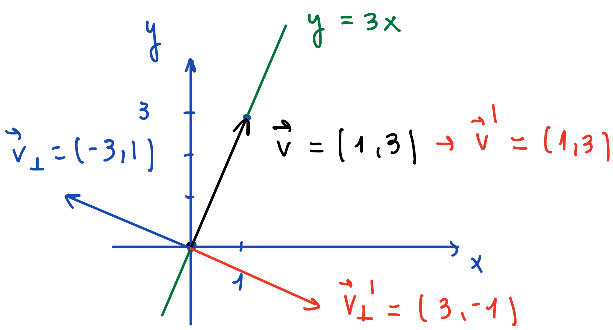
Ejercicio: Hallar la matriz asociada a la transformación T de una simetría axial respecto a la recta $y = 3x$.



$$\vec{v}_\perp \cdot \vec{v} = 0$$

$$(x,y)\cdot(1,3) = x + 3y = 0$$

$$x = -3y = -3 \qquad y = 1$$

$$T(1,3) = (1,3) \longrightarrow T(1,3) = T(1,0) + 3T(0,1) = (1,3) \quad \cdot 3$$

$$T(-3,1) = (3,-1) \longrightarrow T(-3,1) = -3T(1,0) + T(0,1) = (3,-1)$$

$$\oplus \qquad \overline{\cancel{}\; 10T(0,1) = (6,8)}$$

$$T(0,1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

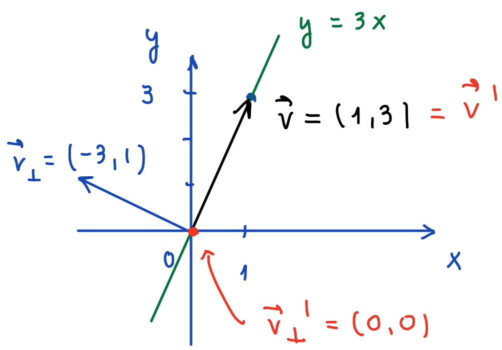
$$T(1,0) = (1,3) - 3T(0,1)$$

$$T(1,0) = (1,3) - 3\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \to T(x,y) = \left(\frac{-4x+3y}{5}, \frac{3x+4y}{5}\right)$$

Ejercicio: Hallar la matriz asociada a la transformación T de una proyección ortogonal respecto a la recta $y = 3x$.



$$T(1,3) = (1,3) \longrightarrow T(1,3) = T(1,0) + 3T(0,1) = (1,3) \quad \cdot 3$$

$$T(-3,1) = (0,0) \longrightarrow T(-3,1) = -3T(1,0) + T(0,1) = (0,0)$$

$$\oplus \quad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$10\,T(0,1) = (3,9)$$

$$3T(1,0) = T(0,1) \qquad\qquad T(0,1) = \underline{\underline{\left(\frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right)}}$$

$$T(1,0) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)}}$$

$$A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}}} \rightarrow T(x,y) = \underline{\underline{\left(\frac{x+3y}{10}, \frac{3x+9y}{10}\right)}}$$

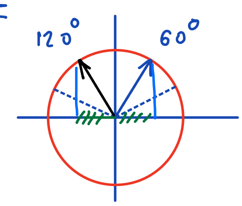
Ejercicio: Hallar la matriz asociada a la transformación T, la cual efectúa en $\mathbb{R}^2$ una rotación de 120° en sentido antihorario.

Calcular $T(2,2)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & -\operatorname{sen}(120^\circ) \\ \operatorname{sen}(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{pmatrix} =$$

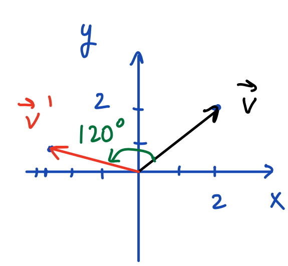
$$= \begin{pmatrix} -\cos(60^\circ) & -\operatorname{sen}(60^\circ) \\ \operatorname{sen}(60^\circ) & -\cos(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

CALC. EN GRADOS!



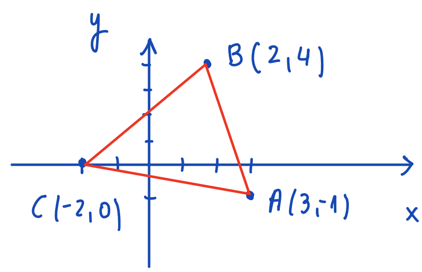
θ (°)	0	30	45	60	90
θ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

$$T(2,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

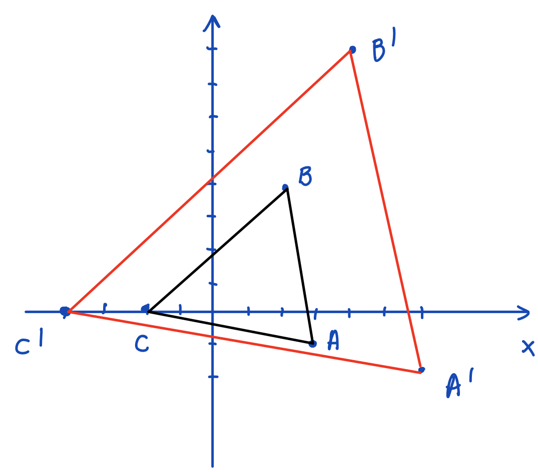


$$T(2,2) \approx (-2'73,\ 0'73)$$

Ejercicio: Aplicar a la figura la transformación T_1 cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Representar la figura transformada.



Dilatación con $K = 2$:



$A' = T(3,-1) = 2(3,-1) = (6,-2)$

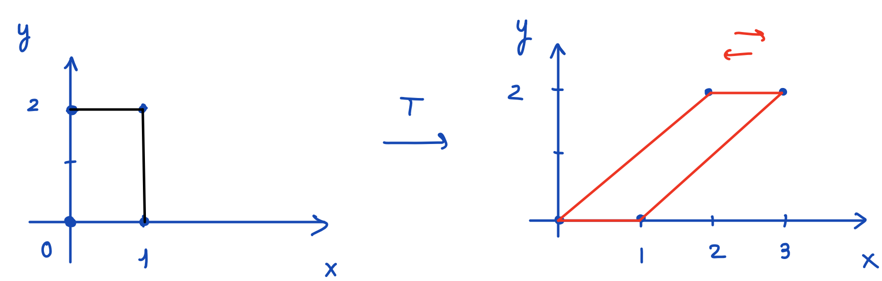
$B' = T(2,4) = (4,8)$

$C' = T(-2,0) = (-4,0)$

Ejercicio: Trazar la imagen del rectángulo cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,2)$ y $(1,0)$ bajo las transformaciones:

a) $T(x,y) = (x+y, y)$ b) $T(x,y) = (x, y+2x)$

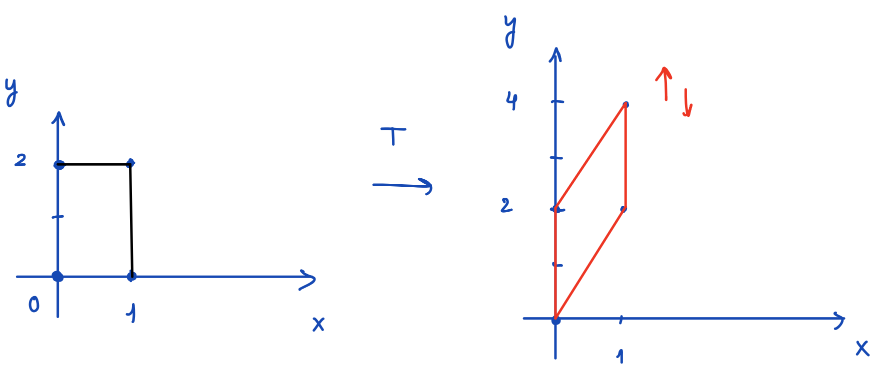
a) Deslizamiento cortante en la dirección del eje x con factor $k = 1$:



$T(0,0) = (0,0)$ $T(1,2) = (3,2)$

$T(0,2) = (2,2)$ $T(1,0) = (1,0)$

b) Deslizamiento cortante en la dirección del eje y con factor $k = 2$:



$T(0,0) = (0,0)$ $\qquad$ $T(1,2) = (1,4)$

$T(0,2) = (0,2)$ $\qquad$ $T(1,0) = (1,2)$

Ejercicio: Consideramos una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que consiste en una rotación de ángulo $\frac{7\pi}{6}$ respecto al eje x en sentido antihorario y, a continuación, una dilatación con $K = \frac{9}{2}$. Hallar la expresión de T y $T(2,0,1)$.

$$A = \underset{\text{dilatación}}{A_{T_2}} \cdot \underset{\text{rotación}}{A_{T_1}} = \frac{9}{2} \cancelto{1}{I} \cdot A_{T_1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{9\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{9\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{7\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} & \cos\frac{7\pi}{6} \end{pmatrix} \underset{\text{CALC. EN RAD!}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = K \cdot I = \frac{9}{2} I$$

$$T(x,y,z) = \left(\frac{9}{2}x, \ -\frac{9\sqrt{3}}{4}y + \frac{9}{4}z, \ -\frac{9}{4}y - \frac{9\sqrt{3}}{4}z \right)$$

$$\boxed{T(2,0,1) = \left(9, \ \frac{9}{4}, \ -\frac{9\sqrt{3}}{4} \right)}$$

Ejercicio: Determinar la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que realiza primero una rotación de $\theta = \frac{\pi}{4}$ (sentido antihorario) y después un deslizamiento cortante en la dirección del eje x.

Además, se verifica que : $T(-3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2,-2)$.

$$A = \underbrace{A_{T_2}}_{\text{desl.}} \cdot \underbrace{A_{T_1}}_{\text{rot.}} = \begin{pmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1+K & -1+K \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(-3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2, -2)$$

$$A \cdot \underset{\vec{v}}{\begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}} = \underset{\vec{v}\,'}{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1+k & -1+k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}} =$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1+k & -1+k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-3k-1+k \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2k \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad 2 = -4-2k \longrightarrow 2k = -6 \longrightarrow \boxed{k = -3}$$

$$-2 = -2$$

$$A_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = \left(-\sqrt{2}\cdot x - 2\sqrt{2}\,y,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot y\right)$$

Ejercicio: Obtener la matriz asociada a la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que primero aplica una rotación de ángulo $\frac{4\pi}{3}$ y a continuación realiza una simetría respecto al eje y. En caso de existir, encontrar un vector $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ perteneciente al subespacio $U = L\{(1,-\sqrt{3})\}$ tal que $T(\vec{u}) = (-10,0)$.

$$A_{T_1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_{T_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = A_{T_2} \cdot A_{T_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{3}y}{2}, \frac{-\sqrt{3}x-y}{2} \right)$$

Como $\vec{u} \in U$: $\vec{u} = \alpha(1, -\sqrt{3}) = (\alpha, -\alpha\sqrt{3}) = \boxed{(-5, 5\sqrt{3})}$

$$A \cdot \vec{u} = \vec{u}' \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

col

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\alpha = -10 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\alpha = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow 2\alpha = -10 \longrightarrow \alpha = \frac{-10}{2} = \underline{\underline{-5}}$$

✓