Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 3

DFESTS

UA | UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

© Protegidos derechos de autor

TEMA 1. INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

…

1.6. El concepto de frecuencia

PROBLEMAS

3.1. Cálculo del Desarrollo en Serie de Fourier en tiempo discreto (Método 2. La señal viene definida una suma de cosenos y senos)

1.6. El concepto de frecuencia

El concepto de frecuencia está directamente relacionado con el tiempo. Sus dimensiones son la inversa del tiempo y por tanto la naturaleza del tiempo afectará a la naturaleza de la frecuencia.

En el procesado de señales es habitual trabajar en los dos dominios: el tiempo y la frecuencia. Esto permite estudiar adecuadamente las señales y las operaciones que los sistemas realizan sobre ellas.

El concepto de frecuencia se basa en el principio de que cualquier señal puede ser descompuesta en una suma de señales sinusoidales con diferentes amplitudes, frecuencias y fases.

Por ejemplo, la luz blanca es la suma de señales sinusoidales electromagnéticas de diferentes frecuencias.

Señales periódicas y periodos en el tiempo discreto

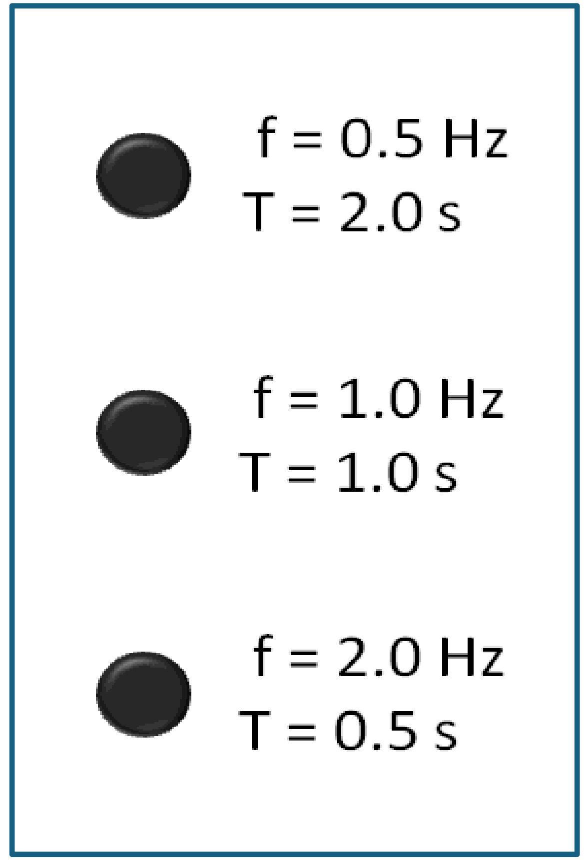
udt = 1 seg.

FRECUENCIA Y PERIODO

Tiempo continuo, el periodo es:
T = 1/f , con f frecuencia analógica.

La **frecuencia** es el número de veces que se repite un evento en una unidad de tiempo determinada (en este caso 1 segundo)
El **periodo** es el tiempo transcurrido entre la ocurrencia de dos eventos.
f= 1/T

P.ej: T=1, f=1, cada seg. parpadea una vez



Se aplica a señales sinusoidales en tiempo discreto (reales y complejas)

Prop.1. Una señal es periódica si su frecuencia discreta es racional.

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}\ ,\ f_d \in \mathbf{Q}$$

La frecuencia discreta **f_d** se calcula dividiendo la frecuencia angular $\boldsymbol{\omega_d}$ por 2π.

Prop.2. El periodo **N_0** es el entero positivo más pequeño,
(buscaremos el primer k que haga entera la expresión: $\{\frac{K}{fd}\}$)

$$N_0 = \min\left\{\frac{K}{fd}\right\} \in \mathbf{Z}^{+}$$

Dada una señal X[n] = A · cos / sen $(\omega_d n + \varphi_d)$
(La pulsación o frecuencia angular $\boldsymbol{\omega_d}$ siempre está multiplicada por el número de muestras ***n***).
Los números racionales son todos menos (π, *e*, $\sqrt{2}$, y números no periódicos que no pueden ser representados como racionales (fracciones)

Ejemplos de cálculo del periodo $\mathbf{N_0}$ dada la frecuencia discreta $\mathbf{f_d}$.

$$N_0 = \min\left\{\frac{k}{f_d}\right\} \textit{ que sea entero positivo, con } k \textit{ entero}$$

$$f_d = \frac{1}{4} \qquad N_d = min\left\{\frac{k}{1/4}\right\} = min\{4k\} = 4\ (con\ k=1)$$

$$f_d = \frac{3}{2} \qquad N_d = min\left\{\frac{k}{3/2}\right\} = min\left\{\frac{2}{3}k\right\} = 2\ (con\ k=3)$$

$$f_d = \frac{4}{6} \qquad N_d = min\left\{\frac{k}{4/6}\right\} = min\left\{\frac{6}{4}k\right\} = 3\ (con\ k=2)$$

Desarrollamos el 2º ej.
Vamos probando con k

$$\left\{\begin{array}{c}
\frac{k}{3/2}\ (\text{k=1})\ ⍰\ \frac{2}{3}\ \text{Nd} \notin \mathbf{Z}^+ \\
\frac{k}{3/2}\ (\text{k=2})\ ⍰\ \frac{4}{3}\ \text{Nd} \notin \mathbf{Z}^+ \\
\frac{k}{3/2}\ (\text{k=3})\ ⍰\ \frac{2\cdot 3}{3} = \frac{6}{3} = \mathbf{2} \in \mathbf{Z}^+ \\
\text{Para k=3} \rightarrow \mathbf{N_d=2}
\end{array}\right\}$$

TEMA 1. INTRODUCCIÓN AL TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL

...

1.6. El concepto de frecuencia

PROBLEMAS

3.1. Cálculo del Desarrollo en Serie de Fourier en tiempo discreto (Método 2. La señal viene definida una suma de cosenos y senos)

Problema 1. Determinar si cada una de las siguientes señales es periódica. Para las periódicas, calcular su periodo.

a) $X[n] = \cos(\frac{\pi}{6} n + \frac{\pi}{3})$

$$\frac{\pi}{6} : \frac{2\pi}{1} = \frac{\pi}{6 \cdot 2\pi} = \frac{1}{12}$$

$\omega d = \frac{\pi}{6}$; $f_d = \frac{\pi/6}{2\pi} = \mathbf{\frac{1}{12}} \in \mathbf{Q} \rightarrow$ por lo tanto X [n] **es periódica**

$N_0 = \{ \frac{K}{fd} \} = \min \{ \frac{K}{1/12} \} = \min \{ 12\,k \}_{k=1} =$ **12** utd **de periodo**

Se repite cada 12 muestras . $X[n] = X[n+12]$

b) $X[n] = \text{sen}(\frac{7\pi}{3}\text{ n} + \frac{\pi}{4})$

$f_d = \frac{\omega d}{2\pi} = \frac{7\pi/3}{2\pi} = \mathbf{\frac{7}{6}} \in \mathbf{Q} \rightarrow$ por lo tanto X [n] **es periódica**

$N_0 = \{\frac{K}{fd}\} = \min \{\frac{K}{7/6}\} = \min\{\frac{6k}{7}\}_{k=7}$ = **6** utd **de periodo**

Se repite cada 6 muestras . $X[\text{n}] = X[\text{n+6}]$

Además por la 2ª propiedad de las SSTDR , se cumple

$\omega d = \frac{7\pi}{3} > 2\pi \rightarrow \omega d' = \omega d - 2\pi = \frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3} \rightarrow 2\pi + \frac{\pi}{3}$

$\omega d_2 = \omega d_1 + 2\pi k = \omega d_1 + 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$

Por lo tanto las señales representadas por $\frac{7\pi}{3}$ *y por* $\frac{\pi}{3}$*, son idénticas*

DFESTS

c) $X[n] = 5\cos(4\,\mathrm{n} + \frac{\pi}{2})$

$\omega d = 4$

$f_d = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ no es racional, por lo tanto X[n] **no es periódica**

d) $X[n] = \frac{\mathrm{sen}(\pi/_3 n)}{2\pi n}$ $= \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}n \cdot (\frac{1}{2\pi n})$

$\omega d_1 = \frac{\pi}{3}$; $f_d = \frac{\pi}{3} : \frac{2\pi}{1} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \in \mathbf{Q}$

$\omega d_2 = \frac{1}{2\pi}$; $f_d = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi^2}} \notin \mathbf{Q}$

Para n= 1,2,3,4, … según aumenta n , no se repiten los valores en amplitud. Por lo tanto **no es periódica.**

Para que sea periódica, $\mathbf{f_d}$ tendría que ser racional en todos los casos.

e) $X[n] = e^{(j\frac{\pi}{6}n)}$

Pasamos a forma trigonométrica

$X[n] = e^{\left(j\frac{\pi}{6}n\right)}$ = cos ($\frac{\pi}{6}$ n) $+ j\ sen$ ($\frac{\pi}{6}$ n)

$\omega d = \frac{\pi}{6}$; $f_d = \frac{\omega d}{2\pi} = \frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{1\cdot\pi}{12\cdot\pi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$ $\in$ **Q** → por lo tanto X [n] **es periódica**

$N_0 = \{ \frac{K}{fd} \} = \min \{ \frac{K}{1/12} \} = \min \{ 12\ k \}_{k=1}$ = **12** utd **de periodo**

f) $X[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n) - \text{sen}(\frac{\pi}{8}n) + 3\cos(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3})$

Para ser periódica x[n] debe serlo cada una de las 3 componentes, y el periodo será m.c.m. de los 3 periodos.

$$\omega d_1 = \frac{\pi}{2} \; ; \; f_d = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4} \in \mathbf{Q}$$

$$N_{01} = \{ \frac{K}{fd} \} = \min \{ \frac{K}{1/4} \} = \min \{ 4\,k \}_{k=1} = \mathbf{4} \text{ utd}$$

$$\omega d_2 = \frac{\pi}{8} \; ; \; f_d = \frac{\pi/8}{2\pi} = \frac{1}{16} \in \mathbf{Q}$$

$$N_{02} = \{ \frac{K}{fd} \} = \min \{ \frac{K}{1/16} \} = \min \{ 16\,k \}_{k=1} = \mathbf{16} \text{ utd}$$

$$\omega d_3 = \frac{\pi}{4} \; ; \; f_d = \frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{1}{8} \in \mathbf{Q}$$

El periodo
No= mcm{4,16,8} =**16**

$$N_{03} = \{ \frac{K}{fd} \} = \min \{ \frac{K}{1/8} \} = \min \{ 8\,k \}_{k=1} = \mathbf{8} \text{ utd}$$

Problema 2. Dada la siguiente señal, calcula los **coeficientes C_K** del **DSF** en tiempo discreto y dibuja sus **espectros** de amplitud y de fase

$$X[n] = \text{sen}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}n\right) + 3\cos\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}n + \frac{\pi}{3}\right)$$

Para resolverlo se siguen los siguientes pasos:

1.- Para cada pulsación **ωd_1**, se obtiene su frecuencia discreta **fd_1**, y tras verificar que la señal es periódica, se calcula el periodo **N_0**.

Averiguar si la señal X(n) es periódica, y si lo es, calcular el período.

$$\omega d_1 = {}^{\pi}/_{8} \rightarrow fd_1 = \frac{{}^{\pi}/_{8}}{2\pi} = \frac{1}{16} \in Q$$

$$\omega d_2 = {}^{\pi}/_{4} \rightarrow fd_2 = \frac{{}^{\pi}/_{4}}{2\pi} = \frac{1}{8} \in Q$$

N_{01} = mín $\left\{\frac{K}{fd_1}\right\}$= mín $\{16k\} = 16$; para k=1

N_{02} = mín $\left\{\frac{K}{fd_2}\right\}$= mín $\{8k\} = 8$; para k=1

N_0 = M.C.M$\{N_{01}, N_{02}\}$=M.C.M $\{8,16\}$= **16**

2.- El **periodo** nos indica el **número de coeficientes** que tenemos que calcular.

$$Si\ N_0 = 16 \rightarrow CK = 0, \dots, 15 \quad \text{(tendrá 16 coeficientes)}$$

3.- Hay que expresar los senos y **cosenos como exponenciales complejas**.
Pero previamente, **los senos se convierten en cosenos**.

$$\boxed{\text{sen}\,\varphi = \cos\,\varphi - \frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}}$$

$$X(\mathrm{n}) = \text{sen}({}^{\pi}/_{8}\,\mathrm{n}) + 3\cos({}^{\pi}/_{4}\,\mathrm{n} + {}^{\pi}/_{3}) = \cos({}^{\pi}/_{8}\,\mathrm{n} - {}^{\pi}/_{2}) + 3\cos({}^{\pi}/_{4}\,\mathrm{n} + {}^{\pi}/_{3}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{n} - \frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{n} - \frac{\pi}{2}\right)}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{n} + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{n} + \frac{\pi}{3}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{n} - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{\pi}{8}\mathrm{n} - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{3}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{n} + \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{3}{2}e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{n} + \frac{\pi}{3}\right)}$$

4.- Utilizar la **Ecuación de síntesis** para ir comparando término a término y obtener los C_K

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} C_k \cdot e^{j\left(2\pi \frac{k}{N_0} n\right)} = \sum_{K=0}^{15} C_k \cdot e^{j\frac{\pi K n}{8}}$$

$Para\ N_0 = 16$

$$\boxed{C_k \cdot e^{j\frac{\pi k n}{8}}}$$

Comparamos cada término con la expresión obtenida de la Ec. de síntesis

1er término:

$e^{(\alpha+\beta)} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta}$ | Intercambiamos posiciones | Igualamos términos

$$\frac{1}{2} e^{j\left(\frac{\pi}{8}n - \frac{\pi}{2}\right)} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{8}n}\right) \cdot \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{8}n} = |C_K| e^{j\varphi_{CK}} e^{j\frac{\pi n K}{8}}$$

Tenemos que buscar el valor del subíndice K que iguale la ecuación

$Para\ K = 1,\ se\ igualan\ los\ términos$

De este modo, la expresión (2) y (4) son iguales.

❶ ❷ ❸ ❹

Por lo tanto $\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \; e^{j\frac{\pi}{8}n} = |C_1| e^{j\varphi_{C1}} \; e^{j\frac{\pi n 1}{8}}$

Si 2 y 4 son iguales, entonces 1 y 3 también

Si A=B
A·x =B·x

$$C_1 = \frac{1}{2} e^{-j^{\pi}/_2}\ ; \begin{cases} |C_1| = {}^{1}/_{2} \\ \varphi_{C1} = {}^{-\pi}/_{2} \end{cases}$$

Cada coeficiente se expresa de la siguiente forma: $C_k = |C_k| \cdot e^{j\phi_{ck}}$

2º término: $\frac{1}{2}e^{+j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\pi n}{8}}$ $= |C_K|e^{j\varphi_{CK}}\, e^{j\frac{\pi K n}{8}}$

$\rightarrow K = -1 \rightarrow C_{-1}$

$\text{Por } la\ 2^{a}\ propiedad\ de\ las\ SSTDC$:
Dos sinusoidales complejas en tiempo discreto son idénticas si se cumple
$\omega d_2 = \omega d_1 + 2\pi k$ (con K entero)

Si tenemos una K fuera del rango del período (N_0 = 0, …15)

$K' = K + sN_0$ (con s entero)

$$K' = K + 16 = -1 + 16 = 15 \rightarrow \quad K' = 15.$$

$Por\ lo\ tanto\ \boldsymbol{C_{15}} = \boldsymbol{C_{-1}},$ y C_{-1} es C_1, cambiando j de signo (el conjugado)

$$\boxed{C_{15} = \frac{1}{2}e^{+j^{\pi}/_{2}}\ ; \begin{cases} |\mathbf{C_{15}}| = {}^{1}/_{2} \\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{C15}} = {}^{\pi}/_{2} \end{cases}}$$

3er término:

Buscamos un K que iguale la ecuación

$$\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\,e^{j\frac{\pi}{4}n} = |C_k|\,e^{j\varphi_{CK}}\,e^{j\frac{\pi K \mathrm{n}}{8}}$$

$$\rightarrow K = 2 \rightarrow C_2$$

$$\boxed{C_2 = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}};\begin{cases}|\mathbf{C_2}| = \mathbf{3/2}\\ \boldsymbol{\varphi_{C2}} = \boldsymbol{\pi/3}\end{cases}}$$

4º término:

$$\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{\pi}{4}n} = |C_K|e^{j\varphi_{CK}}e^{j\frac{\pi K \mathrm{n}}{8}}$$

Por la 2ª propiedad (como en el 2ºt)

$$\rightarrow K = -2 \rightarrow C_{-2}$$

$$K' = K + N_0 = -2 + 16 = 14$$

$$\boxed{C_{14} = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}};\begin{cases}|\mathbf{C_{14}}| = \mathbf{3/2}\\ \boldsymbol{\varphi_{C14}} = \boldsymbol{-\pi/3}\end{cases}}$$

Se han obtenido $\mathbf{C_1, C_2, C_{14}}$ **y** $\mathbf{C_{15}}$

El resto de coeficientes son cero (no hay más términos para seguir calculando)

$$C_0 = C_3 = C_4 = C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = C_{13} = 0$$

5.- Representar el espectro de amplitud (módulos) y el de fase (ángulos)

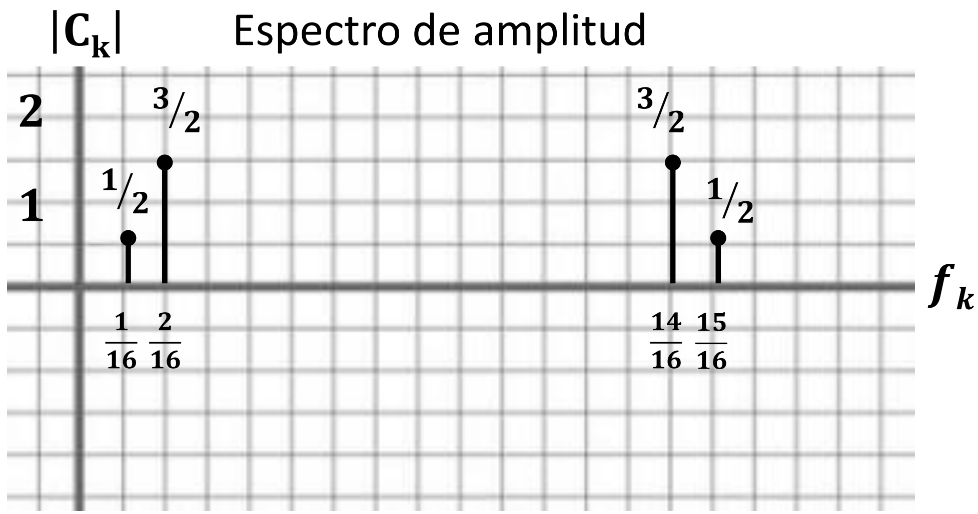
$$fd_k = \frac{k}{N_0}\ ;\ N_0 = 16$$

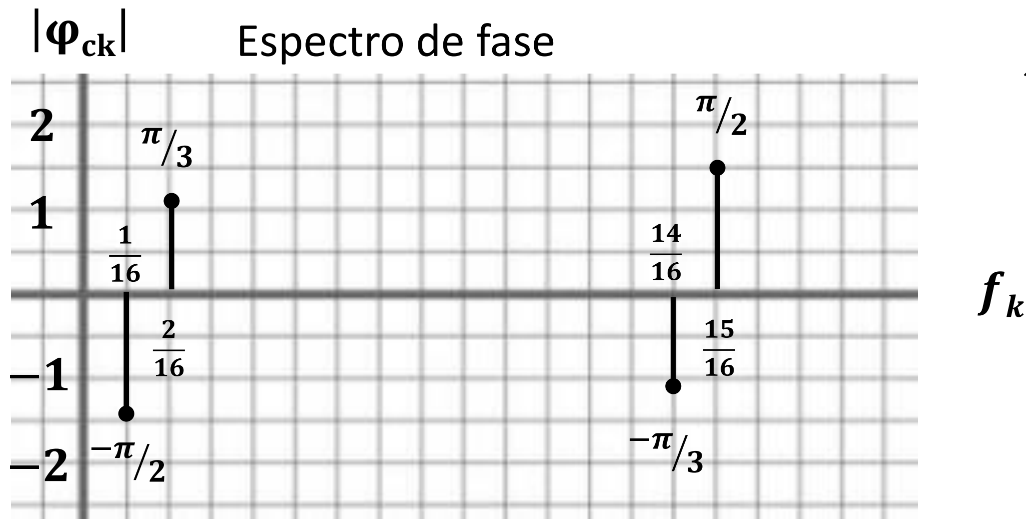
$$\begin{cases} |C_1| = {}^{1}\!/_{2} \\ \varphi_{C1} = {}^{-\pi}\!/_{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |C_2| = {}^{3}\!/_{2} \\ \varphi_{C2} = {}^{\pi}\!/_{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |C_{14}| = {}^{3}\!/_{2} \\ \varphi_{C14} = {}^{-\pi}\!/_{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |C_{15}| = {}^{1}\!/_{2} \\ \varphi_{C15} = {}^{\pi}\!/_{2} \end{cases}$$





${}^{\pi}\!/_{2} = 1,57$

${}^{\pi}\!/_{3} = 1,04$

Problema 3. Dada la siguiente secuencia:

$$x[n] = 2 + 3\cos\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

a) (1 p) Calcular el periodo N_o

b) (3,5 p) Calcular los coeficientes C_k de su DSF

c) (1 p) Representar el espectro de amplitud y de fase de los coeficientes C_k en función de la frecuencia discreta

a) Calcular el periodo

$$x[n] = 2 + 3\cos\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi n}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\omega_{d1} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow f_d = {}^{\frac{3\pi}{2}}/_{2\pi} = \frac{3}{4} \in \mathbf{Q};\ N_{01} = \min\left\{{}^{k}/_{f_{d1}} = {}^{k}/_{\frac{3}{4}} = \frac{4\,k}{3}\right\}_{k\ =\ 3} = 4$$

$$\omega_{d2} = \frac{11\pi}{4} \rightarrow f_d = {}^{\frac{11\pi}{4}}/_{2\pi} = \frac{11}{8} \in \mathbf{Q};\ N_{02} = \min\left\{{}^{k}/_{f_{d2}} = {}^{k}/_{\frac{11}{8}} = \frac{8k}{11}\right\}_{k\ =\ 11} = 8$$

$$\omega_{d3} = \frac{7\pi}{4} \rightarrow f_d = {}^{\frac{7\pi}{4}}/_{2\pi} = \frac{7}{8} \in \mathbf{Q};\ N_{01} = \min\left\{{}^{k}/_{f_{d3}} = {}^{k}/_{\frac{7}{8}} = \frac{8k}{7}\right\}_{k\ =\ 7} = 8$$

$\mathbf{N_O}$ = m.c.m. {4, 8, 8} = **8**. El periodo es 8, por lo tanto hay que calcular 8 coeficientes C_k . K=0,1,2,3,4,5,6,7

b) Calcular los coeficientes C_k de su DSF

Expresamos cada señal **coseno** como suma de sinusoides complejas, basándonos en la ecuaciones trigonométricas vistas en la 1ª clase, $\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}}$, para calcular los coeficientes C_k. Antes transformamos sen en cos: $\boldsymbol{\operatorname{sen}\varphi = \cos\varphi - \frac{\pi}{2}}$

$$x[n] = 2 + 3\cos\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \boldsymbol{sen}\left(\boldsymbol{\frac{11\pi n}{4}}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$x[n] = 2 + 3\cos\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1\cos\left(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$x[n] = 2 + \frac{3}{2}e^{j\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{3}{2}e^{-j\left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 2}e^{j\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2\cdot 2}e^{-j\left(\frac{7\pi n}{4} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Por otro lado, tenemos la ecuación se síntesis que expresa el sumatorio de sinusoides complejas:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{No-1} \mathbf{C_k} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{2\pi k}{N_0}\boldsymbol{n}} = \sum_{k=0}^{7} \mathrm{C_k} \cdot e^{j\frac{2\pi k}{8}n} = \sum_{k=0}^{7} \mathrm{C_k} \cdot e^{j\frac{\pi\, k}{4}n}$$

Comparando ambas expresiones de x[n] se obtienen los coeficientes *Ck*.

Tenemos que comparar cada una de las 8 sinusoides complejas con expresión: $\boxed{\mathbf{C_k} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}\frac{\pi\, k}{4}\boldsymbol{n}}}$ para encontrar cada uno de los coeficientes.

Buscamos valores de ***K*** *que permitan igualar la sinusoide con la ecuación de síntesis y si hace falta aplicamos la propiedad 2 de las sinusoides en tiempo discreto.*

I) Comparamos con la primera sinusoide **2** y K=0

$$2 = \mathrm{C_k}\, e^{j\frac{\pi\, k}{4}n}\,; \quad \boxed{2} = \mathrm{C_0}\, e^{j\frac{\pi\, 0}{4}n}\,; \quad 2 = \mathrm{C_0}\, e^{0} = \mathrm{C_0} 1 = \mathbf{C_0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C_0} = \mathbf{2}\,; \begin{Bmatrix} |C_0| = 2 \\ \varphi_{C0} = 0 \end{Bmatrix}}$$

II) Comparamos con la segunda sinusoide $\frac{3}{2}e^{j\left(\frac{3\pi n}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$ y K=6

$$\boxed{\mathbf{C_k \cdot e^{j\frac{\pi k}{4}n}}}$$

Tenemos que encontrar
el valor de k que iguale $\frac{3}{2}$ y $\frac{k}{4}$

$$\boxed{\frac{6}{4}=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3}{2}e^{j\left(\frac{3\pi n}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\boxed{\frac{3}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}}\cdot e^{j\frac{3\pi n}{2}}\ ;\ C_6 e^{j\frac{\pi 6}{4}n}=C_6 e^{j\frac{\pi 3n}{2}}=C_6\, e^{j\frac{3\pi n}{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{C_6=\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}\ ;\left\{\begin{matrix}|C_6|=3/2\\ \varphi_{C6}=-\pi/3\end{matrix}\right\}}$$

Aplicando la **propiedad 2** de las sinusoides de tiempo discreto:
dos sinusoides en tiempo discreto (con la misma amplitud y fase) cuyas frecuencias discretas están separadas por un número entero, son idénticas. $fd_2 = fd_1 + k$. $k' = k \pm N_o$
El valor que toma la señal en k' y k es el mismo.

III) A partir de la tercera sinusoide $\frac{3}{2}e^{-j\left(\frac{3\pi n}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$ y k=-6, $N_O = 8$

Aplicando para k=-6; $k' = k+N_o = -6+8=2$; obtenemos C_2

$$\frac{3}{2}e^{-j\left(\frac{3\pi n}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\boxed{\frac{3}{2}e^{+j\frac{\pi}{3}}}\, e^{-j\frac{3\pi n}{2}}\ ;\quad C_{-6}\, e^{j\frac{\pi(-6)n}{4}}=C_{-6}\, e^{-j\frac{3\pi n}{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{C_2=\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}}\ ;\left\{\begin{matrix}|C_2|=3/2\\ \varphi_{C2}=\pi/3\end{matrix}\right\}}$$

-6 esta fuera del rango K=0,1,2,3,4,5,6,7

$$C_k \cdot e^{j\frac{\pi k}{4}n}$$

IV) Comparamos con la cuarta sinusoide $\frac{1}{2}e^{j\,(\frac{11\pi n}{4}-\frac{\pi}{2})}$ y K=11

Aplicando k=11; k''= k-N$_o$= 11 – 8 = 3; obtenemos C$_3$

$$\frac{1}{2}e^{j\,(\frac{11\pi n}{4}-\frac{\pi}{2})}=\boxed{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}}\,e^{j\frac{11\pi n}{4}} \quad ; \quad C_{11}\,e^{j\frac{\pi 11 n}{4}} = C_3\,e^{j\frac{11\pi n}{4}}$$

11 esta fuera del rango K=0,1,2,3,4,5,6,7

$$C_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \begin{cases} |C_3| = 1/2 \\ \varphi_{C3=}\ -\pi/2 \end{cases}$$

V) Comparamos con la quinta sinusoide $\frac{1}{2}e^{-j\,(\frac{11\pi n}{4}-\frac{\pi}{2})}$ y K= -11

Aplicando k= -11; k'= k+2N$_o$= -11 +16 = 5; obtenemos C$_5$

$$\frac{1}{2}e^{-j\,(\frac{11\pi n}{4}-\frac{\pi}{2})}=\boxed{\frac{1}{2}e^{+j\frac{\pi}{2}}}\,e^{-j\frac{11\pi n}{4}} \quad ; \quad C_{-11}\,e^{j\frac{\pi(-11)n}{4}} = C_5\,e^{-j\frac{11\pi n}{4}}$$

$$C_5 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \begin{cases} |C_5| = 1/2 \\ \varphi_{C5=}\ \pi/2 \end{cases}$$

-11 esta fuera del rango K=0,1,2,3,4,5,6,7

$$\mathbf{C_k \cdot e^{j\frac{\pi k}{4}n}}$$

VI) Comparamos con la sexta sinusoide $\frac{1}{4}e^{j\left(\frac{7\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$ y K=7

$$\frac{1}{4}e^{j\left(\frac{7\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\frac{1}{4}e^{+j\frac{\pi}{4}}}\, e^{j\frac{7\pi n}{4}} \quad ; \quad C_7\, e^{j\frac{\pi 7 n}{4}} = C_7\, e^{j\frac{7\pi n}{4}}$$

$$\mathbf{C_7 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}}\ ; \begin{Bmatrix} |C_7| = 1/4 \\ \varphi_{C7} = \pi/4 \end{Bmatrix}$$

VII) Comparamos con la séptima sinusoide $\frac{1}{4}e^{-j\left(\frac{7\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$ y K=-7

Aplicando k= -7; k'= k+N_o= -7 +8 = 1; obtenemos C_1

$$\frac{1}{4}e^{-j\left(\frac{7\pi n}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}}\, e^{-j\frac{7\pi n}{4}} \quad ; \quad C_{-7}\, e^{j\frac{\pi(-7)n}{4}} = C_1\, e^{-j\frac{7\pi n}{4}}$$

-7 esta fuera del rango K=0,1,2,3,4,5,6,7

$$\mathbf{C_1 = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}}\ ; \begin{Bmatrix} |C_1| = 1/4 \\ \varphi_{C1} = -\pi/4 \end{Bmatrix}$$

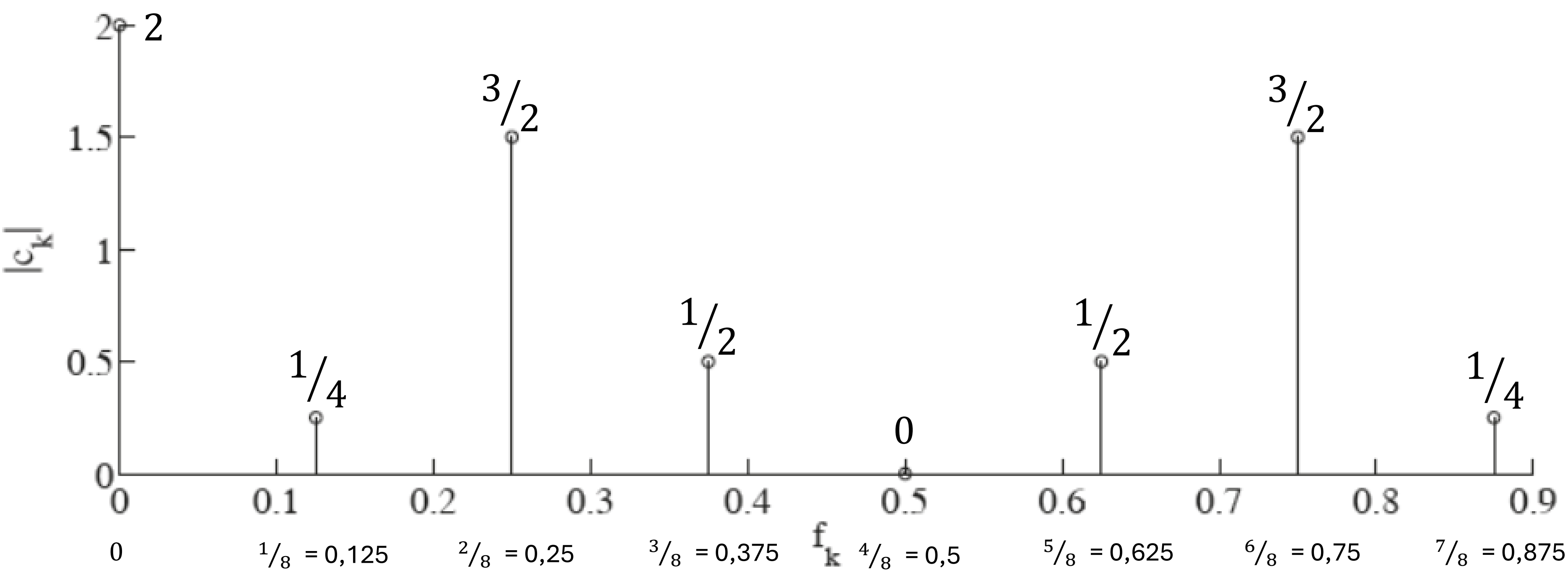
VIII) El último coeficiente, $\mathbf{C_4 = 0}$

c) Representar el espectro de amplitud y de fase de los coeficientes C_k en función de $\boldsymbol{f_d}$.

fk= k/No = k/8 ; para k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, *fk = 0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8*

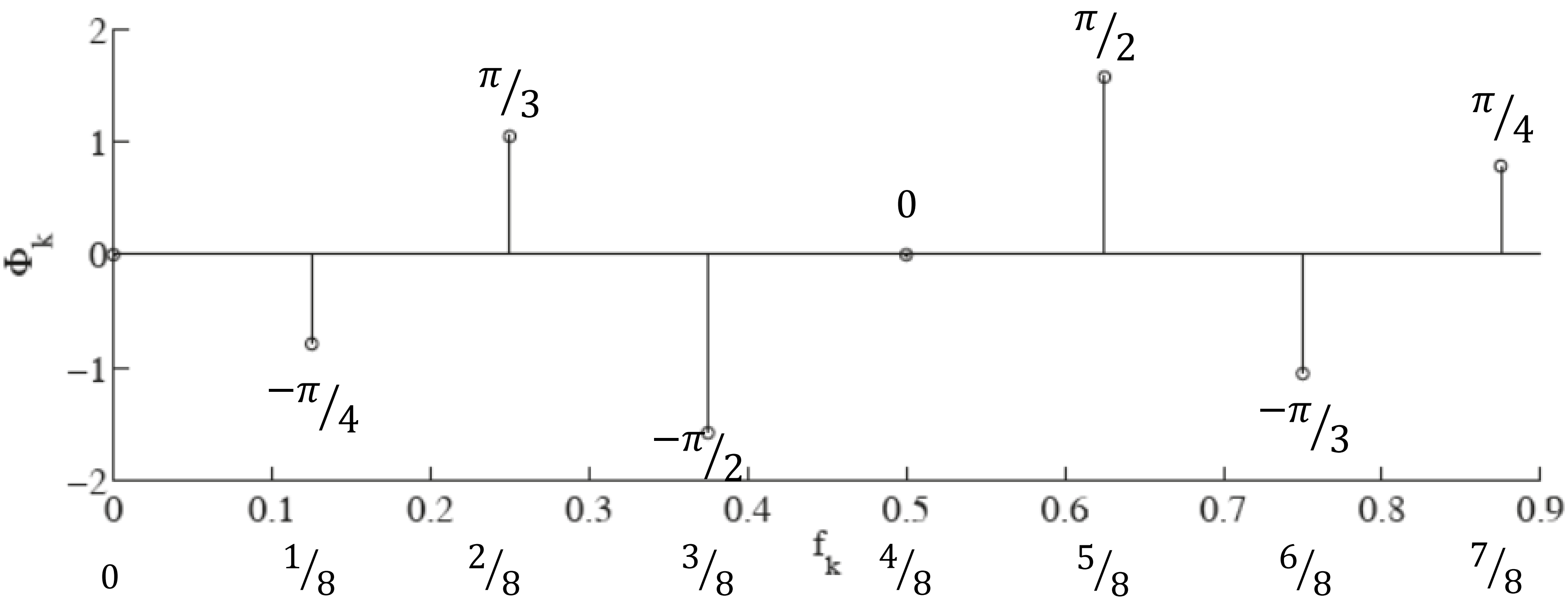
C_0=2; C_1=1/4; C_2=3/2; C_3=1/2; C_4=0; C_5=1/2; C_6=3/2; C_7=1/4;

El espectro de amplitud



$\varphi_{C0}=0\ ;\ \varphi_{C1}=\,^{-\pi}/_{4}\ ;\ \varphi_{C2}=\,^{\pi}/_{3}\ ;\ \varphi_{C3}=\,^{-\pi}/_{2}\ ;\ \varphi_{C4}=0\ ;\ \varphi_{C5}=\,^{\pi}/_{2}\ ;\ \varphi_{C6}=\,^{-\pi}/_{3}\ ;\ \varphi_{C7}=\,^{\pi}/_{4}$

El espectro de fase



Problema 4. Calcular los $\mathbf{C_K}$ del DSF de la señal X(n)

$$X[n] = -3 + 2\cos\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}n\right) + \text{sen}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}n + \frac{\pi}{3}\right)$$

En primer lugar, comprobamos si la señal es periódica y calculamos su periodo $\boldsymbol{N_0}$

$$\omega d_1 = {}^{\pi}/_{4} \to fd_1 = \frac{{}^{\pi}/_{4}}{2\pi} = \frac{1}{8} \in Q \;\to \mathbf{N_{01}} = \text{mín}\left\{\frac{K}{fd1}\right\} = \text{mín}\left\{\frac{8}{1}k\right\}_{(k\,=\,1)} = 8$$

$$\omega d_2 = {}^{\pi}/_{2} \to fd_2 = \frac{{}^{\pi}/_{2}}{2\pi} = \frac{1}{4} \in Q \;\to \mathbf{N_{01}} = \text{mín}\left\{\frac{K}{fd1}\right\} = \text{mín}\left\{\frac{4}{1}k\right\}_{(k\,=\,1)} = 4$$

$$\omega d_3 = {}^{\pi}/_{2} \to fd_3 = \frac{{}^{3\pi}/_{4}}{2\pi} = \frac{3}{8} \in Q \;\to \mathbf{N_{01}} = \text{mín}\left\{\frac{K}{fd1}\right\} = \text{mín}\left\{\frac{8}{3}k\right\}_{(k\,=\,3)} = 8$$

$N_0 = M.C.M.\{8,4,8\} = 8$

El período es N_0=8 y los coeficientes C_K son 8

$C_K \;\to K = 0,1,2,3,4,5,6,7$

Cada ***coseno*** lo expresamos como suma de sinusoides complejas.
Previamente, los senos se pasan a cosenos

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$X[n] = -3 + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -3 + 2\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)}\right) =$$

$$-3 + e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \frac{1}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{4}e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{4}e^{-j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Una vez obtenidas las (7) sinusoides, comparamos término a término
con la expresión que nos queda de la Ecuación de síntesis al sustituir N_0 por 8

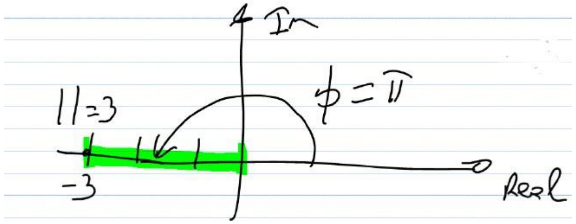
$$X[n] = \sum_{k=0}^{7} |C_K|\, e^{j\varphi_{CK}} e^{j\frac{2\pi kn}{8}} = \sum_{k=0}^{7} |C_K| e^{j\varphi_{CK}}\, e^{j\frac{\pi kn}{4}}$$

$$\boxed{\mathbf{C_k} \cdot e^{j\frac{\pi\, k}{4}n}}$$

Expresión a comparar con cada término y k diferente

1er término:

Comparamos con la primera sinusoide **-3** y K=0



$$-3 = C_k\, e^{j\frac{\pi\, k}{4}n}\,; \quad -3 = C_0\, e^{j\frac{\pi\, 0}{4}n}\,; \quad -3 = C_0\, e^{0} = C_0 1 = C_0\,;$$

No obstante, el coeficiente es un nº complejo, y al ser negativa la parte real, el ángulo vale π, y por lo tanto, en forma polar tenemos $|C_0|$=3 y φ_{C0}=π

$$\boxed{C_0 = 3e^{j\pi}\,; \begin{cases} |C_0| = 3 \\ \varphi_{C2} = \pi \end{cases}}$$

$$C_k \cdot e^{j\frac{\pi k}{4}n}$$

2º término:

Comparamos con la segunda sinusoide $e^{j\frac{\pi}{4}n}$ y K=1

$$e^{j\frac{\pi}{4}n} = C_1\, e^{j\frac{\pi\, 1}{4}n} \;;\; 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}n} = C_1 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}n};$$

$$C_1 = 1 \;\; ; \begin{cases} |C_1| = 1 \\ \varphi_{C1} = 0 \end{cases}$$

3er término:

Comparamos con la tercera $e^{-j\frac{\pi}{4}n}$ y K=-1

$$1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}n} = C_{-1}\, e^{j\frac{\pi\,(-1)}{4}n}$$

Al necesitar, para comparar, un k fuera del rango del periodo (N_0 = 0, …7), aplicamos la 2ª propiedad

$$k' = k + N_0 = -1 + 8 = 7; \;\; C_{N0\,+\,k} = C_K\,; \; C_7 = C_{-1};\; C_7 = 1$$

El módulo es igual al del 2º término, y la fase 0

$$C_7 = 1 \,; \begin{cases} |C_1| = 1 \\ \varphi_{C1} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{C_k \cdot e^{j\frac{\pi k}{4}n}}$$

4º término:

Comparamos con la cuarta $\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)}$ y K= 2

$$\frac{1}{2}\cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)} = C_2\, e^{j\frac{\pi\, 2}{4}n} \;;\quad \frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} = C_2\, e^{j\frac{\pi 1}{2}n}$$

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\;;\;\begin{cases}|C_2| = \dfrac{1}{2}\\ \varphi C_2 = \dfrac{-\pi}{2}\end{cases}}$$

5º término:

Comparamos con la quinta $\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)}$ y K=-2

$$\frac{1}{2}\cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)} = C_{-2}e^{j\frac{\pi\,(-2)}{4}n} \;;\quad \frac{1}{2}e^{+j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n} = C_{-2}\cdot e^{\frac{-1\, j\pi}{2}n}$$

$$k = -2 \rightarrow k' = -2+8 = 6 \;;\; C_6 = C_{-2}$$

$$\boxed{C_6 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\;;\;\begin{cases}|C_6| = \dfrac{1}{2}\\ \varphi C_6 = \dfrac{\pi}{2}\end{cases}}$$

$$\boxed{\mathbf{C_k} \cdot e^{j\frac{\pi k}{4}n}}$$

6º término:

Comparamos con la sexta $\frac{1}{4}e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)}$ y K= 3

$$\frac{1}{4}e^{j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)} = C_3 \cdot e^{j\frac{\pi\, 3}{4}n} \;;\; \frac{1}{4}\cdot e^{j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{j\frac{3}{4}\pi n} = C_3 \cdot e^{j\frac{\pi\, 3}{4}n}$$

$$C_3 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}} \;;\; \begin{cases} |C_3| = \dfrac{1}{4} \\ \varphi C_3 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

7º término:

Comparamos con la séptima $\frac{1}{4}e^{-j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)}$ y K= -3

$$\frac{1}{4}e^{-j\left(\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}\right)} = C_{-3} \cdot e^{j\frac{\pi(-3)}{4}n} \;;\; \frac{1}{4}\cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}\cdot e^{-j\frac{3}{4}\pi n} = C_{-3} \cdot e^{j\frac{\pi\,(-3)}{4}n}$$

$$k = -3 \rightarrow k' = -3+8 = 5 \;;\; C_5 = C_{-2}$$

$$C_5 = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}} \;;\; \begin{cases} |C_3| = \dfrac{1}{4} \\ \varphi C_3 = \dfrac{-\pi}{3} \end{cases}$$

Como ya no quedan más términos y no se ha usado k=4, tenemos que: $C_4 = 0$

APÉNDICE 1. $Por\ la\ 2^a\ propiedad\ de\ las\ SSTDC,$ dos sinusoidales complejas en tiempo discreto son idénticas si se cumple $\omega d_2 = \omega d_1 + 2\pi k$ (con K entero)

Si tenemos por ejemplo, $\cos\left(\frac{11}{4}\pi n\right)$ con $N_0 = 8$

$$\cos\left(\frac{11}{4}\pi n\right) = \frac{e^{j\frac{11}{4}\pi n} + e^{-j\frac{11}{4}\pi n}}{2} \quad \textit{es idéntico a} \quad \frac{e^{j\frac{3}{4}\pi} + e^{-j\frac{3}{4}\pi}}{2}$$

$$\omega d = \frac{11}{4}\pi > 2\pi \qquad \omega d' = \omega d - 2\pi = \frac{11}{4}\pi - 2\pi = \frac{3}{4}\pi$$

Si se deja $\omega d = \frac{11}{4}\pi \rightarrow \mathrm{k} = 11$ y el período es $N_0 = 8$

$\mathrm{k} = 11$: $C_{11} \rightarrow k' = k - N_0 =$ 11-8 = 3 ; Corresponde a $\mathbf{C_3}$

$\mathrm{k} = -11$: $C_{-11} \rightarrow k' = k + N_0 + N_0 = -11 + 8 + 8 = 5$; Corresponde a $\mathbf{C_5}$

Se pueden obtener $\mathbf{C_3}$ y $\mathbf{C_5}$

DFESTS