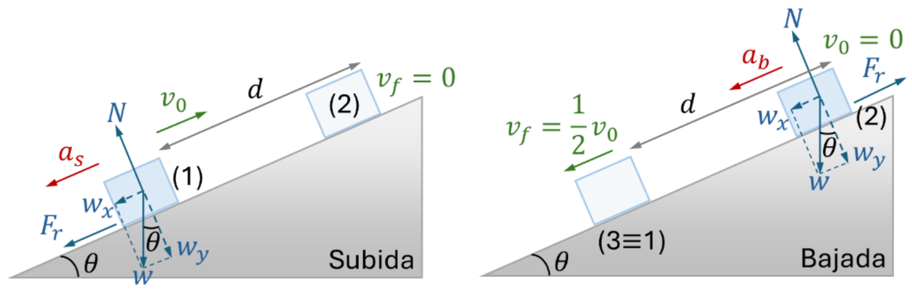
Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Escuela Politécnica Superior – Universidad de Alicante
Grado en Ingeniería en Inteligencia Artificial – Curso 2023/24
Fundamentos Físicos para Ingeniería – Primer examen parcial (Temas 1 a 4). 20/03/24

- No está permitido el uso de libros, apuntes, ordenadores y dispositivos móviles en general, los cuales deberán permanecer apagados durante la duración del examen.
- Esta permitido el uso del formulario básico y las tablas de centros de gravedad y momentos de inercia.
- Todos los pasos realizados para la resolución de las cuestiones y problemas deben ser razonados y explicados de forma breve y clara.
- Las notaciones incluidas deben ser brevemente explicadas.
- Obtenga las expresiones simbólicas realizando los cálculos algebraicamente y sustituyendo los valores numéricos preferiblemente en el último paso.
- Los resultados deben expresarse correctamente con el número de cifras significativas y sus unidades.

Cuestiones *(1 punto/cuestión)*

1. Sobre un plano inclinado $\theta = 30°$ respecto de la horizontal se lanza hacia arriba un objeto de masa m. ¿Cuál debe ser el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado para que la velocidad del objeto sea la mitad de la inicial cuando éste vuelve a su posición de partida?

Diagrama del cuerpo libre, direcciones y sentidos de las velocidades y aceleraciones:



La cuestión se puede resolver por consideraciones energéticas o por dinámica.

- Teniendo en cuenta conservación de la energía: $\Delta K + \Delta U_g - W_{F_r} = 0$

Subida: $-K_1 + U_{g,2} - W_{F_r} = 0$; $K_1 = U_{g,2} - W_{F_r}$

Bajada: $K_3 - U_{g,2} - W_{F_r} = 0$; $K_3 = U_{g,2} + W_{F_r}$

En los puntos 1 y 3 la relación de velocidades es $v_f = \frac{1}{2} v_0$ *y por tanto la relación de energías cinéticas es:*

$$4K_3 = K_1$$

$$4\left(U_{g,2} - W_{F_r}\right) = U_{g,2} + W_{F_r}; \quad 3U_{g,2} = 5W_{F_r}; \quad 3mgd\sin(\theta) = 5\mu mg\cos(\theta)\,d$$

$$\mu = \frac{3}{5}\tan(\theta) = \frac{3}{5\sqrt{3}}$$

- Mediante dinámica:

En la subida:

$$-F_r - w_x = m(-a_s); \quad \mu mg\cos(\theta) + mg\sin(\theta) = ma_s; \quad a_s = g[\mu\cos(\theta) + \sin(\theta)]$$

En la bajada:

$F_r - w_x = m(-a_b); \quad -\mu mg\cos(\theta) + mg\sin(\theta) = ma_b; \quad a_b = g[\sin(\theta) - \mu\cos(\theta)]$

Relación entre las aceleraciones:

Durante la subida $\longrightarrow \quad 0 = v_0^2 - 2a_s d; \quad a_s = {v_0^2}/{2d}$

Durante la bajada $\longrightarrow \quad \left({v_0}/{2}\right)^2 = 0 - 2a_b d; \quad a_b = {v_0^2}/{8d} = {a_s}/{4}$

Despejando el coeficiente de rozamiento de la relación de aceleraciones:

$$4a_b = a_s; \quad 4g[\sin(\theta) - \mu\cos(\theta)] = g[\mu\cos(\theta) + \sin(\theta)]; \quad \mu = \left({3}/{5}\right)\tan(\theta) = {3}/{5\sqrt{3}}$$

2. Dos coches se mueven sobre una superficie con la misma velocidad inicial deteniéndose por rozamiento con el suelo. Si un coche es más pesado que el otro, ¿cuál de los dos recorre más espacio antes de detenerse?

Teniendo en cuenta el teorema trabajo-energía, si ambos coches se mueven con la misma velocidad inicial y se detienen, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento debe ser el mismo que la variación de la energía cinética:

$$W_{F_r} = \Delta K; \;\; -F_r d = 0 - \frac{1}{2}mv_o^2; \;\; \mu_k mgd = \frac{1}{2}mv_o^2; \;\; d = \frac{v_o^2}{2\mu_k g}$$

La distancia recorrida por los coches no depende de su masa y por tanto ambos coches se detienen tras haber recorrido distancias iguales.

3. Un sistema está compuesto por tres partículas A, B y C de masas 1, 1.5 y 2 kg respectivamente. En un determinado momento sus velocidades en m/s son: $\vec{v}_A = -10\hat{\imath} + 5\hat{k}$, $\vec{v}_B = 8\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 4\hat{k}$ y $\vec{v}_C = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + 10\hat{k}$ y sus posiciones en m: $\vec{r}_A = 1.2\hat{\imath}$, $\vec{r}_B = 1.8\hat{\jmath} + 1.5\hat{k}$ y $\vec{r}_C = 1.2\hat{\imath} + 1.8\hat{\jmath} + 0.6\hat{k}$. Determinar el valor de las componentes a y b de la velocidad de C para que el momento angular del sistema respecto del origen sea paralelo al eje Z.

El momento angular del sistema se calcula mediante:

$$\vec{L}_{sist,O} = \sum_i^n \vec{L}_{i,O} = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i^n \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$

Por tanto:

$$\vec{L}_{sist,O} = \vec{L}_{A,O} + \vec{L}_{B,O} + \vec{L}_{C,O} = \vec{r}_A \times m_A\vec{v}_A + \vec{r}_B \times m_B\vec{v}_B + \vec{r}_C \times m_C\vec{v}_C =$$

$$= m_A\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_{Ax} & r_{Ay} & r_{Az} \\ v_{Ax} & v_{Ay} & v_{Az} \end{vmatrix} + m_B\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_{Bx} & r_{By} & r_{Bz} \\ v_{Bx} & v_{By} & v_{Bz} \end{vmatrix} + m_C\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_{Cx} & r_{Cy} & r_{Cz} \\ v_{Cx} & v_{Cy} & v_{Cz} \end{vmatrix} =$$

$$= L_x\hat{\imath} + L_y\hat{\jmath} + L_z\hat{k} = (60.3 - 12b)\hat{\imath} + (1.2a - 12)\hat{\jmath} + (2.4b - 3.6a - 21.6)\hat{k}$$

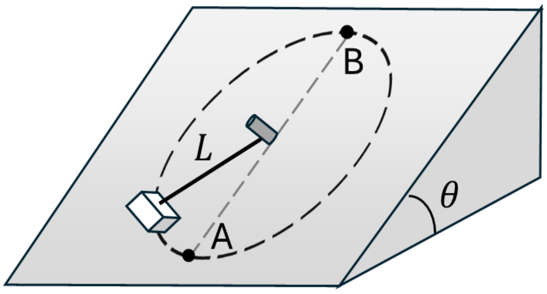
Para que $\vec{L}_{sist,O}$ sea paralelo al eje Z se debe cumplir que $L_x = L_y = 0$, por tanto:

$$60.3 - 12b = 0; \quad b = 50.3 \text{ m/s}$$

$$1.2a - 12 = 0; \quad a = 10 \text{ m/s}$$

Problemas

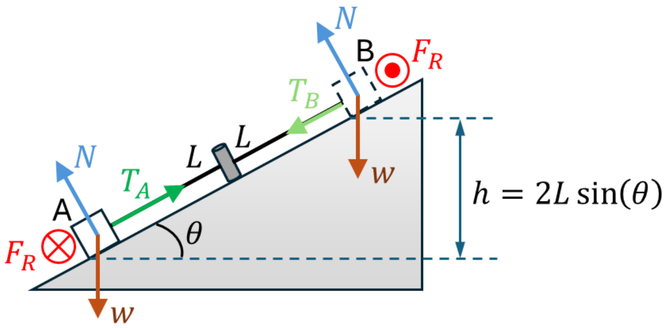
4. *(2 puntos)* Dos estudiantes de Ingeniería construyen el montaje de la figura. Consta de una rampa inclinada un ángulo de $\theta = 35°$ y en cuyo centro se ha colocado un pivote. Un objeto de masa $m = 12.4$ kg se ata al extremo de una cuerda de masa despreciable y longitud $L = 75.2$ cm. El otro extremo de la cuerda se ata al pivote. El objeto puede deslizar por la rampa con un coeficiente de rozamiento dinámico de $\mu = 0.25$. Después de unas medidas precisas, los/as estudiantes encuentran que en el instante en el cual el objeto pasa por el punto A, la tensión en la cuerda tiene un valor de 1105 N.



a) Cuando el objeto asciende, determinar la celeridad y la tensión de la cuerda al pasar por el punto B.

b) Suponiendo que la celeridad en el punto más bajo es v_0, obtener el valor mínimo de v_0 para que el objeto pueda completar una trayectoria circular.

a) La celeridad en el punto más alto B de la trayectoria circular (v_B) se puede obtener aplicando el principio de conservación de la energía. Observando el montaje desde un lado:



En ausencia de fuerzas externas: $\Delta E_m = \Delta K + \Delta U_g = W_{F_R}$

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) + mg2L\sin(\theta) = -\mu mg\cos(\theta)(\pi L) \longrightarrow v_B = [v_A^2 - gL(4\sin(\theta) + 2\pi\mu\cos(\theta))]^{1/2}$$

Para obtener v_B es necesario calcular primero la celeridad en el punto A (v_A). Este valor se puede determinar aplicando la segunda ley de Newton para las componentes a lo largo del plano y en dirección hacia el centro de la trayectoria:

$$T_A - mg\sin(\theta) = ma_{n,A} = m\frac{v_A^2}{L} \longrightarrow v_A = \left[L\left(\frac{T_A}{m} - g\sin(\theta)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 7.92 \text{ m/s}$$

$$v_B = [v_A^2 - gL(4\sin(\theta) + 2\pi\mu\cos(\theta))]^{1/2} = 6.0 \text{ m/s}$$

La tensión de la cuerda en B se obtiene planteando la segunda ley de Newton en este punto:

$$T_B + mg\sin(\theta) = ma_{n,B} = m\frac{v_B^2}{L} \longrightarrow T_B = m\left(\frac{v_B^2}{L} - g\sin(\theta)\right) = 530 \text{ N}$$

b) La celeridad mínima que el objeto puede tener en el punto B ($v_{min,B}$) sería aquella para la cual la tensión en la cuerda fuera nula ($T_{min,B} = 0$):

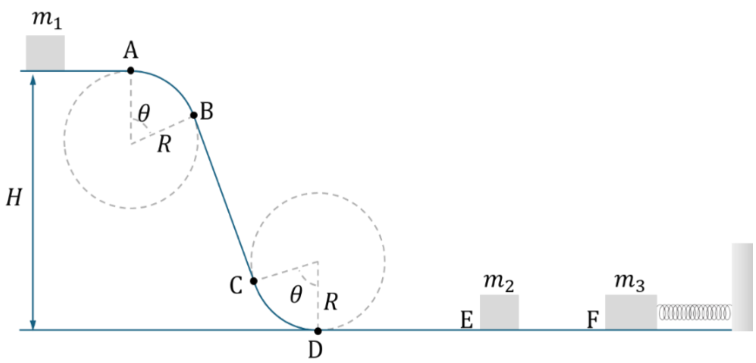
$$T_{min,B} = m\left(\frac{v_B^2}{L} - g\sin(\theta)\right) = 0 \qquad v_{min,B} = (gL\sin(\theta))^{1/2}$$

Teniendo en cuenta la expresión para v_B obtenida en el apartado anterior y que $v_{min,B}$ se alcanzará con la velocidad mínima en A ($v_{min,A} = v_0$):

$$[v_0^2 - gL(4\sin(\theta) + 2\pi\mu\cos(\theta))]^{1/2} = (gL\sin(\theta))^{1/2}$$

$$v_0 = [gL(5\sin(\theta) + 2\pi\mu\cos(\theta))]^{1/2} = 5.5 \text{ m/s}$$

5. *(2 puntos)* Un objeto de masa m_1 desliza sin rozamiento desde el punto A hasta el E. En ese instante choca con otro objeto de masa m_2 quedando ambos unidos. El conjunto se mueve por el tramo E-F cuyo coeficiente de rozamiento dinámico es $\mu = 0.05$. Cuando han recorrido una distancia $\overline{EF} = 100.0$ cm chocan con otro objeto de masa m_3 unido a una pared vertical por medio de un muelle con contante elástica $k = 2.0 \cdot 10^{-6}$ kN/mm y masa despreciable. El coeficiente de restitución para este choque tiene un valor de 1. Después del choque, las tres masas pueden deslizar por la misma superficie. Sabiendo que inicialmente los objetos están en reposo, determinar la posición final del conjunto formado por las masas m_1 y m_2 respecto de la posición inicial del objeto con masa m_3.
Datos: $\overline{BC} = \overline{EF}$, $R = 50.0$ cm, $\theta = 30°$, $m_1 = m_2 = 1.0$ kg, $m_3 = m_1 + m_2$.



Primero se transforman todos los valores proporcionados en el enunciado para que tengan unidades del Sistema Internacional:

$$k = 2.0 \text{ N/m};\ \overline{BC} = \overline{EF} = 1.000 \text{ m};\ R = 0.500 \text{ m};\ m_1 = m_2 = 1.0 \text{ kg};\ m_3 = 2.0 \text{ kg};\ \theta = 30°;\ \mu = 0.05$$

De acuerdo con el problema, la distancia pedida puede obtenerse de la ecuación del trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento en el último movimiento del conjunto de las dos masas $m_1 + m_2$ hasta detenerse. Dado que hay una serie de choques, para resolver el problema es conveniente dividir todo el proceso en etapas:

5.1. La masa m_1 se desplaza desde A, partiendo del reposo, hasta E. Se determina la velocidad con la que llega al punto E ($v_{1,E}$). Puesto que no hay rozamiento ni fuerzas externas presentes en el sistema, la energía se conserva.

$$\Delta K + \Delta U_g = 0;\ \ \Delta K = -\Delta U_g;\ \ K_E - K_A = U_{g,A} - U_{g,E};\ \ \frac{1}{2}m_1 v_{1,E}^2 = m_1 gH;\ v_{1,E} = \sqrt{2gH}$$

Es necesario determinar la altura H. De acuerdo con la figura se tiene que $H = \overline{BC}\sin(\theta) + 2R[1 - \cos(\theta)]$

$$v_{1,E} = \sqrt{2gH} = \left[2g\left[\overline{BC}\sin(\theta) + 2R[1 - \cos(\theta)]\right]\right]^{1/2} = 3.5 \text{ m/s}$$

5.2. Se produce un choque inelástico entre las masas m_1 y m_2. Se calcula la velocidad con la que el conjunto $m_1 + m_2$ sale después del choque.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{12,E} \quad \longrightarrow \quad v_{12,E} = 1.75 \text{ m/s}$$

5.3. Se calcula la velocidad con la que el conjunto $m_1 + m_2$ llega al punto F teniendo en cuenta la perdida de energía cinética debida al rozamiento existente en el tramo EF. Para ello se utiliza el teorema de trabajo-energía.

$$W_{F_r} = \Delta K; \; -\mu(m_1 + m_2) g \overline{EF} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\big(v_{12,F} - v_{12,E}\big)^2 \; \longrightarrow \; v_{12,F} = 1.4 \text{ m/s}$$

5.4. Se produce un choque entre el conjunto $m_1 + m_2$ y la masa m_3. Dado que el coeficiente de restitución tiene un valor de 1, el choque es elástico y por tanto se conservan tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética. Aplicando las ecuaciones para este tipo de colisiones se obtienen las velocidades para $m_1 + m_2$ y m_3 después del choque.

$$(m_1 + m_2) v_{12,F} = (m_1 + m_2) v'_{12,F} + m_3 v'_{3,F}$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\big(v_{12,F}\big)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\big(v'_{12,F}\big)^2 + \frac{1}{2} m_3 \big(v'_{3,F}\big)^2$$

Resolviendo el sistema se obtiene $v'_{3,F} = v_{12,F} = 1.4 \text{ m/s}$ y $v'_{12,F} = 0 \text{ m/s}$. El conjunto $m_1 + m_2$ queda parado tras el choque.

5.5. Se produce la compresión del muelle. Utilizando el principio de conservación de la energía se obtiene la máxima compresión que ha sufrido el muelle (x).

$$\Delta K + \Delta U_{el} = W_{F_R}; \; -\frac{1}{2} m_3 \big(v'_{3,F}\big)^2 + \frac{1}{2} k x^2 = -\mu m_3 g x \; \longrightarrow \; x = 0.99 \text{ m}$$

5.6. El muelle recupera su posición original y m_3 choca con $m_1 + m_2$. Se determina la velocidad con la que m_3 colisiona con el conjunto $m_1 + m_2$ ($v''_{3,F}$) utilizando de nuevo el principio de conservación de la energía.

$$\Delta K + \Delta U_{el} = W_{F_R}; \; \frac{1}{2} m_3 \big(v''_{3,F}\big)^2 - \frac{1}{2} k x^2 = -\mu m_3 g x \; \longrightarrow \; v''_{3,F} = 0.1 \text{ m/s}$$

Siguiendo el mismo proceso que el descrito en 5.4, después del choque las velocidades de m_3 y $m_1 + m_2$ son $v'''_{3,F} = 0 \text{ m/s}$ y $v''_{12,F} = 0.1 \text{ m/s}$. El objeto con masa m_3 queda inmóvil tras la colisión.

5.7. Finalmente, el desplazamiento del conjunto $m_1 + m_2$ hasta detenerse (d), con respecto al objeto de masa m_3, se obtiene teniendo en cuenta la energía cinética perdida debido al rozamiento.

$$W_{F_r} = \Delta K; \; -\mu(m_1 + m_2) g d = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\big(v''_{12,F}\big)^2 \; \longrightarrow \; d = 0.01 \text{ m}$$

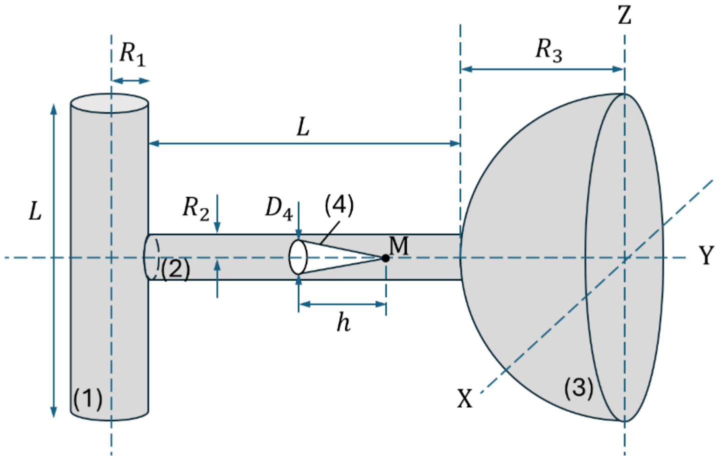
6. *(3 puntos)* La nave de exploración interestelar Event Horizon sufre una avería en su motor de curvatura cuando se disponía a llevar a cabo una misión calificada de alto secreto. Usted es el/la ingeniero/a jefe de la nave y se le ordena que repare el motor en la mayor brevedad posible. Después de consultar con la IA de la nave, puede observar que el problema está en la pieza mostrada en la imagen formada por un cilindro vertical macizo (1), un cilindro horizontal macizo (2) con un hueco en su interior en forma de cono (4) y una semiesfera maciza (3). De acuerdo con las especificaciones, se requiere que el centro de gravedad de la pieza este situado en el punto M que coincide con el vértice del hueco en forma de cono y cuyas coordenadas son $(0.00,0.30,0.00)$ m. Es necesario reemplazar el cilindro horizontal de la pieza. En la nave dispone de varios de estos cilindros cuyas densidades ρ_2 se muestran en la tabla. Le solicita a la IA que realice el cálculo de ρ_2 pero esta colapsa y es usted el que debe realizarlo.

a) ¿Cuál o cuáles de los cinco cilindros horizontales indicados en la tabla seleccionaría para reparar el motor de curvatura?

b) Determine el valor del momento de inercia respecto del eje que pasa por el centro de gravedad y es paralelo al eje Z.

Datos: $L = 4.0 \cdot 10^2$ mm, $R_1 = 9.5$ cm, $R_2 = R_1/2$, $R_3 = L/2$, $D_4 = 2R_1/3$, $\rho_1 = 0.930$ g/cm^3, $\rho_3 = 1151$ kg/m^3, $h = 5.0$ cm.

Cilindro horizontal	$\rho_2 \pm E_{\rho_2}$ (kg/m^3)
A	630 ± 5
B	614 ± 8
C	820 ± 10
D	840 ± 20
E	605 ± 10



a) Primero se transforman todos los valores proporcionados en el enunciado para que tengan unidades del Sistema Internacional.

$L = 0.40$ m; $R_1 = 0.095$ m; $R_2 = R_1/2 = 0.048$ m; $R_3 = L/2 = 0.20$ m; $D_4 = 2R_1/3 = 0.063$ m;

$\rho_1 = 930$ kg · m^{-3}; $\rho_3 = 1151$ kg · m^{-3}; $h = 0.050$ m

Para seleccionar el o los cilindros horizontales de la tabla de cara a reparar el motor de la nave es necesario obtener la densidad ρ_2 teniendo en cuenta la posición del centro de gravedad de la pieza. Dada la situación del sistema de referencia XYZ, considerando el campo gravitatorio constante (posiciones de los centros de gravedad y masa son las mismas) y teniendo en cuenta el hueco en forma de cono, se plantea la ecuación para la coordenada y del centro de masa (y_{CM}).

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\left(\sum_i^n M_{ti} y_{CMt_i} + \sum_j^{n'} (-M_{hj}) y_{CMh_j}\right);\ M = \sum_i^n M_{ti} - \sum_i^{n'} M_{hi}$$

$$y_{CG} = y_{CM} = \frac{M_1 y_{CM,1} + M_2 y_{CM,2} + M_3 y_{CM,3} - M_4 y_{CM,4}}{M_1 + M_2 + M_3 - M_4} = 0.30 \text{ m}$$

La única incógnita en esta ecuación es la densidad ρ_2. Con ayuda de las tablas se determinan las posiciones de los centros de gravedad de los diferentes cuerpos que conforman la pieza ($y_{CM,i}$). Se determinan también sus masas (M_i).

$$y_{CM,1} = R_3 + L + R_1 = \frac{3}{2}L + R_1;\ M_1 = \rho_1 \pi R_1^2 L$$

$$y_{CM,2} = R_3 + \frac{L}{2} = L;\ M_2 = \rho_2 \pi R_2^2 L$$

$$y_{CM,3} = \frac{3}{8}R_3;\ M_3 = \frac{2}{3}\rho_3 \pi R_3^2$$

$$y_{CM,4} = 0.30 + \frac{3}{4}h;\ M_4 = \frac{1}{12}\rho_4 \pi D_4^2 h$$

Dado que en la tabla aparecen valores con dos y tres cifras significativas para la densidad ρ_2, se obtiene el resultado final con tres cifras significativas. Posteriormente se debe comparar atendiendo a los intervalos de error de los valores de ρ_2 proporcionados.

Resolviendo la ecuación se obtiene un valor de $\rho_2 = 602 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, luego se debe seleccionar el cilindro E.

b) El momento de inercia de un cuerpo compuesto respecto de un eje cualquiera se obtiene a partir de la suma de los momentos de inercia respecto de dicho eje de las distintas partes del cuerpo. Dado que la pieza tiene un hueco, el momento de inercia de este se debe restar del total.

$$I_{\text{ZM}} = I_{\text{ZM},1} + I_{\text{ZM},2} + I_{\text{ZM},3} - I_{\text{ZM},4}$$

El momento de inercia respecto del eje que pasa por el punto M y es paralelo al eje Z (eje ZM) se calcula utilizando el teorema de Steiner. Se utilizan las tablas de momentos de inercia para obtener sus valores respecto a los ejes que pasan por los centros de gravedad de cada parte de la pieza.

$$I_{\text{ZM},1} = I_{\text{Z,CG},1} + M_1[R_1 + L - (0.30 - R_3)]^2 = \frac{1}{2}M_1 R_1^2 + M_1[R_1 + L - (0.30 - R_3)]^2$$

$$I_{\text{ZM},2} = I_{\text{Z,CG},2} + M_2\left[\frac{L}{2} - (0.30 - R_3)\right]^2 = \frac{1}{12}M_2(3R_2^2 + L^2) + M_2\left[\frac{L}{2} - (0.30 - R_3)\right]^2$$

$$I_{\text{ZM},3} = I_{\text{Z,CG},3} + M_3\left(0.30 - \frac{3}{8}R_3\right)^2 = \frac{83}{320}M_3 R_3^2 + M_3\left(0.30 - \frac{3}{8}R_3\right)^2$$

$$I_{\text{ZM},4} = I_{\text{Z,CG},4} + M_4\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{20}M_4\left(\frac{D_4^2}{4} + 4h^2\right)$$

Finalmente, se obtiene:

$$I_{\text{ZM}} = I_{\text{ZM},1} + I_{\text{ZM},2} + I_{\text{ZM},3} - I_{\text{ZM},4} = 2.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$