Ejercicio 1 (3 ptos). Resolver por factorización LU el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+4t&=14\\ 2x+y+4z+10t&=38\\ -x-3y+7z+5t&=31\\ x+2y+z+3t&=15 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 10 \\ -1 & -3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Prohibido $F_i \leftrightarrow F_j$

Solo $F_i \to F_i + k_{ij} F_j$

$F_2 \to F_2 - 2F_1$

$F_3 \to F_3 + F_1$

$F_4 \to F_4 - F_1$

$F_3 \to F_3 - 2F_2$

$F_4 \to F_4 + F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = U$$

$F_4 \to F_4 - \frac{1}{2} F_3$

$$A = L \cdot U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{U}$$

$$AX = B \longrightarrow \underbrace{LUX}_{Z} = B \longrightarrow \underset{?}{LZ} = B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}}_{Z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 38 \\ 31 \\ 15 \end{pmatrix}}_{B} \rightarrow \left.\begin{array}{l} z_1 = 14 \\ 2z_1 + z_2 = 38 \\ -z_1 + 2z_2 + z_3 = 31 \\ z_1 - z_2 + \frac{1}{2}z_3 + z_4 = 15 \end{array}\right\}$$

$$z_2 = 38 - 2z_1 = 38 - 2 \cdot 14 = 38 - 28 = 10$$

$$z_3 = 31 + z_1 - 2z_2 = 31 + 14 - 2 \cdot 10 = 25$$

$$z_4 = 15 - z_1 + z_2 - \frac{1}{2}z_3 = 15 - 14 + 10 - \frac{25}{2} = 11 - \frac{25}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\underset{?}{U}X = \underset{✓}{Z}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 25 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{Z} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z + 4t = 14 \\ -y + 2z + 2t = 10 \\ 4z + 5t = 25 \\ -\frac{3}{2}t = -\frac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$$\boxed{t = 1}$$

$$4z = 25 - 5t \qquad y = 2z + 2t - 10 \qquad x = 14 - y - z - 4t$$

$$z = \frac{25 - 5}{4} \qquad y = 10 + 2 - 10 \qquad x = 14 - 2 - 5 - 4$$

$$\boxed{z = 5} \qquad \boxed{y = 2} \qquad \boxed{x = 3}$$

Ejercicio 2 (4 ptos). En $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$U = L\{(1,0,1,0),(-1,0,0,1),(0,0,1,1)\}$$

$$W \equiv \begin{cases} x+y-t=0 \\ x-z+t=0 \end{cases}$$

a) Determinar una base del subespacio $U+W$ y una base del subespacio $U \cap W$.

b) Estudiar si los subespacios U y W son suplementarios en $\mathbb{R}^4$.

a) • <u>Base de U</u>: $B_U = \{(1,0,1,0),(0,0,1,1)\} \rightarrow \dim(U) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 + F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

• <u>Base de W</u>:

$$\left.\begin{matrix} x+y-t=0 \\ x-z+t=0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{I}} x = t-y \xrightarrow{\text{III}} x = t-2t+z = \underline{\underline{z-t}} \\ \xrightarrow{\text{II}} t-y-z+t = 0 \rightarrow y = \underline{\underline{2t-z}} \end{matrix}$$

$N^{\underline{o}}$ parámetros $= n^{\underline{o}}$ incógnitas $- N^{\underline{o}}$ ec. finales $= 4-2 = 2$ par. (α, β)

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = 2\beta - \alpha \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$(x,y,z,t) = (\alpha-\beta, 2\beta-\alpha, \alpha, \beta) = \alpha(1,-1,1,0) + \beta(-1,2,0,1)$$

son L.I

$B_W = \{(1,-1,1,0), (-1,2,0,1)\} \rightarrow \dim(W) = 2$

• <u>Base de $U+W$</u> : $\{B_U, B_W\} \rightarrow$ sistema generador de $U+W$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$F_3 \rightarrow F_3 - F_1$ $\qquad F_2 \leftrightarrow F_3$

$F_4 \rightarrow F_4 + F_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$F_4 \rightarrow F_4 + 2F_2$ $\qquad F_4 \rightarrow F_4 - F_3$

$$\boxed{B_{U+W} = \{(1,0,1,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,1)\}} \qquad \dim(U+W) = 3$$

• <u>Base de $U \cap W$</u> : C.L de B_U = C.L de B_W

$$\alpha(1,0,1,0) + \beta(0,0,1,1) = \gamma(1,-1,1,0) + \delta(-1,2,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \gamma - \delta \\ 0 = -\gamma + 2\delta \\ \cancel{\alpha + \beta = \gamma} \\ \beta = \delta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\mathrm{II}} \alpha = 2\delta - \delta = \delta \\ \xrightarrow{\mathrm{I}} \gamma = 2\delta \\ \xrightarrow{\mathrm{III}} \delta + \delta = 2\delta \\ \qquad 0 = 0 \quad \text{S.C.I} \end{array}$$

$N^{\underline{o}}$ par. = 4 inc − 3 ec. finales = 1 par. (t)

$$\begin{cases} \alpha = t \\ \beta = t \\ \gamma = 2t \\ \delta = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \xrightarrow[\substack{\alpha = 1 \\ \beta = 1}]{t = 1} \quad 1 \cdot (1,0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1,1) =$$

$$= \underset{\text{L.I}}{(1,0,2,1)}$$

$$\boxed{B_{U \cap W} = \{(1,0,2,1)\}} \qquad \dim(U \cap W) = 1$$

Comprobación : $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) =$

$$= 2 + 2 - 3 = 1 \ \checkmark$$

b) $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) = \dim(V)$?

$2 + 2 \neq 3 \rightarrow$ $\boxed{\text{U y W no son suplementarios en } \mathbb{R}^4}$

Ejercicio 3 (3 ptos). Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por las propiedades:

1. $f(0,1,0) = 2 \cdot f(1,0,0)$.
2. $f(\alpha, 3\alpha, -6\alpha) = (\alpha, \alpha, \alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Los vectores de la forma $(\beta, 0, -\beta)$ pertenecen al núcleo de f, para todo $\beta \in \mathbb{R}$.

Resolver los siguientes apartados sobre f:

a) Calcular la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar una base del núcleo de f y una base de la imagen de f.

c) ¿Podría f tener como núcleo el subespacio generado por $(1,0,-1)$ y $(0,1,-2)$, y como imagen el subespacio generado por $(1,1,1)$ y $(0,0,1)$? Razonar la respuesta.

a) Necesitamos conocer $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ y $f(0,0,1)$.

Sabemos que:

- $f(0,1,0) = 2 \cdot f(1,0,0)$ ✓
- $f(\alpha, 3\alpha, -6\alpha) = (\alpha, \alpha, \alpha) \xrightarrow{\text{si } \alpha = 1} f(1,3,-6) = (1,1,1)$
- $(\beta, 0, -\beta) \in \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\text{si } \beta = 1} f(1,0,-1) = (0,0,0)$

  $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ① \; f(1,3,-6) = f(1,0,0) + 3f(0,1,0) - 6f(0,0,1) = (1,1,1) \\ ② \; f(1,0,-1) = f(1,0,0) - f(0,0,1) = (0,0,0) \end{cases}$$

$\downarrow$

$f(0,0,1) = f(1,0,0)$ ✓

Sustituimos en 1 $f(0,1,0) = 2f(1,0,0)$ y $f(0,0,1) = f(1,0,0)$:

$$f(1,0,0) + \cancel{6f(1,0,0)} - \cancel{6f(1,0,0)} = (1,1,1)$$

$$f(1,0,0) = (1,1,1) \longrightarrow \text{por tanto: } \begin{cases} f(0,1,0) = (2,2,2) \\ f(0,0,1) = (1,1,1) \end{cases}$$

$$\boxed{A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

b) $f(x,y,z) = (x + 2y + z,\ x + 2y + z,\ x + 2y + z)$

- Base de Ker f :

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ \cancel{x + 2y + z = 0} \\ \cancel{x + 2y + z = 0} \end{array}\right\} \longrightarrow z = -x - 2y \longrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha - 2\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$N^{\underline{o}}$ par. = 3 inc − 1 ec = = 2 par (α, β).

$$(x,y,z) = (\alpha, \beta, -\alpha - 2\beta) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-2)$$

L.I

$$\boxed{B_{\text{Ker} f} = \{(1,0,-1),(0,1,-2)\}}$$

- Base de $\operatorname{Im} f$:

$$\operatorname{Im} f = L\{(1,1,1),(2,2,2),(1,1,1)\}$$

L.D

$$\boxed{B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,1,1)\}}$$

c) No, ya que f no cumpliría la fórmula de las dimensiones :

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$$

$$3 \neq 2 + 2$$