Capítulo 8

Programación lineal

La programación lineal es una técnica matemática utilizada para optimizar un objetivo lineal sujeto a un conjunto de restricciones también lineales. Este paradigma se utiliza especialmente en la investigación operativa, una de las disciplinas que estudian cómo tomar decisiones óptimas bajo ciertas condiciones. Los problemas de programación lineal pueden modelar situaciones donde se busca maximizar o minimizar una función objetivo, como maximizar ganancias o minimizar costes, dado un conjunto de recursos limitados.

8.1. Formulación

Un problema de programación lineal se puede formular matemáticamente mediante los siguientes elementos:

- Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.
- Una función lineal a maximizar:[1]

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

- Un conjunto de restricciones lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

[1] Nótese que cualquier problema cuyo objetivo sea minimizar se puede convertir a uno análogo de maximización.

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

En resumen, el objetivo es encontrar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que maximicen Z, satisfaciendo todas las restricciones.

Como ejemplo, podemos considerar una empresa que produce dos productos: A y B. La empresa desea maximizar sus ganancias. El producto A genera una ganancia de 40 euros por unidad y el producto B genera 30 euros por unidad. Sin embargo, la producción de ambos productos está limitada por la disponibilidad de recursos:

- Cada unidad de A requiere 2 horas de trabajo y 3 unidades de materia prima.
- Cada unidad de B requiere 1 hora de trabajo y 2 unidades de materia prima.

Si la empresa dispone de 100 horas de trabajo y 180 unidades de materia prima, el problema de programación lineal se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar } Z = 40x_1 + 30x_2$$

Sujeto a:

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En este caso, la solución al problema es $x_1 = 0$ y $x_2 = 90$, que cumple con las restricciones del problema y arroja un valor de Z máximo (2700).

La programación lineal es una formulación interesante porque puede resolverse de manera exacta mediante algoritmos diseñados específicamente para este propósito. Estos métodos no solo garantizan encontrar la solución óptima cuando existe, sino que también identifican situaciones en las que el problema no tiene solución, ya sea porque es *inviable* (no hay valores que cumplan simultáneamente todas las restricciones) o porque es *no acotado* (la función objetivo puede aumentar o disminuir indefinidamente). Esta capacidad de detectar y clasificar el estado del problema es fundamental en aplicaciones prácticas, donde es crucial conocer si las restricciones planteadas son coherentes y manejables.

En la siguiente sección, se explicará en detalle el método “Simplex”, uno de los algoritmos más populares y robustos para programación lineal, ampliamente utilizado por su eficiencia en la práctica.

8.2. El método Simplex

El método Simplex es uno de los algoritmos más utilizados para resolver problemas de programación lineal. Desarrollado por George Dantzig en 1947, este método explora las soluciones factibles del problema de programación lineal, buscando maximizar (o minimizar) la función objetivo. Su principal ventaja radica en su capacidad para encontrar la solución óptima de manera eficiente en la mayoría de los casos prácticos.

De manera intuitiva, el método Simplex aprovecha la estructura geométrica de los problemas de programación lineal. En un espacio definido por n variables y m restricciones, las soluciones factibles forman un politopo, es decir, una figura geométrica de múltiples caras. El Simplex comienza en un vértice de este politopo y avanza hacia vértices adyacentes que mejoran el valor de la función objetivo, deteniéndose cuando encuentra el vértice que maximiza (o minimiza) la función objetivo.

Desde un punto de vista geométrico, el método Simplex explora el politopo formado por las restricciones del problema de programación lineal. Cada vértice de este politopo representa una solución factible básica, que satisface exactamente n restricciones en igualdad. La función objetivo se representa como un plano que se desplaza sobre el politopo, buscando el vértice más alto (o más bajo, en caso de minimización). Esta conexión geométrica explica por qué el Simplex avanza solo entre vértices, descartando regiones que no contienen la solución óptima.

Consideremos el problema de programación lineal en dos dimensiones, con las siguientes restricciones y función objetivo:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Como se ha mencionado, las restricciones definen un area factible de soluciones, que en este caso es un polígono en el plano x_1–x_2. En la Fig. 8.1, el área sombreada representa el conjunto de soluciones factibles, es decir, el polígono donde todas las restricciones son satisfechas. Los vértices de este polígono son puntos clave, ya que el método Simplex explora estos vértices para encontrar la solución óptima.

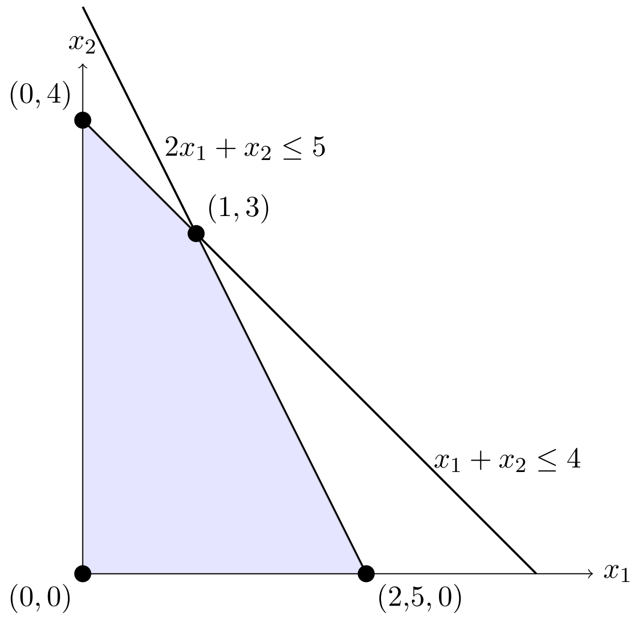

Figura 8.1: Conjunto factible en dos dimensiones.

8.2.1. Funcionamiento general

El algoritmo Simplex es un método iterativo que permite resolver problemas de programación lineal encontrando el valor óptimo de la función objetivo. Su funcionamiento se basa en la exploración de los vértices del politopo que define el conjunto de soluciones factibles, es decir, el espacio donde se cumplen todas las restricciones del problema.

El algoritmo comienza con una solución inicial, llamada **solución básica inicial**, que corresponde a uno de los vértices del politopo. Esta solución se construye seleccionando un subconjunto de las variables del problema (llamadas **variables básicas**), mientras que el resto de las variables se fijan a cero (denominadas **variables no básicas**). El objetivo del algoritmo es mejorar esta solución moviéndose hacia vértices adyacentes que ofrezcan un mejor valor de la función objetivo, hasta alcanzar el vértice óptimo.

En cada paso, el Simplex identifica una **variable de entrada**, que es una variable no básica que tiene el potencial de mejorar el valor de la función objetivo. Esta variable entra en la base, lo que significa que se le asignará un valor positivo en la solución. Para mantener la factibilidad de la solución, es necesario seleccionar también una **variable de salida**, que es una de las variables básicas que se reemplazará por la nueva variable en la base. Este proceso se realiza utilizando el llamado *pivoteo*, que actualiza las ecuaciones del problema para reflejar el cambio.

El proceso de pivoteo garantiza que la nueva solución siga siendo factible (cumple todas las restricciones) y, al mismo tiempo, mejora o mantiene el valor de la función objetivo. El algoritmo continúa iterando de esta forma hasta que no se pueda mejorar más la función objetivo, es decir, hasta que todas las posibles variables de entrada dejarían la función objetivo igual o peor. En este punto, se ha alcanzado el vértice óptimo.

El Simplex también es capaz de detectar si el problema no tiene solución. Si el valor de la función objetivo puede aumentar indefinidamente (en el caso de maximización) o disminuir sin límite (en el caso de minimización), el problema se considera **no acotado**. Si no hay ninguna solución factible que cumpla con todas las restricciones, el problema se clasifica como **inviable**.

De manera geométrica, siguiendo con el ejemplo de la sección anterior, el Simplex podría comenzar en el vértice $(0, 0)$ y luego moverse a lo largo del borde del polígono (ver Fig. 8.2):

1. Primera iteración: Mueve de $(0, 0)$ a $(0, 4)$, aumentando Z a 8.

2. Segunda iteración: Se mueve de $(0, 4)$ a $(1, 3)$, mejorando aún más el valor de Z a 9.

3. Conclusión: $(1, 3)$ es el punto óptimo para este problema de programación lineal dado que maximiza la función objetivo dentro del conjunto factible.

8.2.2. Complejidad

El método Simplex es uno de los algoritmos más utilizados y estudiados en el campo de la optimización, debido a su capacidad para resolver problemas de programación lineal de manera eficiente en la práctica. Sin embargo, la complejidad teórica del Simplex ha sido un tema de estudio y debate durante muchos años.

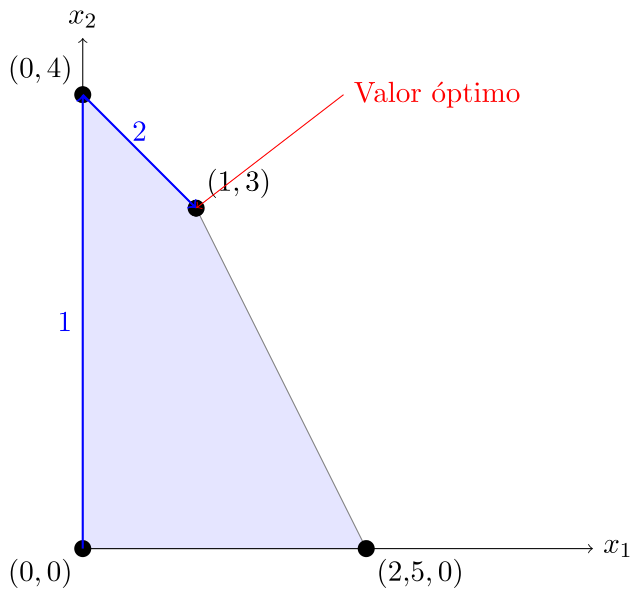

Figura 8.2: Iteraciones del Simplex en el polígono factible.

En la práctica, el método Simplex es extremadamente eficiente y resuelve la mayoría de los problemas de programación lineal en un tiempo razonable. Esto se debe a que, en la mayoría de los casos, el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución óptima es lineal con respecto al número de restricciones y variables. Por esta razón, el Simplex es ampliamente utilizado en aplicaciones reales, donde la velocidad y la eficiencia son cruciales.

A pesar de su excelente rendimiento práctico, el método Simplex tiene una complejidad teórica en el peor caso que es exponencial. Esto significa que, en ciertas configuraciones extremas del problema, el número de iteraciones necesarias puede crecer exponencialmente con respecto al número de variables y restricciones. Ejemplos de problemas en los que el Simplex experimenta este comportamiento son muy raros, pero existen y han sido objeto de investigación.

A raíz de la complejidad exponencial en el peor caso, surgieron otros algoritmos para resolver problemas de programación lineal, como el método de puntos interiores. Este método, introducido por Karmarkar en 1984, tiene una complejidad polinómica en el peor caso, lo que lo hace teóricamente más atractivo. Sin embargo, el método Simplex sigue siendo preferido en muchas aplicaciones debido a su simplicidad y rendimiento eficiente en la mayoría de los problemas prácticos.

8.3. Implementación

En la actualidad, la resolución de problemas de programación lineal no requiere realizar los cálculos manualmente, ya que existen multitud de librerías y herramientas computacionales que implementan el método Simplex y otros algoritmos eficientes.[2] Por este motivo, la mayor dificultad en la programación lineal no radica en la resolución computacional del problema, sino en su correcta formulación. Es esencial identificar con precisión la función objetivo, las variables de decisión y las restricciones que modelan el problema real. Antes de implementar un problema en código, es crucial entender a fondo su estructura y asegurarse de que representa correctamente la situación que se desea optimizar.

[2]En Python, una de las librerías más utilizadas es `SciPy`, que incluye el módulo `scipy.optimize.linprog`, el cual permite resolver problemas de programación lineal de manera rápida y sencilla. Otras librerías, como `PuLP` y `OR-Tools`, también son ampliamente utilizadas.