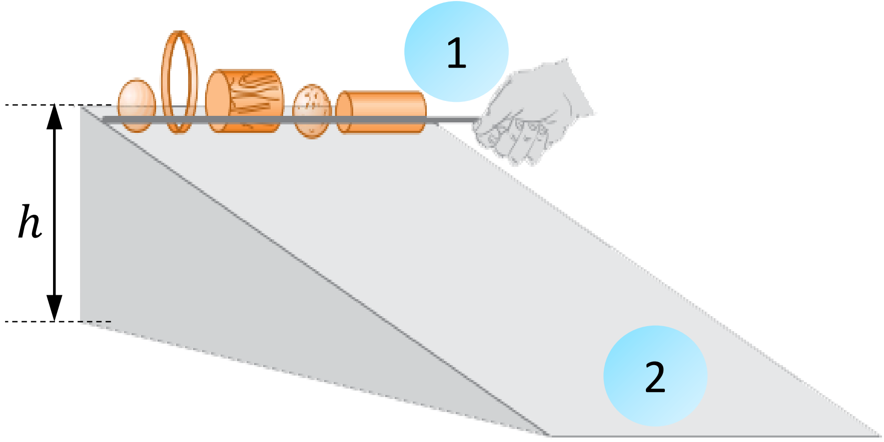
1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Movimiento de rodamiento sin deslizamiento

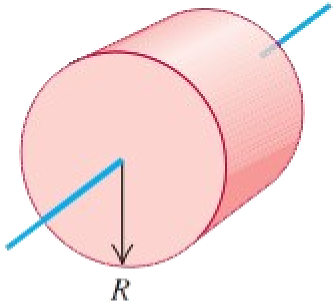
¿Qué objeto llegará primero a la base del plano inclinado?

$$E_{m,1} = E_{m,2} \rightarrow K_1 + U_{g,1} = K_2 + U_{g,2} \rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)|\vec{v}_{CM}|^2 + 0$$

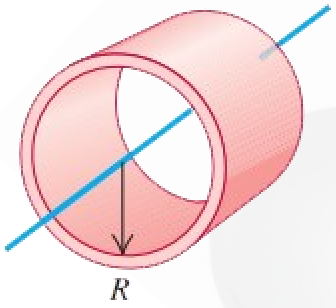
Sólidos rígidos redondos se sueltan desde el reposo



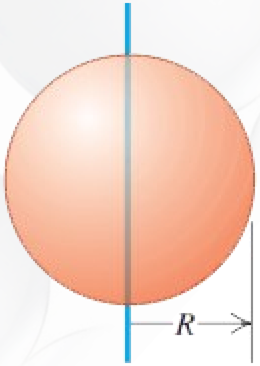
I_{CM} de sólidos rígidos redondos ➤ $I_{CM} = cMR^2 \ (c \leq 1)$



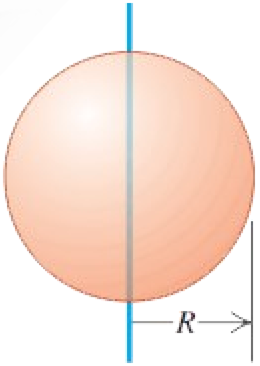
$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$



$$I_{CM} = MR^2$$



$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$$



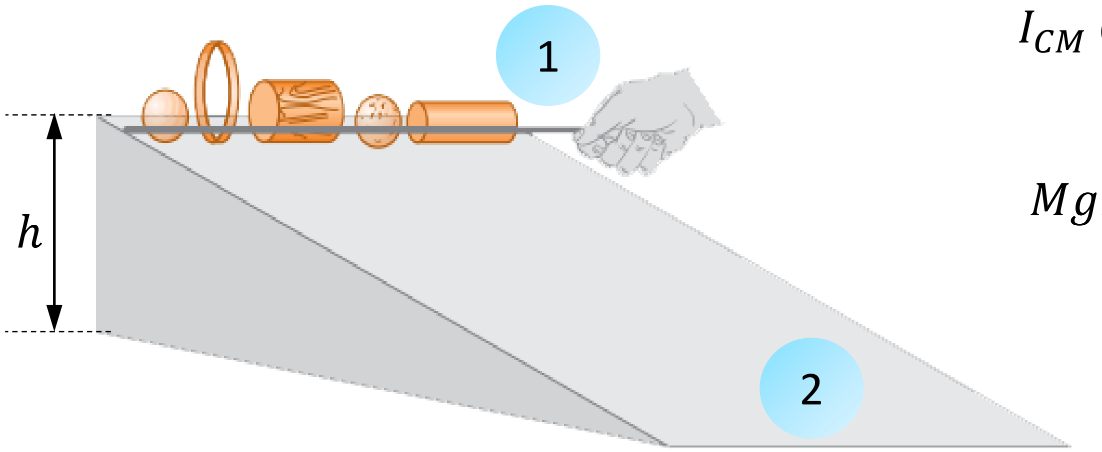
$$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$$

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Movimiento de rodamiento sin deslizamiento

¿Qué objeto llegará primero a la base del plano inclinado?

Sólidos rígidos redondos se sueltan desde el reposo



$$E_{m,1} = E_{m,2} \rightarrow K_1 + U_{g,1} = K_2 + U_{g,2} \rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)|\vec{v}_{CM}|^2 + 0$$

I_{CM} de sólidos rígidos redondos ➤ $I_{CM} = cMR^2 \ (c \leq 1)$

$$Mgh = \frac{1}{2}\left(M + \frac{cMR^2}{R^2}\right)|\vec{v}_{CM}|^2 \rightarrow Mgh = \frac{1}{2}(1+c)M|\vec{v}_{CM}|^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$$

Cualquier esfera sólida, cualquier cilindro sólido, cualquier esfera hueca de pared delgada y cualquier cilindro hueco de pared delgada

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Dinámica del movimiento de rotación y traslación combinados

Segunda ley de Newton (traslación del CM) $\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{CM}}$

Segunda ley de Newton (rotación alrededor del CM) $\boxed{\tau_{neto}^{ext} = \sum_{i}^{n} \tau_i = I_{CM}\alpha}$

Válida aún si el eje de rotación se mueve, siempre y cuando se satisfagan estas condiciones:

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría
2. El eje no debe cambiar de dirección

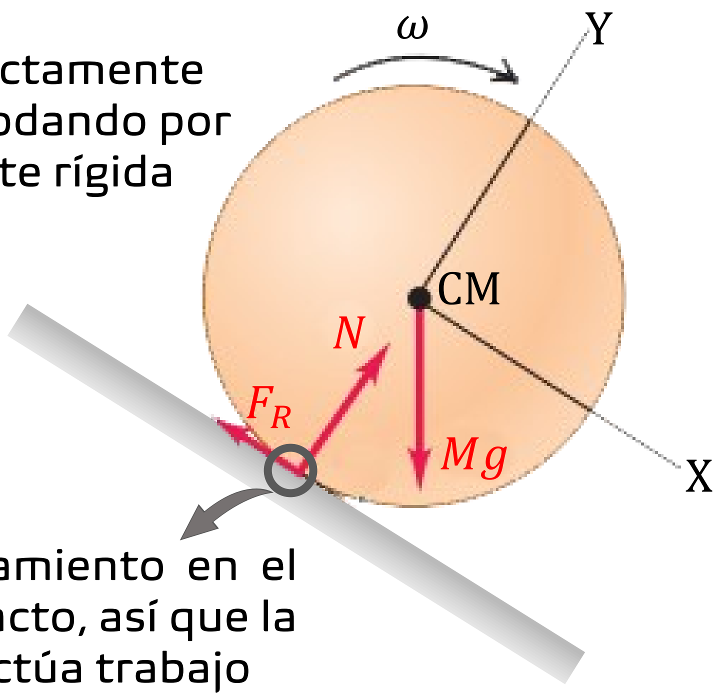
Si un cuerpo tiene movimientos traslacional y rotacional al mismo tiempo

Se necesitan dos ecuaciones de movimiento independientes para el mismo cuerpo

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

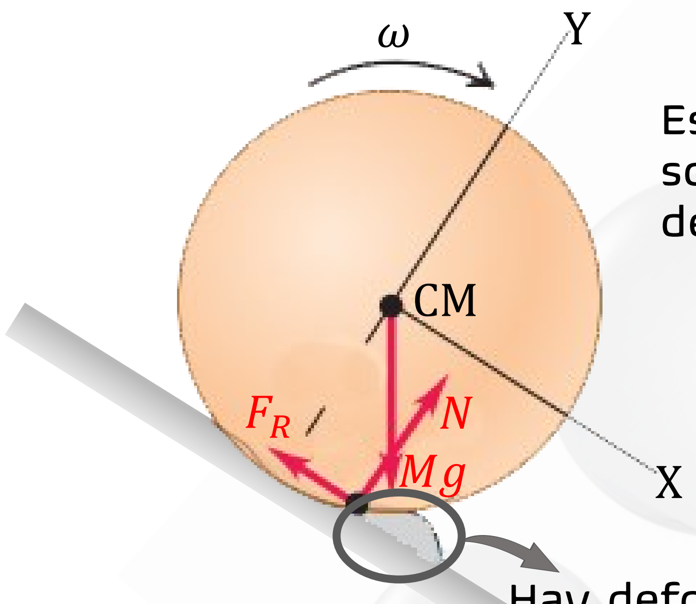
Dinámica del movimiento de rotación y traslación combinados

Esfera perfectamente rígida baja rodando por una pendiente rígida



No hay deslizamiento en el punto de contacto, así que la fricción no efectúa trabajo

Esfera rígida que rueda sobre una superficie deformable



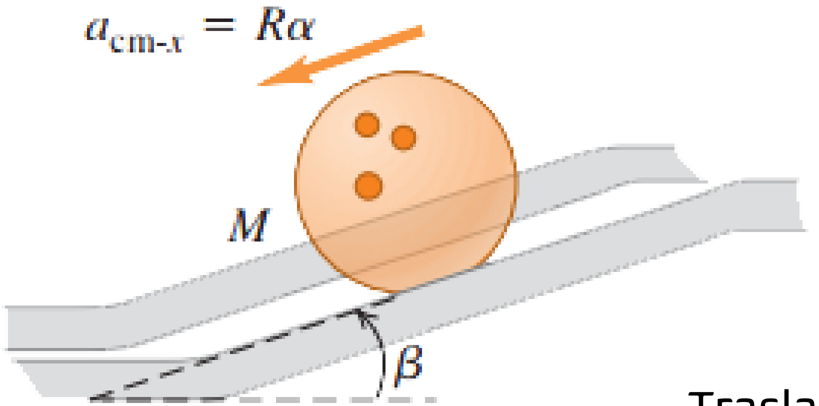
Hay deformaciones y las fuerzas de contacto sobre la esfera ya no actúan en un solo punto

El momento de la fuerza normal es cero (línea de acción pasa por el CM)

La fuerza normal ejerce a un momento que se opone a la rotación

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Dinámica del movimiento de rotación y traslación combinados



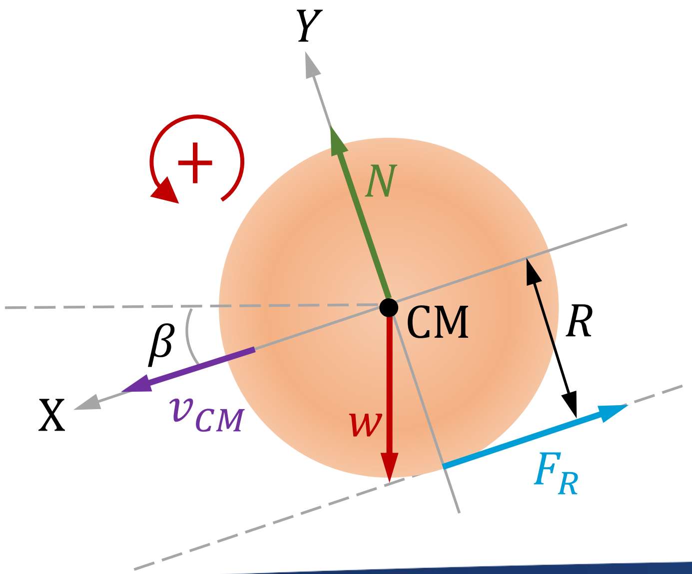
Una esfera sólida rueda sin deslizar por un plano inclinado que forma un ángulo β con la horizontal. ¿Qué aceleración tiene la esfera y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre ésta?

Sólo la fuerza de fricción ejerce una torca en torno al CM

Traslación del CM $\sum F_x^{ext} = Mg\sin(\beta) - F_R = Ma_{CM}$

Rotación alrededor del CM $\tau_{neto}^{ext} = \sum_i^n \tau_i = F_R R = I_{CM}\alpha = \frac{2}{5}MR^2\alpha = \frac{2}{5}MRa_{CM}$

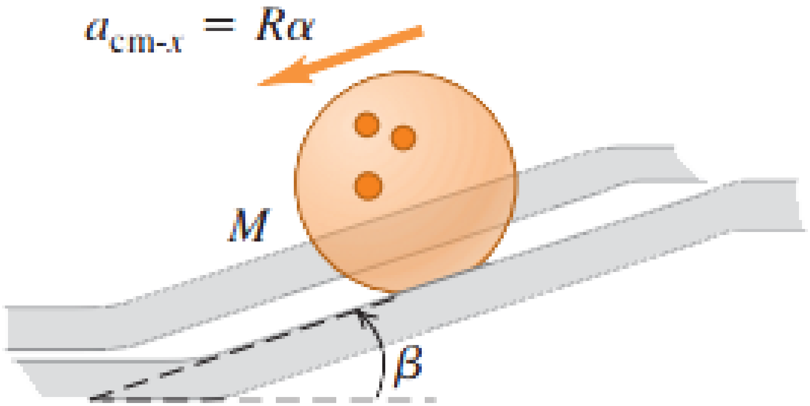
Esfera rueda sin deslizar $a_{CM} = R\alpha$

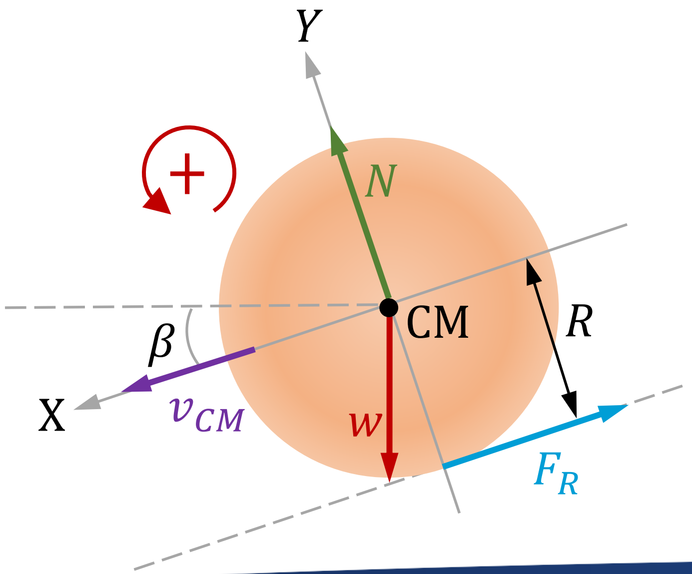


$$F_R R = \frac{2}{5}MRa_{CM} \quad \longrightarrow \quad a_{CM} = \frac{5}{7}g\sin(\beta) \qquad F_R = \frac{2}{7}Mg\sin(\beta)$$

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Dinámica del movimiento de rotación y traslación combinados





¿Coeficiente de fricción estática μ_s mínimo necesario para evitar el deslizamiento?

Esfera no desliza en punto de contacto ➤ F_R es estática

$$F_R = \mu_s N \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{F_R}{N} = \frac{\frac{2}{7} Mg\sin(\beta)}{Mg\cos(\beta)} = \frac{2}{7}\tan(\beta)$$

Si β pequeña, no se requiere μ_s grande para evitar el deslizamiento

Al aumentar β, aumenta el valor requerido de μ_s

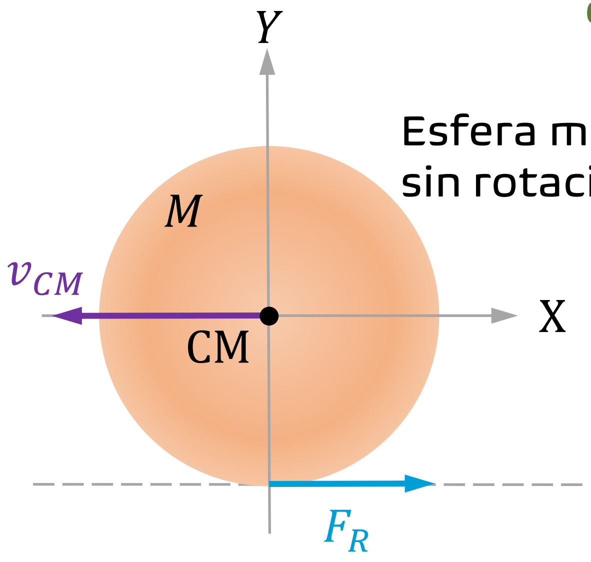
1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Movimiento de rodamiento con deslizamiento

Si el sólido rígido comienza a deslizar → $\sum \vec{F}^{ext} = M\vec{a}_{CM}$ | $\tau_{neto}^{ext} = \sum_{i}^{n} \tau_i = I_{CM}\alpha$ → Son válidas

No se cumple la condición de rodamiento puro → $v_{CM} \neq R\omega$ | $a_{CM} \neq R\alpha$

La resolución de problemas de rodamiento con deslizamiento requiere considerar el rozamiento cinético



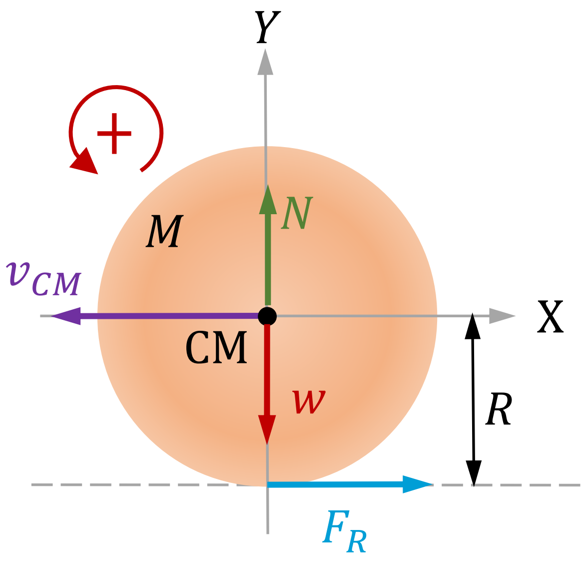
Esfera moviéndose sin rotación inicial

La F_R ejercida por el suelo | Reduce la v_{CM} / Incrementa ω → Hasta que se cumple la condición de deslizamiento $v_{CM} = R\omega$

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Movimiento de rodamiento con deslizamiento

Una esfera sólida de masa M y radio R avanza horizontalmente con una $v_0 = 5\ \mathrm{m/s}$. El coeficiente de rozamiento cinético entre la esfera y la superficie es $\mu_k = 0.08$. Determinar el tiempo durante el cual la bola desliza sabiendo que inicialmente $\omega_0 = 0$.



$$\sum F_y^{ext} = -N + w = Ma_{CM,y} = 0 \;\longrightarrow\; N = w = Mg$$

$$\sum F_x^{ext} = -F_R = -\mu_k N = -\mu_k Mg = Ma_{CM,x} \;\longrightarrow\; a_{CM,x} = -\mu_k g$$

$$v_{CM,x} = v_0 + a_{CM,x} t = v_0 - \mu_k g t$$

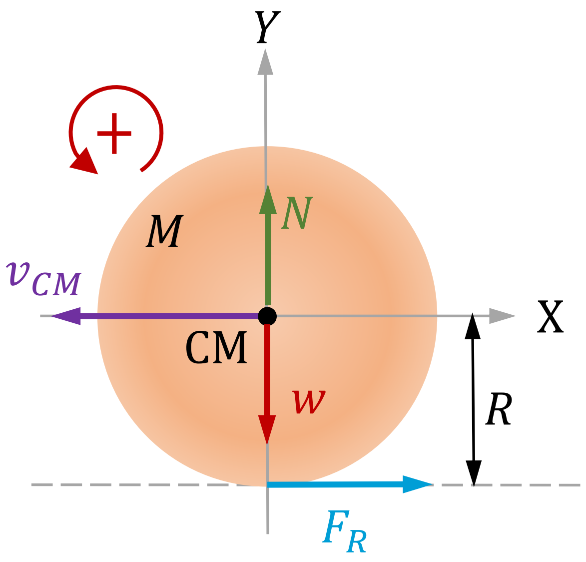
$$\tau_{neto}^{ext} = \sum_i^n \tau_i = I_{CM}\alpha \;\longrightarrow\; \mu_k MgR = \frac{2}{5} MR^2 \alpha \;\longrightarrow\; \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{R}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{R} t$$

1.8. Rotación de un sólido rígido sobre un eje móvil (objetos rodantes)

Movimiento de rodamiento con deslizamiento

Una esfera sólida de masa M y radio R avanza horizontalmente con una $v_0 = 5\ \mathrm{m/s}$. El coeficiente de rozamiento cinético entre la esfera y la superficie es $\mu_k = 0.08$. Determinar el tiempo durante el cual la bola desliza sabiendo que inicialmente $\omega_0 = 0$.

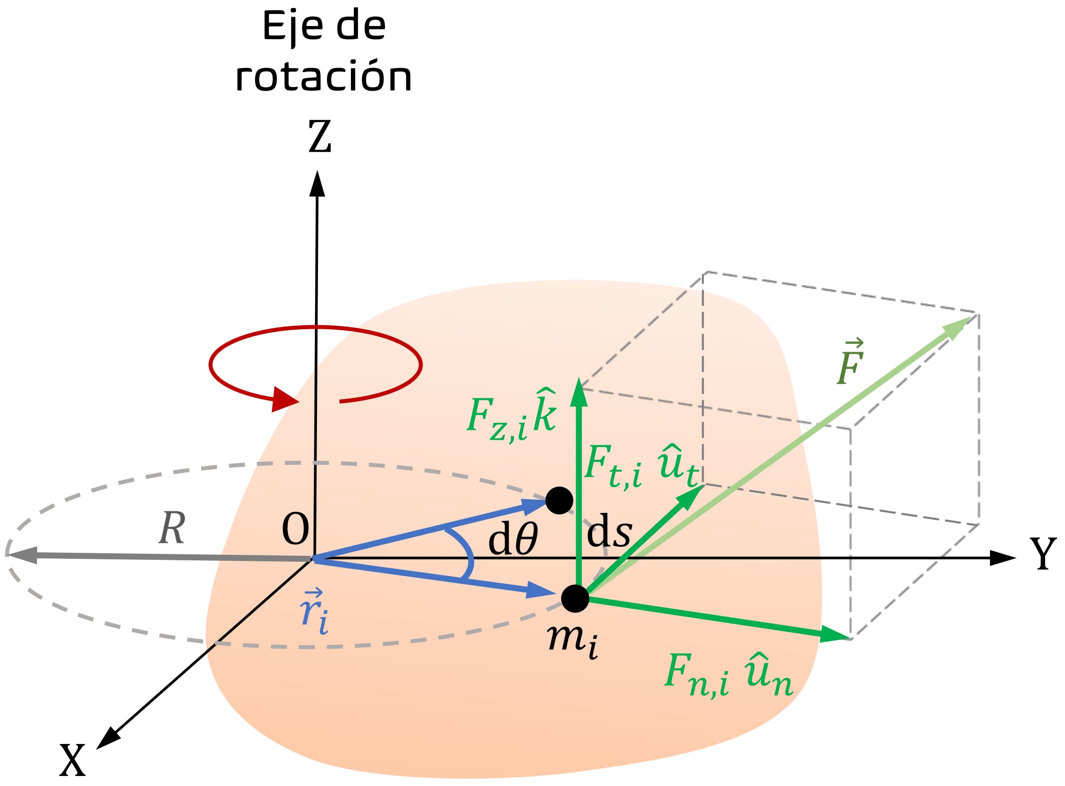


Cuando comience a deslizar se cumplirá $\rightarrow$ $v_{CM} = R\omega$

$$v_0 - \mu_k g t = R \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{R} t \quad \rightarrow \quad t = \frac{2v_0}{7\mu_k g}$$

Contenidos

1.9. Trabajo y potencia en el movimiento rotacional



$$|\mathrm{d}\vec{s}| = R\mathrm{d}\theta$$
$$|\vec{r}| = R$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = F_t R\mathrm{d}\theta = |\vec{\tau}_F|\mathrm{d}\theta \quad (\mathrm{d}\theta \text{ en rad})$$

El trabajo total W efectuado por el momento durante un desplazamiento angular de θ_1 a θ_2

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\vec{\tau}_F|\mathrm{d}\theta}$$

Si el momento es constante $\boxed{W = |\vec{\tau}_F|(\theta_2 - \theta_1)}$

1.9. Trabajo y potencia en el movimiento rotacional

Si un τ efectúa W sobre un sólido rígido que gira, la energía cinética cambia en una cantidad igual a ese trabajo

$$|\vec{\tau}_F|\mathrm{d}\theta = I\alpha\mathrm{d}\theta = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = I\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\omega = I\omega\mathrm{d}\omega \rightarrow W = \int_{\theta_1}^{\theta_2}|\vec{\tau}_F|\mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2}I\omega\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}I\omega_2 - \frac{1}{2}I\omega_1$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}I\omega_2 - \frac{1}{2}I\omega_1}$$

El cambio de energía cinética rotacional de un sólido rígido es igual al trabajo efectuado por fuerzas ejercidas desde afuera del cuerpo

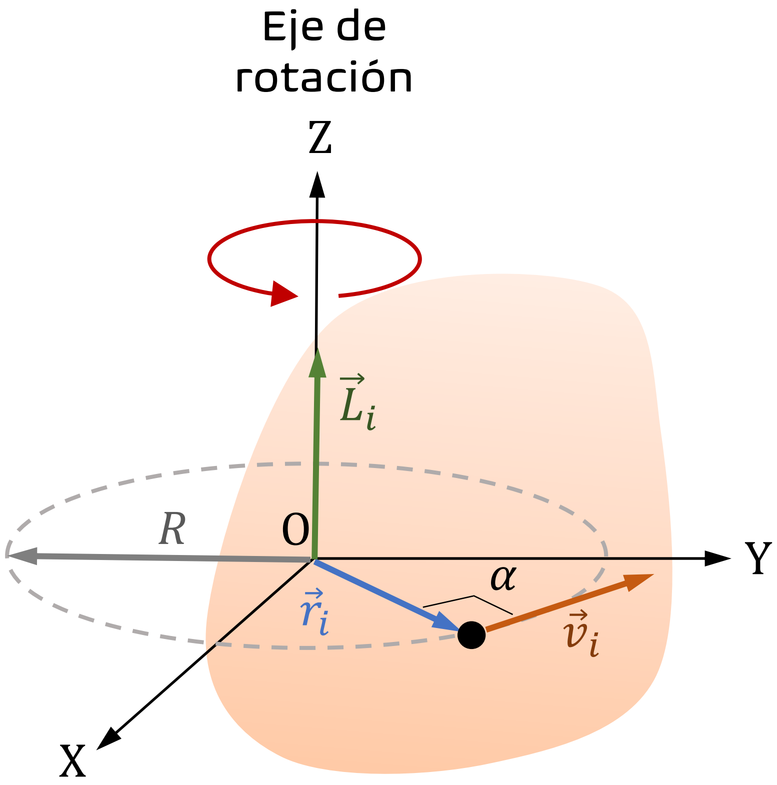
Potencia asociada al trabajo efectuado por un momento sobre un cuerpo en rotación

$$\mathrm{d}W = |\vec{\tau}_F|\mathrm{d}\theta \rightarrow \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = |\vec{\tau}_F|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \rightarrow \boxed{P = |\vec{\tau}_F|\omega}$$

Contenidos

1.10. Momento angular y conservación

Momento angular de una partícula ⮞ $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$



Cada partícula del sólido en el plano XY se mueve en un círculo centrado en O y en cada instante $\vec{v}_i \perp \vec{r}_i$ $(\alpha = 90°)$

$$\left|\vec{L}_{i,O}\right| = L_{i,O} = m_i |\vec{r}_i||\vec{v}_i| \sin(\alpha) = m_i |\vec{r}_i|(|\vec{r}_i|\omega) = m_i |\vec{r}_i|^2 \omega$$

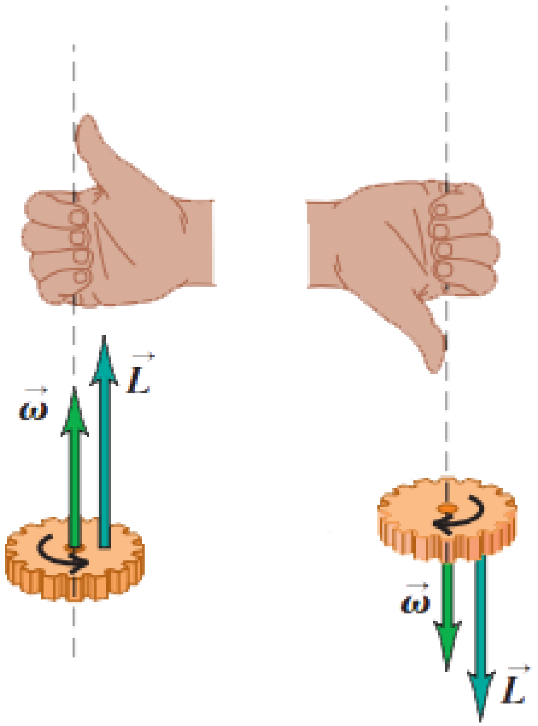
Momento angular total de la parte del sólido rígido en el plano XY

$$L = \sum_i^n L_{i,O} = \left(\sum_i^n m_i |\vec{r}_i|^2\right)\omega = I\omega$$

Para los puntos que no están en el plano XY , los $\vec{r}$ tienen componentes en la dirección Z (además de las direcciones X e Y) esto da al $\vec{L}_i$ una componente perpendicular al eje Z

Sólido rígido que gira alrededor de un eje de simetría ⮞ $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$

1.10. Momento angular y conservación



Sólido rígido que gira alrededor de un eje de simetría ➤ $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$

Cuando un sólido rígido gira alrededor de un eje de simetría, su vector de momento angular queda sobre el eje de simetría

Para cualquier sistema de partículas ➤ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i^n \vec{\tau}^{ext}$

Si el sistema de partículas es un sólido rígido que gira alrededor de un eje de simetría (el eje Z) ➤ $L_Z = I\omega_z$

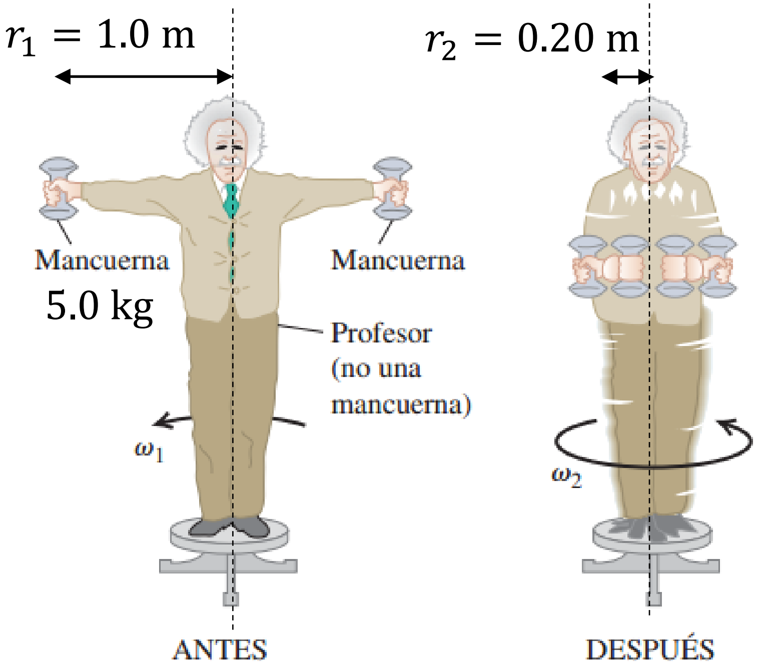
Si el eje tiene dirección fija en el espacio ➤ $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ sólo cambian en magnitud, no de dirección

$$\boxed{\sum_i^n \vec{\tau}_Z^{ext} = I\alpha_Z}$$

1.10. Momento angular y conservación

Conservación del momento angular

$$\vec{\tau}_O^{ext} = \sum_i^n \vec{\tau}_{i,O}^{ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_{sist,O}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{sist,O} = constante \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1\omega_{z,1} = I_2\omega_{z,2}}$$



$$\omega_{z,1} = 0.5 \text{ rev/s} \qquad \omega_{z,1} =? \text{ rev/s}$$

$$I_{prof,1} = 3.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad I_{prof,2} = 2.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_1 = I_{prof,1} + 2I_{pesas,1} = 3.0 + 2\,\overbrace{5.0\cdot(1.0)^2}^{m_{pesa}r^2} = 13 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_2 = I_{prof,2} + 2I_{pesas,2} = 2.2 + 2\cdot 5.0\cdot(0.20)^2 = 2.6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_{z,2} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{z,1} = 2.5 \text{ rev/s}$$