Fiche Théorie des graphes

- Dans un graphe quelconque de n sommets et m arêtes

$$\boxed{\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \times m}$$

~~Graphe conexe — Il existe un chemin eulerien ssi le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2~~

- arbre = graphe conexe sans cycle. Un arbre de n sommets possède n-1 arêtes

Binet - Cauchy $\det(AB) = \sum_{S} \det(A_S) \times \det(B_S)$

S - Sous ensembles de n valeurs de $\{1, \dots m\}$

Th : Dans un graphe conexe, il existe un chemin eulerien ssi le nombre de sommets de degré impair est 2 ou 0

Matrice laplacienne

vs

Matrice d'adjacence

$$e_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } (v_i, v_j) \text{ est une arête} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notations

$$G = (\underbrace{V}_{\text{Ensemble des sommets (vertices)}}, \overbrace{E}^{\text{ensemble des arêtes (Edges)}})$$

$E \subseteq V \times V$

- Dans les graphes non orientés E est une relation symétrique
- Si on a un graphe pondéré, ajoute une fonction $\omega : E \to \mathbb{N}$

- $|V|$ = nombre de sommets
- $|E| = \begin{cases} \text{nombre d'arcs} \\ 2 \times \text{nombre d'arêtes} \end{cases}$

- Distance dans un graphe $d(x,y)$ = longueur du plus court chemin
- Excentricité d'un sommet $exc(u) = \max_{v \in V} d(u,v)$

Rayon d'un graphe $= \min_{u \in V} exc(u)$

Diamètre d'un graphe $= \max_{u \in V} exc(u)$

$$\boxed{\text{Dans un graphe connexe } |E| \geqslant V-1 \text{ et } |V| = O(|E|) \qquad \text{toujours } |E| = O(|V|^2)}$$

Complexité de BFS

	matrice	liste
non connexe	$O(\lvert V\rvert + \lvert V\rvert^2 + \lvert E\rvert) = O(\lvert V\rvert^2)$	$O(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert)$
Connexe	$\Theta(\lvert V\rvert + \lvert V\rvert^2 + \lvert E\rvert) = \Theta(\lvert V\rvert^2)$	$\Theta(\lvert V\rvert + \lvert E\rvert) = \Theta(\lvert E\rvert)$

Complexité de Dijkstra :
- liste d'adjacence et tas binomial : $O((|E|+|V|)\log(V))$
- tas de fibonacci : $O(|E| + |V|\log|V|)$

• Floyd Warshall : $O(|V|^3)$ mais calcule toute les distances.

☒ Graphe planaire : Graphe que l'on peut dessinner dans le plan sans croiser d'arêtes.

• Une face est une zone du plan bordée d'arêtes et n'en contenant pas
le degré d'une face c'est le nombre d'arêtes qui la bordent

$$\boxed{\sum_{F \in \text{faces}} \deg(F) = 2\underbrace{e}_{\text{nombre d'arêtes}}}$$

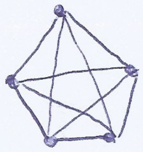
Convertion
$n = |V|$ nbr de sommets f = nbr de faces $e = |E|/2$ nbr d'arêtes

• Tout graphe connexe (pas forcément planaire) peut être construit en ajoutant des arêtes à un arbre avec autant de sommets

Formulle d'Euler dans un graphe connexe planaire on a $\boxed{n - e + f = 2}$

Critère de planarité conditions nécessaires

Un graphe planaire, connexe simple (on interdit boucles d'un sommet à lui même et 2 arêtes entre les mêmes sommets) avec $n \geq 3$ sommets vérifie toujours $\boxed{e \leq 3n - 6}$
De plus s'il ne possède pas de triangle il vérifie $\boxed{e \leq 2n - 4}$

Th. de Kuratowski : un graphe est planaire ssi il ne contient aucun Sous-graphe - graphe obtenu en supprimant des arêtes ou des sommets
qui est une subdivision - Rajoute des sommets de degré 2 sur les arêtes
de $\mathbb{K}_{3,3}$  ou $\mathbb{K}_5$ 

Th des 4 couleurs : Tout graphe planaire peut se colorier avec 4 couleurs de façon que 2 sommets voisins ne partagent pas leur couleur.

Th de la galerie d'art : Dans une galerie d'art représentée par un polygone de n sommets il suffit d'au plus $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ caméra 360° pour surveiller

→ Comment prouver la planarité ?

① → Critère de planarité —NON→ $\boxed{\text{pas planaire}}$
② ↳oui peut on prouver l'absence de $\mathbb{K}_{3,3}$ et $\mathbb{K}_5$? oui ↳ $\boxed{\text{planaire}}$
③ ↳NON Arrive t'on à dessiner le graphe sans croiser d'arêtes ? ↑oui
④ NON ↳ Peut on faire apparaitre $\mathbb{K}_{3,3}$ ou $\mathbb{K}_5$? ↳oui $\boxed{\text{pas planaire}}$
↳NON Reccommencer étapes ③ ou ④