TEMA 5 : DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

- Valores y vectores propios :

* Dada una matriz cuadrada A $(n \times n)$, diremos que el escalar λ es un valor propio de A si existe un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que :

$$\boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}}$$

$$\underset{\substack{A \\ n \times n}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \cdot \underset{\substack{\vec{v} \\ n \times 1}}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} = \lambda \cdot \underset{\substack{\vec{v} \\ n \times 1}}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}$$

* Al vector $\vec{v}$ se le conoce como vector propio asociado a λ .

$\boxed{\text{¿Por qué } \vec{v} \neq \vec{0} \text{?}}$

Si $\vec{v} = \vec{0}$: $\quad A \cdot \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0} \rightarrow \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

¡ todo λ sería valor propio !

Valor propio $\equiv$ autovalor   Vector propio $\equiv$ autovector

Ejemplo Para la matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

comprobar que $\vec{v} = (1, 2, 0)$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 3$.

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad ?$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \overset{?}{=} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

* Subespacio propio asociado a λ : V_λ

Conjunto de todos los vectores propios asociados a un λ, junto al $\vec{0}$.

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \longrightarrow A \cdot \vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0} \longrightarrow (A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

S.C.I   HOMOGÉNEO

$$\boxed{V_\lambda = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ (A-\lambda I)\cdot \vec{v} = \vec{0} \}} \quad \text{o} \quad \boxed{V_\lambda = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)}$$

* Polinomio característico : $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ (grado n)

* Ecuación característica : $|A - \lambda I| = 0$

Valores propios de A = soluciones λ de la ec. característica

= raíces λ de $P(\lambda)$

Multiplicidad geométrica de λ : $\dim(V_\lambda)$

Multiplicidad algebraica de λ $\equiv$ multiplicidad de λ como raíz en $P(\lambda)$: m

Se cumple que : $\boxed{1 \leq \dim(V_\lambda) \leq m}$

- <u>Cálculo de valores y vectores propios</u> :

① Resolvemos $|A - \lambda I| = 0$

Soluciones $\lambda_i \longrightarrow$ Valores propios de A. ✓

② Para cada λ_i, resolvemos el S.C.I : $(A - \lambda_i I)\cdot \vec{v} = \vec{0}$

Solución : $V_{\lambda_i} \longrightarrow$ <u>base</u> B_{λ_i}

Vectores de $B_{\lambda_i} \longrightarrow$ Vectores propios asociados a λ_i. ✓

<u>Ejercicio</u> : Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Determinar sus valores y vectores propios.

* Si A es una matriz triangular $(n \times n)$, entonces sus valores propios son sus elementos de la diagonal principal.

Ejemplo: Determinar los valores propios de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -3 \end{aligned}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_4 &= -4 \\ \lambda_5 &= 3 \end{aligned}}$$

- **Diagonalización de matrices cuadradas :**

Una matriz cuadrada A $(n \times n)$ con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$

es diagonalizable si y solo si :

① $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$

② $m_i = \dim(V_{\lambda i})$ $(i = 1, 2, \dots, p)$

Si A es diagonalizable, existirá una matriz diagonal D y

una matriz de paso P (invertible) que verifican :

$$\boxed{A \cdot P = P \cdot D}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

A y D son semejantes

Donde :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad P = \begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & \vec{v}_n \\ \left(\begin{matrix} \, \\ \, \\ \, \end{matrix} \right. & & \cdots & \left. \begin{matrix} \, \\ \, \\ \, \end{matrix} \right) \end{array}$$

MISMO ORDEN !!!

$\boxed{\text{Importante}}$

* Si todos los λ_i $\overbrace{\text{tienen } m_i = 1}^{\text{son distintos}}$: A es diagonalizable.

* Si algún λ_i tiene $m_i > 1$: A puede ser / no ser diagonalizable.

Ejercicio : Siendo la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Calcular sus autovalores.

b) Calcular sus autovectores.

c) En caso de ser diagonalizable la matriz A, hallar la matriz diagonal D y la matriz de paso P.

Ejercicio: Diagonalizar la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio: Analizar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, y en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal D y la matriz de paso P.

- **Potencias de una matriz diagonalizable :**

Si A es diagonalizable , se cumple que : $A \cdot P = P \cdot D$

Despejando A :

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Hallamos las $1^{\underline{as}}$ potencias :

$$A^2 = A \cdot A = P \cdot D \cdot \underbrace{\cancel{P^{-1} \cdot P}}_{I} \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = P \cdot D^2 \cdot \underbrace{\cancel{P^{-1} \cdot P}}_{I} \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$$

$\vdots$

$$\boxed{A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}}$$

fácil de calcular ✓

Ejercicio: Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable y que la matriz diagonal y la matriz de paso son:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{200}.