Graphes, réseaux, flots

Problème de transport optimal

On te donne la matrice des coûts unitaires :

	1	2	3	4	5	6	
I	12	27	61	49	83	35	18
II	23	39	78	28	65	42	32
III	67	56	92	24	53	54	14
IV	71	43	91	67	40	49	9
	9	11	28	6	14	5	73

Quantités disponibles (a_i)

Qtt demandées (b_j)

$m = 4$
$n = 6$

On cherche $[X]$ où x_{ij} = qtt transportée de i vers j.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \forall i = 1 \dots m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \forall j = 1 \dots n \end{cases} \longrightarrow \boxed{z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot a_j}$$

On cherche ici le coût $\boxed{\text{minimal}}$.

Dans $[X]$ on doit avoir $n + m - 1 = 9$ valeurs non nulles.

1. Algo de Balas-Hammer

	1	2	3	4	5	6		Δ_ℓ
I	12	27	61	49	83	35	18	15
II	23	39	78	28	65	42	32	5
III	67	56	92	24	53	54	~~14~~ 8	29
IV	71	43	91	67	40	49	9	3
	9	11	28	6	14	5	73	
Δ_c	11	12	17	4	13	7		

- On calcule les Δ_ℓ et Δ_c : prendre la différence de la plus petite valeur et celle juste au-dessus.
- On choisit le + gd Δ : $\Delta_{III} = 29$.
- Dans cette rangée on prend la plus petite valeur : 24.
- $[X]_{III,4} = \min(\Delta_{c_4} ; \Delta_{\ell_{III}}) = \min(6 ; 14) = 6$.

$[X] =$

	1	2	3	4	5	6
I			18			
II	9	11	7			5
III			3	6	5	
IV					9	

- On a choisit Δ_{c4}, donc on supprime la colonne 4.
- On actualise le $a_{III} \rightarrow 14 - 6 = 8$.
- On recommence :

	1	2	3	5	6		
I	12	27	61	83	35	18	15
II	23	39	78	65	42	32	16
III	67	56	92	53	54	8	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
	9	11	~~28~~ 10	14	5	67	
	11	12	17	13	7		

=>

	1	2	3	5	6		
II	23	39	78	65	42	~~32~~ 23	16
III	67	56	92	53	54	8	1
IV	71	43	91	40	49	9	3
	9	11	10	14	5	49	
	44	4	13	13	7		

	2	3	5	6		
II	39	78	65	42	23	3
III	56	92	53	54	8	1
IV	43	91	40	49	9	3
	11	10	~~14~~ 5	5	40	
	4	13	13	7		

=>

	2	3	5	6		
II	39	78	65	42	~~23~~ 12	3
III	56	92	53	54	8	1
	11	10	5	5	31	
	17	14	12	12		

	3	5	6		
II	78	65	42	~~12~~ 7	23
III	92	53	54	8	1
	10	5	5	20	
	14	12	12		

=>

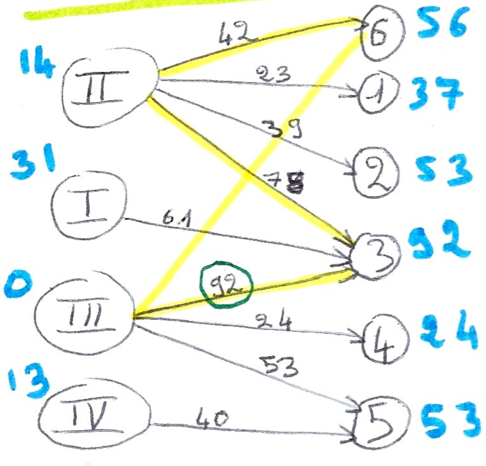
	3	5		
II	78	65	7	13
III	92	53	~~8~~ 3	39
	10	5	15	
	14	12		

=>

	3	
II	78	7
III	92	3
	10	

$\Rightarrow z = 18 \times 61 + 9 \times 23 + 11 \times 39 + \ldots = 3535.$

2. Recherche du plan de transport optimal



→ Prendre les liens de [X] et les valeurs de A.

- Trouver la plus grosse valeur : 92.
  ↳ mettre le potentiel 0 à son origine.
  ↳ autres potentiels : $V_j - V_i = C_{ij}$

- On cherche s'il existe une liaison absente ayant un coût marginal < 0 :

$$\boxed{\delta_{ij} = v_i - v_j + c_{ij}}$$

$\delta_{I,1} = 31 - 37 + 12 = 6$

$\vdots$

$\delta_{III,6} = 0 - 56 + 54 = -2$ → pas optimal !

- Chemin III, 6 à faire.

$$\mathrm{III} \xrightarrow[3]{0} 6 \xleftarrow[2]{5} \mathrm{II} \xrightarrow[10]{7} 3 \xleftarrow[0]{3} \mathrm{III}$$

valeur de [X].

- On prend la qtt déplaçable maxi. (cf graphe jaune).

→ III, 3 : 92.

- $\alpha = 3$.
  ↳ on ajoute α aux arcs à l'endroit.
  ↳ on retranche α aux arcs à l'envers.

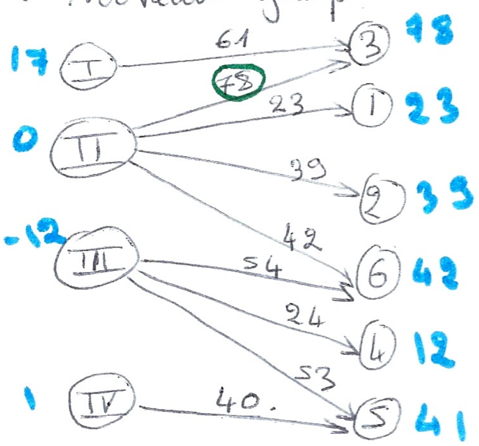
- Nouveau [X] :

	1	2	3	4	5	6
I			18			
II	9	11	10			2
III			0	6	5	3
IV					9	

- Nouveau z : $z = 3535 - \underbrace{\alpha\, \delta_{III,3}}_{3 \times -2}$

$z = 3529$.

- Nouveau graphe :



Tous les $\delta_{i,j}$ sont positifs.
↳ Plan de transport optimal !

Si il existe un ou plus $\delta_{ij} = 0$, optimum non unique.

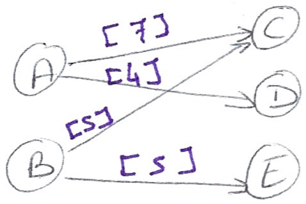
Coût de transport total = 3529.

Problème de flot optimal

• Flots (Algo de Ford-Fulkerson).

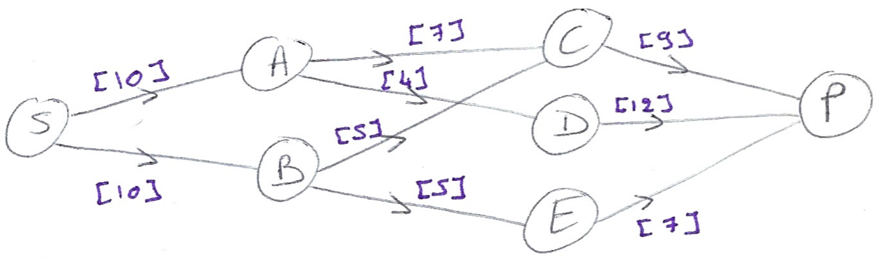
Une certaine marchandise X est disponible dans 2 ports A et B selon les quantités 10 et 10. Elle est attendue dans 3 ports C, D et E selon les quantités 9, 12 et 7.

On a :



(lignes maritimes).
[...] : capacité de transport c(u).

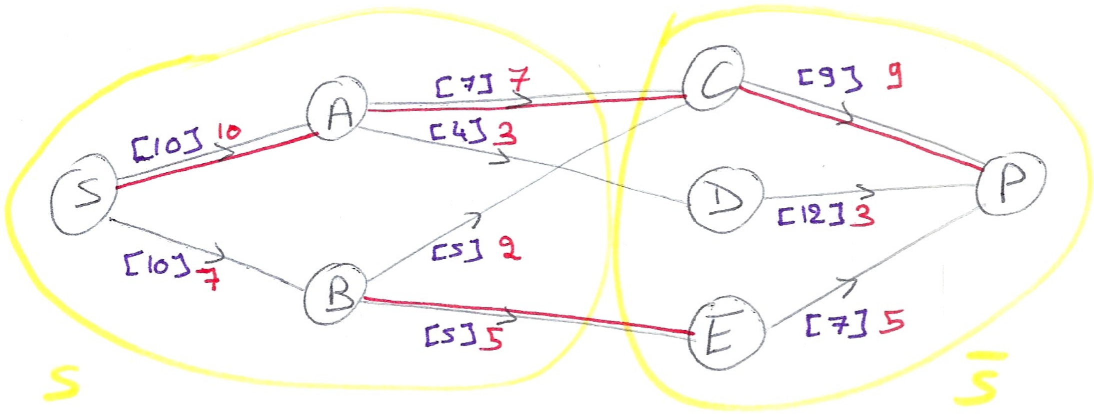
• On ajoute la source et le puits. On met les capacités connus.



• On cherche un flot de valeur maximale.

$\boxed{\text{Flot}}$ sur le réseau de transport = une fonction f qui associe à tout arc u une valeur, le FLUX, $f(u)$ tq :

- $\forall u,\ 0 \leq f(u) \leq c(u)$.
- Loi de Kirshoff : $\sum_{\text{entrants}} f(u) = \sum_{\text{sortants}} f(u)$.



→ Sature (A;C) : 7.
→ Sature (C;P) : 9.
→ Kirshoff en C : 2 sur (B;C). 2 < 5 : ok. Sinon on change le 7.

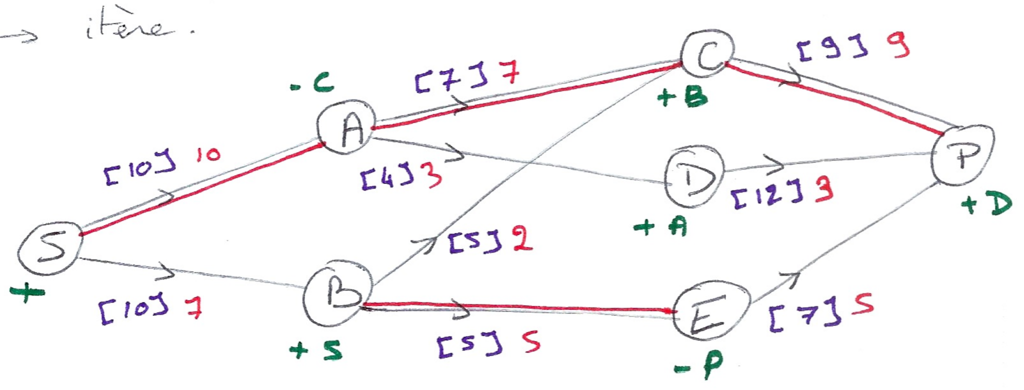
→ Sature $(S;A)$.
→ Kirshoff en A puis en D.
→ Sature $(B;E)$
→ Kishoff en E puis B.

- Tout chemin de S à P a au moins un arc saturé : c'est cool !
- Valeur du flot :

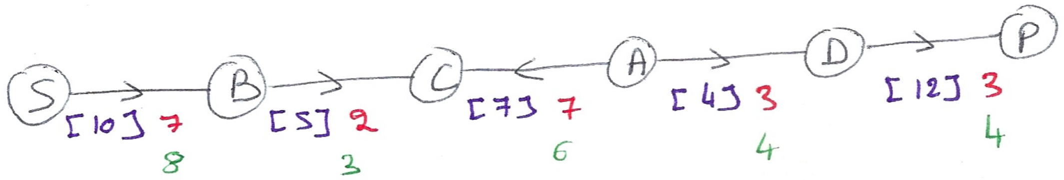
$$Val(\varphi) = \underbrace{10 + 7}_{\text{à la source}} = \underbrace{9 + 3 + 5}_{\text{au puits}} = 17.$$

$$Val(\varphi) = \underbrace{7 + 3 + 2 + 5}_{\varphi(S;\bar{S})} - \underbrace{0}_{\varphi(\bar{S};S)} = 17.$$

- Marquage.
  → On met un **+** à coté de S.
  → On marque l'extremité terminale $(I;J)$ <u>non saturé</u> où I est <u>marqué</u> : **+I** à côté de J.
  → On marque l'extremité initiale K de $(K;L)$ de flux <u>non nul</u>, dont L est déjà marqué : **-L** à côté de K.
  → itère.



- Si P est marqué : flot pas optimal.
  → on identifie les sommets le long de la "chaîne augmentante" de P vers S :



→ $\alpha = \min\Big[\underset{\text{à l'endroit}}{\min\,(c(u) - f(u))} \;;\; \underset{\text{à l'envers}}{\min\, f(u)} \Big].$

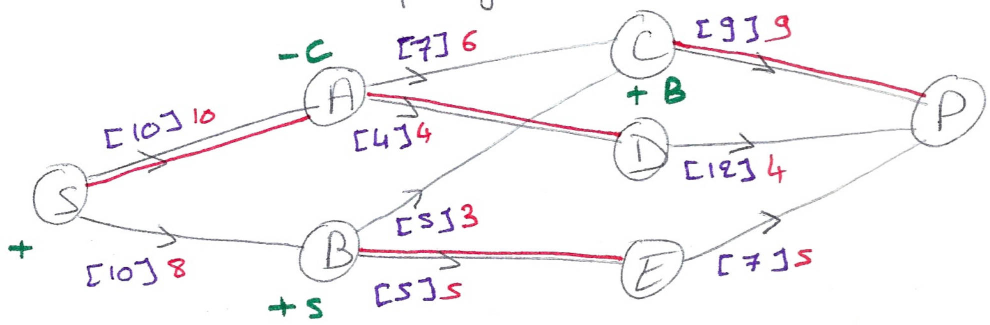
$\alpha = \min\big(\min(10-7 \;;\; 5-2 \;;\; 4-3 \;;\; 12-3) \;;\; 7\big).$

$\boxed{\alpha = 1}$

→ $Val(f) = 17 + 1$

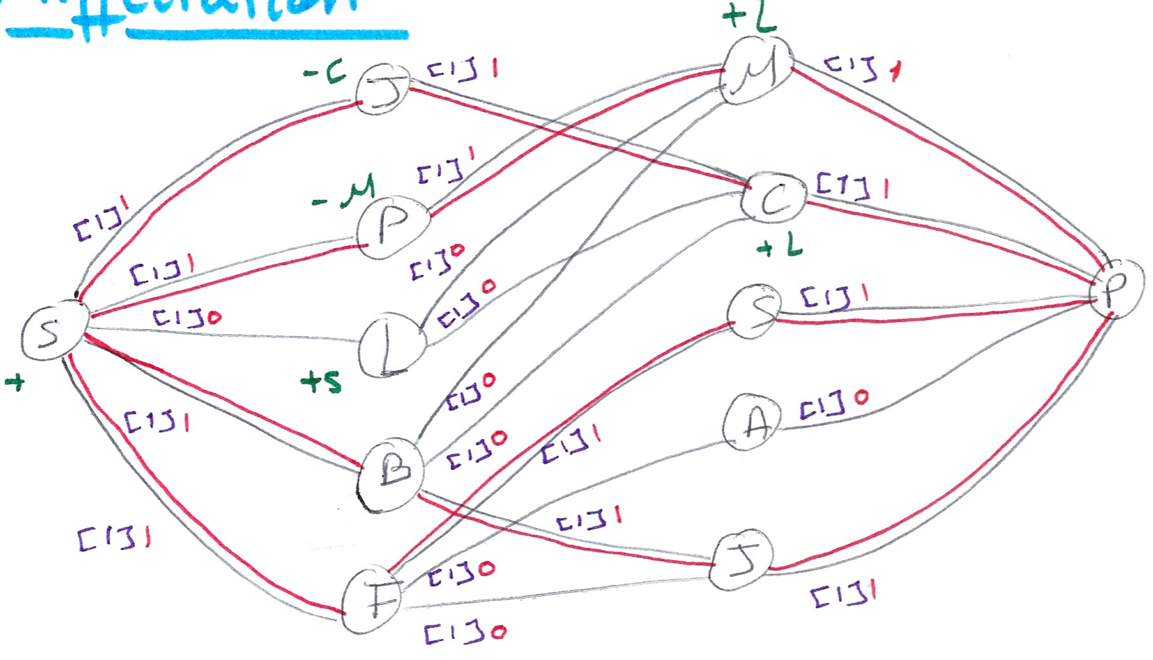
$Val(f) = 18.$

→ Nouveau marquage :



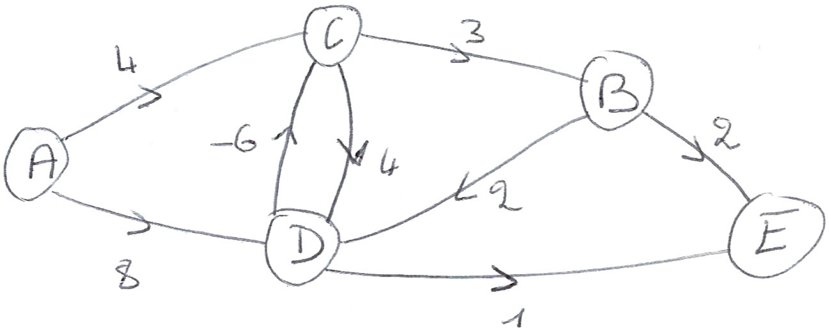
Flot optimal. $\boxed{Val(f) = 18.}$

• Affectation



Recherche du chemin optimal

(méthode matricielle).



- Numeroter les sommets
- Initialisation D_0 et Π_0.

$\rightarrow (D_0)_{ij} = v_{ij}$ si $(i;j)\ \exists$.

$= -\infty$ sinon.

$\rightarrow (\Pi_0)_{ij} = i \quad \forall j$.

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & 4 & 8 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 2 & 2 \\ -\infty & 3 & -\infty & 4 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -6 & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \qquad \Pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Itération jusqu'à $(D_m; \Pi_m)$. Ici, $m = 5$.

$\rightarrow$ Pour avoir $(D_{k+1})_{ij}$ on prend $\max\{(D_k)_{ij}; x\}$, avec x = somme du $k+1^{\text{ème}}$ terme de la ligne et du $k+1^{\text{ème}}$ terme de la colonne.

$\rightarrow (\Pi_{k+1})_{ij} = (\Pi_k)_{k+1\, j}$ ssi $\max\{(D_k)_{ij}; x\} = x$.

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & 4 & 8 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 2 & 2 \\ -\infty & 3 & -\infty & 4 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -6 & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}. \qquad \Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & 4 & 8 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 2 & 2 \\ -\infty & 3 & -\infty & 5 & 5 \\ -\infty & -\infty & -6 & -\infty & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \qquad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} -\infty & 7 & 4 & 9 & 9 \\ -\infty & -\infty & -\infty & 2 & 2 \\ -\infty & 3 & -\infty & 5 & 5 \\ -\infty & -3 & -6 & -1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}. \qquad \Pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} -\infty & 7 & 4 & 9 & 10 \\ -\infty & -1 & -4 & 2 & 3 \\ -\infty & 3 & -1 & 5 & 6 \\ -\infty & -3 & -6 & -1 & 1 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}. \qquad \Pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$D_5 = D_4 \Rightarrow \Pi_5 = \Pi_4$.

- On cherche le plus long chemin entre A et E :

  $\rightarrow (D_n)_{15} = 10$.

  $\rightarrow$ On crée la chaîne de E vers A : Dans (Π_n), on lit le prédecesseur de E en $(\Pi_n)_{15}$: j'. On lit ensuite le prédecesseur de j' en $(\Pi_n)_{ij'}$.

$$A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{2} D \xrightarrow{1} E.$$

Si on voulait le plus court chemin :

$\rightarrow \quad -\infty \Rightarrow +\infty$.

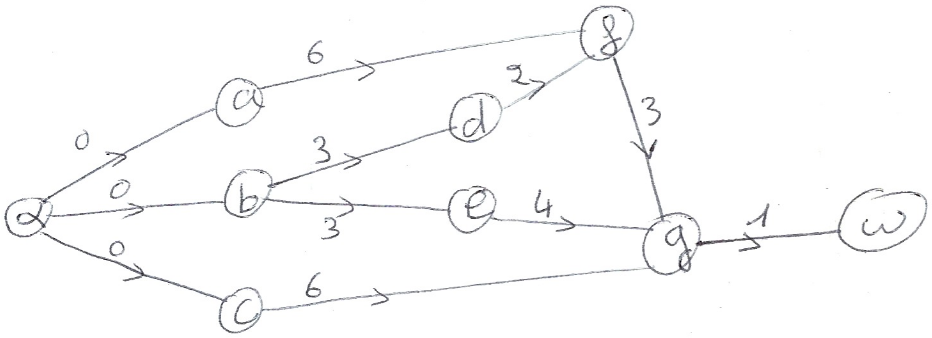
max $\Rightarrow$ min.

Ordonancement de projets

Tâches	Durées	Contraintes
a	6	
b	3	
c	6	
d	2	b achevé
e	4	b achevé
f	3	d et a achevés
g	1	f, c et e achevés

On cherche $\boxed{\text{l'ordonancement au plus tôt}}$ → chemin de valeur max, entre α et ω.

- Faire le graphe
  → ajouter le début α et la fin ω.



- Algo de Bellmann.

le max

Tâches	α 0	a 0	b 0	c 0	d 3	e 3	f 6	g 9	ω 10
Prédecesseurs		0 α 0	0 α 0	0 α 0	0 b 3	0 b 3	0 a 6 3 d 2	0 c 6 3 e 4 6 f 3	9 g 1

Durée.
Date au plus tôt.

Durée minimale du projet : 10.

→ chemin critique : $\alpha \xrightarrow{0} \underbrace{a \xrightarrow{6} f \xrightarrow{3} g}_{\text{tâches critiques}} \xrightarrow{1} \omega$.

- On cherche $\boxed{\text{l'ordonancement au plus tard}}$, en supposant que la durée minimale est respectée.

le min

Tâches	α (0)	a (0)	b (1)	c (3)	d (4)	e (5)	f (6)	g (9)	ω (10)
Successeurs	0 a 0 1 b 0 3 c 0	6 f 6	4 d 3 5 e 3	9 g 6	6 f 2	9 g 4	9 g 3	10 ω 1	

Durée.
Date de début au plus tard.

On le récupère.

- Tâches critiques :

$t^*_a = t_a$, $t^*_f = t_f$, $t^*_g = t_g$.

au + tard — au + tôt.

- Tâches non critiques :

$t^*_b = 1$, $t^*_c = 3$, $t^*_d = 4$, $t^*_e = 5$.

→ Marge totale $M_i = t^*_i - t_i$.

↳ Durée dont on peut retarder la tâche i sans csq sur la durée du projet minimale.

$M_b = 0$, $M_c = 3$, $M_d = 1$, $M_e = 2$.

→ Marge libre $m_i = \min\limits_{j \in \Gamma(i)} (t_j - t_i - v_{ij})$

successeurs de i.

↳ durée dont on peut retarder i sans csq sur toutes les tâches ultérieures.

- m_b ? $(b;d)$ et $(b;e)$.

$m_b = \min(t_d - t_b - 3 \,;\, t_e - t_b - 3)$

$= 0$.

- m_e ? $(e;g)$

$m_e = t_g - t_e - 4$

$m_e = 2$.