1

CHAPITRE 1
Réduction des Matrices Carrés.

I. Rappel de Notation

Soit $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à m lignes et n colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Si $m = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$,

$(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$. La transposée de A est : $A^t = (a_{ji})$

$(\mathbb{C})$ La Matrice adjointe de A : $A^* = {}^t\bar{A}$

$(a^*_{ij}) = \bar{a}_{ji}$

* Produit Scalaire dans $\mathbb{R}^n$:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, le produit scalaire $\langle x, y \rangle = {}^t y . x$

$= (y_1 \cdots y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Un produit scalaire est une forme bilinaire symétrique définie positivement : $(x, x) \geq 0$, si $(x, x) = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$

* Produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$:

$x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^n$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(x, y) = y^* . x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

c'est une forme sesquilinéaire :

$(x, y + z) = (x, z) + (x, y)$

$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

$(\alpha x + y) = \alpha (x, y) \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$(x, \alpha y) = (\alpha y)^* . x = \sum^{n} \bar{\alpha} \bar{y}_i x_i$

$= \bar{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i$

$= \bar{\alpha} (x, y)$

Remarque :

Dans $\mathbb{R}^n$: $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$(Ax, y) = (x, {}^tAy)$$

Dans $\mathbb{C}^n$: $A(x,y) = (x, A^* y)$

En effet : $(Ax, y) = {}^ty\, Ax$

$$(x, {}^tAy) = {}^t({}^tAy).x$$

$$= {}^ty\, {}^t({}^tA).x = {}^ty\, Ax$$

$${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$\mathbb{C}^n$ = $(Ax, y) = y^* Ax$

$$(x, A^*y) = (A^*y)^*.x = y^*(A^*)^* X$$

$$= y^* Ax$$

Définition

Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que Q est orthogonale ssi :

$${}^tQ.Q = Q^t.Q = I_n$$

$$Q^{-1} = {}^tQ$$

Remarque : Une matrice orthogonal conserve la norme,

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|Qx\| = \|x\|$

Q orthogonal

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ norme rationnelle

En effet :

$$\|QX\|^2 = (QX, Qx)$$

$$= (x, {}^tQQx)$$

$$= (X, I_n x) = (X, X) = \|X\|^2$$

$$\Rightarrow \|GX\| = \|X\|$$

$\|U_x\| = \|x\| \quad , \forall x \in \mathbb{C}$

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

A est hermitienne ssi $A^* = A$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

A est symétrique ssi ${}^tA = A$

$\|v\| = 1$, unitaire

Exemple : Soit $v \in \mathbb{C}^n$ et on pose $H = I_n - 2vv^*$

H est une matrice hermitienne et unitaire (Matrice d'Householder)

⚠ Remarque : $v^*v = (v, v) = \|v\|^2$ scalaire

$$v.v^* = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} (\bar{v}_1 \; \cdots\cdots \; \bar{v}_n) \\ \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

- Mq H est hermitienne :

$$H^* = (I_n - 2vv^*)^* = I_n^* - 2(vv^*)^*$$
$$= I_n - 2(v^*)^* v^*$$
$$= I_n - 2vv^* = H$$

$\Rightarrow$ H est hermitienne.

- Vérifions que H est unitaire

$$H^*H = H^2 = (I_n - 2vv^*)(I_n - 2vv^*)$$
$$H^2 = I_n - 2vv^* - 2vv^* + 4v(\underbrace{v^*v}_{\|v^*\|^2 = 1})v^*)$$
$$H^2 = I_n - \cancel{4vv^*} + \cancel{4vv^*}$$
$$H^2 = I_n$$

$\Rightarrow$ H est unitaire

Théorème de Schur

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists U$ unitaire / $U^* A U = T = \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ T est triangulaire supérieur

les élts diagonaux de T sont les valeurs propres de A : $t_{ii} = \lambda_i$

λ_i valeurs propre de A : $\forall i = 1 \dots n$

$(\exists v_i \neq 0 \ / \ A v_i = \lambda_i v_i)$, v_i : valeur propre associé à λ_i

L'ensemble des valeurs propres de A est le spectre de A.

$Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{ \lambda_i$ valeurs propres de $A \}$.

Definition : On appelle rayon spectral de A :

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Exercice 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

Montrons que A est hermitienne $\Leftrightarrow$ $\exists U$ unitaire ($U \in M_n(\mathbb{C})$) tq $U^* A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$

Supposons A hermitienne $A^* = A$

$A \in M_n(\mathbb{C}) \xRightarrow{\text{Schur}} \exists U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire tq

$U^* A U = T = \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$, $t_{ii} = \lambda_i \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$

$T^* = (U^* A U)^* = U^* A^* (U^*)^*$

$= U^* A U = T$

$T^* = T \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ * & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow t_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ et $\lambda_i = \overline{\lambda_i} \Rightarrow \boxed{\lambda_i \in \mathbb{R}} \ \forall i$

Donc $T = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i$

Réciproque

11

Reciproque :

$\Leftarrow$ $\exists U$ Unitaire / $U^* A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A = U D U^*$

$A^* = (U^*)^* D^* U^* = U D U^* = A$

$\Rightarrow$ A Hermitienne

Exercice 2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne.

Mque A est définie positive $\Leftrightarrow$ ses valeurs propres : $\lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$

Rappel : A est définie positive $\Leftrightarrow$ $(Ax, x) > 0, \forall x \neq \vec{0}$

Remarque : A hermitienne $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable :

$\exists U$ unitaire / $U^* A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$(U^* U = I)$

$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

$U^* A U = D \Leftrightarrow AU = UD \Leftrightarrow AU_j = \lambda_j U_j, \forall j = 1 - n$

Donc U_j est un vecteur propre associé à λ_j $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ est une base de vecteurs propres.

$U . U^* = I \Leftrightarrow (U_i, U_j) = \delta_{i,j} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$\Rightarrow (U_1, \dots, U_n)$ est une base orthogonale de vecteurs propre

Retour Exercice 2 :

$A^* = A$ (hermitienne)

$\Rightarrow$) Supposons A définie positive : $(Ax, x) > 0, \forall x \neq \vec{0}$

D'après l'exe 1 $\exists U$ unitaire / $U^* A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$(U_1, \dots, U_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres.

$(Ax, x) > 0$, En particulier $x = U_j$

$\forall x \neq 0$, $0 < (AU_j, U_j) = (\lambda_j U_j, U_j) = \lambda_j (U_j, U_j)$

$= \lambda_j \|U_j\|^2 = \lambda_j \Rightarrow \boxed{\lambda_j > 0, \forall j}$

$\Leftarrow$) Reciproque, supposons $\lambda_j > 0, \forall j = 1 — n$

Mq $(Ax, x) > 0, \forall x \neq \vec{0}$

$q(X) = (Ax, x)$ forme quadratique associée à A

$\forall x \neq \vec{0}, \; X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$

$$q(X) = (Ax, x) = \Big(A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j}_{X}\Big)$$

- $(x,y) = y^* x$
- $(x, \alpha y) = (\alpha y)^* x$
$= (\bar{\alpha}\bar{y}, \bar{\alpha} y) x$
$= \bar{\alpha}(x,y)$

$$q(X) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big)$$

$$q(X) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_j} \underbrace{(v_i, v_j)}_{\delta_{ij} = 0, \, i \neq j ; \; 1, \, i=j}$$

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{|\alpha_i|^2}_{\geq 0} > 0 \text{ car } \lambda_i > 0 \text{ et } X \neq \vec{0}$$

Remarque : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres réelles

A est définie $> 0 \iff \lambda_i > 0 \; \forall i$

$\lambda_i \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ spectre de A

$(v_1, \ldots, v_n)$ base de $\mathbb{C}^n$

$\forall x \in \mathbb{C}^n, \; X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

Exercice 3 : Soit $(A \in M_n(\mathbb{C}))$ une matrice normale : $AA^* = A^*A$

Mq $\exists$ une matrice unitaire $U / U^* A U = D$ (diagonale)

D'après le théorème de Schur : $\exists$ une matrice unitaire

U tq $U^* A U = T = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} t_{ij} = 0 \\ i > j \end{pmatrix}$

$TT^* = U^* A U U^* A^* U = U^* A A^* U$

$T^* T = U^* A^* U U^* A U = U^* A^* A U = U^* A A^* U$ (car A normale)

Donc T normale

$$T T^* = T^* T$$

$$\Rightarrow (TT^*)_{ij} = (T^* T)_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \overline{t_{jk}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{t_{ki}} t_{kj} \qquad \left((AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$$

Si $i=j$: $\sum_{k=1}^{n} |t_{ik}|^2 = \sum_{k=1}^{1} |t_{ki}|^2$

* $i=1$ (1ère ligne) $|t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2 = |t_{11}|^2$

$\Rightarrow |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2 = 0$

$\Rightarrow t_{12} = t_{13} = t_{1n} = 0$

* $i=2$ (2e ligne) $\cancel{|t_{22}|^2} + |t_{23}|^2 + \dots + |t_{2n}|^2 = \underset{0}{\underbrace{|t_{12}|^2}} + \cancel{|t_{22}|^2}$

$\Rightarrow t_{23} = t_{2n} = 0$

$\boxed{\text{Par Récurrence}}$:

Supposons que pour $1 \leq l \leq i$ $t_{lj} = 0, \forall j \geq l+1$

Mq cette propriété est vraie pour la ligne $i+1$

Si $i=j$: $|t_{i+1\,i+1}|^2 + |t_{i+1\,i+2}|^2 + \dots + |t_{i+1\,n}|^2$

$= |t_{1\,i+1}|^2 + |t_{2\,i+1}|^2 + \dots + |t_{i\,i+1}|^2 + |t_{i+1\,i+1}|^2$

Car $t_{1\,i+1} = t_{2\,i+1} \dots = 0$

(hypothèse de récurrence) $\Rightarrow |t_{i+1\,i+2}|^2 + \dots + |t_{i+1\,n}|^2 = 0$

$\Rightarrow t_{i+1\,j} = 0, \forall j \geq i+2$

Donc $T = D = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

Exercice 4 : $E = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ Norme de Holder $\forall p \geq 1$

$\forall x \in E$ Mq $\|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$

Soit $j \in \{1, 2, \dots, n\} / |x_j| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$$\Rightarrow |x_j|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right) \leq n\,|x_j|^p$$

$$\Rightarrow |x_j| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq n^{1/p}\,|x_j| \xrightarrow[p\to+\infty]{} |x_j|$$

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = |x_j| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

$$\hookrightarrow \lim_{p\to+\infty} \|X\|_p = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

I.3 _ Normes Vectorielles et Matricielles

Définit° : Une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est une application de :

$$\mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\|x\| > 0$ et si $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (semi linéaire)

(iii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ $\quad \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

Exemple : $E = \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto |x|$ valeur absolu

$E = \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) $\quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ $(p=2)$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad (p=1)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Définit° : Une norme matricielle est une application

$$\left|\begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ \\ A \longrightarrow \|A\| \end{array}\right.$$

Vérifiant que :

(i) $\|A\| \geq 0$, si $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ matricielle

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad \|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

(iii) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad \|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

(111)

Exemple : $\|A\|_2 = \sup_{x\neq\vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)$: norme spéctrale (norme subordonnée à la norme vectorielle $\|x_2\|$)

$\|A\|_1 = \sup_{x\neq 0} \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right)$

$\|A\|_\infty = \sup \left(\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\right)$

$\|A\| = \sup_{x\neq\vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$

normes subordonnées à la norme vectorielle

Remarque : si $A = I$,

$$\|I\| = \sup_{x\neq\vec{0}} \left(\frac{\|Ix\|}{\|x\|}\right) = \sup_{x=\vec{0}} \left(\frac{\|x\|}{\|x\|}\right) = 1$$

⚠ On n'a pas toujours $\|I\| = 1$:

$\|A\|_S = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ Norme de Schur

$\|I\|_S = \sqrt{n} \neq 1, \forall n \geq 2$

Définit° : Une Normes Vectorielle et une norme Matricielle sont compatibles ssi : $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

Exemple : Normes Subordonnée $\|A\| = \sup_{x\neq\vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$

Proposit° : $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$, $\rho(A)$: moyen spectrale de (A)

$= \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \quad \lambda_i \in S_p(A)$

Remarque : A^*A est une matrice hermitienne et semie définie positive

$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$

$(A^*Ax, x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$

En effet $(A^*Ax, x) = (Ax, (A^*)^*x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$

(A^*A est semie définie positive ≥ 0, ses valeurs propres sont ≥ 0)

Soient σ_i^2 les valeurs propres de A^*A :

$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 \geq 0$

A^*A est diagonalisable ⇒ ∃ une base orthonormée de vecteurs propres $(V_1, \dots, V_n)$

$A^* A v_i = \sigma_i^2 v_i \quad \forall i = 1 — n$

<u>Démo de la propositᵒ</u>

$\|A\|_2 = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right) \quad , \forall x \in \mathbb{C}^n_{x\neq\vec{0}} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (A^*A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \overbrace{\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j}^{x})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A^* A v_i , \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right)$$

$$\|Ax\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i^2 v_i , \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i \sigma_i^2 v_i, \alpha_j v_j) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \sigma_i^2 \overline{\alpha_j} \underbrace{(v_i, v_j)}_{\delta_{ij} \begin{smallmatrix} 0 \; i\neq j \\ 1 \; i=j \end{smallmatrix}}$$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \underbrace{\sigma_i^2}_{\sigma_1^2} \leq \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \sigma_1^2 \|x\|_2^2$$

$\forall x \neq \vec{0}, \ \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2} \leq \sigma_1^2 = \rho(A^*A) \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho(A^*A)} \ \forall x \neq \vec{0}$

$\|A\|_2 = \sup_{x\neq\vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right) \qquad f(x) = \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}, \forall x \neq 0$

$f(x) \leq M = \sqrt{\rho(A^*A)}$

$\|A\|_2 \leq M$

$\exists ? \ x_0 \in \mathbb{C}^n, \|x_0\|_2 = 1 \ /$

$f(x_0) = M = \sqrt{\rho(A^*A)}$

$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$

si $x = v_1$ $\|Av_1\|_2^2 = (A^*Av_1, v_1) = (\sigma_1^2 v_1, v_1)$

$$= \sigma_1^2 \underbrace{(v_1, v_1)}_{=1} = \sigma_1^2 = \rho(A^*A) = M^2$$

$f(v_1) = \|Av_1\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = M$

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}}$$

Rq : si A est hermitienne $A^* = A$:

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{\rho^2(A)} = \rho(A)$

$\|A\| = \rho(A)$

(IV)

Exercice 5 : Montrons que

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

1) $\|A_1\| = \sup_{x\neq\vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right)$ $\qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

$$\|Ax\|_1 \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|Ax\|_1 \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \|x\|_1 \qquad \forall x \neq \vec{0}$$

$$\begin{cases} \frac{\|Ax\|}{\|A_1\|} \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = M \\ \forall x \neq \vec{0} \end{cases} \qquad f(x) = \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq M$$

$\exists ?\ x_0 \in$

Soit $h \in \{1 \ldots n\}$ / $M = \sum_{i=1}^{n} |a_{ih}|$ $\qquad \|Ax_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{0j}\right|$

Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ / $x_{0j} \begin{cases} 0 & \forall j \neq h \\ 1 & j = h \end{cases}$ $\qquad \|x_0\|_1 = 1$

$$f(x_0) = \|Ax_0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{0j}\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ih}| = M$$

Donc $\sup_{x\neq\vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right) = M = \sum_{i=1}^{n} |a_{ih}| = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Exemple $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & i & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$j=1$ (1^{re} colonne) $\quad |-3|+|1|+|1| = 5$

$j=2$ (2^e col) $\quad |i|+|0|+|1| = 2$ $\qquad \|A\|_1 = 9 \; (n=3)$

$j=3$ (3^e col) $\; = \; |-5|+|3|+|-i| = 9$

2) $\|A\|_\infty = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \right) \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |(Ax)_i| = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

$$\le \|x\|_\infty \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$f(x) = \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = M$$

$\forall x \neq \vec{0}$

Soit $\ell \in \{1, \dots, n\} \,/\, M = \sum_{j=1}^{n} |a_{\ell j}|$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$\exists ?\; X_0 \in \mathbb{C}^n, \|X_0\|_\infty = 1 \,/\, f(X_0) = \|AX_0\|_\infty = M$

$$X_{0j} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{\ell j} = 0 \\ \dfrac{\overline{a_{\ell j}}}{|a_{\ell j}|} \text{ si } a_{\ell j} \neq 0 \end{cases} \qquad \|X_0\|_\infty = 1$$

$$\forall i \neq \ell, \quad \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{0j} \right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |X_{0j}| \le 1$$

$$\le \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = M$$

Soit $i = \ell$, $\left| \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} X_{0j} \right| = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{|a_{\ell j}|^2}{|a_{\ell j}|} = \sum_{j=1}^{n} = M$

√

$\Rightarrow \|A_{x_0}\|_\infty = M$

Exemple : cf matrice préc.

$i=1$ (1re ligne) $|-3|+|i|+|-5| = 9$

$i=2$ (2^e ligne) $|1|+|0|+|3| = 4$ $\Rightarrow \|A\|_\infty = 9$

$i=3$ (3^e ligne) $|1|+|1|+|-i| = 3$

fin exo 5

Exercice 6 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\|A\| < 1$

(où $\|A\| = \sup_{x \neq \vec{0}} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$)

1) Mq $\rho(A) < 1$ (rayon spectral)

2) Mq $I+A$ est inversible

3) Mq $\|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

1) $\forall \lambda \in Sp(A)$: spectre de A $\exists x \neq \vec{0} / Ax = \lambda x$ (vecteur propre)

$\begin{cases} \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \end{cases} \Rightarrow |\lambda| \cancel{\|x\|} \leq \|A\| \cancel{\|x\|}$

$|\lambda| \leq \|A\| \quad \forall \lambda \in Sp(A)$

$\Rightarrow \rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| \leq \|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1$

2) Supposons que la matrice $I+A$ est non-inversible

(Rappel B non inversible, $\det B = 0$)

$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$

$P_B(0) = \det(B) = 0$ $\Rightarrow 0 \in Sp(B)$

$I+A$ non inversible $\Leftrightarrow \det(I+A) = 0 \Leftrightarrow 0 \in Sp(I+A)$

$0 \in Sp(I+A)$ $\exists x \neq \vec{0} / (I+A)x = \vec{0}$ $(\lambda = 0)$

$\Rightarrow Ax = -x \Rightarrow -1 \in Sp(A)$

$\hookrightarrow$ $0 < \rho(A) = \max |\lambda| < 1$ ce qui est ABSURDE

Donc $A + I$ ~~est~~ inversible

3) $\|(I+A)\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$?

$$|I+A| = (I+A)^{-1}\left(\frac{I+A-A}{I}\right)$$

$$= (I+A-A) - (I+A)^{-1} A$$

$$\|(I+A)^{-1}\| \leq \|I\| + \|(I+A)^{-1}A\|$$

$$\leq 1 + \|(I+A)^{-1}\|\,\|A\|$$

$$\|(I+A)^{-1}\|(1-\|A\|) \leq 1$$

$$\Rightarrow (I+A)^{-1} \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Rappel : On a toujours $\rho(A) \leq \|A\|$, $\forall \|A\| = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ une moyenne matricielle

tq $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

fin exo 6

Exercice 7 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer les équivalences

(i) $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0 \iff$ (ii) $\rho(A) < 1$

$\iff$ (iii) $\exists$ une norme matricielle $\|A\| < 1$

(i) $\iff$ (ii)

$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (matrice usuelle)

$\forall \lambda \in Sp(A)$, $\exists X \neq \vec{0}$ (Vecteur propre) / $Ax = \lambda x$

$$A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$$

$$A^3X = A(A^2x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2 Ax = \lambda^3 X$$

De proche en proche on a :

$$A^kX = \lambda^k X \quad , \forall k \geq 0$$

VI

$$\left(\left(\lim_{k\to+\infty} A^k\right)X = \left(\lim_{k\to+\infty} \lambda^k\right) X \quad X \neq \vec{0} \right) \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \lambda^k = 0$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|<1 \ \forall \lambda \quad \Leftrightarrow \rho(A)<1$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

On suppose $\rho(A) < 1$.

D'après la remarque, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ une norme matricielle / $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Il suffit de choisir $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 - \rho(A)$

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1 \Rightarrow \|A\| < 1$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

On suppose $\exists$ une norme matricielle / $\|A\| < 1$

$$\|A^k\| = \|\underbrace{A.A \ldots\ldots A}_{k \text{ fois}}\| \leq \|A\|^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

$$(\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|)$$

$$0 \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k \to 0 \text{ car } \|A\| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to 0} \|A^k\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} A^k = 0$$

fin exo

Théorème : Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ et toute norme matricielle :

$$\lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A) \text{ (rayon spectral de } A)$$

Démo : On veut montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N} / \forall k \geq k_0$,

$$\left| \|A^k\|^{1/k} - \rho(A) \right| \leq \varepsilon$$

$$\rho(A) - \varepsilon \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

On a toujours $\rho(A) \leq \|A\|$ $(\forall A \in M_n(\mathbb{C}))$

$$\rho^k(A) = \rho(A^k) \leq \|A^k\| \Rightarrow \rho(A) \leq (\|A^k\|)^{1/k}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \rho(A) - \varepsilon \leq \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \Rightarrow \rho(A) - \varepsilon \leq \|A^k\|^{1/k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$\forall \varepsilon > 0$, Soit $A(\varepsilon) = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$

$$\rho(A(\varepsilon)) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$$

D'après l'ex précédent, $A(\varepsilon) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\exists k_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall k \geq k_0 \quad \|A^k(\varepsilon)\| \leq 1$

$$\left\| \frac{A^k}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} \right\| \leq 1, \quad \|A^k\| \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k$$

$$\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N} \,/$

$$\rho(A) - \varepsilon \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A)+\varepsilon, \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

VN

V Diagonalisation

Définition :

Soit $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on dit que A est diagonalisable ssi $\exists$ une base de $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ formant de vecteurs propres $(V_1, \dots, V_n)$

$f(V_i) = \lambda_i V_i$, $\lambda_i \in Sp(A)$, V_i vecteur propre, f l'endomorphisme associé à $A = M(f)_{e_i}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, (e_i) base canonique de E

$D = M(f)_{V_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = D$, $P = \begin{array}{c} V_1 \; V_2 \;\; V_n \\ \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \end{array}$ matrice de passage de (e_i) à (V_i)

Théorème :

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable ssi :

(i) $P_A(\lambda)$ (polynome caractéristique de A) est scindé dans K

(ii) $\dim E_{\lambda i} = \alpha_i$ (multiplicité de λ_i), $\forall i = 1 - p$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

$= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda_p - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{\alpha_p}$

avec $\lambda_i \in K$ et $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n = d^{\circ} P_A(\lambda)$

Exemple :

* $P(X) = X^2 + 1$

$P(X) = 0 \Rightarrow X_1 = i$, $X_2 = -i$

$P(X)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ mais l'est dans $\mathbb{C}$

* $Q(X) = (X-1)^2 (X+1)^2$

Les racines $X_1 = 1$, racine double

$X_2 = -1$, racine double

Q est scindé dans $\mathbb{C}$ donc dans $\mathbb{R}$

* $R(X) = (X-1)^2 (X^2 + X + 1)$

$X^2 + X + 1 = 0$

$\Delta = -3 < 0$

Le sous espace propre

$$E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I_d)$$

Théorème (CAYLEY - HAMILTON)

$f : E \to E$

$A = M(f)_{E_i}$, ... ssi

$P_A(A) = 0 \iff P_f(f) = 0$

On dit que $P_A(\lambda)$ est annulateur de A

Définition :

$f : E \to E$

Soit $G \in K[X]$ espace de polynomes

$$G(X) = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0$$

G est annulateur de A ssi : $G(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0$

Définition :

On appelle polynome minimal de A le polynome noté $m_A(\lambda)$ de degré le plus petit normalisé et annulateur de A.

$$m_A(\lambda) = \underbrace{1}_{\text{normalisé}}\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0$$

- $m_A(A) = 0$ (annulateur)
- $m_A(\lambda)$ divise $P_A(\lambda)$
- même racines, mais avec des multiplicités $\neq$

$$P_A(\lambda) = (-1)^m (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{\alpha_p}$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\beta_1} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{\beta_p} \quad \text{avec } 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

Théorème

A est diagonalisable ssi le polynome de A $m_A(\lambda)$ est scindé et admet que des racines simples

V117

Ex : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(L_3 = L_2 - L_3)$

1. $P_A(d) = \det(A - dI) = \begin{vmatrix} -1-d & 1 & 1 \\ 1 & -1-d & 1 \\ 1 & 1 & -1-d \end{vmatrix} \underset{\times 2}{=} \begin{vmatrix} -1-d & 1 & 1 \\ 1 & -1-d & 1 \\ 0 & -2-d & 2+d \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1-d & 2 & 1 \\ 1 & -d & 1 \\ 0 & 0 & 2+d \end{vmatrix} = (2+d)\big((-1-d)(-d)-2\big)$

$= (2+d)(d^2+d-2)$

$= (2+d)(d-1)(d+2)$

$= -(2+d)^2(d-1)$

$Sp(A) = \{-2 ; 1\}$

2. $m_A(d) \mid P_A(d)$

$m_A(d) = \begin{cases} (d-1)(d+2) \\ \text{ou } (d-1)(d+2)^2 \end{cases}$

Si $(A-I)(A+2I) = 0$

$\Rightarrow m_A(d) = (d-1)(d-2)$

Exercice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 10 & 7 & -2 \\ -10 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les valeurs propres de A

2- Déterminer le polynome minimal de A

3- A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de vecteurs propre

4- Faire de m̂ pour B

(1) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ 6 & -3-\lambda & 4 \\ 3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$L_1 = L_1 - L_3$ $P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 6 & -3-\lambda & 4 \\ 3 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$C_3 = C_3 + C_1$ $P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 10 \\ 3 & -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((-3-\lambda)(6-\lambda) - 20\right)$

$= -(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

$= -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 : 1 \text{ valeur propre double} \\ \lambda_2 : 2 \text{ valeur propre simple} \end{cases}$

$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ est scindé dans $\mathbb{R}$

(2) Polynome minimal

Les candidats $m_A(\lambda)$: $\begin{cases} (\lambda-1)(\lambda-2) \\ \text{ou} \\ (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{cases}$

Vérifions si $(A-I)(A-2I) = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$m_A(\lambda)$ est annulateur de A, donc c'est le polynome minimal de la matrice A.

1X

③ **TH** $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ est scindé de $\mathbb{R}$ et admet que des racines simples $\Rightarrow$ A est diagonalisable

Les Sous-Espaces Propres :

$E_1 = \ker(A - I)$, $\forall v \in \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 0 \\ 6x - 4y + 4z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y + 2z = 0$$

$$z = -\frac{3}{2}x + y$$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - \frac{3}{2}x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \text{Vect}\left(V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}; V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$E_2 = \ker(A - 2I)$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 4z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\underline{1 - 3} : -x + z = 0 \Rightarrow z = x \qquad \Rightarrow E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$2 : 10x = 5y \Rightarrow y = 2x$$

La base des vecteurs propres $= \left(V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}; V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2}_{\lambda_2} \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4 - $B = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 10 & 7 & -2 \\ -10 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

① $P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -9-\lambda & -6 & 2 \\ 10 & 7-\lambda & -2 \\ -10 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xRightarrow{L_2 = L_2 + L_3} \begin{vmatrix} -9-\lambda & -6 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -10 & -6 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xRightarrow{C_3 = C_3 - C_2} \begin{vmatrix} -9-\lambda & -6 & 8 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -10 & -6 & 9-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left(-(9+\lambda)(9-\lambda)+80\right)$

$P_B(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \text{ valeur propre simple} \\ \lambda_2 = 1 \text{ valeur propre double} \end{cases}$

② $m_B(\lambda) = \begin{cases} (\lambda-1)(\lambda+1) \\ \text{ou} \\ (\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{cases}$

$(B-I)(B+I) = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 2 \\ 10 & 6 & -2 \\ -10 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -6 & 2 \\ 10 & 8 & -2 \\ -10 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $m_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$

⚠ Rem : si le minimum n'est pas une racine simple, la matrice n'est pas diago !

③ $m_B(\lambda)$ est scindé dans $\mathbb{R}$ et n'admet que des racines simples.
D'après le théorème elle est donc diagonalisable.

$E_{-1} = \mathrm{Ker}(B+I)$

$\forall v \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & -6 & 2 \\ 10 & 8 & -2 \\ -10 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 6y + 2z = 0 \\ 10x + 8y - 2z = 0 \\ -10x - 6y + 4z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\Rightarrow x = z$

$\Rightarrow E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

X

$E_1 = \text{Ker}(B - I)$, $\forall V \in E_{-1} \Leftrightarrow 10x + 6y - 2z = 0$
$\Leftrightarrow z = 5x + 2y$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5x+2y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{V_2} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{V_3}$$

$E_1 = \text{Vect}(V_2, V_3)$

$$P^{-1}BP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice (systèmes differentiels)

Résoudre le système diff :
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 7x_2 - 15x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

① On diagonalise A
② Transformation de (S) dans la base de vecteurs propre
③ déterminer la solution de S.

① A est diagonalisable : $\exists P$ inv / $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ et $B'(V_1, V_2, V_3)$ base de vecteurs propres

$X' = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PX'$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} \end{array} \quad \frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}AX = \underbrace{P^{-1}AP}_{D}X' \Rightarrow \frac{dX'}{dt} = DX'$$
$\Rightarrow X = PX'$

Diagonalisation de A :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -5 \\ 3 & 7-\lambda & -15 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1 = L_1 - L_3}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 3 & 7-\lambda & -15 \\ 1 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 7-\lambda & -12 \\ 1 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (1-\lambda)\left((7-\lambda)(-3-\lambda)+24\right) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ racine double} \\ \lambda_2 = 3 \text{ racine simple} \end{cases}$$

$E_1 = \text{Ker}(A-I)$, $\forall v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow x + 2y - 5z = 0$

$x = -2y + 5z$

$$V = \begin{pmatrix} -2y+5z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_1} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_2}, \quad E_1 = \text{Vect}(V_1, V_2)$$

$E_3 = \text{Ker}(A-3I)$, $\forall v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x+2y-5z=0 \\ 3x+4y-15z=0 \\ x+2y-7z=0 \end{cases} \Rightarrow 1+3 = 4y-12z=0$$

$y = 3z$ et la 2 nous donne $x = z$

$$E_3 = \text{Vect}\left(V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{B'}$$

$B' = (V_1, V_2, V_3)$

XI

(S') $\frac{dX'}{dt} = DX' \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1'}{dt} = x'_1 & (1) \\ \frac{dx_2'}{dt} = x'_2 & (2) \\ \frac{dx_3'}{dt} = x'_3 & (3) \end{cases}$

(1) $\frac{dx'_1}{dt} = x'_1 \Rightarrow \int \frac{dx'_1}{x'_1} = \int dt$, $\ln |x'_1| = t + \alpha_1$

$x'_1(t) = C_1 e^t \Rightarrow C_1 = e^{\alpha_1}$

De m̂ pour $x'_2(t) = C_2 e^t$
$x'_3(t) = C_3 e^{3t}$ $\Rightarrow X' = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$

La solut° générale de (S):

$X = PX' = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} X_1(t) = -2C_1e^t + 5C_2e^t + C_3e^{3t} \\ X_2(t) = C_1e^t + + 3C_3 e^{3t} \\ X_3(t) = C_2e^t + C_3e^{3t} \end{cases}$

Remarque : les constantes C_i dépendent des conditions initiales

$X(0) = \begin{pmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{pmatrix}$

XII

PARTIE 2 : Résolution Numérique de Systèmes linéaires

1) Systèmes linéaires

On considère un système linéaire :

$$(1)\begin{cases} a_{11}X_1 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn}X_n = b_n \end{cases} \iff A_X = b$$

$A = (a_{ij})$, $b = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ X_i : inconnu, on suppose A inversible.

$X = A^{-1}b$ solution de (1)

a - A est une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{n-1\,n-1}X_{n-1} + a_{n-1\,n}X_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}X_n = b_n \end{cases}$$

L'algorithme de résolution

$$X_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad \left[\begin{array}{l} X_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}X_j}{a_{ii}} \\ \\ i = n-1, n-2, \ldots, 1 \end{array}\right.$$

b - A est quelconque

Si A n'est pas triangulaire, nous sommes amenés à chercher une matrice M inversible / MA soit triangulaire supérieur : $MA_X = Mb$

2) Méthodes directes

2-1) Algorithme de Gauss

La méthode de Gauss transforme le système $Ax=b$ en un système triangulaire équivalent à l'aide d'un algo d'éliminat°

$A^{(1)} = A$, $b^{(1)} = b$

$A^{(1)}x = b^{(1)}$, $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$ et $b^{(1)} = (b_i^{(1)})$

Eventuellement, après permutat° de lignes ou de colonnes de $A^{(1)}$, on peut supposer que $a_{11}^{(1)} \neq 0$ (1er pivot)

Pour $i = 2 \longrightarrow n$, multiplions la 1re équat° du système $A^{(1)}x = b^{(1)}$ par $g_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ et retranchons l'équat° obtenue de la ième ligne.

$L_i \to L_i - g_{i1} L_1$; $i > L_2$

On obtient un système $A^{(2)}X = b^{(2)}$

$A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)})$, $b^{(2)} = (b_i^{(2)})$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \text{———} & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} \text{ — — — } & a_{2n}^{(2)} \\ | & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} \text{ ——— } & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} & j = 1 \longrightarrow n \\ a_{i1}^{(2)} = 0 & i = 2 \longrightarrow n \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}\, a_{ij}^{(1)} & i = 2 \longrightarrow n,\ j = 2 \longrightarrow n \\ b_1^{(2)} = b_1^{(1)} & \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - g_{i1}\, b_1^{(1)} & i = 2 \longrightarrow n \end{cases}$$

$\tilde{A}^{(1)} = (A^{(1)} | b^{(1)})$ $b_i^{(1)} = a_{i\,n+1}^{(1)}$

$\tilde{A}^{(2)} = (A^{2} | b^{(2)})$ $b_i^{(2)} = a_{i\,n+1}^{(2)}$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} & j = 1 \longrightarrow n+1 \\ a_{i1}^{(2)} = 0 & i = 2 \longrightarrow n \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}\, a_{ij}^{(1)} & i = 2 \longrightarrow n,\ j = 1 \longrightarrow n+1 \end{cases}$$

XIII

Plus généralement, la méthode de Gauss consiste à construire une suite de systèmes $A^{(k)}x = b^{(k)}$

$$\tilde{A}^{(k)} = \left(A^{(k)} \mid b^{(k)}\right)$$

On suppose que le k ième pivot $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\tilde{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & 0 & \vdots & \times & \times & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \times & \times & \vdots & \\ 0 & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Pour $i = k+1$ —— n, on multiplie la k ième ligne par $g_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$ puis on retranche le résultat de la i ème ligne.

La nouvelle matrice A est

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} & i = 1 \text{ — } k \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)} & \begin{cases} i = k+1 \text{ — } n \\ j = k+1 \text{ — } n+1 \end{cases} \\ \text{Les autres coefficients sont nuls.} \end{cases}$$

A la $n$ième étape, $A^{(n)}$ est triangulaire

$$\tilde{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} a^{(1)} & \diagdown & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$A^{(n)} X = b^{(n)}$, système triangulaire

Exercice 1 = Algorithme de Gauss

$Ax = b$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\tilde{A}^{(1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A^1} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}}_{B^1}$ 1^er pivot : $a_{11}^{(1)} = 4$

1^er pivot :

$g_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 1/4$

$g_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} L_2 \to L_2 - \frac{1}{4} L_1 \\ L_3 \to L_3 - \frac{1}{2} L_1 \end{cases}$

$\tilde{A}^{(1)} = \left(\underbrace{\begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 19/4 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{matrix}}_{A^{(2)}} \; \underbrace{\begin{matrix} 8 \\ 11 \\ 6 \end{matrix}}_{B^{(2)}} \right)$

2^e pivot : $a_{22}^{(2)} = \frac{19}{4}$

$g_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} = \frac{3/2}{19/4} = \frac{6}{19} \quad \to L_3 = L_3 - \frac{6}{19} L_2$

$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 19/4 & 3/2 & 11 \\ 0 & 0 & 48/19 & 48/19 \end{pmatrix}$

$A^{(3)} x = b^{(3)} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_2 = 8 \\ \frac{19}{4} x_2 + \frac{3}{2} x_3 = 11 \\ 48/19 \; x_3 = \frac{48}{19} \end{cases} \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ et } x_1 = 1$

La solut° $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

XIV

Analyse Matricielle de Gauss

$$g_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad \forall i = k+1 \text{ — } n$$

Soit $G_k = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & -g_{k+1k} & & \\ & -g_{nk} & & 1 \end{pmatrix}$

$$G^{(k)} . \tilde{A}^{(k)} = \tilde{A}^{(k+1)}$$

$$\tilde{A}^{(n)} = G^{(n-1)} . G^{(n-2)} . \tilde{A}^{(n-2)}$$

$$\tilde{A} = \underbrace{G^{(n-1)} . G^{(n-2)} \dots G^{(1)}}_{\text{inversible}} \tilde{A}^{(1)}$$

Posons $U = A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

Triangulaire supérieur

$$L = (G^{(n-1)} G^{(n-2)} \dots G^{(1)})^{-1}$$

$$\tilde{A}^{(n)} = L^{-1} \tilde{A}^{(1)}$$

$$\tilde{A}^{(n)} = (A^{(n)} | b^{(n)}), \quad \tilde{A}^{(1)} = (A^{(1)} | b^{(1)})$$

$$A^{(n)} = L^{-1} A^{(1)}$$

$$U = L^{-1} A^{(1)}$$

$$A^{(1)} = L . U \Rightarrow \underbrace{A = L \times U}$$

Factorisation de Gauss

$$U = A^{(n)}$$

$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ g_k & & 1 \end{pmatrix}$ triangle inférieur à diagonale unitaire

Remarque :

(1) $\det(A) = \det(L.U) = \det L . \det U$

$$\det A = \det U = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$$

(avec permutation)

$$\det(A) = \pm \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$$

2) $T_G = \sum op$ (élémentaire)

$$T_G = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$$

$n = 5$ $T_G = 115$

$n = 10$ $T_G = 805$

Remarque : Formule de CRAMER

$n = 5$, $T_{CRAMER} = 4319$

$n = 10$, $T_{CRAMER} = 4.10^8$

Exercice 3 : Gauss

$Ax = b$ (S)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

(1) Resoudre (S) par Gauss

(On explicitera $G^{(k)}$ et $\tilde{A}^{(k)}$)

2) Donner la factorisation de Gauss

3) En deduire $\det(A)$

$$\tilde{A}^{(1)} = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{matrix}}_{A^{(1)}} \ \underbrace{\begin{matrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{matrix}}_{B^{(1)}}\right)$$

$a_{11}^{(1)} = 3$ (1er pivot)

$$\begin{cases} g_{21} = 2/3 \\ g_{31} = 2/3 \end{cases}$$

$$G^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}^{(2)} = G^{(1)} \tilde{A}^{(1)}$$

XV

$$\tilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & -1/3 & 4 & 35/3 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{(2)}} \quad \underbrace{\quad}_{b^{(2)}}$$

2^e pivot : $a_{22}^{(2)} = \frac{1}{3}$

$$g_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1/3}{1/3} = -1$$

$$G^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(3)} = G^{(2)} . \tilde{A}^{(1)}$$

$$\tilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1/3 & 1 & 10/3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{(3)}} \quad \underbrace{\quad}_{b^{(3)}}$$

$$A^{(3)} x = b^{(3)}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 1/3\, x_2 + x_3 = \frac{10}{3} \\ 5x_3 = 15 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \,,\; x_1 = 2$$

La Solut° est $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $A = L . U$

$$\begin{cases} U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On vérifie bien que $L . U = A$

3) $\mathrm{Det}(A) = \det(L) . \det(U)$

$\mathrm{Det}\, A = \det U$

$\det A = 3 \times \frac{1}{3} \times 5$

$\det A = 5$

Algorithme de Cholesky

Théorème : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et définie positive ssi $\exists$ une matrice L triangulaire inférieure inversible telle que : $A = L\,{}^tL$

A est SDP

${}^tA = A$

$(Ax, x) = {}^tXAX > 0 \quad , \forall x \neq 0$

$Ax = b$

$$\underbrace{L\,\underbrace{{}^tL\,x}_{y}}_{} = b \Longrightarrow \begin{cases} Ly = b & ① \downarrow \\ {}^tLx = y & ② \uparrow \end{cases}$$

Construction de L :

$$L = (l_{ij}) = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ & l_{kk} & \\ & & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = (a_{ij})$$

$A = L\,{}^tL$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}\, l_{jk} \quad \text{avec } j \leq i$$

$$a_{11} = l_{11}^2 \Longrightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{i1} = l_{i1}\, l_{11} \Longrightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$
$(i = 2 - n) \qquad (i = 2 - n)$

Par récurrence, supposons connus les $(k-1)$ permissions

<u>Calcul de L :</u> $$a_{kk} = \sum_{j=1}^{k} l_{kj}^2 = l_{kk}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

XVI

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{k} l_{ij} \, l_{kj}$$

$$a_{ik} = l_{ik} \, l_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} \, l_{kj}$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} \, l_{kj}}{l_{kk}} \quad \text{avec } i = k+1 \text{ — } n$$

$A x = b$

$L^t \underbrace{L x}_{y} = b$ ① $\rightarrow$ calcule de x

${}^tL \; x = y$ ② $\rightarrow$ calcule de y

Remarque :

$$T_{CH} = \frac{2n^3 + 15n^2 + n}{6}$$

$n = 5 \quad T_{CH} = 105 \quad T_G = 115$

$n = 10 \quad T_{CH} = 585 \quad T_G = 805$

XVII

Remarque : A est SDP

1) $A = L\,{}^tL$ (Factorisat° de Cholesky)

$$\det A = (\det L)(\det {}^tL) = (\det L)^2 = \prod_{k=1}^{n} l_{kk}^2$$

2) $T_{CH} = \sum \cancel{op} = \dfrac{2n^3 + 15n^2 + n}{6}$

Si $n = 5$, $T_{CH} = 105$ alors $T_G = 115$

Si $n = 10$, $T_{CH} = 585$ alors $T_G = 805$

* Exercice 1 : Cholesky

$Ax = b \quad (S)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que A est SDP

2) Résoudre S par Cholesky

Algorithme de Cholesky

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \\ i = 2 \longrightarrow n \end{cases}$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

$$\begin{cases} l_{ik} = \dfrac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}\, l_{kj}}{l_{kk}} \\ i = k+1 \longrightarrow n \end{cases}$$

1) ${}^tA = A$ symétrique

$q(X) = (Ax, x) = {}^tx A x > 0 \quad \forall \cancel{x} \neq \vec{0}$

$$q(X) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$q(X) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

$$q(X) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + 2x^2 + 3x_2x_3$$
$$+ x_3x_1 + 3x_2x_3 + 6x_3^2$$
$$q(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$
$$q(X) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3$$
$$q(X) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3^2)^2 + x_3^2 > 0$$

Donc A est SDP.

2) Construction de L

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = 1$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 1$$
$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2-1} = 1$$
$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{3-1}{1} = 2$$

$k = 3$ (3^e colonne)
$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{6-1-4} = 1$$

Donc $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $L\,{}^tL = A$

$$Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{{}^tLx}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \\ {}^tLx = y & (2) \end{cases}$$

(1) $Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_1 + y_2 = 6 \Rightarrow y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 10 \Rightarrow y_3 = 1 \end{cases} \qquad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

XVIII

② ${}^tL x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 3 & \Rightarrow x_2 = 1 \\ & x_3 = 1 \end{cases}$$

La solution est $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Exercice 2 = Cholesky (À faire)

$Ax = b$ $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$

Conditionnement d'un système linéaire :

$Ax = b \quad (1) \Leftrightarrow X = A^{-1} b$

Système perturbé :

$$(A + \delta A)(X + \delta X) \underset{(2)}{=} b + \delta b$$

Comment majorer $\dfrac{\|\delta X\|}{\|X\|}$ en fonction de $\dfrac{\|\delta b\|}{b}$ et $\dfrac{\|\delta A\|}{A}$?

Théorème : Soit $\|.\|$ une norme matricielle telle que $\|I\| = 1$ si $\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1$

Alors $\dfrac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \dfrac{\mathrm{Cond}(A)}{1 - \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$

où $\mathrm{Cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$, conditionnement de A :

- A est bien conditionnée si $\mathrm{Cond}(A)$ est petit (proche de 1)
- A est mal conditionnée si $\mathrm{Cond}(A) \gg 1$
- $\mathrm{Cond}(I) = 1$

Conditionnement Spectral :

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad \begin{cases} \sigma_1 : + \text{grande valeur propre de } A^*A \\ \sigma_n = + \text{petite} \text{ — } A^*A \end{cases}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

* Rappel : si $\|A\| < 1$ (Exercice)

alors $I+A$ est inversible et $\|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

* Démonstration :

(2) $(A+\delta A)(X+\delta X) = b+\delta b$

$(A+\delta A)\delta X = b+\delta b - AX - \delta A X$

$= \delta b - \delta A X \quad (\text{car } b = Ax)$

$(A+\delta A) = A(I + A^{-1}\delta A)$

or $\|A^{-1}\delta A\| < \|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$

Donc $I + A^{-1}\delta A$ est inversible

et $\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| < \frac{1}{1-\|A^{-1}\| \|\delta A\|}$

$$\delta X = (A+\delta A)^{-1}(\delta b - \delta A.X)$$

$$\delta X = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}(\delta b - \delta A.X)$$

$$\|\delta X\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\|\delta b\| + \|\delta A\| \|X\|\right)$$

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|X\|} + \|\delta A\|\right)$$

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1-\|A^{-1}\|\|A\| \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|X\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\mathrm{Cond}(A)}{1-\mathrm{Cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

XIX

Méthode par itération

(1) $Ax = b$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible

Résoudre (1) par une méthode itérative c'est construire une suite de vecteurs $X^{(k)}$

$$\lim_{k \to +\infty} X^k = X = A^{-1} b$$

Définition : Une méthode itérative est convergente si $\forall X^{(0)} \in \mathbb{C}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} X^{(k)} = X = A^{-1} b$$

Tous les schémas itératifs sont de la forme :

$$X^{(k+1)} = B X^{(k)} + C \quad , \forall k = 0, 1, 2 \ldots$$

$B \in M_n(\mathbb{C})$: matrice d'itération

$C \in M_n(\mathbb{C})$

Propriété : La méthode est convergente ssi :

$$\lim_{k \to +\infty} B^k = 0 \iff \rho(B) < 1$$

$$\iff \|B\| < 1$$

Définition : Soit $k \in \mathbb{N} / \|B^k\| < 1$

On appelle taux moyen de convergence pour k itération :

$$R_k(B) = \underbrace{- \ln (\|B^k\|)^{1/k}}_{\text{positif}}$$

(1) $X^{(k+1)} = B_1 X^k + C_1$

(2) $Y^{(k+1)} = B_2 Y^k + C_2$

Définition : On dit que la méthode 1 est plus rapide que la 2 pour k itérations

$$R_k(B_1) > R_k(B_2)$$

Def : On appelle taux asymptotique de convergence

$$R_\infty(B) = -\ln \rho(B)$$

$$0 < \rho(B) < 1$$

Remarque : $R_k(B) = -\ln \|B^k\|^{1/k}$

or $\lim\limits_{k \to +\infty} \|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$

$$\lim_{k \to +\infty} R_k(B) = -\ln \rho(B)$$

Le taux asymptotique permet d'apprécier la vitesse de convergence d'une méthode itérative ($\rho(B)$ petit)

Méthode de Décomposition

$$Ax = b$$

$A = M - N$ où M inversible

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \underbrace{M^{-1}N}_{B} x^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_{c} \\ \forall k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$A = D - E - F$ avec $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(A)$

$E = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Méthode de Jacobi

$M = D$, $N = E + F$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$J = D^{-1}(E+F)$ matrice de Jacobi

Jacobi converge ssi $\rho(J) < 1$

XX

Méthode de Gauss - Seidel

$M = D - E, \quad N = F$

$X^{(k+1)} = \underbrace{(D-E)^{-1} F}_{\mathcal{L}_1} X^{(k)} + (D-E)^{-1} b$

$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F \qquad cv \text{ ssi } \rho(\mathcal{L}_1) < 1$

Méthode de relaxation

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, $A = M - N$

$M = \frac{1}{\omega}(D - \omega E), \quad M - N = A$

$N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) D + F$

$\mathcal{L}\omega = M^{-1} N (D \omega E)^{-1} [(1-\omega) D + \omega F]$

Remarque : si $\omega = 1$, on retrouve la méthode GS

Converge $\Leftrightarrow (\mathcal{L}\omega) < 1$

* **Exercice Jacobi :**

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$

1) Pour quelles valeurs de a, A est elle positive ?
2) Calculer la matrice de Jacobi
3) Etudier la convergence de Jacobi

1) A est définie + $\Leftrightarrow q(X) = (Ax, x) > 0, \ \forall x \neq \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ les valeurs propres de A sont > 0

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 2a+1-\lambda & a & a \\ 2a+1-\lambda & 1-\lambda & a \\ 2a+1-\lambda & a & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2a+1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1-\lambda & a \\ 1 & a & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-\lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda-a \end{pmatrix} = (2a+1-\lambda)(1-\lambda-a)^2$$

$$P_A(\lambda) = 0 \to \begin{cases} \lambda_1 = 2a+1 \text{ simple} \\ \lambda_2 = 1-a \text{ double} \end{cases}$$

$\lambda_1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2}$

$\lambda_2 > 0 \Rightarrow a < 1$

② Méthode Jacobi

$A = D - E - F$

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)X^k + D^{-1}b$$

$$D = \text{diagonalisat}^\circ(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Jacobi :

$$J = D^{-1}(E+F) = E+F = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} = I - A$$

③ $J = I - A$

Les valeurs propres de J : $\begin{cases} \alpha_1 = 1 - \lambda_1 = -2a \\ \alpha_2 = 1 - \lambda_2 = a \end{cases}$

Jacobi converge ssi $\rho(J) < 1$

$\rho(J) = \text{Max}(\alpha_i) = 2|a|$

$\rho(J) < 1$

$2|a| < 1$

$|a| < \frac{1}{2}$

$\to \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$