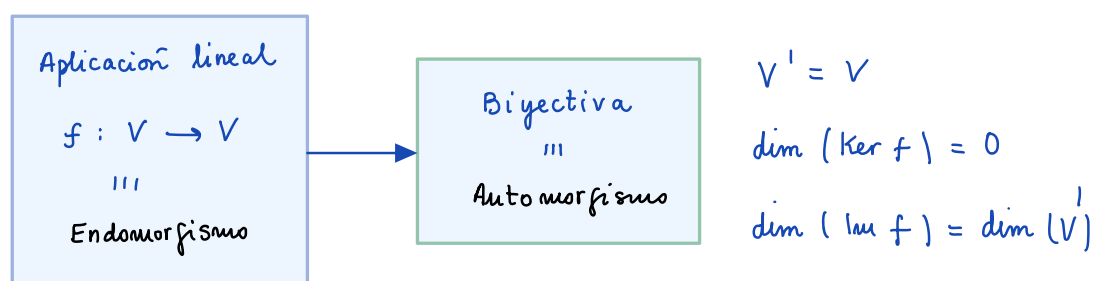
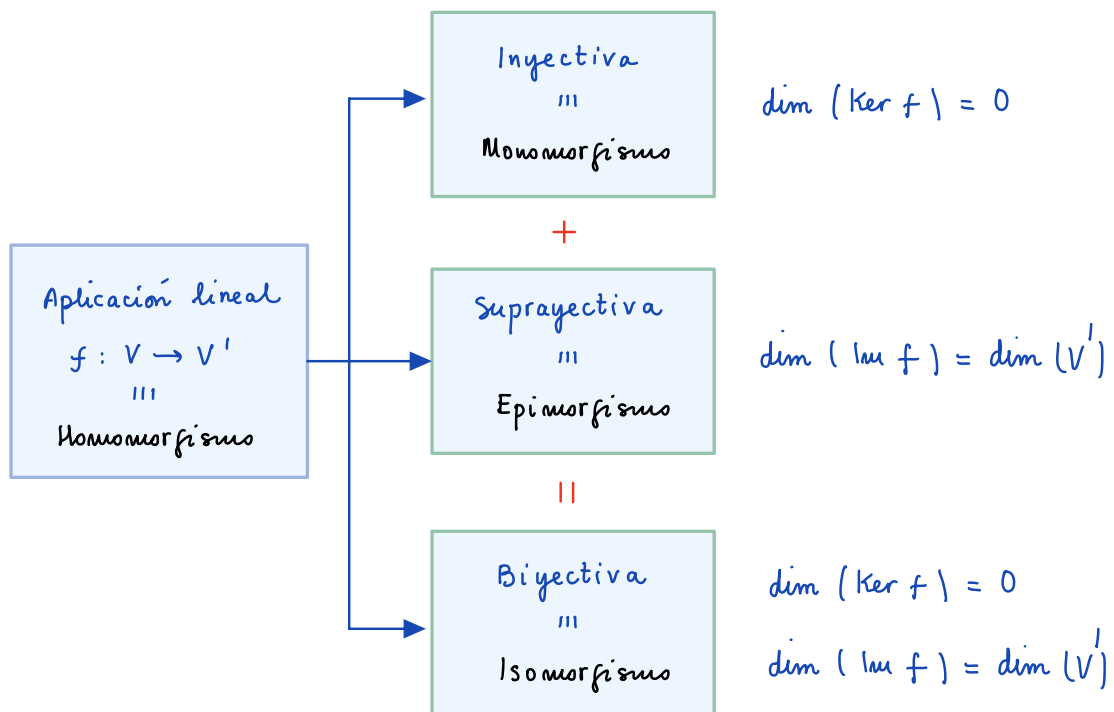


• Tipos de aplicaciones lineales :



Ejercicio: Clasificar las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y, x + z, 2y + z)$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (x + y + z, x, 0, 0)$.

- Existencia y unicidad de aplicaciones lineales:

Una aplicación lineal $f: V \rightarrow V'$ existe y es única si conocemos

las imágenes de los vectores de una base de V .

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \rightarrow \begin{array}{l} f(\vec{v}_1) \checkmark \\ f(\vec{v}_2) \checkmark \\ \vdots \\ f(\vec{v}_n) \checkmark \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{f existe y es \u00fanica} \\ \text{''''} \\ \text{f queda completamente} \\ \text{determinada} \end{array}$$

Ejercicio: Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumple:

$$f(-2, 1) = (1, 0, 1)$$

$$f(-1, 0) = (2, -1, 1)$$

- Verificar que f queda totalmente determinada por sus imágenes.
- Obtener la expresión analítica de f .

Ejercicio: Consideramos el endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que verifica:

$$f(1,1) = (1,-1) \quad \text{y} \quad f(1,0) = (3,2)$$

Verificar que f existe y es única. Hallar $f(5,2)$.

Ejercicio: Decidir si existe alguna aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal

que:

$$f(1,0,0) = (1,2,3)$$

$$f(1,1,1) = (0,0,1)$$

$$f(0,-1,-1) = (1,2,5)$$

• Matriz asociada a una aplicación lineal :

Dada una aplicación lineal $f: V \rightarrow V'$, la matriz asociada a f (en bases canónicas) es la matriz A cuyas columnas son las imágenes de la base canónica de V .

Ejemplo : Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $f(x, y) = (x - y, 0, 3x + 5y, 7y)$:

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= (1, 0, 3, 0) \\ f(0, 1) &= (-1, 0, 5, 7) \end{aligned} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \times 2 \\ \mathbb{R}^4 \leftarrow \mathbb{R}^2 \end{matrix}$$

A es la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas

$$C_2 = \{(1, 0), (0, 1)\} \text{ y}$$

$$C_4 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

* También podemos obtener la expresión analítica de f a partir de A :

Ejemplo : Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y la matriz asociada a f respecto de

la base canónica C_3 es:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \longrightarrow & f(x, y, z) = (x+z, y, x+2y+z) \end{matrix}$$

3×3
 $\mathbb{R}^3 \leftarrow \mathbb{R}^3$

Propiedades

* Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: A es $m \times n$.

* $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im } f) = \text{rg}(f)$

* A permite calcular $f(\vec{V})$: $A \cdot \vec{V}^t = f(\vec{V})^t$

$\uparrow \quad \uparrow$
se ponen en columnas

Ejercicio: Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Utilizar la matriz para clasificar f y calcular la imagen del vector $(2, 3)$.

* la matriz asociada permite calcular el núcleo y la imagen de f :

Ejercicio: Utilizando la matriz asociada a f respecto a la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular unas bases del núcleo e imagen de f .

- Matriz asociada y cambio de base :

Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal con matriz asociada A

en bases canónicas.

Si consideramos unas nuevas bases : $\begin{cases} \text{base } B \text{ de } V \\ \text{base } B' \text{ de } V' \end{cases}$

la matriz asociada a f respecto de las nuevas bases B y B'

se denota A' .

$$* \quad \vec{v} \xrightarrow{A} f(\vec{v})$$

$$A \cdot \vec{v}^t = f(\vec{v})^t$$

$$* \quad \vec{v}_B \xrightarrow{A'} f(\vec{v}_B)_{B'}$$

$$A' \cdot \vec{v}_B^t = f(\vec{v}_B)_{B'}^t$$

$\left\{ \begin{array}{l} A : \text{convierte un vector en canónicas a otro en canónicas.} \\ A' : \text{convierte un vector en base } B \text{ a otro en base } B'. \end{array} \right.$

Ejercicio: Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y) = (x + y, x - y, 0)$$

Calcular la matriz asociada a f en bases:

$$B = \{(1, 1), (1, -1)\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

$$B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Utilizar la matriz calculada para hallar la imagen de

$$\vec{v} = (5, 3) \text{ en coordenadas de } B'.$$