

Tema 6: Identificación de sistemas

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS Curso 2025-2026

B1 - Sistemas Dinámicos

T1: Fundamentos del modelado de sistemas dinámicos

T2: Estabilidad, controlabilidad y observabilidad

T3: Paradigmas de simulación

B2 - Sistemas Complejos

T4: Lenguajes formales para modelos conceptuales

T5: Redes complejas y modelado estructural

B3 - Modelado con IA

T6: Identificación de sistemas

T7: Inteligencia artificial aplicada al modelado de sistemas

1. Introducció
2. Fundamentos de la identificació de sistemes a partir de dades
3. Models paramètrics vs. no paramètrics
4. Mètodes clàssics
 - a. Mètode de mínims quadrats (LS)
 - b. Models ARX
 - c. Models ARMAX
 - d. Recursivitat i mínims quadrats
5. Introducció a xarxes neuronals i models híbrids
 - a. Xarxes neuronals per a identificació
 - b. Models híbrids: físics + dades
6. Avaluació de rendiment del model

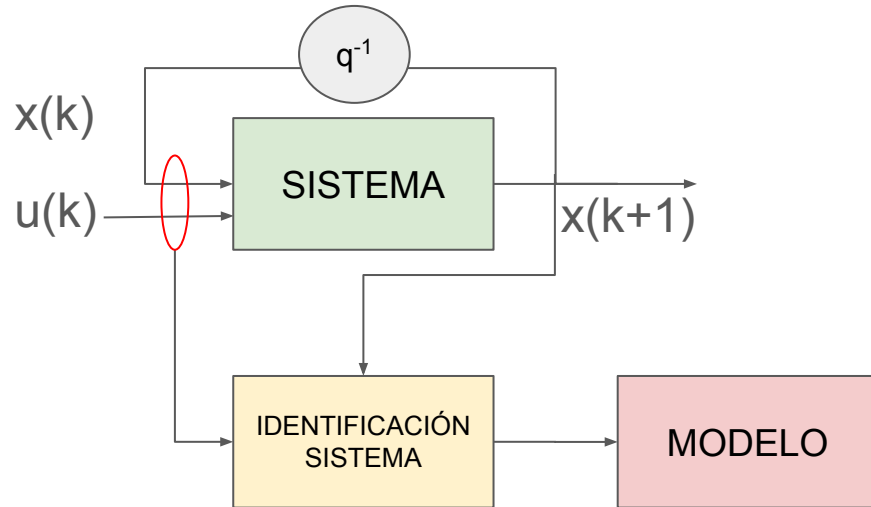
- 1. Introducció**
2. Fundamentos de la identificación de sistemas a partir de datos
3. Modelos paramétricos vs. no paramétricos
4. Métodos clásicos
 - a. Método de mínimos cuadrados (LS)
 - b. Modelos ARX
 - c. Modelos ARMAX
 - d. Recursividad y mínimos cuadrados
5. Introducció a redes neuronales y modelos híbridos
 - a. Redes neuronales para identificación
 - b. Modelos híbridos: físicos + datos
6. Evaluación de desempeño del modelo

1. Introducción

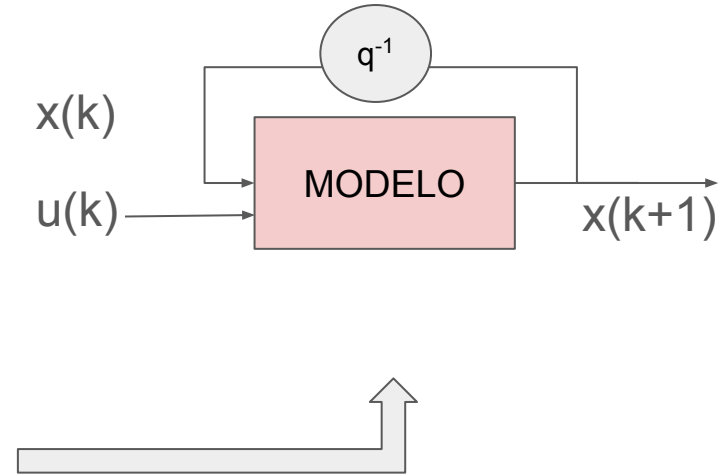
- La **identificación de sistemas** es la rama del modelado y la simulación que se ocupa de construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos **a partir de datos experimentales**.
- A diferencia del modelado puramente **físico** o de **primeros principios**, en identificación partimos de mediciones de entradas y salidas, y tratamos de ajustar un modelo que reproduzca, con cierta precisión, el comportamiento observado.

1. Introducció

Entrenamiento



Inferencia



1. Introducció
- 2. Fundamentos de la identificación de sistemas a partir de datos**
3. Modelos paramétricos vs. no paramétricos
4. Métodos clásicos
 - a. Método de mínimos cuadrados (LS)
 - b. Modelos ARX
 - c. Modelos ARMAX
 - d. Recursividad y mínimos cuadrados
5. Introducció a redes neuronales y modelos híbridos
 - a. Redes neuronales para identificación
 - b. Modelos híbridos: físicos + datos
6. Evaluación de desempeño del modelo

2. Fundamentos de la identificación

Consideremos un sistema dinámico (desconocido) que recibe una señal de entrada $u(t)$ y produce una salida $x(t)$. Según el contexto, trabajaremos en tiempo continuo o discreto. Para identificación por ordenador suele ser más práctico el tiempo discreto, donde tomamos muestras:

$$u(k) = u(kT_s), \quad x(k) = x(kT_s),$$

siendo T_s el periodo de muestreo y $k \in \mathbb{Z}$ el índice de tiempo discreto.

2. Fundamentos de la identificación

- **Objetivo básico**

El objetivo de la identificación es encontrar un modelo M en alguna clase de modelos (lineales, no lineales, estocásticos, etc.) tal que, dado $u(k)$, el modelo genere una salida $\hat{x}(k)$ que aproxime bien a la salida real $x(k)$:

$$\hat{x}(k) \approx x(k), \quad \forall k \text{ en el conjunto de interés.}$$

2. Fundamentos de la identificación

- **Objetivo básico**

Típicamente, un modelo se describe mediante una estructura con parámetros desconocidos θ :

$$M : \quad \hat{x}(k) = f(u(k), u(k-1), \dots, x(k-1), \dots; \theta),$$

y el problema de identificación se convierte en estimar θ a partir de los datos medidos:

$$\{u(k), x(k)\}_{k=1}^N.$$

2. Fundamentos de la identificación

Según el grado de conocimiento físico previo del sistema, se habla de:

- **Modelo de caja blanca (white-box):** basado casi exclusivamente en leyes físicas conocidas; pocos parámetros desconocidos.
- **Modelo de caja gris (grey-box):** se conoce parcialmente la estructura física, pero se dejan algunos términos o parámetros a estimar a partir de datos.
- **Modelo de caja negra (black-box):** se desconoce la estructura interna del sistema; se usa una clase de modelos muy flexible (ej. series de Volterra, redes neuronales, etc.) y se determinan los parámetros sólo a partir de datos.

2. Fundamentos de la identificación

El procedimiento típico de identificación comprende las siguientes fases:

1. **Diseño del experimento y adquisición de datos.** Elegir cómo excitar al sistema (tipo de entrada), duración del experimento, muestreo, etc.
2. **Selección de la estructura del modelo.** Elegir una familia de modelos: ARX, ARMAX, modelos de espacio de estados, redes neuronales, etc.
3. **Estimación de parámetros.** Ajustar los parámetros θ minimizando algún criterio de error, típicamente basado en mínimos cuadrados o máxima verosimilitud.
4. **Validación del modelo.** Verificar si el modelo reproduce adecuadamente datos diferentes a los de entrenamiento, analizando residuales y criterios de calidad.
5. **Refinamiento.** Si el modelo no es satisfactorio, se revisan la estructura, los órdenes, la calidad de los datos o el tipo de excitación, y se repite el proceso.

2. Fundamentos de la identificación

Supongamos que el sistema real es discretizado y descrito por:

$$x(k+1) = a x(k) + b u(k) + e(k),$$

donde $e(k)$ es un ruido de medida (no conocido), a y b son parámetros constantes desconocidos. Dado un conjunto de datos $\{u(k), x(k)\}$, el problema de identificación consiste en estimar \hat{a} y \hat{b} tales que el modelo

$$\hat{x}(k+1) = \hat{a} x(k) + \hat{b} u(k)$$

reproduzca lo mejor posible las observaciones $x(k+1)$.

1. Introducció
2. Fundamentos de la identificació de sistemes a partir de dades
- 3. Modelos paramétricos vs. no paramétricos**
4. Méthodos clásicos
 - a. Méthodo de mínimos cuadrados (LS)
 - b. Modelos ARX
 - c. Modelos ARMAX
 - d. Recursividad y mínimos cuadrados
5. Introducció a redes neuronales y modelos híbridos
 - a. Redes neuronales para identificación
 - b. Modelos híbridos: físicos + dades
6. Evaluación de desempeño del modelo

3. Modelos paramétricos vs. no paramétricos

- **Modelos paramétricos**

En un modelo paramétrico se asume de antemano una *estructura funcional* para la relación entrada-salida, que depende de un número finito de parámetros. Ejemplos típicos:

- Modelos lineales invariantes en el tiempo (LTI) en forma de función de transferencia:

$$G(q^{-1}; \theta) = \frac{B(q^{-1}; \theta)}{A(q^{-1}; \theta)} = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}}.$$

3. Modelos paramétricos vs. no paramétricos

- **Modelos paramétricos**

- Modelos ARX/ARMAX, donde la dinámica del sistema y del ruido se describen mediante polinomios en q^{-1} .
- Modelos de espacio de estados discretos:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k) + Du(k).$$

3. Modelos paramétricos vs. no paramétricos

- **Modelos NO paramétricos**

En los modelos no paramétricos no se impone una estructura de modelo de orden finito a priori, sino que se trata de estimar directamente ciertas características del sistema a partir de los datos:

- **Respuesta al impulso:** estimar la secuencia $\{g(k)\}$ que relaciona entrada y salida mediante

$$x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) u(k-i) + e(k).$$

3. Modelos paramétricos vs. no paramétricos



UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- **Modelos NO paramétricos**

- **Función de transferencia en frecuencia:** estimar $G(e^{j\omega})$ mediante técnicas de análisis espectral.
- **Espectros de potencia:** estimación de la densidad espectral $S_{yy}(\omega)$ y la coherencia entre u y x .

1. Introducció
2. Fundamentos de la identificació de sistemes a partir de dats
3. Models paramètrics vs. no paramètrics
- 4. Mètodes clàssics**
 - a. Mètode de mínims quadrats (LS)**
 - b. Models ARX
 - c. Models ARMAX
 - d. Recursivitat i mínims quadrats
5. Introducció a xarxes neuronals i models híbrids
 - a. Xarxes neuronals per a identificació
 - b. Models híbrids: físics + dats
6. Avaluació de rendiment del model

4.a. Métodos clásicos: Mínimos Cuadrados

El **método de mínimos cuadrados** es una técnica fundamental para estimar parámetros en modelos lineales respecto a los parámetros.

Consideremos el modelo lineal en parámetros:

$$x(k) = \varphi^{\top}(k) \theta + e(k),$$

donde:

- $\theta \in \mathbb{R}^p$ es el vector de parámetros desconocidos,
- $\varphi(k) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de regresores (compuesto de entradas y salidas pasadas),
- $e(k)$ es el error de modelado/ruido.

4.a. Métodos clásicos: Mínimos Cuadrados

Acumulando N muestras:

$$X = \Phi\theta + E,$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^\top(1) \\ \varphi^\top(2) \\ \vdots \\ \varphi^\top(N) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}.$$

4.a. Métodos clásicos: Mínimos Cuadrados

El método de mínimos cuadrados busca $\hat{\theta}$ que minimice la suma de cuadrados del error:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N (x(k) - \varphi^{\top}(k)\theta)^2 = \|X - \Phi\theta\|^2.$$

Derivando e igualando a cero se obtiene la solución LS (si $\Phi^{\top}\Phi$ es invertible):

$$\hat{\theta}_{\text{LS}} = (\Phi^{\top}\Phi)^{-1}\Phi^{\top}X.$$

4.a. Métodos clásicos: Mínimos Cuadrados

Ejemplo: estimación de un sistema de primer orden Retomemos el ejemplo:

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) + e(k).$$

Podemos escribir:

$$x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} x(k) & u(k) \end{bmatrix}}_{\varphi^\top(k)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta} + e(k).$$

Con datos de $k = 0$ a $N - 1$, se construye Φ con filas $\varphi^\top(k)$ y X con elementos $x(k+1)$, y se calcula $\hat{\theta}$ usando la fórmula LS.

1. Introducció
2. Fundaments de la identificació de sistemes a partir de dades
3. Models paramètrics vs. no paramètrics
- 4. Mètodes clàssics**
 - a. Mètode de mínims quadrats (LS)
 - b. Models ARX**
 - c. Models ARMAX
 - d. Recursivitat i mínims quadrats
5. Introducció a xarxes neuronals i models híbrids
 - a. Xarxes neuronals per a identificació
 - b. Models híbrids: físics + dades
6. Avaluació de rendiment del model

4.b. Métodos clásicos: Modelos ARX

Un modelo ARX (*AutoRegresivo con entrada eXógena*) describe la salida de un sistema como combinación lineal de salidas pasadas y entradas pasadas:

$$A(q^{-1})x(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k),$$

donde

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_{n_a}q^{-n_a},$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_{n_b}q^{-n_b},$$

y $e(k)$ es un término de error (ruido blanco idealmente).

Desarrollando la ecuación:

$$x(k) + a_1x(k-1) + \cdots + a_{n_a}x(k-n_a) = b_1u(k-1) + \cdots + b_{n_b}u(k-n_b) + e(k).$$

4.b. Métodos clásicos: Modelos ARX

Esto puede reescribirse en forma lineal en los parámetros:

$$x(k) = -a_1x(k-1) - \dots - a_{n_a}x(k-n_a) + b_1u(k-1) + \dots + b_{n_b}u(k-n_b) + e(k).$$

Definiendo el vector de regresores:

$$\varphi^\top(k) = \begin{bmatrix} -x(k-1) & \dots & -x(k-n_a) & u(k-1) & \dots & u(k-n_b) \end{bmatrix},$$

4.b. Métodos clásicos: Modelos ARX

y el vector de parámetros:

$$\theta^\top = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_{n_a} & b_1 & \dots & b_{n_b} \end{bmatrix},$$

obtenemos:

$$x(k) = \varphi^\top(k) \theta + e(k),$$

y podemos estimar θ por mínimos cuadrados.

Los modelos ARX son sencillos de identificar y muy usados como punto de partida aunque su tratamiento del ruido puede ser limitado.

4.b. Métodos clásicos: Modelos ARX

- **Inferencia:**

Supongamos que hemos identificado un modelo ARX de la forma:

$$x(k) = a_1x(k-1) + a_2x(k-2) + \cdots + b_1u(k-1) + b_2u(k-2).$$

Una vez determinados los parámetros \hat{a}_i, \hat{b}_j , la **predicción a un paso** es:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{a}_1x(k) + \hat{a}_2x(k-1) + \cdots + \hat{b}_1u(k) + \hat{b}_2u(k-1).$$

4.b. Métodos clásicos: Modelos ARX

- **Inferencia:**

Si se desea predecir más lejos en el tiempo, se utiliza recursivamente la propia predicción como si fuera el dato real:

$$\hat{x}(k+2) = \hat{a}_1 \hat{x}(k+1) + \hat{a}_2 x(k) + \dots + \hat{b}_1 u(k+1) + \hat{b}_2 u(k).$$

$$\hat{x}(k+3) = \hat{a}_1 \hat{x}(k+2) + \hat{a}_2 \hat{x}(k+1) + \dots$$

Esto permite **simular** el sistema identificado a futuro.

1. Introducció
2. Fundamentos de la identificació de sistemes a partir de dades
3. Models paramètrics vs. no paramètrics
- 4. Mètodes clàssics**
 - a. Mètode de mínims quadrats (LS)
 - b. Models ARX
 - c. Models ARMAX**
 - d. Recursivitat i mínims quadrats
5. Introducció a xarxes neuronals i models híbrids
 - a. Xarxes neuronals per a identificació
 - b. Models híbrids: físics + dades
6. Avaluació de rendiment del model

4.c. Métodos clásicos: Modelos ARMAX

Los modelos ARMAX (*AutoRegresivo–Media Móvil con entrada eXógena*) incorporan un modelo más rico del ruido:

$$A(q^{-1})x(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k),$$

donde, además de A y B , se introduce:

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c}.$$

Aquí el ruido $e(k)$ entra filtrado por $C(q^{-1})$, lo que permite modelar correlaciones temporales en el ruido (es decir, ruido con estructura de media móvil).

4.c. Métodos clásicos: Modelos ARMAX

A diferencia del ARX, la presencia de $e(k)$ filtrado hace que el modelo ya no sea lineal en los parámetros de forma directa, por lo que la identificación de ARMAX suele requerir métodos de optimización iterativos (p.ej. máxima verosimilitud, gradiente, Gauss-Newton, etc.).

1. Introducció
2. Fundamentos de la identificació de sistemes a partir de dades
3. Models paramètrics vs. no paramètrics
- 4. Mètodes clàssics**
 - a. Mètode de mínims quadrats (LS)
 - b. Models ARX
 - c. Models ARMAX
 - d. Recursivitat i mínims quadrats**
5. Introducció a xarxes neuronals i models híbrids
 - a. Xarxes neuronals per a identificació
 - b. Models híbrids: físics + dades
6. Avaluació de rendiment del model

4.d. Recursividad y mínimos cuadrados

En aplicaciones en tiempo real, donde llegan datos continuamente, puede interesar actualizar la estimación de parámetros en línea. El **método de mínimos cuadrados recursivos** (RLS) permite actualizar $\hat{\theta}(k)$ al llegar cada nueva muestra $(\varphi(k), x(k))$.

La actualización típica es:

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^\top(k)P(k-1)\varphi(k)},$$
$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[x(k) - \varphi^\top(k)\hat{\theta}(k-1)],$$
$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left[P(k-1) - K(k)\varphi^\top(k)P(k-1) \right],$$

4.d. Recursividad y mínimos cuadrados

donde:

- $P(k)$ es la matriz de covarianza asociada a la incertidumbre en los parámetros,
- $K(k)$ es la ganancia de adaptación,
- $\lambda \in (0, 1]$ es un factor de olvido que permite dar más peso a datos recientes.

4.d. Recursividad y mínimos cuadrados

En aplicaciones en tiempo real, donde llegan datos continuamente, puede interesar actualizar la estimación de parámetros en línea. El **método de mínimos cuadrados recursivos** (RLS) permite actualizar $\hat{\theta}(k)$ al llegar cada nueva muestra $(\varphi(k), x(k))$.

La actualización típica es:

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^\top(k)P(k-1)\varphi(k)},$$
$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[x(k) - \varphi^\top(k)\hat{\theta}(k-1)],$$
$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left[P(k-1) - K(k)\varphi^\top(k)P(k-1) \right],$$

Tema 6: Identificación de sistemas

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS Curso 2025-2026