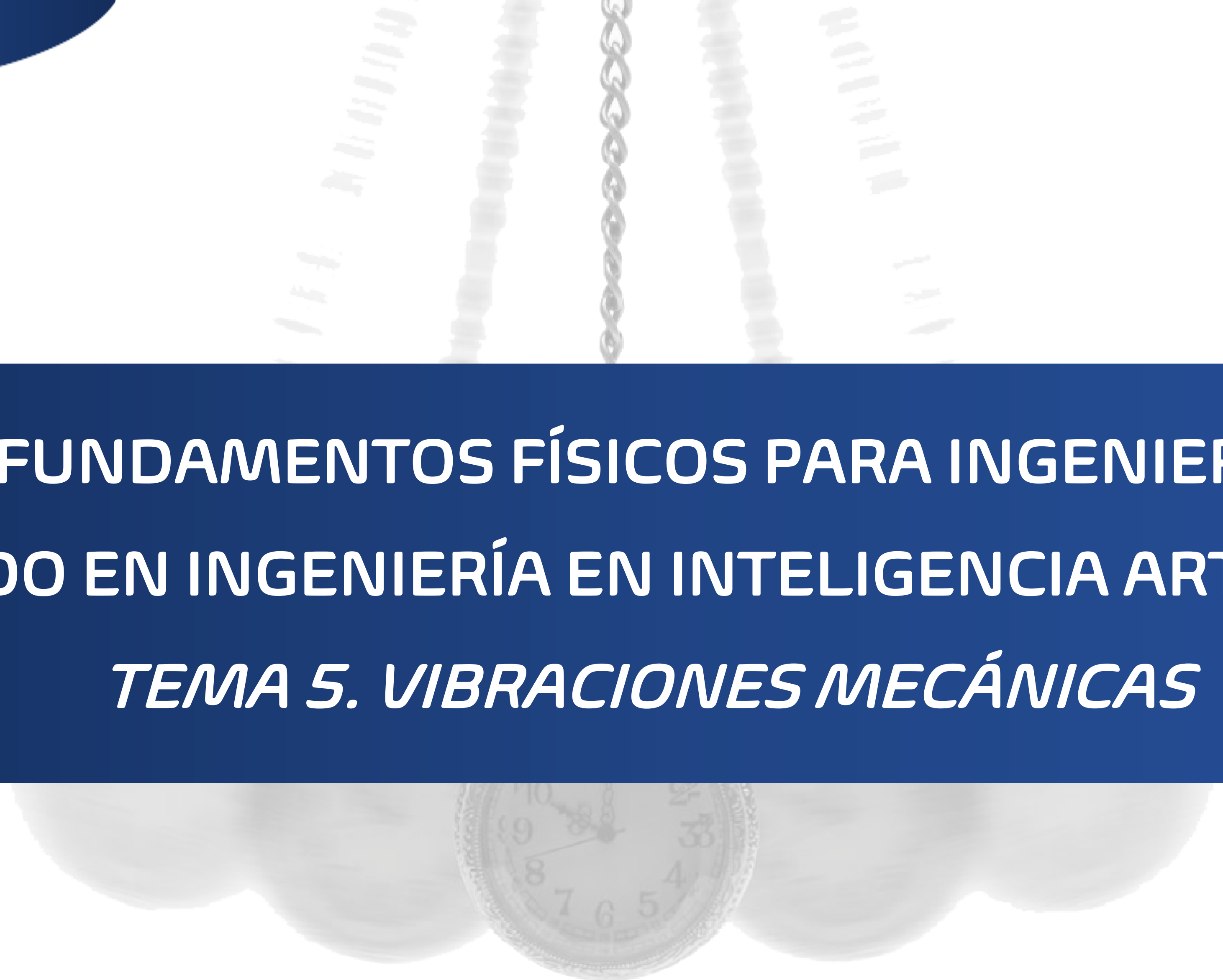
Curso 2023/24



FUNDAMENTOS FÍSICOS PARA INGENIERÍA

GRADO EN INGENIERÍA EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

TEMA 5. VIBRACIONES MECÁNICAS

Manuel Gutiérrez Ramírez

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante

Contenidos

1.1. Introducción

Movimiento de ida y vuelta a lo largo de una línea recta o curva

Vibración mecánica > Oscilación repetida de un punto material o de un sólido rígido en torno a una posición de equilibrio

Oscilaciones
- Periódicas > Se repite una y otra vez a intervalos regulares de tiempo
- Aperiódicas o aleatorias > No se repiten uniformemente

En muchos dispositivos mecánicos se generan vibraciones de forma deliberada → Péndulo de un reloj; Cuerda de una guitarra o piano < Crear y controlar tales vibraciones

Máquinas y sistemas estructurales donde las vibraciones pueden ser perjudiciales → Terremotos; Circulación vehículos < Eliminar o reducir tales vibraciones

1.1. Introducción

Clasificación de las vibraciones mecánicas

Vibraciones libres → Originadas y mantenidas por fuerzas gravitacionales o elásticas que solo dependen de la posición y el movimiento del cuerpo

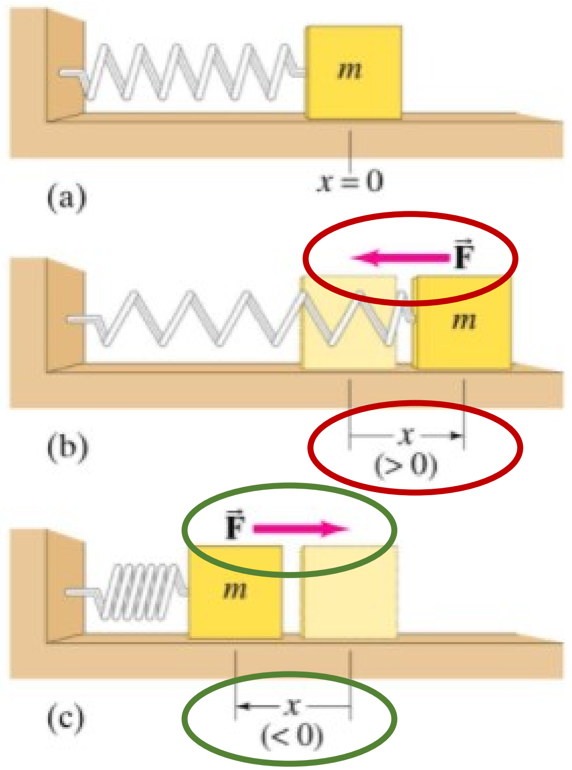
Vibraciones forzadas → Originadas y mantenidas por fuerzas periódicas externas que no dependen ni de la posición ni del movimiento del cuerpo

Ambas puedes ser

- *Amortiguadas* → Fuerzas disipativas (rozamiento, resistencia del aire) no son despreciables
- *No amortiguadas* → Fuerzas disipativas son despreciables

Contenidos

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas



Posición de equilibrio ➤ $x = 0$ ➤ No hay compresión ni estiramiento

Desplazamiento de la posición de equilibrio

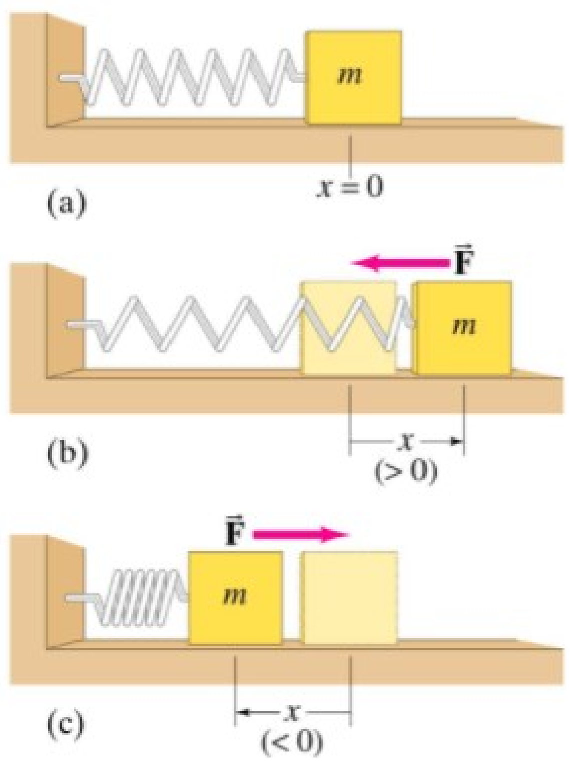
El resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición x ➤ Ley de Hooke

$$F = -kx$$

Fuerza restauradora

Siempre se dirige hacia la posición de equilibrio ➤ Opuesta al desplazamiento del bloque desde el equilibrio

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas



2ª ley de Newton ➤ $F = -kx = ma_x$ ➤ $a_x = -\frac{kx}{m}$

a_x proporcional a su posición

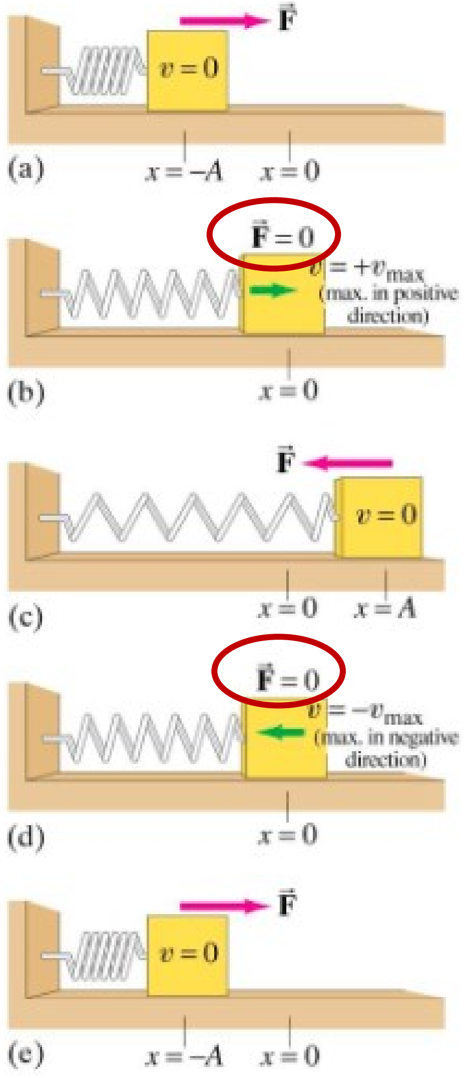
Dirección de a_x es opuesta a la dirección del desplazamiento del bloque desde el equilibrio

Los sistemas que se comportan de esta forma exhiben Movimiento Armónico Simple (MAS), que es el movimiento vibratorio más sencillo posible

Un objeto se mueve con MAS ➤

- $a_x \propto x$
- a_x sentido opuesto a x

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas



Desplazamiento hasta $x = -A$ | $a_x = \frac{kA}{m}$ | $v = 0$

Paso por la posición de equilibrio $x = 0$ | a_x cambia de signo ≫ v es máxima

Desplazamiento hasta $x = A$ | $a_x = -\frac{kA}{m}$ | $v = 0$

El bloque completa un ciclo completo de su movimiento volviendo a la posición original, pasando nuevamente por $x = 0$ con máxima velocidad

≫ En ausencia de fricción, el bloque oscila entre $x = -A$ y $x = A$

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

$$a_x = -\frac{kx}{m} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m} \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Frecuencia natural (angular) del sistema

Solución más general para de la ecuación diferencial del MAS $x(t) = B\sin(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t)$

B y C son constantes que dependen de las condiciones iniciales

$t = 0$

$$x(t) = B\sin(\omega_0 t) + C\cos(\omega_0 t) \rightarrow x(0) = x_0 = C$$

$$v(t) = B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - C\,\omega_0 \sin(\omega_0 t) \rightarrow v(0) = v_0 = B\omega_0 \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$x(t) = A\cos(\varphi_0')\sin(\omega_0 t) + A\sin(\varphi_0')\cos(\omega_0 t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0')$$

Fase inicial

Amplitud de la vibración

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0')}$$

También como: $$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

$\varphi_0' \neq \varphi_0$ ⋙ Relacionadas por las propiedades de las funciones trigonométricas seno y coseno

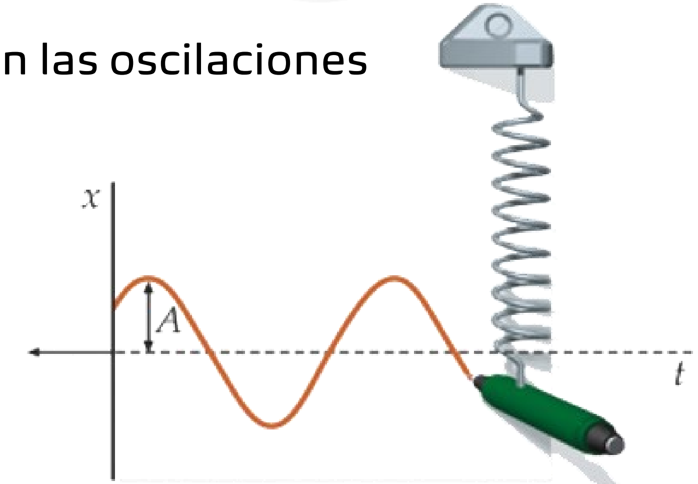
A y φ_0 se determinan por la posición y velocidad de la partícula a $t = 0$

A ⋙ Amplitud de la vibración: máximo valor de la posición del cuerpo en x positivo o negativa

ω_0 ⋙ Frecuencia angular (rad/s): medida de como de rápido ocurren las oscilaciones

φ_0' o φ_0 ⋙ Fase inicial (Constante de fase)

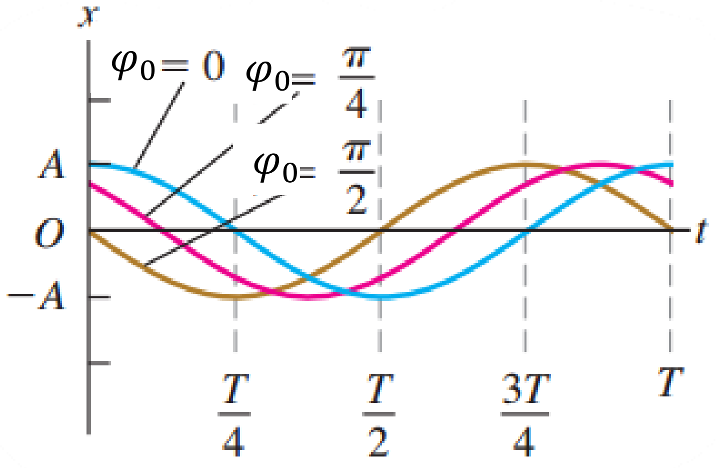
$(\omega_0 t + \varphi_0')$ o $(\omega_0 t + \varphi_0)$ ⋙ Fase del movimiento



1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

φ_0' o φ_0 ➤ Fase inicial (Constante de fase)

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



φ_0 indica cuando "comienza" la función $x(t)$

$t = 0$ ➤ $x(0) = x_0$ ➤ $x_0 = A\cos(\varphi_0)$

$\varphi_0 = 0$ ➤ $x_0 = A\cos(0) = A$

$\varphi_0 = \pi$ ➤ $x_0 = A\cos(\pi) = -A$

La partícula parte del desplazamiento máximo $\pm A$

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ➤ $x_0 = A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ La partícula parte del origen

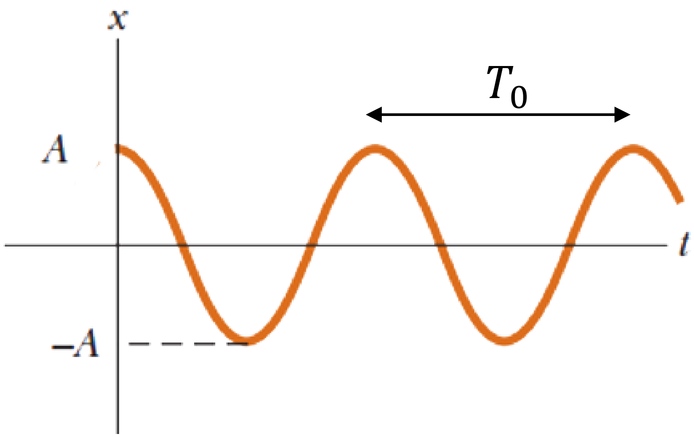
$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ➤ $x_0 = A\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ La partícula parte de entre O - A

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Si $x = A$ para $t = 0$

$$\varphi_0 = 0$$



$x(t)$

Función periódica

Tiene el mismo valor cada vez que $\omega_0 t$ aumenta 2π rad

T_0 Periodo: tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento

$$[\omega_0(t + T_0) + \varphi_0] - (\omega_0 t + \varphi_0) = 2\pi \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Big| \quad T_0(m, k)$$

f_0 Frecuencia ($\mathrm{ciclos/s = Hz}$): número de oscilaciones por unidad de tiempo

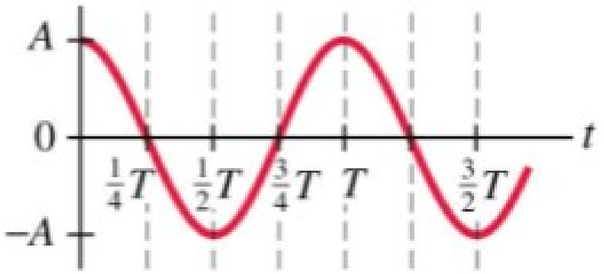
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \Big| \quad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Big| \quad f_0(m, k)$$

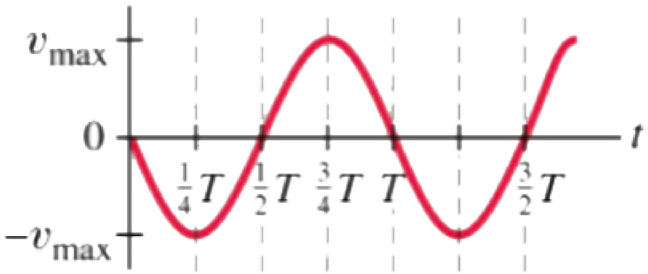
1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -{\omega_0}^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -{\omega_0}^2 x$$





$$v_{max} = \omega_0 A = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x = \pm A$ ⮞ $v = 0$

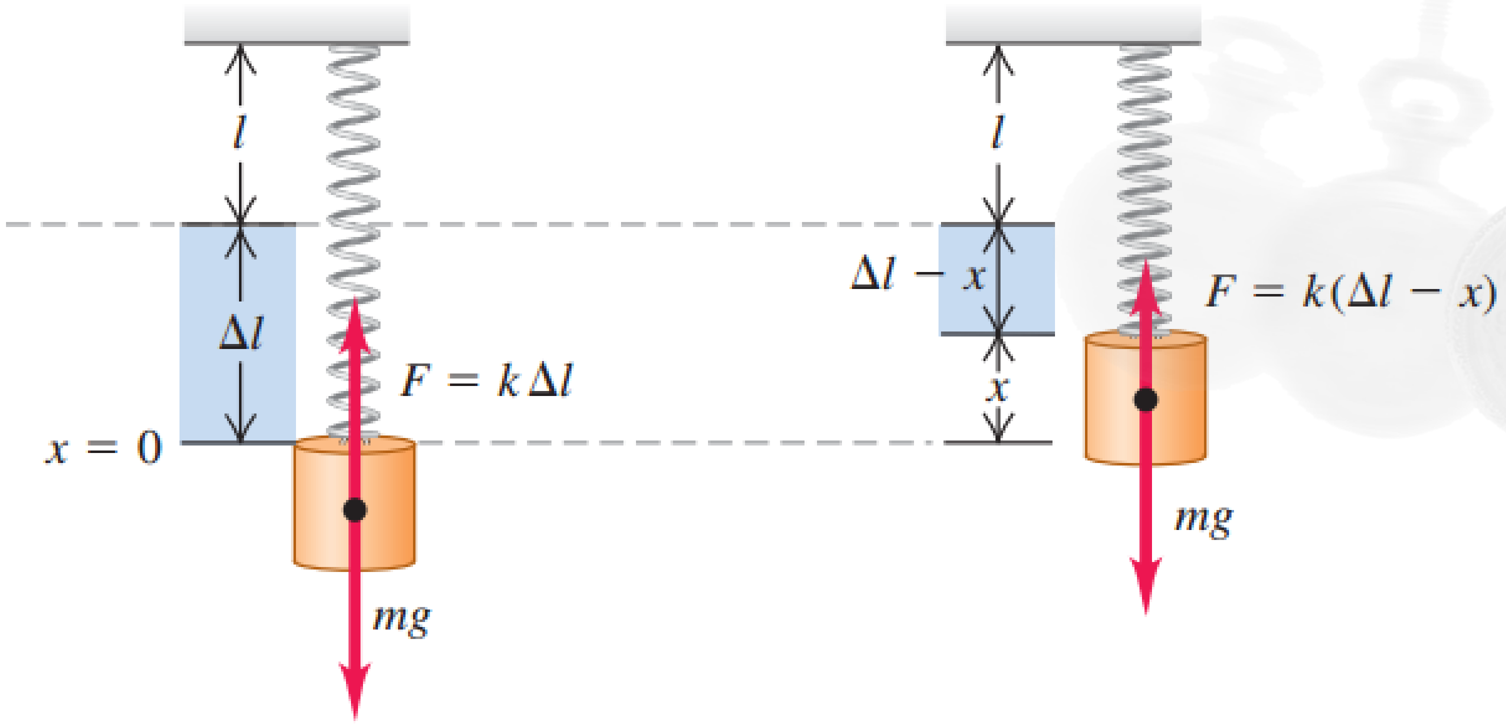
$x = 0$ ⮞ $v = v_{max}$

$$a_{max} = {\omega_0}^2 A = \frac{k}{m}A$$

Fase de la a difiere de la fase de la x en π rad

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

Resorte se coloca en posición vertical



Posición de equilibrio

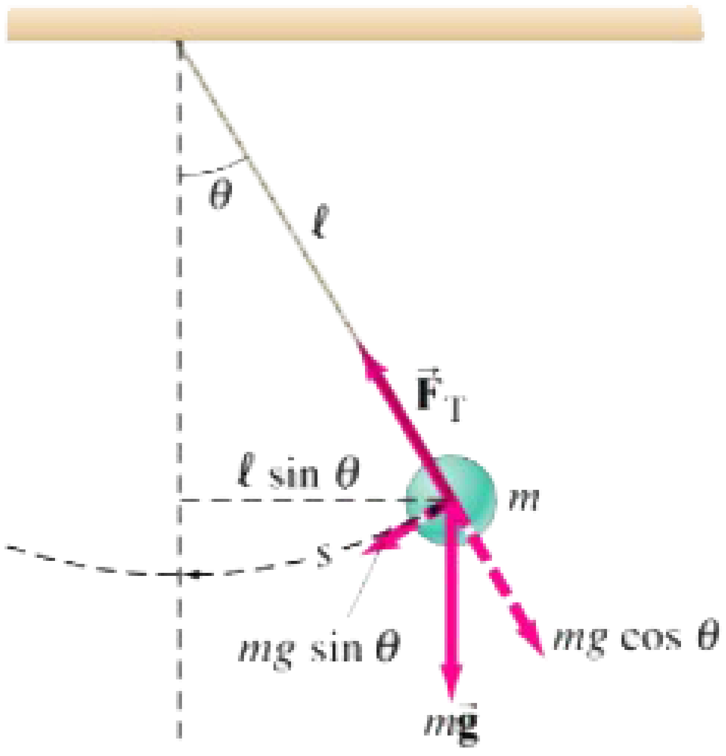
$$k\Delta l = mg$$

Desplazamiento hacia arriba

$$F_{neta} = k(\Delta l - x) - mg = -kx = ma_x$$

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

Péndulo simple



$m_{cuerda} \ll m$

Segunda ley de Newton del movimiento en la dirección tangencial

$$F_t = ma_t \quad \Rightarrow \quad -mg\operatorname{sen}(\theta) = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

La F_t actúa hacia la posición de equilibrio vertical

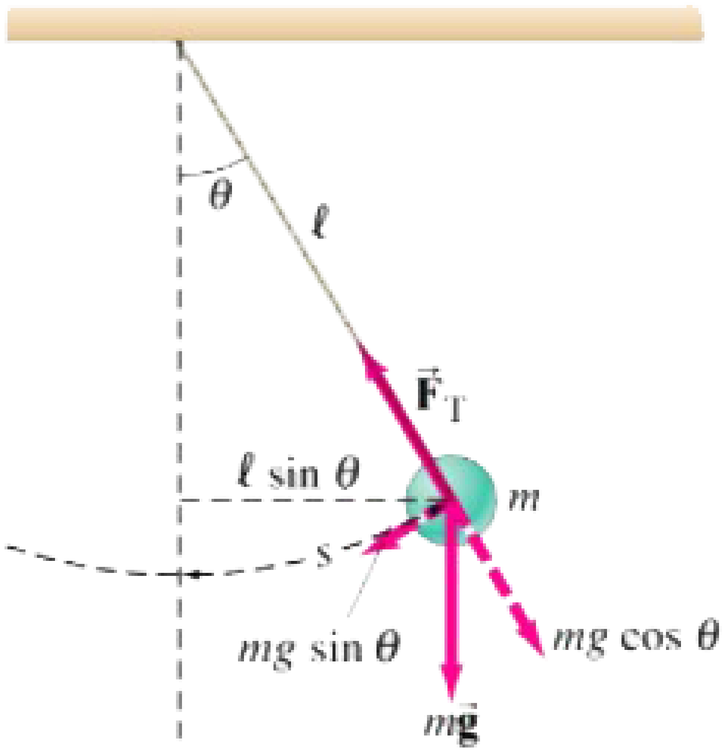
$$s = l\theta \xrightarrow{l \text{ const}} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}(\theta) = 0$$

¿Tiene la misma forma que la ecuación del MAS? $\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = 0$

Respuesta: Va a ser que no

1.2. Vibraciones libres no amortiguadas

Péndulo simple



$m_{cuerda} \ll m$

Aproximación del ángulo pequeño ➤ $\theta < 10\,°$ (0.2 rad) ➤ $\text{sen}(\theta) \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Oscilaciones pequeñas ➤ Péndulo simple → MAS

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

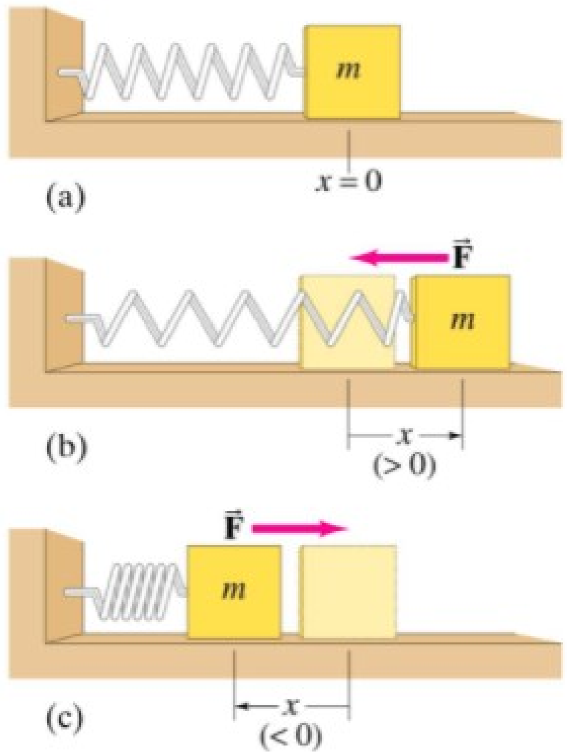
θ_{max}: posición angular máxima

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ | $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ | ω_0 y T_0 solo dependen de l y g

➤ Técnica sencilla para calcular la aceleración de la gravedad

Contenidos

1.2.1. Energía de un oscilador no amortiguado



No hay fricción ⮞ La energía mecánica total (E) se conserva

Se considera un resorte sin masa

Energía cinética ⮞ $K = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}m{\omega_0}^2A^2\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

$v(t) = -\omega_0 A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$

Energía potencial ⮞ $U = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Siempre ⮞ $K \geq 0$ y $U \geq 0$

1.2.1. Energía de un oscilador no amortiguado

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2[\text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}kA^2$$

E no depende de la masa

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Constante

E es igual a la U máxima almacenada en el resorte cuando $x = \pm A$ $(v = 0)$

Posición de equilibrio $x = 0$ $\;\Rightarrow\;$ $U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$ $\;\Rightarrow\;$ $E = K + U = K$

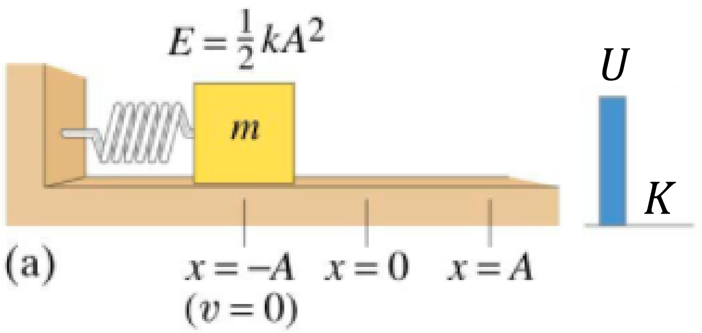
Velocidad v del bloque para un desplazamiento x dado

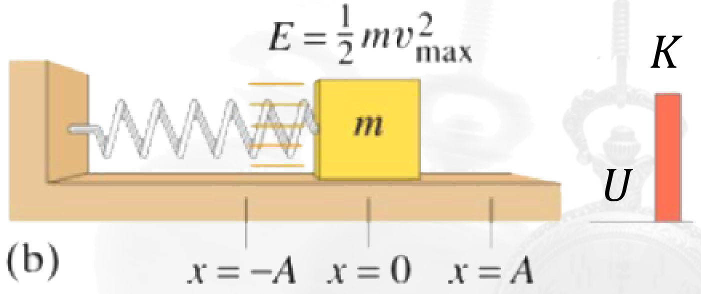
$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \;\Rightarrow\; v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega_0\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

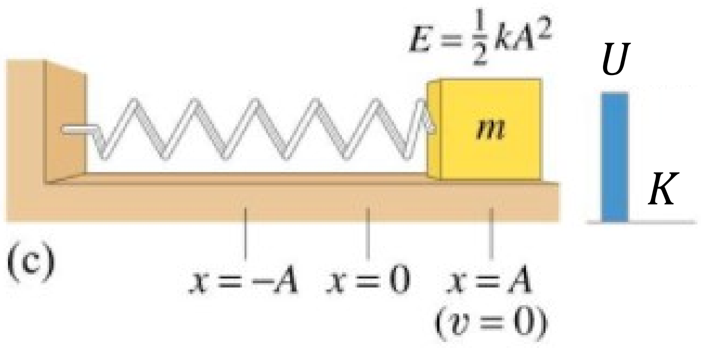
El bloque se puede estar moviendo en cualquiera de las dos direcciones

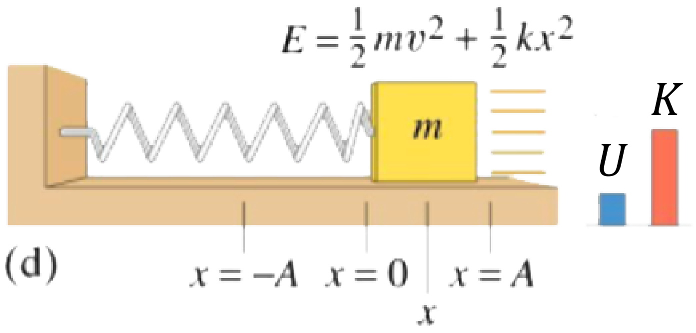
$x = 0 \;\Rightarrow\; v = v_{máxima}$ | $x = \pm A \;\Rightarrow\; v = 0$

1.2.1. Energía de un oscilador no amortiguado









Contenidos

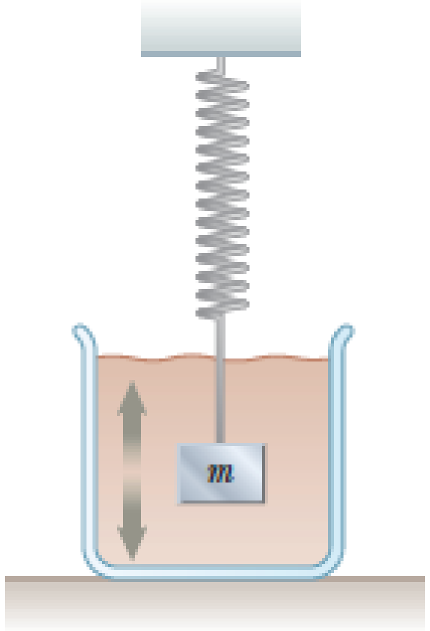
1.3. Vibraciones libres amortiguadas

El MAS no tiene en cuenta el efecto de la fricción o amortiguamiento del sistema

Sistemas reales ⮞ Fuerzas no conservativas (fricción) ⮞ Retardan el movimiento

La energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo

El movimiento está amortiguado



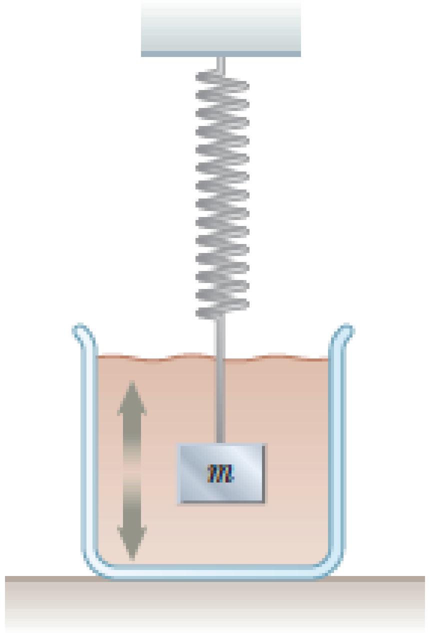
⮞ La energía mecánica perdida se transforma en energía interna en el objeto y el medio retardador

Existe una fuerza de amortiguamiento opuesta al movimiento y proporcional a la velocidad

$\vec{F}_{disipativa} = -Rv_x$ Amortiguamiento lineal: válido si la velocidad no es muy grande

R: Coeficiente de amortiguamiento (unidades SI: $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}^{-1}$)

1.3. Vibraciones libres amortiguadas



Segunda ley de Newton $\sum F_x = -kx - Rv_x = ma_x$ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

β : Constante de amortiguamiento (s^{-1}) $\beta = \frac{R}{2m}$

ω_0: frecuencia natural del sistema si no hubiera amortiguamiento $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω: frecuencia angular de la oscilación amortiguada $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$

1.3. Vibraciones libres amortiguadas

Solución de la ecuación diferencial es del tipo ➤ $x(t) = Ce^{-\lambda t}$

Parámetros C y λ deben satisfacer las condiciones iniciales y la ecuación diferencial

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}}$$

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}$$

$$\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}$$

c_1 y c_2 se determinan de las condiciones iniciales en $t = 0$:

$$x(0) = x_0 = c_1 + c_2$$

$$v(0) = v_0 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$$

El comportamiento del sistema depende de los valores que toma β

(a) $\beta > \omega_0$ ➞ Las dos soluciones son reales, negativas y diferentes ➤ Sistema sobreamortiguado

(b) $\beta = \omega_0$ ➞ Solución real doble ➤ Sistema con amortiguamiento crítico

(c) $\beta < \omega_0$ ➞ Las dos soluciones son complejas conjugadas ➤ Sistema subamortiguado

Contenidos

1.3.1. Tipos de vibraciones libres amortiguadas

- (a) *Sistema sobreamortiguado*

$\beta > \omega_0$ ➡ Las dos soluciones son reales, negativas y diferentes

$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 e^{-|\lambda_2| t}$$

$F_{disipativa}$ es grande en comparación con la fuerza restauradora

El desplazamiento disminuirá tendiendo a cero al crecer el tiempo t y el movimiento no será vibratorio

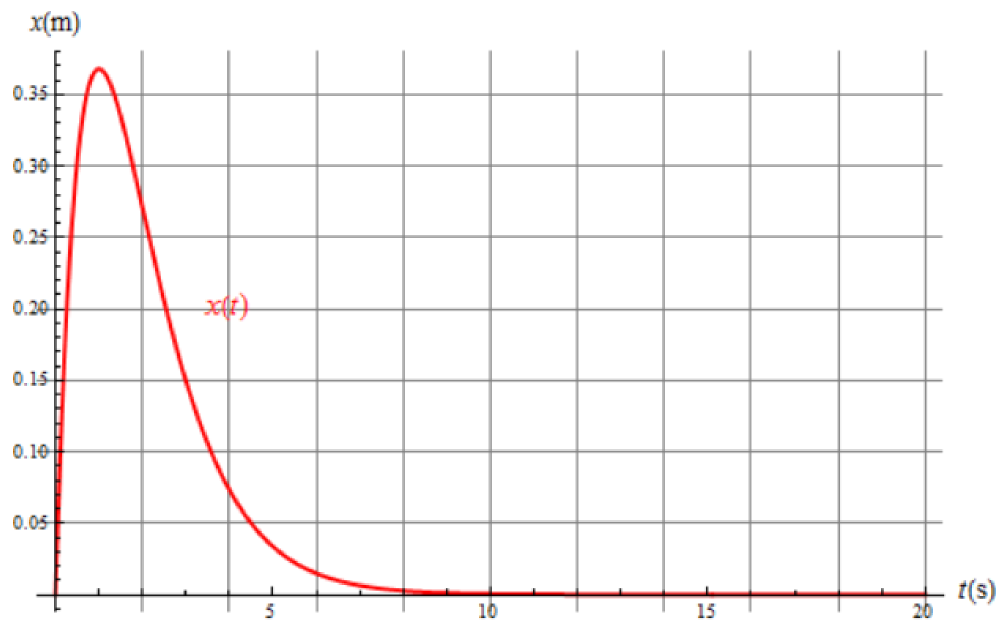
1.3.1. Tipos de vibraciones libres amortiguadas

- (a) *Sistema con amortiguamiento crítico*

$\beta = \omega_0$ → Solución real doble

$$\boxed{x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\omega_0 t}}$$

Sí $R = R_{crítico}$ ➤ $\dfrac{R}{2m} = \omega_0$ | $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2} = 0$ ➤ $R = 2\sqrt{km}$



El desplazamiento tiende a cero al crecer el tiempo t y el movimiento no es oscilatorio

El amortiguamiento crítico es la menor cantidad de amortiguamiento para la cual no oscila el sistema

1.3.1. Tipos de vibraciones libres amortiguadas

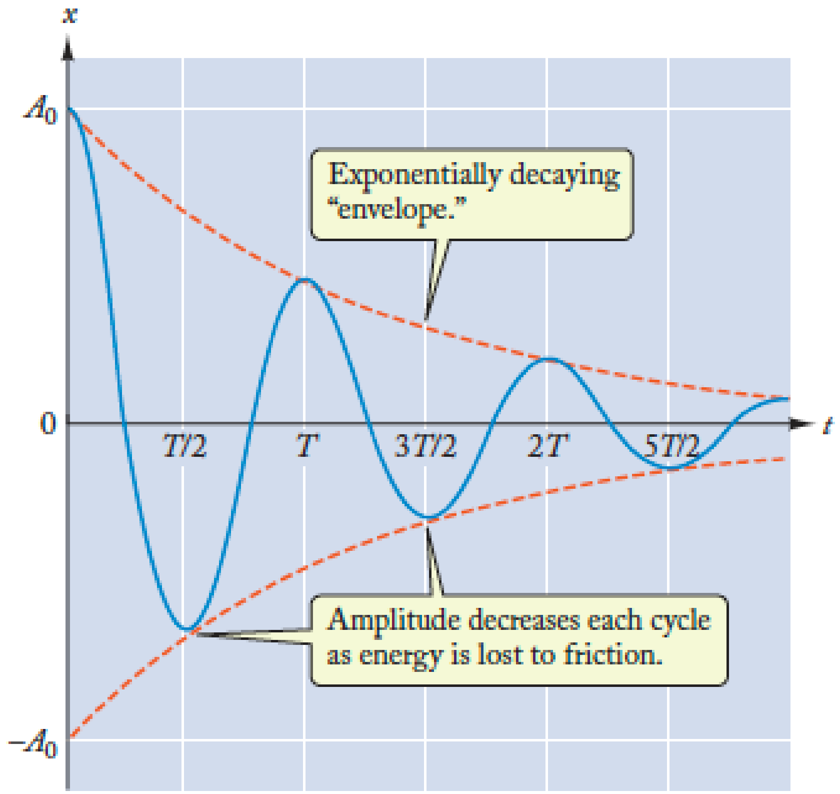
- (a) *Sistema subamortiguado*

$\beta < \omega_0$ → Las dos soluciones son complejas conjugadas

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

Cuando $F_{disipativa}$ es pequeña



La amplitud de la oscilación amortiguada $A(t)$ no es constante

Cuando la fuerza disipativa es pequeña, el carácter vibratorio del movimiento se conserva, pero la amplitud disminuye en el tiempo.

El movimiento cesa

$$\omega < \omega_0 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} < \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0$$

Contenidos

1.3.2. Energía de un oscilador amortiguado

Energía mecánica disminuye continuamente debido al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (fricción)

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A(t)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 {A_0}^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}$$

La pérdida de energía por ciclo es una fracción constante de la energía E que tiene el oscilador al comienzo del ciclo

Fracción de energía perdida por ciclo $\Delta E = \frac{2\pi}{Q} E$

Factor de calidad del oscilador

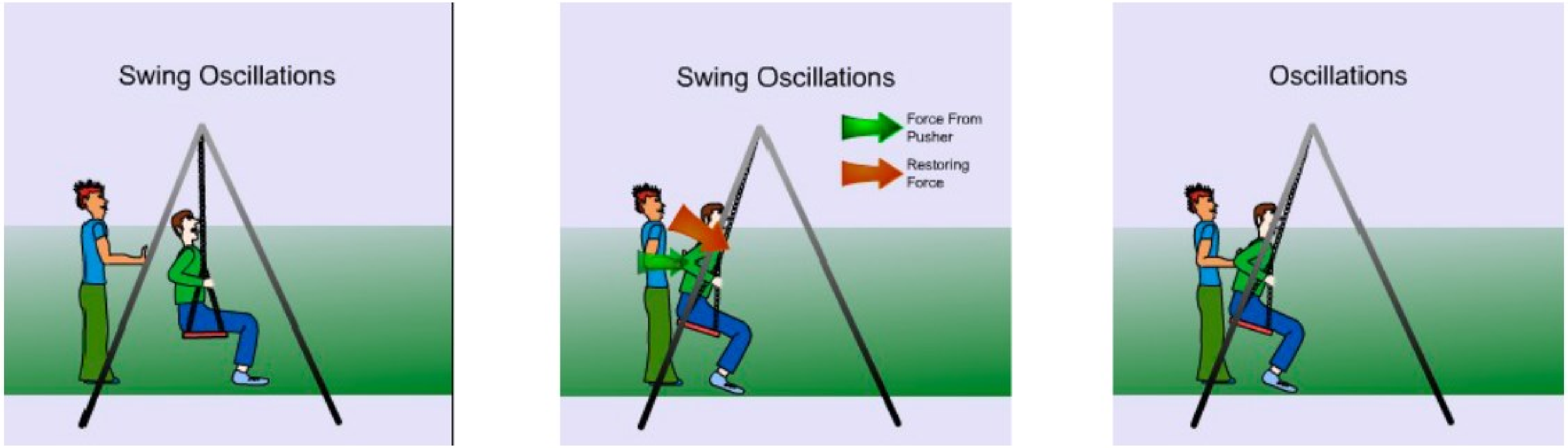
$$Q = \frac{\sqrt{km}}{R} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{2\pi}{(\Delta E/E)_{ciclo}}$$

Q ≈ número de ciclos que completa el oscilador antes de que las oscilaciones se atenúen significativamente

- Oscilador con baja fricción tiene un alto valor de Q y una pequeña pérdida de energía por ciclo
- Oscilador con alta fricción tiene un valor bajo de Q y una gran pérdida de energía por ciclo

Contenidos

1.4. Oscilaciones forzadas. Resonancia



La amplitud del movimiento permanece constante si la entrada de energía por cada ciclo de movimiento iguala exactamente la disminución en energía mecánica en cada ciclo que resulta de las fuerzas resistivas

1.4. Oscilaciones forzadas. Resonancia

Oscilador forzado ➤ Oscilador amortiguado impulsando por una fuerza periódica $F = F_0 \cos(\omega_f t)$

F_0: Amplitud constante de la fuerza impulsora

ω_f: frecuencia angular de la fuerza impulsora

2ª ley de Newton ➤ $\sum F_x = ma_x = F_0 \cos(\omega_f t) - R\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = F_0 \cos(\omega_f t)$$ ➤ $\boxed{x(t) = x_{trans}(t) + x_{est}(t)}$

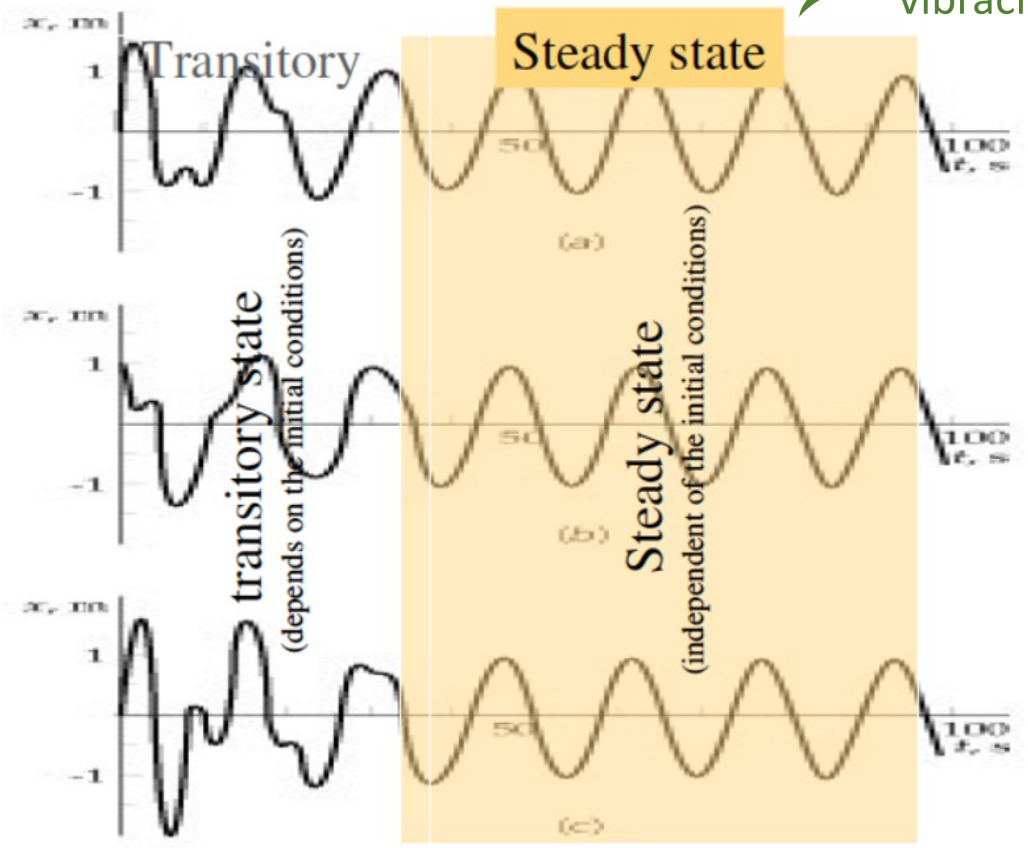
Estado transitorio

Solución de la ecuación diferencial homogénea sin considerar F. Depende de si el sistema es subamortiguado, amortiguado críticamente o sobreamortiguado (apartado 1.3.1)

Estado estacionario

Solución particular de la ecuación diferencial considerando $F = F_0 \cos(\omega_f t)$

1.4. Oscilaciones forzadas. Resonancia



No decrece con el tiempo. Se conoce como vibración permanente

Solución para el estado estacionario:

$$x_{est}(t) = A\cos(\omega_f t + \varphi_0)$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_f^2}}$$

$$\tan(\varphi_0) = \frac{2\beta\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.4. Oscilaciones forzadas. Resonancia

$$x = A\cos(\omega_f t + \varphi) \quad \Big| \quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_f^2}} \quad \Big| \quad \tan(\varphi) = \frac{2\beta\omega_f}{\omega_o^2 - \omega_f^2} \quad \Big| \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

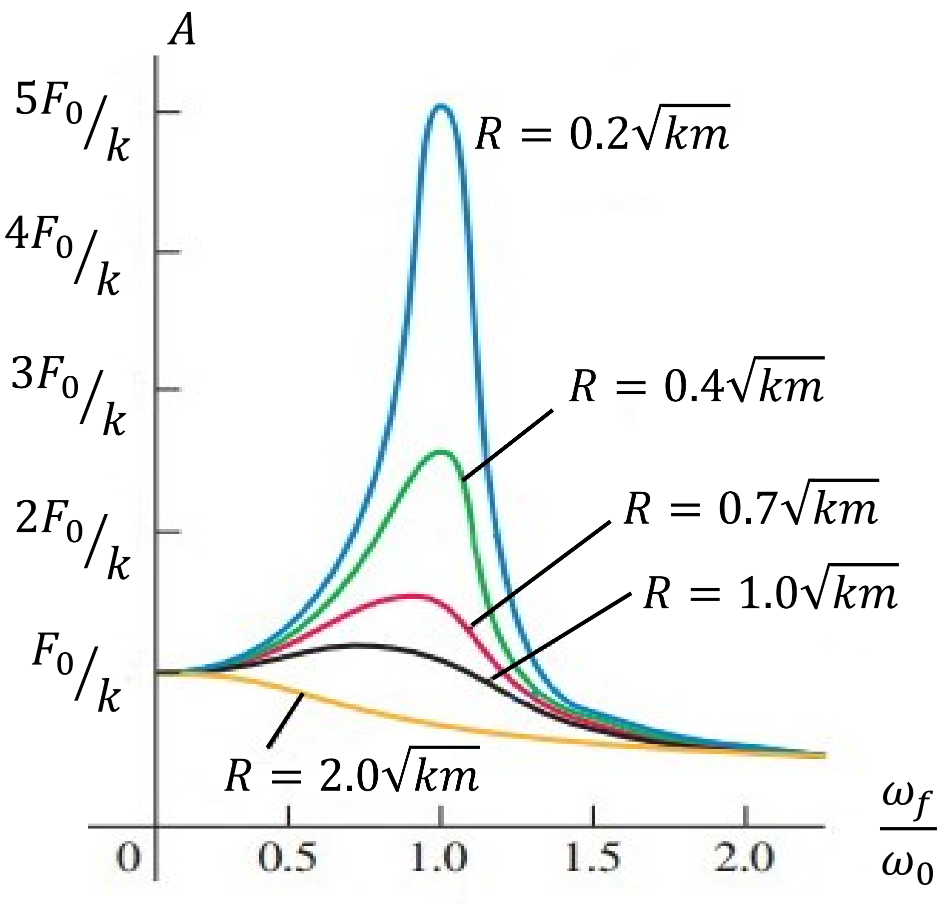
- El oscilador forzado vibra a la frecuencia de la fuerza impulsora
- La amplitud del oscilador es constante para una fuerza impulsora determinada porque se impulsa en estado estacionario mediante una fuerza externa

Cuando $\omega_f = \omega_0$ ⮞ Amplitud A grande ⮞ Resonancia

$\omega_0 = \omega_{res}$: Frecuencia de resonancia

1.4. Oscilaciones forzadas. Resonancia

Amplitud final de oscilación en función de la frecuencia de la fuerza impulsora armónica para tres sistemas masa-resorte con la misma frecuencia angular natural ω_0 pero diferentes valores de β.



$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_f^2}}$$

Amplitud de las oscilaciones en resonancia ⋙ $A_{res} = \dfrac{F_0/m}{2\beta\omega_0}$

Ancho de la frecuencia angular de resonancia ⋙ $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$