Ejercicio 1. En un espacio vectorial real V, tenemos un producto escalar que, respecto a una base $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, cumple que:

a) $|\vec{v_1}| = \sqrt{2}$, $|\vec{v_2}| = \sqrt{3}$ y $|\vec{v_3}| = \sqrt{\lambda}$, $\lambda > 0$.

b) El complemento ortogonal de $U \equiv \{x + y + z = 0\}$ es $U^{\perp} = L\{\vec{v_1}\}$.

c) La proyección ortogonal del vector $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$ sobre $W = L\{\vec{v_2}\}$ es $\dfrac{3\lambda}{|\vec{v_3}|^2}\vec{v_2}$.

Determinar la matriz de Gram del producto escalar en la base B. ¿Qué valores posibles puede tomar λ? Calcular λ para que la distancia entre los vectores $\vec{u} = (\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3})$ y $\vec{v} = (-\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3})$ sea $4\sqrt{5}$.

$$|\vec{v_1}| = \sqrt{\vec{v_1} \bullet \vec{v_1}} \qquad \vec{v_2} \bullet \vec{v_2} = 3$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v_1} \bullet \vec{v_1} = |\vec{v_1}|^2 = 2 \qquad \vec{v_3} \bullet \vec{v_3} = \lambda \quad (\lambda > 0)$$

$$G_B = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & \lambda \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Los vectores de U son ortogonales a los de $U^{\perp}$:

Base de U: $\quad U \equiv \{x + y + z = 0\} \rightarrow x = -y - z \quad (y, z \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$(x, y, z) = \alpha(\underbrace{-1, 1, 0}_{L.I}) + \beta(\underbrace{-1, 0, 1}_{L.I})$$

$$B_U = \{\underbrace{(-1, 1, 0)_B}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(-1, 0, 1)_B}_{\vec{u_2}}\}$$

Base de $U^{\perp}$: $B_{U^{\perp}} = \{\underset{L.I}{\vec{v}_1}\} = \{(1,0,0)_B\}$

se cumplirá que : $\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1 = 0$ y $\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1 = 0$

$$\vec{u}_1 \bullet \vec{v}_1 = (-1 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (-2+a \quad -a+3 \quad -b+c) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2+a = 0 \rightarrow \underline{\underline{a=2}}$$

$$\vec{u}_2 \bullet \vec{v}_1 = (-1 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (-2+b \quad -a+c \quad -b+\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2+b = 0 \rightarrow \underline{\underline{b=2}}$$

Hasta ahora : $G_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ 2 & c & \lambda \end{pmatrix}$

Finalmente :

$$\text{proy}_W(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \underbrace{\frac{(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) \bullet \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2}} \cdot \vec{v}_2 = \underbrace{\frac{3\lambda}{|\vec{v}_3|^2}} \cdot \vec{v}_2$$

$$W = L\{\vec{v}_2\} \qquad |\vec{v}_2|^2 = 3 \qquad |\vec{v}_3|^2 = \lambda$$

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2 = (1 \ \ 1 \ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ 2 & c & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (6 \quad 5+c \quad 2+c+\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5+c$$

$$\frac{5+c}{3} = \frac{3\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \longrightarrow 5+c = 9 \longrightarrow \underline{\underline{c = 4}}$$

$$\boxed{G_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda \end{pmatrix}} \rightarrow$$ G_B debe ser simétrica definida positiva.

Los menores ppales deben ser > 0.

$$|2| = 2 > 0 \checkmark \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = 6\lambda + 16 + 16 - (12 + 32 + 4\lambda) =$$

$$= 6\lambda + 32 - 44 - 4\lambda = 2\lambda - 12 > 0$$

$$2\lambda > 12 \rightarrow \lambda > \frac{12}{2} \rightarrow \boxed{\lambda > 6}$$

$$d(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})} = 4\sqrt{5}$$

$$\vec{u}-\vec{v} = (1,1,1)_B - (-1,1,-1)_B = (2,0,2)_B$$

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = (2\ 0\ 2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

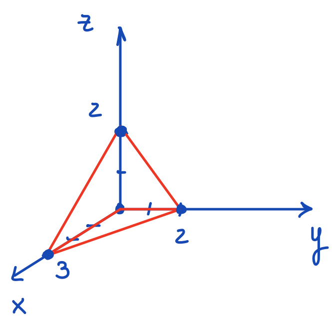
$$= (8\quad 12\quad 4+2\lambda)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 16+8+4\lambda = 24+4\lambda$$

$$\sqrt{24+4\lambda} = 4\sqrt{5} \rightarrow 24+4\lambda = 16\cdot 5 \rightarrow \lambda = \frac{80-24}{4} = \boxed{14}$$

Ejercicio 2. Se considera una figura 3D formada por los siguientes vértices, unidos entre sí por segmentos: $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,2)$. Se desea una transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que efectúe el siguiente proceso sobre la figura, respetando el orden:

1) Un giro en sentido antihorario de $\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje z.
2) Un giro en sentido horario de $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje y.
3) Una dilatación de factor k.
4) Una proyección ortogonal respecto al plano XY.

Además, el punto $(0,0,2)$ debe transformarse en el $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$.
Hallar la transformación T.



$$A = A_{T_4} \cdot A_{T_3} \cdot A_{T_2} \cdot A_{T_1}$$

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\theta = -\frac{\pi}{3}$

$$A_{T_3} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot I \qquad (k > 1)$$

$$A_{T_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot k \cdot \overset{1}{\cancel{I}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= k \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,0,2) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0 \right)$$

$$T(0,0,2) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = k \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} =$$

$$= k \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cancel{-}\cancel{\sqrt{3}}\, k = \cancel{-}\frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{2} \qquad \underline{\underline{k = \frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{T(x,y,z) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}x - \frac{3\sqrt{2}}{8}y - \frac{3\sqrt{3}}{4}z,\ \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}y,\ 0 \right)}$$

Ejercicio 3. Averiguar si es diagonalizable la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En caso afirmativo, hallar una matriz diagonal D y de paso P que verifican: $AP = PD$.

$$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 \cdot (-5-\lambda) - 27 - 27 - \big(9(-5-\lambda) \underbrace{-9(1-\lambda) - 9(1-\lambda)}_{-18(1-\lambda)}\big) = 0$$

$$(1 - 2\lambda + \lambda^2) \cdot (-5-\lambda) - 54 - (-45 - 9\lambda - 18 + 18\lambda) = 0$$

$$-5 \cancel{-\lambda} + \cancel{10\lambda} + 2\lambda^2 - 5\lambda^2 - \lambda^3 - 54 \underbrace{-(-63 + 9\lambda)}_{63 \cancel{-9\lambda}} = 0$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & T.I \\ & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & \downarrow & -1 & -4 & -4 \\ \hline & -1 & -4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\longrightarrow$ Divisores del T.I : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

$$\lambda = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 & m_2 = 2 \end{array}}$$

$$-\lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 0}{2} = \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

• <u>Para $\lambda_1 = 1$</u> : $(A - I)\cdot\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-6} & \cancel{-3} \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \cancel{3}y + \cancel{3}z = 0 \\ \cancel{3}x + \cancel{3}y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z = -y \\ x = -y \end{array}$$

$2 = -(3 + 1)$

$(\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{y}} \in \mathbb{R})$

$$V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 / \alpha \in \mathbb{R}\} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• <u>Para $\lambda_2 = -2$</u> : $(A + 2I)\cdot\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ \cancel{-3} & \cancel{-3} & \cancel{-3} \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cancel{3}x + \cancel{3}y + \cancel{3}z = 0$$

$$x = -y - z, \quad \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{y}}, \underset{\beta}{\underset{\shortparallel}{z}} \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_2} = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>La matriz A sí es diagonalizable</u> ya que
$$\left\{\begin{array}{l} (1)\ m_1 + m_2 = 3 = n \checkmark \\ (2)\ m_1 = \dim(V_{\lambda_1}) = 1 \quad y \\ \quad m_2 = \dim(V_{\lambda_2}) = 2 \end{array}\right. \checkmark$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$