Ejercicio: Determinar unas ecuaciones paramétricas, una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$U = \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

- Suma e intersección de subespacios :

Si U y W son subespacios vectoriales de V :

Suma : $\boxed{U+W = \{\vec{u}+\vec{w} \,/\, \vec{u}\in U,\ \vec{w}\in W\}}$

Intersección : $\boxed{U\cap W = \{\vec{v}\in V \,/\, \vec{v}\in U,\ \vec{v}\in W\}}$

* $U+W$ y $U\cap W$ son subespacios vectoriales de V.

* Si $U\cap W = \{\vec{0}\}$: $U\oplus W$ suma directa

$\downarrow$

$\dim(U\cap W) = 0$

* Fórmula de Grassmann :

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U\cap W)}$$

$$\dim(U\oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$$

$\uparrow$

$\dim(U\cap W) = 0$

Cálculo de $U+W$

$\{B_U, B_W\} \rightarrow$ Sist. generador de $U+W$

Cálculo de $U \cap W$

$\left.\begin{array}{l}\text{Ec. implícitas de } U \\ \text{Ec. implícitas de } W\end{array}\right\} \rightarrow$ Ec. implícitas de $U \cap W$

o

$\left.\begin{array}{l} B_U \\ B_W \end{array}\right]$ C.L de B_U = C.L de B_W

$\downarrow$

Base de $U \cap W$

Ejercicio: En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = L\{(1,0,0,1),(1,1,1,1),(0,2,2,0)\}$$

$$W \equiv \left\{\begin{array}{l} 3x + y - z - 3t = 0 \\ y - t = 0 \end{array}\right.$$

Determinar una base del subespacio $U+W$ y una base del subespacio $U \cap W$.

* U y W son subespacios suplementarios en V si:

$$\boxed{U \oplus W = V} \rightarrow \begin{cases} ① \ U \cap W = \{\vec{0}\} \\ ② \ \dim(U) + \dim(W) = \dim(V) \end{cases}$$

Si tenemos las ec. imp. de U y W

* U y W son subespacios suplementarios en V si:

$$\boxed{\dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) = \dim(V)}$$

Si tenemos los sist. gen de U y W.

Ejercicio: Se consideran los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = L\{(1,0,1)\}$$

$$U_2 = L\{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

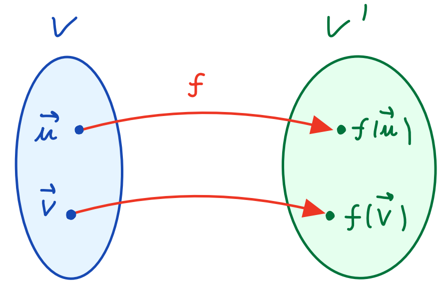
$$U_3 = L\{(1,0,0),(0,0,1)\}$$

Estudiar si son subespacios suplementarios en $\mathbb{R}^3$:

a) U_1 y U_2. b) U_1 y U_3. c) U_2 y U_3.

Ejercicio: Se considera el subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^5$, engendrado por los vectores $(1,2,-1,1,0)$, $(1,3,0,-1,1)$ y $(0,1,1,-2,1)$. Hallar unas ecuaciones paramétricas de un subespacio suplementario W.

3. APLICACIONES LINEALES :



- Aplicación lineal :

Sean V y V' dos e.v. La aplicación $f: V \longrightarrow V'$ es una aplicación lineal si se cumple :

1. $f(\vec{0}) = \vec{0}$
2. $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \qquad (\forall \vec{u}, \vec{v} \in V)$
3. $f(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot f(\vec{u}) \qquad (\forall \vec{u} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R})$

Las condiciones anteriores son equivalentes a la siguiente :

$$f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$$

* Aplicación lineal ≡ Homomorfismo / Transformación lineal

Ejemplo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, definida por :

$f(x,y) = (-x+5y, 2x, 0)$ → Expresión analítica de f

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$f(x, y, z) = (3x - 2z,\ x - y + z)$$

a) Calcular $f(\vec{x})$ y $f(\vec{y})$, siendo $\vec{x} = (2, -1, 1)$ e $\vec{y} = (1, 2, -5)$.

b) Comprobar que f es una aplicación lineal.

* ¿Cómo saber fácilmente si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es aplicación lineal?

En la expresión analítica de f, todas las componentes deben ser ecuaciones lineales homogéneas.

Ejemplo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde: $f(x,y) = (\underset{✓}{x+y}, \underset{✗}{x \cdot y})$ NO es a.l.

Ejemplo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde: $f(x,y) = (\underset{✗}{x+2}, \underset{✓}{3x-y})$ NO es a.l.

Ejemplo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donde: $f(x,y) = (\underset{✗}{|x|}, \underset{✓}{y-x})$ NO es a.l.

Ejemplo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donde: $f(x,y,z) = (\underset{✓}{x}, \underset{✓}{y}, \underset{✓}{0})$ SÍ es a.l.

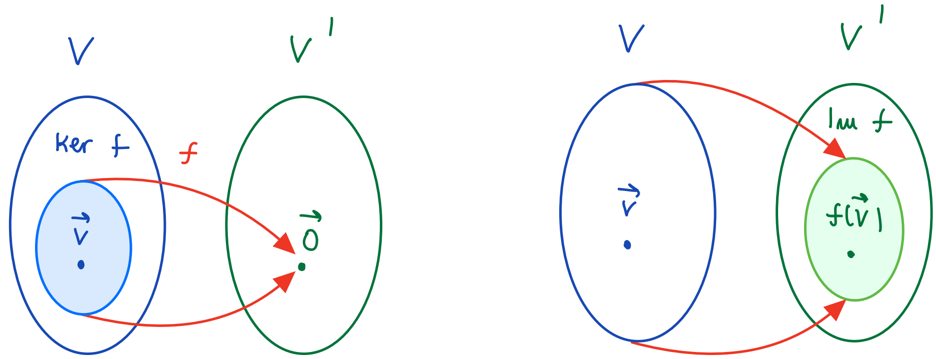
Ejemplo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde: $f(x,y,z) = (\underset{✓}{3x-2z}, \underset{✓}{x-y+z})$ SÍ es a.l.

- <u>Núcleo e imagen de una aplicación lineal :</u>

Dada una aplicación lineal $f : V \longrightarrow V'$:

Núcleo de f : $\boxed{Ker\ f = \{ \vec{v} \in V \ / \ f(\vec{v}) = \vec{0} \}}$

Imagen de f : $\boxed{Im\ f = \{ f(\vec{v}) \ / \ \vec{v} \in V \}}$



Ker f es subespacio de V

Im f es subespacio de V'

* Fórmula de las dimensiones :

$$\boxed{dim(V) = dim(Ker\ f) + dim(Im\ f)}$$

Ejercicio: Determinar los subespacios núcleo e imagen de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z,\ 2x + 4y + 6z)$$