PROBA

* Une expérience est aléatoire si on peut prévoir par avance son résultat et si répété dans des conditions identiques, elle peut donner un résultat différent.

Le résultat de cette expérience est représenté par ω (un élément de Ω l'univers)
↳ ensemble des résultats possible

* Un événement est une proposition logique relative au résultat de l'expérience.

A et B deux événements

* $\bar{A}$ est réalisé ssi A n'est pas réalisé
* $A \cap B$ est réalisé ssi A et B sont simultanement réalisés
* $A \cup B$ est réalisé ssi A ou B " " "
* $A \subset B$ signifie que chaque fois que A est réalisé B est aussi réalisé.

L'axiomatique de Kolmogorov

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{C})$ une application :

$$P : \mathcal{C} \longmapsto [0;1] \text{ Vérifiable } A \longmapsto P(A)$$

* $P(\Omega) = 1$
* Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles A_1, on a :

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A)$$

Propriétés

$P(\emptyset)=0$

$P(\bar{A})=1-P(A)$

$P(A)\leq P(B)$ si $A \in B$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(\cup_i A_i)\leq \sum_i P(A_i)$

Lois conditionnelles

* Probabilité conditionnelle de A sachant B :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

* A est indépendant de B si : $P(A/B)=P(A) \iff P(A\cap B)=P(A).P(B)$

$$\cdot\ P(B/A)=\frac{P(A/B).P(B)}{P(A)}$$

$$\cdot\ P(B_i/A)=\frac{P(A/B_i).P(A_i)}{\sum_i P(A/B_i).P(B_i)}$$

Variables aléatoires réelles

* La fct de répartition d'une variable aléatoire X est l'application.

$$F : \mathbb{R} \longmapsto [0, 1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P[X, x]$$

* Une loi de proba P_x admet une densité f si pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $P_x(I) = \int_I f(x)\,dx$

$$P(a < X < b) = f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Espérance mathématique

• $E(x) = \sum x_i P[X = x_i]$

Cas continue :

$E(x) : \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$ où

$f(x)$ est la densité de X.

Proposition:

$E(a) = a$

$E(\alpha X) = \alpha E(X)$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Variance: La Variance est une mesure de dispersion de X autour de la moyenne $m = E(X)$

$$V(X) = E((X-m)^2)$$

Cas discret : $V(x) = \sum (x_i - m)^2 \, P(X = x_i)$

Cas continue : $V(X) = \int_{\mathbb{R}} (X - m)^2 f(x)\,dx$

$\alpha = \sqrt{V(X)}$ l'écart-type.

Propriété :

$$V(a) = 0$$
$$V(aX) = a^2 V(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \text{ si } X, Y \text{ indépendantes}$$

Lois de probabilité d'usage courant

Lois discrètes

$$X = 1, 2, \dots, n \qquad P[X = k] = \frac{1}{n} \quad \forall k \in 1, \dots, n$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k P[X = x] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)$$

$$E(X^2) = \sum_{1}^{n} k^2 P[X = k] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Loi binomiale

C'est la loi d'une variable aléatoire X pouvant prendre 0 ou 1 comme valeur avec les proba p et $1-p$.

$$E(X) = \sum_{0}^{1} k P[X = k] = p$$

$$E(X^2) = \sum_{0}^{1} k^2 P[X = k] = p$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq \text{ où } q = 1-p$$

Loi binomiale

Si l'on répète n fois dans des conditions identiques une expérience aléatoires dont l'issue se traduit par l'apparition d'un évenement A de proba p

Les résultats de chaque expérience sont indépendants

$$P[X=k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

Loi de poisson

C'est la loi d'une variable aléatoire entière positive qui satisfait à

$$P[X=x] = e^{i\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \forall x \in \mathbb{N}$$

Loi de poisson est l'approximation de loi binomiale $B(np)$ avec $n \mapsto \infty$

$p \mapsto 0$

$np \mapsto \lambda$

$$P[X=k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \simeq e^{-np} \times \frac{(np)^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Loi hypergéométrique

Soit une population de N individus parmis lesquelles, une proportion p possèdent un certain caractère.

On prélève un échantillon de n individus parmis cette Population.

Soit X la variable aléatoire : le nombre d'individus de l'échantillon la propriété. On dit que X suit la loi hypergéométrique.

La probabilité de X : $P[X = x] = \dfrac{C_{N.p}^{x} \cdot C_{N-N.p}^{n-x}}{C_N^{n}}$

$H(N, n, p) \longrightarrow B(n, p)$ quand $N \to +\infty$ (loi binomiale)

$$E(X) = n \cdot p$$

$$V(X) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$$

Loi géométrique

temps d'attente avant le premier succès

$$P[X = x] = p \cdot q^{x-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{q}{p \cdot p}$$

Loi de Pascal

Nombre de succès en un certain nombre de tentative

$n =$ Nb de tentatives

$$P[X = x] = C_{n-1}^{x-1} \, p^{n} \, q^{x-n}$$

$$E(X) = \frac{n}{p}$$

$$V(X) = \cancel{n \times p} \; \frac{nq}{p^2}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$