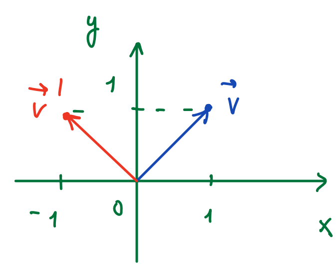
TEMA 4 : TRANSFORMACIONES EN EL PLANO Y EL ESPACIO

- Introducción :

* Una transformación en el plano ($\mathbb{R}^2$) es una operación que transforma un vector $\vec{v}$ del plano en otro vector $\vec{v}\,'$ del plano.

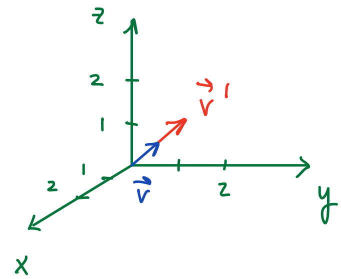
Ejemplo : La transformación T nos convierte $\vec{v} = (1,1)$ en $\vec{v}\,' = (-1,1)$:

$\vec{v}\,' \equiv$ Vector transformado



* Una transformación en el espacio ($\mathbb{R}^3$) es una operación que transforma un vector $\vec{v}$ del espacio en otro vector $\vec{v}\,'$ del espacio.

Ejemplo : La transformación T transforma el vector $\vec{v} = (1,1,1)$ en el vector $\vec{v}\,' = (2,2,2)$



* Las transformaciones lineales en el plano y el espacio se pueden representar mediante una aplicación lineal biyectiva :

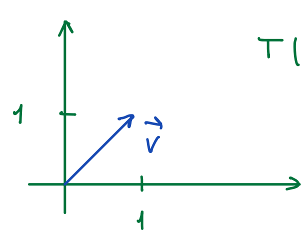
↪ tiene inversa

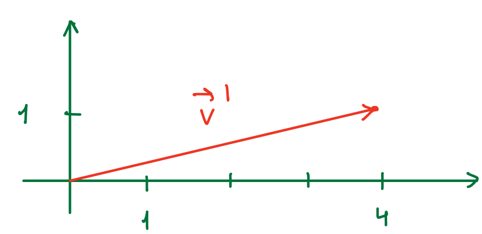
$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

PLANO 2D $\qquad$ ESPACIO 3D

$\boxed{\text{Ejemplo}}$: La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (4x, y)$ convierte $\vec{v} = (1,1)$ en $\vec{v}\,' = (4,1)$.

$T(1,1) = (4,1)$

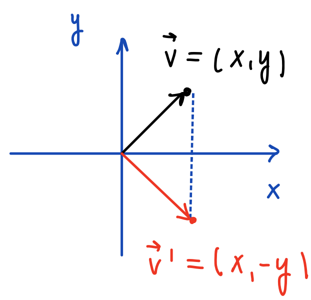




$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ T(1,0) & T(0,1) \end{matrix} \end{array} \longrightarrow T(1,1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\vec{v} \\ \text{col}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\vec{v}\,' \\ \text{col}}}$$

- **Geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:**

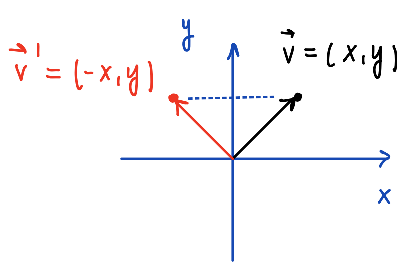
SIMETRÍA AXIAL RESPECTO AL EJE X



$$T(x,y) = (x, -y)$$

$$A = \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

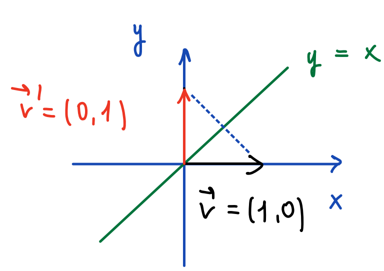
SIMETRÍA AXIAL RESPECTO AL EJE y



$$T(x,y) = (-x, y)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

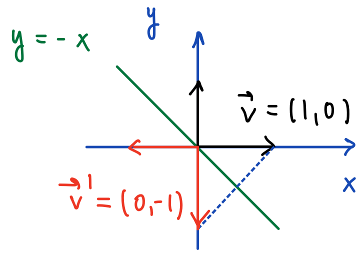
SIMETRÍA AXIAL RESPECTO A LA RECTA y = x



$$T(x,y) = (y, x)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SIMETRÍA AXIAL RESPECTO A LA RECTA $y = -x$

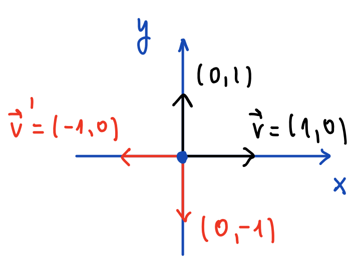


$$T(x,y) = (-y,-x)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Hallar la matriz asociada a la transformación T de una simetría axial respecto a la recta $y = 3x$.

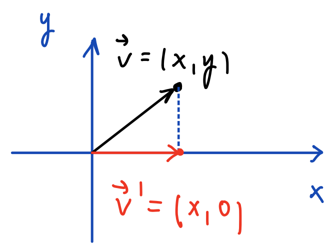
SIMETRÍA CENTRAL



$$T(x,y) = (-x,-y)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

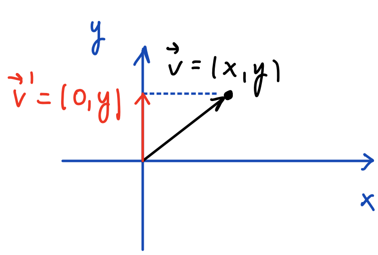
PROYECCIÓN ORTOGONAL RESPECTO AL EJE X



$$T(x, y) = (x, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL RESPECTO AL EJE y



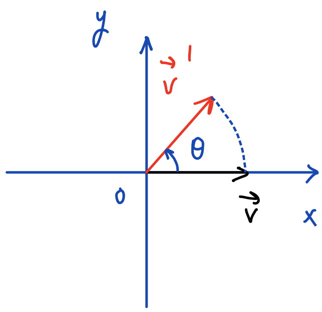
$$T(x, y) = (0, y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Hallar la matriz asociada a la transformación T de una proyección ortogonal respecto a la recta $y = 3x$.

ROTACIÓN EN UN ÁNGULO θ ANTIHORARIO ⟲+

$\theta > 0$

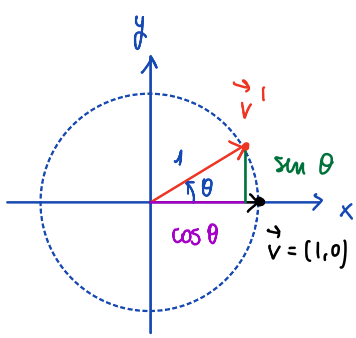


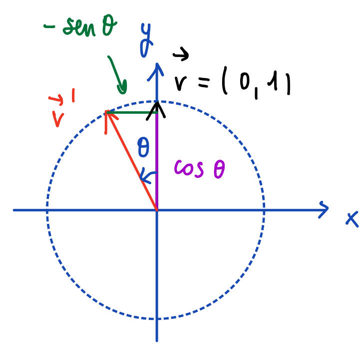
$$T(x,y) = (\cos\theta \cdot x - \operatorname{sen}\theta \cdot y,\ \operatorname{sen}\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$



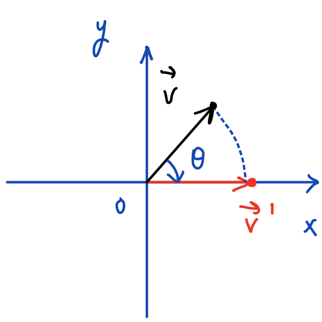


$T(1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$T(0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

ROTACIÓN EN UN ÁNGULO θ HORARIO ⟳-

$\theta < 0$



$$T(x,y) = (\cos\theta \cdot x + \operatorname{sen}\theta \cdot y,\ -\operatorname{sen}\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)$$

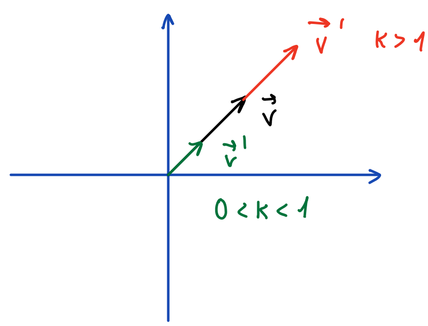
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Hallar la matriz asociada a la transformación T, la cual efectúa en $\mathbb{R}^2$ una rotación de 120° en sentido antihorario.

Calcular $T(2,2)$

$\boxed{\text{HOMOTECIA DE FACTOR } K > 0}$

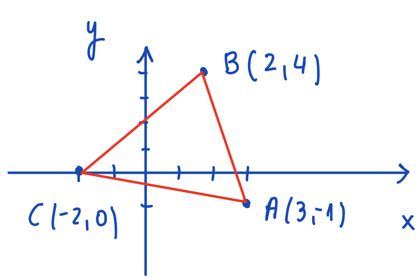
$$\begin{cases} \text{Si } K > 1: & \text{DILATACIÓN} \\ \text{Si } 0 < K < 1: & \text{CONTRACCIÓN} \end{cases}$$



$$T(x,y) = K(x,y) = (Kx, Ky)$$

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Aplicar a la figura la transformación T, cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Representar la figura transformada.



DESLIZAMIENTO CORTANTE EN LA DIRECCIÓN X CON FACTOR K

$$A = \begin{pmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T(x,y) = (x + Ky, y)$$

DESLIZAMIENTO CORTANTE EN LA DIRECCIÓN y CON FACTOR K

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{pmatrix} \qquad T(x,y) = (x, Kx + y)$$

Ejercicio: Trazar la imagen del rectángulo cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,2)$ y $(1,0)$ bajo las transformaciones:

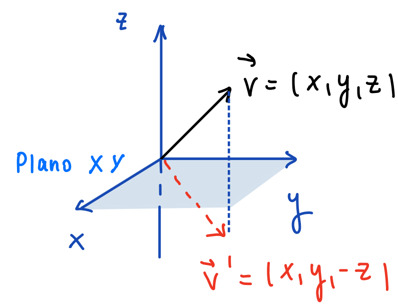
a) $T(x,y) = (x+y, y)$ b) $T(x,y) = (x, y+2x)$

- Geometría de las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^3$:

SIMETRÍA RESPECTO AL PLANO XY

$$T(x,y,z) = (x,y,-z)$$

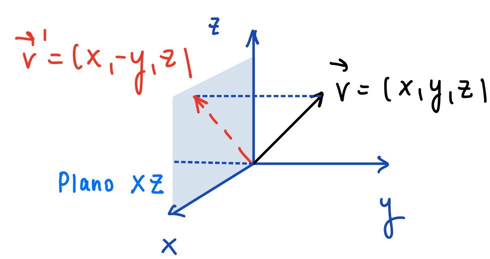
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



SIMETRÍA RESPECTO AL PLANO XZ

$$T(x,y,z) = (x,-y,z)$$

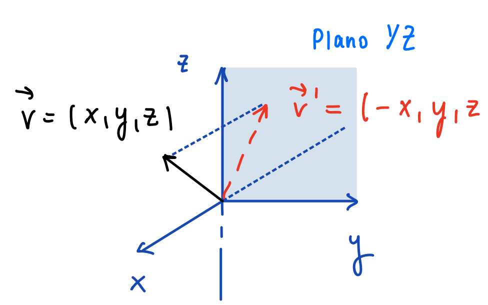
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



SIMETRÍA RESPECTO AL PLANO YZ

$$T(x,y,z) = (-x,y,z)$$

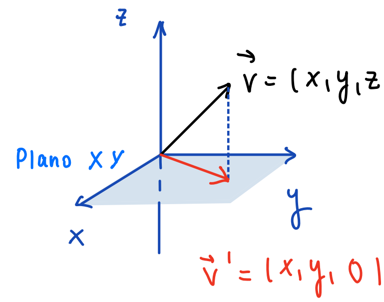
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



PROYECCIÓN ORTOGONAL RESPECTO AL PLANO XY

$T(x,y,z) = (x,y,0)$

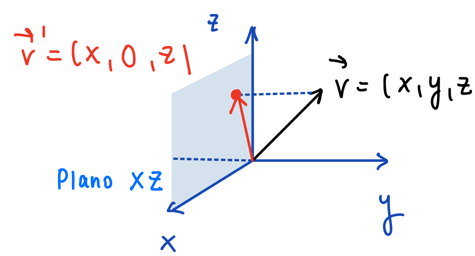
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



PROYECCIÓN ORTOGONAL RESPECTO AL PLANO XZ

$T(x,y,z) = (x,0,z)$

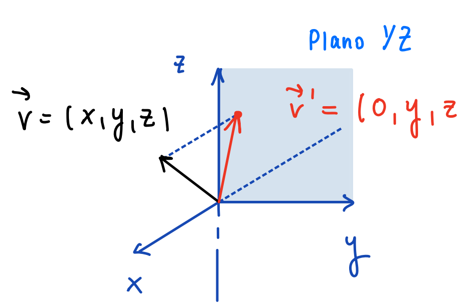
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



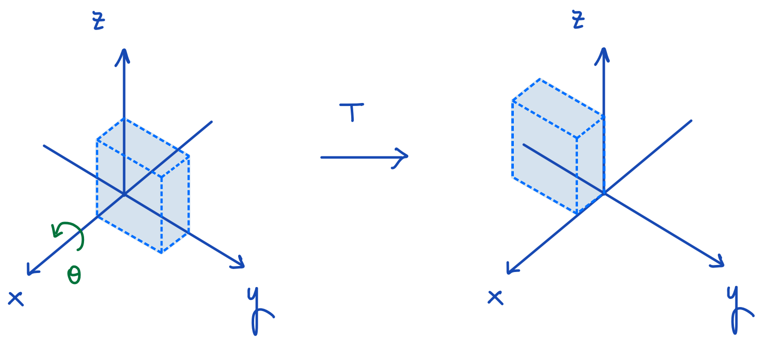
PROYECCIÓN ORTOGONAL RESPECTO AL PLANO YZ

$T(x,y,z) = (0,y,z)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

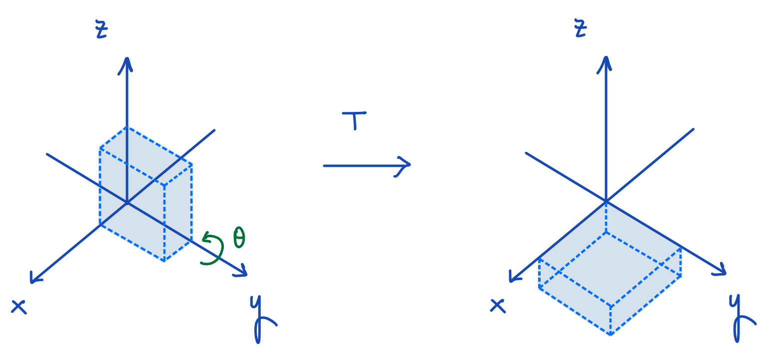


$\boxed{\text{ROTACIÓN RESPECTO AL EJE X}}$ $\theta > 0$



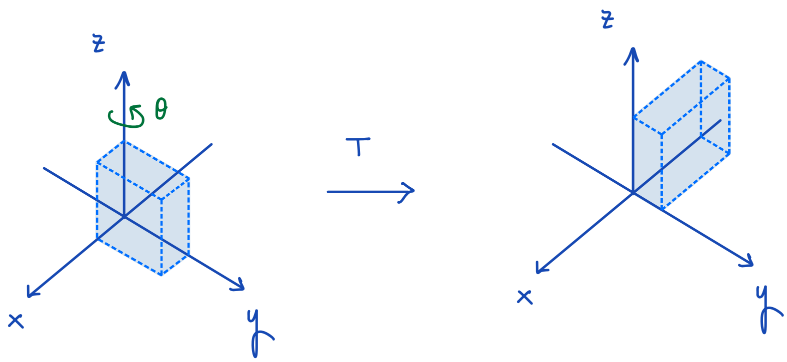
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ROTACIÓN RESPECTO AL EJE Y}}$ $\theta > 0$



$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ROTACIÓN RESPECTO AL EJE } z}$ $\theta > 0$



$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>Composición de transformaciones</u> :

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\qquad T_2 \qquad} \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longrightarrow T_1(x,y) = (x',y') \longrightarrow T_2(x',y') = (x'',y'')$$

$$T(x,y) = T_2 \circ T_1 \, (x,y) = (x'',y'')$$

$$A = A_{T_2} \cdot A_{T_1} \longrightarrow T(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Consideramos una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que consiste en una rotación de ángulo $\frac{7\pi}{6}$ respecto al eje x en sentido antihorario y, a continuación, una dilatación con $K = \frac{9}{2}$. Hallar la expresión de T y $T(2,0,1)$.

Ejercicio: Determinar la transformación $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza primero una rotación de $\theta = \frac{\pi}{4}$ (sentido antihorario) y después un deslizamiento cortante en la dirección del eje x. Además, se verifica que: $T(-3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2,-2)$.

<u>Ejercicio</u>: Obtener la matriz asociada a la transformación lineal

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que primero aplica una rotación de ángulo $\frac{4\pi}{3}$

y a continuación realiza una simetría respecto al eje y. En caso de

existir, encontrar un vector $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ perteneciente al subespacio

$U = L\{(1, -\sqrt{3})\}$ tal que $T(\vec{u}) = (-10, 0)$.