Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Clase de teoría y problemas nº 4

DFESTS

UA | UNIVERSITAT D'ALACANT UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Antonio Valle Sánchez

TEMA 2. DIGITALIZACIÓN DE SEÑALES ANALÓGICAS

2.1. Introducción
2.2. Muestreo de señales analógicas
2.3. Teorema de muestreo de Nyquist
2.4. Cuantificación

PROBLEMAS

2.1. Problemas de muestro

2.1. Introducción

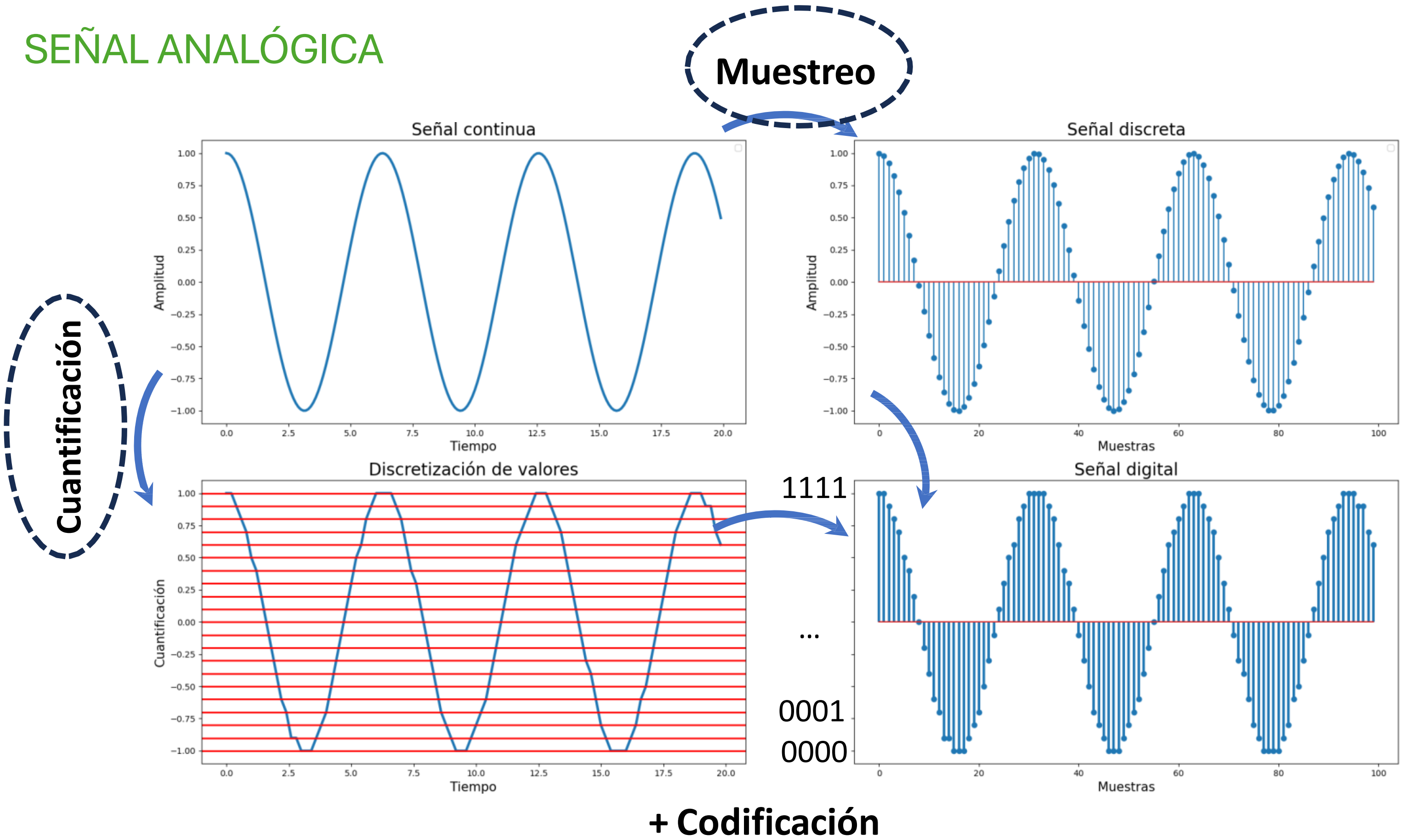
Después de la introducción al tratamiento digital de la señal, prestando especial atención al Desarrollo en Serie de Fourier por la importancia que tiene en muchas ramas de la Ingeniería, como el procesamiento de imágenes, sonido, compresión de datos y sistemas de telecomunicaciones, abordamos el proceso de digitalización de señales analógicas. Un ejemplo sería la elaboración de un fichero MP3, en la que se utiliza la Transformada de Fourier Discreta.

La mayoría de señales sobre las que existe un interés práctico en su procesado son analógicas. Algunos ejemplos son señales de voz, sísmicas, señales de radar, de sonar, etc.
Para poder procesarlas utilizando técnicas de tratamiento digital, hay que convertirlas previamente a formato digital. A este proceso se le conoce como ***conversión analógica-digital***.

Conceptualmente se puede modelar este **proceso** en tres pasos:

- *Muestreo*
- *Cuantificación*
- *Codificación*

SEÑAL ANALÓGICA



SEÑAL DIGITAL

- Voz, música
- Radiación sonora
- Radiación electromagnética
- …

Señal analógica

$x(t) \longrightarrow$ **Conversor analógico - digital** $\longrightarrow \mathrm{X[n]}$

Señal digital

- Audio/video digital (mp3, mp4, …)
- Imagen sonar/ecografía
- Imagen radar, imagen óptica (fotografía)
- …

En la práctica, se sigue el siguiente esquema:

$x(t) \longrightarrow$ **Muestreador** $\xrightarrow{x[n]}$ **Cuantificador** $\xrightarrow{x_q[n]}$ **Codificador** $\longrightarrow \mathrm{X[n]}$

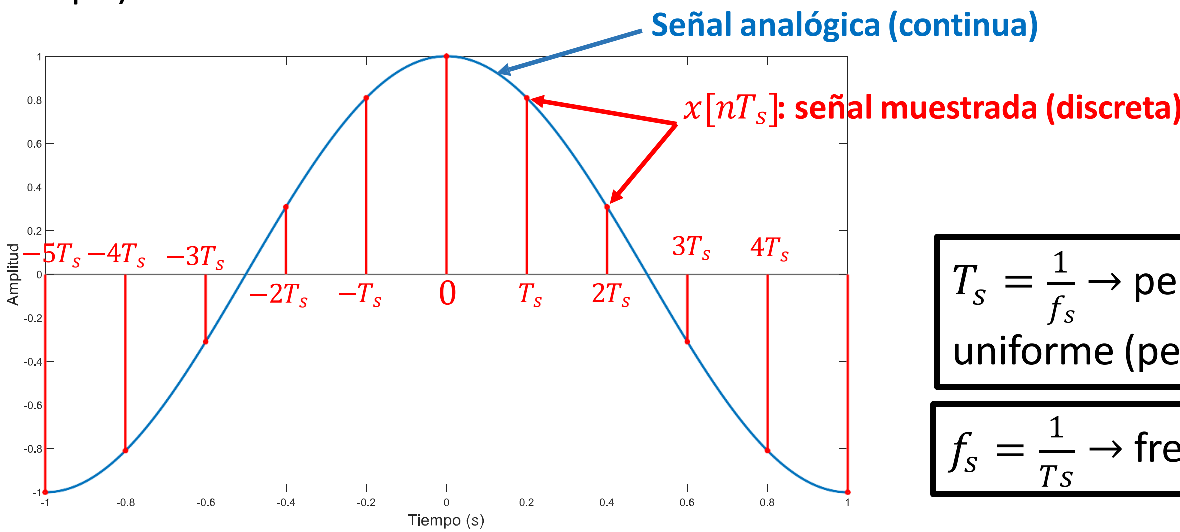
Señal analógica **Señal digital**

1. Muestreador

$x(t) \longrightarrow$ **Muestreador** $\longrightarrow x[n]$

Es el subsistema del conversor analógico-digital que convierte la señal en tiempo continuo (analógico) en tiempo discreto (ver Tema 1)

La señal discreta no es más que una secuencia de muestras de la señal continua (discretizada en el tiempo)



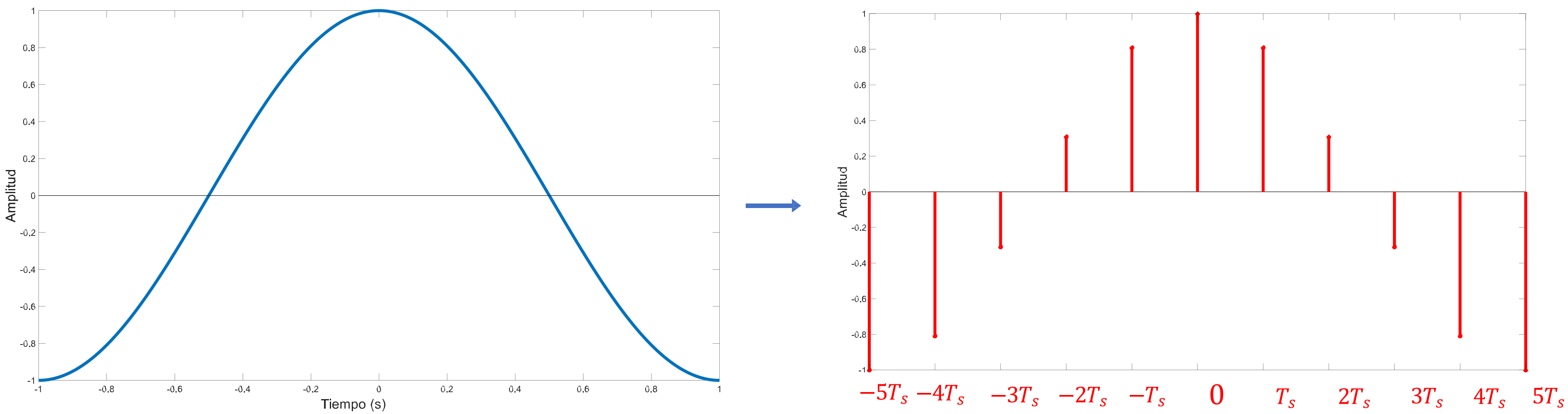
$$-\infty < n < \infty$$

$$\boxed{x[n] = x(t)_{|t=n\cdot T}}$$

$$\boxed{x[n] = x(n \cdot T_s)}$$

$T_s = \dfrac{1}{f_s} \rightarrow$ periodo de muestreo uniforme (periódico)

$f_s = \dfrac{1}{Ts} \rightarrow$ frecuencia de muestreo $(Hz = s^{-1})$



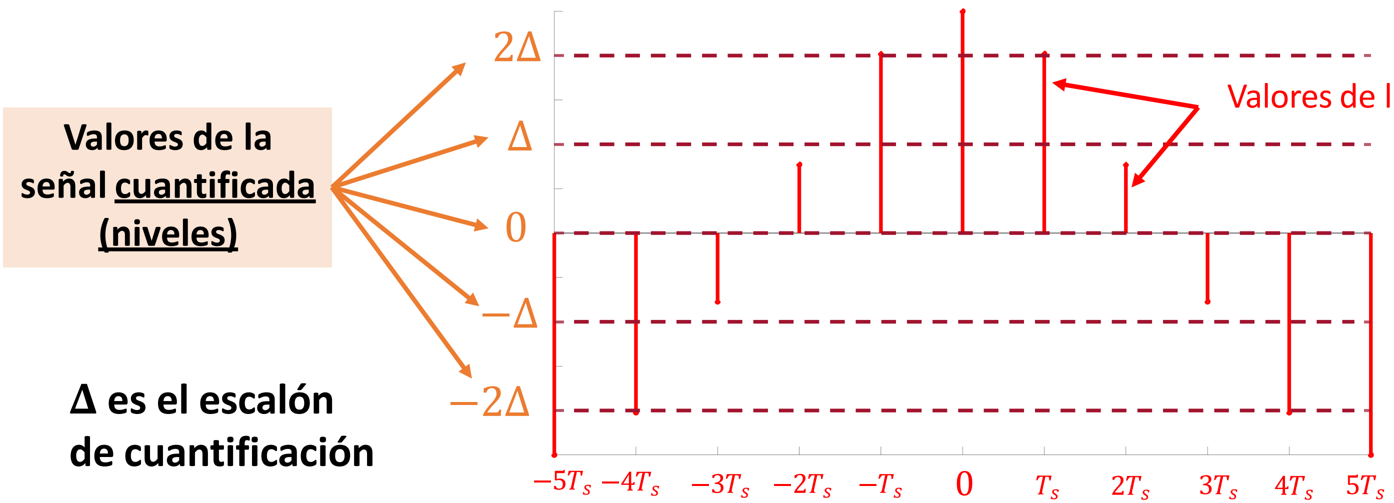
La elección del periodo o frecuencia de muestreo de la señal analógica es un paso crítico de la conversión analógico-digital

2.Cuantificador

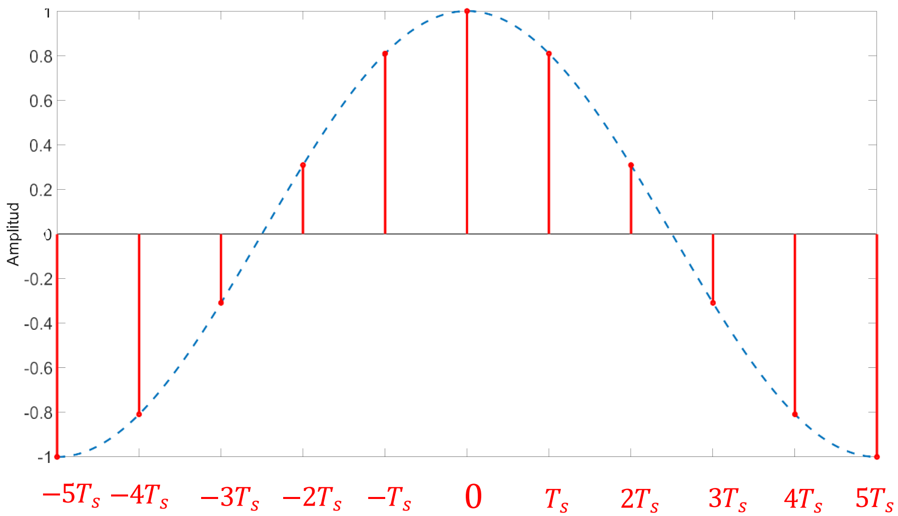
$$x[n] \longrightarrow \boxed{\textbf{Cuantificador}} \longrightarrow x_q[n]$$

Es el subsistema del conversor analógico-digital que convierte la señal de amplitud continua en amplitud discreta

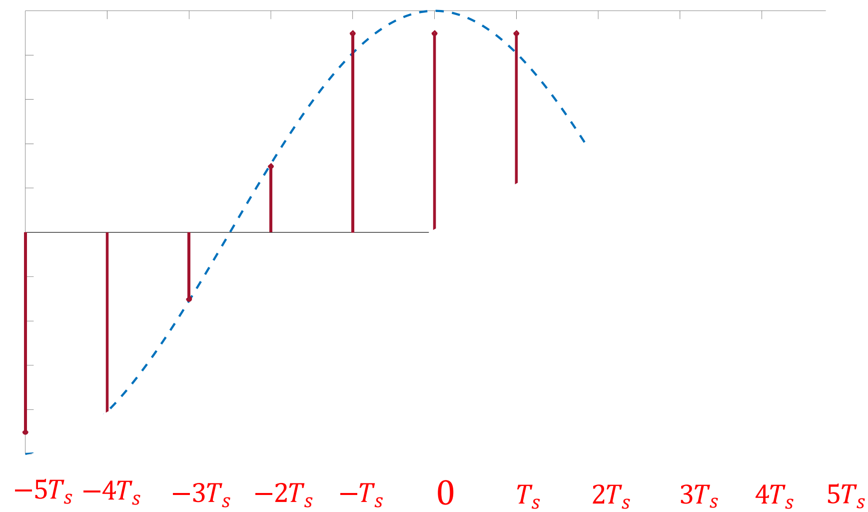
La señal analógica toma "infinitos" valores (continuos) mientras que la señal digital tomará únicamente valores finitos (algunos dentro de los posibles que toma la señal analógica)



Δ es el escalón de cuantificación



Señal muestreada



Señal muestreada y cuantificada

Ejemplo sencillo de cuantificación: **redondeo o truncamiento**

Los valores del cuantificador están entre 0 y 1 con $\Delta = 0{,}1$

n	0	1	2	3	4	5
$x[n]$	0,01234	0,23450	0,51200	0,66787	0,43251	0,35621
$x_{q1}[n]$	0,0	0,2	0,5	0,7	0,4	0,4
$x_{q2}[n]$	0,0	0,2	0,5	0,6	0,4	0,3

$x_1[n] = 0{,}66787$

$x_2[n] = 0{,}23450$

REDONDEO →

$x_{1_{q1}}[n] = 0{,}7$

$x_{2_{q1}}[n] = 0{,}2$

TRUNCAMIENTO →

$x_{1_{q2}}[n] = 0{,}6$

$x_{2_{q2}}[n] = 0{,}2$

Error de cuantificación: diferencia entre el valor de la muestra cuantificada y el de la muestra original (cuanto más bajo mejor)

$$\boxed{e_q[n] = x_q[n] - x[n]}$$

Ej: $0{,}7 - 0{,}66787 = 0{,}03213$

3.Codificador

$$x_q[n] \longrightarrow \boxed{\text{Codificador}} \xrightarrow{100100100\ldots} X[n]$$

Es el proceso mediante el cual cada **valor discreto cuantificado** se transforma en una **secuencia binaria** de cierto número de bits

Se asigna a **cada nivel de cuantificación** una **palabra-código binaria** única

$\boxed{L \leq 2^b}$ → b → bits de cuantificación
L → número de niveles

$$4 \text{ bits} \rightarrow 16 \text{ niveles} \begin{cases} 0000 \\ 0001 \\ 0010 \\ 0011 \\ \ldots \\ 1110 \\ 1111 \end{cases}$$

Ejemplo:

Audio digital, CD: $fs = 44.1\ KHz$, $16\ bits$, 2^{16} niveles

2.2. Muestreo de señales analógicas

- El método de muestreo más comúnmente empleado en la práctica es el **muestreo periódico** (tomar una muestra de la señal analógica cada un determinado intervalo constante de tiempo)

$$\boxed{x[n] = x(n \cdot T_s) \rightarrow t = n \cdot Ts, \quad -\infty < n < \infty}$$

$$\boxed{t = n \cdot \mathrm{T_s} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{f_s}}}$$

n: número de muestras

$$\boxed{f_s = \frac{1}{Ts} \rightarrow \text{frecuencia de muestreo}}$$

$T_s = \frac{1}{f_s} \rightarrow$ periodo de muestreo uniforme (periódico)

- Relación entre la frecuencia analógica (f_0) y la discreta (f_d):

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi) \longrightarrow x[\mathrm{n}] = \cos(2\pi f_0 n T_s + \Phi) = \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{f_s} + \Phi\right)$$

$$x[\mathrm{n}] = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n + \Phi\right) = \cos(2\pi f_d \cdot n + \Phi)$$

$$\boxed{\frac{fo}{fs} = fd}$$

Relación entre Frec. analógica (t. continuo) y Frec. discreta en (t. discreto)

$$\boxed{\frac{\omega o}{fs} = \omega d}$$

Relación entre pulsaciones

De acuerdo con las anteriores relaciones, es posible obtener la misma secuencia $x[n]$ muestreando señales analógicas de frecuencias distintas $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

EJEMPLO. Se muestrean 2 señales analógicas de la misma amplitud y la misma fase, pero de distintas frecuencias fo_1 y fo_2:

Hz – nº de veces que se repite en 1 seg.

$$x_1(t) = \cos(2\pi\, 200\, t); \quad 200\, Hz \xrightarrow{se\ muestrea\ a} fs_1 = 1000\, Hz$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi\, 500\, t); \quad 500\, Hz \xrightarrow{se\ muestrea\ a} fs_2 = 2500\, Hz$$

$$\mathrm{t = n \cdot Ts}$$

$$\mathrm{Ts} = \frac{1}{fs}$$

$$x_1[n] = \cos = (2\pi\, 200\, n\, \boldsymbol{Ts}) \cos\left(2\pi \frac{200n}{1000}\right) = \cos(2\pi\, 0{,}2n); \quad fd_1 = 0{,}2\, utd$$

$$x_2[n] = \cos(2\pi\, 500\, n\, \boldsymbol{Ts}) = \cos\left(2\pi \frac{500n}{2500}\right) = \cos(2\pi\, 0{,}2n); \quad fd_1 = 0{,}2\, utd$$

De $x_1(t) \neq x_2(t)$ se obtienen $x_1[n] = x_2[n]$ (*la misma señal*) *con* $fd_1 = fd_2$

Frecuencia de muestreo. Para el conjunto de señales sinusoidales complejas en tiempo discreto, basta con considerar el intervalo:

$$0 \leq fd \leq 1; \quad -0{,}5 \leq fd \leq 0{,}5$$

para caracterizar toda la familia de sinusoides complejas discretas.

Sustituyendo:

$$fd = \frac{fo}{fs}; \qquad -0{,}5 \leq \frac{fo}{fs} \leq 0{,}5; \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{fo}{fs} \leq \frac{1}{2}; \qquad fo \leq \frac{1}{2} fs = \frac{fs}{2}$$

La frecuencia de la señal analógica a muestrear debe ser menor que la mitad de la frecuencia de muestreo empleada. Si se sobrepasa el valor máximo de:

$$fo\,\max = \frac{fs}{2}$$

lo que ocurre es que el muestreo introduce ambigüedad y no se podrá determinar de nuevo la señal original. Se dice entonces que se ha cometido ***aliasing*** o *solapamiento espectral*.

Aliasing

- El aliasing (o solapamiento espectral) se produce en el muestreo de señales sinusoidales cuando la frecuencia máxima de la señal analógica es mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo
- **En otras palabras, para evitarlo deberemos utilizar una frecuencia de muestreo f_s que sea, por lo menos, dos veces mayor que la frecuencia máxima de a señal**

$$\boxed{fs \geq 2f_{0_{MAX}}}$$

- A la hora de muestrear una señal, deberemos elegir una frecuencia de muestreo adecuada (por lo menos el doble que f_0)
- Una frecuencia de muestreo $f_s$muy baja (tomamos pocas muestras de la señal original), generará inevitablemente aliasing

Ver ejemplos del efecto aliasing https://es.wikipedia.org/wiki/Aliasing

Ejemplo de aliasing: vamos a muestrar las siguientes señales con una frecuencia de muestreo de 40 Hz

$$\boxed{f_s = 40\ Hz}$$

$$x_1(t) = \cos(20\pi t) \rightarrow f_{01} = \frac{20}{2\pi} = 10\ Hz \qquad ¿\, f_s > 2f_{01}?\ \text{Sí}\ (40 > 2\cdot 10)$$

$$x_2(t) = \cos(100\pi t) \rightarrow f_{02} = \frac{100}{2\pi} = 50\ Hz \qquad ¿\, f_s > 2f_{02}?\ \text{No}\ (40 < 2\cdot 50)$$

Las señales discretas son:

$$\boxed{t = n \cdot \mathrm{T_s} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{f_s}}}$$

$$x_1[n] = cos\left(20\pi\frac{n}{40}\right) = \cos(0{,}5\pi n)$$

$$x_2[n] = cos\left(100\pi\frac{n}{40}\right) = \cos(2{,}5\pi n)$$

$$x_2[n] = \cos(2{,}5\pi - 2\pi) = x_1[n]$$

Si introducimos las dos secuencias discretas en un conversor digital-analógico (cuya $\boldsymbol{f_s}$ sea $\mathbf{40}\ \boldsymbol{Hz}$), podremos recuperar la señal $\boldsymbol{x_1}$ pero no $\boldsymbol{x_2}$: se ha producido aliasing al muestrear $\boldsymbol{x_2}$ (no se han tomado suficientes muestras)

2.3. Teorema de muestreo de Nyquist

Dada una señal analógica X(t) con un ancho de banda finito ***fo max***, esta puede ser muestreada y después recuperada totalmente, a partir de sus muestras X[n] si se emplea una frecuencia de muestreo

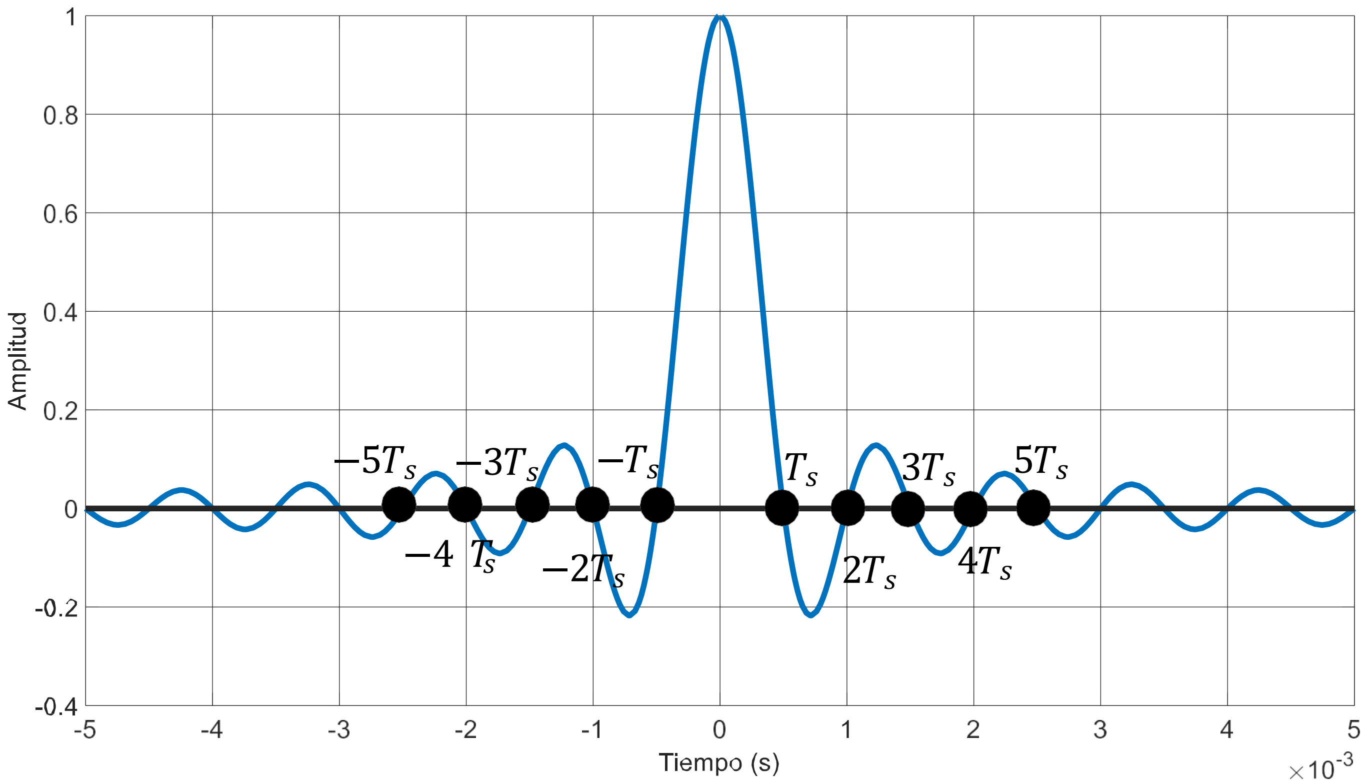
$$\boxed{\boldsymbol{fs \geq 2 * fo\,max}}$$

Para recuperar la señal analógica X(t) desde X[n] hay que emplear la siguiente función de interpolación

$$fo(t) = sinc\left(\frac{t}{Ts}\right) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{Ts})}{\frac{\pi t}{Ts}};$$

La función sinc: $sinc(\propto) = \dfrac{\operatorname{sen}(\propto)}{\propto}$

$$h(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{ts}\right)}{\left(\frac{\pi t}{ts}\right)} \begin{cases} h(o) = 1 \\ se\ anula\ cada\ kTs\ ;\ \frac{\pi}{ts}t = k\pi \quad y \quad t = kTs \end{cases}$$

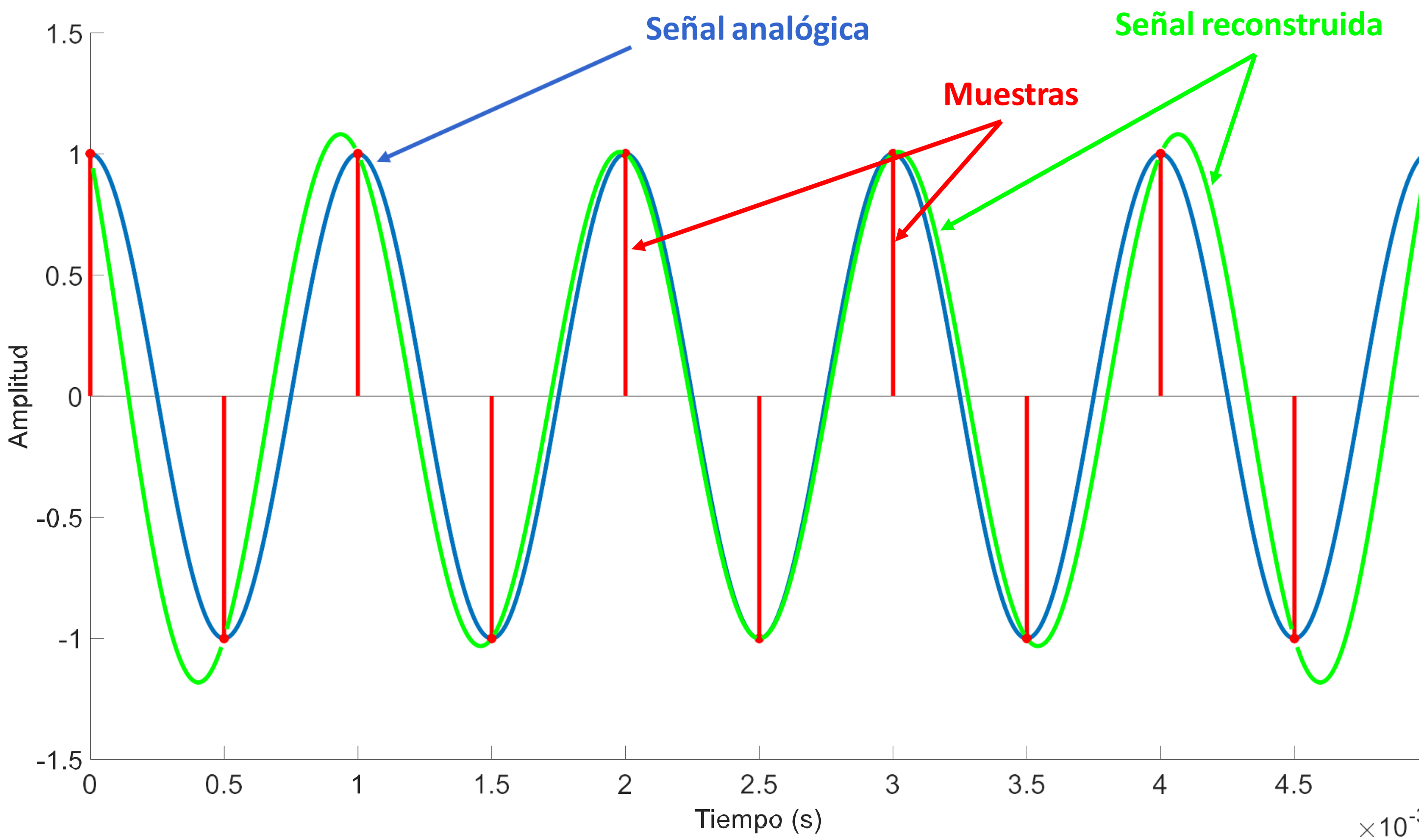


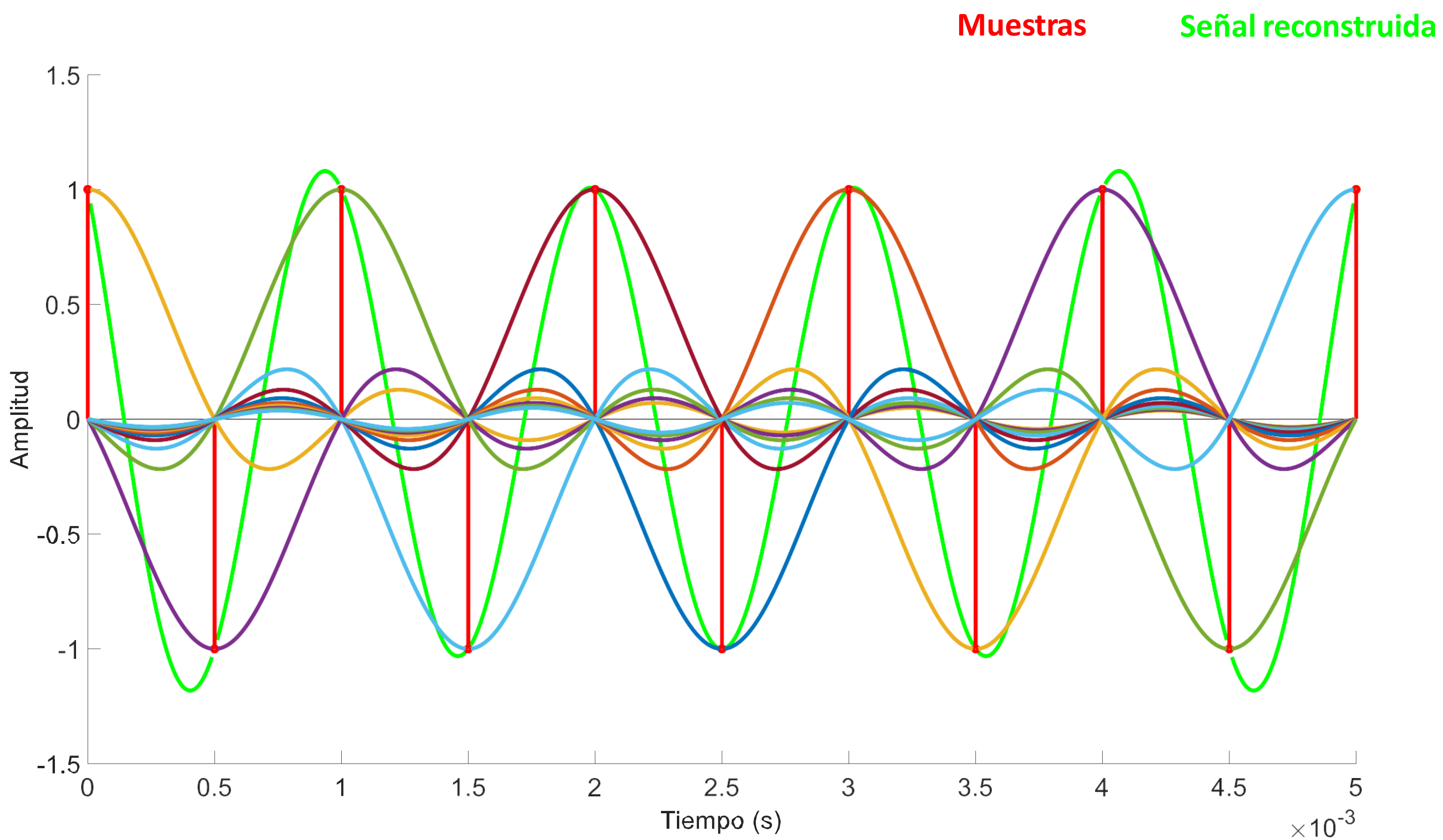
Dada x(n) como señal original muestreada, la señal analógica recuperada será de la forma

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, sinc\left(\frac{t\ - nTs}{ts}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs) sinc\left(\frac{t\ - nTs}{ts}\right) =$$

$$= \cdots x(0) sinc\left(\frac{t}{ts}\right) + x(ts) sinc\left(\frac{t - Ts}{ts}\right) + x(2ts)\, sinc\left(\frac{t - 2Ts}{ts}\right) + \cdots$$

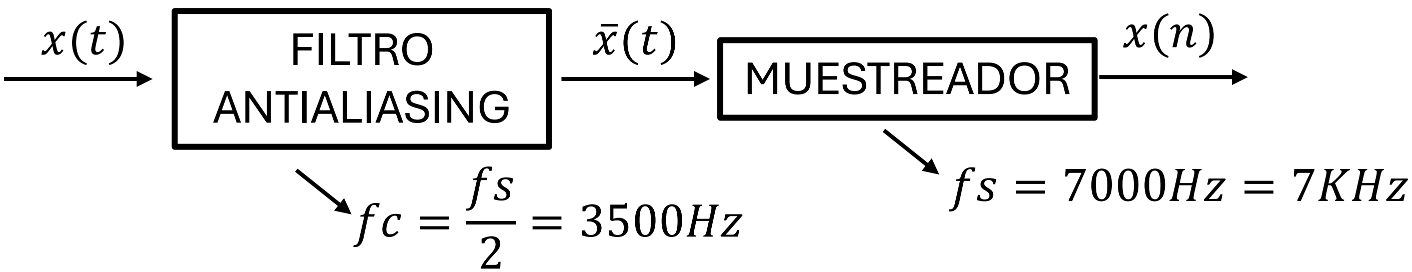
Las figuras de las siguientes páginas ilustran la conversión D/A ideal realizada con esta interpolación.
Se observa como la señal recuperada es la suma de señales tipo *sinc* centradas en múltiplos enteros del periodo de muestreo (en los instantes n·Ts) y cuyas amplitudes son los valores de las muestras de la señal en dichos instantes, *x*(*nTS*).


Señal analógica
Señal reconstruida
Muestras
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Amplitud
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Tiempo (s)
×10^-3


Muestras
Señal reconstruida
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Amplitud
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Tiempo (s)
$\times 10^{-3}$

El Teorema de Nyquist tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo en TELEFONÍA FIJA

En los conversores A/D, para evitar el problema del solapamiento espectral o *aliasing*, antes de realizar el muestreo se hace pasar a la señal analógica por un filtro paso bajo de frecuencia de corte: *fc = fs / 2*
Así se evita el paso de componentes de la señal de mayor frecuencia que la máxima permitida por el Teorema de Nyquist. A este sistema se le llama *filtro antialiasing* o *filtro antisolapamiento*.



VOZ HUMANA

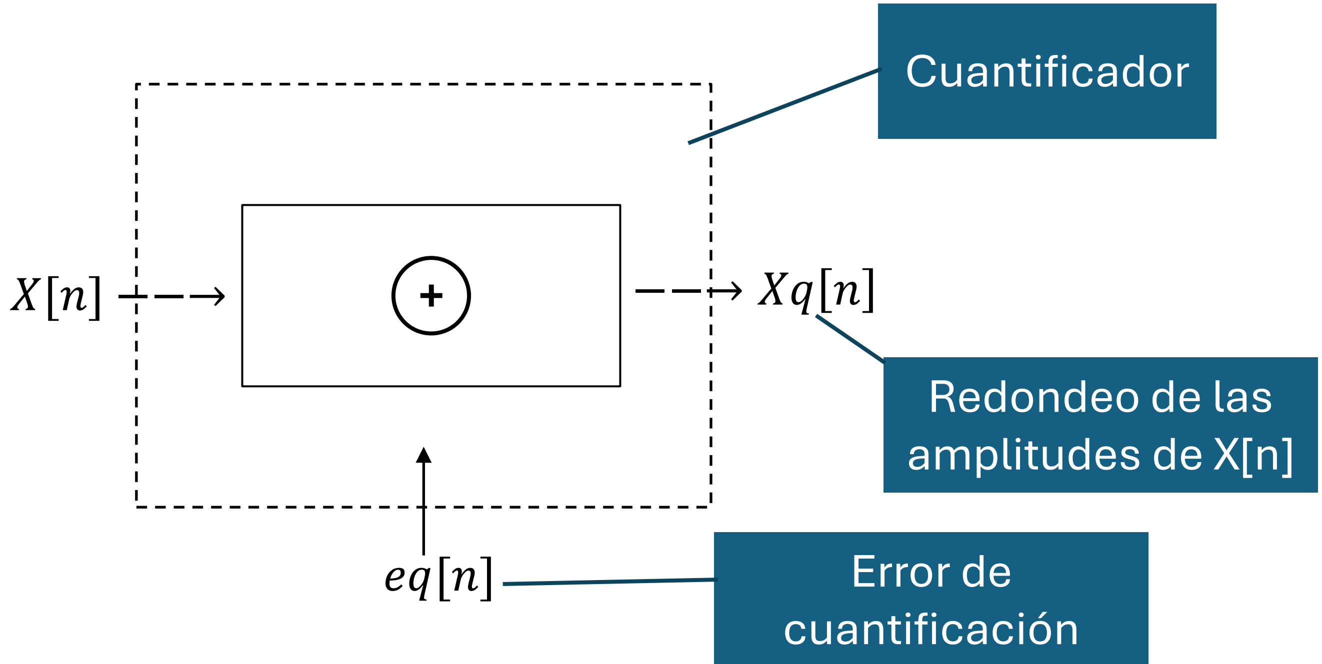
$$\boxed{300 \leq fo \leq 3400Hz}$$

En telefonía fija, realmente, se toma una frecuencia de muestreo de 8KHz

2.4. Cuantificación

Es el proceso de convertir una señal discreta de amplitud continua en una señal digital, expresando cada muestra por medio de un número finito de dígitos.

Un cuantificador puede modelarse como un sumador que añade a la señal original $X[n]$, una señal de ruido $eq[n]$.



$$\boxed{\boldsymbol{eq[n] = Xq[n] - X[n]}}$$

El **error de cuantificación** es la diferencia entre el valor cuantificado y el valor de la muestra

Este error es necesario que sea pequeño

Se trabaja con sistemas que tienen precisión finita. Por ejemplo 32 bits, 64 bits, ...

Ejemplo:

$$X[n] = 0{,}66787 \ldots \xrightarrow{REDONDEO} Xq[n] = 0{,}7$$

El error cometido es eq[n] = Xq[n] – X[n]

eq[n]= 0,7 – 0,66787=0,03213

En el ejemplo $\Delta = \mathbf{0{,}1}$.

(Porque al redondear la muestra estará entre 0,6 y 0,7)

$$\boxed{|eq[n]| \leq \frac{\Delta}{2}}$$

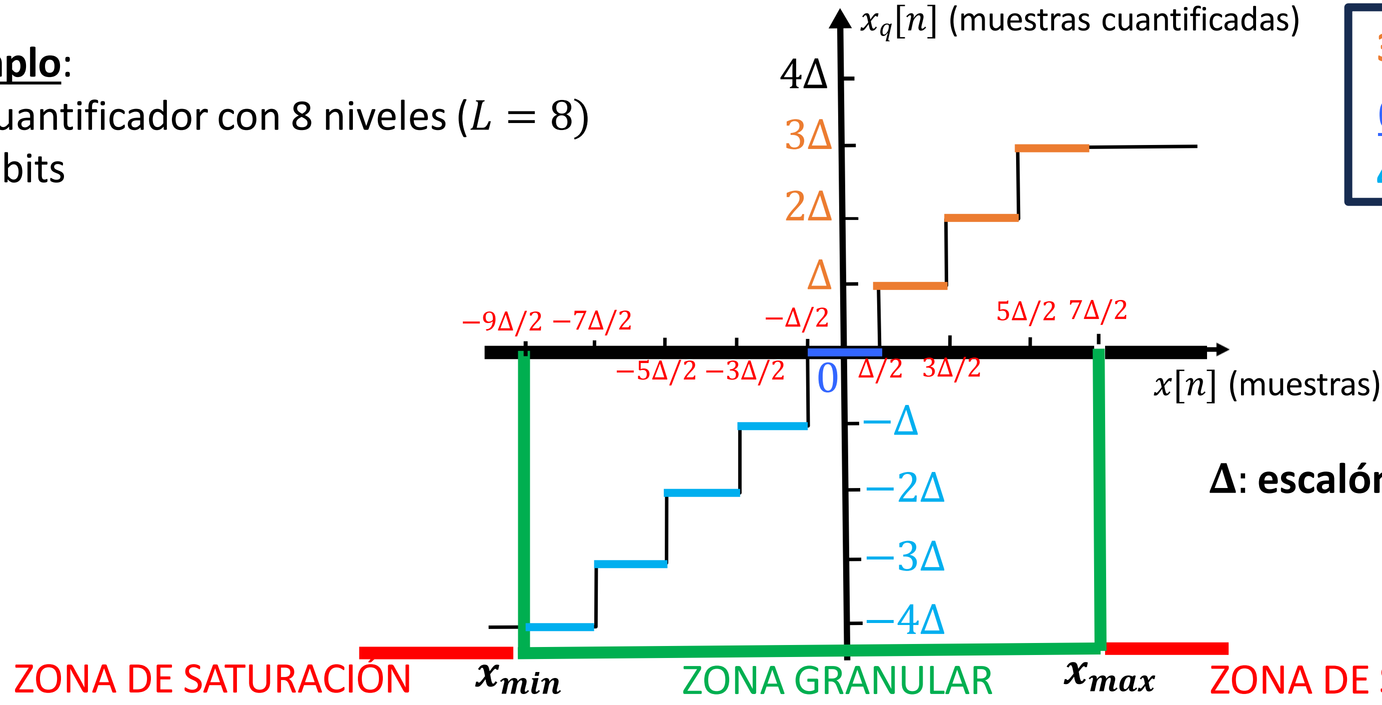
$\rightarrow \Delta$ $(delta\ mayúscula)$
$es\ el\ escalón\ de\ cuantificación$

$$\Delta \downarrow\downarrow \; \rightarrow \; eq[n] \downarrow\downarrow$$

Los cuantificadores los podemos clasificar en dos tipos: **asimétricos y simétricos**

1. Asimétricos: cuando el valor 0 está en el conjunto de salidas posibles

Ejemplo:
- Cuantificador con 8 niveles ($L = 8$)
- 3 bits



3 niveles positivos

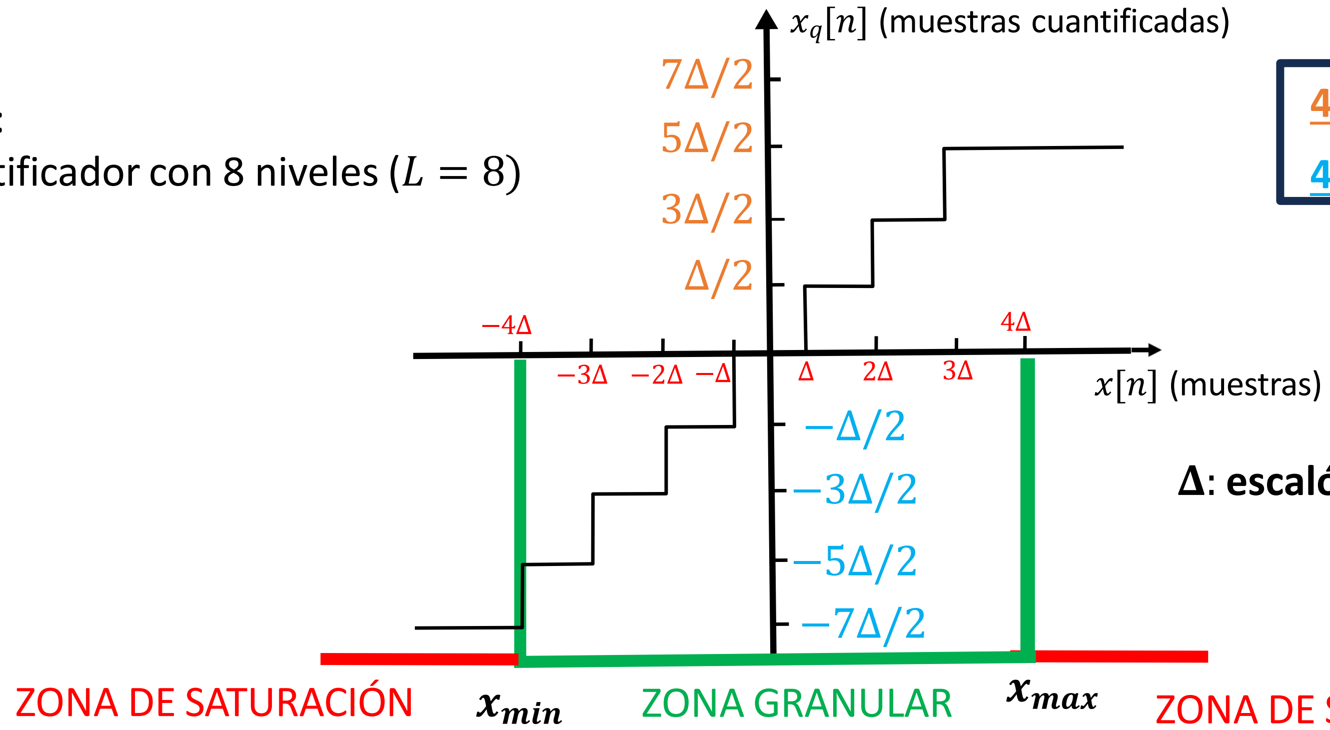
0

4 niveles negativos

Δ: escalón de cuantificación

2. Simétricos: cuando el valor <u>0 no está</u> en el conjunto de salidas posibles

<u>Ejemplo</u>:
- Cuantificador con 8 niveles ($L = 8$)
- 3 bits



4 niveles positivos

4 niveles negativos

Δ: escalón de cuantificación

En la **ZONA GRANULAR** el error **eq[n]** está acotado y depende de Δ, es la zona normal de funcionamiento del cuantificador.

$$|eq[n]| \leq \frac{\Delta}{2}$$

Se habla de los siguientes **CONCEPTOS**:

L = nº de niveles

Δ = escalón de cuantificación (es la diferencia que existe entre 2 niveles consecutivos)

$\mathbf{2Xm} = (Xmax - Xmin)$ margen dinámico del cuantificador

Xmin y Xmax, límites donde debe encontrarse la señal correctamente cuantificada

x – es la muestra

En la **ZONA DE SATURACIÓN o** SOBRECARGA, los valores de la señal sobrepasan los límites: $X \geq \mathrm{Xmax}$ o/y $X \leq \mathrm{Xmin}$

En esta zona no se debe trabajar, porque **eq** ↑↑

El tamaño del **escalón de cuantificación** está directamente relacionado con el **margen dinámico** y el **número de niveles,** que a su vez depende del **número de bits**.

$$\Delta = \frac{2Xm}{L} = \frac{Xmax - Xmin}{2^{bits}}$$

Xmax **Xmin** $Valores\ máximo\ y\ mínimo\ de\ la\ señal\ \ X\,[n]$

$$\Delta = \frac{Xqmax - Xqmin}{(Niveles - 1)}$$

Xqmax **Xqmin** $Valores\ cuantificados\ máximo\ y\ mínimo$

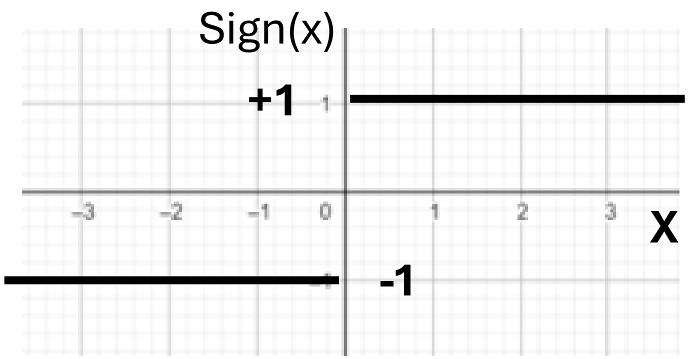
Función característica del cuantificador uniforme

$$\mathrm{Xq} = \mathrm{Q(x)} = \begin{cases} \left(E\left[\frac{|x|}{\Delta}\right] + \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta \cdot Sign(x) & |X| < Xmax \\ \left(\frac{L-1}{2} \right) \cdot \Delta \cdot Sign(x) & |X| \geq Xmax \end{cases}$$

ZONA GRANULAR

ZONA SATURACIÓN

Parámetros y funciones:



$$\boldsymbol{Sign}(x) = \begin{Bmatrix} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{Bmatrix}$$

L = 2^{bits} , es el **número de niveles**

$$\mathbf{E}\left[\frac{|X|}{\Delta}\right] \rightarrow \ Valor\ entero\ de\ la\ división\ entre\ \frac{|X|}{\Delta}$$

Nos da el nivel de cuantificación de la muestra “X”

Una vez calculado el margen dinámico $\boldsymbol{2Xm} = (Xmax - Xmin)$

Cuantos más **niveles** (bits) se tengan,
menores serán el **escalón** y el **error de cuantificación**

$$\mathbf{b}\uparrow\uparrow \;\rightarrow\; L\uparrow\uparrow \;\;\Rightarrow\;\; \Delta\downarrow\downarrow \;\rightarrow\; \mathbf{eq[n]}\downarrow\downarrow$$

No obstante, el **número de bits**, no es lo más importante.

Lo más importante es que el **margen dinámico** del cuantificador:

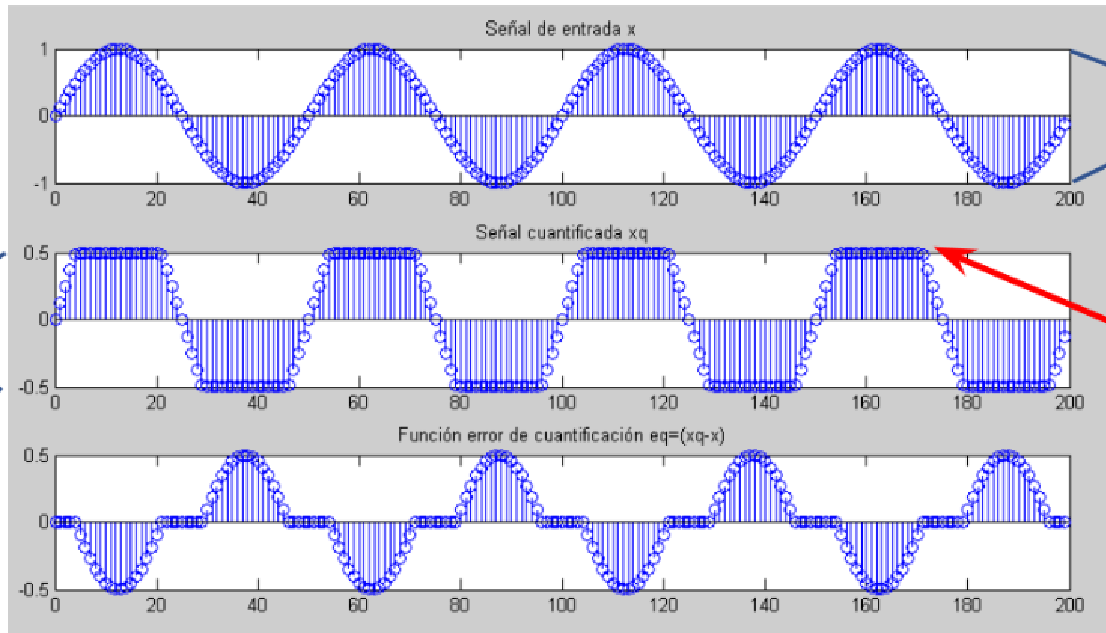
$$2Xm = (Xmax - Xmin)$$

se ajuste a la **excursión de la señal** (diferencia entre valor max y min)

Características de la señal y margen dinámico del conversor

Excursión de la señal

Margen dinámico del conversor



Cuando margen dinámico del conversor (0.5, -0.5) es menor que la excursión de la señal (1, -1), la señal entra en saturación y viene acotada

El caso ideal se da si el rango dinámico del cuantificador coincide con las amplitudes de pico (excursión) de la señal de entrada

Si no coincide, tenemos 2 posibles casos:

1.- El rango dinámico del cuantificador es demasiado pequeño: se "**acota**" la señal de salida cuantificada

2.- El rango dinámico del cuantificador es demasiado grande: se "**desaprovechan**" niveles decuantificación

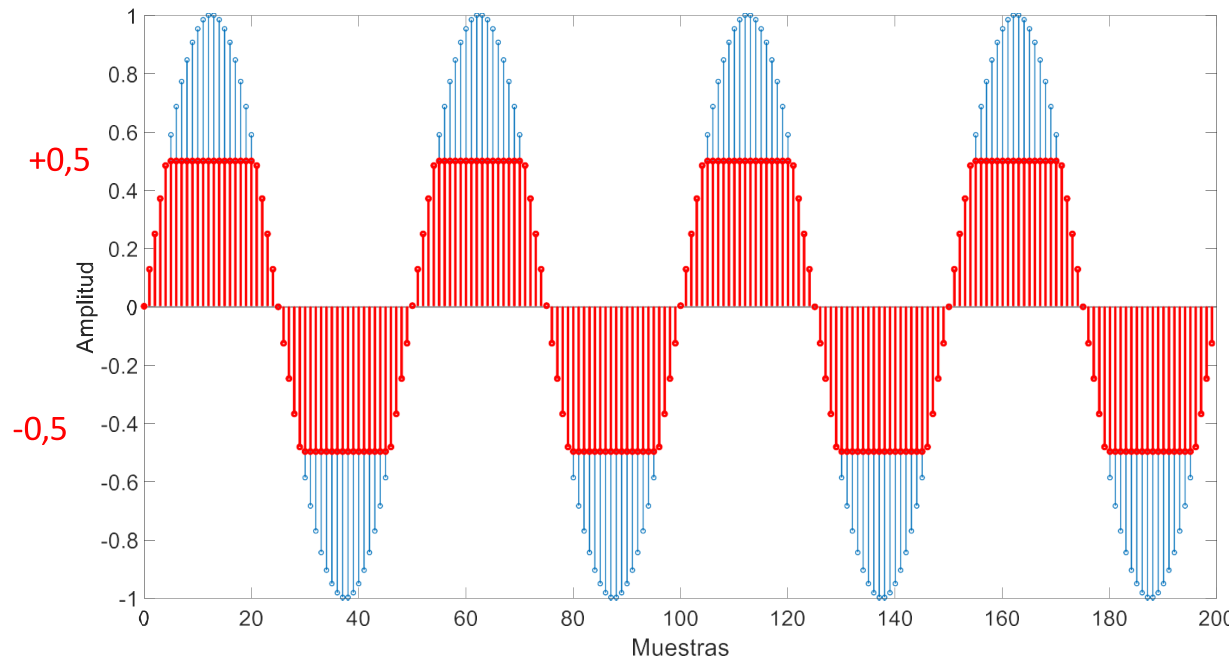
En ambos casos el error de cuantificación aumenta

1.- El rango dinámico del cuantificador es demasiado pequeño

Ejemplo: $x(t) = \mathbf{1}\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{50}t + \frac{\pi}{4}\right)$ → $x_{max} = +1\,; x_{min} = -1$ → La excursión de la señal es 2

Suponemos un margen dinámico del cuantificador $2X_m = 1$

+0,5 -0,5



- La señal cuantificada está saturada (acotada)
- El error de cuantificación aumenta

2. El rango dinámico del cuantificador es demasiado grande

Ejemplo: $x(t) = 1\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{50} t + \frac{\pi}{4}\right)$ → $x_{max} = +1\,; x_{min} = -1$ → La excursión de la señal es 2

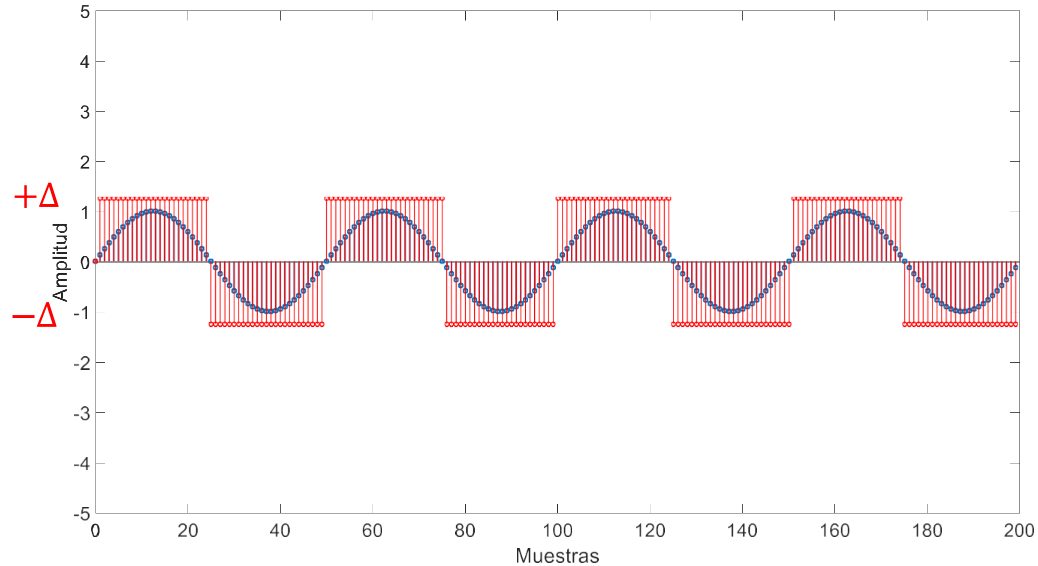
Suponemos un margen dinámico del cuantificador $2X_m = 10$

+5 -5

Suponiendo 8 bits:

$$\Delta = \frac{5 - (-5)}{2^3} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

- Solo se utilizan los niveles de cuantificación más bajos
- El error de cuantificación aumenta también



Un buen cuantificador deberá ajustar su margen dinámico a la excursión de la señal

“El teorema de Nyquist representa una de las aplicaciones más importantes para el procesamiento de señales, ya que garantiza obtener la información imprescindible para una reconstrucción total, a partir del cumplimiento de su criterio. De esta forma, nos ahorrarnos muchas muestras innecesarias y evitamos el ruido que estas pudieran generar.

El ingeniero y físico sueco Harry Nyquist formuló el teorema por primera vez en 1928.

TEMA 2. DIGITALIZACIÓN DE SEÑALES ANALÓGICAS

2.1. Introducción
2.2. Muestreo de señales analógicas
2.3. Teorema de muestreo de Nyquist
2.4. Cuantificación

PROBLEMAS

2.1. Problemas de muestro

Problema 1. Dada la señal: $x(t) = 10\cos\left(1000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 20\cos\left(2000\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

a) Calcular la frecuencia de Nyquist ó fs correcta
b) Tras el muestreo, se cuantifica $x(n)$ utilizando 16 bits por muestreo. Si suponemos $fs = 3000Hz$ ¿Cuántos bytes ocupará una grabación de la señal digitalizada de $^1/_2$ hora duración?

Solución:

a) $f_N = 2fo\ max$

$$\boxed{fo = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

$$fo_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500Hz$$

$$fo_2 = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000Hz$$

$$fo\ max = max\{fo_1, fo_2\} = MAX\{500, 1000\} = 1000Hz$$

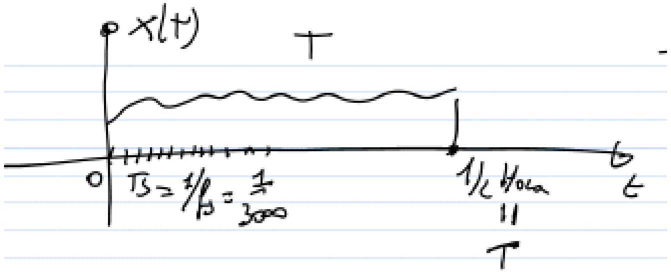
$$\boxed{f_N = 2fo\ max} = 2 * 1000 = 2000\ Hz$$

$$\boxed{fs > 2fo\ max} > 2000Hz$$

$\boldsymbol{fs\ puede\ ser\ 2001\ Hz}$

DFESTS

b)



T = 30 min = 30*60 = 1800 seg

$fs = 3000$

(Cada seg se toman 3.000 muestras)

Nº de muestras = $T * fs + 1 = 1.800 * 3.000 + 1 =$
= $5.400.001 = 5{,}4$ Millones muestras

Cada muestra → 2 bytes = 16 bits (1 bytes = 8 bits)

El tamaño del fichero será → 2 bytes * 5,4 M muestras = **10,8 Mbytes**

Velocidad de transmisión → $fs * bits = Vt;$ Vt = $3.000 * 16 = 48\ Kbps$

Problema 2. Dada la señal: $x(t) = \text{sen}(480\pi t) + 3\,\text{sen}(720\pi t)$

a) Calcular la frecuencia de Nyquist
b) Si $fs = 600Hz$, Calcular x[n]
c) Si x[n] pasa por un conversor $^D/_A$ ¿Cuál será la señal $x_2(t)$?

Solución:

$$fo = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

a) $f_N = 2fo\,max;$ $\quad {}^{480\pi}/_{2\pi} = 240 \;\; y \;\; {}^{720\pi}/_{2\pi} = 360$

fo max = $max\,\{fo_1, fo_2\} = \max\{240, 360\} = 360$

f_N = 2*360 = **720Hz**

$$t = n \cdot Ts; Ts = \frac{1}{fs}$$

b) fs = 600Hz

$x[n] = X(t)_{t=nTs} = \text{sen}(480\pi nTs) + 3\,\text{sen}(720\pi nTs) =$

$= \text{sen}\left(\frac{480\pi}{600}n\right) + 3\,\text{sen}\left(\frac{720\pi}{600}n\right) =$

$= \text{sen}(0{,}8\pi n) + 3\,\text{sen}(1{,}2\pi n) =$

$= \text{sen}(0{,}8\pi n) + 3\,\text{sen}\big((1{,}2\pi - 2\pi)n\big) =$

$= \text{sen}(0{,}8\pi n) + 3\,\text{sen}(-0{,}8\pi n) =$

$= \text{sen}(0{,}8\pi n) - 3\,\text{sen}(0{,}8\pi n) =$

$= \boldsymbol{-2sen(0,8\pi n)}$

$$\text{sen}(-\propto) = -\,\text{sen}(\propto)$$

Se produce aliasing porque 600 no es mayor que $2*360=720$

c) ¿Qué señal podemos recomponer?

$$X(n) = -2\,\text{sen}(0{,}8\pi \boldsymbol{n})$$

$$t = nTs = {}^{n}/_{fs}$$

$$\boldsymbol{n = fs * t}$$

$$X_2(t) = -2\,\text{sen}(0{,}8\pi\ \boldsymbol{fs} * t) = -2\,\text{sen}(0{,}8\pi * 600t) =$$

$$(fs = 600)$$

$$= -2\,\text{sen}(480\pi t) \rightarrow \boldsymbol{señal\ recuperada}$$

$$\boldsymbol{Señal\ original} \rightarrow \boxed{x(t) = \text{sen}(480\pi t) + 3\,\text{sen}(720\pi t)}$$

La componente $3\,\text{sen}(720\pi t)$,
no se puede recuperar, porque se produce Aliasing.