Ejercicio: Escribir el vector $\vec{v} = (1,1,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1 = (1,2,3)$, $\vec{v}_2 = (0,1,2)$ y $\vec{v}_3 = (-1,0,1)$.

$$\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{v}} = \alpha_1 \underbrace{(1,2,3)}_{\vec{v}_1} + \alpha_2 \underbrace{(0,1,2)}_{\vec{v}_2} + \alpha_3 \underbrace{(-1,0,1)}_{\vec{v}_3}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \alpha_1 - \alpha_3 \\ 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \cancel{1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 - 1 \\ \rightarrow \alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 \\ \rightarrow 1 = \cancel{3\alpha_1} + 2 - \cancel{4\alpha_1} + \cancel{\alpha_1} - 1 \end{array}$$

$$1 = 1 \qquad \text{SCI}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha \\ \alpha_2 = 1 - 2\alpha \\ \alpha_3 = \alpha - 1 \\ (\alpha \in \mathbb{R}) \end{array} \xrightarrow{\alpha = 2} \begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \rightarrow \boxed{\vec{v} = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3}$$

Ejercicio: ¿Puede expresarse el vector $\vec{u} = (1,-2,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1 = (1,2,3)$, $\vec{u}_2 = (0,1,2)$ y $\vec{u}_3 = (-1,0,1)$?

$$(1,-2,2) = \alpha_1 (1,2,3) + \alpha_2 (0,1,2) + \alpha_3 (-1,0,1)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 - \alpha_3 \\ -2 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \alpha_3 = \alpha_1 - 1 \\ &\to \alpha_2 = -2 - 2\alpha_1 \\ &\to 2 = 3\cancel{\alpha_1} - 4 - 4\cancel{\alpha_1} + \cancel{\alpha_1} - 1 \end{aligned}$$

$$2 = -5 \quad \times \quad \boxed{SI}$$

$\vec{u}$ no puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

Ejercicio : En $\mathbb{R}^4$ se consideran los vectores :

$\vec{v}_1 = (1,-1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (-3,-1,2,1)$, $\vec{v}_3 = (1,3,-6,-1)$

a) Son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ linealmente independientes ?

b) ¿ Y $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$?

a) $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son L.I ?

$\frac{1}{-3} \neq \frac{-1}{-1} \rightarrow \vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ no son proporcionales $\rightarrow \boxed{L.I}$

b) $\alpha_1(1,-1,2,0) + \alpha_2(-3,-1,2,1) + \alpha_3(1,3,-6,-1) = (0,0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \cancel{-\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0} \\ \cancel{2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0} \quad E_3 = -2E_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ \cancel{-\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0} \end{array}\right\} \rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \\ \rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \end{array}$$

S.C.I 1 par

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 2\alpha \\ \alpha_2 = \alpha \\ \alpha_3 = \alpha \end{array} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \xrightarrow{\alpha = 1} \begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \rightarrow \boxed{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \text{ son } L.D}$$

Ejercicio: ¿El conjunto $S = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es linealmente independiente?

$$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,1,1) = (0,0,0)$$

$\boxed{S \text{ es L.I}}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{\mathrm{I}} \alpha_1 = -\alpha_2 \longrightarrow \alpha_1 = \boxed{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\mathrm{II}} -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \xrightarrow{\mathrm{III}} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} + \quad 2\alpha_3 = 0 \quad \boxed{\alpha_3 = 0}$$

$\hookrightarrow \alpha_2 = -\alpha_3 = \boxed{0}$

$\boxed{\text{Ejercicio: ¿El conjunto } S = \{(0,2),(1,4)\} \text{ genera a } \mathbb{R}^2 ?}$

$\mathbb{R}^2 = V$

Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ (x,y) debe expresarse como C.L de S:

$$(x,y) = \alpha_1 (0,2) + \alpha_2 (1,4)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_2 \\ y &= 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \alpha_2 = \boxed{x} \\ &\rightarrow y = 2\alpha_1 + 4x \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \boxed{\frac{y-4x}{2}}$$

S.C.D

$$(x,y) = \frac{y-4x}{2}(0,2) + x(1,4)$$

$\boxed{\text{S es sistema generador de } \mathbb{R}^2}$

Ejercicio: ¿El conjunto $S = \{(1,0,3),(2,0,-1),(4,0,5),(2,0,6)\}$ es sistema generador de $\mathbb{R}^3$?

V

Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ (x,y,z) debe expresarse como C.L de S:

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,3) + \alpha_2(2,0,-1) + \alpha_3(4,0,5) + \alpha_4(2,0,6)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 \\ \boxed{y = 0} \\ z = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\text{S no es sistema generador de } \mathbb{R}^3}$$

Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ con $y \neq 0$ no sería C.L de S.

$\boxed{\text{Ejercicio: Obtener un sistema generador del subespacio } U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y-z=0\}}$

ec. implícitas

Ecuaciones paramétricas → resolver el sistema.

$N^{\underline{o}}$ par $= 3$ inc $- 1$ ec $= 2$ par $(\alpha, \beta) \rightarrow z = 2x + y$

ec. param.

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\ z = 2\alpha + \beta \end{array}} \rightarrow U = \{(\alpha, \beta, 2\alpha+\beta) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(x,y,z) = (\alpha, \beta, 2\alpha+\beta) = (\alpha, 0, 2\alpha) + (0, \beta, \beta) =$$

$$= \alpha \underline{\underline{(1,0,2)}} + \beta \underline{\underline{(0,1,1)}}$$

$$\boxed{S = \{(1,0,2), (0,1,1)\} \text{ es un sistema generador de } U}$$

$$U = L\{(1,0,2), (0,1,1)\}$$

<u>Ejercicio</u> : Hallar una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\{(3,-1,-4),(1,2,1),(4,3,-1)\}$$

Sist. gen

Hacemos Gauss para saber si son L.I :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 \to F_2 - 3F_1$

$F_3 \to F_3 - 4F_1$

$F_2 \to -\frac{1}{7} F_2$

$F_3 \to F_3 - \frac{5}{7} F_2$

$$\boxed{B_U = \{(1,2,1),(0,1,1)\}}$$

Ejercicio: Determinar una base del subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,4,-1,3)$, $(1,3,-1,2)$, $(2,-1,-2,-3)$ y $(-3,2,3,5)$. Extender dicha base a una base de $\mathbb{R}^4$ si es necesario.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 14 & 0 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 \to F_2 - F_1$ $\qquad$ $F_3 \to F_3 - 9F_2$

$F_3 \to F_3 - 2F_1$ $\qquad$ $F_4 \to F_4 + 14F_2$

$F_4 \to F_4 + 3F_1$

$$B_U = \{(1,4,-1,3),(0,-1,0,-1)\}$$

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{(1,4,-1,3),(0,-1,0,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

$\underline{\text{Ejercicio}}$: Hallar una base y la dimensión del subespacio:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = z,\ y = z\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \alpha \end{array}}$$

3 inc − 2 ec finales = 1 par

$$U = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$(x,y,z) = (\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha \underline{\underline{(1,1,1)}}$$

Sistema generador de U: $S = \{(1,1,1)\} \rightarrow U = L\{(1,1,1)\}$

Como $(1,1,1) \neq (0,0,0) \rightarrow$ S es L.I $\rightarrow$ S es base

$$\boxed{B_U = \{(1,1,1)\} \qquad \dim(U) = 1}$$

Comprobación: $\underset{x\ \ y\ \ z}{(1,1,1)}$ $\quad x - z = 0 \longrightarrow 1 - 1 = 0$ ✓

$y - z = 0 \longrightarrow 1 - 1 = 0$ ✓

$\underline{\underline{\text{Ejercicio}}}$: Obtener una base del subespacio W y su dimensión:

$$W = \{(-\beta, \alpha-\beta, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, y, z, t) = (-\beta, \alpha-\beta, \alpha, \beta) = \alpha\,\underline{\underline{(0,1,1,0)}} + \beta\,\underline{\underline{(-1,-1,0,1)}}$$

sist. gen.

Como los 2 vectores son L.I:

$$\boxed{B_W = \{(0,1,1,0), (-1,-1,0,1)\} \quad \dim(W) = 2}$$

Ejercicio : Se consideran en $\mathbb{R}^3$ la base canónica y la base

$$B = \{(1,0,3),(1,1,4),(0,1,3)\}.$$

a) ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{u} = (-1,-1,1)$ en la base B?

b) Si las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B son $(3,-2,2)$, determinar sus coordenadas en la base canónica.

a) $\vec{u} = (\underset{x}{-1}, \underset{y}{-1}, \underset{z}{1}) = (\alpha, \beta, \gamma)_B = \boxed{\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)_B}$

$$(-1,-1,1) = \alpha(1,0,3) + \beta(1,1,4) + \gamma(0,1,3)$$

$$\left.\begin{aligned} -1 &= \alpha + \beta \\ -1 &= \beta + \gamma \\ 1 &= 3\alpha + 4\beta + 3\gamma \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \alpha = -1 - \beta \longrightarrow \alpha = \boxed{\tfrac{5}{2}} \\ &\to \gamma = -1 - \beta \longrightarrow \gamma = \boxed{\tfrac{5}{2}} \\ &\longrightarrow 1 = -3 - 3\beta + 4\beta - 3 - 3\beta \end{aligned}$$

$$1 = -6 - 2\beta \longrightarrow \boxed{\beta = -\frac{7}{2}}$$

b) $\vec{v} = (\underset{\alpha}{3}, \underset{\beta}{-2}, \underset{\gamma}{2})_B = (x,y,z) = \boxed{(1,0,7)}$

$$(x,y,z) = 3(1,0,3) - 2(1,1,4) + 2(0,1,3) = (1,0,7)$$

Ejercicio: Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$: $U = L\{(1,2,0,1,3),(2,1,1,2,-1)\}$

L I

$$B_U = \{(1,2,0,1,3),(2,1,1,2,-1)\} \rightarrow \dim(U) = 2$$

$$(x,y,z,s,t) = \alpha(1,2,0,1,3) + \beta(2,1,1,2,-1)$$

ec. param.

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = \beta \\ s = \alpha + 2\beta \\ t = 3\alpha - \beta \end{array}\right\}$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\rightarrow x = \alpha + 2z \rightarrow \underline{\alpha = x - 2z}$

$\rightarrow y = 2\alpha + z \rightarrow y = 2x - 4z + z = 2x - 3z$

$\rightarrow s = \alpha + 2z \rightarrow s = x - \cancel{2z} + \cancel{2z} = x$

$\rightarrow t = 3\alpha - z \rightarrow t = 3x - 6z - z = 3x - 7z$

$$\text{n}^{\underline{o}}\text{ ec. imp} = \dim(\underset{\mathbb{R}^5}{\underset{\parallel}{V}}) - \dim(U) = 5 - 2 = 3 \text{ ec. imp.}$$

Ec. implícitas: $\boxed{2x - y - 3z = 0, \quad x - s = 0, \quad 3x - 7z - t = 0}$