Application : Soit $f(t)$: $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$ Calculer $F(z)$?

$\leftarrow$ 2 pôles : $\left.\begin{array}{l} p_1 = -a \\ p_2 = -b \end{array}\right\}$ 2 pôles simples

$f(t) \xrightarrow{1} F(z) = \sum r_i$

$F(p) \xrightarrow{2} F(z) = \sum r_i$

$N(p) = 1$
$D(p) = (p+a)(p+b)$
$D'(p) = 2p + a + b$

$r_1 = \dfrac{1}{-a+b} \times \dfrac{1}{1-e^{-aT} z^{-1}}$ $\quad r_2 = \dfrac{1}{a-b} \times \dfrac{1}{1-e^{-bT} \times z^{-1}}$

$$Z\left[\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right] = \frac{1}{-a+b}\left[\frac{1}{1-e^{-aT} \times z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT} \times z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{-a+b}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}}\right]$$

En plus des 2 méthodes directs (voies 1 et 2), il existe 2 méthodes indirect (qui se servent du Tableau des Z élémentaires)

(M1) Développement en éléments simples de F(p)

On développe F(p) en éléments simples $\rightarrow$ $F(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)} = \dfrac{A}{p+a} + \dfrac{B}{p+b}$ (cas des pôles simples)

$\times (p+a)$ puis $p = -a \Rightarrow \dfrac{1}{-a+b} = A$

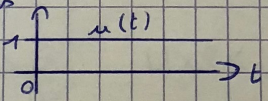
$\times (p+b)$ puis $p = -b \Rightarrow \dfrac{1}{-b+a} = B$

$$Z\left(\frac{1}{(p+a)\ (p+b)}\right) = \frac{1}{-a+b} \times \underbrace{Z\left(\frac{1}{p+a}\right)}_{\frac{z}{z-e^{-aT}}} + \frac{1}{-b+a} \times \underbrace{Z\left(\frac{1}{p+b}\right)}_{\frac{z}{z-e^{-bT}}}$$

$e^{-aT} u(t) \quad \dfrac{1}{p+a} \times \dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

(M2) Fonctions trigonométriques

$\rightarrow Z\left[\underbrace{(\sin \omega t).u(t)}_{\text{fonction causale}}\right]$?



$\sin \alpha = \dfrac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$ $\quad \cos \alpha = \dfrac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

$$Z[(\sin \omega t).u(t)] = Z\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \times u(t)\right] = \frac{1}{2j}\left[\underbrace{Z(e^{j\omega t} \times u(t))}_{\substack{a = -j\omega \\ \frac{z}{z-e^{j\omega t}}}} - \underbrace{Z(e^{-j\omega t} \times u(t))}_{\substack{a = +j\omega \\ \frac{z}{z-e^{-j\omega t}}}}\right]$$

$$Z[(\sin \omega t)\, u(t)] = \frac{1}{2j}\, z\left[\frac{1}{z-e^{j\omega t}} - \frac{1}{z-e^{-j\omega t}}\right]$$

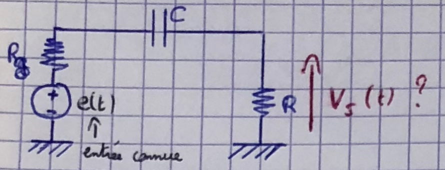
$$= \frac{z}{2j} \times \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{z^2 - (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})z + 1}$$

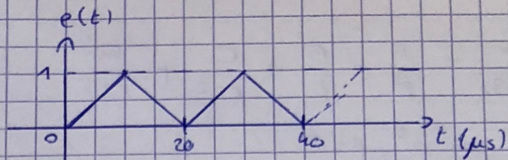
$$Z[\sin(\omega t). u(t)] = \frac{z \times \sin \omega T}{z^2 - 2\cos \omega T z + 1}$$

(t) $\qquad$ (z)

T = période d'échantillonnage

⑥ **Application en Électronique :**





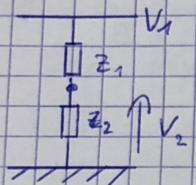
3 étapes :

1) Calculer la $\boxed{\text{fonction de transfert}}$ du circuit $\longrightarrow$ $\xrightarrow{e(t)}$ $\boxed{\text{système}}$ $\xrightarrow{V_s(t)}$

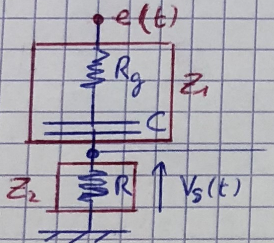
$\dfrac{\mathcal{L}(\text{sortie})}{\mathcal{L}(\text{entrée})}$, avec l'hypothèse Conditions Initiales nulles

Ici : $G(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)}$ $\longrightarrow$ Remarque $\begin{cases} e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) \\ V_s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} V_s(p) \end{cases}$

caractérise le circuit lui-même, $\forall$ l'entrée et $\forall$ la sortie



$$V_2 = V_1 \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



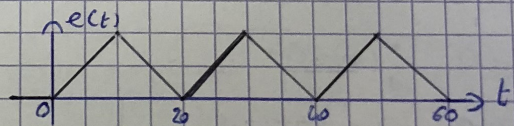
$$Z_1 = R_g + \frac{1}{Cp} \qquad Z_2 = R$$

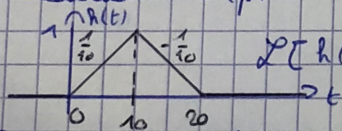
fonction de transfert : $G(p) = \dfrac{V_s(p)}{E(p)} = \dfrac{R}{R + R_g + \frac{1}{Cp}}$

$$G(p) = \frac{RC\overset{\text{dérivateur}}{p}}{\underbrace{1 + (R+R_g)Cp}_{\text{filtre}}}$$

dérivateur filtré

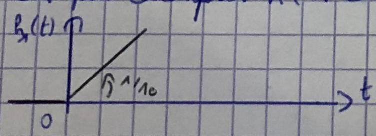
2) Calculer $E(p) = \mathcal{L}\left[e(t)\right]$

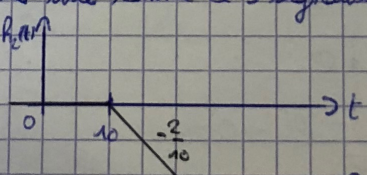


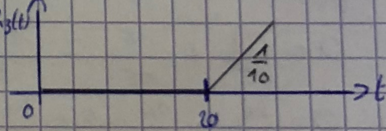


$\mathcal{L}[h(t)]$?

On peut décomposer $h(t)$ comme une somme de 3 signaux élémentaires :

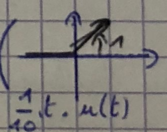






$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$

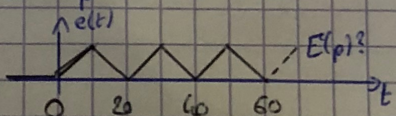
$\mathcal{L}\left(\text{[graph]}\right) = \dfrac{1}{p^2} \cdot \dfrac{1}{10}$



$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$

$H_1(p) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{p^2}$; $H_2(p) = e^{-10p} \times \left(\dfrac{-2}{10}\right) \times \dfrac{1}{p^2}$; $H_3(p) = e^{-20p} \times \left(\dfrac{1}{10}\right) \times \dfrac{1}{p^2}$

$$H(p) = \frac{1}{10p^2}\left(1 - 2e^{-10p} + e^{-20p}\right)$$

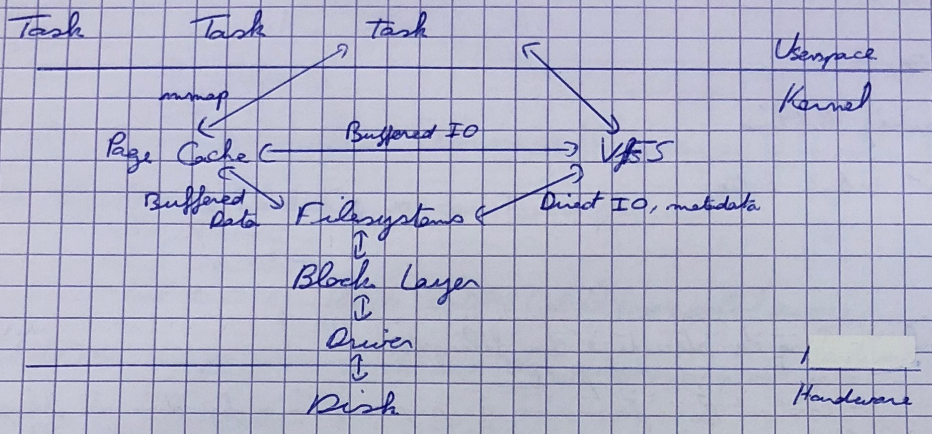


Les inodes ne sont pas contraints sur les blocs, on peut donc les changer de places.

Inodes : structure to address block of data
Dentry : glue inodes to filenames
fd table
Linux : fs/ext2.h : ext2_inode, ext2_dir_entry, ext2_super_block

get_dent pour readdir donne le nombre de dentry lu

Linux Kernel IO Architecture



Deux codes passes : 1 pour Buffer IO l'autre pour direct IO

Direct IO : évite le cache, permet de décrire le temps de latence
Buffer IO : on ne sait pas combien de temps prennent les calculs

Opérations : alloc_inode, destroy_inode, write_inode, ...

Le driver : c'est juste une liste de requêtes envoyée dans l'ordre

Accès aux métadonnées ne passe pas par le ~~cache~~ cache, on y trouve juste les data.

Pour mmap : struct vm_mm : structure avec l'adresse space
Après le pagefault au premier accès, il va à la structure d'opération (ici on trouve des pointeurs sur fonction)

Quand on map si on est private et qu'on lit, le cache passe la page en Read Only.
private et qu'on écrit, le cache duplique la page.
shared, le cache donne accès directement.

Requête d'IO : endroit, taille, read/write/special, hints (SYNC) et flags

Vie d'une requête : block layer, peu être delais ou merge,

Submission handling : Block Layer
Bio request → Per-process plugging → IO scheduler → dispatch queue → device driver

Schedulers d'IO : - NOOP : ne fait rien : pose les requête dans la file
- Deadline :
- Prefer reads over writes
- Sorts waiting requests to reduce seeking
- Aims to dispatch each request at least after its deadline has expired

Les IO doivent aller vite dans un certains delai, objectif de deadline

Résidu d'un pôle simple.

$Z(u(t)) = \frac{z}{z-1}$

2ème voie : $F(p) = \frac{1}{p}$ 1 est le seul pôle simple $\longrightarrow p_1 = 0$

$F(z) = r_1 \quad F(p) = \frac{1}{p} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = p \end{cases} \quad D'(p) = 1$

$r_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} \times \frac{1}{1 - e^{Tp_1} z^{-1}} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1 - e^{T \times 0} \times z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

t	p	z
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	?

$f(t) = e^{-at} u(t)$

Voie 1 : $f(nT) = e^{-anT} \cdot \underbrace{u(nT)}_{1} \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-anT} \cdot z^{-n}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$

t	p	z
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$

$F(p) = \frac{1}{p+a} = \frac{N(p)}{D(p)}$

1 pôle simple $p_1 = -a \Rightarrow r_1$

$N(p) = 1 \quad D(p) = p + a \longrightarrow D'(p) = 1$

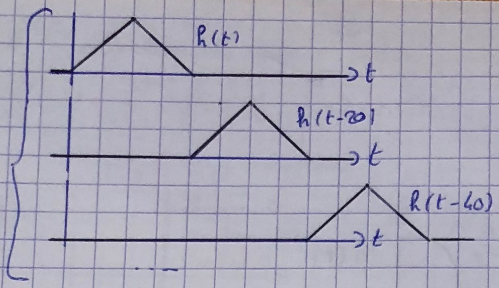
$r_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} \times \frac{1}{1 - e^{Tp_1} z^{-1}} \quad F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$

t	p	z
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	?

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow[\text{membres par } x]{\text{on dérive les deux}} \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Voie 1 : $f(t) = t \cdot u(t) \quad f(nT) = nT \underbrace{u(nT)}_{1} = nT$

$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nT z^{-n} = T \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n \times (z^{-1})^n = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$



$$\mathcal{L}\left\{\begin{array}{l} e(t) = h(t) + h(t-20) + h(t-40) + \dots \\ E(p) = H(p) + e^{-20p}H(p) + e^{-40}H(p) + \dots \end{array}\right.$$

$$E(p) = H(p).\left[1 + e^{-20p} + (e^{-20p})^2 + (e^{-20p})^3 + \dots\right]$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$|x| < 1$ $\quad 1 + x + x^2 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$ (somme d'une série géométrique de raison x)

x complexe $\longrightarrow 1 + x + x^2 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$

$$E(p) = H(p).\frac{1}{1-e^{-20p}}$$

$$H(p) = \frac{1}{10p^2}\left(1 - 2e^{-10p} + e^{-20p}\right)$$

$$E(p) = \frac{1}{10p^2} \times \frac{1-2e^{-10p}+e^{-20p}}{1-e^{-20p}}$$

$$1 - 2e^{-10p} + (e^{-10p})^2 = (1-e^{-10p})^2$$

$$1 - e^{-20p} = 1 - (e^{-10p})^2 = (1-e^{-10p})(1+e^{-10p})$$

$$E(p) = \frac{1}{10p^2} \times \frac{1-e^{-10p}}{1+e^{-10p}}$$

3) Objectifs :
1 → fonction de transfert $G(p)$
2 → $\mathcal{L}(\text{entrée}) = E(p)$
3 → $\mathcal{L}(\text{sortie}) = V_s(p)$

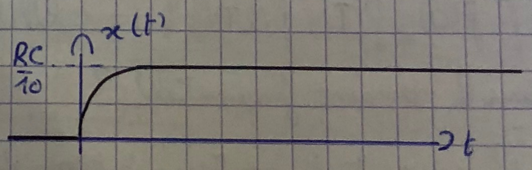
$$\Rightarrow V_s(p) = \underbrace{\frac{RC\cancel{p}}{1+(R+R_g)Cp}}_{G(p)} \times \underbrace{\frac{1}{10p^{\cancel{2}}} \times \frac{1-2e^{-10p}+e^{-20p}}{1-e^{-20p}}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \underset{V_s(t)}{?}$$

Application Numérique : $(R+R_g)C = 1\,\mu s$ $\quad V_s(p) = \dfrac{RC}{10} \times \dfrac{1}{p(1+p)} \times \dfrac{1-2e^{-10p}+e^{-20p}}{1-e^{-20p}}$

$$X(p) = \frac{RC}{10} \times \frac{1}{p(1+p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t)$$

$$X(p) = \frac{RC}{10} \times \left[\frac{A}{p} + \frac{B}{1+p}\right] \qquad A = 1 \quad A + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$\mathcal{L}\left\{\begin{array}{l} X(p) = \dfrac{RC}{10}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{1+p}\right] \\ x(t) = \dfrac{RC}{10}\left[1 - e^{-t}\right] u(t) \end{array}\right.$$



Principales propriétés de la transformée en Z

P1 Linéarité

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda F(z) + \mu G(z)$$

P2 Théorème du retard

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} \cdot F(p)$$

$$Z[f(t-\underbrace{kT}_{\text{retard } (k = \text{entier})})] = z^{-k} \cdot F(z)$$

P3 Convolution

$$(\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p) \cdot G(p) \qquad \mathcal{L}[*] = \cdot)$$

Produit de convolution discret :

$$g(nT) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(kT) * f_2[(n-k)T] \longrightarrow f_1(nT) * f_2(nT)$$

$$Z[f_1(nT) * f_2(nT)] = F_1(z) \cdot F_2(z) \qquad Z[*] = \cdot$$

P4 Théorème de la valeur initiale / Théorème de la valeur finale

$$t \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to +\infty} [p \cdot F(p)] \\ \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} [p \cdot F(p)] \end{cases}$$

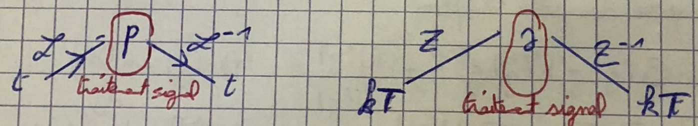
$$\lim_{n \to 0} f(nT) = \lim_{z \to +\infty} [F(z)]$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(nT) = \lim_{z \to 1} \left[\frac{z-1}{z} F(z)\right] \Rightarrow \text{Régime permanent en automatique}$$

$$Z[f(t-kt)] = z^{-k} F(z)$$

Transformée en Z inverse Z^{-1}

Idée :

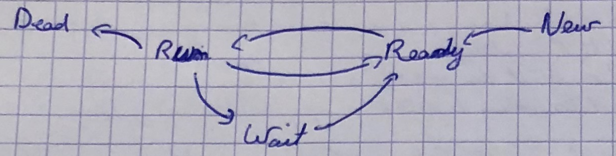


Définition : $Z^{-1}[F(z)] = \{f(nT)\}$ → collection d'échantillons $n = 0, 1, 2 \ldots$

⚠ Notation : $= \{f(nT)\}$ OK

$= \cancel{f(nT)}$ KO

- CFQ : Prefers sync request over async
Tries to achieve fairness among tasks
Support for IO priorities cgroups, sync request idling, ...



Don égal : donne la même chose   Don équitable : essayer de donner en fonction des besoins

Notre algorithme de Scheduling va donc devoir être :
- No starvation
- Fair (equitable)
- Fast ⇒ O(1) temps constant (plutôt temps constant amorti)

CPUTIME : temps qu'on va avoir sur notre processeur

CPUTIME
décompose
User   System Kernel

Execution Time : nombre d'unité de temps que le process met à faire
= temps passé en running

Turnaround Time : c'est le temps mis pour finir : c'est tout le temps entre new et dead

Throughtput :

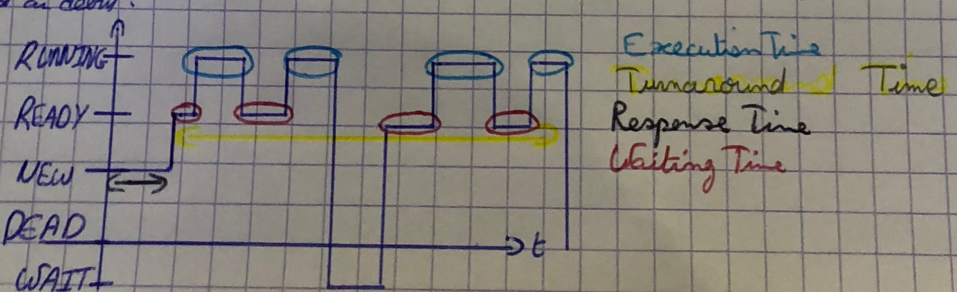
Response Time : temps qu'une application démarre, c'est à dire entre new et running
↳ en général on veut qu'il soit très faible

Waiting Time : c'est le temps passé dans un état ready, c'est le temps où la tâche attend alors qu'elle est prête
↳ en général on essaye de le minimiser mais on ne peut pas pour tout le monde, on fait des choix ; on essaye de le réduire sur les applications intéractives (= n'importe quelle application qui réagit avec quelque chose (pas obligatoirement le User)).

Les goulots d'étranglement ou bottleneck ont pour objectif de limiter les applications afin qu'elles n'aillent pas plus vite que ce qu'elles souhaitent.

IO Bound et CPU Bound sont restreint par le CPU (ce sont deux types de tâche)

Pour une IO Bound, l'important c'est le waiting time de tâche alors que pour le CPU Bound, ce sont les autres.
Un programme peut varier entre CPU Bound et IO Bound. En général les process sont IO Bound au début.



GUID Partition Table Scheme

LBA1 Protective MBR
LBA2 Primary GPT Header
Entry 1 Entry 2 Entry 3 Entry 4

Entries 5 - 128

LBA 34 Partition 1

Partition 2

Remaining Partitions

Entry 1 Entry 2 Entry 3

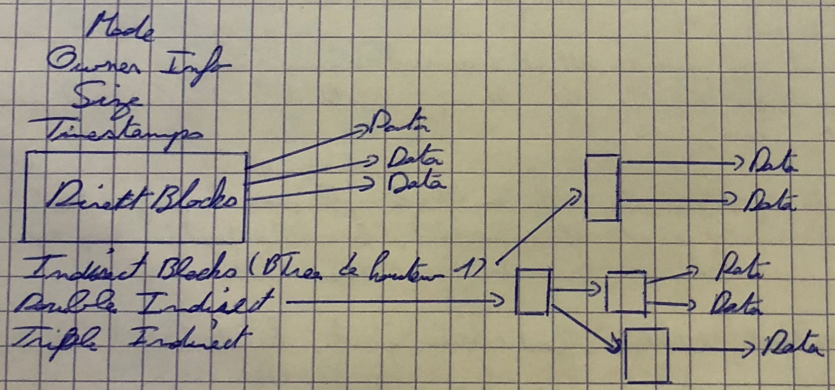
⋮

Superblock : - Base de structure des filesystem
- se trouve dans la partition
- contient les informations à propos de la configuration des filesystem

En général il y a plusieurs superblock pour pouvoir avoir des fichiers corrompus (les fichiers corrompus peuvent arriver en cas d'écriture et de coupure de courant au milieu par exemple)

contient : le nombre d'inode
le nombre de blocks
le nombre de blocks réservé
l'offset du premier nombre
un magic number...

Ext2 (dans fs : filesystem) Inodes



Directory = inode + les noms

char name[] = char name[0] sert à voir ce qu'il y a derrière la structure

Le file type et les noms servent à avoir un accès sans rentrer dans les fichiers
Le rec_len et le name_len servent en cas de redéfinition par exemple.
Plus les noms de fichier sont petit plus on peut en mettre.

Les inodes, on les alloue à l'avance pour pouvoir les utiliser après. On ne peut pas avoir plus 4 Giga d'Inode.
Les structs le par exemple servent à savoir si c'est un little endian, du coup ça peut de changer si besoin en cas de changement d'architecture.

Remarque : ⚠ Lecture d'une table :

t	p	z
$t\,u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

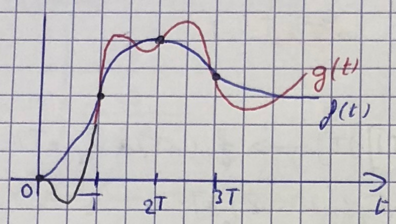
Z , Z^{-1}

⚠

$$Z^{-1}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}\right] = \underbrace{\cancel{t.u(t)}}_{\text{FAUX}} = \{nT.\underbrace{u(nT)}_{1}\} = \{nT\}$$

Remarque : il existe une infinité des fonctions continues du temps qui possèdent la même transformée en Z

Exemple :



$f(t) \neq g(t)$

$f(nT) = g(nT)\ \forall n$

$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT).z^{-n}$

$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(nT)\,z^{-n}$

$F(z) = G(z)$

$$Z^{-1}[F(z)] = Z^{-1}[G(z)] = \{f(nT)\} = \{g(nT)\}$$

=

4 Méthodes de calcul de Z^{-1} → * 2 méthodes analytiques → résultats littéral donnant $f(nT)$ en fonction de n et de T
cas les plus simples

→ * 2 méthodes numériques → résultat sous la forme
Les plus utilisées

Collection de nombres: $f(0) = \ldots$ / $f(T) = \ldots$ / $f(2T) = \ldots$

(M1) Méthodes des résidus

$$f(nT) = \sum \text{résidus de } F(z).z^{n-1}$$

Hypothèse : $F(z)$ n'a que des pôles simples

fonction auxiliaire $G(z) = F(z).z^{n-1} = \frac{N(z)}{D(z)}$ $\qquad D'(z) = \frac{dD(z)}{dz}$

la formule des résidus $f(nT) = \sum_i \frac{N(z_i)}{D'(z_i)}$ $\qquad z_i$ = pôles de $F(z)$

Exemple :

$F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}$ Calculer la transformée en z inverse de $F(z)$

$$G(z) = \frac{z^n(z+1)}{(z-a)(z-b)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\begin{cases} N(z) = z^n(z+1) \\ D(z) = (z-a)(z-b) \\ D'(z) = 2z - a - b \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} z_1 = a \\ z_2 = b \end{array}\right. \quad \text{2 pôles simples}$$

Système d'Exploitation 2

Operation filesystème :

Deux défaults : peu de place la ram
la mémoire doit être sauvegardé sans courant

On utilise donc un disk

filesystèm : format et logic to access storage
partition : part of storage
directory : list of files
file : unit of storage
block : minimum part of a file

block device : device liés au disk   char device : les autres

How a disk works ?
accessed by blocks
command queue (read / write / flush)
interrupt when ready or finished

Disk :
+ Logical Block Adress LBA
+ Block Size - 4 KB récent
- 2 KB CD
- 512 B historique
+ Read / Write / Flush (peut être nommé autrement, = point de synchronisation)

Queues
- Submit (possibilité d'en avoir plusieurs pour pouvoir avoir des requêtes en parallèle)
- Completion

C'est pour garantir ce qui est fait avec Flush mais c'est le cas pour des moderne, pas tous

Type de disk : - HD Disk historik (Rotatif) magnétisme avec une rotation sur le disk
- Flash (ssd, ...) même coût pour un accès à une donnée à l'offset 0 qu'à l'offset N, on peut aussi faire plusieurs trucs en même temps comme écrire sur deux unités

Les protocoles et contrôleurs sur le disk :
- IDE (ATA) => historiquement protocole sur le PC (le premier PC d'IBM) Bus Parallèle et DMA sur PC d'IBM
- SCSI

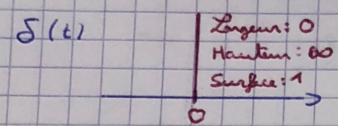
Bus parallèle, on envoie plus de données d'un coup mais la synchro plus CPU à chaque fois fait perdre du temps
Bus série, on envoie bit à bit, mais la fréquence peut être plus efficace (grande) donc le bus série est plus efficace.

DMA : direct memory access : protocole hardware pour faire parler le device directement en mémoire

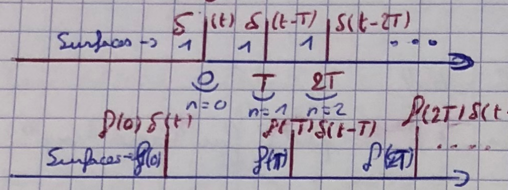
SCSI : protocole qui permet de faire passer un paquet à un bon device directement
ce n'est pas utilisé que pour les disk a externe (par contre en interne c'est principalement disk)
(En externe : on le retrouvait sur les scanner, tablette graphique, ... avant l'USB)
On ne voit plus de machine avec le protocole SCSI mais aujourd'hui, il est utilisé pour beaucoup de nouveaux disk.

2ème définition du S.E.

(1) $f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DIRAC}}}{\delta(t-nT)}$



$\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT) \longrightarrow$ peigne de DIRAC



$f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(xT)\,\delta(t-nT)$

Peigne de DIRAC : train d'impulsions, les wagons sont identiques (même surface 1)

$f^*(t) \to$ les échantillons $f(0), f(T), f(2T), \ldots$ prennent le train et chaque échantillon s'installe dans un wagon dont il occupe toute la surface.

Peigne de DIRAC : moyen de transport des échantillons

Passage dans le domaine fréquentiel ?

⚠ ~~$\mathcal{L}$ d'une suite de nombres n'est pas définie.~~

Calcul de $\mathcal{L}[f^*(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot \delta(t-nT)\right]$

P1 (linéarité de $\mathcal{L}$)

t	p
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}[\underbrace{f(xT)}_{\text{constante}} \cdot \delta(t-xT)]$$

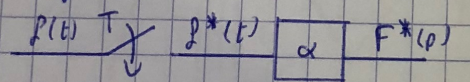
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot \mathcal{L}[\delta(t-xT)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(xT) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(xT) \cdot e^{-xTp} \cdot \mathcal{L}[\delta(t)]$$

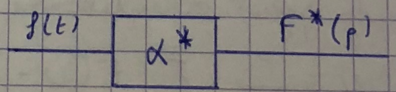
P2 : Théorème du retard : $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} \cdot F(p)$

$$F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{x=0}^{+\infty} f(xT) \cdot e^{-xTp} \quad \underline{\underline{2}}$$

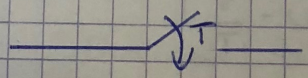
Remarques :

(1) $F^*(p)$ = « transformée de Laplace échantillonnée » de $f(t)$ = transformée de Laplace du signal échantillonné

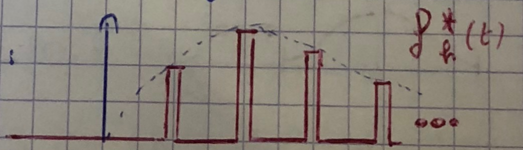




(2) Échantillonnage idéal



échantillonnage réel :

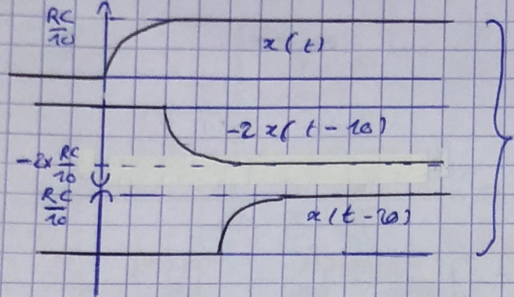


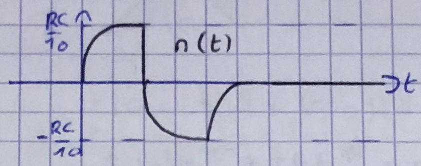
h = durée du prélèvement

(8) $N(p) = X(p) \cdot \left[1 - 2e^{-10p} + e^{-20p}\right]$

$N(p) = X(p) - 2 \cdot e^{-10p} \cdot X(p) + e^{-20p} X(p)$

$n(t) = x(t) - 2x(t-10) + x(t-20)$

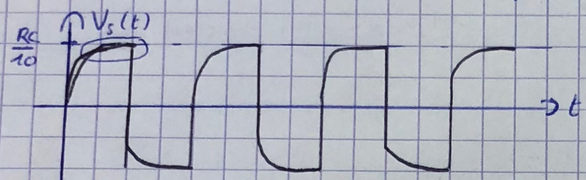




$V_s(p) = \dfrac{N(p)}{1-e^{-20p}}$ $\quad E(p) = \dfrac{H(p)}{1-e^{-20p}}$

e(t) reproduit le motif de h(t) toutes les 20 µs

$V_s(t)$ reproduit le motif de n(t) toutes les 20 µs

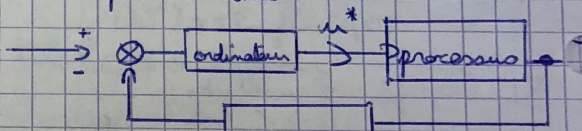


$\dfrac{RC}{10}(1-e^{-t})$

Cours n°2 : Signal échantillonné (ou discret)

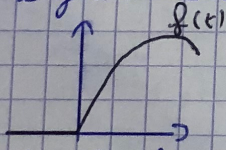
Contexte : Souvent, un signal échantillonné est délivré par un ordinateur

Exemple : Commande numérique d'un processus

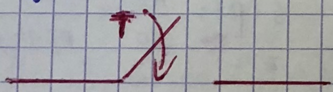


Nouvel outil pour le passage en fréquentiel Z en sens inverse Z^{-1}

Définition d'un signal échantillonné

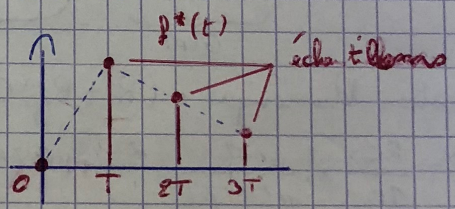


f(t) Causal (nul, t<0)



échantillonneur idéal

T = période d'échantillonnage



1ère définition du SE :

$f^*(t) = \{f(0); f(T); f(2T); \dots\}$ = collection d'échantillon

Passage dans le domaine fréquentiel ?

⚠ $\mathcal{L}$ d'une suite de nombres n'est pas défini.

$$Z^{-1}\left[\frac{2z}{(z-1)(z-0,5)}\right] = \{4(1-0,5^n)\}_{n=0,1,\dots} = \{0, 2, 3, 3.5, \text{etc}\dots\}$$

(M3) Division selon les puissances croissantes de z^{-1}

Problème Inverse $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) z^{-n}$

CONNU ?

$f(nT)$ = coefficient de z^{-n} dans un développement de $F(z)$ sous la forme d'un polynôme de la variable z^{-1}

Ce développement est obtenu par Division Polynomiale

Exemple :

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2-0,4z+0,1)} \qquad \text{Calculer } Z^{-1}[F(z)]$$

$$= \frac{z^2}{z^3-1,4z^2+0,5z-0,1} = \frac{z^{-1}}{1-1,4z^{-1}+0,5z^{-2}-0,1z^{-3}}$$

DIVIDENDE | DIVISEUR

RESTE z^{-1}

$\ominus$ $B \times z^{-1}$

$1,4z^{-2} - 0,5z^{-3} + 0,1z^{-4}$

$\ominus$ $B \times 1,4z^{-2}$

$1,46 \times z^{-3} - 0,6 \times z^{-4} + 0,14z^{-5}$

$\ominus$ $B \times z^{-3} \times 1,46$

....

$1 - 1,4z^{-1} + 0,5z^{-2} - 0,1z^{-3} \} B$

$z^{-1} + 1,4z^{-2} + 1,46z^{-3} + 1,44z^{-5} + 1,43z^{-5} + \dots$

$\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \times z^{-n}$

$f(0) = 0 \quad f(T) = 1 \quad f(2T) = 1,4 \quad f(3T) = 1,46 \quad f(4T) = 1,44 \quad f(5T) = 1,43 \quad f(6T) = 1,43 \quad \dots$

$Z^{-1}[F(z)]$

Critères d'arrêt : (1) sur le problème d'échantillons
(2) si on observe un convergence : $|f(nT) - f[(n-1)T]| < \varepsilon$

Remarques : (1) ⚠ accumulation des erreurs d'arrondis
(2) $\lim_{n\to+\infty} f(nT)$?

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n\to+\infty} f(nT) = \lim_{z\to1}\left[\frac{z-1}{z}F(z)\right] = \lim_{z\to1}\left[\frac{z-1}{z} \times \frac{z^2}{(z-1)(z^2-0,4z+0,1)}\right]$$

$$= \frac{1}{1-0,4+0,1} = \frac{1}{0,7} = \frac{10}{7} \simeq 1,42857$$

(M4) Méthode de l'équation aux différences

Une équation aux différences est la transposition en numérique d'une équation différentielle en variables continues.

Exemple : $\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{0,3z}{z-0,2}$

② $\begin{cases} a - 6b = 20 \\ -6a = 12 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$ | $6b = a - 20 = -22 \iff b = -\frac{11}{3}$

$y(t) = A.e^{2t} + Be^{-3t} - 2t - \frac{11}{3}$ A et B dépendent des conditions initiales

II) Produits de Convolution

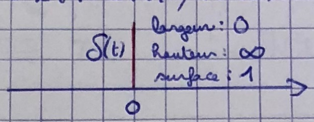
$x(t)$ et $y(t)$

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \times y(t-\tau).d\tau$$

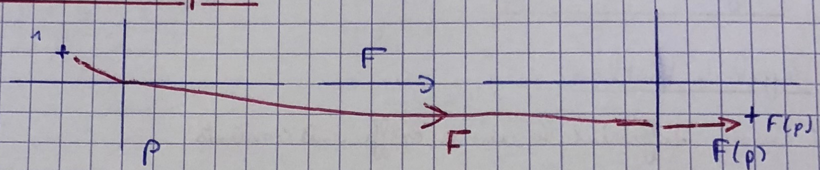
Commutativité : $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Associativité : $x(t) * [y(t) * g(t)] = [x(t) * y(t)] * g(t)$
Distributivité / Addition : $[y(t) + g(t)] \times x(t) = [x(t) * y(t)] + [x(t) * g(t)]$

Existe-t-il une unité de convolution $u(t)$?
$a.1 = 1.a = a, \forall a$; $u(t)$? $x(t) * u(t) = u(t) * x(t) = x(t), \forall x(t)$

$u(t)$ est le "pic de Dirac" $\delta(t)$
(théorie des distributions)



III) Fonction complexe d'une variable complexe



IV) Transformation de Laplace

$F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}.dt$ p = nombre complexe, $p = \sigma + j\omega$

ω = pulsation (rd/sec), $\omega = 2\pi f$
f = fréquence (Hertz)

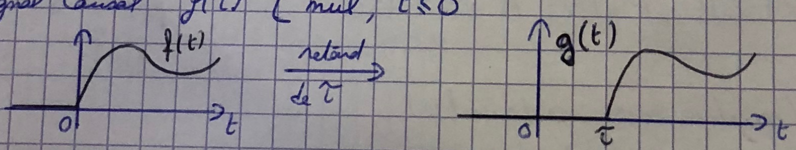
$\mathcal{L}$ réalise le passage de l'espace temporel vers l'espace fréquentiel.

Condition d'existence de $F(p)$: (pour tous les signaux $f(t)$ que l'on peut observer, $F(p)$ existe)

Propriétés : P1 Linéarité : $\mathcal{L}[\lambda.f(t) + \mu g(t)] = \lambda F(p) + \mu G(p)$ λ, μ = Cstes

P2 Théorème du Retard

Signal Causal $f(t)$ [nul, $t \leq 0$



$g(t) = f(t-\tau)$ $t = \tau$ $g(t) = f(t-\tau)$

$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p}.F(p)$

P3 Dérivation / Intégration

$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p.F(p) - \cancel{f(t=0)}$

Condition initiale

t	p	z
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

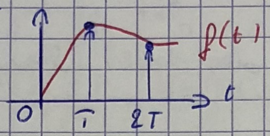
$F(p)=\frac{1}{p^2}$ 1 pôle $p_1=0$ multiplication d'ordre $n=2$

$$r_i=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left\{(p-p_i)^n\times\frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}}\right\}\right]_{p=p_i}$$

$$r_1=\left[\frac{d}{dp}\left\{p^2\times\frac{\frac{1}{p^2}}{1-e^{Tp}z^{-1}}\right\}\right]_{p=0}=\left[\frac{+Te^{Tp}z^{-1}}{(1-e^{Tp}z^{-1})^2}\right]=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

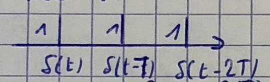
Rappel : signal échantillonné

$f(t) \xrightarrow{T} f^*(t)$

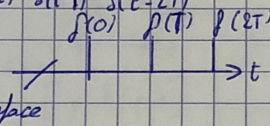


2ème def : $f^*(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)$ (1)

Peigne de Dirac



$\Sigma f(nT)\,\delta(t-nT)$



$$\mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,e^{-nTp}=F^*(p)\quad(2)\quad \downarrow z=e^{Tp}$$

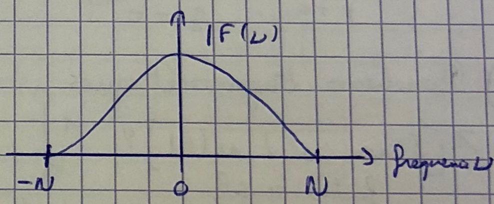
$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\,z^{-n}\quad(3)$$

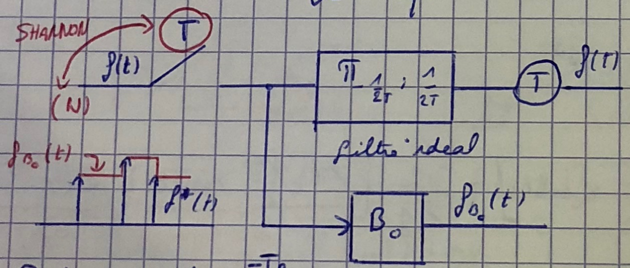
définition de la Z

Choix de T ? ⟶ SHANNON

$\downarrow$

$f_e=\frac{1}{T}>2\times N$





$B_0(p)=\frac{1-e^{-Tp}}{p}$ ⟹ approximation de l'ensemble $\left(\Pi_{-\frac{1}{2T},\frac{1}{2T}}\right)\times$ gain T

Transformée en z

Calcul pratique : $f(t) \xrightarrow{T} f^*(t)$

$\mathcal{L}\downarrow$ $F(p)$; $f^*(t)$ $\downarrow\mathcal{L}$ $F^*(p)$ $\downarrow z=e^{Tp}$ $F(z)$ ……

t	p	z
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

$$f(nT) = \frac{N(z_1)}{D'(z_1)} + \frac{N(z_2)}{D'(z_2)} = \frac{N(a)}{D'(a)} + \frac{N(b)}{D'(b)}$$

$$f(nT) = \frac{a+1}{a-b}\, a^n + \frac{b+1}{b-a}\, b^n$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z(z+1)}{(z-a)(z-b)}\right] = \left\{ \frac{a+1}{a-b}\, a^n + \frac{b+1}{b-a}\, b^n \right\}_{n=0,1,2\ldots}$$

$$= \left\{ 1,\ \frac{a+1}{a-b} \times a + \frac{b+1}{b-a} \times b,\ \text{etc} \ldots \right\}$$

M2 Développement en fractions élémentaires (développement en éléments simples)

⚠ pour $\mathcal{L}^{-1} \rightarrow F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = A\, e^{-at} u(t) + B\, e^{-bt} u(t)$

$F(z) = \cancel{\frac{1}{(z+a)(z+b)} = \frac{A}{z+a}} + \frac{B}{z+b} \xrightarrow{Z^{-1}} ?$ ($\frac{1}{z+a}$ n'est pas une transformée z simple)

t	z
$e^{-at} u(t)$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$

Ce qu'il faut faire $\longrightarrow$ 2 étapes

1) fonction auxiliaire $G(z) = \frac{F(z)}{z}$

On décompose $G(z)$ en éléments simples : $G(z) = \frac{C}{z+a} + \frac{D}{z+b} + \ldots$

2) On revient à $F(z) = z\,G(z) = \frac{Cz}{z+a} + \frac{Dz}{z+b} + \ldots$

On peut trouver $Z^{-1}[F(z)]$ à partir de la table

Exemple : $F(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0{,}5)}$ Calculer la transformée en z inverse de $F(z)$

$$G(z) = \frac{2}{(z-1)\times(z-0{,}5)} = \frac{4}{z-1} - \frac{4}{z-0{,}5}$$

$$\frac{2}{(z-1)(z-0{,}5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0{,}5}$$

$(z-1)$, $z=1 \Rightarrow 4 = A$ $(z-0{,}5)$, $z = 0{,}5 \Rightarrow -4 = B$

$$F(z) = \frac{4z}{z-1} - \frac{4z}{z-0{,}5} \rightarrow e^{-at}$$

t	z
$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{z}{z-e^{-at}}$

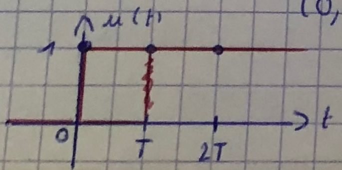
Z^{-1} ⚠

$$f(nT) = 4 \times u(nT) - 4e^{-anT}\underbrace{u(nT)}_{1}$$

$$f(nT) = 4(1 - e^{-anT}) = 4(1 - 0{,}5^n)$$

On a posé a : $0{,}5 = e^{-at}$

$(0{,}5)^n = (e^{-at})^n = e^{-anT}$



$u(nT) = 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

Hypothèse : Condition Initiales nulles ⇒ Dérivation (t) ⇔ Multiplication par p

→ dériver 3 fois $p^3 F(p)$
→ dériver 2 fois $\frac{F(p)}{p^2}$

Très facile de dériver ou d'intégrer dans l'espace de $\mathcal{L}$

P4 Convolution

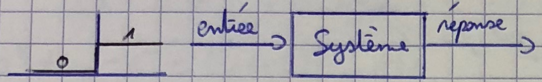
$\mathcal{L}[x(t) * y(t)] = X(p) \cdot Y(p)$

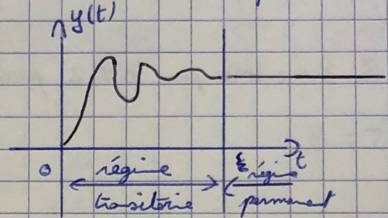
$\mathcal{L}[*] = \cdot$

très facile de faire un produit de convolution dans l'espace de $\mathcal{L}$

P5 Théorème de la valeur INITIALE / Théorème de la valeur FINALE

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 0} (f(t)) = \lim\limits_{p \to +\infty} [p \cdot F(p)] \\ \lim\limits_{t \to +\infty} (f(t)) = \lim\limits_{p \to 0} [p F(p)] \end{cases}$$ → régime permanent en Automatique

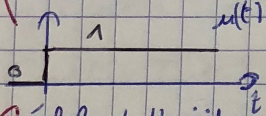
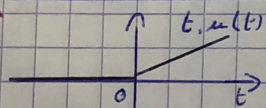




$\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ calculé grâce au théorème de la valeur finale

Tableau des 4 transformées de Laplace usuelles

Remarque : $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$ $F(p)$ transformée de Laplace de $f(t)$

t	p
Dirac $\delta(t)$	1
 échelon de Heaviside	$\frac{1}{p}$
 Rampe unitaire	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at} \cdot u(t)$ (a réel ou complexe)	$\frac{1}{p+a}$

dérivé par t — multiplication par p

dérivé par t — multiplication par p

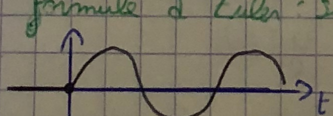
Remarques :

(1) Propriété de dérivation P3
(2) Ce tableau ⇒ calcul des transformées de $\mathcal{L}$ d'autres signaux

Exemples :

Formule d'Euler : $\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

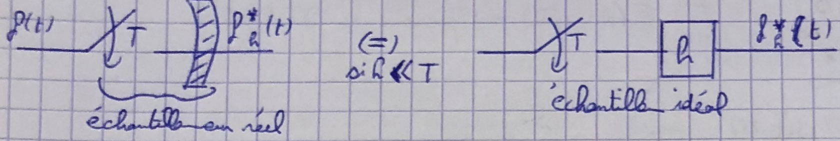
$\mathcal{L}[(\sin(\omega t)) \cdot u(t)]$



⚠ $\mathcal{L}[f_h^*(t)]$ complexe dans le cas général (h et T $\forall$)

Cas particulier $h \ll T$

On montre que $\mathcal{L}[f_h^*(t)] \simeq h \cdot F^*(p)$



$\Rightarrow$ Dans la suite, on suppose toujours l'échantillon idéal.

Mais si on veut tenir compte de la durée de prélèvement h, on peut le faire « après-coup », en multipliant le final par h [si $h \ll T$]

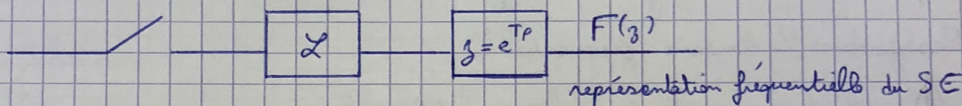
$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot e^{-nTp}$$

changement de variable pour éliminer l'exponentielle $\rightarrow z = e^{Tp}$

$F^*(p)$ devient $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot z^{-n}$

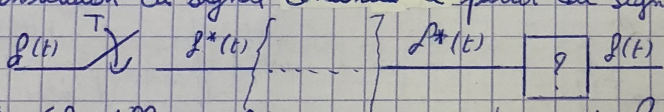
définition de Z

En résumé :



Choix de T ? Théorème de Shannon

Reconstitution du signal continu à partir du signal échantillonné



On échantillonne $f(t)$ pour pouvoir transporter le signal.

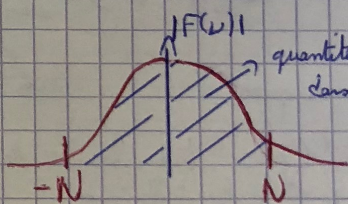
$\rightarrow$ Peut on reconstituer le signal continu à partir du signal échantillonné ? Cela dépend de T

$\rightarrow$ Y a-t-il perte d'informations lors de l'échantillonnage ?

$\rightarrow$ Comment mesurer la quantité d'information contenue dans un signal ?
On utilise le SPECTRE DE FOURIER.

Transformation de Fourier :

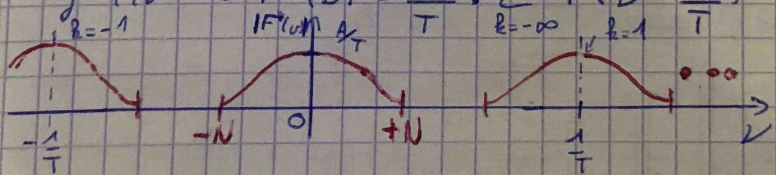
$\left(f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)\right)$ nombres complexes $\qquad f(t) \xrightarrow{F} F(\nu)$ nombre complexe, fréquence réelle



quantité d'informations dans $f(t)$

Spectre de Fourier du signal échantillonné

$$f^*(t) \xrightarrow{F} F^*(\nu) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$



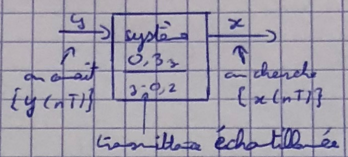
$k=0 \quad \frac{1}{T} F(\nu) \qquad k=1 \quad \frac{1}{T} F\left(\nu - \frac{1}{T}\right)$

L'échantillonnage d'un signal $\Rightarrow$ la recopie de l'information une infinité de fois le long de l'axe fréquentiel (pas intuitif)

On cherche $Z^{-1}[X(z)]$, c'est à dire $\{x(nT)\}$

On suppose connu $Z^{-1}[Y(z)]$, c'est à dire $\{y(nT)\}$

Remarque → Automatique



On s'appuie sur la propriété P2 (théorème du retard)

$$Z[f(t-kT)] = z^{-k} F(z)$$

$$\left[\begin{array}{l} Z[f(t)] = F(z) \\ Z^{-1}\{F(z)\} = \{f(nT)\} \end{array} \right.$$

$$Z^{-1}[z^{-k} F(z)] = \{f[(n-k)T]\}$$

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{0,3}{1-0,2z^{-1}}$$ (on s'arrange pour avoir que des puissances négatives de z)

Z^{-1} $X(z) - 0,2\, z^{-1} X(z) = 0,3\, Y(z)$

$x(nT) - 0,2\, x[(n-1)T] = 0,3\, y(nT)$ équation aux différences du 1er ordre

Se résout si on connait 1 condition initiale

$x(-T) = 0 \Rightarrow$ condition initiale

Notations : $x(nT) = x_n$ $\quad y(nT) = y_n$

$x_n = 0,2\, x_{n-1} + 0,3\, y_n$ $\qquad$ On suppose $y_n = 1$, $\forall n$

n	$0,2\, x_{n-1}$	$0,3\, y_n$	x_n
0	condition 0 initiale	0,3	0,3
1	0,06	0,3	0,36
2	0,072	0,3	0,372

← $Z^{-1}[X(z)] = \{x_n(nT)\} = \{x_n\}$

Remarques :

(1) ⚠ $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} L$?

$$\underset{\downarrow n\to+\infty}{x_n} = 0,2\, \underset{\downarrow n\to+\infty}{x_{n-1}} + 0,3\, \underset{=1}{y_n}$$

$$L = 0,2L + 0,3 \times 1$$

$$0,8L = 0,3 \Rightarrow L = \frac{0,3}{0,8}$$

④ $\mathcal{L}[\sin(\omega t)u(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}u(t)\right] = \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}[e^{j\omega t}u(t)] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}u(t)]\right]$

$\mathcal{L}[\sin(\omega t).u(t)] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right] = \frac{1}{\cancel{2j}}\left[\frac{\cancel{2j}\omega}{p^2+\omega^2}\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Transformation de Laplace : $F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

La méthode la plus courante est la décomposition de $F(p)$ en éléments simples.

Exemple : $F(p) = \frac{2p^2+12p+6}{p(p^2+5p+6)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$?

Décomposition en éléments simples : $p^2+5p+6 = (p+2)(p+3)$

$F(p)$ possède 3 pôles simples $\longrightarrow F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$

On peut trouver A, B, C en identifiant les deux expressions.

On multiplie les 2 membres par p puis on fait $p=0$.

$1 = A$

On multiplie les 2 membres par $p+2$ puis on fait $p=-2$

$\frac{8-24+6}{-2\times 1} = 5 = B$

On multiplie les 2 membres par $(p+3)$, puis on fait $p=-3$

$\frac{18-36+6}{-3(-1)} = \frac{-12}{3} = -4 = C$

$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$

$\mathcal{L}^{-1}$

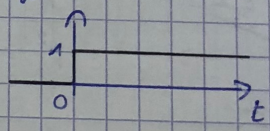
$f(t) = (1+5e^{-2t}-4e^{-3t})\,u(t)$

t	p
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

Résolution d'une équation différentielle linéaire et à coefficients constants à l'aide de $\mathcal{L}$.

$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 12t+20$, $t \geq 0$

$= (12t+20).u(t) \leftarrow$



Condition Initiales nulles

On égale les $\mathcal{L}$ des deux membres.

$\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] + \mathcal{L}[\dot{y}(t)] - 6\,\mathcal{L}[y(t)] = 12\,\mathcal{L}[t\,u(t)] + 20\,\mathcal{L}[u(t)]$

[propriété P1]

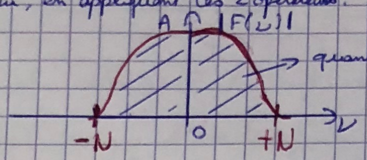
[P3] $p^2.Y(p) + p.Y(p) - 6\,Y(p) = 12.\frac{1}{p^2} + 20.\frac{1}{p}$

$(p^2+p-6) = \frac{12+20p}{p^2}$

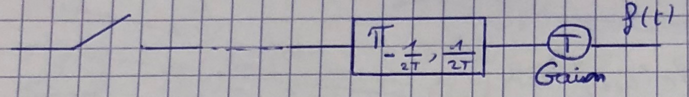
$Y(p) = \frac{12+20p}{p^2(p^2+p-6)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$

Peut-on reconstituer le signal continu à partir du signal échantillonné ?

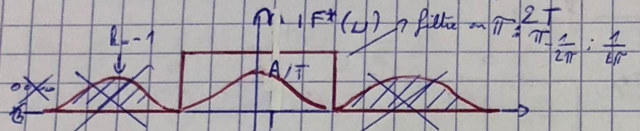
Oui, en appliquant les 2 opérateurs : $\Pi_{-\frac{1}{2T};\frac{1}{2T}}$ et un gain T



→ quantité d'informations contenues dans $f(t)$



Ceci est vrai seulement si : $N < \frac{1}{2T}$ Condition de Shannon



N connu → la condition de Shannon impose un choix de valeur pour $T \rightarrow T < \frac{1}{2N}$

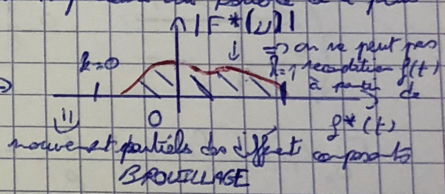
f_e = fréquence d'échantillonnage $= \frac{1}{T}$

$f_e > 2.N$

Théorème de Shannon

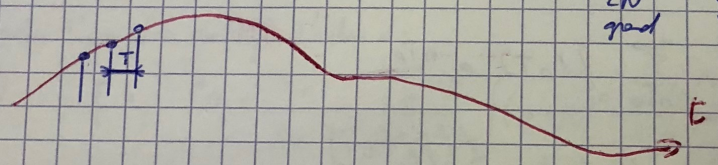
Lorsqu'on échantillonne un signal continu de spectre fréquentiel borné $[-N;+N]$, on ne perd aucune information si la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T}$ est supérieure au double de la plus haute fréquence N contenue dans le signal continu.

Remarque : Si la condition de Shannon n'est pas respectée →

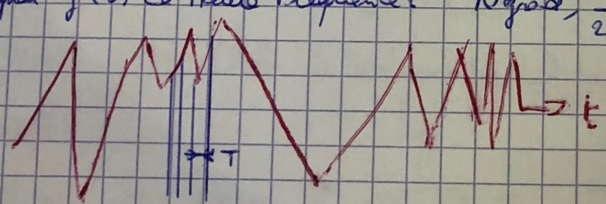


Interprétation physique du théorème de Shannon $T < \frac{1}{2N}$

- Signal $f(t)$ de Basse Fréquence : N petit $\Rightarrow \frac{1}{2N}$ grand $\Rightarrow$ T grand



Signal $f(t)$ de Haute Fréquence : N grand, $\frac{1}{2N}$ petit, T petit



Remarque : en pratique : CD musique, N ? → N = 20 kHz

$f_e > 2 \times 20$ kHz Norme : $f_e \simeq 43$ kHz

Reconstitution approchée du signal continu à partir du signal échantillonné

$$p^2+p-6=(p-2)(p+3)$$

$$\frac{12+20p}{p^2(p-2)(p+3)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+3}$$

* On multiplie par p^2, $p=0$

$-2=A$

* On multiplie par $p-2$, $p=2$

$$\frac{52}{4\times 5}=\frac{13}{5}=C$$

* $(p+3)$, $p=-3$

$$\frac{-48}{9\times(-5)}=\frac{16}{15}=D$$

* On multiplie par p, $p\to+\infty$

$$0=B+C+D \Rightarrow B=-C-D=\frac{-13}{5}-\frac{16}{15}=\frac{-55}{15}=\frac{-11}{3}=B$$

$$p^2+p-6=(p-2)(p+3)$$

$$\frac{12+20p}{p^2(p-2)(p+3)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{p+3}$$

$$Y(p)=\frac{2}{p^2}-\frac{11}{3}\times\frac{1}{p}+\frac{13}{5}\times\frac{1}{p-2}+\frac{16}{15}\times\frac{1}{p+3}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$y(t)=\left(-2t-\frac{11}{3}+\frac{13}{5}e^{2t}+\frac{16}{15}e^{-3t}\right)u(t)$$

$$y(t)=Ae^{2t}+Be^{-3t}-2t-\frac{11}{3}$$

Conditions Initiales nulles:

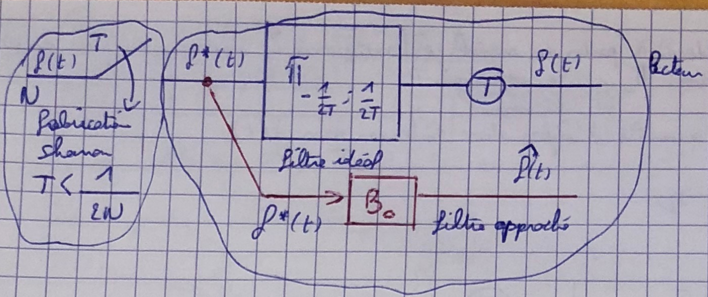
$y(0)=0 \quad \dot{y}(0)=0$

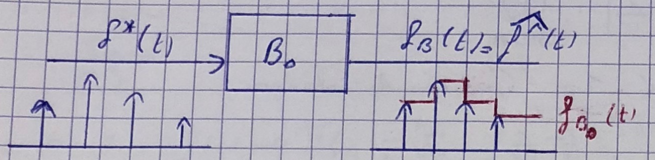
$$\left.\begin{array}{ll} y(0)=0 & 0=A+B-\frac{11}{3} \quad (1) \\ \dot{y}(t)=2Ae^{2t}-3Be^{-3t}-2 & \\ \dot{y}(0)=0 & 0=2A-3B-2 \quad (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=\frac{13}{5} \\ B=\frac{16}{15} \end{array}$$

(1) $0=\frac{13}{5}+\frac{16}{15}-\frac{11}{3}=0$

(2) $0=\frac{26}{5}-\frac{16}{5}-2=\frac{26-16-10}{5}=0$

$\mathcal{L}$ permet de résoudre facilement une équation différentielle linéaire et à coefficients constants lorsque les conditions initiales sont nulles.





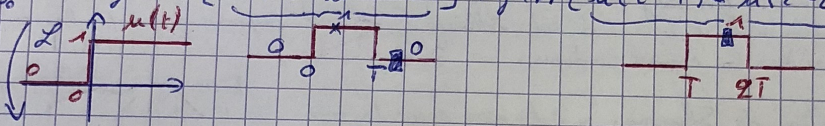
Comportement fréquentiel de B_0 ? $f^*(t)$ → B_0 → $f_{B_0}(t)$

fonction de transfert $= \dfrac{\mathcal{L}(\text{sortie})}{\mathcal{L}(\text{entrée})} = B_0(p) = \dfrac{\mathcal{L}[f_{B_0}(t)]}{\mathcal{L}[f^*(t)]}$

$\mathcal{L}[f_{B_0}(t)]$?

$$\left.\begin{cases} f_{B_0}(t) = f(0) \text{ si } 0 \leq t \leq T \\ f_{B_0}(t) = f(T) \text{ si } T \leq t \leq 2T \end{cases}\right] \mathcal{L} ?$$

$$f_{B_0}(t) = f(0)\,[u(t) - u(t-T)] + f(T)\,[u(t-T) - u(t-2T)] + \dots$$



$$F_{B_0}(p) = f(0)\left[\frac{1}{p} - e^{-Tp} \times \frac{1}{p}\right] + f(T)\left[e^{-Tp} \times \frac{1}{p} - e^{-2Tp} \times \frac{1}{p}\right] + \dots$$

$$F_{B_0}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \times \{ f(0) + f(T).e^{-Tp} + f(2T).e^{-2Tp} + \dots \}$$

$$F_{B_0}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \times \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\, e^{-nTp}$$

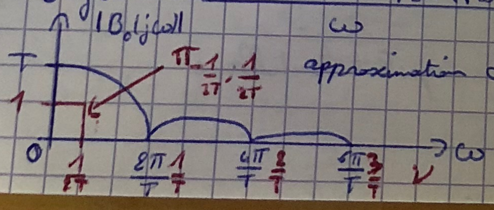
$f^*(t)$ → B_0 → $f_{B_0}(t)$ $B_0(p) = \dfrac{\mathcal{L}[f_{B_0}(t)]}{\mathcal{L}[f^*(t)]}$

$$B_0(p) = \frac{\mathcal{L}[f_{B_0}(t)]}{\mathcal{L}[f^*(t)]} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} = B_0(p)$$

BODE $|B_0(j\omega)|$ en fonction de ω

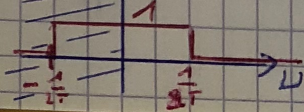
$$|B_0(j\omega)| = \left| \frac{1 - e^{-Tj\omega}}{j\omega} \right| = \left| \frac{1 - \cos T\omega + j \sin T\omega}{j\omega} \right|$$

$$|B_0(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - \cos(T\omega))^2 + \sin^2(T\omega)}}{\omega} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos T\omega}}{\omega} = |B_0(j\omega)|$$



approximation de filtre idéal

$\omega = 2\pi.\nu$ $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$



Mathématique du Signal

Livre : Automatique de base, Patrick Siarry Édition Ellipses

Deux sortes de signaux :

- Continus : $f(t)$, t = temps
- Discrets / Échantillonnées $f(kT)$ k = entier, T = période d'échantillonnage

Deux espaces :

Temporel	fréquentiel
On dispose les signaux	On traite les signaux

Cas Continus $t \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} p$

$\mathcal{L}$ = transformation de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$ = passage de p à t

Cas échantillonné : $kT \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} z$ Z = transformation en Z

Signaux continus

Rappel de Maths :

I) Équation différentiel linéaire à coéfficients constants

Exemple : $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 12t + 20$ (Inconnue : $y(t)$, t = temps)

Méthode de résolution classique en 2 étapes :

a) On considère l'ESSM (équation sans second membre) : $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 0$

On cherche la solution générale, sous la forme : $y(t) = e^{rt}$ r?

$\dot{y}(t) = re^{rt}$ $\ddot{y}(t) = r^2 e^{rt}$

$(\underbrace{r^2 + r - 6}) e^{rt} = 0$ $r^2 + r - 6 = 0$ (équation caractéristique)

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$r_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2} = 2$ $r_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2} = -3$

La solution générale de l'ESSM est $y(t) = A.e^{2t} + Be^{-3t}$. A et B dépendent des 2 conditions initiales.

b) On considère l'EASM (équation avec second membre)

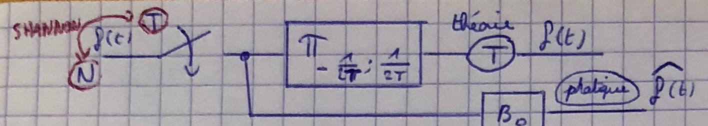
On cherche une solution particulière

Exemple : $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 12t + 20$

Solution particulière de la forme $y(t) = at + b$ a, b?

$\dot{y}(t) = a$ $\ddot{y}(t) = 0$

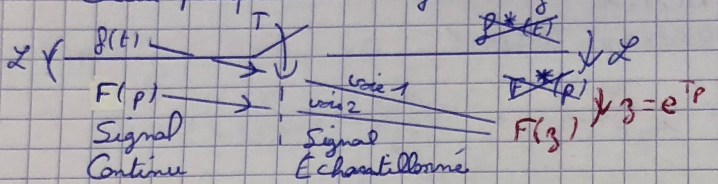
$a - 6at - 6b = 12t + 20$



B_0 réalise bien un approximation du filtre idéal, savoir du gain T

Transformation en Z / Transformation en Z inverse

Calcul pratique d'une transformée en z



Voie 1 : $f(t) \longrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot z^{-n}$

Voie 2 : $F(p) \longrightarrow F(z) = \sum_{\substack{\text{sur les} \\ \text{pôles } p_i \text{ de } F(p)}} \text{Résidus de } \frac{F(p)}{1-e^{Tp} \cdot z^{-1}}$

En pratique, on fait la liste des pôles p_i de $F(p)$: → pôles SIMPLES
→ pôles MULTIPLES D'ORDRE n

Exemple :

$$F(p) = \frac{(2p+5)(p-7)^2}{(p+3)(5p+12)^3}$$

* 2 zéros $\begin{cases} p_1 = -\frac{5}{2} & \text{zéro simple} \\ p_2 = 7 & \text{zéro multiple d'ordre 2} \end{cases}$

* 2 pôles $\begin{cases} p_3 = -3 & \text{pôle simple} \\ p_4 = -\frac{12}{5} & \text{pôle multiple d'ordre 3} \end{cases}$

Voie 1 : $f(t) \longrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \cdot z^{-n}$ (1)

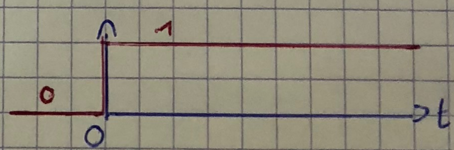
Résidu d'un pôle simple : $r_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \times \frac{1}{1-e^{Tp_i} z^{-1}}$ (2a) en posant $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, $D'(p) = \frac{d(D(p))}{dp}$

Résidu d'un pôle multiple d'ordre n :

$$F(z) = \sum_i r_i \qquad r_i = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left\{ (p-p_i)^n \frac{F(p)}{1-e^{Tp} z^{-1}} \right\} \right]$$

Application :

$f(t) = u(t) =$ échelon de Heaviside



$F(p) = \frac{1}{p}$

t	p	z
u(t)	$\frac{1}{p}$	?

$f(t) = u(t) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(nT) \cdot z^{-n}$ ($u(nT) = 1$)

$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n$

$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

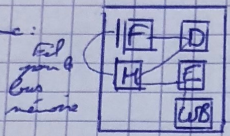
$|x| < 1 \Rightarrow 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ série géométrique de raison x

$F(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

TLB flush à chaque fois qu'il y a un nouveau process, en fait chaque fois qu'il y a un changement d'adresse space, ça évite de tenter de réaccéder à une ancienne adresse.
↳ cache pour la pagination

Un processeur fait : fetch : il va chercher l'instruction
decode : il decode l'instruction
exec : il exécute l'instruction
memory : on lit et on écrit en mémoire
writeback : on rend les valeurs de retour

On a donc :



Pipeline	Fetch	Decode	Exec	Mem	Writeback
Unité de temps d'exécution	1	2	1	4	1
	1				
	2	1			
	3	2	1		

Pour aller plus vite, on splite donc les unités de temps par exemple en découpant mem, décode et même les autres, cela augmente le nombre d'étage sur le pipeline. Un des problèmes qui survient c'est la surchauffe, il y a aussi des problèmes sur l'exécution, par exemple avec jump car il peut y avoir déjà des autres instructions dans le pipeline.

Basic Block : portion entre le début d'une instruction et un jump

On peut aussi avoir un prédicteur de branchement pour savoir où seront les problèmes et changer le code pour s'adapter.

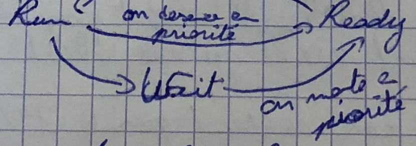
Quand j'ai une tâche CPU Bound, j'ai envie qu'elle tourne plus longtemps, alors qu'une IO Bound c'est moins longtemps mais souvent.

Suite à ces puissances élevées mais qui chauffent beaucoup trop, ils se sont tournés vers des ~~plus~~ petits cœurs mais avec plusieurs cœurs.

IO Bound : je veux un waiting time faible et un quantum élevé
CPU Bound : je veux un waiting time élevé et un quantum élevé

On peut détecter si on est en CPU Bound ou IO Bound en checkant le quantum, quantum rapide CPU, quantum lent voir ne s'arrête pas IO.

Avec Round Robin :



Sur Linux la stack graphique est userland, alors que sur Windows, c'est in Kernel, on peut donc savoir si c'est monté, ... Du coup si tu installes à tâche de fond, c'est plus lent sur Windows