Tema 5: Redes complejas y modelado estructural

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
Curso 2025-2026

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

DFESTS

Índice

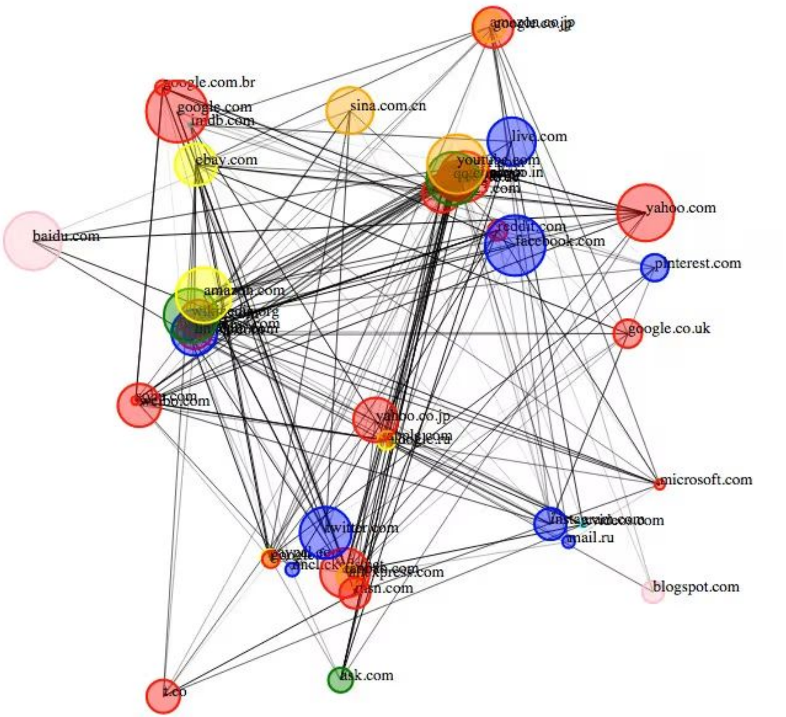
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Índice

1. Introducción

- Las **redes complejas** son una herramienta fundamental para representar y analizar sistemas formados por un gran número de elementos interconectados.

- **Topología no trivial**, con patrones de conexión que emergen de manera natural en sistemas biológicos, sociales, tecnológicos y físicos.



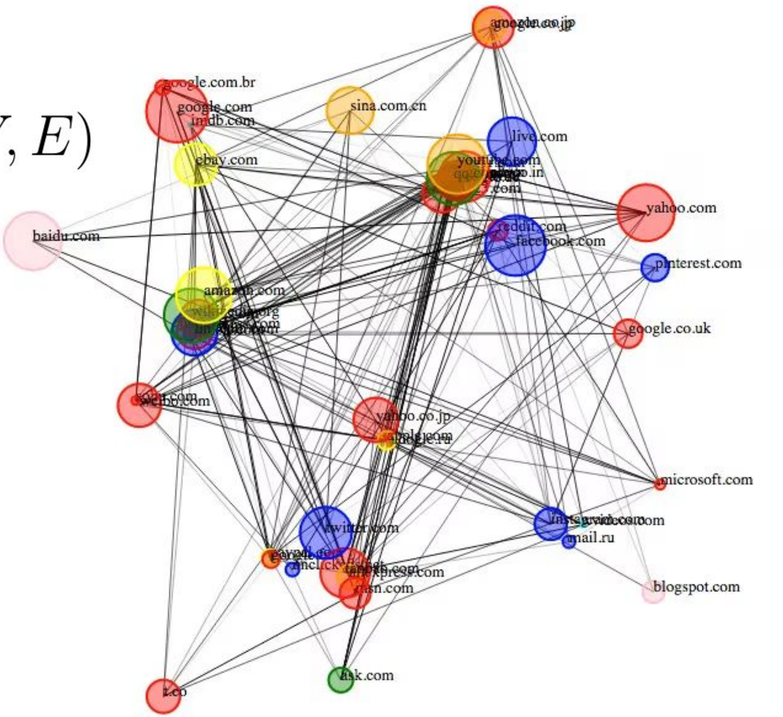
1. Introducción

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- Matemáticamente, una red puede representarse **mediante un grafo**: $G = (V, E)$

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}, \quad E \subseteq V \times V$$

- Permite entender **fenómenos globales** a partir de las **propiedades locales** de las conexiones.



Índice

2. Definición y propiedades fundamentales

- **Representación mediante matrices**

Una red puede representarse mediante su **matriz de adyacencia** $A = [a_{ij}]$, definida como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe un enlace entre } i \text{ y } j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En redes ponderadas, el valor a_{ij} puede ser un peso $w_{ij} \in \mathbb{R}$, indicando la fuerza o intensidad de la conexión.

UA UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- **Representación mediante matrices**

La **matriz de grado** D es diagonal, con elementos $D_{ii} = k_i$, donde k_i es el grado del nodo i, es decir, el número de enlaces que posee:

$$k_i = \sum_j a_{ij}$$

A partir de estas matrices, se define la **matriz laplaciana**:

$$L = D - A$$

que juega un papel clave en el análisis dinámico sobre redes (por ejemplo, en sincronización o difusión).

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- **Propiedades estructurales**
  - Algunas propiedades estadísticas básicas son:

- **Distribución de grados:** $P(k)$ indica la probabilidad de que un nodo tenga grado k. Es un indicador de la heterogeneidad de la red.

2. Definición y propiedades fundamentales

- **Propiedades estructurales**
  - Algunas propiedades estadísticas básicas son:

▪ **Coeficiente de clustering:** mide la tendencia de los nodos a formar triángulos o grupos cerrados. Para un nodo i:

$$C_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}$$

donde e_i es el número de enlaces entre los vecinos de i.

- **Propiedades estructurales**
  - Algunas propiedades estadísticas básicas son:

- **Longitud promedio de camino:**

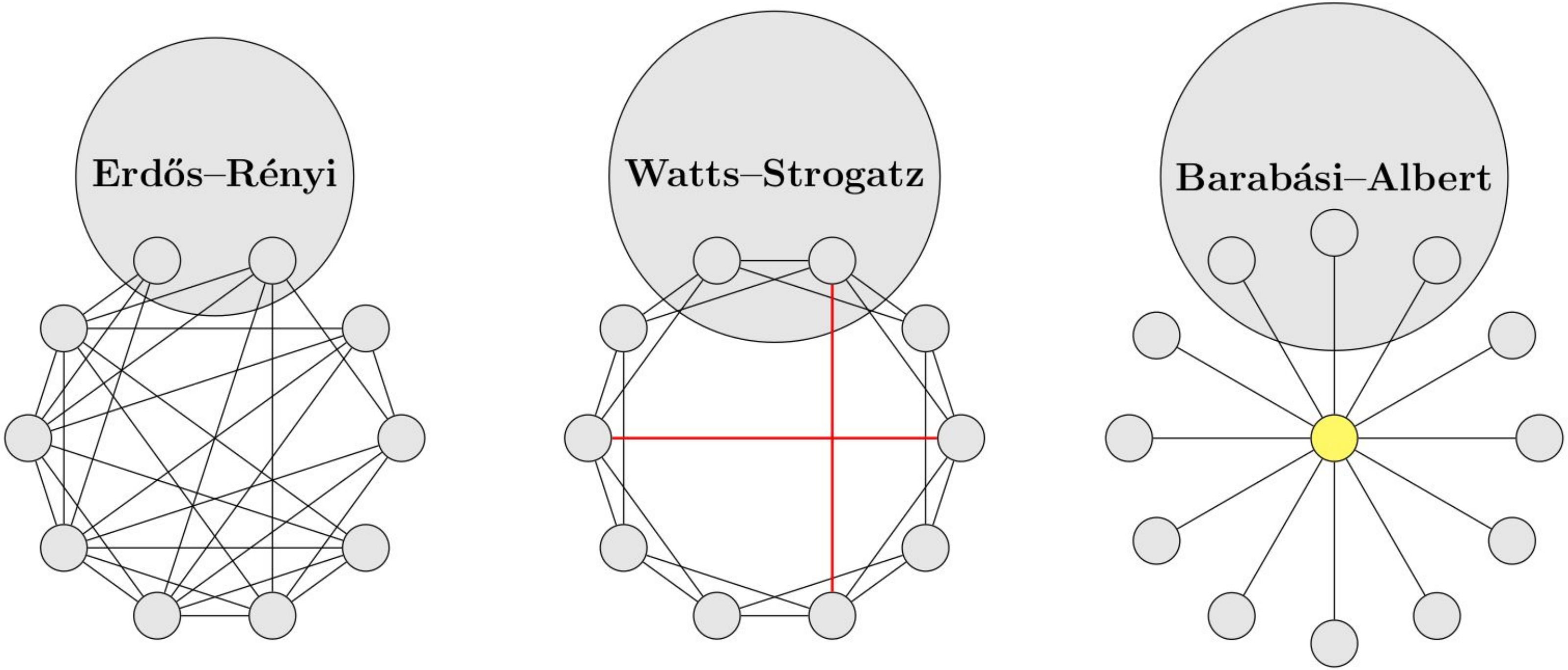
$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d(i,j)$$

donde $d(i,j)$ es la distancia más corta entre los nodos i y j.

Índice

3. Topologías típicas de redes complejas

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

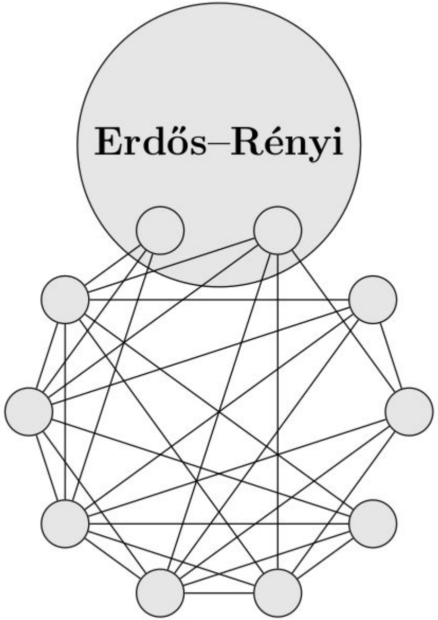


Índice

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

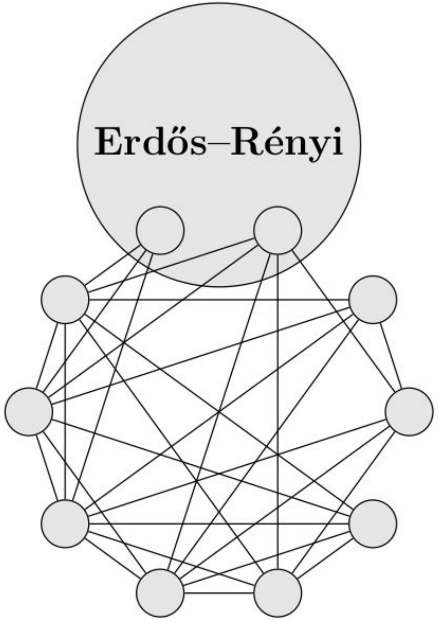
UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- Las **redes aleatorias** constituyen uno de los modelos fundamentales en la teoría de redes complejas.
- Utiliza **herramientas probabilísticas** para estudiar la aparición de **propiedades estructurales** en grafos generados al azar.
- Aunque el modelo es conceptualmente simple, sirve como referencia teórica para **comparar topologías más realistas**.



3.a. Redes aleatorias **EJEMPLOS**

1. **Redes de comunicación simples.** Ejemplos incluyen redes de sensores inalámbricos donde cada sensor se conecta aleatoriamente con otros dentro de un rango de comunicación, o topologías iniciales de redes *ad hoc* antes de cualquier proceso de optimización.
2. **Redes sociales no estructuradas.** Interacciones ocasionales entre individuos en espacios altamente mezclados, como eventos multitudinarios, aeropuertos o ferias, donde las conexiones no siguen patrones de homofilia ni presentan modularidad.
3. **Modelos físicos de interacción aleatoria.** La red de colisiones entre moléculas en un gas ideal o el contacto aleatorio entre partículas suspendidas en un fluido pueden aproximarse como conexiones independientes con probabilidad constante.
4. **Redes epidemiológicas bajo mezcla homogénea.** Procesos de contagio en poblaciones donde los individuos se mueven aleatoriamente y no existe estructura social marcada. En estos casos, el grafo de contactos instantáneos puede modelarse como un $G(N, p)$.



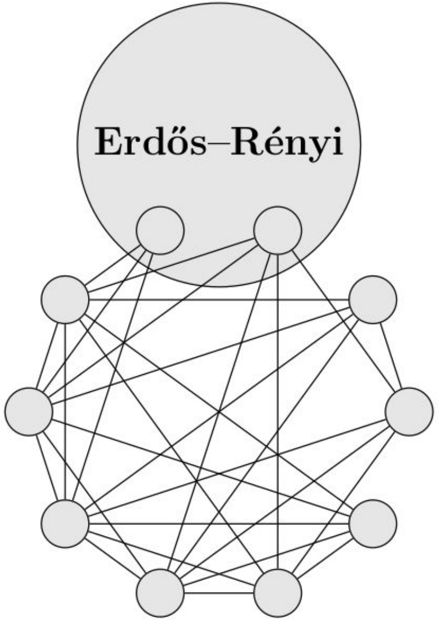
3.a. Redes aleatorias **EJEMPLOS**

5. **Redes de colaboración aleatoria.** En grupos donde los participantes se asignan de forma aleatoria a tareas o proyectos, la red resultante de coautoría o cooperación presenta características de una red aleatoria homogénea.

6. **Redes de fallo aleatorio en sistemas técnicos.** En modelos de robustez, los fallos pueden representarse como desconexiones aleatorias entre componentes. La estructura funcional se aproxima entonces a un grafo $G(N, p)$ con enlaces activos o inactivos al azar.

7. **Redes ecológicas con mezcla uniforme.** Si los individuos de una especie se desplazan sin territorialidad y las interacciones (competencia, contacto, depredación) se producen de forma aleatoria, la estructura puede representarse mediante una red aleatoria.

8. **Redes tecnológicas generadas sintéticamente para pruebas.** Muchas simulaciones computacionales utilizan grafos $G(N, p)$ como referencia para evaluar algoritmos de detección de comunidades, análisis de centralidad, controlabilidad o resiliencia frente a fallos.



3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

Existen dos formulaciones equivalentes del modelo Erdős–Rényi:

1. **Modelo $G(N, p)$:** Se parte de un conjunto de N nodos y cada par de nodos se conecta de manera independiente con probabilidad p.

$$P((i, j) \in E) = p$$

2. **Modelo $G(N, M)$:** Se parte de N nodos y se seleccionan exactamente M enlaces de forma uniforme entre todos los pares posibles.

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

El modelo $G(N, p)$ es el más utilizado por su simplicidad para análisis analíticos, pues cada enlace se modela como una variable aleatoria Bernoulli.

El número esperado de enlaces del modelo es:

$$\mathbb{E}[|E|] = p\binom{N}{2}$$

y el grado medio de la red:

$$\langle k \rangle = p(N-1) \approx pN$$

para N grande.

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

- **Distribución de grados**

Dado que cada nodo tiene probabilidad p de conectarse con cada uno de los $N-1$ restantes, el grado k de un nodo se distribuye de manera binomial:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

Para redes grandes ($N \gg 1$) y grados medios pequeños ($\langle k \rangle \ll N$), la distribución binomial puede aproximarse mediante una Poisson:

$$P(k) \approx \frac{\langle k \rangle^k}{k!} e^{-\langle k \rangle}$$

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

- **Distribución de grados**

Esto implica que:

- la mayoría de los nodos tienen un grado cercano al valor medio,
- la red es homogénea estructuralmente,
- no aparecen hubs (nodos con grado muy grande), en contraste con redes libres de escala.

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

- **Coeficiente de clustering**

En redes aleatorias, el clustering local (probabilidad de que dos vecinos de un nodo estén conectados entre sí) es simplemente igual a la probabilidad de enlace p:

$$C = p = \frac{\langle k \rangle}{N}$$

El clustering es típicamente muy bajo, lo que contrasta con redes de mundo pequeño o redes sociales reales, donde suele observarse un clustering elevado.

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

- **Longitud de camino promedio**

En el modelo $G(N, p)$, la longitud media del camino más corto entre dos nodos escala como:

$$L \sim \frac{\ln N}{\ln\langle k \rangle}$$

Esto indica que las redes aleatorias presentan la propiedad de **mundo pequeño**: incluso con un número grande de nodos, la distancia promedio crece muy lentamente.

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

Supongamos una red $G(N, p)$ con $N = 100$ nodos y $p = 0{,}05$.

$$\langle k \rangle = p(N-1) \approx 4{,}95$$

Esto implica que:

- Cada nodo tiene en promedio 5 conexiones.
- El clustering esperado es $C = p = 0{,}05$.
- La distancia media:

$$L \approx \frac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2{,}86$$

es decir, cualquier nodo está separado de otro por menos de 3 pasos.

3.a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)

Las características más importantes del modelo Erdős–Rényi pueden resumirse así:

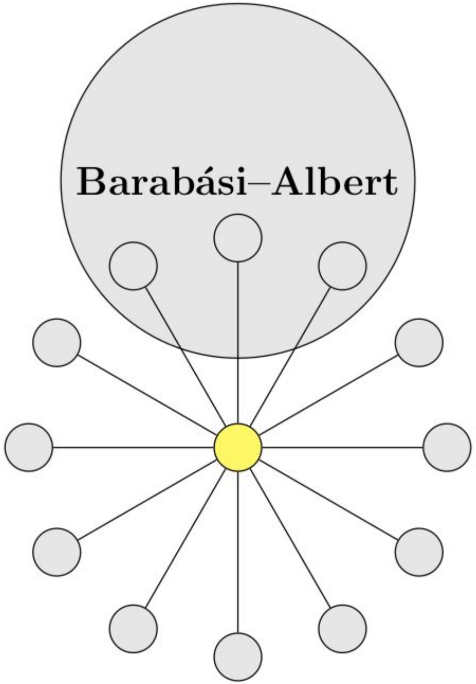
- Es un modelo **homogéneo**: todos los nodos tienen aproximadamente el mismo grado.
- No contiene **hubs**, por lo que no sigue una ley de potencias.
- El clustering es bajo, lo cual no refleja la mayoría de redes reales.
- Presenta una **distancia media pequeña** entre nodos.
- Es un modelo ideal para análisis matemático y como punto de referencia para otras topologías.

https://www.networkpages.nl/CustomMedia/Animations/RandomGraph/ERRG/AddoneEdgepATime.html

Índice

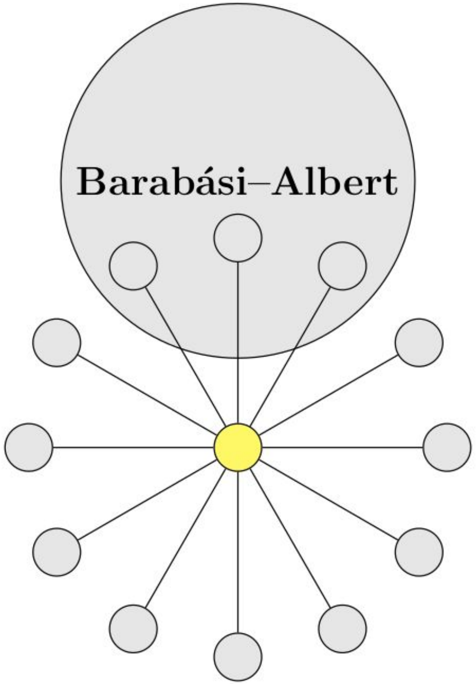
3.b. Redes libres de escala (Barabási-Albert)

- Las redes **libres de escala** constituyen una clase de topologías caracterizadas por la presencia de unos pocos **nodos altamente conectados** (denominados hubs) y una gran cantidad de **nodos con bajo grado**.
- proporciona un mecanismo generativo sencillo que explica la emergencia de estas estructuras mediante los principios de **crecimiento y conexión preferencial**.
- Aparece de manera natural en **numerosos sistemas reales** y se describe mediante distribuciones de grados de tipo ley de potencias.



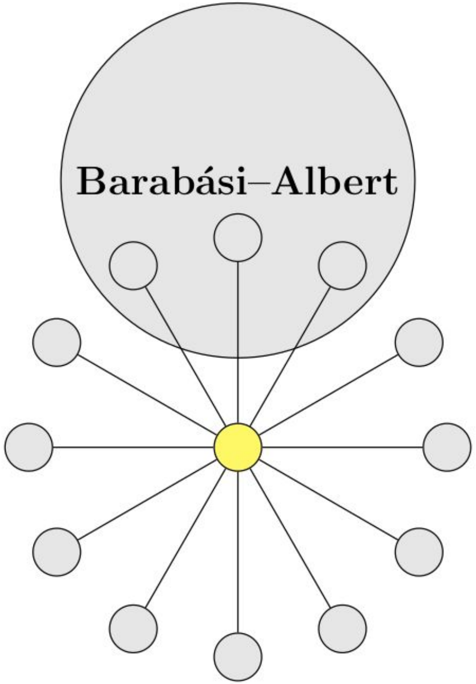
3.b. Redes libres de escala **EJEMPLOS**

1. **Internet a nivel de routers y dominios**. Estudios empíricos muestran que la distribución de grados de routers y sistemas autónomos sigue leyes de potencias.
2. **Redes sociales reales**. Ejemplos como Facebook, Twitter o redes de colaboración científica presentan nodos muy conectados (influencers o autores prolíficos) junto a miles de nodos con pocas conexiones.
3. **Redes metabólicas y bioquímicas**. Ciertos metabolitos actúan como hubs (ATP, NADH), conectando numerosos procesos.
4. **Redes de interacción proteína–proteína**. Proteínas clave poseen alto grado, mientras la mayoría tienen pocos enlaces.
5. **Redes de transporte aéreo**. Ciudades como Londres, Nueva York o Dubái funcionan como hubs intercontinentales.



3.b. Redes libres de escala **EJEMPLOS**

6. **Redes financieras**. Grandes bancos o instituciones actúan como nodos altamente conectados en la red de préstamos o derivados.
7. **Redes neuronales estructurales**. Algunas neuronas o regiones cerebrales actúan como superconectores.
8. **Redes de distribución eléctrica**. Estaciones de transformación principales funcionan como hubs en la infraestructura.
9. **Redes lingüísticas**. Palabras muy frecuentes actúan como hubs dentro de redes semánticas.
10. **Redes de citas científicas**. Artículos seminales reciben un gran número de citas, mientras la mayoría reciben pocas.



3.b. Redes libres de escala (Barabási-Albert)

1. Crecimiento La red no es estática. Comienza con un número pequeño de nodos, m_0, y en cada paso se añade un nodo nuevo.

2. Conexión preferencial El nodo nuevo se conecta a m nodos existentes con una probabilidad proporcional al grado de los nodos ya presentes. Es decir, un nodo con mayor grado tiene mayor probabilidad de recibir nuevas conexiones.

Formalmente, la probabilidad de que un nodo i sea escogido para recibir un enlace es:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

Este mecanismo genera la **retroalimentación positiva** que conduce a la aparición de hubs.

3.b. Redes libres de escala (Barabási-Albert)

- **Heterogeneidad extrema**: el grado medio no es representativo de la estructura real.
- **Hubs bien definidos**: unos pocos nodos concentran una fracción significativa de las conexiones.
- **Robustez frente a fallos aleatorios**: eliminar nodos al azar no suele fragmentar la red.
- **Vulnerabilidad a ataques dirigidos**: eliminar hubs puede desconectar la red rápidamente.
- **Longitud de camino promedio pequeña**, con crecimiento del orden:

$$L \sim \frac{\ln N}{\ln \ln N}$$

3.b. Redes libres de escala (Barabási-Albert)

Consideremos una red BA con:

$$N = 1000, \qquad m_0 = 5, \qquad m = 3.$$

Propiedades típicas obtenidas por simulación:

- La distribución de grados sigue aproximadamente $P(k) \sim k^{-3}$.
- El nodo más conectado puede alcanzar un grado del orden de $k_{\text{máx}} \approx 60$–$80$.
- La longitud promedio del camino es cercana a $L \approx 3$.
- El clustering es mayor que en una red aleatoria con el mismo grado medio, pero sigue siendo relativamente bajo.

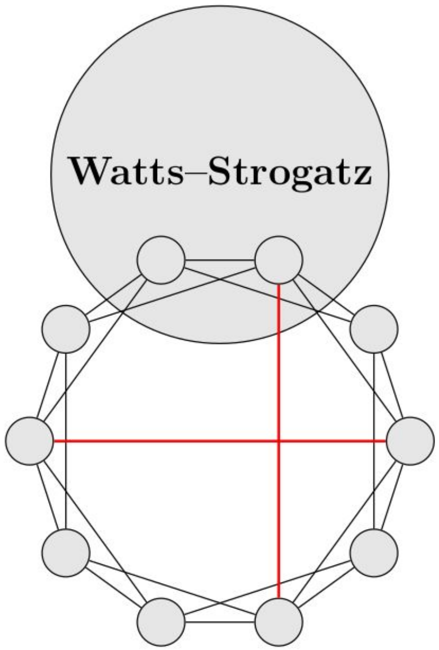
Índice

1. Introducción
2. Definición y propiedades fundamentales
3. **Topologías típicas de redes complejas**
   a. Redes aleatorias (Erdős-Rényi)
   b. Redes libres de escala (Barabási-Albert)
   c. **Redes de mundo pequeño (Watts-Strogatz)**
   d. Comparativa entre modelos de redes
4. Dinámica en redes
   a. Difusión en redes
   b. Sincronización de redes
   c. Modelos epidémicos en redes
5. Estabilidad en dinámica de redes
6. Relación entre redes complejas y modelos basados en agentes

3.c. Redes mundo pequeño (Watts-Strogatz)

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

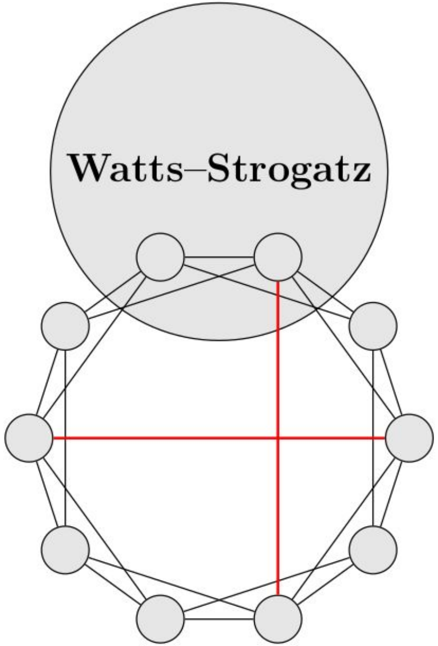
- representan una topología que combina simultáneamente dos propiedades fundamentales que se observan en muchos sistemas reales: un **alto coeficiente de clustering** y una **baja longitud promedio de camino**.
- modelo intermedio entre redes regulares y redes aleatorias, capaz de reproducir fenómenos de **conectividad eficiente** con **estructuras altamente locales**.



3.c. Redes mundo pequeño **EJEMPLOS**

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

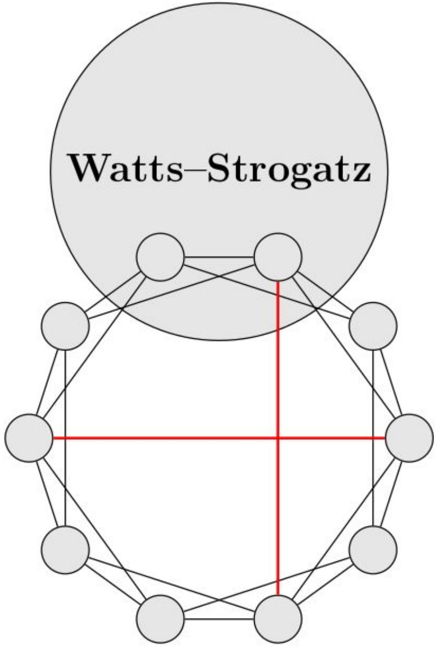
1. **Redes sociales humanas**. La mayoría de redes sociales exhiben alto clustering (amigos de un individuo suelen conocerse entre sí) y caminos globales cortos.
2. **Redes neurológicas y cerebrales**. El cerebro presenta agrupaciones locales muy fuertes (columnas corticales) con conexiones largas que actúan como atajos entre regiones.
3. **Redes de colaboración científica**. Los investigadores colaboran en grupos altamente conectados, pero existen enlaces entre grupos que reducen la distancia entre disciplinas.
4. **Redes de transporte**. Muchas infraestructuras de metro, tren y autopistas presentan rutas locales densas y enlaces rápidos entre zonas alejadas.



UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

3.c. Redes mundo pequeño **EJEMPLOS**

5. **Redes de energía en ciudades**. Las redes eléctricas urbanas se organizan en módulos locales con conexiones redundantes que reducen la distancia entre componentes.
6. **Redes de comunicación entre robots móviles**. Los robots tienden a comunicarse con vecinos cercanos, pero algunos enlaces de largo alcance reducen los tiempos de coordinación.
7. **Redes semánticas y lingüísticas**. Palabras relacionadas forman grupos densos, pero existen conexiones semánticas que actúan como atajos entre conceptos.
8. **Redes de interacciones en ecosistemas**. Grupos de especies presentan fuerte concentración local, mientras unas pocas relaciones de larga distancia conectan diferentes módulos ecológicos.



3.c. Redes mundo pequeño (Watts-Strogatz)

El modelo original se construye mediante el siguiente procedimiento:

1. Red regular inicial Se parte de un anillo de N nodos, donde cada nodo está conectado simétricamente a sus k vecinos más cercanos (habitualmente $k \ll N$).

2. Reenlace aleatorio con probabilidad p Cada enlace de la red regular se **reconecta** con probabilidad p hacia un nodo elegido al azar, evitando duplicar enlaces y lazos propios. El parámetro p controla la transición entre:

- $p = 0$: red regular altamente ordenada,
- $p = 1$: red aleatoria (modelo Erdős–Rényi),
- $0 < p \ll 1$: **red de mundo pequeño**.

1. Coeficiente de clustering La red regular inicial tiene un clustering alto:

$$C_{WS}(p=0) \approx \frac{3(k-2)}{4(k-1)}$$

Cuando p aumenta ligeramente, el clustering disminuye, pero sigue siendo mucho mayor que en una red aleatoria con el mismo grado medio.

3.c. Redes mundo pequeño (Watts-Strogatz)

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

2. Longitud media de camino Para $p = 0$, la longitud media crece linealmente con N:

$$L_{WS}(0) \sim \frac{N}{2k}$$

Cuando p toma valores muy pequeños (por ejemplo, $p \approx 0{,}01$), se introducen *atajos* que reducen drásticamente la distancia entre nodos, provocando una caída abrupta de L:

$$L_{WS}(p \ll 1) \approx L_{\text{aleatoria}} \sim \frac{\ln N}{\ln k}$$

Mientras tanto, el clustering se mantiene elevado. Este régimen constituye la propiedad de **mundo pequeño**.

3.c. Redes mundo pequeño (Watts-Strogatz)

$$N = 1000, \quad k = 10, \quad p = 0{,}01.$$

Propiedades típicas:

- Clustering inicial (antes del reenlace):

$$C(0) \approx 0{,}75.$$

- Clustering para $p = 0{,}01$:

$$C(0{,}01) \approx 0{,}60,$$

  mucho mayor que en una red aleatoria equivalente ($C \approx 0{,}01$).

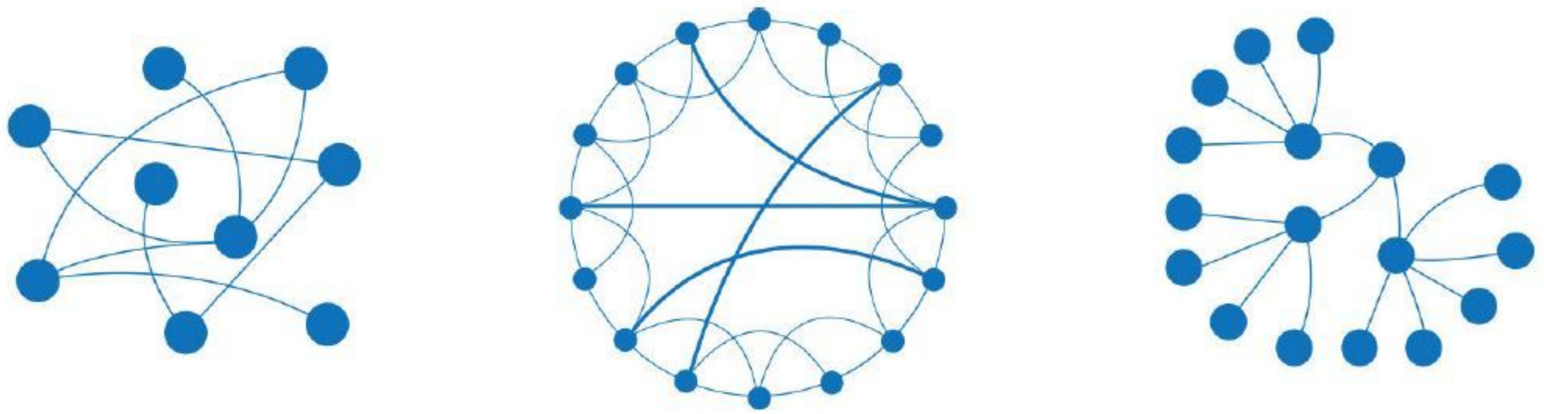
- Longitud media del camino:

$$L(0{,}01) \approx 3{,}2,$$

  cercana a la longitud de camino de una red aleatoria.

Índice

3.d. Comparativa entre modelos de redes

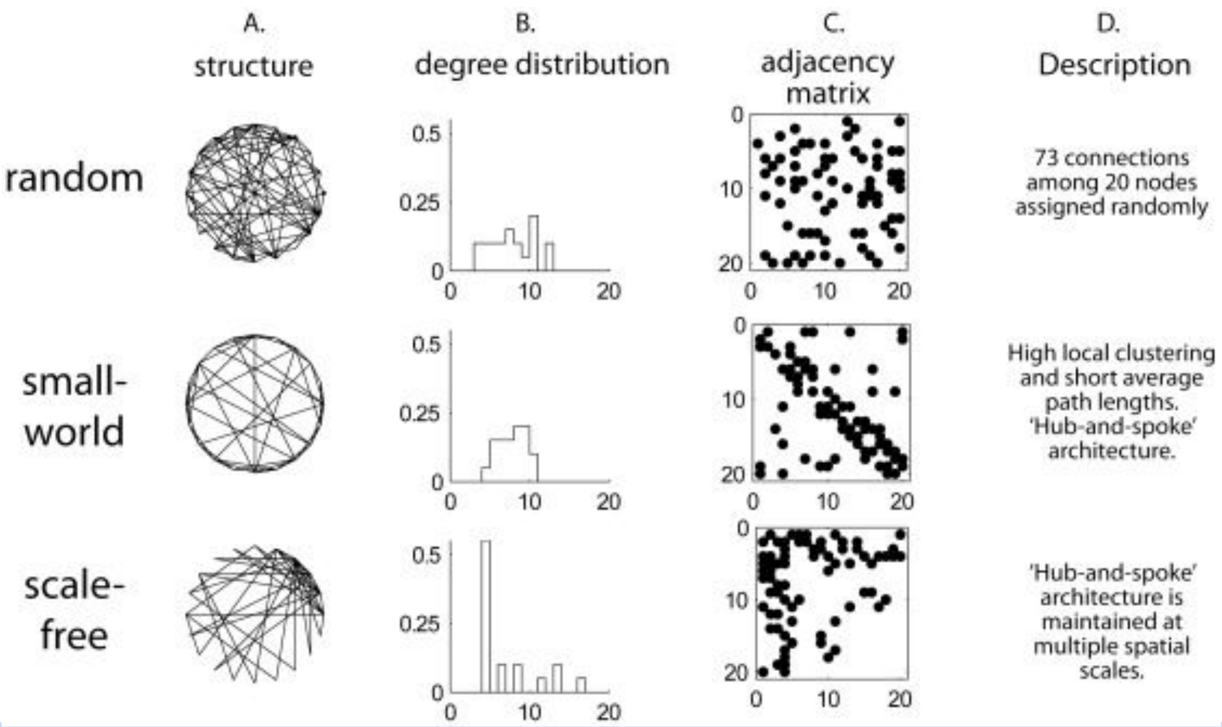


Random
Average distributions.
No structure or hierarchal patterns.

Small-World
High local clustering and short average path lengths.
Hub-and-spoke architecture.

Scale-Free
Hub-and-spoke architecture preserved at multiple scales.
High power law distribution.

3.d. Comparativa entre modelos de redes



Propiedad	Erdős–Rényi (ER)	Watts–Strogatz (WS)	Barabási–Albert (BA)
Mecanismo generativo	Enlaces independientes con probabilidad p.	Reenlace aleatorio sobre red regular con probabilidad p.	Crecimiento + conexión preferencial.
Distribución de grados	Binomial/Poisson.	Concentrada alrededor de k.	Ley de potencias $P(k) \sim k^{-\gamma}$.
Heterogeneidad de grados	Baja (homogénea).	Moderada.	Alta (hubs).
Coeficiente de clustering	Muy bajo: $C = p$.	Alto para $p \ll 1$.	Moderado, decrece con el tamaño.
Longitud media del camino	$L \sim \frac{\ln N}{\ln\langle k\rangle}$.	Muy baja incluso para $p \ll 1$.	Muy baja: $L \sim \ln N / \ln \ln N$.
Estructura modular	No.	Sí (clustering local).	Moderada, emergen comunidades débiles.
Presencia de hubs	No.	No.	Sí, muy pronunciados.
Robustez a fallos aleatorios	Baja.	Media.	Muy alta.
Vulnerabilidad a ataques dirigidos	Media.	Media.	Muy alta (cae si se eliminan hubs).
Aplicaciones típicas	Interacciones aleatorias, redes sintéticas.	Redes sociales, neuronales, transporte.	Internet, redes sociales reales, biología molecular.

3.d. Comparativa entre modelos de redes

- **Para simular redes y su dinámica**: https://networkx.org/documentation/stable/index.html

NetworkX
Network Analysis in Python

Índice

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

DFESTS
Departament de Física, Enginyeria de Sistemes i Teoria del Senyal
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal

4. Dinámica de redes

- La **dinámica en redes** estudia cómo ciertos procesos evolucionan en sistemas donde los elementos interactúan **a través de una estructura de conexiones** representada mediante un grafo.

- A diferencia de los modelos tradicionales que asumen interacciones globales o uniformes, la dinámica en redes **incorpora explícitamente la topología** subyacente, lo que modifica de manera profunda el **comportamiento colectivo del sistema**.

4. Dinámica de redes

- Algunos de los procesos dinámicos más estudiados incluyen:
  - **Difusión** de información, energía o sustancias.
  - **Sincronización** de osciladores.
  - **Propagación** de epidemias o rumores.
  - Dinámica de consenso.
  - Procesos de random walks.
  - Dinámica de opinión o comportamiento social.

Índice

4.a. Difusión en redes

- La **difusión en redes** es un proceso mediante el cual una cantidad (información, calor, moléculas, energía o probabilidad) se **redistribuye a través de los nodos**, siguiendo las conexiones definidas por la red.

- Este tipo de proceso se modela habitualmente mediante la **matriz laplaciana**, que captura cómo la diferencia entre estados locales impulsa la transferencia entre nodos.

4.a. Difusión en redes

Sea una red definida por un grafo $G = (V, E)$ con matriz de adyacencia A y matriz laplaciana $L = D - A$, donde D es la matriz de grados. Si $x_i(t)$ representa la magnitud asociada al nodo i en el tiempo t, el modelo continuo de difusión viene dado por:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\sum_j L_{ij} x_j .$$

En forma vectorial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -L\mathbf{x}.$$

Este sistema converge hacia un estado uniforme cuando la red es conexa, pues el laplaciano posee un autovalor cero asociado a la solución estacionaria.

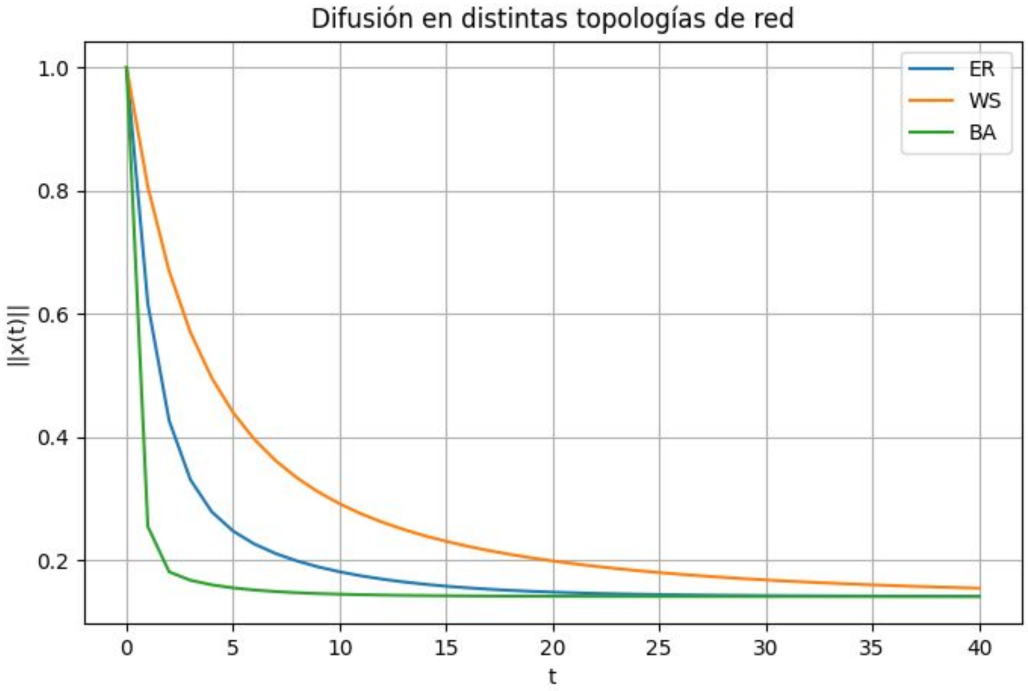
4.a. Difusión en redes

La ecuación de difusión indica que **cada nodo ajusta su valor hacia los valores de sus vecinos**. Si un nodo tiene un valor alto y sus vecinos valores más bajos, la cantidad fluye hacia ellos. Esto imita fenómenos como:

- Nivelación de temperatura (conducción térmica).
- Difusión de un rumor en redes sociales.
- Transferencia de carga o energía.
- Promedios iterativos en sistemas de formación en robótica.

4.a. Difusión en redes

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior



Índice

4.b. Sincronización de redes

- La sincronización en redes describe cómo un **conjunto de osciladores acoplados** tienden a ajustar sus fases o frecuencias debido a las interacciones entre ellos.
- Este fenómeno es fundamental en áreas como neurociencia, sistemas eléctricos, relojes distribuidos, redes de sensores y dinámica colectiva de robots.
- El modelo más utilizado para describir sincronización es el **modelo de Kuramoto**.

4.b. Sincronización de redes

- **Modelo de Kuramoto**.

Sea una red con matriz de adyacencia A. Cada nodo i tiene una fase $\theta_i(t)$ y una frecuencia natural ω_i. El modelo se define como:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sum_j a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

donde K es el parámetro de acoplamiento.

La red influye en la sincronización mediante a_{ij}: existen redes donde la sincronización ocurre fácilmente y otras donde es difícil lograr coherencia global.

4.b. Sincronización de redes

- Cada oscilador intenta seguir su frecuencia natural, pero las conexiones con sus vecinos lo "empujan" a sincronizarse. Si K es suficientemente grande, **los nodos alcanzan un estado de fase común**.

- En una red regular donde cada oscilador se conecta sólo con dos vecinos, la sincronización es lenta y requiere un acoplamiento mayor. En redes libres de escala, **los hubs aceleran enormemente la sincronización** global.

- Las **redes BA son particularmente eficientes** para sincronizar porque los hubs actúan como puntos de anclaje. Sin embargo, esta misma estructura las vuelve vulnerables: si un hub falla, la sincronización puede colapsar. Ejemplos donde aparece sincronización:
  - Redes de neuronas (señales rítmicas);
  - Redes eléctricas (frecuencia estable de 50/60 Hz);
  - Enjambres de robots (consenso en movimiento);
  - Biología (osciladores químicos, ritmos circadianos).

4.b. Sincronización de redes

Dado un conjunto de N osciladores con fases $\theta_1(t), \ldots, \theta_N(t)$, el parámetro de orden se define como el módulo del promedio de los vectores unitarios asociados a cada fase:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j(t)},$$

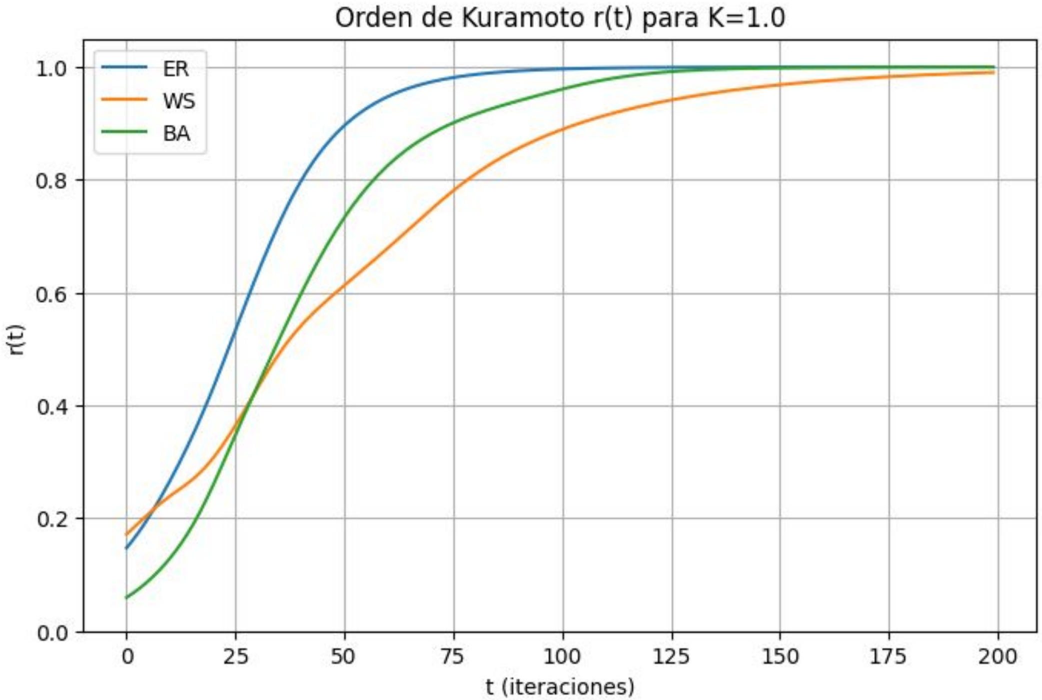
donde:

- $r(t)$ mide el grado de coherencia global,
- $\psi(t)$ es la *fase promedio* del sistema.

Tomando el módulo de la expresión anterior, se obtiene la forma más comúnmente usada:

$$r(t) = \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j(t)}\right|. \qquad 0 \le r(t) \le 1.$$

4.b. Sincronización de redes



Índice

4.c. Modelos epidémicos en redes

- La **propagación de epidemias** es uno de los campos donde la teoría de redes ha tenido mayor impacto.

- A diferencia de los modelos epidemiológicos clásicos (SIR, SIS), donde se asume mezcla homogénea, los modelos en red **permiten especificar quién puede contagiar a quién** a partir de una estructura de contactos.

4.c. Modelos epidémicos en redes

Cada nodo representa un individuo y puede encontrarse en estado susceptible (S), infectado (I) o recuperado (R). La dinámica discreta puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
S_i(t+1) &= S_i(t) - \beta S_i(t) \sum_j a_{ij} I_j(t), \\
I_i(t+1) &= I_i(t) + \beta S_i(t) \sum_j a_{ij} I_j(t) - \gamma I_i(t), \\
R_i(t+1) &= R_i(t) + \gamma I_i(t),
\end{aligned}
$$

donde:

- a_{ij} indica si el individuo i puede ser contagiado por j;
- β es la tasa de transmisión;
- γ es la tasa de recuperación.

4.c. Modelos epidémicos en redes

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Una de las conclusiones clave de los modelos epidémicos en redes es que el umbral epidémico depende fuertemente de la heterogeneidad de la red. En una red con distribución de grados $P(k)$, el umbral aproximado es:

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle},$$

donde $\lambda = \beta/\gamma$.

- En redes aleatorias ER: $\langle k^2 \rangle$ es pequeño $\rightarrow$ umbral positivo.
- En redes libres de escala: $\langle k^2 \rangle$ puede divergir $\rightarrow$ umbral cercano a 0.

Esto implica que en redes libres de escala incluso infecciones muy débiles pueden generar epidemias masivas.

En un grafo ER con $\langle k \rangle = 5$:

$$\lambda_c = \frac{5}{5^2 + 5} \approx 0{,}17.$$

La infección sólo se vuelve epidémica si $\beta/\gamma > 0{,}17$.

4.c. Modelos epidémicos en redes

En una red BA donde existen hubs con alto grado, $\langle k^2 \rangle$ es muy grande:

$$\lambda_c \to 0.$$

Esto explica por qué:

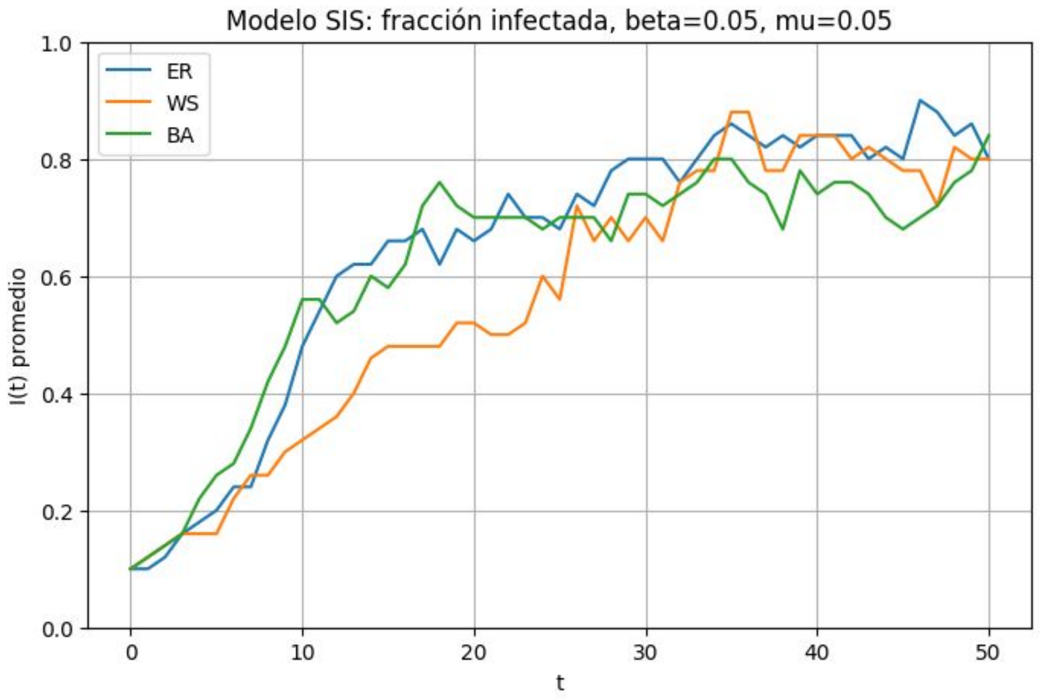
- los virus informáticos se propagan fácilmente por Internet,
- las epidemias reales se benefician de "supercontagiadores",
- los hubs son puntos críticos para controlar epidemias.

4.c. Modelos epidémicos en redes

Los modelos epidémicos en redes se aplican a:

- Contagio de enfermedades (COVID-19, gripe, sarampión);
- Propagación de rumores o fake news en redes sociales;
- Difusión de malware en sistemas informáticos;
- Propagación de fallos en redes eléctricas.

4.c. Modelos epidémicos en redes



Índice

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

5. Estabilidad en dinámica de redes

La diferencia esencial con la dinámica de un sistema individual es que, en redes, la estabilidad depende fuertemente de:

- la **dinámica local** de cada nodo (las ecuaciones que gobiernan su evolución),
- el **acoplamiento** entre nodos (ganancias, funciones de interacción, intensidad de conexión),
- la **topología del grafo**, capturada en la estructura de A y L y en sus **autovalores**.

Esto implica que:

- Dos redes con la misma dinámica local y el mismo acoplamiento pueden tener comportamientos estables o inestables diferentes, simplemente por estar conectadas de distinta manera.
- La presencia de *hubs*, comunidades o cuellos de botella topológicos puede facilitar u obstaculizar procesos como la sincronización o la propagación epidémica.

5. Estabilidad en dinámica de redes

En muchos casos, aparecen cantidades espectrales clave, como:

- el **segundo autovalor más pequeño del laplaciano**, $\lambda_2(L)$, o *conectividad algebraica*;
- el **mayor autovalor de la matriz de adyacencia**, $\lambda_{\text{máx}}(A)$.

Índice

6. Redes complejas y m basados en agentes

Aspecto	**Redes complejas**	**Modelado basado en agentes**
Representación	Relación entre nodos.	Comportamiento individual de entidades.
Naturaleza	Estructural, topológica.	Dinámica, orientada a reglas.
Formalismo	Teoría de grafos, matrices, análisis estadístico.	Simulación discreta, autómatas, programación.
Objetivo	Analizar propiedades globales de la red.	Capturar emergencias desde acciones locales.
Enfoque	Quién conecta con quién.	Qué hace cada agente y cómo interactúa.

Temario

B1 - Sistemas Dinámicos

T1: Fundamentos del modelado de sistemas dinámicos

T2: Estabilidad, controlabilidad y observabilidad

T3: Paradigmas de simulación

B2 - Sistemas Complejos

T4: Lenguajes formales para modelos conceptuales

T5: Redes complejas y modelado estructural

B3 - Modelado con IA

T6: Identificación de sistemas

T7: Inteligencia artificial aplicada al modelado de sistemas

Tema 5: Redes complejas y modelado estructural

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
Curso 2025-2026

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

DFESTS