

Tema 4. Lógica difusa y Sistemas Expertos difusos

**Razonamiento y Representación del
Conocimiento**

Indice

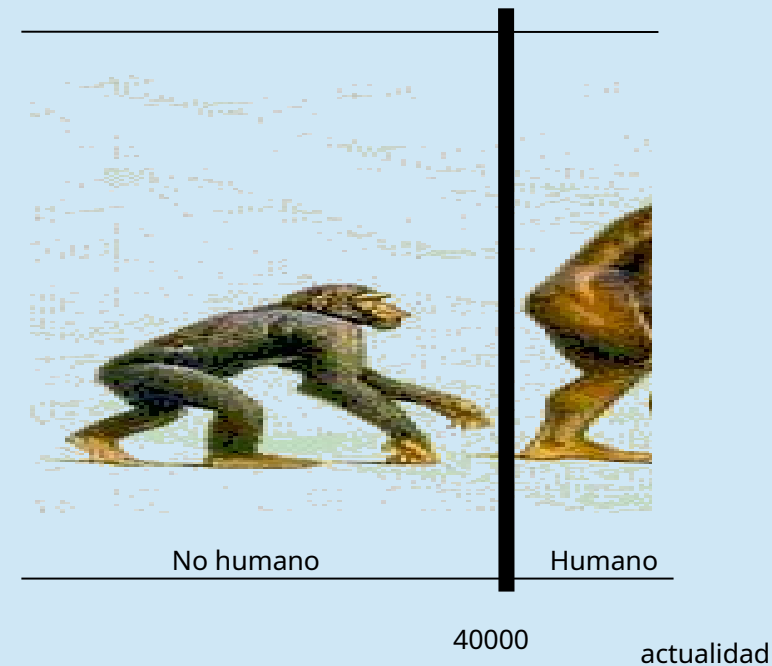
- Lógica difusa
 - Conjuntos difusos
 - Variables lingüísticas
- Sistemas Expertos difusos
 - Reglas difusas
 - Inferencia difusa
 - Ejemplos

Lógica Difusa

- Introducción
 - Recordemos: la lógica de primer orden (LPO) tiene
 - Gran capacidad para la representación de conocimiento
 - Herramientas para deducir lógicamente nuevo conocimiento
 - Sin embargo, la LPO no representa el conocimiento de forma “natural” → como lo hacemos los seres humanos

Lógica Difusa

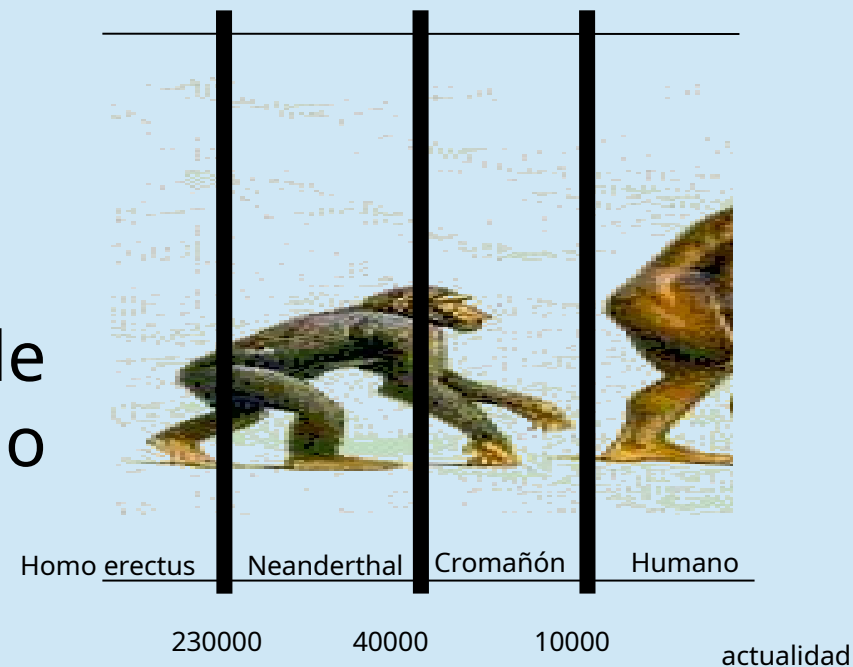
- Introducción
 - Pongamos un ejemplo: el ejemplo de “Ser humano” desde el punto de vista evolutivo
- Con LPO:
 - Si especie es más antigua de 315000 años entonces humano es falso



Lógica Difusa

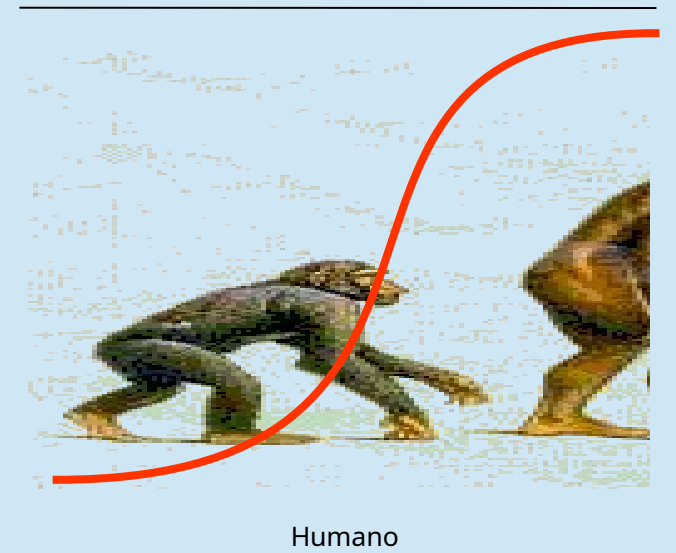
- Introducción
 - Pongamos un ejemplo: el ejemplo de “Ser humano” desde el punto de vista evolutivo

- Con LPO multivaluada:
 - Podemos definir varios intervalos, pero el concepto de pertenencia es binario: “todo o nada”



Lógica Difusa

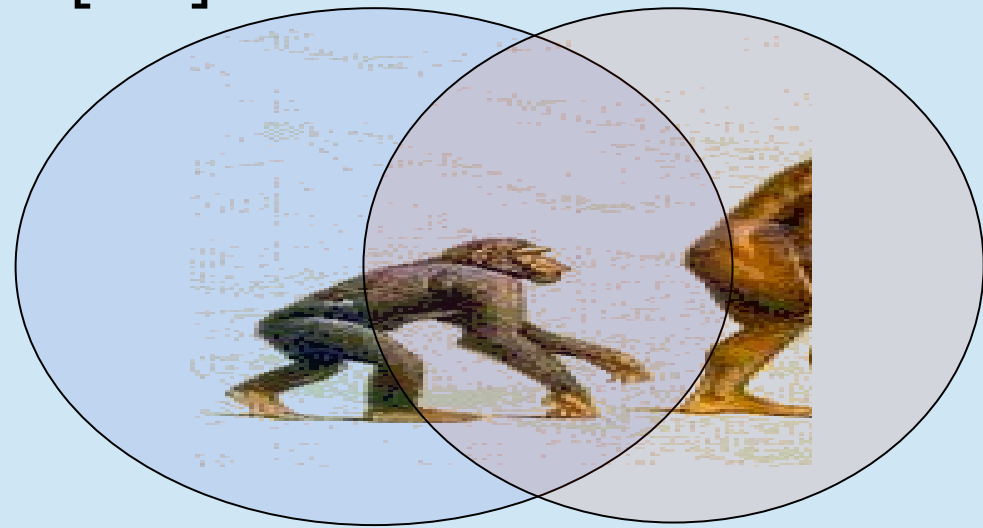
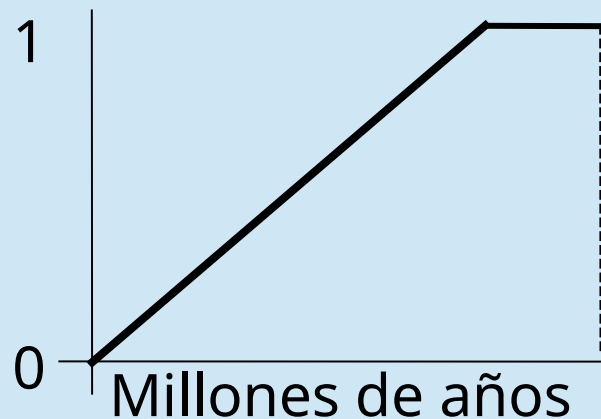
- Introducción
 - Pongamos un ejemplo: el ejemplo de “Ser humano” desde el punto de vista evolutivo
- Alternativa: lógica difusa
 - Representación del conocimiento de forma más natural



Lógica Difusa

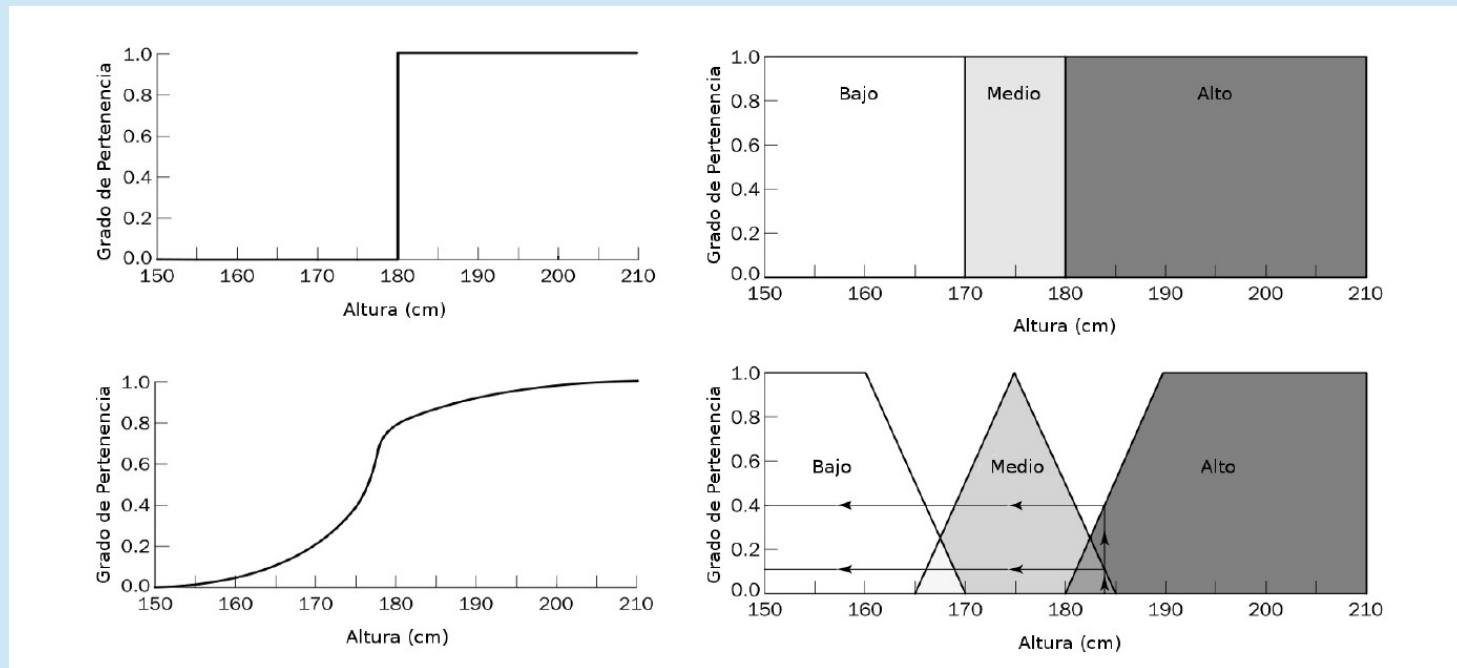
- Concepto de Conjuntos difusos
 - Función de pertenencia difusa: establece la pertenencia de una variable a un conjunto como una relación en el intervalo $[0:1]$
- $B = \{(x, \mu_B(x)) / x \in X\}$

$$\mu_B: X \rightarrow [0, 1]$$



Lógica Difusa

- Conjuntos difusos. Ejemplo: altura



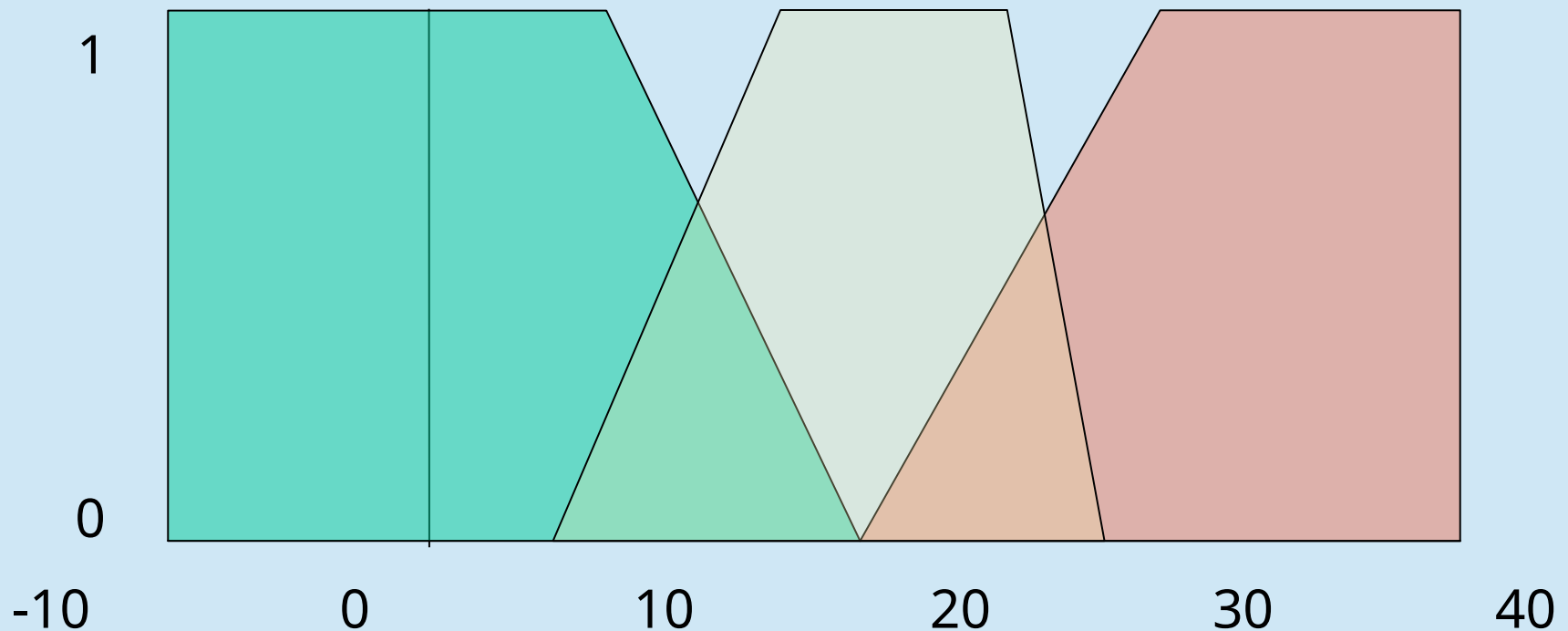
Nombre	Altura (cm)	LPO	Fuzzy
Juan	2,05	1	1,0
Tomás	1,95	1	1,0
Carlos	1,87	1	0,95
Pedro	1,80	1	0,82
Andrés	1,79	0	0,71
Paco	1,60	0	0,36

Lógica Difusa

- Conjuntos difusos
 - Para diseñar un conjunto difuso podemos escoger la forma que nos interese: triangular, trapezoidal, sigmoidea, gaussiana, etc.
 - Especificaremos la función de pertenencia a cada conjunto difuso
- Ejercicio: Representar la temperatura del aula mediante los conjuntos difusos “Fría”, “Templada” y “Cálida”
 - 23 grados, ¿es cálida o templada?

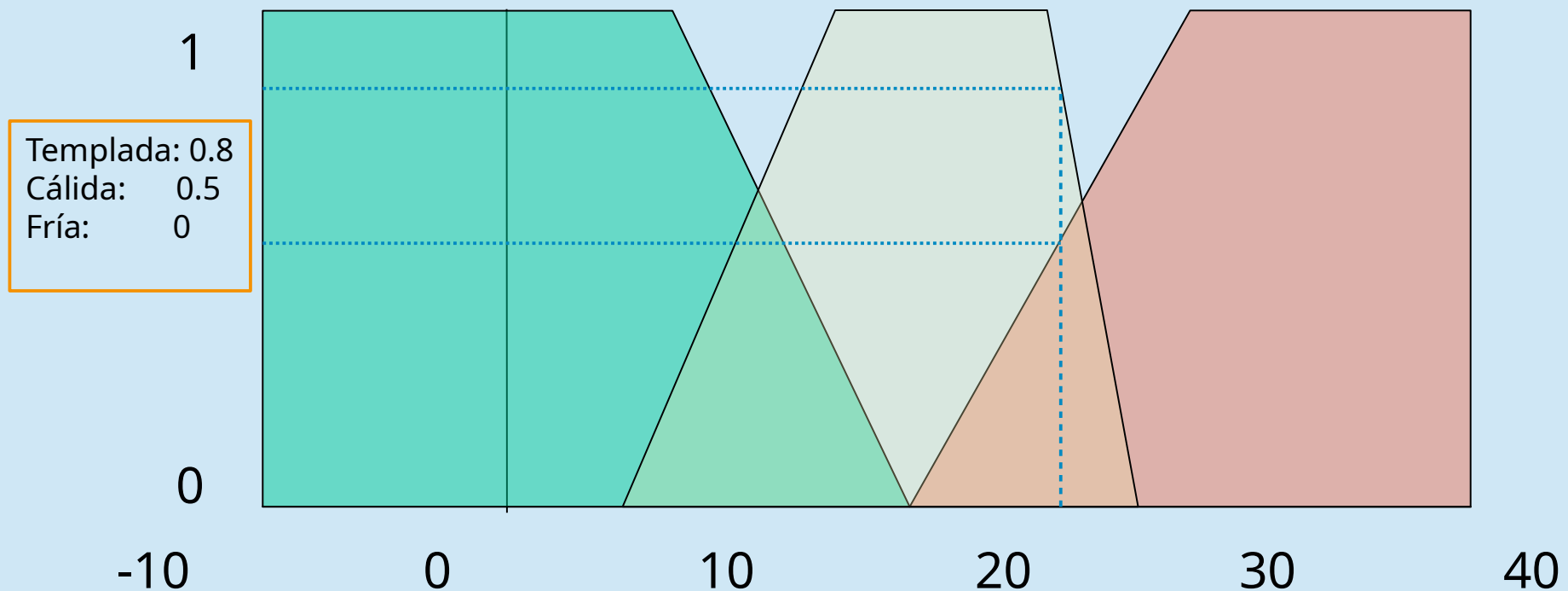
Lógica Difusa

- Ejercicio: Representar la temperatura del aula mediante los conjuntos difusos "Fría", "Templada" y "Cálida"
 - 23 grados, ¿es cálida o templada?



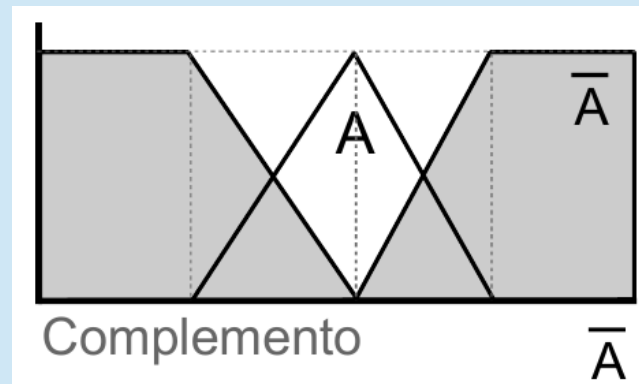
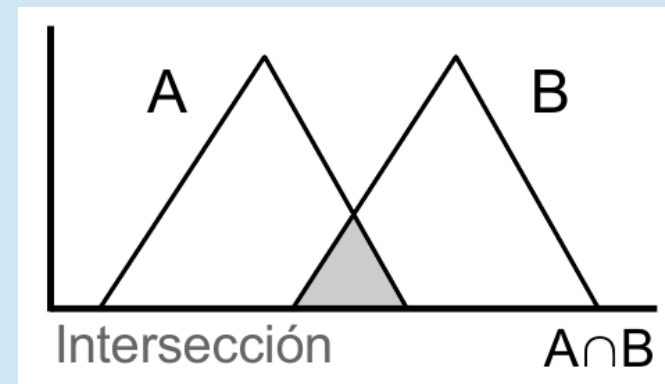
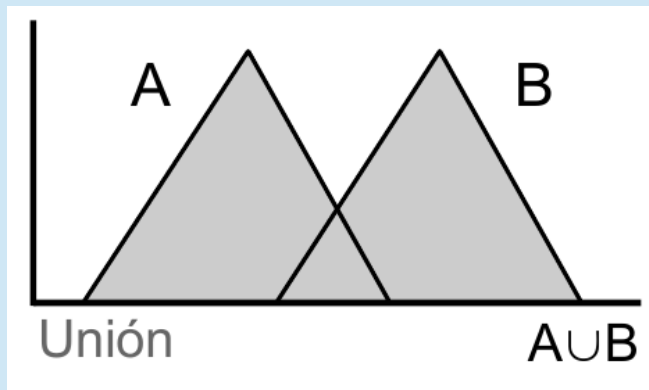
Lógica Difusa

- Ejercicio: Representar la temperatura del aula mediante los conjuntos difusos “Fría”, “Templada” y “Cálida”
 - 23 grados, ¿es cálida o templada?



Lógica Difusa

- Operaciones entre conjuntos difusos
 - Unión, intersección y negación o complemento



Lógica Difusa

- Operaciones entre conjuntos difusos:

- $\mu_{A \cup B}(x) = \perp [\mu_A(x), \mu_B(x)]$

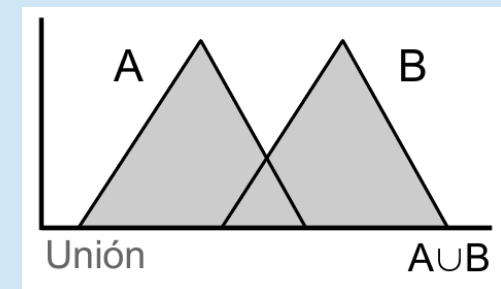
- Axiomas

- Elemento Neutro: $\perp(a, 0) = a$
- Conmutatividad: $\perp(a, b) = \perp(b, a)$
- Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $\perp(a, b) \leq \perp(c, d)$
- Asociatividad: $\perp(\perp(a, b), c) = \perp(a, \perp(b, c))$

- T-conormas más utilizadas:

- Máximo: $\perp(a, b) = \max(a, b)$
- Producto: $\perp(a, b) = (a + b) - (a \times b)$
- Suma limitada (o de Lukasiewicz): $\perp(a, b) = \min(a + b, 1)$

Unión



Lógica Difusa

- Operaciones entre conjuntos difusos:

- $\mu_{A \cap B}(x) = T[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

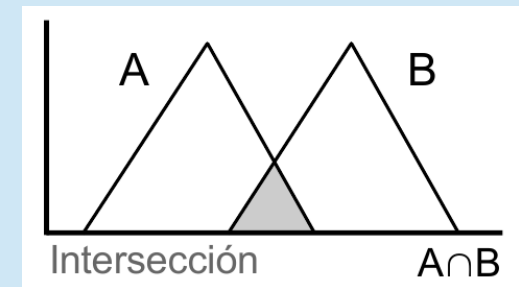
- Axiomas:

- Elemento unidad: $T(a, 1) = a$
- Conmutatividad: $T(a, b) = T(b, a)$
- Monotonicidad: Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $T(a, b) \leq T(c, d)$
- Asociatividad: $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$

- T-normas más utilizadas

- Mínimo: $T(a, b) = \min(a, b)$
- Producto algebraico: $T(a, b) = ab$
- Diferencia limitada (o de Lukasiewicz): $T(a, b) = \max(0, a + b - 1)$

Intersección



Lógica Difusa

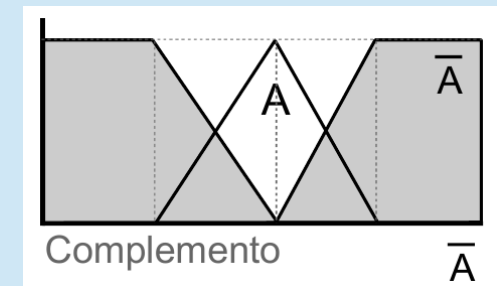
- Operaciones entre conjuntos difusos:

- $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

- Axiomas:

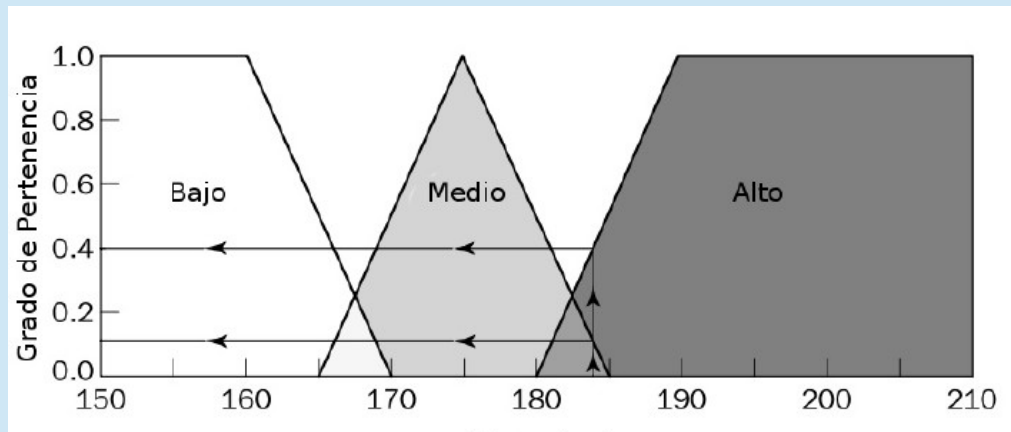
- Condiciones límite o frontera: $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$
- Monotonicidad: $\forall a, b \in [0, 1]$ si $a < b$ entonces $c(a) \geq c(b)$
- c es una función continua
- c es involutiva $\forall a \in [0, 1]$ tenemos $c(c(a)) = a$

Negación



Lógica Difusa

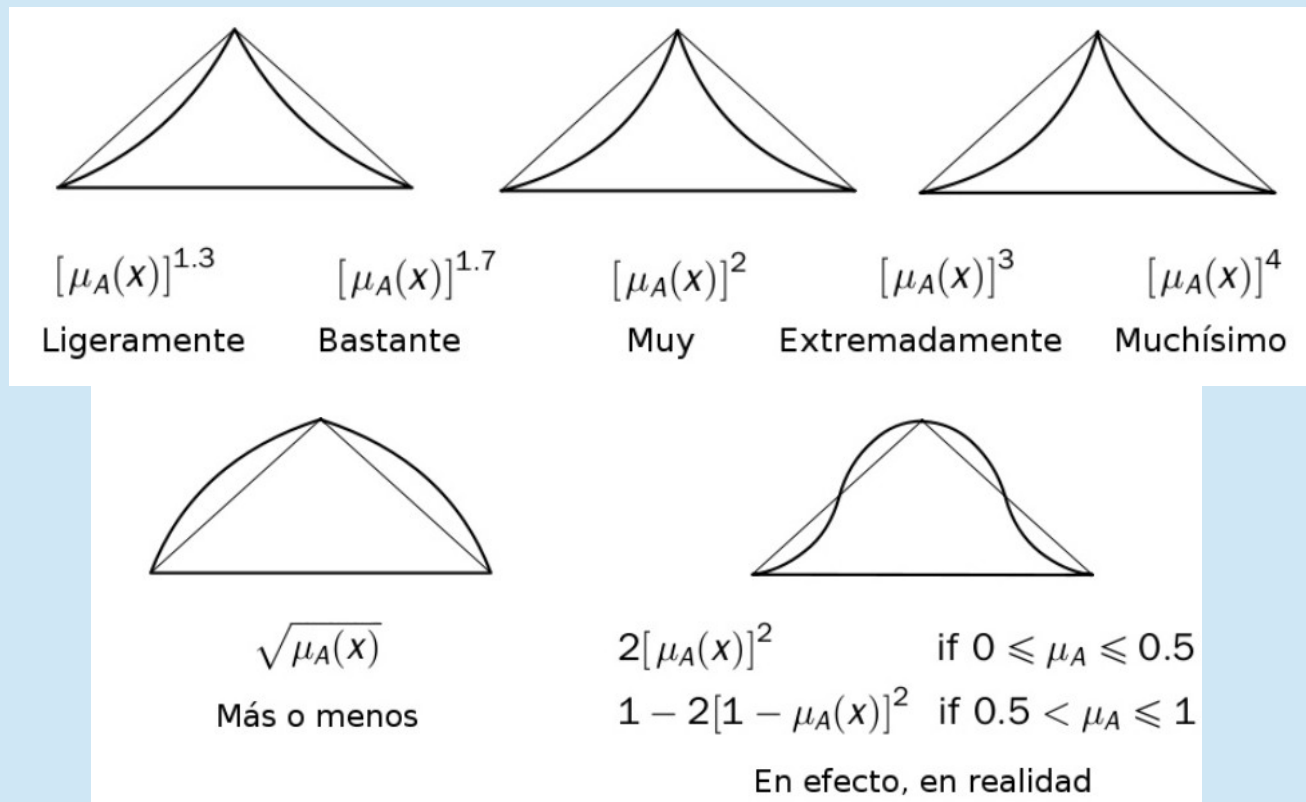
- Variables lingüísticas
 - Palabras o sentencias que van a enmarcarse en un lenguaje predeterminado
 - Incluirá al menos: términos, dominio y conjuntos difusos
- Variable lingüística altura
 - Términos: Bajo, medio, Alto
 - Dominio o Universo de discurso: enteros $[0, 220]$
 - Conjuntos difusos:



- ¿Qué valor lingüístico tendrá una persona con una altura de 184 cm.?

Lógica Difusa

- En las variables lingüísticas también podemos incluir **modificadores lingüísticos**
 - Modifican el significado de los conjuntos difusos

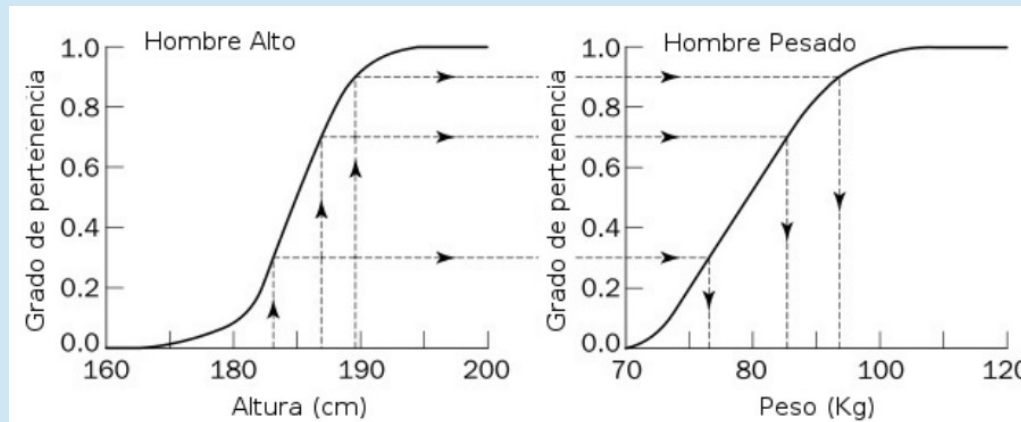


Sistemas Expertos Difusos

- Razonamiento aproximado
 - Con la lógica difusa podemos expresar proposiciones como “el coche es pequeño”, “Tania es muy alta” o “el movimiento es lento”
 - Podemos componer expresiones con conectores:
 - El coche es pequeño y su movimiento es lento
 - Ó: $C \text{ es } P \text{ AND } M_c \text{ es } L$

Sistemas Expertos Difusos

- Reglas difusas
 - **IF** <proposición difusa> **THEN** <proposición difusa>
 - Ejemplo: **IF** altura IS alto **THEN** peso IS pesado



- El antecedente y el consecuente de una regla pueden tener múltiples partes:
 - **IF** A es X **AND** B es Y **THEN** C es Z

Sistemas Expertos Difusos

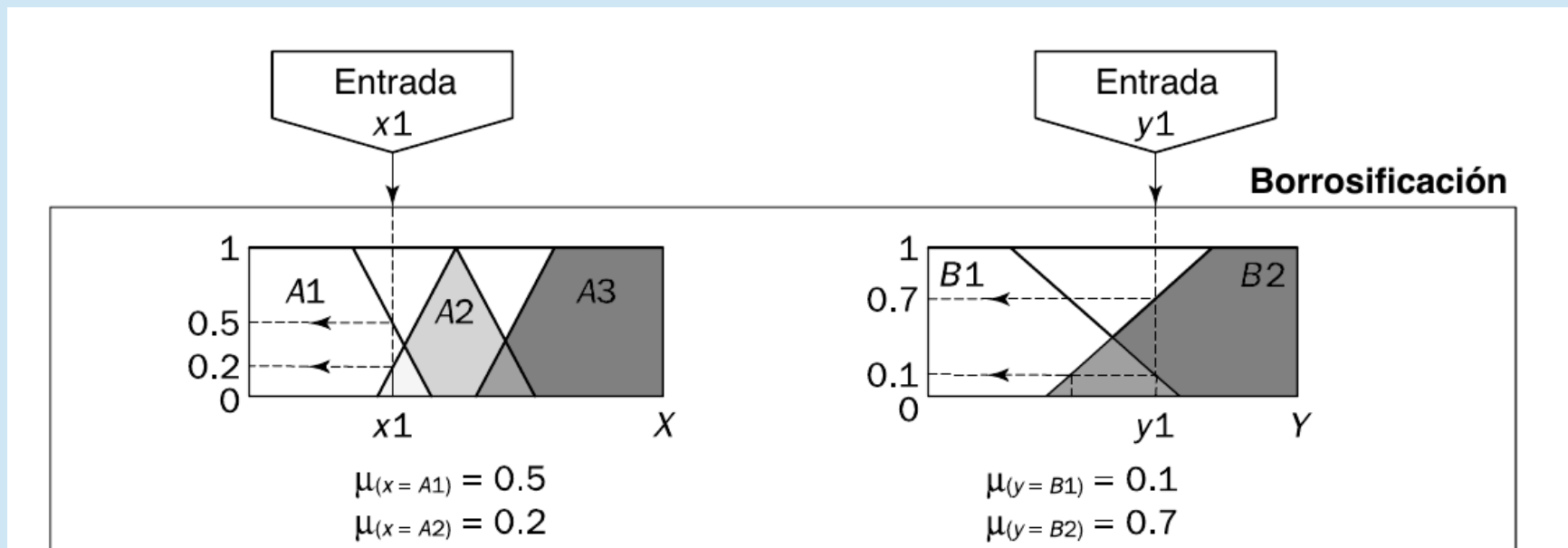
- Inferencia difusa (inferencia de Mamdani)
 - Proceso de obtener un valor de salida para un valor de entrada empleando la teoría de conjuntos difusos
 1. Fuzificación de las variables de entrada
 2. Evaluación de las reglas
 3. Agregación de las salidas de las reglas
 4. Defuzificación

Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 1:
 - Variables lingüísticas:
 - x (financiación-del-proyecto)
 - y (plantilla-del-proyecto)
 - z (riesgo)
 - Conjuntos difusos definidos sobre los dominios de las variables:
 - X: A1, A2, A3 (inadecuado, marginal, adecuado)
 - Y: B1, B2 (pequeña, grande)
 - Z: C1, C2, C3 (bajo, normal, alto)

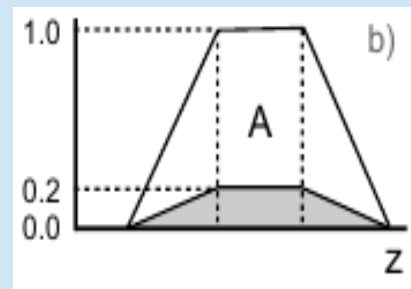
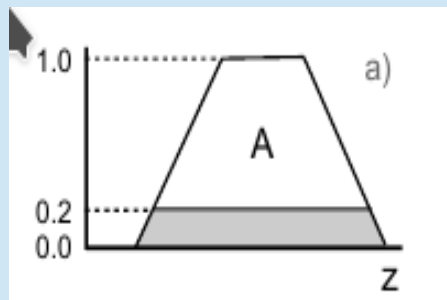
Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 1. Paso 1: Fuzificación:
 - Tomar los valores de las entradas y determinar el grado de pertenencia a los conjuntos difusos
 - Pongamos que $x=35\%$, $y=60\%$



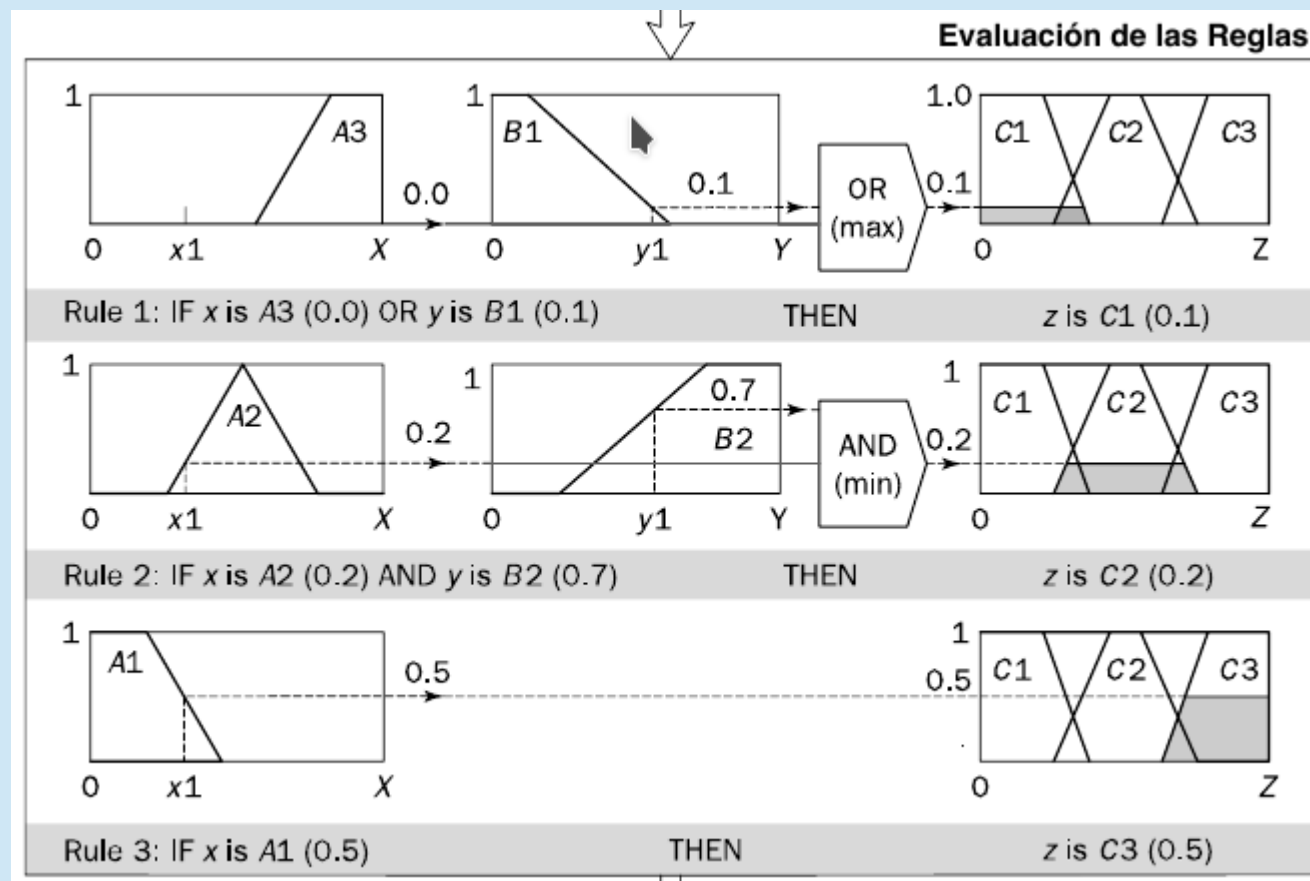
Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 1. Paso 2: Evaluación de las reglas:
 - Los valores fuzificados se aplican a los antecedentes de TODAS las reglas de producción
 - En caso de antecedentes compuestos por conectivas se aplican las funciones vistas anteriormente (t-conorma y t-norma)
 - Finalmente, el resultado de la evaluación del antecedente se aplica al consecuente, aplicando un **recorte** o un **escalado** dependiendo del valor de verdad del antecedente



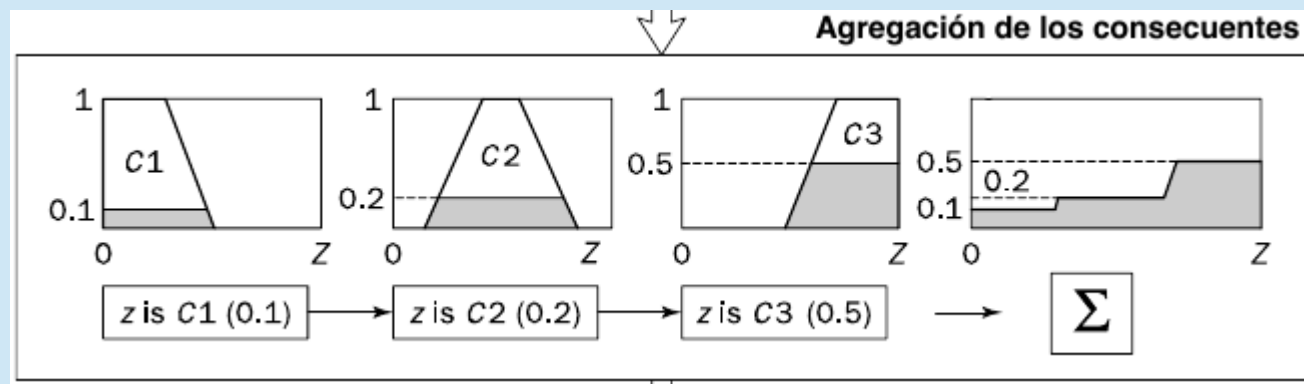
Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 1. Paso 2: Evaluación de las reglas:



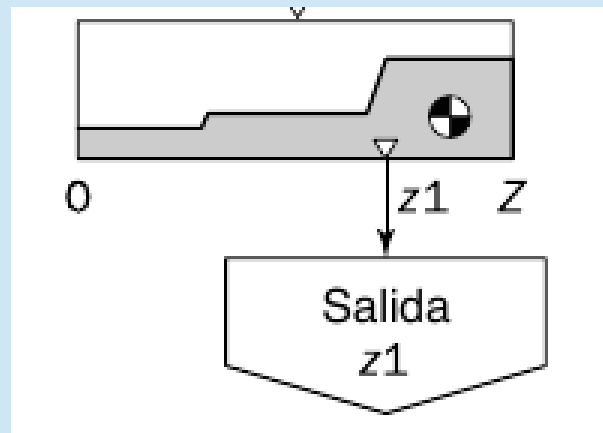
Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 1. Paso 3: Agregación de las salidas:
 - Unificar las salidas de todas las reglas
 - Combinando los consecuentes de todas las reglas una vez recortados o escalados



Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 1. Paso 4: defuzificación:
 - El resultado final requiere un valor no-difuso
 - Habitualmente el resultado se calcula como el centroide del conjunto de salida agregado en el paso 3



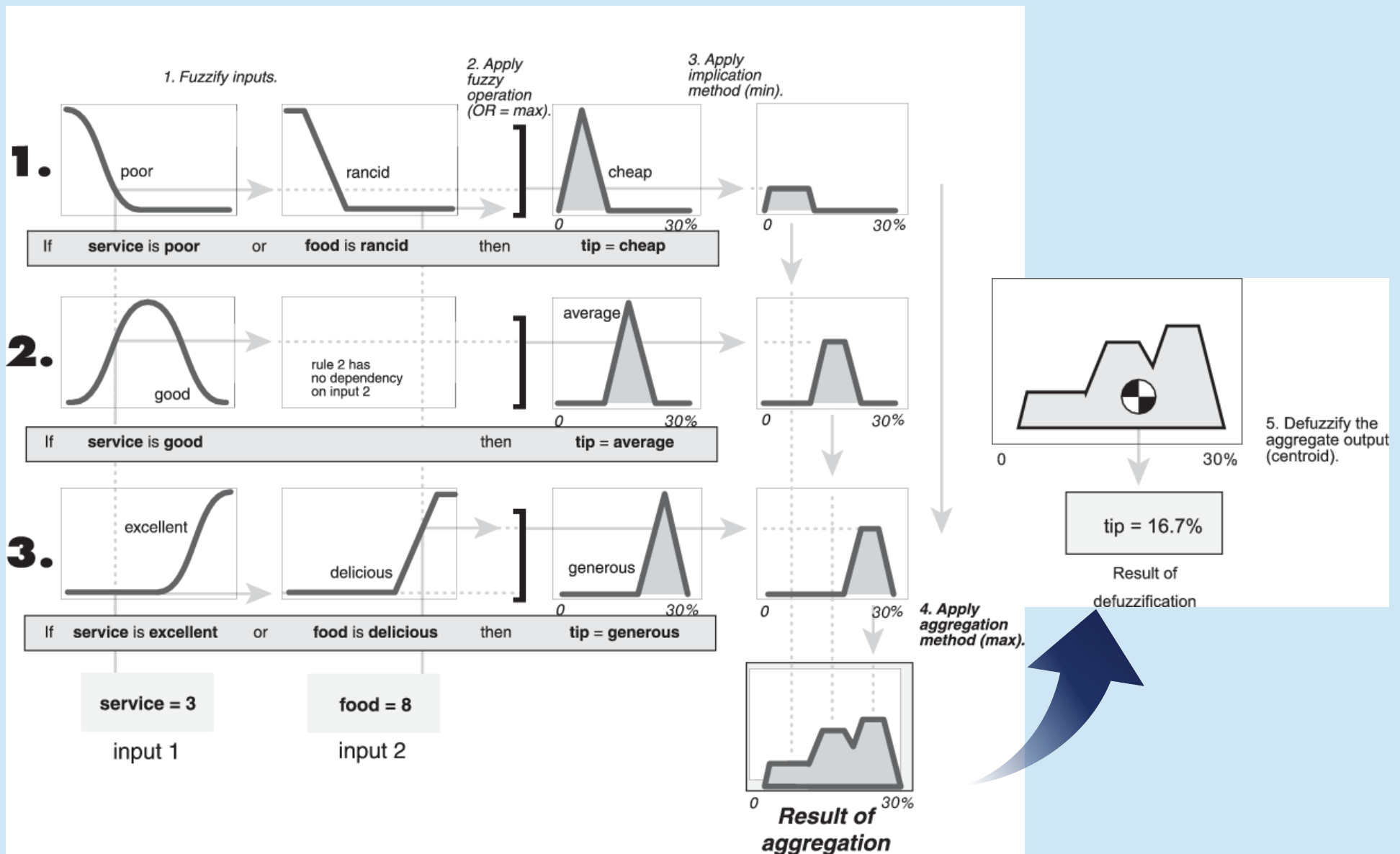
Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 2: ¿cuánta propina dejar?
 - Variables lingüísticas: servicio, comida, propina
 - Conjuntos difusos
 - Servicio → distribución gaussiana
 - Pobre $m=0, \sigma=1,5$
 - Bueno $m=5, \sigma=1,5$
 - Excelente $m=10, \sigma=1,5$
 - Comida
 - Rancia = $(1/0, 1/1, 0/3)$
 - Deliciosa = $(0/7, 1/9, 1/10)$
 - Propina
 - Tacaña = $(0/0, 1/5, 0/10)$
 - Promedio = $(0/5, 1/15, 0/25)$
 - Generosa = $(0/20, 1/25, 0/30)$

Sistemas Expertos Difusos

- Ejemplo 2: ¿cuánta propina dejar?
 - Sistema de reglas
 - R1: Si servicio es pobre O comida es rancia → propina es tacaña
 - R2: Si servicio es bueno → propina es promedio
 - R3: Si servicio es excelente o comida es deliciosa → propina es generosa
 - Calcular la propina que dejaríamos para un servicio valorado en 3 y una comida valorada en 8

Sistemas Expertos Difusos



Bibliografía recomendada

- Inteligencia Artificial. Un enfoque Moderno. Stuart Russell, Peter Noving. Ed. Prentice Hall. 2004
- Técnicas de inteligencia artificial. M.A Cazorla y otros. Ed. Publicaciones de la Universidad de Alicante. 1999