Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 1. Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. *first-order system of ODEs*):

(a) równanie Van der Pol'a:

$y'' = y'(1 - y^2) - y.$

(b) równanie Blasiusa:

$y''' = -yy''.$

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \tag{1}$$

$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}. \tag{2}$$

Zadanie 2. Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

(a) Analityczna stabilność. Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

(b) Numeryczna stabilność. Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(c) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Euler'a.

(d) Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

(e) Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a.

Zadanie 3. Model Kermack'a-McKendrick'a przebiegu epidemii w populacji opisany jest układem równań różniczkowych:

$$S' = -\beta IS, \tag{3}$$

$$I' = \beta IS - \gamma I, \tag{4}$$

$$R' = \gamma I, \tag{5}$$

gdzie
S reprezentuje liczbę osób zdrowych, podatnych na zainfekowanie,
I reprezentuje liczbę osób zainfekowanych i roznoszących infekcję,
R reprezentuje liczbę osób ozdrowiałych.

Parametr β reprezentuje współczynnik zakaźności (ang. *transmission rate*). Parametr γ reprezentuje współczynnik wyzdrowień (ang. *recovery rate*). Wartość $1/\gamma$ reprezentuje średni czas choroby.

Założenia modelu:

- Przyrost liczby osób zakażonych jest proporcjonalny do liczby osób zakażonych oraz do liczby osób podatnych.
- Przyrost liczby osób odpornych lub zmarłych jest wprost proporcjonalny do liczby aktualnie chorych.
- Okres inkubacji choroby jest zaniedbywalnie krótki.
- Populacja jest wymieszana.

Jako wartości początkowe ustal:

$$S(0) = 762, \; I(0) = 1, \; R(0) = 0 \; .$$

Przyjmij też $N = S(0) + I(0) + R(0) = 763$ oraz $\beta = 1$. Zakładając, że średni czas trwania grypy wynosi $1/\gamma = 7$ dni, przyjmij $\gamma = 1/7$.

Całkując od $t = 0$ do $t = 14$ z krokiem 0.2, rozwiąż powyższy układ równań:

- jawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$$

- niejawną metodą Eulera

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ gdzie}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_1/2) \\ k_3 &= f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_2/2) \\ k_4 &= f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3) \end{aligned}$$

Wykonaj nastepujące wykresy:

- Dla każdej metody przedstaw na wspólnym rysunku wykresy komponentów rozwiązania (S, I, R) jako funkcje t (3 wykresy).

- Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy funkcji $S(t)+I(t)+R(t)$ znalezione przez każdą metodę (1 wykres). Czy niezmiennik $S(t)+I(t)+R(t) \equiv N$ jest zachowany?

Wiemy, że liczba osób zakażonych w pewnej szkole kształtowała się następująco:

Dzień, t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zakażeni, I	1	3	6	25	73	222	294	258	237	191	125	69	27	11	4

Wybierz jedną z powyższych metod numerycznych i oszacuj prawdziwe wartości współczynników $\theta = [\beta, \gamma]$. W tym celu wykonaj minimalizację funkcji kosztu. Jako funkcję kosztu wykorzystaj sumę kwadratów reszt (ang. *residual sum of squares*):

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^{T} (I_i - \hat{I}_i)^2 \quad ,$$

gdzie I_i oznacza prawdziwą liczbę zakażonych, a $\hat{I}_i$ oznacza liczbę zakażonych wyznaczonych metodą numeryczną. Ponieważ nie znamy gradientu $\nabla_\theta L(\theta)$, do minimalizacji wykorzystaj metodę Neldera-Meada, która nie wymaga informacji o gradiencie.

Powtórz obliczenia, tym razem jako funkcję kosztu wykorzystując:

$$L(\theta) = -\sum_{i=0}^{T} I_i \ln \hat{I}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{I}_i \quad .$$

Ile wynosił współczynnik reprodukcji $R_0 = \beta/\gamma$ w każdym przypadku?