TEMA 1: Fundamentos del modelado de sistemas dinámicos

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
Curso 2025-2026 - Semanas 2 y 3

UA
UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

DFESTS

Índice

Índice

1. ¿Que es un Sistema Dinámico?

- Un sistema dinámico es un conjunto de elementos interrelacionados cuyo estado, definido por variables de estado, cambia a lo largo del tiempo, generalmente influenciado por entradas (inputs), condiciones iniciales y reglas de evolución.
- Un **sistema dinámico autónomo** se expresa como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}(t=0) = x_0$$

1. ¿Que es un Sistema Dinámico?

- Esta expresión representa un conjunto de n ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \quad\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

1.a. Componentes de un sistema dinámico

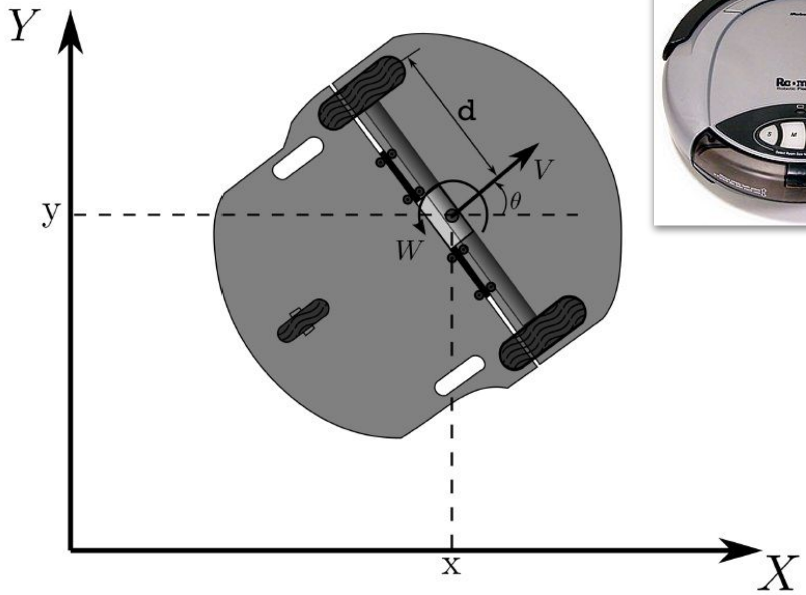
- **Variables de estado**: representan el estado interno del sistema ***x(t)***.
- **Entradas (inputs)**: señales externas que afectan al sistema ***u(t)***.
- **Salidas (outputs)**: resultados observables del sistema ***y(t)***.
- **Ley de evolución**: describe cómo las variables cambian ***dx(t)/dt***.

Cuando el sistema incluye entradas ***u(t)***, se le denomina **sistema dinámico NO autónomo**:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x}(t=0) = x_0$$

1.b. Ejemplos de sistemas dinámicos

- **Robot Móvil**

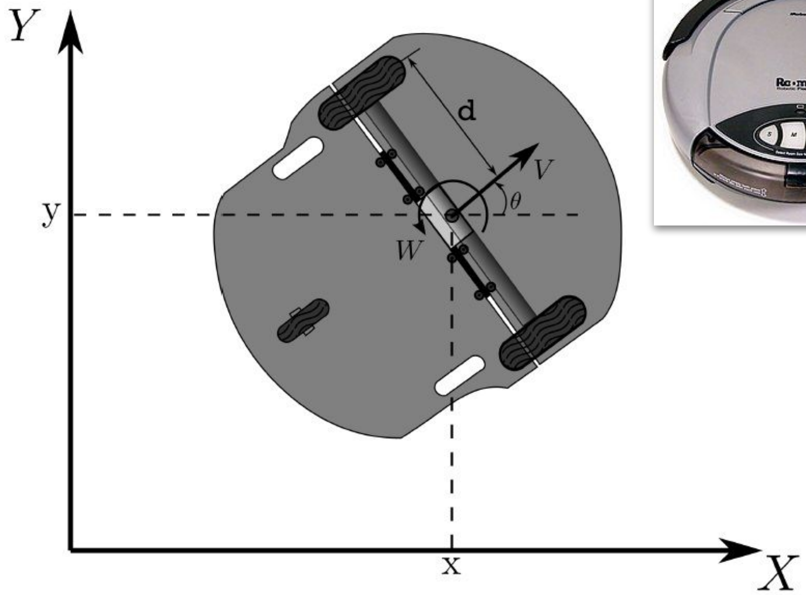


VARIABLES DE ESTADO:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

1.b. Ejemplos de sistemas dinámicos

- **Robot Móvil**

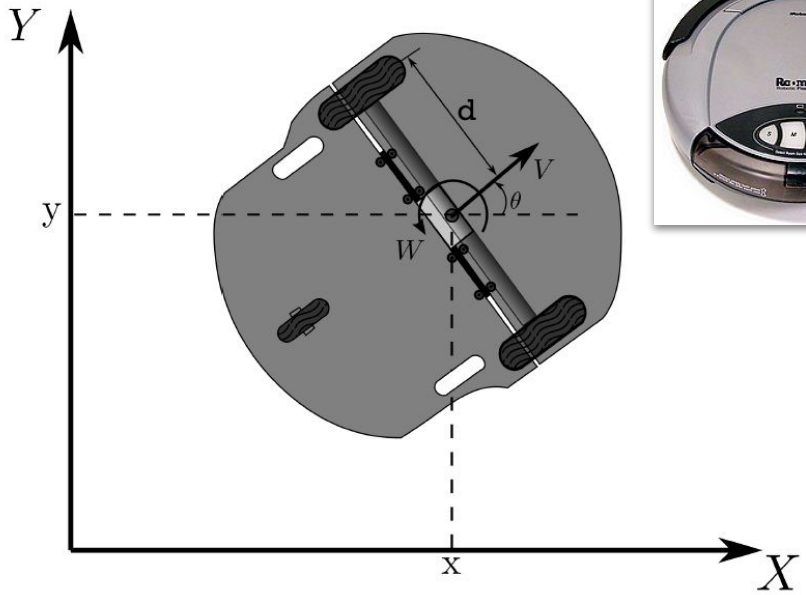


ENTRADAS DEL SISTEMA:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

1.b. Ejemplos de sistemas dinámicos

- **Robot Móvil**

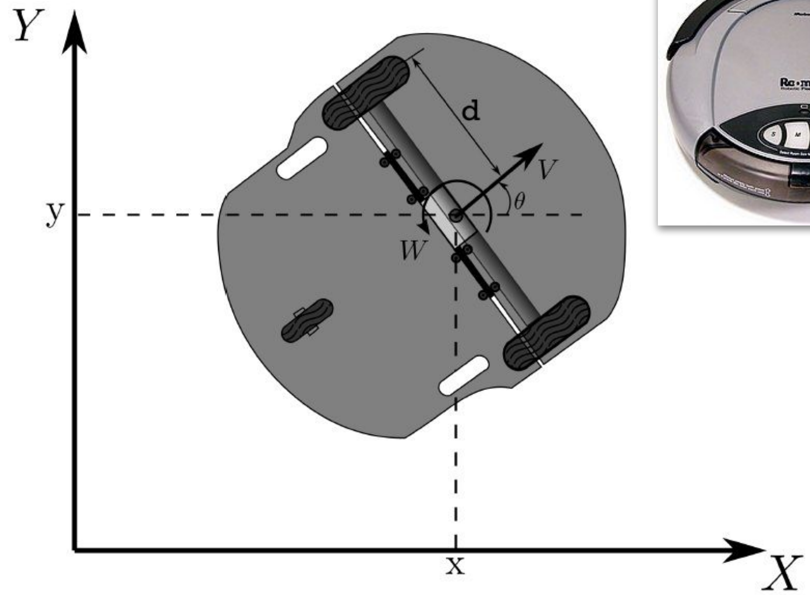


SALIDAS DEL SISTEMA:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

1.b. Ejemplos de sistemas dinámicos

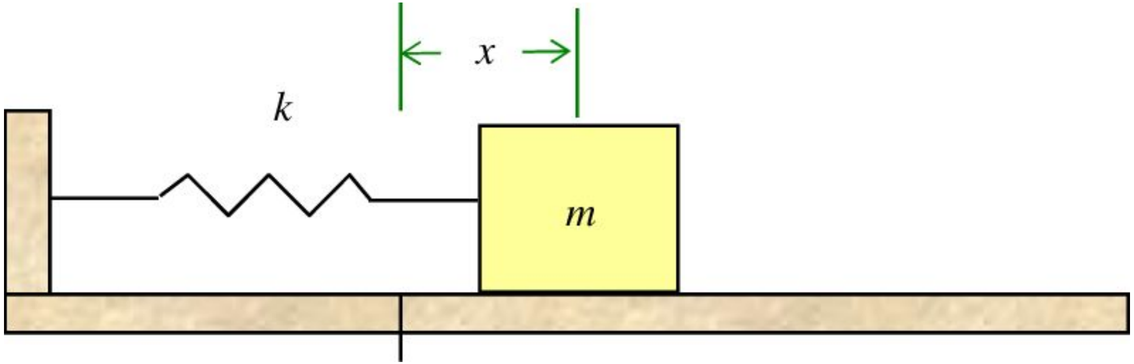
- **Robot Móvil**



LEY DE EVOLUCIÓN:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)\cos(\theta(t)) \\ v(t)\sin(\theta(t)) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

1.a. Ejemplos de sistemas dinámicos



Sistema	Estado	Entrada	Salida
Masa-resorte	Posición, velocidad	Fuerza $F(t)$	Posición $x(t)$
Población bacteriana	Población $P(t)$	Nutrientes $N(t)$	Tasa de crecimiento
Cuenta bancaria	Saldo x_t	Depósitos/retiros u_t	Saldo
Sistema económico	PIB $Y(t)$, Precios $P(t)$	Políticas fiscales $G(t), I(t)$	Producción, inflación

Índice

2. Solucion analitica vs solucion numerica

Dado un sistema dinámico en la forma: $$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t))$$

Su solución consiste en obtener ***x(t)***.

- Solución analítica:
  - Si es integrable: $\mathbf{x}(t) = \Phi(t; \mathbf{x}_0)$
  - Para analizar el sistema, estabilidad, divergencia, etc (siguiente tema).
- Solución numérica (método de euler):
  - Permite seguir la evolución del sistema en tiempo real
  - Es el solución utilizada para simulación y control:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \cdot f(\mathbf{x}_k)$$

2. Solucion analitica vs solucion numerica

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

Dado un sistema dinámico en la forma: $$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t))$$

Su solución consiste en obtener ***x(t)***.

- Solución analítica:
  - Si es integrable: $\mathbf{x}(t) = \Phi(t; \mathbf{x}_0)$
  - Para analizar el sistema, estabilidad, divergencia, etc (siguiente tema).
- Solución numérica (método de euler):
  - Permite seguir la evolución del sistema en tiempo real
  - Es el solución utilizada para simulación:

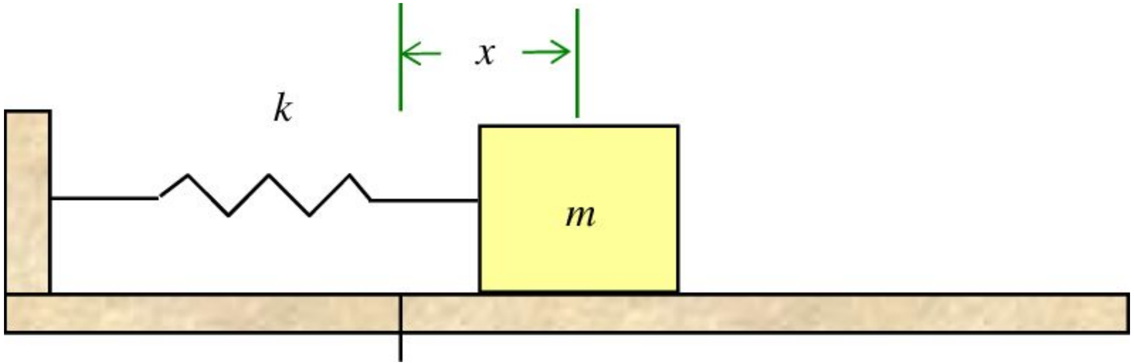
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \cdot f(\mathbf{x}_k)$$

Ejemplo Robot Móvil

$$\boxed{\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot v_k \cos(\theta_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta t \cdot v_k \sin(\theta_k) \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t \cdot \omega_k \end{cases}}$$

Ejemplo: Masa-resorte

- Solución analítica:

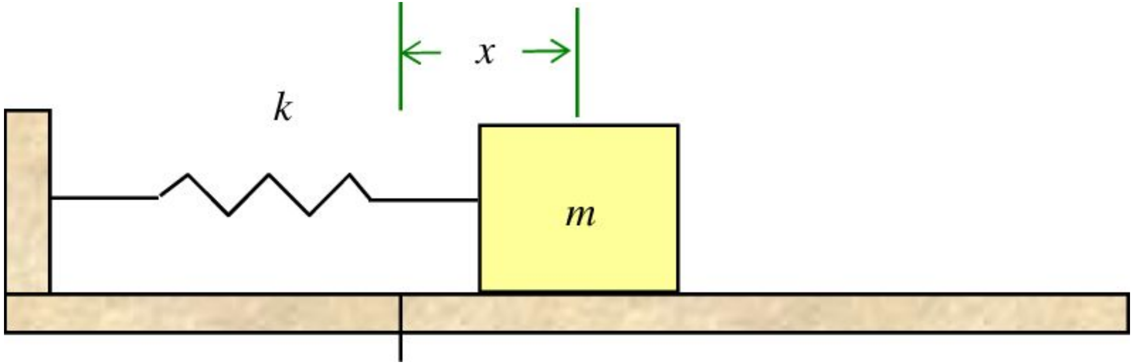


$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Ejemplo: Masa-resorte

- Solución analítica:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t))}$$



$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow$$

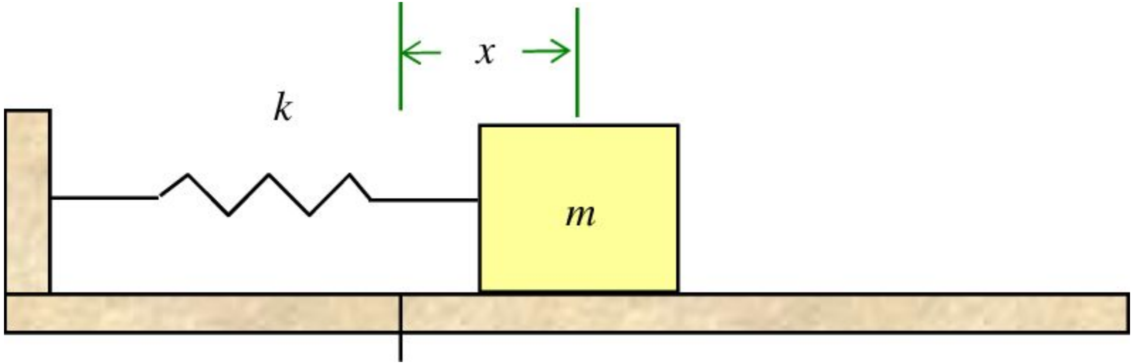
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1$$

Ejemplo: Masa-resorte

- Solución analítica:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

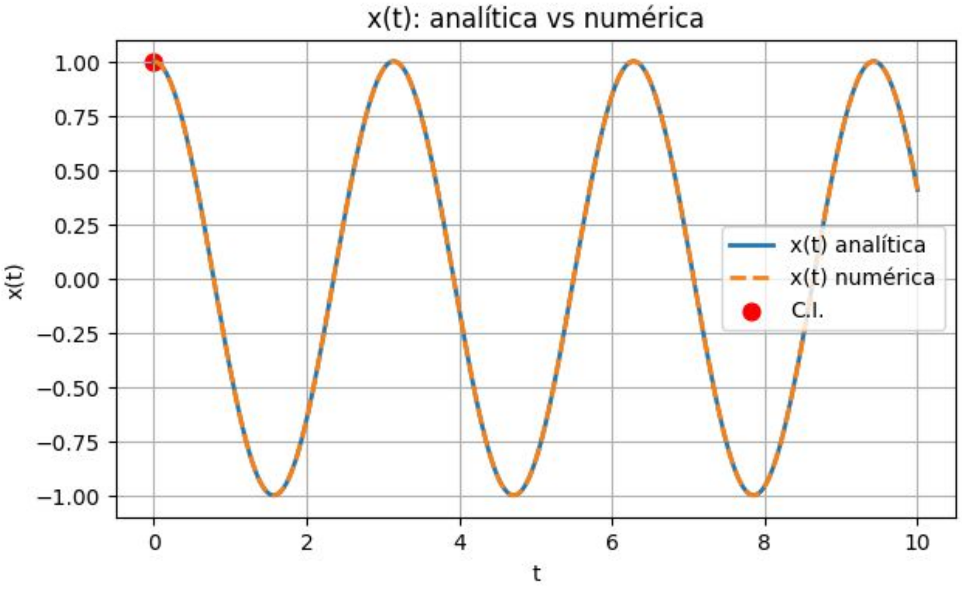


Solución general
Oscilación armónica

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Ejemplo: Masa-resorte

- Solución numérica:



$$\begin{cases} x_1^{k+1} = x_1^k + \Delta t \cdot x_2^k \\ x_2^{k+1} = x_2^k - \Delta t \cdot \omega^2 x_1^k \end{cases}$$

Ejemplo: Modelo logístico

- Solución analítica:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)$$

Integrando, nos queda:

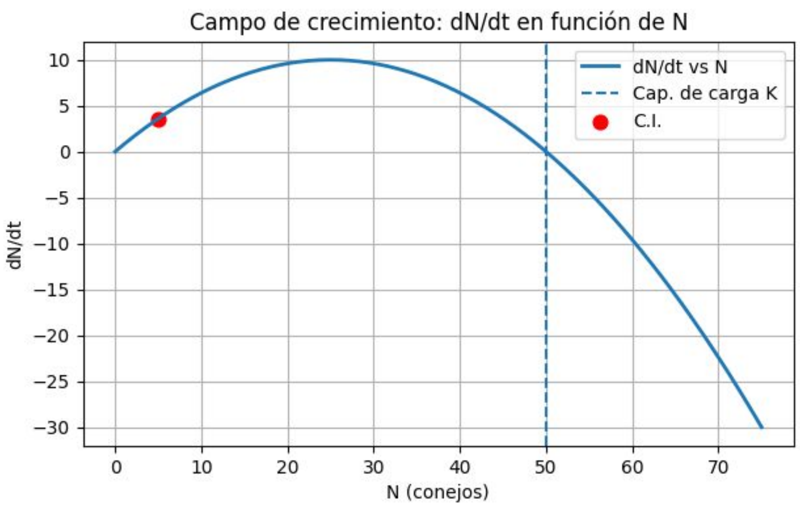
$$x(t) = \frac{Ke^t}{1+Ke^t}$$

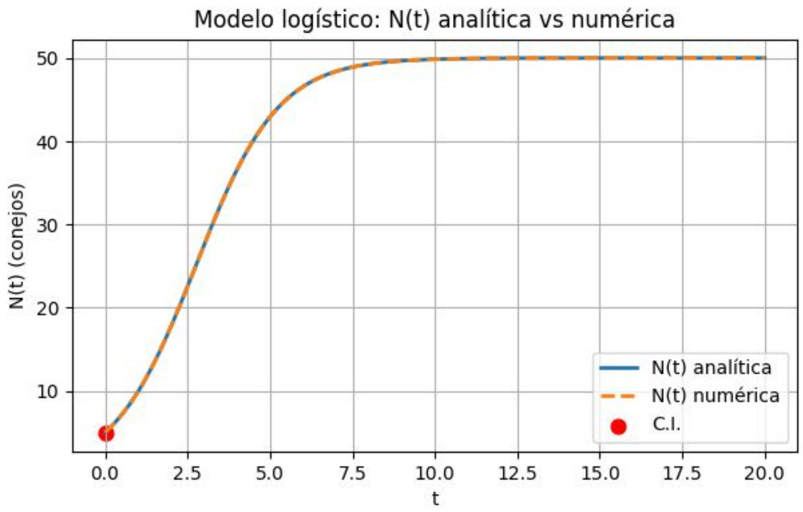
x(0) = 0.01

$$\frac{K}{1+K} = 0{,}01 \Rightarrow K = \frac{0{,}01}{0{,}99} = \frac{1}{99}$$

Ejemplo: Modelo logístico

- Solución numérica: $$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot x_k(1 - x_k)$$





Índice

3. Clasificación de modelos dinámicos

- **Según el tipo de incertidumbre**
- **Según la naturaleza del tiempo**
- **Según la dependencia temporal**
- **Según la relación entrada-salida**

3. Clasificación de modelos dinámicos

- **Según el tipo de incertidumbre**
  - **Modelos deterministas**:
    - No incorporan incertidumbre; el estado futuro está completamente determinado por el estado actual y la dinámica del sistema.
    - Ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

  - **Modelos estocásticos**:
    - Incluyen términos aleatorios o ruido en la dinámica. El comportamiento es probabilístico.
    - Ejemplo:

$$\frac{dx}{dt} = ax + \sigma\xi(t)$$

3. Clasificación de modelos dinámicos

- **Según la naturaleza del tiempo**
  - **Modelos en tiempo continuo**:
    - El estado evoluciona en un dominio temporal continuo.
    - Ejemplo (masa-resorte):

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1$$

  - **Modelos en tiempo discreto**:
    - El estado se actualiza en pasos de tiempo separados.
    - Ejemplo (cuenta del banco):

$$x_{k+1} = x_k + u_k$$

3. Clasificación de modelos dinámicos

- **Según la dependencia temporal**
  - **Modelos autónomos**:
    - La dinámica del sistema depende únicamente del estado, no del tiempo explícitamente.
    - Ejemplo (masa-resorte):

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1$$

  - **Modelos no autónomos**:
    - La dinámica depende explícitamente del tiempo o de entradas externas.
    - Ejemplo (robot móvil):

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dt} = f(x,u(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)\cos(\theta(t)) \\ v(t)\sin(\theta(t)) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

3. Clasificación de modelos dinámicos

- **Según la relación entrada-salida**
  - **Modelos lineales**:
    - La función dinámica es lineal en las variables de estado y entrada. $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$
    - Ejemplo (masa-resorte):

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1$$

  - **Modelos no lineales**:
    - Involucran productos, funciones no lineales o términos no lineales en las variables.
    - Ejemplo (modelo logístico):

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Índice

4. Diagramas de fase

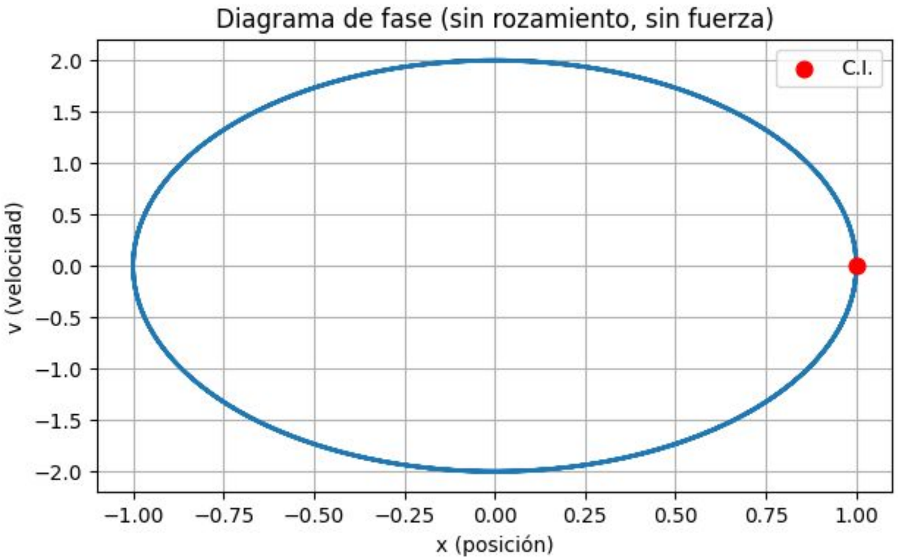
- Los diagramas de fase son una herramienta fundamental para analizar visualmente el comportamiento de sistemas dinámicos
  - Representa la evolución de las variables de estado desde sus condiciones iniciales.
- En un sistema dinámico continuo de dos variables de estado x_1 y x_2, el diagrama de fase se construye en el plano (x_1, x_2), donde las trayectorias indican cómo evoluciona el sistema a lo largo del tiempo.
- Ejemplo masa-resorte (siguiente transparencia):

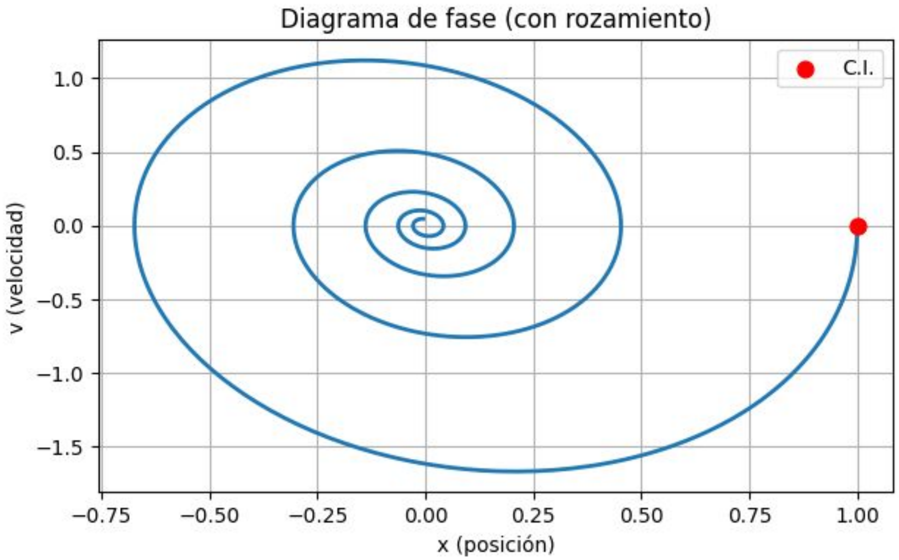
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1$$

4. Diagramas de fase

- Solución: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$





Índice

5. Representación: Espacio de Estados.

- Hasta ahora hemos representado los sistema como:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x}(t=0) = x_0$$

- La representación en espacio de estados permite modelar sistemas dinámicos de manera compacta, general y aplicable tanto a sistemas lineales como no lineales, continuos o discretos, y de una o múltiples dimensiones. Este enfoque considera explícitamente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \xrightarrow{\text{LTI}} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

5.a. Espacio de Estados: Ventajas

- **Ventajas del enfoque en espacio de estados**
  - Permite trabajar con sistemas de orden arbitrario y con múltiples entradas y salidas.
  - Facilita el análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad.
  - Es la base para técnicas modernas de control automático (control óptimo, control robusto, etc.).
  - Se adapta fácilmente a implementaciones computacionales.

5.b. Espacio de Estados: Ejemplo

- **Ejemplo masa-resorte**

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m} x_1(t) \end{cases} \Rightarrow$$

Espacio de estados:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

En el siguiente tema …

- Concepto y análisis de estabilidad (puntos de equilibrio)
- Observabilidad y controlabilidad.

TEMA 1: Fundamentos del modelado de sistemas dinámicos

MODELOS COMPUTACIONALES Y SIMULACIÓN DE SISTEMAS
Curso 2025-2026 - Semanas 2 y 3

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE
Escola Politècnica Superior
Escuela Politécnica Superior

DFESTS