

Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial

SEÑALES Y SISTEMAS

Apuntes de teoría nº 4

Antonio Valle Sánchez

© *Protegidos derechos de autor*



DFESTS

UA

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

TEMA 4

TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

4.1. Señales de tiempo discreto en el dominio de la frecuencia

4.1.1. Transformada de Fourier en tiempo discreto

4.1.1.1. Condición de existencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto

4.1.2. Propiedades de la transformada de Fourier de secuencias

4.1.3. Cálculo de transformadas

4.1.3.1. Uso de la delta de Dirac: transformadas en el límite

4.1.3.2. Espectros de algunas secuencias básicas

4.2. Sistemas discretos LTI en el dominio de la frecuencia. Respuesta en frecuencia

4.2.1. Relaciones de energía y potencia en un sistema LTI

4.2.2. Agrupaciones de sistemas en el dominio de la frecuencia

4.2.3. Respuestas en frecuencia de los filtros ideales

4.2.4. Respuesta en frecuencia de los sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias

1. Señales de tiempo discreto en el dominio de la frecuencia.

La representación de las señales discretas en el dominio de la frecuencia no es más que su descripción como una combinación lineal de señales sinusoidales complejas. Cada señal sinusoidal componente de una secuencia $x[n]$ tendrá una amplitud y una fase.

¿Cómo es posible hallar el peso de cada componente frecuencial en $x[n]$?

En el caso de señales discretas periódicas, se emplea el análisis del desarrollo en serie de Fourier discreto. En una señal de periodo N_0 sólo habrá hasta N_0 sinusoides distintas, y todas ellas tendrán una frecuencia discreta múltiplo de la inversa del periodo (sinusoides relacionadas armónicamente).

El resto secuencias también pueden descomponerse en señales sinusoidales complejas, pero ahora entrarán en juego sinusoides de todas las frecuencias discretas. Para obtener la amplitud y la fase de cada componente en cierta señal $x[n]$, se tiene que calcular su Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT, del inglés *Discrete Time Fourier Transform*).

1.1. Transformada de Fourier en tiempo discreto.

La *transformada de Fourier* de una secuencia, $x[n]$, absolutamente sumable, se define como:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

en donde ω es la *frecuencia angular* y su relación con la *frecuencia lineal* es $\omega = 2\pi f$.

La función $X(e^{j\omega})$ es, en general, compleja: $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\Phi_x(e^{j\omega})}$ y constituye la expresión de la secuencia $x[n]$ en el dominio de la frecuencia. La representación del módulo de la transformada de Fourier, $|X(e^{j\omega})|$, constituye el *espectro de amplitud* y la de $\Phi_x(e^{j\omega})$ el *espectro de fase* de la secuencia (figura 1).

De la expresión (1) se pueden deducir varias cosas. La primera es que, a pesar de que se trata de la representación en el dominio de la frecuencia de una secuencia, el resultado es una *función de variable continua* (ω o f); así pues, tratar u operar con espectros en sistemas digitales (p. e. ordenadores), sigue siendo labor imposible. La segunda, que de la ecuación (1) se desprende, -a consecuencia de la periodicidad de las funciones $e^{-j\omega n}$ -, que el espectro $X(e^{j\omega})$ de cualquier secuencia, representada

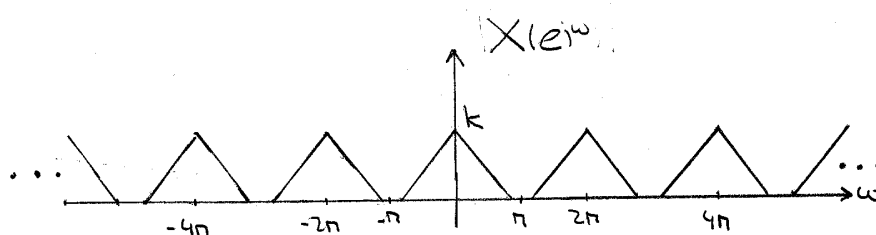


Figura 1: Espectro de una secuencia absolutamente sumable.

frente a la variable ω , es una función periódica, de período 2π , o de período 1 si la representamos frente a la variable f . Así pues, toda la información de la secuencia, quedará comprendida, en términos espectrales, en un sólo período del espectro, por ejemplo, en el primero, entre las frecuencias de 0 y 1 (u.t.d.)⁻¹. Esta última propiedad diferencia sustancialmente los espectros de las secuencias de los de las señales de tiempo continuo.

La ecuación (1) es reversible, pudiéndose "volver" al dominio del tiempo; esto es, realizar la *síntesis* de $x[n]$ a partir de $X(e^{j\omega})$ mediante la *transformada inversa de Fourier*, que se define como:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (2)$$

o bien

$$x[n] = \int_{-0,5}^{0,5} X(e^{j\omega}) e^{j2\pi f n} df. \quad (3)$$

Nótese que es necesario calcular una integral definida para sintetizar $x[n]$, puesto que $X(e^{j\omega})$ es una función de variable continua.

Habitualmente se habla de *par de transformadas* y se emplea la notación

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad (4)$$

al referirnos a una secuencia y su transformada de Fourier.

1.1.1. Condición de existencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

El sumatorio que define la transformada de Fourier,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-i\omega n}, \quad (5)$$

convergerá si y sólo si la señal en tiempo discreto, $x[n]$, es *absolutamente sumable*. Esto es, siempre que se cumpla que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty. \quad (6)$$

Aún así, es posible generalizar la DTFT para incluir también secuencias que no cumplen la condición anterior (por ejemplo las señales periódicas). Se habla entonces de transformada de Fourier en el límite. Para describir los espectros de estas señales se necesitarán funciones delta de Dirac.

Estas transformadas se justifican porque se comprueba que al introducirlas en la ecuación de síntesis de la DTFT (DTFT inversa) se obtiene la secuencia $x[n]$ correspondiente.

1.2. Propiedades de la transformada de Fourier de secuencias.

A continuación se relacionan las propiedades matemáticas más interesantes de la transformada de Fourier de las secuencias. Como se observará, son análogas a las ya conocidas para las señales de tiempo continuo. Para todas ellas asumiremos conocido el par de transformadas

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

■ Linealidad.

La transformada de una combinación lineal de secuencias es la combinación lineal de sus transformadas:

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i[n] \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n A_i X_i(e^{j\omega}) \quad (7)$$

■ Simetría.

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega}) \quad (8)$$

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega}) \quad (9)$$

$$x^*[-n] \longleftrightarrow X^*(e^{j\omega}) \quad (10)$$

De (8) se deduce que, si $x[n]$ es real, entonces $x[n] = x^*[n]$, luego $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ y también $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$, de donde se llega a:

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$

$$\theta_x(e^{j\omega}) = -\theta_x(e^{-j\omega})$$

Esto es: el espectro de amplitud será una función par y el espectro de fase una función impar. Si combinamos esta propiedad con la periodicidad intrínsecamente asociada a cualquier $X(e^{j\omega})$ mencionada anteriormente, obtenemos que, en términos espectrales, las secuencias reales quedan completamente definidas en medio período del espectro, por ejemplo, entre las frecuencias de 0 y 0,5 (u.t.d.)⁻¹. Este hecho se puede observar en la figura 1, en la que se representa el espectro de una secuencia real.

- Traslación en el tiempo.

Retardar o adelantar la secuencia equivale, en el dominio de la frecuencia, a multiplicar por un fasor:

$$x[n \pm n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{\pm j\omega n_0} \quad (11)$$

- Traslación en frecuencia o modulación.

Desplazar hacia delante o hacia atrás el espectro de una secuencia equivale, en el dominio del tiempo, a multiplicar un fasor o *modular* la secuencia:

$$x[n]e^{\mp j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega \pm \omega_0}) \quad (12)$$

- Diferenciación.

Derivando en el dominio de la frecuencia:

$$nx[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}. \quad (13)$$

- Teorema de la convolución.

Se puede demostrar que la transformada de Fourier de la convolución de dos secuencias, $x[n]$ e $y[n]$ se puede calcular como el producto de sus espectros:

$$x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega}) \quad (14)$$

■ Teorema del enventanado.

A la inversa también se verifica que

$$x[n]y[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) *_{2\pi} Y(e^{j\omega}), \quad (15)$$

definiéndose la operación convolución periódica $*_{2\pi}$ en el dominio de la frecuencia de la siguiente forma:

$$X(e^{j\omega}) *_{2\pi} Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (16)$$

■ Teorema de Parseval.

Vimos en el tema anterior que, en el dominio del tiempo, la energía de una secuencia (definida en términos de energía) podíamos calcularla así:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2. \quad (17)$$

Si en la expresión anterior sustituimos $x[n]$ por la fórmula de síntesis (2), operando se llega a:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (18)$$

que es la expresión del *teorema de Parseval* para secuencias definidas en términos de energía. En (18) se observa explícitamente que toda la información de la secuencia queda comprendida en un sólo período de su espectro, pues solamente uno de ellos comprende toda la energía de la secuencia.

Se llama *densidad espectral de energía* a la función

$$S_x(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2, \quad (19)$$

ya que representa la energía por unidad de frecuencia de la señal $x[n]$.

Para el caso de señales periódicas, definidas en términos de potencia, el teorema de Parseval toma la forma:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2. \quad (20)$$

1.3. Cálculo de transformadas.

En general, el cálculo analítico de las transformadas de Fourier de las secuencias se limita a sumar la serie (1). En muchos casos dicha suma es sencilla, pues se trata de una serie de potencias:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n_1}^{n_2} (r)^n = \frac{1^{er} \text{ termino} - (\text{ult.termino}) \times r}{1 - r} \quad (21)$$

En otras ocasiones conviene apoyarse en el conocimiento previo de algún par de transformadas y en las propiedades de la transformada de Fourier.

1.3.1. Uso de la delta de Dirac: transformadas en el límite.

Para secuencias definidas en términos de potencia la suma (1) es divergente, por lo que la transformada de Fourier no es un procedimiento válido para obtener sus espectros. Como ya se ha comentado, apoyándonos en la delta de Dirac es posible hablar de *transformada de Fourier en el límite* y obtener los espectros de estas secuencias. La justificación de que el resultado presentado, en el que intervienen deltas de Dirac, es el espectro de una determinada secuencia definida en términos de potencia se obtiene introduciendo dicha función, $X(e^{j\omega})$, en la fórmula de síntesis (2) y comprobando que se obtiene la $x[n]$ pretendida.

1.3.2. Espectros de algunas secuencias básicas.

- Espectro de la secuencia impulso unidad.

Aplicando la definición se obtiene directamente,

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = 1. \quad (22)$$

La transformada de la secuencia impulso unidad es la unidad (figura 2). Generalizando el resultado, aplicando las propiedades de linealidad y de traslación en el tiempo obtendremos:

$$x[n] = A\delta[n - n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = Ae^{-j\omega n_0}. \quad (23)$$

Una impulso de amplitud A , situado en el instante n_0 tiene un espectro de amplitud de valor A , constante, y un espectro de fase $\theta_x(e^{j\omega})$ lineal, de pendiente negativa $p = -2\pi n_0$.

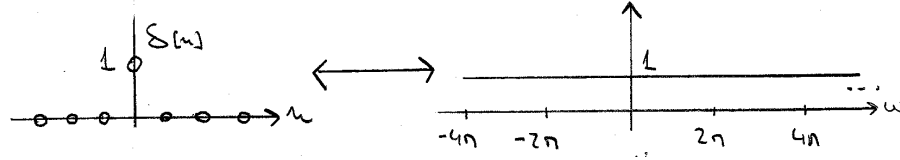


Figura 2: Espectro del impulso unidad.

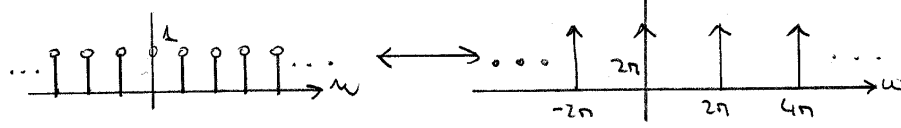


Figura 3: Espectro de una secuencia constante.

- Espectro de una secuencia constante.

La secuencia $x[n] = 1 \forall n$ es una secuencia definida en términos de potencia, por lo que es necesario el uso de deltas de Dirac para expresar su espectro. Este es:

$$x[n] = 1 \longleftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k). \quad (24)$$

En efecto, la expresión anterior es periódica, de período 2π , y, además, si la introducimos en la fórmula de síntesis (2) se obtiene la secuencia $x[n] = 1 \forall n$ (figura 3).

- Espectro de una senoide compleja.

A partir de (24), aplicando la propiedad de modulación obtendremos:

$$Ae^{j\omega_d n} \longleftrightarrow 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_d - 2\pi k) \quad (25)$$

Es decir, la transformada en el límite de una senoide compleja discreta de frecuencia f_d y amplitud A es un tren de deltas de Dirac de peso $2\pi A$, posicionadas en las frecuencias angulares $\omega_d - 2\pi k$ (figura 4). Recuerdese que una senoide discreta es una secuencia definida en términos de potencia que sólo es periódica si su frecuencia discreta, f_d , es un número racional.

A la vista de la figura 4 se puede obtener una conclusión importante: como ya vimos, el rango de valores de f_d que conducen a secuencias diferentes está comprendido en el

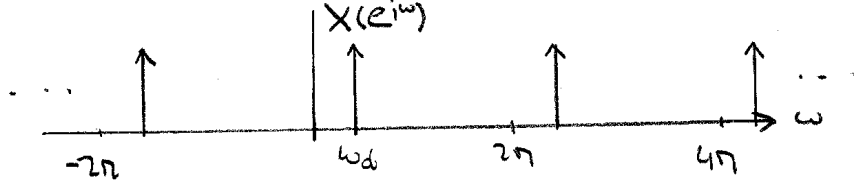


Figura 4: Espectro de una senoide compleja discreta.

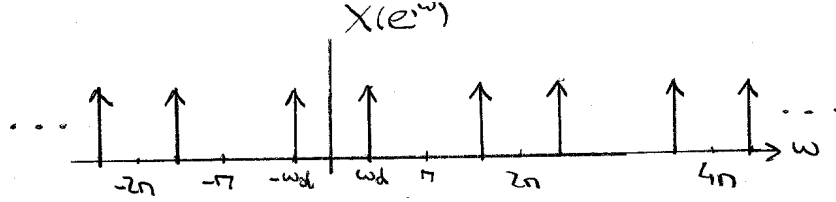


Figura 5: Espectro de una secuencia sinusoidal real (coseno).

intervalo $0 \leq f_d < 1$. Si la frecuencia discreta de la senoide está fuera de este intervalo siempre es posible encontrar un valor de f_d dentro del intervalo que conduce al mismo espectro y, por tanto, a una secuencia idéntica.

- Espectro de una senoide real.

Aprovechando el resultado (25) es sencillo calcular la transformada en el límite de una senoide real, descomponiéndola en semisuma de fasores:

$$A \cos \omega_d n \longleftrightarrow \pi A \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_d - 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_d - 2\pi k) \right]. \quad (26)$$

Esto es, la transformada en el límite de una senoide real de amplitud A y frecuencia f_d es un tren de pares de deltas, de pesos πA , ubicadas en las frecuencias angulares $\pm \omega_d$ (figura 5).

A la vista de la figura 5 se puede llegar a la siguiente conclusión importante: el rango de valores de f_d que conducen a secuencias diferentes está comprendido en el intervalo $0 \leq f_d \leq 0,5$. Si la frecuencia discreta de la senoide está fuera de este intervalo siempre es posible encontrar un valor de f_d dentro del intervalo que conduce al mismo espectro y, por tanto, a una secuencia idéntica.

- Espectro de cualquier secuencia periódica.

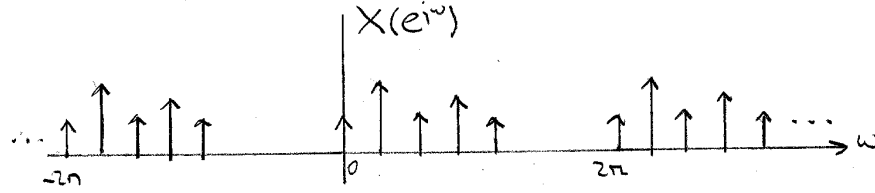


Figura 6: Espectro de una secuencia periódica.

Dada una secuencia periódica, $x[n] = x[n + N_0]$, su desarrollo en serie de Fourier discreto, según se ha visto, será:

$$x[n] = \sum_{l=0}^{N_0-1} c_l e^{j \frac{2\pi}{N_0} l n}.$$

Es decir, $x[n]$ es una combinación lineal de N_0 sinusoides complejas discretas, cuya transformada en el límite conocemos (25). Aplicando la propiedad de linealidad:

$$\sum_{l=0}^{N_0-1} c_l e^{j \frac{2\pi}{N_0} l n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{l=0}^{N_0-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l \delta(\omega - \frac{2\pi}{N_0} l - 2\pi k). \quad (27)$$

Por tanto, la transformada en el límite de una secuencia periódica de período N_0 es un tren periódico de grupos de N_0 deltas de Dirac, cuyos pesos son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x[n]$. Nótese que los c_l son complejos, esto es, $c_l = |c_l| e^{j\Phi_l}$.

- Espectro de la secuencia pulso cuadrado.

Recordando la definición del pulso cuadrado:

$$x[n] = A \prod\left(\frac{n}{L}\right) = \begin{cases} A & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Si aplicamos la definición de transformada de Fourier:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}} = A \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega \frac{L-1}{2}}. \quad (28)$$

En la figura 7 se representa el espectro del pulso cuadrado. Obsérvese su similitud con la función sinc (espectro del pulso cuadrado de tiempo continuo). El término $e^{-j\omega(L-1)/2}$ aparece como consecuencia de que, en este caso, la secuencia comienza en el origen y en el caso de la señal de tiempo continuo estaba centrada en éste. Además cabe destacar que el número de lóbulos que tiene la función en cada período es igual al número de muestras L del pulso.

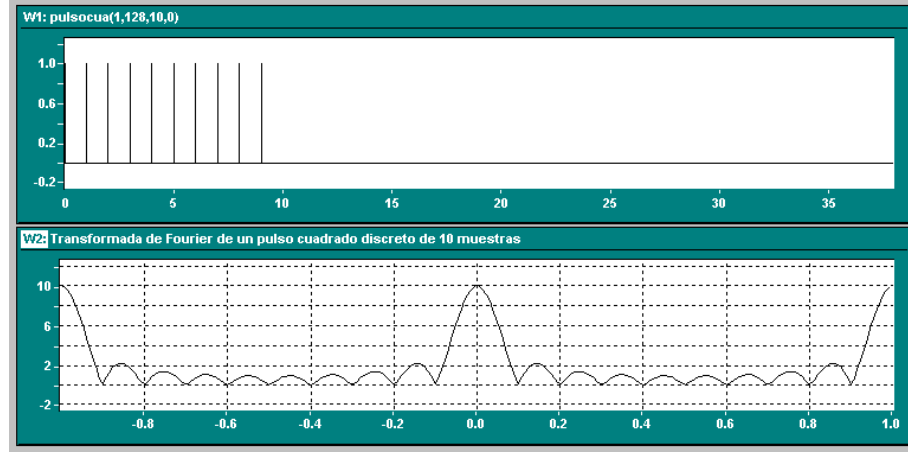


Figura 7: Espectro de la secuencia pulso cuadrado.

- Espectro de la secuencia sinc.

Se define la secuencia sinc como:

$$x[n] = 2f_c \text{sinc}(2f_c n) = \frac{\text{sen}(2\pi f_c n)}{\pi n}, \quad 0 \leq f_c < 0,5 \quad (29)$$

Se trata de una secuencia de longitud infinita, definida en términos de energía, pero no absolutamente sumable. Tiene transformada de Fourier, pero si aplicamos la definición, no es posible hallar la expresión analítica de ésta, puesto que no existe procedimiento conocido para sumar la serie. Para obtener el resultado se procede a la inversa: se piensa en la expresión esperada para el resultado (que guardará relación con la transformada de Fourier de una señal de tiempo continuo de la que se pueda haber obtenido por muestreo la secuencia en cuestión (en este caso la señal $2W \text{sinc } 2Wt$) y se introduce en la fórmula de síntesis para comprobar si se obtiene de nuevo la secuencia $x[n]$. Por este procedimiento se llega a que el espectro de la secuencia sinc es:

$$2f_c \text{sinc}(2f_c n) \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod \left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c} \right) \quad (30)$$

En la figura 8 se muestra el resultado anterior. Obsérvese que, si $f_c \geq 0,5$, se solaparían los pulsos cuadrados obteniéndose un espectro continuo.

- Espectro de la secuencia exponencial real.

Se define la secuencia:

$$x[n] = a^n u[n] \quad \forall a \text{ real, tal que } |a| < 1. \quad (31)$$

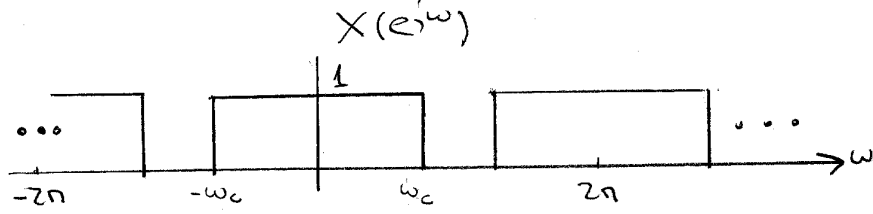


Figura 8: Espectro de la secuencia sinc.

Se trata de una secuencia definida en términos de energía y absolutamente sumable. Para calcular la transformada de Fourier aplicamos la definición y sumamos la serie:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad (32)$$

Si $a = 1$ la secuencia exponencial se convierte en un escalón unidad, secuencia definida en términos de potencia para la que la suma anterior es divergente. En este caso se tiene una transformada en el límite con deltas de Dirac:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k). \quad (33)$$

2. Sistemas discretos LTI en el dominio de la frecuencia. Respuesta en frecuencia.

En el tema anterior se demostró que, en los sistemas lineales e invariantes, conocida la respuesta al impulso, $h[n]$, era posible conocer la respuesta a cualquier excitación calculando:

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Si aplicamos la transformada de Fourier a la expresión anterior, en virtud del teorema de la convolución, se tendrá:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (34)$$

En la expresión anterior, $Y(e^{j\omega})$ y $X(e^{j\omega})$ son, respectivamente, los espectro de la respuesta y la excitación y $H(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de la respuesta impulsiva, a la que se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema (figura 9).

Trabajemos un poco con la expresión (34) para descubrir algunas cosas. Primeramente no hay que olvidar que, puesto que la respuesta en frecuencia, $H(e^{j\omega})$, es la

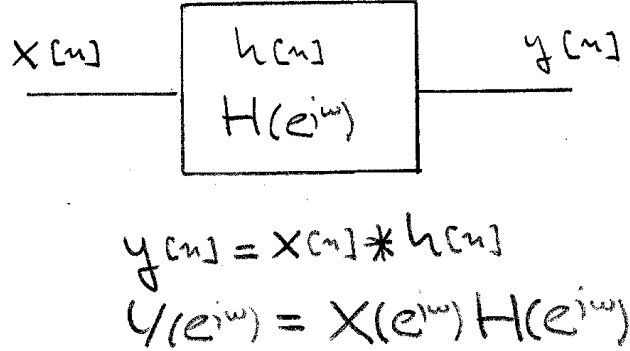


Figura 9: Caracterización de un sistema LTI en el dominio de la frecuencia.

transformada de Fourier de una secuencia, tendrá las propiedades de ésta: en especial hay que tener presente que será periódica, con periodicidad 2π . Debido a ello, el rango de valores de frecuencia que es necesario considerar a efectos de estudiar que transformación produce el SLI sobre la secuencia será $0 \leq f < 1$ (u.t.d)⁻¹. ($0 \leq \omega < 2\pi$ rad/muestra o rad/u.t.d). Además, si el sistema LTI es real, este rango se reduce a $0 \leq f < 0,5$ (u.t.d)⁻¹. Por otra parte, dado que las tres funciones son complejas, se tendrá:

$$\begin{aligned}
 Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \\
 |Y(e^{j\omega})| &= |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})| \\
 \Phi_y(e^{j\omega}) &= \Phi_x(e^{j\omega}) + \Phi_h(e^{j\omega})
 \end{aligned} \tag{35}$$

De la expresión anterior se deduce que un sistema lineal e invariante *no puede crear* componentes espectrales que no estén presentes en la excitación, aunque sí puede transformar su amplitud y su fase, o, incluso, eliminarlas completamente. Además, si el sistema es real $h[n]$ será real, y, en este caso, por la propiedad de simetría de la transformada de Fourier, tendremos que:

$$\begin{aligned}
 |H(e^{j\omega})| &= |H(e^{-j\omega})| \\
 \Phi_h(e^{j\omega}) &= -\Phi_h(e^{-j\omega})
 \end{aligned} \tag{36}$$

el módulo de la respuesta en frecuencia será una función par, y su fase una función impar.

2.1. Relaciones de energía y potencia en un sistema LTI.

A partir de (35) se deduce que, para señales definidas en términos de energía:

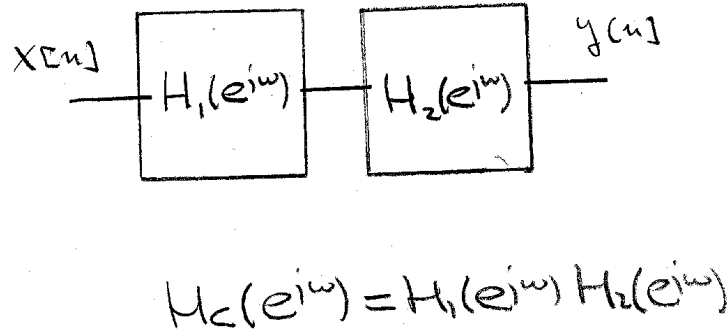


Figura 10: Conexión en cascada o serie de dos sistemas LTI en el dominio de la frecuencia.

$$|Y(e^{j\omega})|^2 = |X(e^{j\omega})|^2 |H(e^{j\omega})|^2 \quad (37)$$

esto es; la *densidad espectral de energía* a la salida del sistema es el producto de la de la excitación por el cuadrado del módulo de la respuesta en frecuencia.

Si la excitación es una señal definida en términos de potencia no es posible elevar al cuadrado el módulo de su espectro, como se ha hecho en (37). Para este conjunto de señales se define una función *densidad espectral de potencia*, $S(e^{j\omega})$, que verificará la relación:

$$S_y(e^{j\omega}) = S_x(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 \quad (38)$$

2.2. Agrupaciones de sistemas en el dominio de la frecuencia.

- Conexión en cascada.

Por el teorema de la convolución:

$$\begin{aligned} h_C[n] &= h_1[n] * h_2[n] \longleftrightarrow H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega}) \\ H_C(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (39)$$

La respuesta en frecuencia de la conexión de dos sistemas en cascada es el producto de las de éstos.

- Conexión en paralelo.

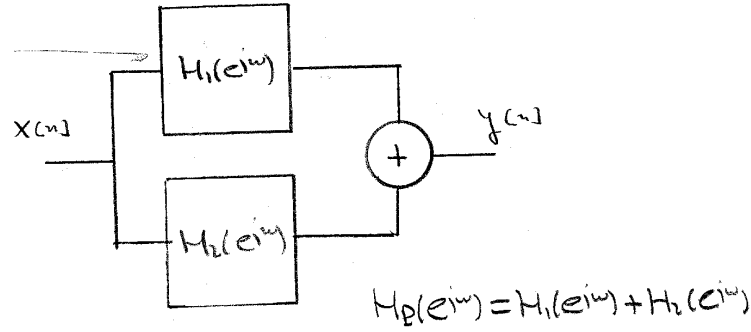


Figura 11: Conexión en paralelo de dos sistemas LTI en el dominio de la frecuencia.

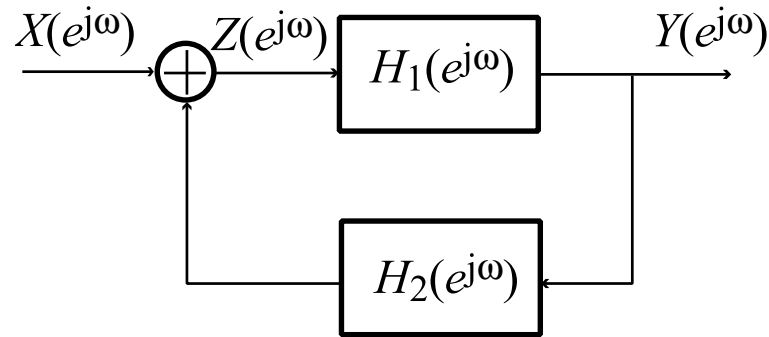


Figura 12: Conexión con realimentación de dos sistemas LTI en el dominio de la frecuencia.

Por la propiedad de linealidad:

$$\begin{aligned} h_P[n] &= h_1[n] + h_2[n] \longleftrightarrow H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) \\ H_P(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (40)$$

La respuesta en frecuencia de la conexión de dos sistemas en cascada es la suma de las de éstos.

■ Conexión con realimentación.

En el dominio de la frecuencia se tiene que:

$$Z(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega}), // Y(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot Z(e^{j\omega}). \quad (41)$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda,

$$Y(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot (Y(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})), \quad (42)$$

y despejando la relación entre excitación y respuesta, se llega a:

$$H_R(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{H_1(e^{j\omega})}{1 - H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})}. \quad (43)$$

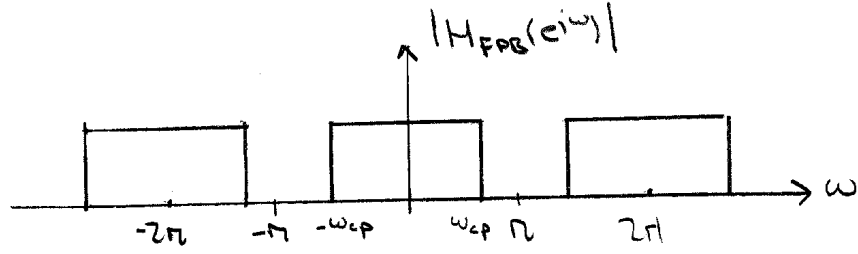


Figura 13: Respuesta en frecuencia de un filtro paso bajo ideal.

2.3. Respuestas en frecuencia de los filtros ideales.

En los filtros discretos, reales, dada la periodicidad de la respuesta en frecuencia, todas las bandas de paso, eliminadas, frecuencias de corte, etc. que definan ésta función *están comprendidas* en el rango de frecuencias $0 \leq f \leq 0,5$. Esta es una diferencia fundamental con los filtros analógicos, en donde el rango de frecuencias se extiende entre 0 e ∞ .

En la práctica los filtros ideales no son realizables. Se puede demostrar que su respuesta impulsiva es tal que el sistema resultante no es estable. No obstante podemos aproximarnos considerablemente a ellos mediante LTI estables; de hecho, mucho más fácilmente y con mayor precisión que en los filtros analógicos.

■ Filtro paso bajo.

En este tipo de filtro existe solamente una banda de paso, de B unidades de frecuencia de anchura, comprendida en el intervalo de frecuencias $0 < f < f_c < 0,5$. A la frecuencia límite de la banda de paso se le denomina *frecuencia de corte*. En consecuencia, la única banda eliminada estará comprendida en el intervalo $f_c < f < 0,5$. Se denomina filtro paso bajo porque deja pasar las frecuencias por debajo de cierto umbral y elimina las que están por encima de éste. La expresión analítica de la respuesta en frecuencia es:

$$H_{FPB}(e^{j\omega}) = G e^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod \left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c} \right). \quad (44)$$

Obsérvese que la fase de la respuesta en frecuencia, –lineal de pendiente negativa–, causará un retardo de n_0 unidades de tiempo discreto sobre cualquier excitación a la entrada del filtro.

■ Filtro paso alto.

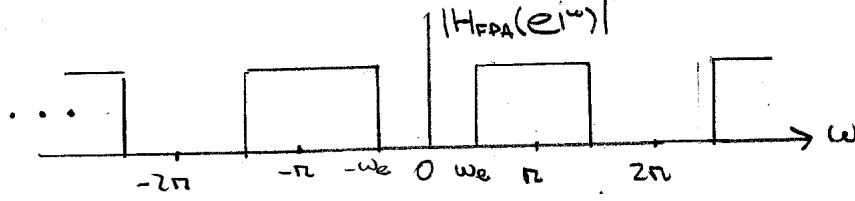


Figura 14: Respuesta en frecuencia de un filtro paso alto ideal.

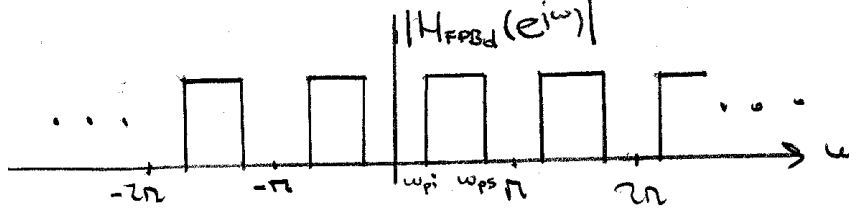


Figura 15: Respuesta en frecuencia de un filtro paso banda ideal.

En este tipo de filtro existe solamente una banda de paso, de B unidades de frecuencia de anchura, comprendida en el intervalo de frecuencias $f_c < f < 0,5$. En consecuencia, la única banda eliminada estará comprendida en el intervalo $0 < f < f_c$. Se denomina filtro paso alto porque deja pasar las frecuencias por encima de cierto umbral y elimina las que están por debajo de éste. La expresión analítica de la respuesta en frecuencia es:

$$H_{FPA}(e^{j\omega}) = G e^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod \left(\frac{\omega - \pi - 2\pi k}{2(\pi - \omega_c)} \right). \quad (45)$$

■ Filtro paso banda.

En este tipo de filtro existe una banda de paso, de B Hz de anchura, comprendida en el intervalo de frecuencias $f_{ci} < f < f_{cs}$. Las frecuencias límite se denominan frecuencia de corte inferior y frecuencia de corte superior, y ambas estarán comprendidas en el intervalo $[0, 0,5]$. En consecuencia existirán dos bandas eliminadas; la primera estará comprendida en el intervalo $0 < f < f_{ci}$ y la segunda en $f_{ci} < f < 0,5$. Se denomina filtro paso banda, porque deja pasar una banda de frecuencias intermedia, centrada en la frecuencia f_0 y elimina las que están por debajo y por encima de ésta. La expresión analítica de la respuesta en frecuencia es:

$$H_{FPBd}(e^{j\omega}) = G e^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\prod \left(\frac{\omega + \omega_0 - 2\pi k}{\omega_{cs} - \omega_{ci}} \right) + \prod \left(\frac{\omega - \omega_0 - 2\pi k}{\omega_{cs} - \omega_{ci}} \right) \right]. \quad (46)$$

■ Filtro banda eliminada.

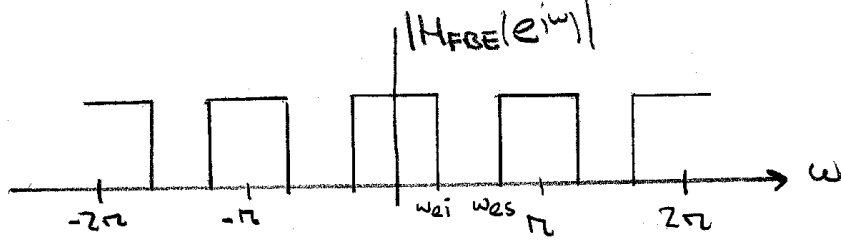


Figura 16: Respuesta en frecuencia de un filtro banda eliminada ideal.

En este tipo de filtro existe una banda eliminada, de B unidades de frecuencia de anchura, comprendida en el intervalo de frecuencias $f_{ci} < f < f_{cs}$. Las frecuencias límite se denominan frecuencia de corte inferior y frecuencia de corte superior, y ambas estarán comprendidas en el intervalo $[0, 0.5]$. En consecuencia existirán dos bandas de paso; la primera estará comprendida en el intervalo $0 < f < f_{ci}$ y la segunda en $f_{ci} < f < 0.5$. Se denomina filtro banda eliminada, porque elimina una banda de frecuencias intermedia, centrada en la frecuencia f_0 y deja pasar las que están por debajo y por encima de ésta. La expresión analítica de la respuesta en frecuencia es:

$$H_{FBE}(e^{j\omega}) = G e^{-j\omega n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\prod \left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_{ci}} \right) + \prod \left(\frac{\omega - \pi - 2\pi k}{2(\pi - \omega_{cs})} \right) \right]. \quad (47)$$

- Filtros con varias bandas de paso.

Se logran combinando arbitrariamente en paralelo y en cascada filtros de los tipos anteriores.

2.4. Respuesta en frecuencia de los sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias.

La ecuación en diferencias que gobierna un sistema LTI viene dada por:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k].$$

Aplicando la transformada de Fourier a la expresión anterior obtendremos:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k X(e^{j\omega}) e^{-j\omega k} + \sum_{k=1}^N a_k Y(e^{j\omega}) e^{-j\omega k}. \quad (48)$$

Podemos obtener $H(e^{j\omega})$ si en (48) despejamos:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}}. \quad (49)$$

La expresión anterior es la respuesta en frecuencia de cualquier sistema lineal e invariante. Escogiendo adecuadamente los coeficientes b_k y a_k podremos hacer que el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia se parezcan a las de un filtro ideal con mayor o menor fidelidad, o bien a cualquier otra curva. En esto consiste el problema de diseño de filtros discretos. Para obtener la respuesta impulsiva de un sistema LTI hay que aplicar la transformada inversa de Fourier a la expresión (49).