Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 5

DFESTS

UA | UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

TEMA 2. DIGITALIZACIÓN DE SEÑALES ANALÓGICAS

…

2.5. Codificación
2.6. Conversión digital-analógica

PROBLEMAS
2.2. Problemas de cuantificación

2.5. Codificación

La codificación se basa en la asociación de un binario único a cada nivel de cuantificación.
Si se dispone de *L* niveles, se necesitarán al menos un número ***b*** de bits tal que:

$$b \geq \log_2 L$$

Cuanto mayor sea el número de bits, mayor es el número de niveles del que podemos disponer y mejor será la relación señal a ruido de cuantificación.

CODIFICACIÓN (binaria) Niveles $\leq 2^{bits}$ bits $\geq \log_2$ niveles $\boxed{\boldsymbol{L \leq 2^{bits}}}$

Ejemplos de codificadores software: $\left\langle \begin{matrix} Signo - Magnitud \\ Complemento\ a\ dos \\ Correlativo \end{matrix} \right\rangle$ (Ver tema, pag. 17)

En general, cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo y mayor el número de bits de cuantificación del conversor A/D, más caro resultará el dispositivo.

2.6. Conversión digital-analógica

Para medir la **calidad** de la conversión A/D, se emplea la relación entre la potencia de la señal de entrada y la del ruido de cuantificación:

RELACIÓN
SEÑAL A RUIDO
DE CUANTIFICACIÓN

$$\left({}^{S}/_{N}\right)q = \frac{Px}{Peq}$$

→ Potencia de la señal de entrada X[n]

→ Potencias del ruido de cuantificación (error eq)

$$\left({}^{S}/_{N}\right)q(dB) = 10\ log_{10}\left(\frac{Px}{Peq}\right)$$ dB, decibelios

cuanto mayor sea la relación señal a ruido, mejor será la calidad de la conversión.

0 dB → $10^{0/10} = 10^{0} = 1$ vez

3 dB → $10^{3/10} = 10^{0,3} \approx 2$ veces

10 dB → $10^{10/10} = 10^{1} = 10$ veces

20 dB → $10^{20/10} = 10^{2} = 100$ veces

30 dB → $10^{30/10} = 10^{3} = 1000$ veces

40 dB → $10^{40/10} = 10^{4} = 10000$ veces

Aumento lineal = $10^{dB/10}$

Para 20 dB, la relación señal/ruido aumenta 100 veces

Ejemplo: $\left({}^{S}/_{N}\right) q(dB) = 90 \;\; (\,CD\ musicales)$

90 dB → $10^{90/10} = 10^{9}$

Para 90 dB, la relación señal/ruido aumenta 1.000.000.000 veces

Si se trabaja en la zona granular y hay muchos niveles de cuantificación, la **relación señal a ruido de cuantificación** viene dada por

$$\boxed{\left({}^{S}/_{N}\right) q(dB) = 6{,}02\,(\,b - 1) + 10{,}8\; - 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{2Xm}{2\delta x}\right)\; dB}$$

Fórmula para $({}^{S}/_{N})$q que depende de:

b = bits - (nº de bits o “b”)
2Xm - (margen dinámico)
δx - (valor cuadrático medio de X[n])

Siguiendo con el ejemplo de los CD musicales:

Fs = 44,1 kHz = 44100 (1/seg)

bits = 16 ; Niveles = $2^{16} = 65.536$

Margen dinámico 2Xm $\approx 8\ \delta x$

Esto provoca relaciones señal/ruido por encima de 90dB

$$\left({}^{S}/_{N}\right) q = 90\ dB \qquad Px = 10^{9}\ \ Peq$$

Conversor digital-analógica

Es el dispositivo que permite convertir una señal digital en una analógica

10/001/1000 ♫♪

$Señal\ digital$ (T. DISCRETO) $\dashrightarrow$ D/A $\dashrightarrow$ $Señal\ continua$

INTERPOLADOR

TIENE DEFINIDO → El nº de bits de la codificaión
→ **fs** de muestro

$$fd = \frac{fa}{fs} \rightarrow fa = fd \cdot fs$$

El cometido del conversor no es más que **interpolar entre muestras de la señal digital**

Se distinguen distintos tipos de conversores D/A en función del interpolador empleado:

1. Interpolador de **Nyquist** (ideal, usando *sinc*): muy difícil de implementar y no se usa en la práctica
2. Interpolador de **orden 0** (retención de orden 0): realiza una aproximación por escalones , manteniendo el valor de la muestra durante T_s segundos (periodo de muestreo de la señal digital). Es el más sencillo y usado
3. Interpolador lineal o de **orden 1**: también se usa en la práctica y es sencillo (se ve en las prácticas)
4. Interpolador de **orden superior**: más sofisticado y proporcionan una mejor recuperación de la señal analógica

Señales y sistemas - Teoría y problemas 5

Ej. Señal en tiempo discreto de amplitud discreta → Señal digital (11001100111)

X(1) = 1,9876543210987 (sistema digital 32 o 64 bits)

precisión finita **eq ↓↓**

Diagrama de bloques de un conversor D/A basado en un circuito de retención de **orden 0**

TEMA 2. DIGITALIZACIÓN DE SEÑALES ANALÓGICAS

...

2.5. Codificación
2.6. Conversión digital-analógica

PROBLEMAS
2.2. Problemas de cuantificación

Problema 1. Se quiere cuantificar la señal en tiempo discreto $\times[n] = 6{,}35\cos(\frac{\pi n}{10})$ con una resolución de:

a) $\Delta = 0{,}1$
b) $\Delta = 0{,}02$

¿Cuántos **bits** necesita el conversor en cada caso?

El tamaño del escalón de cuantificación está directamente relacionado con el margen dinámico y el número de niveles, que a su vez depende del número de bits por palabra código.

$\boldsymbol{\Delta}$ = escalón de cuantificación (diferencia entre niveles), nos da la resolución
$X_{max} - X_{min}$ = margen dinámico
L = nº de niveles $\qquad \boldsymbol{\Delta} = \frac{\boldsymbol{X_{max} - X_{min}}}{\boldsymbol{L}} = \frac{\boldsymbol{X_{max} - X_{min}}}{\boldsymbol{2^b}} \leq$ a) y b)
b = nº de bits

A partir de $x[n] = 6{,}35\cos(\frac{\pi n}{10})$, tenemos $X_{max} = 6{,}35 \ y \ X_{min} = -6{,}35$ (al ser una señal sinusoidal, cos)

$$\boxed{x = a^n \equiv \log_a(x) = n \ ; \ (\text{calcular } log_2 = \frac{\log(n)}{\log(2)})}$$

a) $\Delta = 0{,}1$

a) $\frac{X_{max} - Xmin}{2^b} \leq \Delta \ ; \ \frac{6{,}35 - (-6{,}35)}{2^b} \leq 0{,}1 \ ; \ \frac{12{,}7}{2^b} \leq 0{,}1$

$$\frac{12{,}7}{0{,}1} \leq 2^b \rightarrow b \geq \log_2\left(\frac{12{,}7}{0{,}1}\right) = \log_2(127) = 6{,}9 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{bits \geq 7}}$$

b) $\Delta = 0{,}02$

b) $\frac{X_{max} - Xmin}{2^b} \leq \Delta \ ; \ \frac{6{,}35 - (-6{,}35)}{2^b} \leq 0{,}02 \ ; \frac{12{,}7}{2^b} \leq 0{,}02$

$$\frac{12{,}7}{0{,}02} \leq 2^b \rightarrow b \geq \log_2\left(\frac{12{,}7}{0{,}02}\right) = \log_2(635) = 9{,}3 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{bits \geq 10}}$$

Problema 2. Se dispone de un cuantificador de **4 bits** cuya zona granular está comprendida entre los valores $\boldsymbol{X_{min}}$ **= -0,5 y** $\boldsymbol{X_{max}}$ **= 0,5** voltios.
La función característica del cuantificador *Q*(*x*) es la siguiente:

$$Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sing(x)} & |\text{x}| < \text{X}_{\text{max}} \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \text{sing(x)} & |\text{x}| \geq \text{X}_{\text{max}} \end{cases}$$

A cada valor de Xq se le asigna una palabra de código binario con una codificación (signo-magnitud), con el bit de signo **1** para valores negativos y **0** para los positivos.

Considera las muestras $\mathbf{x_1}$**=0,16 V ,** $\mathbf{x_2}$**=−0,21 V y** $\mathbf{x_3}$**= 0,57 V**.

Calcula :

- El valor cuantificado para cada muestra - **Xq**
- El error relativo - **eq%**
- La palabra de **código** binaria

Al error cometido al representar la señal de valor continuo utilizando un conjunto finito de valores se denomina error de cuantificación. Para cada muestra el error será:

$$e_q[n] = x_q[n] - x[q]$$

X_1=0,16 -> |0,16| = 0,16 < Xmax (0,5) → Zona granular

$$Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sing}(x_1)$$

❶ Calcular escalón de cuantificación - $\boldsymbol{\Delta}$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{2Xm}{NIVELES} = \frac{Xmax - Xmin}{2^4} = \frac{0{,}5 - (-0{,}5)}{16} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

❷ Calcular valor cuantificado - $\boldsymbol{X_q}$

$$\boldsymbol{X_{q1}} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sing}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}16|}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{16} \cdot (1) = \left(E\left[\frac{0{,}16}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{16}$$

$$= (E[2{,}56] + 0{,}5) \cdot 0{,}0625 = (\ \mathbf{2} + 0{,}5\ ) \cdot 0{,}0625 = 2{,}5 \cdot 0{,}0625 = \mathbf{0{,}156\ V}$$

❸ Calcular error relativo - $\boldsymbol{eq\%}$

$$\mathrm{eq}_1\% = \frac{|\,\mathrm{Xq}_1 - \mathrm{X}_1|}{|\mathrm{X}_1|} \cdot 100$$

$$Error\ absoluto\ |X_{q1} - X_1| \rightarrow Error\ relativo\ (\%) = \frac{|\,\mathrm{Xq}_1 - \mathrm{X}_1|}{|X_1|} \cdot 100$$

$$\boldsymbol{eq_1}\% = \frac{|0{,}156 - 0{,}16|}{|0{,}16|} \cdot 100 = \frac{|-0{,}004|}{0{,}16} \cdot 100 = \frac{0{,}004}{0{,}16} \cdot 100 = 0{,}025 \cdot 100 = \mathbf{2{,}5}\%$$

❹ Calcular palabra binaria - bx

$$E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right]$$

La **palabra binaria** es: $E\left[\frac{|0{,}16|}{0{,}0625}\right] =$ "**2**" es: "$b_1\ b_2\ b_3\ b_4$" → "**0 0 1 0**"

(Bit de signo 0, porque 0,16 es positivo)

DFESTS

X_2= -0,21 **->** |-0,21| = 0,21 < Xmax (0,5) → Zona granular

$$Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_1|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sing}(x_1)$$

❶ Con $\Delta = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

❷ $$\boldsymbol{X_{q2}} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \text{sing}(x_2) = \left(E\left[\frac{|-0{,}21|}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{16} \cdot (-1) = \left(E\left[\frac{0{,}21}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)$$

$$= (E[3{,}36] + 0{,}5) \cdot (-0{,}0625) = (3 + 0{,}5) \cdot (-0{,}0625) = 3{,}5 \cdot (-0{,}0625) = \boldsymbol{-0{,}218\ V}$$

❸ $$Error\ absoluto\ |Xq_2 - X_2| \rightarrow Error\ relativo\ (\%) = \frac{|Xq_2 - X_2|}{|X_2|} \cdot 100$$

$$\boldsymbol{eq_1}\% = \frac{|(-0{,}218) - (-0{,}21)|}{|-0{,}21|} \cdot 100 = \frac{|-0{,}008|}{0{,}21} \cdot 100 = \frac{0{,}008}{0{,}21} \cdot 100 = 0{,}038 \cdot 100 = \boldsymbol{3{,}8}\%$$

❹ La **palabra binaria** es: el bit de signo + $E\left[\frac{|-0{,}21|}{0{,}0625}\right] =$ "3" : "$b_1\ b_2\ b_3\ b_4$" → "**1 0 1 1**"

(Bit de signo 1, porque -0,21 es negativo)

DFESTS

X_3= 0,57 -> |0,57| = 0,57 > Xmax (0,5) → Zona de saturación

$$\boxed{\frac{L-1}{2}\cdot\Delta\cdot\mathrm{sing(x)}}$$

❶ Con $\Delta = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

❷ $$\boldsymbol{X_{q3}} = Q(x_3) = \frac{L-1}{2}\cdot\Delta\cdot\mathrm{sing}(x_3) = \left(\frac{2^4-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{16}\cdot(1) =$$

$$= \left(\frac{16\ -\ 1}{2}\right)\cdot\frac{1}{16} = \frac{15}{32} = \mathbf{0,468\ V}$$

❸ $$\boldsymbol{e_{q3\%}} = \frac{|X_{q3}-X_3|}{|X_3|}\cdot 100 = \frac{|0{,}468-0{,}57|}{|0{,}57|}\cdot 100 == \frac{|-0{,}101|}{|0{,}57|}\cdot 100 =$$

$$\frac{0{,}101}{0{,}57}\cdot 100 = 0{,}177\cdot 100 = \mathbf{17,7}\ \%$$

❹ La **palabra binaria**, al estar en zona de saturación, es el máximo que se puede representar con este nº de bits (4), incluyendo el bit de signo, que en este caso será 0 por ser positivo.
"b_1 b_2 b_3 b_4" → "**0 1 1 1**"

Problema 3. **(4,5 P)** Se dispone de un cuantificador de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores $X_{max} = 0{,}5$ y $X_{min} = -0{,}5$ voltios.
La función característica del cuantificador $Q(x)$ es la siguiente:

$$Q(x) \begin{cases} \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sing}(\mathrm{x}) & |\mathrm{x}| < \mathrm{X}_{\mathrm{max}} \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot \mathrm{sing}(\mathrm{x}) & |\mathrm{x}| \geq \mathrm{X}_{\mathrm{max}} \end{cases}$$

Donde L es el número de niveles y Δ es el escalón de cuantificación. A cada valor de Xq se le asigna una palabra de código binaria de acuerdo con una codificación signo-magnitud, con el bit de signo 1 para valores de tensión negativos y 0 para valores positivos.

E[x] – parte entera, |x|- valor absoluto, *sign*(x) – signo -1 o 1.

a) (3 P) Considera las muestras $X_1 = 0{,}35$ V y $X_2 = -0{,}53$ V, que se han obtenido muestreando la señal: $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}4\pi t - \pi/3)$.
Calcula su **valor cuantificado ($\boldsymbol{X_{q1}}$ y $\boldsymbol{X_{q2}}$)**, el **error relativo de cuantificación** en tanto por ciento y su **palabra de código.**

b) (1 P) Considera ahora estos otros 2 cuantificadores uniformes, cuyas características son:
2) *bits* = 4, 2*Xm* = 1
3) *bits* = 6, 2*Xm* = 2
Entre las tres opciones de cuantificación (la primera del apartado a) *bits* = 5, 2*Xm* = 1 y estas dos últimas), **¿cuál es la que cuantifica mejor** la señal $x(t)$ ajustándose a sus características? Justifica la elección.

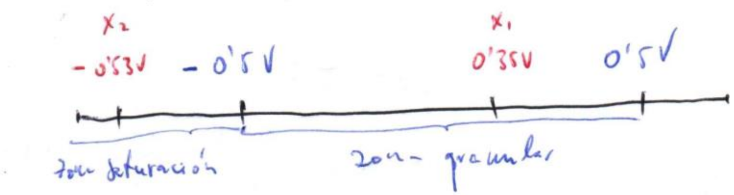
c) (0,5 P) Suponiendo que el margen dinámico del cuantificador sea $2\mathrm{Xm} = 6\sigma x$, es decir 6 veces el valor cuadrático medio de la señal, y se exige una relación señal a ruido de cuantificación $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 70\ dB$
¿Cuál es el **mínimo número de niveles** que asegura este requerimiento?
Emplear la siguiente fórmula de la relación señal - ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6{,}02 \cdot (b-1) + 10{,}8 - 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{2Xm}{2\sigma_x}\right)\ dB.$$

$\boxed{\log = \log_{10}}$

a) Considera las muestras $X_1 = 0{,}35$ V y $X_2 = -0{,}53$ V, que se han obtenido muestreando la señal: $x(t) = 0{,}5\cos(0{,}4\pi t - \pi/3)$.
Calcula su **valor cuantificado (X_{q1} y X_{q2})**, el **error relativo de cuantificación** en tanto por ciento y su **palabra de código.**

Los valores que limitan la zona normal de funcionamiento del cuantificador son:



El número de niveles de cuantificación viene determinado por el número de bits.
Como el cuantificador es de 5 bits. $L = 2^b = 2^5 = 32$ niveles (+16 , - 16).
Para calcular los valores cuantificados Xq1 y Xq2 (a partir de la función característica) necesitamos saber el tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{X_{max} - Xmin}{L} = \frac{0{,}5 - (-0{,}5)}{32} = \frac{1}{32} = 0{,}03125\ V$$

La palabra de código que corresponde a cada muestra será la concatenación del bit de signo (bit de más peso) y un valor N expresado en binario con 4 bits.
El valor de magnitud N viene dado por $N = \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right]\right)$

Para X_1 = 0,35 V:

$|0{,}35| < 0{,}5$ $(|x| < X_{max})$

Aplicamos el cálculo para la zona granular

$$X_{q1} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sing}(x_1) = \left(E\left[\frac{|0{,}35|}{0{,}03125}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{32} \cdot (1) =$$

$$\left(11 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{32} = \frac{23}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{23}{64} \; ; \qquad \boldsymbol{X_{q1} = 0{,}35937\,V}$$ **- valor cuantificado**

El **error de cuantificación relativo** cometido en % es:

$$e_{q1\%} = \frac{|X_{q1} - X_1|}{|X_1|} \cdot 100 = \frac{|0{,}35937 - 0{,}35|}{|0{,}35|} \cdot 100 = \frac{0{,}009375}{0{,}35} \cdot 100 = 0{,}0267 \cdot 100 = \boldsymbol{2{,}7\%}$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es **0** (por ser positivo)

y la magnitud $N_1 = \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right]\right) = N = \left(E\left[\frac{|0{,}35|}{0{,}03125}\right]\right) = \boldsymbol{11}$

Por lo tanto, a esta muestra le corresponde la **palabra de código** 11 en binario con el bit de signo 0 (+):

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
0	1	0	1	1

DFESTS

Para X_2 = -0,53 V:

|-0,53| > 0,5 (|x| ≥ X_{max})

Aplicamos el cálculo para la zona de saturación

$$\boldsymbol{X_{q2}} = Q(x_2) = \frac{L-1}{2}\cdot\Delta\cdot \mathrm{sing}(\mathrm{x}_2) = \left(\frac{32-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{32}\cdot(-1) = -\frac{31}{64} = -0{,}48437\ V$$

$\boldsymbol{X_{q2} = -0,48437\ V}$ **- valor cuantificado**

El **error de cuantificación** relativo cometido en % es:

$$e_{q2\%} = \frac{|X_{q2} - X_2|}{|X_2|}\cdot 100 = \frac{|-0{,}48437 - (-0{,}53)|}{|-0{,}53|}\cdot 100 = \frac{0{,}04563}{0{,}53}\cdot 100 = 0{,}08609\cdot 100 = \boldsymbol{8,6\%}$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es **1** (por ser negativo) y la magnitud N_2 es el máximo valor que se puede representar con este nº de bits (por estar en zona de saturación) por lo tanto el nivel es **15.**

Por lo tanto a esta muestra le corresponde la **palabra de código** 15 en binario con el bit de signo 1 (-).

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	1	1	1	1

b) Considera ahora estos otros 2 cuantificadores uniformes, cuyas características son:
2) *bits* = 4, *2Xm* = 1
3) *bits* = 6, *2Xm* = 2

Entre las tres opciones de cuantificación (la primera del apartado 1) *bits* = 5, *2Xm* = 1 y estas dos últimas), **¿cuál es la que cuantifica mejor** la señal *x*(*t*) ajustándose a sus características? Justifica la elección.

El escalón de cuantificación y el margen dinámico de cada cuantificador es:

$$\Delta_1 = \frac{2Xm}{2^5} = \frac{1}{32} = 0{,}0312\ V \rightarrow \quad 2Xm_1=1$$
$$\Delta_2 = \frac{2Xm}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625\ V \rightarrow \quad 2Xm_2=1$$
$$\Delta_3 = \frac{2Xm}{2^6} = \frac{2}{64} = 0{,}0312\ V \rightarrow \quad 2Xm_3=2$$

El margen dinámico de la señal
X(*t*) = **0,5**cos(0,4π*t* − *π*/3), es
(*Xmax=+0,5; Xmin=-0,5*) → ***2Xm=1***

La mejor opción es la primera porque se ajusta a las características de la señal **2Xm=1**, igual que la segunda opción, pero tiene un escalón de cuantificación menor $\mathbf{\Delta_1 < \Delta_2}$.
El mejor será el que se ajuste a las características de la señal (2Xm),
y, de los que se ajusten, el tenga el escalón de cuantificación (**Δ**) menor.

DFESTS

c) Suponiendo que el margen dinámico del cuantificador sea $2\mathrm{Xm} = 6\sigma x$, es decir 6 veces el valor cuadrático medio de la señal, y se exige una relación señal a ruido de cuantificación $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 70\ dB$

¿Cuál es el **mínimo número de niveles** que asegura este requerimiento?

Emplear la siguiente fórmula de la relación señal - ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6{,}02 \cdot (b-1) + 10{,}8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2Xm}{2\sigma_x}\right)\ dB.$$

$\boxed{L=2^b}$

Tenemos : 2Xm = 6 σ_x ; $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 70\ dB$

Aplicando la fórmula: $\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6{,}02 \cdot (b-1) + 10{,}8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2Xm}{2\sigma_x}\right) \geq 70\ dB$

$$6{,}02 \cdot b - 6{,}02 + 10{,}8 - 20 \cdot \log\left(\frac{6\sigma_x}{2\sigma_x}\right) \geq 70;$$

$$6{,}02 \cdot b \geq 70 + 6{,}02 - 10{,}8 + 20 \cdot \log(3);$$

$$6{,}02 \cdot b \geq 70 + 6{,}02 - 10{,}8 + (20 \cdot 0{,}477);$$

$$b \geq \frac{70+6{,}02-10{,}8+9{,}54}{6{,}02} = \frac{74{,}76}{6{,}02} = 12{,}41;$$

$$\mathrm{b} = 13\ bits$$

L= NIVELES =2^b= 2^{13} = **8.192 niveles** (mínimo nº de niveles)

Problema 4.

Se dispone de un cuantificador (1) de 5 bits cuya zona granular está comprendida entre los valores *xmax* = 1 y *xmin* = -1 voltios. La función característica del cuantificador *Q*(*x*) es la siguiente:

$$X_q = Q(x) = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| < x_{max,} \\ \frac{L-1}{2} \cdot \Delta \cdot sign(x), & |x| \geq x_{max} \end{cases}$$

A cada valor de *xq* se le asigna una palabra de código binaria con el bit de signo 0 para positivos y 1 para negativos.

a) Considera las muestras $x1 = 0,424\,\mathrm{V}$ y $x2 = -0{,}091\,\mathrm{V}$, que se han obtenido muestreando la señal $x(t) = 1\cos\left(0{,}2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$. Calcula su valor cuantificado, el error relativo de cuantificación en tanto por ciento y su palabra código.

b) Considera ahora estos otros dos cuantificadores uniformes, cuyas características son

(2) *bits* = 5, 2*Xm* = 1.

(3) *bits* = 6, 2*Xm* = 2.

Entre las tres opciones (el primero y estos dos últimos ¿cuál es el que cuantificaría mejor la señal $x(t)$, ajustándose a sus características? Justifica tu elección.

c) Suponiendo que el margen dinámico del cuantificador sea $2Xm = 8\ \sigma x$, es decir 8 veces el valor cuadrático medio de la señal, ¿cuántos bits de cuantificación habría que utilizar para asegurar una relación señal a ruido de cuantificación de al menos 90 dB? ¿cuál sería el número de niveles total necesario?

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6.02 \cdot (b-1) + 10.8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2X_m}{2\sigma_x}\right) \quad dB$$

a)

$X_1 = 0{,}424\ V$

$|0{,}424| < 1 \quad (|x| < X_{max})$

Aplicamos el cálculo para la zona granular

$$\mathbf{\Delta} = \frac{2Xm}{2^b} = \frac{Xmax - Xmin}{2^5} = \frac{1 - (-1)}{32} = \frac{2}{32} = 0{,}0625$$

$$\boldsymbol{X_{q1}} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sing(x_1)} = \left(E\left[\frac{|0{,}424|}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{32} \cdot (1) =$$

$$\left(6 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{32} = \frac{13}{2} \cdot \frac{2}{32} = \frac{26}{64}\ ; \qquad \boldsymbol{X_{q1} = 0{,}40625\ V}$$ **- valor cuantificado**

El **error de cuantificación relativo** cometido en % es:

$$\boldsymbol{e_{q1\%}} = \frac{|X_{q1} - X_1|}{|X_1|} \cdot 100 = \frac{|0{,}40625 - 0{,}424|}{|0{,}424|} \cdot 100 = \frac{0{,}01775}{0{,}424} \cdot 100 = 0{,}0418 \cdot 100 = \mathbf{4{,}2\%}$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es **0** (por ser positivo) y la magnitud $N_1 = \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right]\right) = N = \left(E\left[\frac{|0{,}424|}{0{,}0625}\right]\right) = 6$

Por lo tanto, a esta muestra le corresponde la **palabra de código** 6 en binario, con el bit de signo 0 (+): **00110**

DFESTS

X_2 = -0,091 V

|-0,091| < 1 (|x| < X_{max})

Aplicamos el cálculo para la zona granular

$$\boldsymbol{X_{q1}} = Q(x_1) = \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta \cdot \mathrm{sing}(\mathrm{x}_1) = \left(E\left[\frac{|-0{,}091|}{0{,}0625}\right] + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{32} \cdot (-1) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{32} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{32} = \frac{26}{64}\ ; \qquad \boldsymbol{X_{q1} = -0{,}09375\,V}$$ **- valor cuantificado**

El **error de cuantificación relativo** cometido en % es:

$$\boldsymbol{e_{q1\%}} = \frac{|X_{q1} - X_1|}{|X_1|} \cdot 100 = \frac{|-0{,}09375-(-0{,}091)|}{|-0{,}091|} \cdot 100 = \frac{0{,}00275}{0{,}091} \cdot 100 = 0{,}0302 \cdot 100 = \boldsymbol{3}\%$$

Para la palabra de código tenemos que el bit de signo es 1 (por ser negativo) y la magnitud $N_1 = \left(E\left[\frac{|X|}{\Delta}\right]\right) = N = \left(E\left[\frac{|-0{,}091|}{0{,}0625}\right]\right) = 1$

Por lo tanto, a esta muestra le corresponde la **palabra de código** 1 en binario, con el bit de signo 0 (+): **10001**

DFESTS

b)

El El nº de bits del primer cuantificador es 5
Y el margen dinámico es (Xmax=+1; Xmin=-1) → 2Xm= (1 – (-1)) = 2

Por lo tanto, tenemos que comparar:

$$\Delta_1 = \frac{2Xm}{2^5} = \frac{2}{32} = 0{,}0625\ V$$

$$\Delta_2 = \frac{2Xm}{2^5} = \frac{1}{32} = 0{,}0312\ V$$

$$\Delta_3 = \frac{2Xm}{2^6} = \frac{2}{64} = 0{,}0312\ V$$

Como la característica de la señal es **2Xm=2**, descartamos el segundo cuantificador.
Entre los otros dos, elegimos el tercero porque tiene un escalón de cuantificación menor $\boldsymbol{\Delta_3 < \Delta_1}$

c)

Tenemos : 2Xm = 8 σ_x ; $\left(\frac{S}{N}\right)_q \geq 90\ dB$

Aplicando la fórmula: $\left(\frac{S}{N}\right)_q = 6{,}02 \cdot (b-1) + 10{,}8 - 20 \cdot \log\left(\frac{2Xm}{2\sigma_x}\right) \geq 90\ dB$

$$6{,}02 \cdot b - 6{,}02 + 10{,}8 - 20 \cdot \log\left(\frac{8\sigma_x}{2\sigma_x}\right) \geq 90;$$
$$6{,}02 \cdot b \geq 90 + 6{,}02 - 10{,}8 + 20 \cdot \log(4);$$
$$6{,}02 \cdot b \geq 90 + 6{,}02 - 10{,}8 + (20 \cdot 0{,}602);$$

$$b \geq \frac{90+6{,}02-10{,}8+12{,}04}{6{,}02} = \frac{97{,}26}{6{,}02} = 16{,}15;$$
$$\mathrm{b} = 17\ bits$$

L= NIVELES =2^b= 2^{17} = **131.072 niveles** (mínimo nº de niveles)

Apéndice 1.- SISTEMAS BINARIO Y DECIMAL

$$1x2^7 + 1x2^6 + 1x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 1x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0 =$$

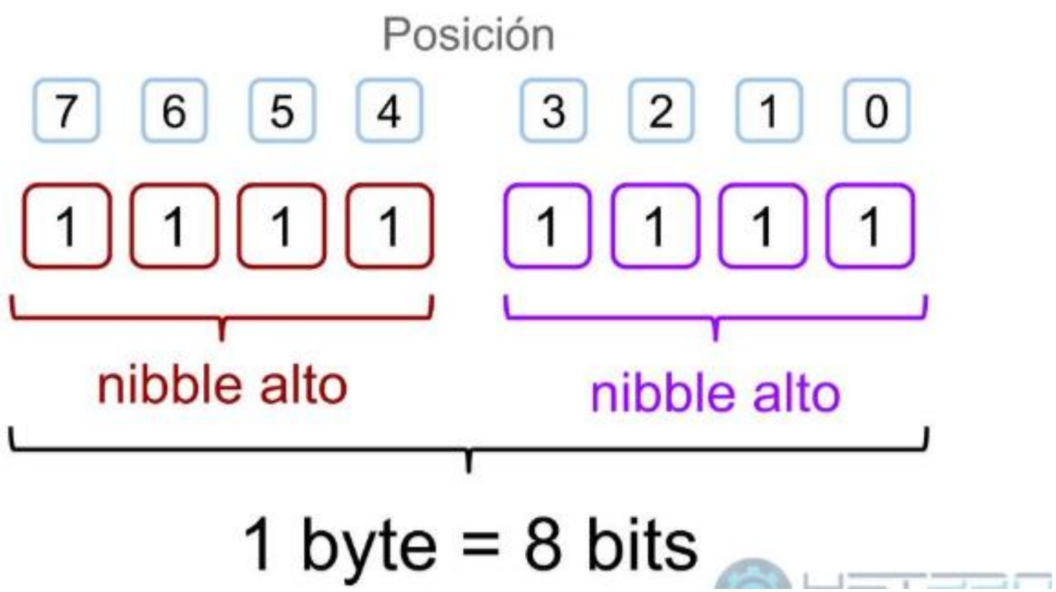
$$128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 =$$

$$240 + 15 =$$

$$255$$

11 en binario = 0+8+0+2+1

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
	1	0	1	1



15 en binario = 0+8+0+2+1

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
	1	1	1	1