· Diagonalización ortogonal:

Recordenos que una matriz cuadrada P (nxn) es ortogonal si:

$$p^{-1} = p^{t}$$
 o $p. p^{t} = I$ p^{-1} debe existing

En una matriz ortogonal, sus columnas son un conjunto ortonormal de vectores.

<u>Ejercicio</u>: Verificar que P es una matriz ortogonal. Comprobar, además, que las columnas de P forman un conjunto ortonormal.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada A (nxn) es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal P tal que:

$$D = P^{-1} A \cdot P = P^{t} \cdot A \cdot P \longrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{t}$$

$$P^{-1} = P^{t}$$

Solo les matrices reales simétrices son diagonalizables ortogonalmente:

A es diagonalizable ortogonalmente \iff A es simétrica (real)

- * Proceso de diagonalización ortogonal:
 - 1) Comprobar que A es una matriz real simétrica (n x n).
 - 2 Calcular los Di y mi de A.
 - 3) Para cada li con mi = 1 : calcular el vector propio y normalizarlo.

4) Para cada li con mi > 1: calcular mi vectores propios y

5 Vectores propios ortonormales -> columnas de P.

Valores propios ----> diagonal principal de D.

Ejercicio: Determinar una matriz P que diagonalice ortogonalmente

a
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
. Comprobar que $D = P^{t} A \cdot P$.

Ejercicio: Diagonalizar ortogonalmente la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

• Des composición en valores singulares : 5VD

Hasta ahora, sabemos que :

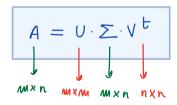
* Si A es una matriz simétrica (nxn) -> siempre es diagonalizable.

* Si A es una matriz cuadrada (n×n) -> puede ser diagonalizable.

* d' si A es una matriz rectaugular (mxn)? -> SVD.

da des composición en valores singulares (SVD) de una matriz

A (mxn) es una factorización de la forma:



Donde :

U: matriz ortogonal mxm.

E: matriz diagonal mxn.

V: matriz ortogonal nxn.

Trabajamos con la matriz simétrica :
$$A^{t}A$$
 $\begin{cases}
 \text{es diagonalizable} \\
 \lambda_{i} \geq 0
\end{cases}$

Ordenaus los valores propios de AtA de mayor a menor:

$$\lambda_{1} \geq \lambda_{2} \geq \dots \geq \lambda_{r} \geq \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_{n} = 0$$

$$= 0$$

Entonces, los valores singulares de A serán :

$$\nabla_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \nabla_2 = \sqrt{\lambda_2}, \dots, \quad \nabla_r = \sqrt{\lambda_r}$$

y las matrices $U_1 \sum_i y_i V$ se corresponderain con:

vectores propios ortonormales

$$U = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ \end{array} \right) \\$$

I si suera necesario !

Ejercicio: Obtener la factorización SVD de la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$