4°/ a) Règle Axiome

b) incorrect pour $♣ = \Rightarrow$

c) incorrect pour $♣ = \Rightarrow$

d) Correct

$$\dfrac{\dfrac{\bot \vdash \bot}{\bot \vdash \bot \vee (A \,♣\, B)}}{\bot \vdash A \,♣\, B}$$

Ajj.

($\bot$ neutre de $\vee$)

e) instance de d)

5°/ On réécrit en classique :

$$[\neg(W \vee T) \Rightarrow F] \wedge \neg\bot \equiv ((W \vee T) \vee F) \wedge T$$
$$\equiv W \vee F \vee T$$
$$\equiv T$$

est une tautologie
(excluant les autres cas.

6°/

A	B	C	$A\vee B$	$(A\vee B)\Rightarrow C$	$[\dots]\Rightarrow B$	$[\dots]\wedge A$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

réponse c) étant alors la seule.

7°/ On recherche un graphe dont chaque composante connexe est complète (et non orientée).
Seul Graphe 4 convient.

8°/ a) $Q = I_n$ pour la réflexivité

$(Q^{-1})^{-1} = Q$ pour la symétrie

$(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ pour la transitivité

b) $\vec{0} \notin E$ est indispensable pour la transitivité

d'où $uRv \iff \exists k \in \mathbb{K}^* \;\; u = k.v$

$\iff \exists k' \in \mathbb{K}^* \;\; k'.u = v$

(en prenant $k' = k^{-1}$) pour la symétrie.
$k = 1$ (les corps sont unitaires) pour la réflexivité
et $(kk') \in \mathbb{K}^*$ pour la transitivité ; les corps étant intègres.

c) N'assure pas la transitivité :

$0 \, R \, (x \mapsto x^2)$ et $(x \mapsto x^2) \, R \, (x \mapsto 1)$

mais non$(0 \, R \, (x \mapsto 1))$

d) Pas de sens ! φ et ψ ne sont pas des formules. On ne coche pas.

e) non réflexif : $h \neq id \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \;\; h(x) \neq x$

d'où non$(x R x)$ pour un tel $x \in \mathbb{R}$.

9°/ a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \times |x| . \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) = 0$

c) Fort heureusement oui ; c'est un corps.

d) $6 \notin \mathcal{P}$ (premiers) donc non.
on donne $3 \times 2 \equiv 0 \, [6]$

e) $a . \bar{a} = 0$ donc non.