Approximations

Peano :

On considère les méthode d'intégration :

- $\int_0^h f(x)\,dx \simeq h f(h/2)$

1. Déterminer l'ordre de chaque méthode.
2. Déterminer le noyau de Peano.
3. Majorer l'erreur d'intégration.
4.

1. $f(x) = 1$. $\left.\begin{array}{l}\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h 1\,dx = h \\ h f(h/2) = h.\end{array}\right\}$ ok.

$f(x) = x$. $\left.\begin{array}{l}\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h x\,dx = h^2/2 \\ h f(h/2) = h^2/2\end{array}\right\}$ ok.

$f(x) = x^2$. $\left.\begin{array}{l}\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h x^2\,dx = h^3/3 \\ h f(h/2) = h^3/4\end{array}\right\}$ pas ok.

$\rightarrow$ D'ordre 1 $\rightarrow$ $N=1$.

$\Rightarrow E(x \longrightarrow x^2) = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4} = \frac{h^3}{12}$ $\rightarrow$ Faire la soustraction d'ici

2. $K_1(t) = E(x \longrightarrow (x-t)_+)$ $\rightarrow$ Car $K_N(t) = E(x \longrightarrow (x-t)_+^N)$.

$$= \underbrace{\int_0^h (x-t)_+\,dx}_{\text{Parce que c'est d'ordre 1.}} - \underbrace{h\left(\frac{h}{2}-t\right)_+}_{\text{idem, reprendre l'énoncé avec } x = (x-t)_+}$$

$$\begin{cases} (x-t)^0_+ = x-t & \text{si } x \geq t \\ (x-t)^0_+ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$ $\longrightarrow$ Par définition.

Donc on intègre sur $[t;h]$ car $t \in [0;h]$ et si $x < t$, $(x-t)_+ = 0$.

$$K_1(t) = \int_t^h (x-t)\,dx - \underbrace{h\left(\frac{h}{2}-t\right)_+}_{\begin{cases} \frac{h}{2}-t & \text{si } h/2 \geq t \geq 0. \quad 1^{er} \text{ cas.} \\ 0 & \text{si } h/2 < t \leq h. \quad 2^{ème} \text{ cas.} \end{cases}}$$

1^{er} cas : $0 \leq t \leq h/2$.

$$K_1(t) = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^h - h\left(\frac{h}{2}-t\right)$$

$$= t^2/2 > 0.$$

$2^{ème}$ cas : $h/2 < t \leq h$.

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2} > 0.$$

3. Tjs positif $\Rightarrow K_n(t)$ garde un signe constant sur $[0;h]$

D'après le corollaire de Peano, il $\exists\, t \in [0;h]$ tq

$$E(f) = \frac{f^{(N+1)}(t)}{(N+1)!} E(x \longrightarrow x^{N+1}).$$

$$E(f) = \frac{f''(t)}{2!} E(x \to x^2).$$

$$= \frac{f''(t)}{2} \cdot \frac{h^3}{12}. \quad \text{(cf 1.)}$$

$$E(f) = f''(t) \cdot \frac{h^3}{24}.$$

Soit $C = \max\limits_{0 \leq x \leq h} |g''(x)|$, $|E(g)| \leq \dfrac{Ch^3}{24}$.

- $\int_0^h f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(0) + f(h)\right)$.

1. $f(x) = 1$. $\left.\begin{array}{l} \int_0^h dx = h \\ \frac{h}{2}(1+1) = h \end{array}\right\}$ ok.

$f(x) = x$. $\left.\begin{array}{l} \int_0^h x\,dx = h^2/2 \\ \frac{h}{2}(0+h) = h^2/2 \end{array}\right\}$ ok.

$f(x) = x^2$. $\left.\begin{array}{l} \int_0^h x^2\,dx = h^3/3 \\ \frac{h}{2}(0+h^2) = h^3/2 \end{array}\right\}$ pas ok.

$\rightarrow$ ordre 1 $\rightarrow N = 1$.

$\Rightarrow E(x \mapsto x^2) = \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^3}{2} = \dfrac{-h^3}{6}$

2. $K_1(t) = E(x \longrightarrow (x-t)_+)$.

$= \int_0^h (x-t)_+\,dx - \frac{h}{2}\left(f(-t)_+ + f(h-t)_+\right)$

$= \int_0^h (x-t)_+\,dx - \frac{h}{2}\left(\underbrace{(-t)_+}_{\substack{t \geq 0. \\ \text{Donc } = 0.}} + (h-t)_+\right)$

$\begin{cases} (x-t)_+ = x - t \text{ si } x \geq t \\ (x-t)_+ = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$

$K_1(t) = \int_t^h (x-t)\,dx - \frac{h}{2}\underbrace{(h-t)_+}_{h-t \text{ si } h \geq t}$ $\rightarrow$ c'est le cas.

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2} - \frac{h}{2}(h-t)$$

$$= \underbrace{\frac{t}{2}}_{\geq 0}\underbrace{(t-h)}_{\leq 0} \leq 0.$$

D'après le corollaire de Peano, vu que c'est de signe cst,

$\exists\, t \in [0;h] \,/\, E(f) = \dfrac{f''(*)}{2} E(x \longrightarrow x^2)$, $f \in C^2$.

$$E(f) = -\frac{f''(*)}{2} \times \frac{h^3}{6} = -f''(*) \times \frac{h^3}{12}$$

$$|E(f)| \leq \frac{C h^3}{12} \quad \text{avec } C = \underset{0 \leq x \leq h}{\mathrm{Max}} |f''(x)|.$$

Interpolation de Newton :

- $f(x)$ supposée continue, et : $f(-1) = -1$, $f(-2) = -3$, $f(1) = 3$, $f(2) = 17$.

1. Donner le tableau des différences divisées et en déduire le polynôme d'interpolation de Newton.

x_i	0	1	2	3
-2	-3	2	0	1
-1	-1	2	4	
1	3	14		
2	17			

$$P_3(x) = f(-2) + (x+2) f(-2;-1) + (x+2)(x+1) f(-2;-1;1) + (x+2)(x+1)(x-1) f(-2;-1;1;2).$$

$$= -3 + (x+2) \times 2 + 0 + (x+2)(x+1)(x-1) \times 1.$$

$$P_3(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

2. Donner l'expression et l'erreur d'interpolation.

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}$$

3. En utilisant l'algorithme division synthétique, calculer le développement du polynôme d'interpolation en puissance de $(x+3)$.

	j	3	2	1	0	Reste
P_3	a_j	1	2	1	-1	
Q_2	b_j		1	-1	4	$-13 = R_3$
Q_1	c_j			1	-4	$16 = R_2$
Q_0	d_j				1	$-7 = R_1$

$R_0 = 1.$

3. $P_3(x) = R_3 + R_2(x+3) + R_1(x+3)^2 + R_0(x+3)^3.$

$P_3(x) = -13 + 16(x+3) - 7(x+3)^2 + 1(x+3)^3.$

4. En déduire la valeur interpolée $f(-3)$ et les approximations des dérivées successives $f'(-3)$, $f''(-3)$ et $f'''(-3)$.

$f(-3) \simeq P_3(-3) = -13.$

$f^k(t) = k!\, R_{n-k}. \longrightarrow f'(-3) = 16.$

$f''(-3) = 2 \times -7 = -14.$

$f'''(-3) = 3 \times 2 \times 1 = 6.$

Interpolation de Lagrange :

- Soit $g(x)$ une fonction continue.

$g(0) = 1,\ g(1) = 0,\ g(2) = -1,\ g(-1) = -22.$

Interpoler $g(3)$ en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange.

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

x_i	-1	0	1	2
$g(x_i)$	-22	1	0	-1

$L_1(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{(-1)\times(-2)\times(-3)} \rightarrow L_1(3) = \dfrac{6}{-6} = -1.$

$L_2(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\times(-1)\times(-2)} \rightarrow L_2(3) = \dfrac{8}{2} = 4.$

$L_4(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)x}{(3)\times 2\times 1} \rightarrow L_4(3) = \dfrac{24}{6} = 4.$

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^{m+1} L_i(x)\, g(x_i)$$

$$P_m(x) = L_1(x)\, g(-1) + L_2(x)\, g(0) + L_3(x)\, g(1) + L_4(x)\, g(2).$$

$$= -L_1(x) \times 22 + L_2(x) + 0 + L_4(x).$$

$$P_m(3) = 22 + \cancel{4} + 0 - \cancel{4}$$

$$P_m(3) = 22.$$

Peano :

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1).$

1. Ordre.
2. Noyau de Peano.
3. Signe du noyau.
4. Erreur d'intégration numérique. Majorer.

1. $f(x) = 1.$ $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = 2$
$\quad \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 2.$ ok.

$f(x) = x.$ $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$
$\quad -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ ok.

$f(x) = x^2.$ $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$
$\quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ok.

$f(x) = x^3.$ $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$
$\quad -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ ok.

$f(x) = x^4.$ $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right] = \frac{2}{5}.$
$\quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ pas ok.

$\to$ Ordre 3. $\to N = 3.$

$\Rightarrow E(x \to x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{15}.$

2. $K_3(t) = E(x \to (x-t)_+^3)$

$$= \int_{-1}^{1} (x-t)_+^3\,dx - \frac{1}{3}(-1-t)_+^3 - \frac{4}{3}(-t)_+^3 - \frac{1}{3}(1-t)_+^3.$$

$$\begin{cases} (x-t)_+ = x - t & \text{si } x \geq t \\ (x-t)_+ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$K_3(t) = \int^1 (x-t)_+^3\,dx - \cancel{\frac{1}{3}(-1-t)_+^3} - 4(-t)^3 - \frac{1}{3}(1-t)_+^3$

1er cas.

$0 \geq t \geq -1$.

$$K_3(t) = \left[\frac{(x-t)^4}{4}\right]_t^1 - \frac{4}{3}(-t)_+^3 - \frac{1}{3}(1-t)_+^3$$

$$= \frac{(1-t)^4}{4} - \frac{4}{3}(-t)^3 - \frac{1}{3}(1-t)^3$$

$$K_3(t) = \underbrace{\frac{(1-t)^4}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{4}{3}t^3}_{\leq 0} \underbrace{- \frac{1}{3}(1-t)^3}_{\leq 0}$$

2ème cas.

$0 \leq t \leq 1$.

$$K_3(t) = \underbrace{\frac{(1-t)^4}{4}}_{\geq 0} + \cancel{\frac{4}{3}t^3} \underbrace{- \frac{1}{3}(1-t)^3}_{\leq 0}$$

3. 1er cas : $0 \geq t \geq -1$.

$$K_3(t) = \frac{(1-t)^4}{4} + \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}(1-t)^3$$

$$\frac{dK_3(t)}{dt} = -(1-t)^3 + 4t^2 + (1-t)^2$$

$$\frac{d^2K_3(t)}{dt^2} = +3(1-t)^2 + 8t - 2(1-t)$$

$$\frac{d^3K_3(t)}{dt^3} = -6(1-t) + 8 + 2$$

$$= 6t + 4.$$

t	-1		$-2/3$		0
K_3'''		$-$	0	$+$	
K_3''	0	$\searrow$ $\ominus$	$-1/3$	$\nearrow$ $\oplus$	1
K_3'	0	$\searrow$ $\ominus$		$\nearrow$ $\ominus$	0
K_3	0	$\searrow$		$\searrow$	

sur $K_3(t) \leq 0$ pour $-1 \leq t \leq 0$

2ème cas $0 \leq t \leq 1$.

$$\frac{dK_3(t)}{dt} = (1-t)^2 \cdot t \geq 0.$$

t	0		1
$K'(t)$		$+$	
$K(t)$		$\nearrow$ $\ominus$	0

$K_3(t) \leq 0$ sur $0 \leq t \leq 1$.

4. D'après le corollaire de Peano : $\exists\, t \in [-1;1]$ tq $E(f) = \frac{f^{\cdot\cdot}(t)}{(N+1)!} E(x \to x^{N+1})$.

$$E(f) = -\frac{f^{(4)}(t)}{6\times 4} \times \frac{4}{15}$$

Soit $C = \max_{-1\le x\le 1} |f^{(4)}(x)|$. $\quad E(f) \le -\frac{2C}{480}$.

$$E(f) \le \frac{-C}{96}.$$

Interpolation de Newton:

- $f(x) \in \mathcal{C}^0$. $\quad f(-2) = 69,\ f(2) = 17,\ f(3) = 24,\ f(5) = -22$.

1.

x_i	0	1	2	3
-2	69			
		-13		
2	17		4	-2.
		7		
3	24		-10	
		-23		
5	-22			

$$P_3(x) = f(-2) + (x+2)f[-2;2] + (x+2)(x-2)f[-2;2;3] + (x+2)(x-2)(x-3)f(-2;2;3;5).$$

$$= 69 - 13(x+2) + 4(x+2)(x-2) - 2(x+2)(x-2)(x-3).$$

$$P_3(x) = -2x^3 + 10x^2 - 5x + 3.$$

2.

j	3	2	1	0	Reste
P_3	-2	10	-5	3	
Q_2		-2	2	3	$15 = R_3$
Q_1			-2	-6	$-21 = R_2$
Q_0				-2	$-14 = R_1$.

$R_0 = -2$

$$P_3(x) = 15 - 21(x-4) - 14(x-4)^2 - 2(x-4)^3$$

$f(4) = 15. \qquad f''(4) = -14\times 2 = -28$

$f'(4) = -21. \qquad f'''(4) = -2.$