Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Tema 1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones

Fundamentos de Matemática Aplicada a la Inteligencia Artificial II

Kristian Alonso Stenberg
Miguel Lloret Climent

Departamento de Matemática Aplicada

Curso 2023 – 2024

Índice

Concepto de matriz

Matriz

Una **matriz** A es un conjunto de números ordenados en m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Dimensión** de una matriz: $m \times n$
- **Elementos** de una matriz: números a_{ij} $\begin{cases} \text{Subíndice } i \to \text{fila} \\ \text{Subíndice } j \to \text{columna} \end{cases}$
- **Subíndices:** $i = 1, 2, ..., m \quad j = 1, 2, ..., n$

Concepto de matriz

- **Notación** de una matriz:

$$A \qquad A = (a_{ij}) \qquad A = [a_{ij}] \qquad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Ejemplo

Consideremos la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- **Dimensión:** 3×4
- **Elementos:** $a_{11} = 4$, $a_{23} = 1, \ldots$
- **Fila 2:** $F_2 = (0 \quad 2 \quad 1 \quad 0)$
- **Columna 3:** $C_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Concepto de matriz

- **Conjunto de matrices** de dimensión $m \times n$: $\mathcal{M}_{m \times n}$
- En el ejemplo anterior: $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$

Ejercicios

1. Escribir una matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$ que cumpla lo siguiente:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (2j + 1)$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Matrices iguales

Matrices iguales

Dos matrices A y B son **iguales** si:

1. Tienen la misma dimensión: $m \times n$
2. Los elementos correspondientes coinciden: $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$.

Ejemplo

¿$A = B$? y ¿$C = D$?:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

- $A \neq B$ porque tienen distinta dimensión: $2 \times 1 \neq 1 \times 2$.
- $C = D$ solo si $x = 3$ e $y = 2$.

Matrices iguales

Ejercicios

❷ Determinar x e y para que las matrices A y B sean iguales:

$$A = \begin{pmatrix} 2x+1 & 3y \\ 0 & y^2-5y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x+3 & y^2+2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 2$, $y = 2$.

Clasificación de matrices

- **Matriz fila:** Tiene 1 fila y n columnas ($1 \times n$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- **Matriz columna:** Tiene m filas y 1 columna ($m \times 1$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matriz fila de 1×4 Matriz columna de 2×1

Clasificación de matrices

- **Matriz nula:** Todos sus elementos son 0. Se representa con: $\mathcal{O}$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Importante

Hay una matriz nula para cada dimensión:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim. 2×1 dim. 1×2 dim. 2×2

Clasificación de matrices

- **Matriz cuadrada:** Tiene mismo nº de filas y columnas ($m = n$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dimensión $n \times n$

$\parallel$

orden n

- **Matriz rectangular:** Matriz que no es cuadrada ($m \neq n$).

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada	Matriz cuadrada	Matriz rectangular
orden 2	orden 3	dim . 2×3

Tipos de matrices cuadradas

Diagonal principal y Traza

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada A está formada por todos los elementos a_{ii} $(i = 1, 2, \ldots n)$:

$$\{a_{11},\ a_{22}, \ldots,\ a_{nn}\}$$

La **traza** es la suma de los elementos de la diagonal principal:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Diagonal principal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$i = j$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -2 & 0 \\ 1 & \mathbf{-3} & 3 \\ 1 & 3 & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

D. ppal: $\{2, -3, 10\}$ $\quad \mathrm{tr}(A) = 9$

Tipos de matrices cuadradas

- **Matriz triangular superior:** Todos los elementos por debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i > j$$

$i > j$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ \mathbf{0} & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 14 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices cuadradas

- **Matriz triangular inferior:** Todos los elementos por encima de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad i<j \\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i < j$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \mathbf{0} \\ -1 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices cuadradas

- **Matriz diagonal:** Todos los elementos fuera de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

- **Matriz escalar:** Matriz diagonal con $a_{ii} = k$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal — Matriz escalar

Tipos de matrices cuadradas

- **Matriz identidad:** Matriz escalar con $a_{ii} = 1$. Se representa con: I

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Importante

Hay una matriz identidad para cada orden:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

orden 2   orden 3   orden 4

Tipos de matrices cuadradas

Ejercicios

3. Considerando la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & x+y & x-z \\ x-y & y & y+z \\ x+z-2 & z-y & z \end{pmatrix}$$

a) Calcular x, y, z para que la matriz A sea triangular superior.

b) Calcular x, y, z para que la matriz A sea triangular inferior.

c) Obtener las trazas de ambas matrices triangulares.

Tipos de matrices cuadradas

Ejercicios

Solución:

a) Triangular superior cuando $x = y = z = 1$:

$$T_{sup} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Triangular inferior cuando $x = z = a$, $y = -a$ $(a \in \mathbb{R})$:

$$T_{inf} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a & -a & 0 \\ 2a-2 & 2a & a \end{pmatrix}$$

c) $\mathrm{tr}(T_{sup}) = 3, \;\; \mathrm{tr}(T_{inf}) = a$

Operaciones con matrices

Suma y resta de matrices

La **suma y resta de dos matrices** A y B de la misma dimensión $m \times n$ es:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad A - B = (a_{ij} - b_{ij})$$

Las matrices suma $A + B$ y resta $A - B$ tienen dimensión $m \times n$.

Propiedades:

- Conmutativa: $A + B = B + A$
- Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Elemento neutro: $A + \mathcal{O} = A$
- Elemento opuesto: $A + (-A) = \mathcal{O}$

Operaciones con matrices

Importante

Si A y B tienen distinta dimensión no se pueden sumar ni restar.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad A - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$A + D \rightarrow$ No pueden sumarse

$B - D \rightarrow$ No pueden restarse

Operaciones con matrices

Producto de un número por una matriz

El **producto de un número** real k **por una matriz** A de dimensión $m \times n$ es:

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$$

La matriz resultado $k \cdot A$ tiene dimensión $m \times n$.

Propiedades:

- $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$
- $(k_1 \cdot k_2) \cdot A = k_1 \cdot (k_2 \cdot A)$
- $1 \cdot A = A$
- $0 \cdot A = \mathcal{O}$

Operaciones con matrices

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 & -4 \\ 14 & -2 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 5 \\ 26 & 13 & -34 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{Factor común}}{=} {\color{red}3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot I$$

Operaciones con matrices

Ejercicios

4. Calcular la matriz:

$$X = \frac{1}{6}\left(4A + 3B - 2I\right)$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & -19/6 & -1/2 \\ 0 & 10/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Producto de matrices

El **producto de dos matrices** A $(m \times n)$ y B $(n \times p)$ es la matriz:

$$C = A \cdot B = (c_{ij})$$

donde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} \quad \forall i, j$$

La matriz producto $C = A \cdot B$ tiene dimensión $m \times p$.

Importante

Para poder multiplicar A y B:

Nº de columnas de A = Nº de filas de B

Operaciones con matrices

- Se trata de multiplicar cada fila de A por cada columna de B:

$$
\underbrace{\begin{array}{r}
\text{Fila } 1 \\ \\ \text{Fila } i \\ \\ \\
\end{array}\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}}_{\substack{A \\ m \times n}}
\cdot
\underbrace{\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \text{Columna } 1 & & \text{Columna } j & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\
b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np}
\end{pmatrix}
\end{array}}_{\substack{B \\ n \times p}}
=
\underbrace{\begin{pmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1p} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & c_{ij} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
c_{m1} & \cdots & c_{mp}
\end{pmatrix}}_{\substack{C \\ m \times p}}
$$

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

$$\vdots$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

$$\vdots$$

Operaciones con matrices

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$:

$$A \cdot B = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-4) + 3\cdot 6 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot 0 + (-1)(-2) & 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Continuación del ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \underset{2\times {\color{red}3}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{{\color{red}2}\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

No pueden multiplicarse: ${\color{red}3} \neq {\color{red}2}$.

Importante

En general, el producto de matrices no es conmutativo:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Operaciones con matrices

Propiedades del producto de matrices:

- Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- Distributiva por la izda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Distributiva por la dcha: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- Elemento neutro: $I \cdot A = A \cdot I = A$
- Matriz nula: $\mathcal{O} \cdot A = A \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$
- Es posible que $A \cdot B = \mathcal{O}$ siendo $A \neq \mathcal{O}$ y $B \neq \mathcal{O}$

Operaciones con matrices

Ejercicios

5. Considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Verificar que: $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

b) ¿Por qué sucede lo anterior?

Operaciones con matrices

Ejercicios

Solución:

a) $(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 - B^2$

b) Porque, en general, el producto de matrices no es conmutativo:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Y como $AB \neq BA$, no podemos cancelar $-AB$ y $+BA$.

Por tanto, no obtenemos $A^2 - B^2$.

Matriz traspuesta

Matriz traspuesta

La **matriz traspuesta** A^t se obtiene al cambiar en la matriz A $(m \times n)$ las filas por las columnas:

$$A = (a_{ij}) \rightarrow A^t = (a_{ji})$$

La matriz traspuesta A^t tiene dimensión $n \times m$.

Propiedades:

- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- $(A^t)^t = A$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

Matriz traspuesta

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \text{-}5 & 1 \\ 0 & 3 & \text{-}2 \\ 1 & 2 & \text{-}4 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad \rightarrow \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \text{-}5 & 3 & 2 \\ 1 & \text{-}2 & \text{-}4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \text{-}3 & \text{-}5 \end{pmatrix}_{1\times 3} \quad \rightarrow \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-}3 \\ \text{-}5 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}_{2\times 1} \quad \rightarrow \quad D^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

Matriz traspuesta

- Una matriz cuadrada A es **simétrica** si: $A = A^t$

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \rightarrow$$

Los elementos simétricos a la diagonal principal son iguales

- Una matriz cuadrada A es **antisimétrica** si: $A = -A^t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Los elementos simétricos son opuestos

La diagonal principal tiene 0s

Matriz traspuesta

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Simétrica — Antisimétrica — Ni sim. ni antisim.

No lo olvides

Si A es una matriz cuadrada:

- La matriz $A + A^t$ es **simétrica**.
- La matriz $A - A^t$ es **antisimétrica**.
- $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$

Matriz traspuesta

Ejercicios

6. Encontrar todas las matrices, X, simétricas de orden 2 que verifiquen: $X^2 = I$.

Solución: Las matrices X pueden ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}$$

con $\quad -1 < a < 1$

Rango de una matriz

Dependencia lineal de filas

Una fila no nula F_i de una matriz **depende linealmente** (**D.L.**) de las filas F_{j1}, F_{j2},. . .,F_{jm} si:

$$F_i = k_1 F_{j1} + k_2 F_{j2} + \cdots + k_m F_{jm}$$

$$k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{R} \to \text{ no todos 0}$$

Es decir: F_i es **combinación lineal** de F_{j1}, F_{j2},. . .,F_{jm}.

Independencia lineal de filas

Una fila de una matriz es **linealmente independiente** (**L.I.**) cuando no depende linealmente de otras filas.

Rango de una matriz

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad F_2 = -2 \cdot F_1 \rightarrow F_2 \text{ D.L. de } F_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \qquad F_2 \neq k \cdot F_1 \ \rightarrow F_1 \text{ y } F_2 \text{ son L.I.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} F_2 \neq k \cdot F_1 \ \rightarrow F_1 \text{ y } F_2 \text{ son L.I.} \\[1em] F_3 = 2 \cdot F_1 + F_2 \rightarrow F_3 \text{ D.L. de } F_1 \text{ y } F_2 \end{array}$$

Recuerda

Las definiciones anteriores también son válidas para las columnas.

Rango de una matriz

Rango de una matriz

El **rango de una matriz** A, $\mathrm{rg}(A)$, es el nº de filas o de columnas no nulas L.I.

Ejemplo

Las filas que D.L. y las nulas no cuentan para el rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} F_2 \text{ D.L. de } F_1 \\ F_3 \text{ es nula} \end{array}\right] \rightarrow \mathrm{rg}(A) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \quad F_1 \text{ y } F_2 \text{ son L.I.} \rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad F_3 \text{ D.L. de } F_1 \text{ y } F_2 \rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2$$

Rango de una matriz

Para calcular el rango usamos: Método de Gauss o Determinantes.

1. **Método de Gauss:** $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$

   Convertimos la matriz A en una triangular con 0s bajo la diagonal. Para ello, aplicamos operaciones elementales sobre filas:

   i) $F_i \leftrightarrow F_j$

   ii) $F_i \rightarrow aF_i \quad (a \neq 0)$

   iii) $F_i \rightarrow aF_i + bF_j \quad (a, b \neq 0)$

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{nº de filas } \textbf{no nulas} \text{ de la matriz triangular}}$$

Rango de una matriz

Recuerda

- Podemos aplicar operaciones elementales sobre columnas.
- Si la matriz tiene más filas que columnas: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$
- $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min\{m, n\}$
- $\mathrm{rg}(A \cdot B) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$

Ejemplo

Mediante el método de Gauss, calcular el rango de A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

Continuación del ejemplo

$$\underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_4 \to F_4 - 3F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & -13 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_3 \to F_3 + 6F_2 \\ F_4 \to F_4 - 13F_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 30 & -32 \\ 0 & 0 & -60 & 64 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 + 2F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 30 & -32 \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(A) = 3$$

Rango de una matriz

Ejercicios

7. Calcular el rango de A según los valores del parámetro λ. Utilizar el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 10 \\ -1 & \lambda & -6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Si $\lambda = 3 \rightarrow \text{rg}(A) = 2$

Si $\lambda \neq 3 \rightarrow \text{rg}(A) = 3$

Rango de una matriz

❷ Rango por determinantes:

Menor de orden k de una matriz A

Es el **determinante** formado por los elementos que pertenecen a k filas y k columnas de A.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- Menores de **orden 1**: $-1, 0, 0, 2, -2, \ldots, 6, -2$
- Menores de **orden 2**:

$$\begin{matrix} F_1 & F_2 \\ C_1 & C_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \text{-1} & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{matrix} F_1 & F_2 \\ C_1 & C_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \text{-1} & 0 \\ 3 & \text{-1} \end{vmatrix} = 1 \ldots$$

Rango de una matriz

Continuación del ejemplo

$$\begin{array}{cc} F_1 & F_3 \\ C_1 & C_2 \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \ldots, \quad \begin{array}{cc} F_2 & F_3 \\ C_4 & C_5 \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

- Menores de **orden 3**:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \ldots$$

$$\begin{array}{ccc} F_1 & F_2 & F_3 \\ C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

- No hay menores de **orden** ≥ 4.

Rango de una matriz

❷ Rango por determinantes:

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \text{ orden del mayor menor } \textbf{no nulo} \text{ de } A}$$

Ejercicios

❽ Calcular el rango de la matriz a partir de sus menores:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\mathrm{rg}(A) = 3$

❾ Resolver el ejercicio 7 utilizando menores.

Matriz inversa

Matriz inversa

La **matriz inversa** A^{-1} de una matriz cuadrada A (orden n) verifica que:

$$A \cdot A^{-1} = I \qquad \text{y} \qquad A^{-1} \cdot A = I$$

La matriz inversa A^{-1}, si existe, tiene orden n y es única.

- A es invertible o regular cuando tiene inversa.
- A es singular cuando no tiene inversa.

Propiedades:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$ $(k \neq 0)$

Matriz inversa

Recuerda

- Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa.
- Una matriz cuadrada A (orden n) tiene inversa si:

$$\mathrm{rg}(A) = n \qquad \equiv \qquad |A| \neq 0$$

Ejemplo

Hallar A^{-1}, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Por definición, se cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Continuación del ejemplo

$$\begin{pmatrix} a+4c & b+4d \\ -a-3c & -b-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} a+4c&=1 \\ -a-3c&=0 \\ b+4d&=0 \\ -b-3d&=1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a&=-3 \\ c&=1 \\ b&=-4 \\ d&=1 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Matriz inversa

A^{-1} suele hallarse por: Método de Gauss-Jordan o Determinantes.

1. **Método de Gauss-Jordan:** $(A \,|\, I) \sim (I \,|\, A^{-1})$

   i) Escribimos la matriz: $(A \,|\, I)$.

   ii) Aplicamos operaciones elementales para convertir A en I.

   iii) La matriz resultante de la derecha será A^{-1}.

Ejemplo

Hallar A^{-1}, si existe, aplicando el método de Gauss-Jordan, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Continuación del ejemplo

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1 \to 2F_1 + F_2 \\ F_3 \to 6F_3 - F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

Matriz inversa

Continuación del ejemplo

$$\underset{\substack{F_1 \to 3F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 4 & 4 & -6 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1 \to \frac{1}{6}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{6}F_2 \\ F_3 \to \frac{1}{3}F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{array}\right) = (I \mid A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Ejercicios

10. En caso de existir, calcular las matrices inversas de A y B mediante Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -19 & 3 & 11 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

B^{-1} no existe (B es singular).

Matriz inversa

❷ Inversa por determinantes:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,(A)^t \qquad |A| \neq 0}$$

- adj(A): **Matriz adjunta** de A $\quad\rightarrow\quad$ $\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

A_{ij}: adjuntos de los elementos a_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Signo

Menor complementario de a_{ij}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Matriz inversa

Ejemplo

Utilizando determinantes, calcular la matriz inversa de A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - (0 - 2 + 0) = 3$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Continuación del ejemplo

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

Matriz inversa

Continuación del ejemplo

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Recuerda

Si A es una matriz 2×2 y $|A| \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Ejercicios

11. Utilizando determinantes, calcular las inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Matriz inversa

Ejercicios

⓬ Hallar el valor de a para que la siguiente matriz sea invertible:

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz será invertible cuando $a \neq -1$ y $a \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Ecuaciones matriciales

Ecuaciones matriciales

Una **ecuación matricial** es una ecuación en la que todos sus términos (A, B, C, X) son matrices. Ejemplos:

$$AX = B \qquad XA = B \qquad AX + B = C$$

Resolverla es hallar la matriz incógnita X que verifica la ecuación.

Ejemplo

Comprobar que X es solución de la ecuación $AX = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \; X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} \text{ y } B = 2I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X \text{ es solución } \checkmark$$

Ecuaciones matriciales

¿Cómo resolver una ecuación matricial?

- Aplicamos operaciones y propiedades de matrices.
- Una matriz **NO** puede pasar a **dividir** al otro lado del "$=$":

$$AX = B \to \cancel{X = \frac{B}{A}}$$

- En su lugar, **multiplicamos** por su **inversa**, respetando el orden:

$$\begin{array}{lcc r} & AX = B & XA = B & \\ \text{Por la izda.} & A^{-1}AX = A^{-1}B & XAA^{-1} = BA^{-1} & \text{Por la dcha.} \\ & IX = A^{-1}B & XI = BA^{-1} & \\ & X = A^{-1}B & X = BA^{-1} & \end{array}$$

Ecuaciones matriciales

Ejercicios

13. Resolver la ecuación matricial:

$$B(2A+I) = AXA + B$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones matriciales

Ejercicios

14. Resolver la ecuación matricial:

$$BAX + AX = C - I - 2DAX$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones matriciales

Sistema de ecuaciones matriciales

Si unimos 2 o más ecuaciones matriciales, tenemos un **sistema de ecuaciones matriciales**. Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} AX + BY = C \\ DX + EY = F \end{array}\right\}$$

Resolverlo es hallar las matrices incógnita $X, Y, \ldots$ que cumplen todas las ecuaciones.

Ejercicios

15 Resolver el sistema matricial:

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = A \\ 5X - 2Y = B \end{array}\right\} \text{ donde: } A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones matriciales

Ejercicios

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

16 Resolver el sistema matricial: $\left.\begin{array}{r} X^t + AY = B \\ X + Y^t C = D \end{array}\right\}$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Índice

Ecuaciones lineales

Ecuación lineal

Una **ecuación lineal** es una igualdad de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Donde:

- Incógnitas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — Tienen exponente 1
- Coeficientes: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — Constantes
- Término independiente: b — Constante

- La **solución** de una ecuación lineal son los valores:

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$$

que verifican la ecuación.

Ecuaciones lineales

Ejemplo

Considerando la ecuación lineal $x + 2y - 3z = 6$:

- **Incógnitas:** x, y, z
- **Coeficientes:** 1, 2, -3, respectivamente.
- **Término independiente:** 6

- **Es solución** $x = 5$, $y = 2$, $z = 1$, ya que:

$$5 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 6 \ \checkmark$$

- **No es solución** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, ya que:

$$1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -4 \neq 6$$

Ecuaciones lineales

Recuerda

- Una ecuación lineal con más de 1 incógnita, tiene ∞ soluciones.
- Para resolverlas tomamos parámetros $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$:

$$\text{N}^{\text{o}} \text{ Parámetros} = \text{N}^{\text{o}} \text{ Incógnitas} - \text{N}^{\text{o}} \text{ Ecuaciones}$$

Ejemplo

Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

- **1 incógnita:**

$2x = 5 \rightarrow$ Solución: $x = \frac{5}{2}$

$0y = 3 \rightarrow 0 = 3 \rightarrow$ No tiene solución

$0z = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Solución: $z \in \mathbb{R}$

Ecuaciones lineales

Continuación del ejemplo

- **2 incógnitas:**

$$x + 2y = 4 \to x = 4 - 2y \xrightarrow[\alpha]{\text{1 par.}} \begin{cases} x = 4 - 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Para $\alpha = 0 \to$ Solución: $x = 4, \; y = 0$

- **3 incógnitas:**

$$3x + 2y - z = 3 \to z = 3x + 2y - 3 \xrightarrow[\alpha, \beta]{\text{2 par.}} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 3\alpha + 2\beta - 3 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Para $\alpha = 1$ y $\beta = 0 \to$ Solución: $x = 1, \; y = 0, \; z = 0$

Sistema de ecuaciones lineales

Sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

Donde:

- Incógnitas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — Tienen exponente 1
- Coeficientes: $a_{11}, a_{12} \ldots a_{mn}$ — Constantes
- Términos independientes: $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — Constantes

Sistema de ecuaciones lineales

- La **solución** de un sistema de ecuaciones lineales son los valores:

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$$

que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Ejemplo

En el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 4z + 3t = 5 \\ 2x + 3y + z - 2t = 1 \\ x + 2y - 5z + 4t = 3 \end{array}\right\}$$

- **Es solución** $x = -8$, $y = 6$, $z = 1$, $t = 1$, ya que:

$$\left.\begin{array}{r} -8 + 6 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \\ 2(-8) + 3 \cdot 6 + 1 - 2 \cdot 1 = 1 \\ -8 + 2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 3 \end{array}\right\}$$

Sistema de ecuaciones lineales

Continuación del ejemplo

- **No es solución** $x = -10$, $y = 5$, $z = 1$, $t = 2$, ya que:

$$\left.\begin{array}{r} -10 + 5 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 5 \\ 2(-10) + 3 \cdot 5 + 1 - 2 \cdot 2 = -8 \neq 1 \end{array}\right\}$$

- **Clasificación de sistemas:** según sus soluciones

$$\begin{cases} \text{Compatible} \rightarrow \text{Tiene solución} & \begin{cases} \text{Determinado} \rightarrow 1 \text{ solución} \\ \text{Indeterminado} \rightarrow \infty \text{ soluciones} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatible} \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales

No lo olvides

- Podemos resolverlos por reducción, sustitución o igualación.
- Al resolver un SCI con ∞ soluciones: tomamos parámetros.

Ejercicios

17 Resolver y clasificar los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} y - z = 0 \\ x - 3z = -1 \\ -x + 3y = 1 \end{array}\right\}$

Sistema de ecuaciones lineales

Ejercicios

Solución:

a) SCD $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ **b)** SI $\rightarrow$ No tiene solución

c) SCI $\begin{cases} x = 3\alpha - 1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Forma matricial de un sistema

- Un sistema puede escribirse en **forma matricial**:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B} \longrightarrow AX = B$$

Matriz de coeficientes — Matriz de incógnitas — Matriz de términos indep.

Forma matricial de un sistema

- **Solución del sistema**: $X = A^{-1}B \quad$ (si A^{-1} existe).
- Por otro lado, la **matriz ampliada** del sistema se define como:

$$A^* = (A \,|\, B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo

Consideremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 4z + 7t = 4 \\ 3x - 5y + 6z - 8t = 8 \\ 4x - 3y - 2z + 6t = 11 \end{array}\right\}$$

Forma matricial de un sistema

Continuación del ejemplo

Su **forma matricial** es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & -5 & 6 & -8 \\ 4 & -3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Y su **matriz ampliada** es:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 7 & 4 \\ 3 & -5 & 6 & -8 & 8 \\ 4 & -3 & -2 & 6 & 11 \end{array}\right)$$

Método de Gauss para resolver sistemas

- El **método de Gauss** es útil para resolver sistemas de ecuaciones.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \rightarrow$$

Sistema escalonado

(sustitución)

Método de Gauss para resolver sistemas

i) Escribimos la matriz ampliada del sistema: A^*

ii) Hacemos 0s bajo la diagonal principal de A^*.

iii) Obtenemos un sistema escalonado equivalente.

iv) Resolvemos el sistema escalonado por sustitución (de abajo hacia arriba).

Recuerda

- En un sistema **escalonado** cada ecuación tiene menos incógnitas que la anterior.
- Dos sistemas son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Método de Gauss para resolver sistemas

- **Discusión de un sistema:**

  Discutir un sistema es decir si es: SCD, SCI o SI.

  ¿Cómo discutir un sistema por Gauss?

  Finalizado el método de Gauss, nos fijamos en la matriz final:

a) Si aparece alguna fila del tipo $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{array}\right)$ $b \neq 0$: **SI**

b) Si no hay filas del tipo $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{array}\right)$ $b \neq 0$:

  b1) Si Nº de filas = Nº de incógnitas: **SCD**

  b2) Si Nº de filas < Nº de incógnitas: **SCI**

Método de Gauss para resolver sistemas

Ejercicios

18. Usando el método de Gauss, discutir y resolver los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{aligned} x+3y+z&=-3\\ 3x+9y+4z&=-7\\ 2x-y+z&=6 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x+3y-z+t&=1\\ -2x+y+2z&=7\\ y-t&=0 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 2x+y+z&=0\\ 2x-2y+2z&=3 \end{aligned}\right\}$$

Método de Gauss para resolver sistemas

Ejercicios

Solución:

a) SCD $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$

b) SCI $\begin{cases} x = \alpha - 3 \\ y = 1 \\ z = \alpha \\ t = 1 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

c) SI $\rightarrow$ No tiene solución

Método de Gauss para resolver sistemas

Ejercicios

19 Aplicando el método de Gauss, discutir y resolver el sistema en función del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= -4 \\ x - y + (a+2)z &= -3a - 5 \\ 4x + 2y + (a+6)z &= -3a^2 - 8 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$: SI
- Si $a = 1$: SCD $\rightarrow x = 2,\ y = 1,\ z = -3$
- Si $a = 0$: SCI $\rightarrow x = 7 - 5\alpha,\ y = \alpha,\ z = 3\alpha - 6\ (\alpha \in \mathbb{R})$

Teorema de Rouché-Fröbenius

Teorema de Rouché-Fröbenius

En un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n incógnitas:

- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = n \Leftrightarrow$ **SCD**
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) < n \Leftrightarrow$ **SCI**
- Si $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*) \Leftrightarrow$ **SI**

Ejercicios

20. Discutir los sistemas del ejercicio 18 mediante el Teorema de Rouché-Fröbenius.

    Nota: Aprovechar la matriz final obtenida en los 3 sistemas por el método de Gauss.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Ejercicios

Solución:

a) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 3 = n \rightarrow \mathrm{SCD}$

b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 3 < 4 = n \rightarrow \mathrm{SCI}$

c) $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq \mathrm{rg}(A^*) = 3 \rightarrow \mathrm{SI}$

21. Estudiar mediante menores y aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius la compatibilidad del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3 \\ y + 2z &= 2 \\ 3x + 2y &= 1 \\ 5x + 7y + 6z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $\mathrm{rg}(A) = 3 \neq \mathrm{rg}(A^*) = 4 \rightarrow \mathrm{SI}$

Sistemas homogéneos

Sistemas homogéneos

Un sistema es **homogéneo** si todos los términos independientes son 0:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

- Un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$$

- Un sistema homogéneo siempre tiene solución: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*)$

Sistemas homogéneos

1. Si $\mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ **SCD** $\rightarrow$ Solo tiene la solución trivial.
2. Si $\mathrm{rg}(A) < n \Leftrightarrow$ **SCI** $\rightarrow$ Tiene ∞ soluciones.

Ejercicios

22. Discutir y resolver el sistema homogéneo según el parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 4x - 5y + az = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

- Si $a \neq -8$: SCD $\rightarrow$ Solución trivial
- Si $a = -8$: SCI $\rightarrow x = \alpha/3,\ y = -4\alpha/3,\ z = \alpha\ (\alpha \in \mathbb{R})$

Factorización LU

Factorización LU

La **factorización LU** de una matriz cuadrada A (orden n) consiste en hallar dos matrices triangulares L y U (orden n), tales que:

$$A = L \cdot U$$

- L: Matriz triangular inferior con 1s en la diagonal principal.
- U: Matriz triangular superior.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}}_{U}$$

Factorización LU

Importante

- Si todos los menores principales de A son $\neq 0$: única LU existe.
- Si algún menor principal es 0 salvo $|A| \neq 0$: LU no existe.

Ejemplo

- Menores principales de A (orden 3): A_1, A_2 y A_3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A_1 = a_{11} \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad A_3 = |A|$$

Si $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ y $A_3 \neq 0$, la factorización LU existe y es única.

Si $A_1 = 0$ o $A_2 = 0$ pero $A_3 \neq 0$, la factorización LU no existe.

Factorización LU

¿Cómo obtener las matrices L y U?

- Cálculo de U: Aplicamos el método de Gauss modificado sobre A.

$$A \sim \cdots \sim U$$

$F_i \leftrightarrow F_j$ ✗ Prohibido intercambiar filas

$F_i \rightarrow F_i + k_{ij} \cdot F_j$ ✓ Solo usar este tipo de operaciones

- Cálculo de L: Bajo su diagonal se ponen los multiplicadores $-k_{ij}$.

$$L = (l_{ij}) \rightarrow l_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i = j \\ -k_{ij} & i > j \end{cases} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Ejercicios

23 Determinar la factorización LU de las matrices:

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 8 & 1 \\ -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{4} \end{pmatrix}$

c) No admite factorización LU, ya que: $A_2 = 0$ y $A_3 \neq 0$.

Factorización LU

Aplicaciones de la factorización LU

- Calcular el determinante de A: puede calcularse de forma sencilla.

$$A = L \cdot U$$
$$|A| = |L \cdot U| = |L| \cdot |U| = 1 \cdot |U| = |U|$$

- Resolver sistemas: solo para SCD con n ecuaciones y n incógnitas.

$$AX = B \Rightarrow L \underbrace{UX}_{Z} = B \Rightarrow L\boxed{Z} = B$$ Sistema triangular

?

$$U\boxed{X} = \boxed{Z}$$ Sistema triangular

? ✓

X es la solución de $AX = B$

Factorización LU

Ejercicios

24 Utilizando la factorización LU del ejercicio 23b, obtener $|A|$ y resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y + 5z &= 4 \\ -4y + 7z &= 1 \\ -x - 2y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$|A| = 1 \cdot (-4)\left(-\frac{11}{4}\right) = 11 \qquad \text{SCD}\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Factorización LU

LU vs Gauss para resolver sistemas

- LU es aprox. igual que Gauss si resolvemos 1 sistema: $AX = B$

1 sistema	Nº operaciones	Nº operaciones aprox. si n es grande
Gauss	$\underbrace{\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}}_{\text{Triangular matriz}} + \underbrace{n^2}_{\text{Resolver sistema tr.}}$	$\approx \frac{2n^3}{3}$
LU	$\underbrace{\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}}_{\text{Factorización}} + \underbrace{n^2 - n}_{\text{Resolver sistema tr. (1s en diagonal)}} + \underbrace{n^2}_{\text{Resolver sistema tr.}}$	$\approx \frac{2n^3}{3}$

Si $n = 50$: Gauss $\rightarrow$ 87025 op. LU $\rightarrow$ 89475 op. $(+2.8\%)$ $\frac{2n^3}{3} \rightarrow$ 83333 op.

Factorización LU

- Pero LU es mucho más eficiente si resolvemos p sistemas del tipo:

$$AX = B_1,\ AX = B_2, \ldots,\ AX = B_p$$

p sistemas	Nº operaciones	Nº operaciones aprox. si n es grande
Gauss	$p\left(\underbrace{\frac{2n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{6}}_{\text{Triangular matriz}} + \underbrace{n^2}_{\text{Resolver sistema tr.}}\right)$	$\approx p\cdot\frac{2n^3}{3}$
LU	$\underbrace{\frac{2n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{6}}_{\text{Factorización (1 vez)}} + p\left(\underbrace{n^2-n}_{\text{Resolver sistema tr. (1s en diagonal)}} + \underbrace{n^2}_{\text{Resolver sistema tr.}}\right)$	$\approx \frac{2n^3}{3}$

Si $p = 3$ y $n = 50$: Gauss $\rightarrow$ 261075 op. LU $\rightarrow$ 99375 op. (-62%)

Factorización de Cholesky

Factorización de Cholesky

La **factorización de Cholesky** de una matriz A simétrica definida positiva (orden n) es hallar una matriz Q (orden n) tal que:

$$A = Q \cdot Q^t$$

- Q: Matriz triangular inferior con elementos de la diagonal > 0.

- A es **definida positiva** si sus menores principales son positivos:

$$A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ \ldots,\ A_n > 0$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{array}{l} A_1 = 1 > 0,\ A_2 = 4 > 0,\ A_3 = 4 > 0 \\ A \text{ es simétrica definida positiva (s.d.p)} \checkmark \end{array}$$

Factorización de Cholesky

Importante

- Si A es s.d.p: la factorización de Cholesky existe y es única.
- Si A no es s.d.p: la factorización de Cholesky no existe.

Ejemplo

Como A es s.d.p, la factorización de Cholesky existe y es única:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q^t}$$

Factorización de Cholesky

¿Cómo obtener la matriz Q?

- Calculamos la factorización $A = LU$ y luego la matriz $D^{\frac{1}{2}}$:

$$Q = L \cdot D^{\frac{1}{2}}$$

$$D = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{u_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$$

Factorización de Cholesky

¿Cómo obtener la matriz Q?

- Existe también un algoritmo para calcular Q directamente:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$q_{ii} = \begin{cases} \sqrt{a_{11}} & i = 1 \\ \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ik}^2} & i = 2, 3, \ldots, n \end{cases} \qquad q_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{i1}}{q_{11}} & \begin{array}{l} j = 1 \\ i = 2, 3, \ldots, n \end{array} \\ \dfrac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} q_{ik} q_{jk} \right)}{q_{jj}} & \begin{array}{l} j = 2, 3, \ldots, n \\ i = j+1, \ldots, n \end{array} \end{cases}$$

Factorización de Cholesky

Ejercicios

25 Calcular la factorización de Cholesky de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A = Q \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = Q \cdot Q^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) No admite factorización de Cholesky: es simétrica pero no d.p.

Factorización de Cholesky

Aplicaciones de la factorización de Cholesky

- Calcular el determinante de A:

$$A = Q \cdot Q^t$$
$$|A| = \left|Q \cdot Q^t\right| = |Q| \cdot \left|Q^t\right| = |Q| \cdot |Q| = |Q|^2$$

- Resolver sistemas: solo si la matriz A del sistema es s.d.p.

$$AX = B \Rightarrow Q \underbrace{Q^t X}_{Z} = B \Rightarrow Q \underset{?}{Z} = B$$ Sistema triangular

$$Q^t \underset{?}{X} = Z \checkmark$$ Sistema triangular

X es la solución de $AX = B$

Factorización de Cholesky

Ejercicios

26 Utilizando la factorización de Cholesky del ejercicio 25b, obtener $|A|$ y resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y+14z=14 \\ 2x+17y-5z=-101 \\ 14x-5y+83z=155 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$|A|=(2\cdot 4\cdot 5)^2=1600 \quad \text{SCD}\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=-6 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Factorización de Cholesky

Cholesky vs LU para resolver sistemas

- En 1 sistema: Cholesky $\approx$ doble de eficiente que LU y Gauss.

1 sistema	Nº operaciones	Nº operaciones aprox. si n es grande
Cholesky	$\underbrace{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}_{\text{Factorización (algoritmo)}} + \underbrace{2n^2}_{\text{Resolver 2 sistemas tr.}}$	$\approx \frac{n^3}{3}$
Gauss	$\frac{2n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{6}+n^2$	$\approx \frac{2n^3}{3}$
LU	$\frac{2n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{6}+n^2-n+n^2$	$\approx \frac{2n^3}{3}$

Factorización de Cholesky

- En p sistemas del tipo $AX = B_1,\ AX = B_2,\ \ldots,\ AX = B_p$:

  Cholesky $\approx$ doble de eficiente que LU y $2p$ veces más que Gauss.

p sistemas	Nº operaciones	Nº operaciones aprox. si n es grande
Cholesky	$\underbrace{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}_{\text{Factorización (1 vez)}} + \underbrace{p \cdot 2\,n^2}_{\text{Resolver 2 sistemas tr.}}$	$\approx \frac{n^3}{3}$
Gauss	$p\left(\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6} + n^2\right)$	$\approx p \cdot \frac{2n^3}{3}$
LU	$\frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6} + p\left(n^2 - n + n^2\right)$	$\approx \frac{2n^3}{3}$