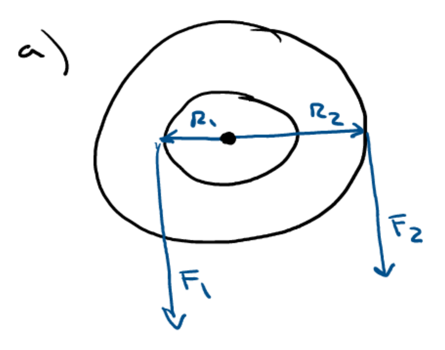
Problemas T4

miércoles, 27 de marzo de 2024 10:54

20. Dos poleas cuyos radios son 1 m y 0.3 m están acopladas, es decir, pegadas la una a la otra, formando un bloque que gira alrededor de su eje central horizontal. De la garganta de la polea grande pende un cuerpo de masa 20 kg, y de la garganta de la polea pequeña otro de 100 kg que tiende hacer girar las poleas en el sentido contrario al anterior. El momento de inercia del sistema formado por las dos poleas acopladas es de 10 kg·m^2. Al dejar el sistema en libertad se pone espontáneamente en movimiento. (a) ¿En qué sentido se mueven las poleas? (b) Aceleración con que se mueve cada bloque. (c) Aceleración angular de las poleas. (d) Tensión de las cuerdas cuando el sistema está en movimiento.

a)

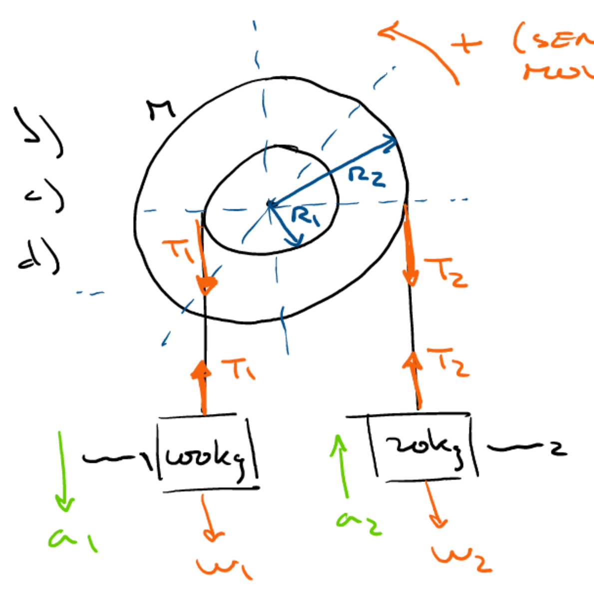


$|\tau_1| = |F_1 R_1| = 100 \cdot 0'3 = 30\ Nm$

$|\tau_2| = |F_2 R_2| = 20 \cdot 1 = 20\ Nm$

$|\tau_1| > |\tau_2|$ GIRA EN SENTIDO QUE CORRESPONDE A LA MASA m_1

b)
c)
d)



ECUACIONES DE MOVIMIENTO (2ª LEY NEWTON) PARA LOS CUERPOS:

BLOQUE $m_1 \rightarrow w_1 - T_1 = m_1 a_1$

BLOQUE $m_2 \rightarrow T_2 - w_2 = m_2 a_2$

POLEAS $M \rightarrow T_1 R_1 - T_2 R_2 = I\alpha$

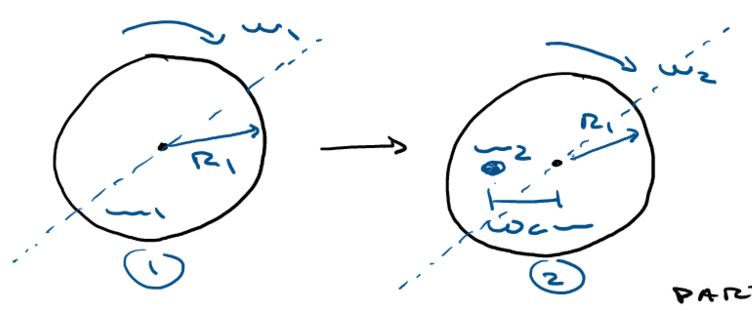
RELACIÓN ENTRE a_1 y a_2 CON α:

$a_1 = \alpha R_1 \quad | \quad a_2 = \alpha R_2$

RESOLVER SISTEMA DE ECUACIONES:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 g - T_1 = m_1 R_1 \alpha \\ T_2 - m_2 g = m_2 R_2 \alpha \\ T_1 R_1 - T_2 R_2 = I\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \text{INCOGNITAS} \rightarrow T_1, T_2, \alpha$$

22. Un disco de 30 cm de diámetro y 200 g de masa se encuentra girando alrededor de su eje con una velocidad angular de 33 rpm. En estas condiciones se adhiere una partícula de 10 g en un punto que dista 10 cm del eje de giro. Hállese la velocidad angular del conjunto.



CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

$L_1 = L_2 \rightarrow I_1 w_1 = I_2 w_2$

PARTÍCULA SE ADHIERE AL DISCO, LUEGO AMBOS GIRAN JUNTOS

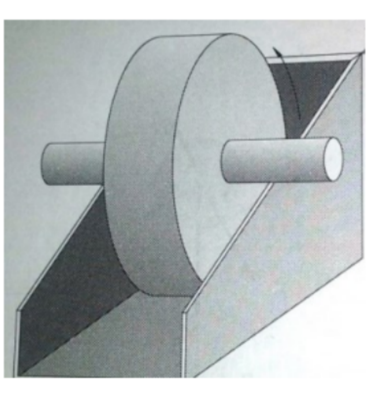
$I_1 = I_{DISCO} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$

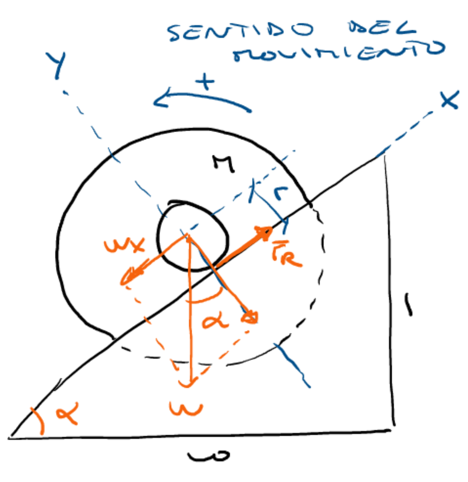
$I_2 = I_{DISCO} + I_{PARTICULA} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2$

$L_1 w_1 = L_2 w_2 \rightarrow I_{DISCO}\, w_1 = (I_{DISCO} + I_{PARTICULA})\, w_2$

$$\boxed{w_2 = \left(\frac{1}{1 + \frac{I_{PARTICULA}}{I_{DISCO}}}\right) w_2}$$

24. Un volante de la forma indicada en la figura rueda sin deslizar sobre unos carriles paralelos. La masa del volante (incluido su eje) es de 200 kg y el diámetro del eje 1 cm; la pendiente de las guías es del 10%. Partiendo del reposo, se observa que recorre el primer metro en 3 s. Calcular, la fuerza de rozamiento, el momento de inercia y el radio de giro.
Solución: $1400/9$ N, $175 \cdot 10^{-4}$ kg $\cdot$ m^2, $9.35 \cdot 10^{-3}$ m





a) PENDIENTE DEL 10%.

$tg(\alpha) = 1/10 \rightarrow \alpha = 5.7°$

$\sum F_x^{ext} = M a_{cm} \rightarrow \boxed{w_x - F_R = M a_{cm}}$

RECORRE $\Delta x = 1m$ EN $t = 3s$ CON $v_0 = 0\ m/s$

$x = x_0 + v_{0,x} t + \frac{a_{cm} t^2}{2} \rightarrow \Delta x = \frac{a_{cm} t^2}{2} \rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{2\Delta x}{t^2}}$

$F_R = w_x - M a_{cm} = Mg\, Sen(\alpha) - \frac{2M\Delta x}{t^2} = \boxed{M\left[g\, Sen(\alpha) - \frac{2\Delta x}{t^2}\right]}$

b) $\sum \tau^{ext} = I\alpha$

PARA MOVIMIENTO SIN DESLIZAR $\rightarrow a_{cm} = r\alpha$

F_R ES LA ÚNICA QUE GENERA MOMENTO $\rightarrow \tau_{F_R} = r F_R$

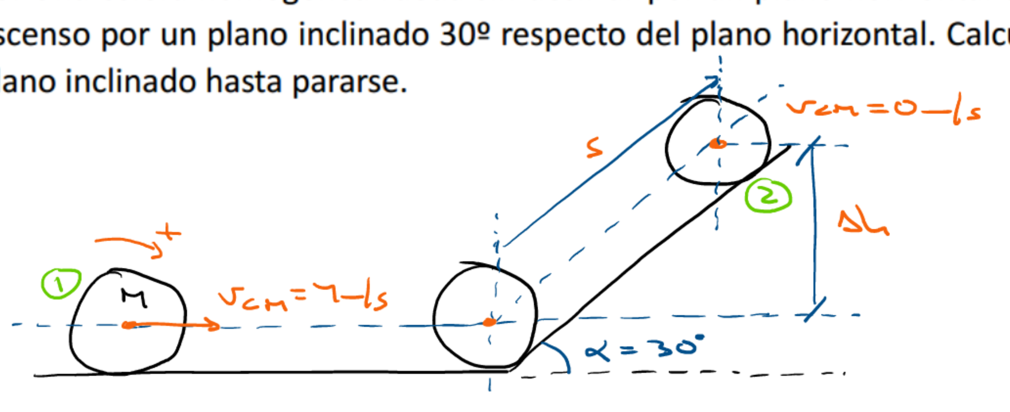
$r F_R = I\left(\frac{a_{cm}}{r}\right) = \left(\frac{2\Delta x}{r t^2}\right) I \rightarrow \boxed{I = \frac{r^2 t^2 F_R}{2\Delta x}}$

c) EL CONCEPTO DE RADIO DE GIRO NO SE HA VISTO EN CLASE

SE CALCULA COMO: $I = Mk^2$; $k \rightarrow$ RADIO DE GIRO

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{I}{M}}}$$

26. Una esfera homogénea rueda sin deslizar por un plano horizontal con una velocidad de 4 m/s. Inicia el ascenso por un plano inclinado 30º respecto del plano horizontal. Calcular la distancia que recorre sobre el plano inclinado hasta pararse.



CONSERVACIÓN ENERGÍA $\rightarrow E_{m,1} = E_{m,2} \rightarrow \Delta K + \Delta U_g = 0$

$0 - \left(\frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} w^2\right) + Mg\Delta h = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(M v_{cm}^2 + I_{cm} w^2\right) = Mg\Delta h$

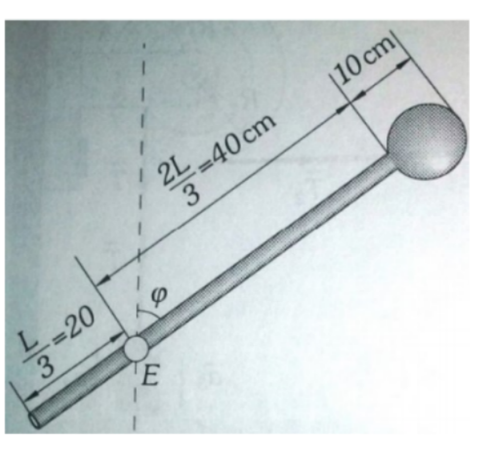
NO HAY DESLIZAMIENTO $\rightarrow v_{cm} = Rw$

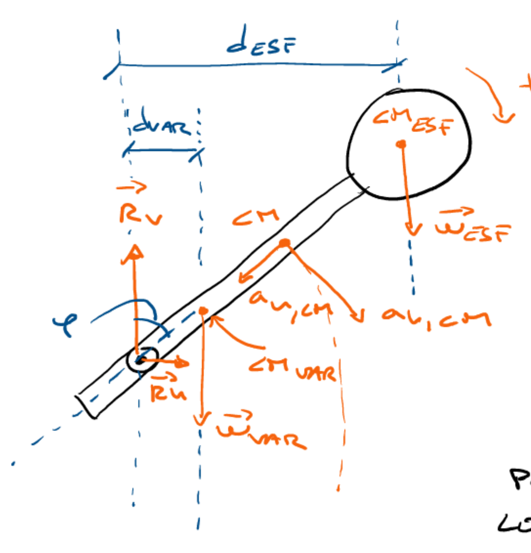
$I_{cm} = \frac{2}{5} M R^2$

$Sen(\alpha) = \frac{\Delta h}{d}$

$\frac{1}{2}\left(M v_{cm}^2 + \frac{2}{5} M R^2 \frac{v_{cm}^2}{R^2}\right) = Mgd\, Sen(\alpha) \rightarrow \boxed{d = \frac{7 v_{cm}^2}{10 g\, Sen(\alpha)}}$

32. En el sistema de la figura, la varilla tiene una longitud $L = 60$ cm y una masa de 1.8 kg, y la esfera es de 10 cm de diámetro y 1.5 kg. Todo él puede girar en torno a un eje horizontal E, e inicialmente se encuentra vertical con la esfera arriba. Si parte de esa posición, calcular: (a) la aceleración angular cuando la varilla haya barrido un ángulo φ, (b) la fuerza de reacción del eje en ese instante.
Solución: (a) $21.4 \sin(\varphi)$, (b) $F_x = 18.3 \sin(\varphi)\,(3\cos(\varphi) - 2)$,
$F_y = 33 - 18.3[1 + \cos(\varphi)\,(2 - 3\cos(\varphi))]$





a) $\sum \tau_E^{ext} = I_E \alpha = (I_{E,VAR} + I_{E,ESF})\alpha$

$I_E \rightarrow$ MOMENTO INERCIA RESPECTO DEL EJE DE GIRO QUE PASA POR E

d_{VAR} y $d_{ESF} \rightarrow$ BRAZOS DE PALANCA PARA LA VARILLA Y LA ESFERA

POSICIONES DE LOS CENTROS DE MASA RESPECTO AL EJE DE GIRO E

$$\left[\begin{array}{l} CM_{VAR} = \left(\frac{L}{3} + \frac{2L}{3}\right)\frac{1}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6} \\ CM_{ESF} = \frac{2L}{3} + R \end{array}\right.$$

$\sum \tau_E^{ext} = w_{VAR} d_{VAR} + w_{ESF} d_{ESF} = M_{VAR} g \frac{L}{6} Sen(\varphi) + M_{ESF} g\left(\frac{2L}{3} + R\right) Sen(\varphi)$

$$\left.\begin{array}{l} I_{E,VAR} = \frac{1}{12} M_{VAR} L^2 + M_{VAR}\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9} M_{VAR} L^2 \\ I_{E,ESF} = \frac{2}{5} M_{ESF} R^2 + M_{ESF}\left(\frac{2L}{3} + R\right)^2 \end{array}\right] \text{TEOREMA STEINER}$$

$\alpha = \frac{1}{I_E}\left[M_{VAR}\frac{L}{6} + M_{ESF}\left(\frac{2L}{3} + R\right)\right] g\, Sen(\varphi) = \boxed{21.4\, Sen(\varphi)}$

b) $\sum F_x^{ext} = M a_{cm,x} \rightarrow R_H = (M_{VAR} + M_{ESF})\left[a_t \cos(\varphi) - a_n Sen(\varphi)\right]$ (b.1)

$\sum F_y^{ext} = M a_{cm,y} \rightarrow (M_{VAR} + M_{ESF}) g - R_V = (M_{VAR} + M_{ESF})\left[a_t Sen(\varphi) + a_n \cos(\varphi)\right]$ (b.2)

$\rightarrow a_t = R_{cm}\alpha$ y $a_n = w^2 R_{cm}$ (b.3)

$\rightarrow$ CÁLCULO DE $w(\varphi)$:

$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = w\frac{dw}{d\varphi} \rightarrow \int_0^{\varphi} \alpha\, d\varphi = \int_0^{w} w\, dw$

$\alpha = 21.4\, Sen(\varphi)$ DEL APARTADO (a)

$w^2 = 2 \cdot (21.4)\left[1 - \cos(\varphi)\right]$

$\rightarrow$ CÁLCULO DE R_{cm}:

$R_{cm} = \frac{M_{VAR}\frac{L}{6} + M_{ESF}\left(\frac{2L}{3} + R\right)}{M_{VAR} + M_{ESF}} = \frac{57}{220}\ m$ (b.4)

$\rightarrow$ SUSTITUYENDO (b.4) y (b.3) EN (b.1) y (b.2) SE OBTIENEN LAS ECUACIONES PARA R_H y R_V:

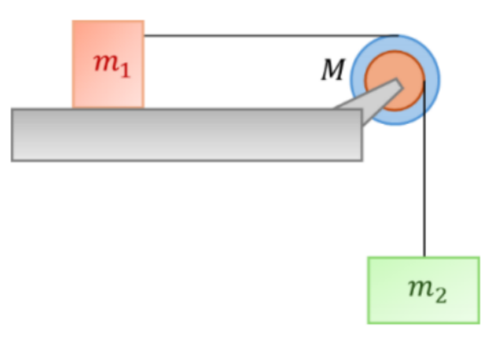
$\rightarrow R_H = (1.8 + 1.5)\left[\frac{57}{220} \cdot 21.4\, Sen(\varphi)\cos(\varphi) - \frac{57}{220} \cdot 2 \cdot 21.4\,(1 - \cos(\varphi))\, Sen(\varphi)\right] =$

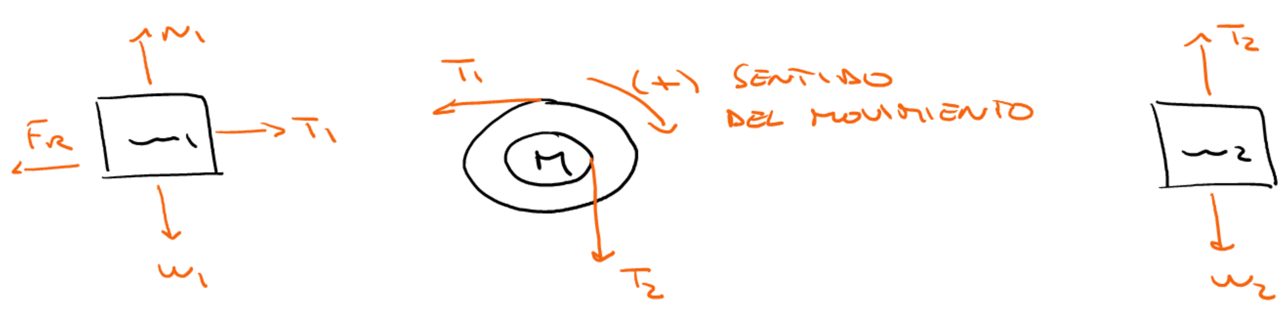
$\boxed{= 18.3\, Sen(\varphi)\left[3\cos(\varphi) - 2\right] N}$

$\rightarrow R_V = (1.8 + 1.5)10 - (1.8 + 1.5)\left[\frac{57}{220} \cdot 21.4\, Sen^2(\varphi) + \frac{57}{220} \cdot 2 \cdot 21.4\,(1 - \cos(\varphi))\cos(\varphi)\right] =$

$\boxed{= 33 - 18.3\left[1 + \cos(\varphi)\,(2 - 3\cos(\varphi))\right] N}$

34. Sobre un plano horizontal y que presenta una resistencia al deslizamiento de coeficiente $\mu = 0.2$, desliza un bloque de $m_1 = 3.0$ kg de masa unido a una cuerda que se enrolla en la periferia de una polea formada por un disco $M = 5.0$ kg y 0.3 m de radio que tiene una hendidura de 0.1 m tal como se ve en la figura. De la cuerda enrollada en la hendidura pende un bloque de $m_2 = 10.0$ kg de peso. Calcular: (a) la aceleración de cada cuerpo y (b) la aceleración angular de la polea.
Solución: (a) $4.05\ \mathrm{rad/s^2}$, $1.35\ \mathrm{m/s^2}$, (b) $13.5\ \mathrm{rad/s^2}$





ECUACIONES DEL MOVIMIENTO:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \rightarrow \sum F_x^{ext} = T_1 - F_R = T_1 - \mu m_1 g = m_1 a_1 = m_1(0.3\alpha) \\ m_2 \rightarrow \sum F_x^{ext} = w_2 - T_2 = m_2 g - T_2 = m_2 a_2 = m_2(0.1\alpha) \\ M \rightarrow \sum \tau^{ext} = 0.1 T_2 - 0.3 T_1 = I\alpha = \left(\frac{1}{2} M \cdot (0.3)^2\right)\alpha \end{array}\right\} \rightarrow \text{RESOLVER SISTEMA DE ECUACIONES}$$