GRAPHE ET FLOTS

Algo de FORD

Permet de trouver le chemin OPTIMAL entre 1 sommet particulier (la racine) et tous les autres sommets.

-> on numérote les sommets du graphe :

* Numéro 1 pour la racine
* autres numéros -> moins un essaie. (si possible d'avoir une numérotation)

~~Chemin OPTIMAL~~

Recherche du chemin MINIMAL

* Initialisation : $\left\| \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_i = +\infty \end{array} \right.$

en fait d'exécution, λ_i = longueur du chemin MINIMAL allant du sommet 1 au sommet i

* On $\boxed{\text{examine}}$ à tour de rôle les diff arcs partant du sommet i, en commençant par $i = 1$.

- Pour ne pas en oublier, on les examines dans l'ordre croissant de leurs extrémité j.

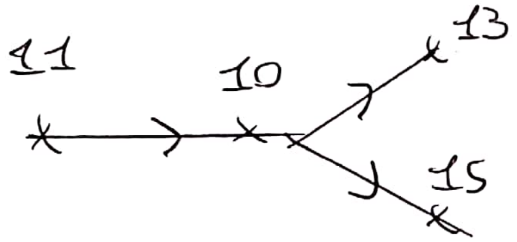
- ~~Examinons~~ $\boxed{\text{Examen de l'arc } i, j}$

si évaluation de l'arc (i,j)

$v(i,j) < \lambda_j - \lambda_i$

alors on remplace λ_j par $\lambda_i + v(i,j)$

Si à un moment donné, on a $i > j$ (arc de numérotation min topologique) et si en plus on a un changement de valeur par (λ_j), alors il faut refaire une partie des calculs en repartant du sommet $i = j$ [retours en arrière]



(10, 13)
(10, 15)

(11, 10)

- Une fois que tous les arcs ont été examinés, on lit le résultat :

on cherche le chemin MINIMAL depuis le sommet 1 jusqu'au sommet i :

(1) λ_i final -> longueur du chemin

λ_i final -> le + court de 1 à i

(2) on identifie les sommets du chemin optimal en partant du sommet terminal

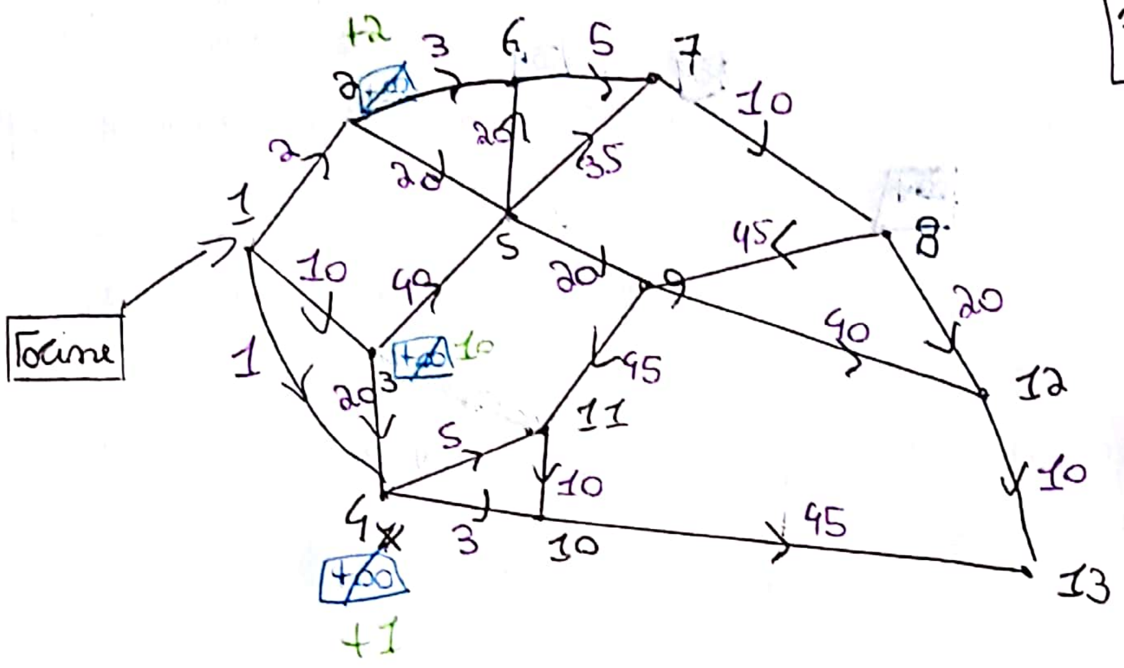
- <u>Prédécesseur de i :</u> le sommet i' :

$$\lambda_i - \lambda_{i'} = v(i', i)$$

EX : p.106 → on numérote les sommets de 1 à 13

PHOTO

23 AVRIL

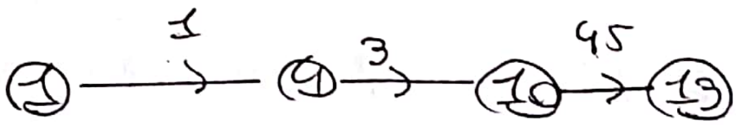


Ici, un seul arc : (11, 10) de n° non topologique

- Mais l'examen de cet arc n'entraîne pas de changement de valeur de λ_{10} ⇒ pas de retour en arrière.

- Interprétation → chemin le + court entre 1 et le sommet 13 → longueur 49.

On identifie le chemin solution en partant du sommet 13

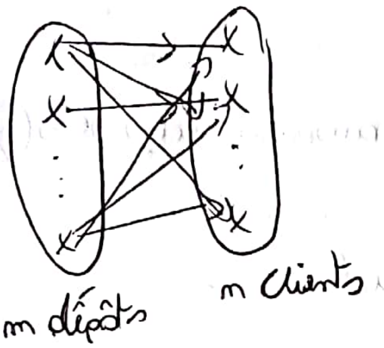


Rem : si on cherche le chemin MAXIMAL entre 1 et tous les autres sommets, on applique le m̂ algo après avoir changé V(i,j) → 45 −V(i,j)

PROGRAMME DE TRANSPORT optimaux

Définition d'un pgm de transport

* (m) dépôts de marchandises
* (n) clients à livrer
* Chq dépôt peut livrer n'importe quel client



On suppose connue la matrice des coûts unitaires

$[C] : m \times n$

Ex: $m = 4$, $n = 6$ clients

C_{ij} = coût de livraison de 1 tonne depuis le dépôt (i) vers le client (j)

$[C]$ =

	1	2	3	4	5	6	
I	12	27	61	44	83	35	18
II	23	39	78	28	65	42	32
III	67	56	92	24	53	54	14
IV	71	43	91	67	40	44	9
	4	11	28	6	14	5	73

m = 4 dépôts

demandes des ≠ clients

disponibilités des ≠ dépôts

- On suppose connues:
  * les disponibilités des ≠ dépôts
  * les ~~disp~~ demandes des ≠ clients

- **Hypothèse**

  $\sum$ disponibilités = $\sum$ demandes

OFFRE = DEMANDE

- On cherche PLAN de TRANSPORT

$$\longrightarrow \text{matrice } [x] = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \text{I} & & & & & & \\ \text{II} & & & ? & & & \\ \text{III} & & & & & & \\ \text{IV} & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

x_{ij} = quantité de marchandise transportée de (i) vers (j)

- Le plan de transport doit être valide $\longrightarrow$

- Contraintes de lignes $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = x_i \, , \forall i = 1, m$ ← disponibilité

- Contraintes de colonnes $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \, , \forall j = 1, m$

(b_j = demande client j)

- On associe un coût à chq plan de transport valide $\rightarrow$ (z).

$$\boxed{z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \times C_{ij}}$$

On cherche le plan de transport $\boxed{\text{Valide}}$ de $\boxed{\text{Coût minimal}}$

Bilan maths du Pb

- nb inconnues $\longrightarrow$ $m \times n$ inconnues
- nb relations $\longrightarrow$ $(m + n)$ relations

- Or $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \Longrightarrow$ nb relations indépendantes : $(m+n-1)$

Ici : || 24 inconnues
|| 9 relations indépendantes

On s'intéresse aux plans de transport $\boxed{\text{DE BASE}}$

↓

l'excès du nbs inconnues / nb de relations indép.

$\Longrightarrow$ Variables $x_{ij} = 0$

Ici : Un plan de transport de base x :

|| 9 Variables $x_{ij} \neq 0$

|| 15 Variables $x_{ij} = 0$

Pb résolu en 2 étapes

A Etape Constructive

On construit un plan de transport $\boxed{\text{valide}}$ et $\boxed{\text{de base}}$, qui servira de solution initiale à l'étape B

B Recherche du plan de transport optimal

Par itérations successives, en partant de la solution procurée par l'étape A

Ⓐ Etape d'initialisation → heuristique de BALAS-HAMMER

(dite aussi " de la diff maximal

On recherche les 9 $x_{ij} \neq 0$, l'on les trouve un par un → 9 étapes

Algo:

* On calcule pour chq ligne, et pour chq colonne de [C] la diff entre le coût unitaire le + petit et celui immédiatement ≥

$\Delta = 1^{er} - (\text{immédiat} \geq)$

[C] =

	1	2	3	4	5	6		Δ lignes
I	12	27	61	99	83	35	18	15
II	23	39	78	28	65	92	32	5
III	67	56	92	24	53	54	~~14~~ → 8	29
IV	71	93	91	67	90	49	9	3
	9	11	28	6	14	5		
Δ cols	11	12	17	4	13	7		

- on repère la ligne ou la col présentant la diff maximale → ligne III,
- on repère la case de cette rangé ayant le coût initiale le + petit → (III, 4),
- on affecte à cette case la + grande valeur de x_{ij} possible → MIN {disponibilité, demande} associé à cette case

[X] =

	1	2	3	4	5	6
I						
II						
III				6		
IV						

⇒ col 4 saturé
ligne III → dispo résiduelle = 14 − 6 = 8

	1	2	3	5	6		Δ lignes
~~I~~	~~12~~	~~27~~	~~61~~	~~83~~	~~35~~	~~18~~	15
II	23	39	78	65	42	32	16
III	67	56	92	53	54	80	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
	9	11	~~28~~	14	5		
Δ cols	11	12	17	13	7		

$28 - 18 = 10$

Tableau final

$[X] =$

	1	2	3	4	5	6	
I			18				18
II	9	11	7			5	32
III			3	6	5		14
IV					9		9
	9	11	28	~~14~~ 6	14	5	

$[C] =$

	1	2	3	5	6		Δ lignes
II	23	39	78	65	42	~~32~~	16
III	67	56	92	53	54	8	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
	9	11	10	14	5		
Δ col	44	4	13	13	7		

$32 - 9 = 23$

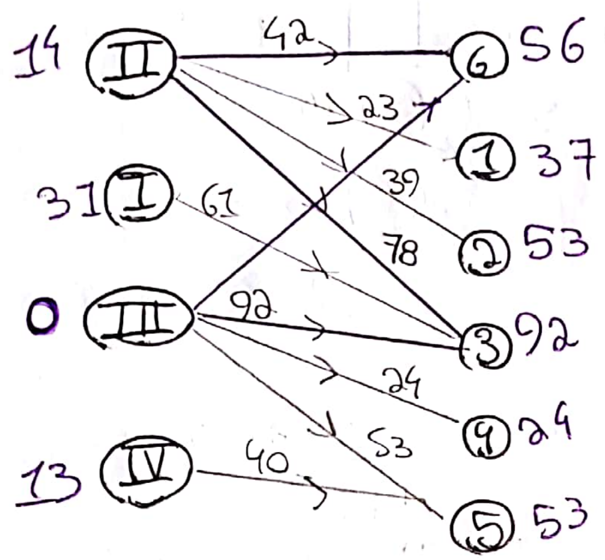
solution | VALIDE
DE BASE
↳ 9 ~~$x_{ij} \neq 0$~~
$x_{ij} \neq 0$

Coût de cette solution valide et de base

→ $\boxed{z = 18 \times 61 + 9 \times 23 + \ldots = 3535}$

(B) Amélioration itérative jusqu'au plan de transport optimal

- On construit un graphe associé à la solution de l'étape (A) avec la matrice [C]



- On value les arcs avec leur C_{ij}
- On cherche si on peut améliorer cette solution en faisant appel à une case (i,j) inutilisée ?
- On associe aux ≠ sommets du graphe un POTENTIEL :

* potentiel 0 à l'origine de l'arc de coût le + élevé

* autres potentiels : $\boxed{V_j - V_i = C_{ij}}$

V

On calcul le coût MARGINAL de ~~chaque~~ chacune des cases x_{ij} non utilisées (au nombre de 15) → vides dans le tableau [X]

$$S_{ij} = V_i - V_j + C_{ij}$$

On peut améliorer le plan de transport ssi il y a au moins une case inutilisée de coût marginal $\underset{str}{<} 0$

$$S_{I,1} = 31 - 37 + 12 = 6$$

$$S_{I,2} = 31 - 53 + 27 = 5$$

⋮

Ici, une seul case ayant le coût marginal $\underset{str}{<} 0$

$$S_{III,6} = 0 - 56 + 54 = -2$$

=> le plan de transport n'est pas optimal

- On cherche un circuit partant du sommet III et y retournant le + vite possible

$$\text{III} \xrightarrow{\cancel{0}\,3} (6) \xleftarrow{\cancel{5}\,2} (\text{II}) \xrightarrow{\cancel{7}\,10} (\dots) \xleftarrow{\cancel{8}\,0} (\text{III})$$

On cherche α le plus grand possible que l'on peut ajouter aux arcs à l'endroit et retrancher aux arcs à l'envers

=> Nouveau plan de transport meilleur, de coût: $\rightarrow$ $\alpha = 3$

$z = 18 \times 61 + 9 \times 23 \dots = 3529$

amélioration: $\delta_{\text{III},6} \times \alpha = (-2) \times 3$

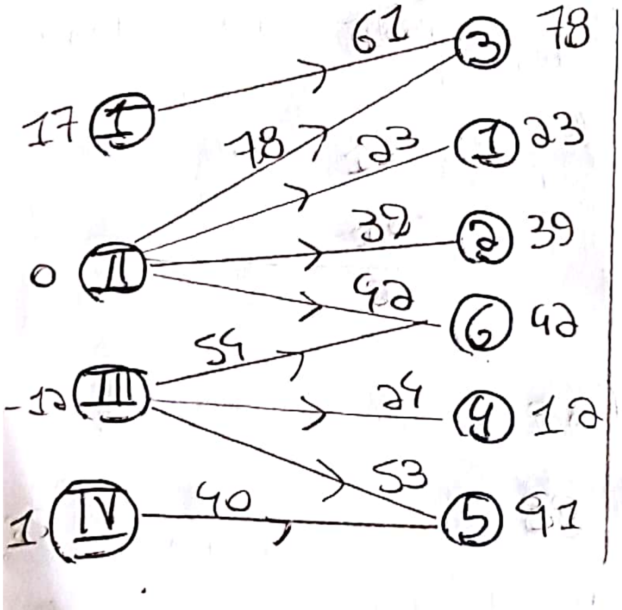
[X]

	1	2	3	4	5	6	
I	X	X	18				18
II	9	11	~~7~~ 10			~~5~~ 2	32
III			~~8~~	6	5	3	14
IV					9		9
	9	11	28	6	14	5	

Nouveau plan :

	1	2	3	4	5	6	
I			18				18
II	9	11	10			2	32
III				6	5	3	14
IV					9		9
	9	11	28	6	14	5	73

On construit le graphe associé
+ on trouve les potentiels
+ on calcule les δ_{ij} des cases inutilisables



calcul des valeurs marginales:

$\delta_{I,1} = 17 - 23 + 12 = 6$

$\delta_{I,2} = 17 - 39 + 27 = 5$

les 15 cases inutilisées ont un $\delta_{ij} \underset{\text{str}}{>} 0$ => le plan de transport est optimal

Problemè de FLOT MAXIMAL dans un 'Réseau de Transport'

-> 2 types d'applications :

(1) les réseaux proprement dits

On veut enchaîner le maximum d'éléments depuis la . . . . .

Définitions

* "Réseau de transport"

Graphe orienté, sans boucle, comportant une ENTRÉE (ou Source) et une SORTIE (Puits)

arc u → quantité MAX transportable

$C(u) \geq 0$ $\boxed{C(u)}$ ← CONNU

On recherche un FLOT tq arc u → FLUX $f(u)$

L'ensemble des FLUX $f(u)$ sur tous les arcs u constitue le FLOT

$f(u)$ doit satisfaire 2 types de contraintes:

(1) $\boxed{0 \leq f(u) \leq C(u)}$, $\forall u$

(2) $\forall$ le sommet x du réseau loi de ~~conservation~~ conservation de KIRSHOFF

$$\boxed{\sum_{u \text{ entrants}} f(u) = \sum_{u \text{ sortants}} f(u)}$$

Le Flot dans le FLOT est $\boxed{\text{Valide}}$ ssi les contraintes du type (1) et (2) sont respectées, $\forall u$ et $\forall x$.

Pour un FLOT donné, on lui associe une valeur $\boxed{Val(f)}$

Il existe toute une gamme de valeurs de FLOTS, depuis le FLOT nul, jusqu'au FLOT optimal.

Val (f) peut se calculer de 3 manières différentes :

(a) Valeur à la source

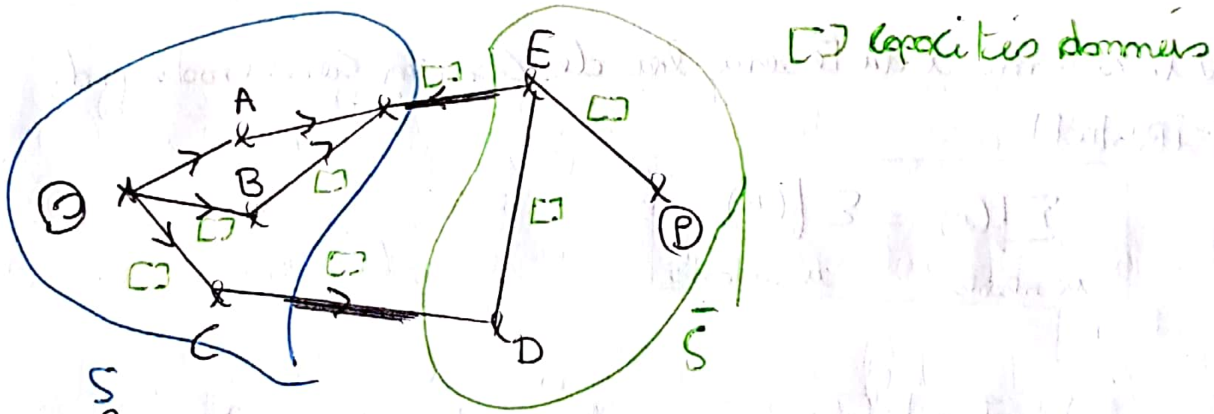
$$\boxed{Val(f) = \sum_{\substack{\text{arcs } u \\ \text{issus de } s}} f(u)}$$

(b) Valeur au puits p

$$\boxed{Val(f) = \sum_{\substack{\text{arc } u \\ \text{arrivant en } p}} f(u)}$$

(C) Valeur du FLOT au niveau d'une coupe $(S, \overline{S})$ quelconque

S = ensemble des sommets contenant (s) et ne contient pas (p)



S ↑ exemple de coupe

Au niveau de la coupe $(S, \overline{S})$, on peut mesurer la valeur du flot :

$$Val(f) = \sum_{\substack{\text{arcs } u \\ \text{allant de} \\ S \text{ vers } \overline{S}}} f(u) - \sum_{\substack{\text{arcs } u \\ \text{allant de} \\ \overline{S} \text{ vers } S}} f(u)$$

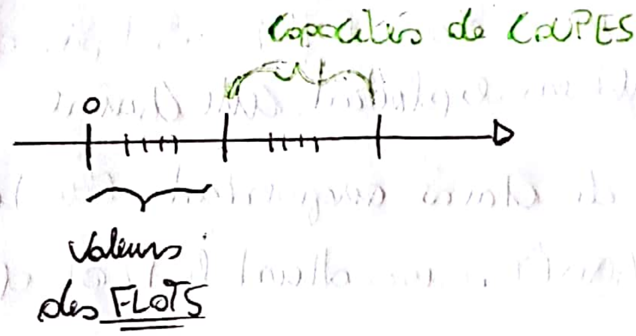
Capacité de la coupe $(S,\bar{S})$ →

$$c(S,\bar{S}) = \sum c(u)$$

avec u allant de S vers $\bar{S}$ (et pas de $\bar{S}$ vers S)

(1) ∀ le FLOT ~~établit~~ établit dans un réseau de ~~tr~~ transport,
- et ∀ la coupe $(S,\bar{S})$

$$\boxed{Val(f) \leq c(S,\bar{S})} \quad \forall f \quad \forall (S,\bar{S})$$



(2) Théorème du FLOT maximale et de la coupe de capacité minimale

Si on arrive à trouver un flot f et une coupe $(S,\bar{S})$ tels que $\boxed{Val(f) = c(S,\bar{S})}$ on a trouvé le flot optimal et la coupe minimale.

$$\boxed{\text{FLOT MAXI} \equiv \text{COUPE MINI}}$$

(3°) Pour la coupe $(S,\bar{S})$ de capacité MINIMALE → tous les arcs u de S vers $\bar{S}$ sont "saturés" $\boxed{f(u) = c(u)}$

• tous les arcs u de $\bar{S}$ vers S ont un flux $\boxed{f(u) = 0}$

Recherche du FLOT OPTIMAL

Algorithme de Ford-Fulkerson

Principe : algorithme itératif

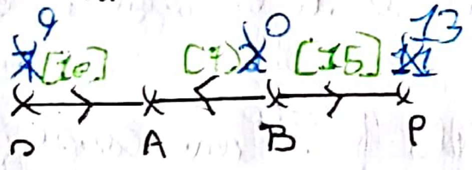
* flot initiale (flot nul, ou bien un flot ∀ établi à la main)

* Recherche d'une chaîne augmentante reliant (s) à (p)

* 2 cas : - si ~~on~~ on trouve une, alors le flot n'est pas optimal et on améliore le flot en exploitant cette chaîne

  - s'il n'existe pas de chaîne augmentante ~~…~~ reliant (s) à (p), alors ARRÊT : on atteint le FLOT OPTIMAL

* Chaîne → chemin non orienté



→ arcs à l'endroits

← arcs à l'envers

[capacités]

flux

La chaîne reliant s à p est augmentante s'il existe

$$\alpha = \min \left\{ \min_{\substack{\text{arcs } u \\ \text{à l'endroit}}} \{ c(u) - f(u) \} , \min_{\substack{\text{arcs } u \\ \text{à l'envers}}} f(u) \right\}$$

$c(u) - f(u)$ = capacité résiduelle de l'arc u

(s, A) -> capacité résiduel = 3
(B,P) -> " " = 4
(B,A) -> flux 2

MIN = 2 La chaîne est augmenté ssi $\alpha > 0$

On peut $\boxed{\text{exploiter}}$ la ch. augmentante pour améliorer le flot

=> on améliore le flot de la valeur α

L'exploitation : (1) on augmente de α le flux de tous les arcs à l'endroit

(2) on diminue de α le flux de tous les arcs à l'envers.

En pratique ;

* Initialisation de l'algorithme

-> On peut partir du flot nul => + d'Itérations

-> On s'efforce de partir d'un $\boxed{\text{flot initial complet}}$ tel que tout chemin de (s) à (P) comporte au moins 1 arc saturé (facil à trouver "à la main").

* Recherche d'une chaîne augmentes

Procédure de marquage du réseau

-> $\boxed{\text{marquage en avant}}$

• on marque la source :
+ à côté de (s)

- on marque l'extrémité terminale J de tout arc (I, J) non saturé dont l'origine I est déjà marqué

-> marque +I à côté de ~~*~~. J

-> $\boxed{\text{marquage arrière}}$

on marque l'origine k de tout arc (k, L) de <u>flux ≠ 0</u> dont l'extrémité terminale L est déjà marquée

marque -L à côté de k

- Plusieurs phases de marquage ~~avant~~ avant et arrière avant blocage

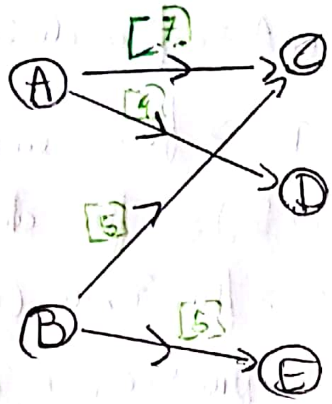
Quand le marquage s'arrête, 2 possibilités :

* <u>on a pu marquer P</u> -> il existe une chaîne augmentée reliant s à P, dont les sommets sont identifiés à l'aide des marques.

* on n'a pas pu marquer P => il n'existe pas de ch. augmentée, on a atteint un FLOT OPTIMAL

Application Pb de FLOT p103

→ ports A et B : quantités disponibles 10 et 10



- [] Capacités

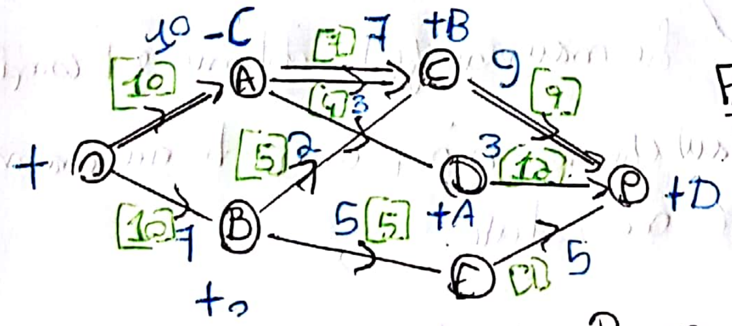
- marchandise attendue dans les ports C, D et E : quantités 9, 12 et 7

(1°) Peut-on satisfaire ttes les demandes ? NON

Car | offre totale = 10 + 10 = 20
demande totale = 9 + 12 + 7 = 28

OFFRE < DEMANDE

(2°) Determiner le FLOT OPTIMAL (après Transformation du Pb initial) à l'aide de l'algo de Ford-Fulk...



Flot initial complet

tout chemin de s à p comporte au moins 1 arc saturé $f(u) = c(u)$

Par exemple : * on sature (A-C) : flux de 7 sur (A, C)

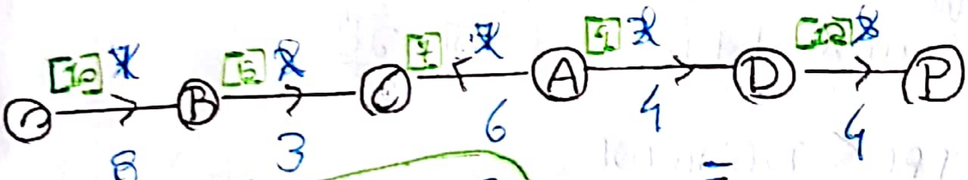
* // // (C, P) : flux 9 sur (C, P)

* Kirchhoff en C => flux 2 sur (B,C) < capacité 5

* On sature (s,A) : flux 10 sur (s,A)
* Kirchhoff en A => flux de 3 sur (A,D) < capacité 4
* Kirchhoff en D => flux 3 en (D,P) < capacité 12
* On sature (B,E) => flux de 5 sur (B,E)
* Kirchhoff en B => flux 7 sur (A,B) < capacité 10
* Kirchhoff en E => flux 5 en (E,P) < capacité 7

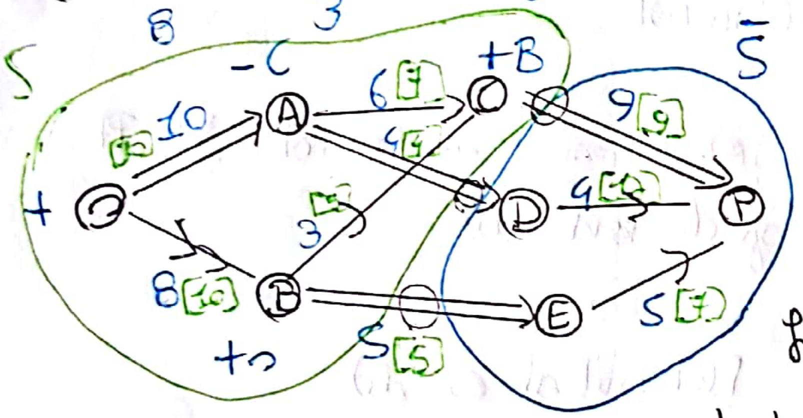
On a bien un flot initial $\boxed{\text{complet}}$

$$Val(f) = 10 + 7 = \underline{\underline{17}} = 9 + 3 + 5$$



capacité − flux

$\alpha = 4 - 3 = 1$



-> Nouveau flot = 18
(10+8 = 9+4+5)

Le nouveau flot obtenu est complet
tout chemin s à p comporte au moins 1 arc saturé.

Ici après marquage, le flux optimal est atteint car on ne peut plus avancer et sa valeur est de 18.

FLOT MAXIMAL = $\underline{\underline{18}}$ = COUPE MINIMALE

| S = sommets marqués dans la dernière phase de marquage.
| $\bar{S}$ = le complément (les autres sommets)

$$c(S,\bar{S}) = c(C,P) + c(A,D) + c(B,E)$$
$$[9] + [2] + [6] = \underline{\underline{18}}$$

Coupe MIN
→ tous les arcs de S vers $\bar{S}$ sont saturés

APPLICATION page 104

Couplage de cardinal MAXI