P.L. 1

Programmation linéaire

I. Rappels d'algèbre linéaire

- Déterminant
- Cofacteur
- Inversion d'une matrice
- Vecteurs indépendants / libres
- Modélisat° d'un pb optimisat° sous la forme d'un P.L.
- Résolut° d'un P.L. à 2 D → résolut° graphique
  - ↳ Principe de l'algo du "Simplexe"

1. Déterminant

p 120

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \det A = |A| = 3 \times 5 - (-2) \times 4)$$
$$= 23$$

2. Factorisat°

$$\begin{vmatrix} h & h \\ 4 & 2h \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2h \end{vmatrix} \text{ ou bien } \begin{vmatrix} h & h \\ 4 & 2h \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} 1 & h \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Déterminant d'ordre n, (n>2)

Développement par rapport à la 1ère colonne :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Autre Méthode : Développement par rapport à la 2e colonne

$$-0 \times \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 7 = 21$$

Propriété : Pour faire apparaître des zéros :
On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant n'importe quelle ligne ou colonne par elle m̂ + une combinaiso° linéaire des autres lignes ou colonnes.

$$\begin{array}{ccc} \times 2 & \times 0 & \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \leftarrow \text{faire apparaître un } 0.$$

⇒ On remplace la 3e colonne par elle m̂ plus 2 fois la 1ère colonne.

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{On développe / 2e ligne : } -1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = +8$$

4. Cofacteur d'un élément d'une matrice

C'est le sous déterminant précédé du bon signe

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{Cofacteur}(a_{23}) = \ominus \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Rq : 7 ne fait pas partie du cofacteur.

Matrice de cofacteurs cof A est obtenue en remplaçant tous les élémts de A par leurs facteurs

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

5. Inverse d'une matrice :

C'est la matrice A^{-1} : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

ex : $A^{-1} = \dfrac{\text{cof}(A)}{\det(A)}$, transposée → on permutte ligne et colonne

Exercice :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$
→ Calculer son inverse
→ det(A) ! det(A) = 0 ?
→ cof(A) ? , $\text{cof}(A)^t$ → A^{-1}

$\det(A) = 2$ ⇒ A^{-1} existe

$$\text{cof}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5_ Vecteurs indépendants / Vecteurs liés

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (u_1, v_1, w_1) forment-ils une base dans $\mathbb{R}^3$? st-ils indépdts

$$\det(u_1 | v_1 | w_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ u_1, v_1, w_1 sont indépendants ssi $\det(u_1\, v_1\, w_1) \neq 0$

Ici $\det(u_1 v_1 w_1) = 0$, les 3 vecteurs sont donc liés et ne forment pas une base.

On peut écrire n'importe lequel de ces 3 vecteurs comme une combinaison linéaire des deux autres.

ex : $w_1 = \alpha u_2 + \beta v_1$

$$\left.\begin{aligned} 8 &= \alpha + 2\beta \\ -7 &= \alpha - 3\beta \end{aligned}\right\} \ominus \qquad 15 = 2\beta + 3\beta = 5\beta \Rightarrow \boxed{\beta = 3}$$

$$1 = -\alpha + \beta \qquad \alpha = 8 - 2\beta \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

En revanche, u_2, v_2 et w_2 sont-ils indépendants :

$$\det(u_2\, v_2\, w_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$

$\Rightarrow$ ils forment donc une base dans $\mathbb{R}^3$

II - Programmation Linéaire

Tout problème d'optimisation qui s'exprime linéairement en fonction des variables x_i de décision.

2 Parties :

- fonction objectif z qui est à Minimiser/Maximiser.
- contraintes à respecter concerne les inconnues

P.L. → | Et les contraintes et la fct objectif | s'expriment linéairement en fct des variables de décision.

→ ces PB sont très fréquents

→ On sait les résoudre → algo du simplexe

Exemple : Modélisat° d'un pb de P.L.

pb concret ⟺ P.L.

Modélisat° → Ex p 121

* variables de décision ? x_i
* fct obj à Minimiser ou à Maximiser
* contraintes ?
* fcts obj et contraintes

) linéaires /x

6 Variables de décision → inconnus !

* Contraintes

- Main d'oeuvres : $0{,}75x1 + 0{,}5x2 \leq 4.40 + HS$
- temps machine : $1{,}5x1 + 0.8x2 \leq 320$
- Matière Première : $2x1 + X2 \leq MP$

$MP \leq 400$

$X1 \leq 50 + 10.PUB1$

$X2 \leq 60 + 15.PUB2$

$PUB1 + PUB2 \leq 100$

P.L. 2

Rq: les variables de décisions sont ≥ 0 (tjrs vrai en PL)

* fonctions objectifs

Max z = bénéfice chiffres de vente couts variables

$z = \underbrace{15.X1 + 8X2}_{\text{chiffres de vente}} - \underbrace{(6.HS + 1,5.MP + PUB1 + PUB2)}_{\text{couts variables}}$

$\Rightarrow$ PL à 6 inconnus ?

END

* PL en 2 dimension $\Rightarrow$ résolut° graphique $\Rightarrow$ principe de l'algo du simplexe.

x_1 = fract° de tonnes produit 1 (orge)

x_2 = fract° " " " 2 (arachides)

x_3 = fract° " " " 3 (sesame)

$\Rightarrow$ 3 variables de décision

① $12.x_1 + 52.x_2 + 42.x_3 \geq 22$ | Contraintes

② $2.x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 3,6$ | d'inégalité

③ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ | Contrainte d'égalité.

z est donc à minimiser car on cherche le coût le plus faible

$z = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3$

Grâce à la contrainte d'égalité, on peut se ramener à un Pb en deux dimension. Par exemple $x_1 = 1 - x_2 - x_3$

$\Rightarrow$ ① $12(1-x_2-x_3) + 52x^2 + 42x^3 \geq 22$

$40x^2 + 30x^3 \geq 10 \Rightarrow 4x^2 + 3x^3 \geq 1$

$\Rightarrow$ ② $2(1-x_2-x_3) + 2x_2 + 10x_3 \geq 3,6$

$8x^3 \geq 3,6 \Rightarrow x_3 \geq 0,2$

En notant :

$1-x_2-x_3 \geq 0$ et $x_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 + x_3 \leq 1$

Minimisat° $z = 25(1-x_2-x_3) + 41x_2 + 39x_3$

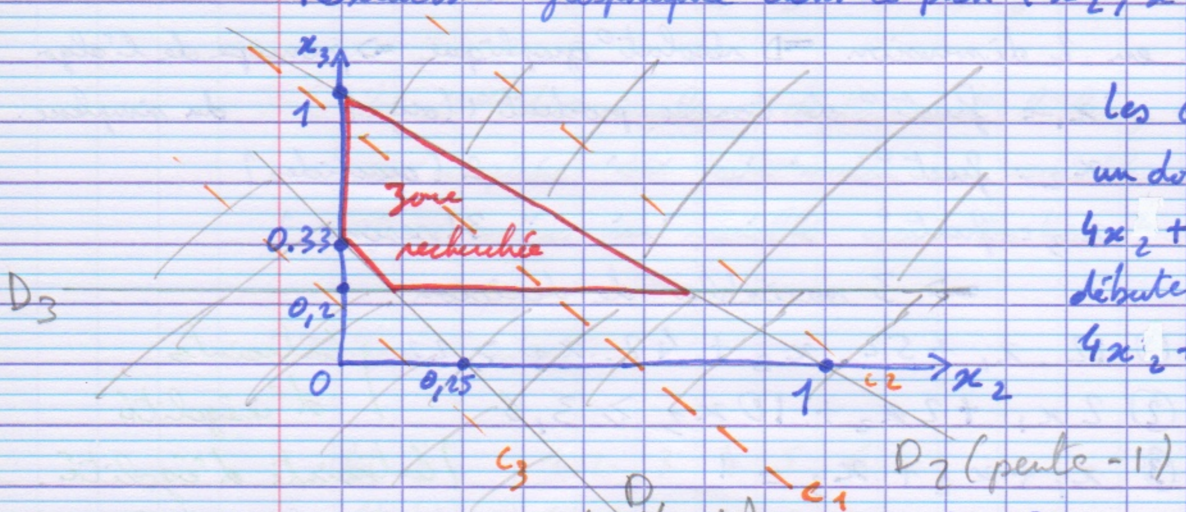
$z = 16x_2 + 14x_3 + 25$

$z = 2\underbrace{(8x^2 + 7x^3)}_{z'} + 25$

PL en 2D ⇒ $\left\| \begin{array}{l} 4x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_3 \geq 0,2 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{array} \right\|$ $x_2, x_3 \geq 0$

Min $z' = 8x_2 + 7x_3$

Résolution graphique dans le plan (x_2, x_3) :



Les contraintes définissent un domaine réalisable D

$4x_2 + 3x_3 \geq 1$ ⇒ 2 plans délimités par une droite $4x_2 + 3x_3 = 1$ D_1

$x_3 \geq 0,2$ ⇒ D_3 (pente $-\frac{4}{3}$) $x_2 + x_3 = 1$ ⇒ D_2 $c_3 < c_1 < c_2$

On s'intéresse à l'ensemble des points du plan pour lesquels z' à une valeur donnée, par ex c.

$z' = 8x_2 + 7x_3 = c$ ⇒ droite ISO-COUT

pente : $y = ax + b$

$x_3 = -\frac{8}{7}x_2 + \frac{2}{7}$ ⇒ pente $= -\frac{8}{7}$ (cf graph)

On cherche le point du plan (x_2, x_3) tel que

1- On respecte ttes les contraintes

2- On minimalise z'

⇒ l'ISO-COUT c_3 est hors domaine.

Plus généralement, dans un espace de domaine n

- D = délimité par le simplexe
- Min z' → sur un sommet du simplexe

⇒ $x_3 = 0,2$ ⇒ $4x_2 + 3x_3 = 1$ ⇒ $x_2 = 0,1$ ⇒ $x_1 = 0,7$

$z' = 8x_2 + 7x_3 = 2,2$ ⇒ $z = 2z' + 25 = 29,4$

→ Solution : 1 sommet du simplexe dans le cas le plus général.
→ Cas particulier (cas dégénéré) → infinité de solution
↳ Ttes celles qui st une arête du S.

Principe général de l'algo du simplexe

Rq: On ne peut pas calculer z en chacun des sommet, et retourner le meilleur des éléments (nb de sommets ↗, on ne connait pas forcément les coordonnées du sommet).

(1) Recherche du sommet initial
(2) Déplacement le long d'une arête, pour aller vers un sommet meilleur → une itération

Algorithme du Simplexe

Exemple : Soit le programme de programmat° linéaire suivant :

* $x_1, x_2, x_3 \leq 1000$
* $80x_1 + 95x_2 + 90x_3 \leq 90000$
* $x_1 - x_2 - x_3 \leq 100$

(Rappel : $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, c'est une règle d'or en prog. linéaire)

Max $f = z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$

* 1ère étape : Recherche du Sommet initial (2 cas de figures : simple ou non)
Test de démarrage → Test d'origine
prenons $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, les contraintes sont elles satisfaites ?
On est dans un cas simple car ça fonctionne.

* 2e étape : recherche du sommet optimal à partir du sommet d'origine
On introduit les variables d'écart pour transformer les inégalité en égalité. $\varepsilon_i \geq 0$

$$(\mathcal{S}) = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ 80x_1 + 95x_2 + 90x_3 + x_5 = 90\,000 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 100 \end{cases}$$

→ Sommet initial : $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

$x_4 = 1000,\ x_5 = 90\,000,\ x_6 = 100$

L'itérat° du simplexe, déplacement le long d'une arête du simplexe ⟺ faire sortir une variable de la base et faire entrer une variable dans la base.

Tableau initial :

c_i	i		1	2	3	4	5	6	
0	4		1	1	1	1	0	0	10000
0	5		80	95	90	0	1	0	90000
0	6		1	-1	-1	0	0	1	100
		c_j	10	8	7	0	0	0	
		Δ_j	10	8	7	0	0	0	0 ← g

Itération du simplexe :

* Var entrée : celle associée au plus grand Δ_j
  ↳ ici x_1
* Var sortie : celle associée au plus petit rapport > 0
  ↳ ici : x_6
* Nouvelle ligne du pivot

On divise les nb par les pivots

ℓ_6 : 10 1 1 -1 -1 0 0 1 100

PL 3

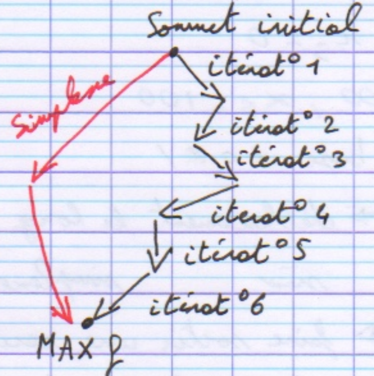
Problème t. s

MAX f ← fonction objectif, linéaire
x_i

Var de de décision ↗ $\{$ ⟵ Sous la contrainte de

Résolution 2D :

Contraintes ⟺ être à l'intérieur d'un certain domaine D.



Principe de l'algo du simplexe :

(1) Recherche d'un sommet initial

(2) Recherche de sommet optimal par itération successive → chaque itération modifie f jusqu'au point d'arrêt

Algo du Simplexe → formalisme de tableau

Exercice :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000 \\ 80x_1 + 95x_2 + 90x_3 \leq 90\,000 \\ x_1 - x_2 - x \leq 100 \end{cases}$$

règle d'or : x_1, x_2 et $x_3 \geq 0$

MAX $f : z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3$

* 1er étape : recherche du sommet initiale

2 cas : → simple (cas standart)

→ non simple

- Test de démarrage → test de l'origine

$x_1 = x_2 = x_3$ ⟹ contrainte satisfaisante

Si oui ⟹ cas simple → démarrage à partir du sommet de l'origine

PL (3)

* 2e étape : recherche du sommet à partir du sommet origine

- On introduit des variables d'écart pour transformer les inégalités en égalité

(1) $\to x_4$ tq $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000$

(2) $\to x_5$ tq $80x_1 + 95x_2 + 90x_3 + x_5 = 90\,000$

(3) $\to x_6$ tq $x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 100$

≥ 0

Application : - Sommet initial : $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x_4 = 1000$, $x_5 = 90000$, $x_6 = 100$

/* variable de base $\neq 0$ */

↳ Itérat° du simplexe $\Leftrightarrow$ déplacement le long d'une arête du simplexe

$\Leftrightarrow$ faire sortir une variable de la base et faire entrer une variable dans la base.

Variable | de sortie ?
| d'entrée ?

→ On associe à chaque sommet du simplexe un tableau

→ Sommet origine $\Leftrightarrow$ 1er tableau

-Tableau initial :

c_i	i	1	2	3	4	5	6		rapport
0	4	1	1	1	1	0	0	1000	$\frac{1000}{1}$
0	5	80	95	90	0	1	0	90 000	$\frac{90\,000}{80}$
0	6	1	-1	-1	0	0	1	100 → s	$\frac{100}{1}$
	c_j	10	8	7	0	0	0		
	Δ_j	10	8	7	0	0	0	$\boxed{0}$	

↑ e

C_j définie : $z = \sum_i c_i x_i$

coefficient : $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 7$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 0$

$z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

PL 4

⇑ Itérat° du simplexe : déplacement le long d'une arête pour aller vers un autre sommet ⇗

-> Est-ce qu'on peut aller à un autre sommet ? / est on à l'optimum ?

↳ NON, car il y a au moins un $\Delta_j \geq 0$

-> Il faut donc itérer une variable d'entrée (celle associée au plus grand $\Delta_j > 0$, ici x_1)

-> Il faut également une variable de sortie (celle associée au plus petit rapport > 0, ici x_6)

- On calcule la nouvelle ligne du pivot :

c_i	i									
10	1	1	-1	-1	0	0	1	1	0	0

nouvelle variable de base

On divise tous les membres par le pivot (ici 1)

- Nouvelle ligne de la variable x_4 :

ancienne ligne :	0 4	1	1	1	1	0	0	1 000
		1	-1	-1	0	0	1	100
ancienne ligne ⊖ (nouvelle ligne × terme encadré sur la colonne d'entrée)	0 4	0	2	2	1	0	-1	900

ici c'est 1

- Nouvelle ligne de la variable x_5 :

ancienne ligne :	0 5	80	85	90	0	1	0	90 000
$-(\times 80$		1	-1	-1	0	0	1	100 $)$
=	0 5	0	175	170	0	1	-80	82 000

- Nouvelle ligne Δ_j :

ancienne ligne :	10	8	7	0	0	0	0	← z
$-(\times 10$	1	-1	-1	0	0	1	100)	
$= \Delta_j$	0	18	17	0	0	-10	1000	

⚠ Pour le calcul de z, on remplace le ⊖ par un ⊕

- Nouveau tableau :

c_i	i	1	2	3	4	5	6		
0	4	0	2	2	1	0	0	900	$\frac{900}{28}$
0	5	0	175	170	0	1	0	82000	$\frac{82000}{195}$
10	1	1	-1	-1	0	0	1	100	$\frac{100}{10} \to 5$
	c_j	10	8	7	0	0	0		
	Δ_j	0	18	17	0	0	-10	100 ← z	

↑e (colonne 2)

- Valeurs des variables associé à ce sommet :

*BASE → $x_4 = 900$

$x_5 = 82\,000$

$x_6 = 100$

Valeurs de z = 1000

$z = 10\underbrace{x_1}_{=100} + 8\underbrace{x_2}_{=0} + 7\underbrace{x_3}_{=0} = 1000$

*HORS BASE $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

→ Le nouveau sommet est meilleur (0 au départ, 1000 maintenant)

→ Le nouveau sommet n'est pas optimal car $\Delta_j > 0$.

- Nouveau Tableau

c_i	i	1	2	3	4	5	6	
8	2	0	1	1	0,5	0	-0,5	450
0	5	0	0	-5	-87,5	1	7,5	3250
10	1	1	0	0	0,5	0	0,5	550
	c_j	10	8	7	0	0	0	
	Δ_j	0	0	-1	-9	0	1	9100

Nouveau Sommet :
$x_1 = 550,\ x_2 = 450,\ x_3 = 0,\ x_4 =$
$x_5 = 3250,\ x_6 = 0$

$z = 9\,100$

objectif atteint car > 1000

et on s'arrête car $\Delta_j < 100$

PL (5)

Démarrage du Simplexe :

* 1er cas : test de l'origine ⟹ s'il est positif, on fait le démarrage standart à partir de l'origine.

* 2e cas : test de l'origine ⟹ s'il est négatif ⟹ plusieurs technique

Exemple :
$$\begin{cases} x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 + x_2 \geq 20 \end{cases}$$

règle d'or : x_1 et $x_2 \geq 0$

$$\text{MAX } z = 2x_1 + 3x_2$$

Test de l'origine : $x_1 = x_2 = 0$

↳ Contrainte non respectée à cause de la 4e ligne = contrainte gênante

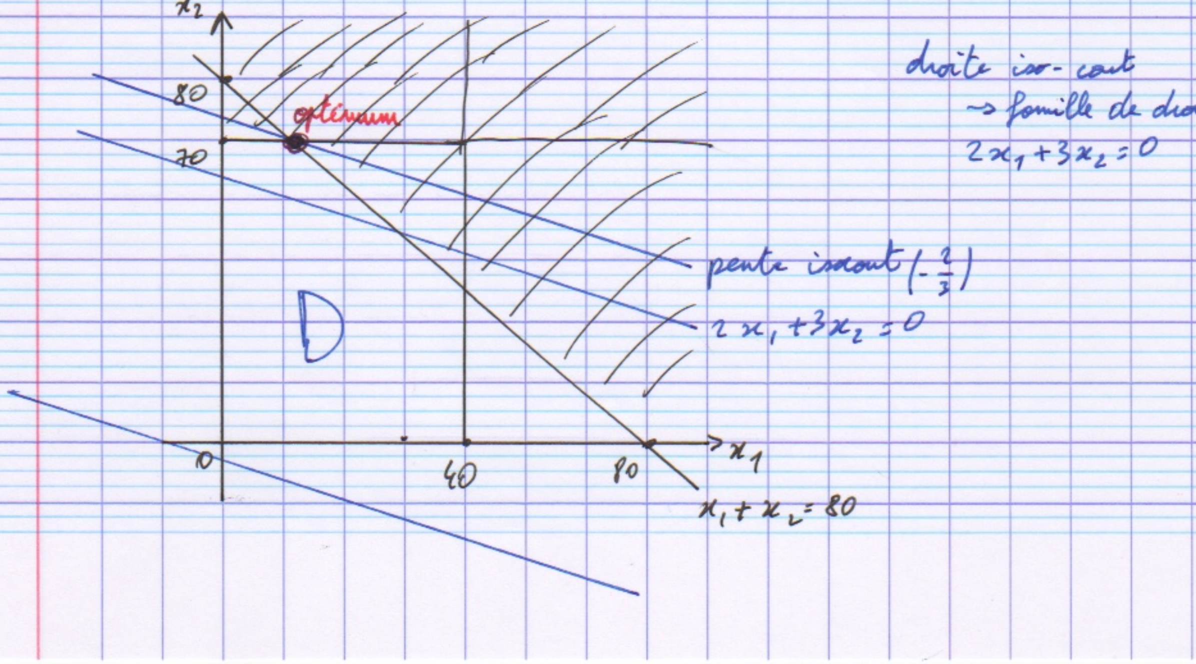
⟹ On tente alors de résoudre le sous problème de PL obtenu en supprimant la contrainte gênante

⟹
$$\begin{cases} x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \end{cases}$$

$\text{MAX } z = 2x_1 + 3x_2$

x_1 et $x_2 \geq 0$

Ici on fait une résolution graphique :



- Pour chaque c, on a une droite ISO-COUT différente
- Toutes les droites iso-cout ont la m̂ pente

$$y = \underset{\uparrow}{a}\,x + b$$

pente $= -\frac{2}{3}$

$$x_2 = -\frac{2}{3} x_1 + \frac{c}{3}$$

- L'Optimum du PL réduit est $x_1^* = 10$ et $x_2^* = 20$

*On revient sur le PL de départ :

(1) L'optimum réduit respecte la contrainte gênante $(x_1 + x_2 \geq 20)$
On a gagné car l'optimum du PL réduit est aussi l'optimum du PL complet.

(2) L'optimum du PL réduit ne respecte pas la contrainte gênante, on a perdu, on ne sait pas quel est l'optimum du PL complet.

Remarque : Inconvénient de la Méthode :

(1) On risque de travailler pour rien. On ne le sait qu'après avoir résolu le PL réduit.

(2) Cette méthode n'est à tenter que si le nombre de contrainte gênante est de 1 ou 2

PL ⑥

Rappel :

- Méthode des tableaux

  itérat° du simplexe :

  cas standard -> démarrage à partir de l'origine

- 1ère technique de démarrage non standard

  -> supression de la contrainte génante

  = peut marcher ou non !

- 3 autres techniques

  * 2è technique de démarrage à partir d'un sommet quelconque, réalisable et de base.

    Peut servir dans deux cas :

    (1) démarrage à partir de l'origine non possible

    (2) démarrage à partir de l'origine possible mais on ~~ne~~ connait un meilleur sommet (par ex : donné par un expert)

  * Méthode des Variables artifficielle
  * Méthode du PL DUAL

Exemple : s.c.

$$\left\| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \end{array} \right. \qquad \text{MAX} : z = x_1 + x_2 \quad (x_1, x_2 \geq 0)$$

-> "Test de l'Origine" -> $x_1 = x_2 = 0$

les 3 contraintes sont vérifiées par l'origine

-> Démarrage Standard

- solut° initiale préparée $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 1$

- pour servir de Sommet Initial, cette solut° doit vérifier 2 condit°

  (A) Admissibilité -> toutes les variables | de décisions / d'écart | associées au sommet sont ≥ 0

  variables d'écarts :

$$\left\| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x + 2x_2 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \end{array} \right.$$

Calculons x_3, x_4 et x_5

$$\left\| \begin{array}{l} x_3 = 8 - 3 \times \frac{7}{3} - 1 = 0 \\ x_4 = 6 - \frac{7}{3} - 2 = \frac{5}{3} \\ x_5 = 9 - 3 \times \frac{7}{3} - 2 = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ La solut° proposée pour le démarrage est admissible

(B) De Base $\rightarrow$

(b1) nb de variables > 0 au moins égal au nb de contrain

- solut° initiale proposée : $x_1 = \frac{7}{3}$; $x_2 = 1$

(nb de contraintes = 3) - ici $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 1$ et $x_4 = \frac{5}{3}$

Remarque : On aurait pu avoir

$\rightarrow x_3 = x_4 = x_5 = 0 \rightarrow 2$ variables > 0 seulement

$\Rightarrow$ la solut° n'est pas de base

$\rightarrow x_3 = 0$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 4 variables $> 0 \Rightarrow$ OK, plusieurs bases possibles

(b2) (x_1, x_2, x_4) est une base ssi

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{array} \right. \end{array} \Rightarrow \det(B) \neq 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \end{array} \right.$$

$$\det(B) = 0 \left| \quad \right| - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \left| \quad \right| = -3 \neq 0$$

Remarque : si on avait eu $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 1$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = \frac{1}{3}$

Une base est constituée de 3 variables seulement

0 = nb de contraintes

4 bases candidates : (x_1, x_2, x_4), (x_1, x_4, x_5), (x_2, x_4, x_5)

Il suffit d'avoir $\det B \neq 0$ l'une au moins des 4 ~~contra~~ vari.

PL 7

Le sommet $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 1$, $x_4 = \frac{5}{3}$ vérifie les condit° A, b_1 et b_2 $\Rightarrow$ peut servir de sommet initial pour le simplexe.

1er tableau tiré de l'équat° :

$$\left\| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \end{array} \right.$$

$I x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b$ (équat° matricielle)

x_B = vecteur de base $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, x_N = vecteur des variables hors bases $= \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \text{matrice id}, \ b : \text{second membre}$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(\text{cof } B)^t}{\det(B)}, \quad B^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} \quad \text{et } \det(3) = -3$$

$$B^{-1} N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad \frac{32}{3} + \frac{18}{3} - \frac{45}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3} x_3 - \frac{1}{3} x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ \frac{4}{3} x_3 + x_4 - \frac{5}{3} x_5 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1er tableau associé au sommet initiale qui vérifie A, b_1 et b_2

→ colone pivot = + grand Δ_j

Pour déterminer ligne pivot, prendre + petit rapport positif entre elt colone pivot et elt dernière ligne

BASE

c_i	i	1	2	3	4	5		rapport
1	1	1	0	$2/3$	0	$-1/3$	$7/3$	$7/2$
1	2	0	1	-1	0	1	1	-1
0	4	0	0	$4/3$ (pivot)	1	$-5/3$	$5/3$	$5/4$
	c_j	1	1	0	0	0		
	Δ_j	0	0	$1/3$	0	$-2/3$	$\frac{10}{3}$	

$\Delta_j = c_j - \sum_i c_i x_{ij}$

$0-\left(\frac{2}{3}-1\right)$

$0-\left(-\frac{1}{3}+1\right)$

$z = x_1 + x_2 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{10}{3}$

MAX $z = x_1 + x_2 = \sum_j c_j x_j$

$1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

→ 1 itérat° du simplexe

* est-on à l'optimum ?
* sinon : variables d'entrées ? → + grand Δ_j positif

  variable de sortie ? → + petit rapport positif

  pivot ?

  nouveau tableau :

1: pivot ligne
ancienne ligne / pivot
les autres lignes :
ancienne ligne − elt pivot * nouvelles ligne pivot

pour z : remplacer − par +

1	1	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	$3/2$
1	2	0	1	0	$3/4$	$-1/4$	$9/4$
0	3	0	0	1	$3/4$	$-5/4$	$5/4$
	c_j	1	1	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	$-1/4$	$-1/4$	$15/4$

$\frac{10}{3} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{3}$

$\frac{10}{3} + \frac{5}{12}$

A-t-on progressé ? ⇒ z passé de $\frac{10}{3}$ à $\frac{15}{4}$

Vérif : $z = x_1 + x_2 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$

Opti atteinte ? oui $\Delta \leq 0$

PL ⑧

* 3e technique de démarrage lorsque l'origine n'est pas réalisable → Méthode des variables artificielles (aussi appelé méthode du "GRAND M")

* Exemple : MAX $z = x_1 + 2x_2$

$$\text{S.C.} \left| \begin{array}{l} x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{array} \right. \quad \text{et } x_1, x_2 \geq 0$$

Test de l'origine → $x_1 = x_2 = 0$ ⇒ non OK, Pb avec lignes 2 et 3
⇒ l'origine n'est pas réalisable → Pb de démarrage

Principe de la méthode des VA:

→ On force le démarrage à partir de l'origine, et on pénalise la fonction objectif, pour forcer l'algo à retourner dans le domaine réalisable.

→ On introduit une VA. pour chaque contrainte non respectée par l'origine.

→ Par ailleurs, une variable d'écart pour chaque contrainte d'inégalité

On a donc besoin de deux variables d'écart :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_{\underline{1}} = 1 \\ x_1 + x_2 - x_{\underline{2}} + x_{\underline{\underline{2}}} = 6 \\ -x_1 + x_2 - x_{\underline{\underline{3}}} = 3 \end{array} \right|$$

MAX $z = x_1 + 2x_2 - Mx_{\underline{\underline{2}}} - Mx_{\underline{\underline{3}}}$ $\qquad$ $x_{\underline{1}} = 1$; $x_{\underline{\underline{2}}} = 6$; $x_{\underline{\underline{3}}} = 3$

les VA sont tj dans la base initi

M: nb positif et "grand"

z initial $= -9M$ $\qquad$ très mauvais

l'algo du Simplexe, qui cherche à MAXIMISER z, va s'efforcer d'annuler les VA, ce qui revient à retourner dans le domaine réalisable.

1er tableau

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$		rapport
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	1	∞
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	1	1	0	-1	1	0	6	6
$-M$	$\bar{\bar{3}}$	1	1	0	0	0	1	3	3 → ligne pivot
	c_j	1	2	0	0	$-M$	$-M$		
	Δ_j	1	$2+2M$	0	$-M$	0	0	$-3M$	
			↑ e						

$$\Delta_j = c_j - \sum_j c_i x_{ij}$$

On n'est pas à l'optimisat° car on n'a pas $\Delta_j \leq 0, \forall j$

$\Rightarrow$ il faut itérer le simplexe

Nouveau tableau :

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$			rapport
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	0	1		$1 \to S$
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	2	0	0	-1	1	-1	3		$1,5$
2	2	-1	1	0	0	0	1	3	$*(2+2M)$	-3
	c_j	1	2	0	0	$-M$	$-M$			
e →	Δ_j	$2M+3$	0	0	$-M$	0	$-2M-2$	$-3M+6$		
		↑								

$1-(-1)(2+2M)$

On n'est toujours pas à l'opti, donc nouveau tableau :

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	
1	1	1	0	1	0	0	0	1
$-M$	$\bar{\bar{2}}$	0	0	-2	-1	1	-1	1
2	2	0	1	1	0	0	1	4
	c_j	1	2	0	0	$-M$	$-M$	
	Δ_j	0	0	$-2M-3$	$-M$	0	$-2M-2$	$9-M$ ← 3

$\Delta_j \leq 0$ donc c'est optimum,

PL 9

$x_1 = 1$, $\bar{\bar{x}}_2 = 1$, $x_2 = 4$, $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{\bar{x}}_3 = 0$

$$z = \underbrace{x_1 + 2x_2}_{9} - \underbrace{M\bar{\bar{x}}_2}_{-M} \underbrace{-M\bar{\bar{x}}_3}_{0}$$

Optimum atteint, mais 1VA est restée dans la base :

$\bar{\bar{x}}_2 = 1$

$\Rightarrow$ PB INSOLUBLE

interprétat° :

$x_1 + x_2 \geq 6$

$-x_1 + x_2 = 3$

$x_1 + (x_1 + 3) \geq 6 \Rightarrow 2x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 \geq \frac{3}{2}$

PB

PL (10)

Algo du Simplexe :

-> Cas standart -> démarrage à partir de l'origine

-> Cas non standart -> 4 techniques de démarrage

(1) tentative de laisser de coté provisoirement la contrainte génante

(2) démarrage à partir d'un sommet réalisable et de base

(3) méthode des variables artificielle

(4) méthode du DUAL

Méthode du DUAL :

[PL ayant n variables x_i et m contraintes]$_{\text{PRIMAL}}$ $\Leftrightarrow$ [P.L. DUAL ayant m variable y_i et n contraintes]$_{\text{DUAL}}$

=> Si on a réalisé un, alors on a réalisé l'autre

Exemple :

$$\text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 27 \\ 2x_2 \leq 10 \end{cases}$$

règle d'or : x_1 et $x_2 \geq 0$

MAX : $z = 36x_1 + 24x_2$

-> Test de l'origine ? $x_1 = x_2 = 0$ => démarrage standart

$$\begin{cases} 3x_1 + x_{\bar{1}} = 16 \\ x_1 + x_2 + x_{\bar{2}} = 27 \\ 2x_2 + x_{\bar{3}} = 10 \end{cases}$$

-> Base standart, trois variables d'écart

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$		rapport
0	$\bar{1}$	3	0	1	0	0	16	16/3
0	$\bar{2}$	1	1	0	1	0	27	27
0	$\bar{3}$	0	2	0	0	1	10	∞
	c_j	36	24	0	0	0		
	Δ_j	36	24	0	0	0	0	

← ligne du pivot car rapport le plus petit

seulement démarrage standart

Variable d'entrée car la plus grande

z

Nouveau Tableau :

C_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$			rapport
36	1	1	0	1/3	0	0	16/3	×36	∞
0	$\bar{2}$	0	1	-1/3	1	0	65/3		65/3
0	$\bar{3}$	0	2	0	0	1	10		5 → Δ
	C_j	36	24	0	0	0			
	Δ_j	0	24	-12	0	0	192		
			↑ e				↖ z		

→ Vérificat° de z :

$x_1 = 16/3$, $z = 36x_1 + 24x_2 = 192$, $x_2 = 0$

On a progressé mais ce n'est pas optimum

Rappel :

→ pour obtenir la nouvelle ligne du pivot : ancienne ligne divisé par le chiffre du pivot

→ ensuite on soustrait les autres lignes à la nouvelle du pivot pour obtenir les nouvelles (on prend l'ancienne 2e − nouveau pivot = nouveau 2e

Nouveau Tableau

C_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$		
36	1	1	0	1/3	0	0	16/3	
0	$\bar{2}$	0	0	-1	1	-1/2	50/3	
24	2	0	1	0	0	1/2	5	×24
	C_j	36	24	0	0	0		
	Δ_j	0	0	-12	0	-12	312	

Vérificati° de z :

$x_1 = \frac{16}{3}$, $z = 36x_1 + 24x_2 = 312$, $x_2 = 5$

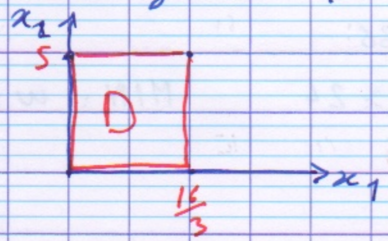
On a progressé et c'est opti car $\Delta_j \leq 0$ donc on s'arrête

PL 11

Remarque : Résolut° graphique :

$$\left|\begin{array}{l} 3x_1 \leq 16 \rightarrow x_1 \leq \frac{16}{3} \\ \cancel{x_1 + x_2 \leq 27} \\ 2x_2 \leq 10 \rightarrow x_2 \leq 5 \end{array}\right. \quad x_1 + x_2 = \frac{16}{3} + 5 = \frac{31}{3} < 27$$

MAX: $z = 36x_1 + 27x_2$



Règles de passage au Dual :

* PRIMAL à deux variables x_1 et x_2 et 3 contraintes
* DUAL à trois variables y_1, y_2 et y_3 et 2 contraintes

Règles du DUAL :

1. Mettre le Primal sous la forme standart de passage au DUAL
   → $\boxed{\text{Toutes inégalités} \leq \text{fonctions objectifs MAX}}$

2. Les coefficients des contraintes du DUAL se lisent sur les colonnes du PRIMAL (1er membre)

$$3y_1 + y_2 + 0y_3 \geq 36$$
$$0y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 24$$

3. Les contraintes du DUAL sont $\geq$

4. Les seconds membres des contraintes du DUAL sont les coeffici[ents] de la fonction objectif z du PRIMAL.

5. Les coefficients de la fonction objectif w du DUAL sont les second membres des contraintes du PRIMAL.

PRIMAL

$$\begin{cases} 3x_1 \leq 16 \rightarrow x_1 \leq \frac{16}{3} \\ x_1 + x_2 \leq 27 \\ 2x_2 \leq 10 \rightarrow x_2 \leq 5 \end{cases}$$

MAX : $z = 36x_1 + 24x_2$

DUAL

s.c. $\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 36 \\ y_2 + 2y_3 \geq 24 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$

MIN : $w = 16y_1 + 27y_2 + 10y_3$

Tableau optimal du DUAL :

$$3y_1 + y_2 - y_{\bar{1}} = 36$$
$$y_2 - y_{\bar{2}} = 24$$

MAX $\| \; w' = -w$
$= -16y_1 - 27y_2 - 10y_3$

car l'algo du simplexe ne sait que Maximiser

C_i	i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
-16	1	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	12
-10	3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	12
	C_j	-16	-27	-10	0	0	
	Δ_j	0	$-\frac{50}{3}$	0	$-\frac{16}{3}$	-5	-312

$$\begin{cases} x_{\bar{i}}^* = -\Delta y_i^* \\ \Delta x_i^* = -y_{\bar{i}}^* \\ \Delta x_{\bar{i}}^* = -y_i^* \end{cases}$$

$z^*_{PRIMAL} = -w_{DUAL} = 312$
$w' = -312$

Quand on est à l'optimum du PRIMAL, on est aussi à l'optimum du DUAL et on a les relations i : $x_i^* = -\Delta y_{\bar{i}}^*$

$x_1^* = \frac{16}{3}$ | $x_{\bar{2}}^* = \frac{50}{3}$ | $x_2^* = 5$ | $x_{\bar{3}}^* = 0$ | $x_{\bar{1}}^* = 0$

$\Rightarrow \Delta y_{\bar{1}}^* = -\frac{16}{3}$ | $\Delta y_2^* = \frac{-50}{3}$ | $\Delta y_{\bar{2}} = -5$ | $\Delta y_3^* = 0$ | $\Delta y_1^* = 0$

$\Delta x_1^* = 0$, $\Delta x_2^* = 0$, $\Delta x_{\bar{1}}^* = -12$

$\Delta x_{\bar{2}}^* = 0$, $\Delta x_{\bar{3}}^* = -12$

$y_{\bar{1}}^* = 0$, $y_{\bar{2}}^* = 0$, $y_1^* = 12$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 12$

On complete le tableau sur la feuille d'avant.

Pour obtenir la ligne 1, on prend la colonne $\bar{x}_1$:

$$\begin{array}{c} \bar{1} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{array}} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \bar{1} & 2 & \bar{2} \end{array} \\ 1 & \boxed{\begin{array}{ccc} -1/3 & 1/3 & 0 \end{array}} \end{array}$$

Exercice de Révision : p 126, n° 3

(1) $\underline{\text{MIN}}$ $z = x_1 + 2x_2$

$$\text{s.c} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 3 & (1) \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 & (2) \end{cases}$$

⇒ Resoudre ce Pb avec l'algo du Simplexe

avec x_1 et $x_2 \geq 0$

Test de l'origine : $x_1 = x_2 = 0$

la contrainte (1) n'est pas satisfaite mais la deuxième oui

⇒ méthode des variables artificielles

⚠ Piège : Il s'agit d'une minimisat° alors que l'on ne fait que des maximisat°, donc on la change :

$\underline{\text{MAX}}$: $z' = -x_1 - 2x_2 - M.x_{\bar{\bar{1}}}$

$$\text{s.c} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_{\bar{1}} + x_{\bar{\bar{1}}} = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_{\bar{2}} = 4 \end{cases}$$

1er tableau :

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$		rapport
$-M$	$\bar{\bar{1}}$	2	3	-1	0	1	3	3/3 → s
0	$\bar{2}$	3	1	0	1	0	4	4/1
	c_j	-1	-2	0	0	M		
	Δ_j	$-1+2M$	$-2+3M$	$-M$	0	0	$-3M$ ← z'	
			↑ e					

Rappel : $\Delta_j = c_j - \sum_i c_i \, x_{ij}$

Nouveau tableau

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$		
-2	2	$2/3$	1	$-1/3$	0	$1/3$	1	
0	$\bar{2}$	$7/3$	0	$-1/3$	1	x	3	→ s
	c_j	-1	-2	0	0	x		
	Δ_j	$1/3$	0	$-2/3$	0	x	-2	
		↑ e						

x → la variable artificielle est sortie de la base donc inutile de calculer

$z' = \underset{0}{-x_1} \; \underset{1}{-2x_2} \; \underset{0}{-M.x_{\bar{\bar{1}}}}$

PL 13

Nouveau tableau :

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	
-2	2	0	1	$-3/7$	$-2/7$	x	$1/7$
-1	1	1	0	$1/7$	$3/7$	x	$9/7$
	c_j	-1	-2	0	0	M	
	Δ_j	0	0	$-5/7$	$-1/7$	x	$\frac{-11}{7}$

Vérificat° :

$$z' = \underbrace{-x_1}_{-\frac{9}{7}} \underbrace{-2x_2}_{-\frac{1}{7}} \underbrace{-M.x_{\bar{\bar{1}}}}_{0}$$

$$= -\frac{11}{7}$$

OPTIMUM :

$$x_1^* = \frac{9}{7} \quad , \quad x_2^* = \frac{1}{7}$$

$$(z')^* = -\frac{11}{7} \Longrightarrow z^* = \frac{11}{7}$$

(2) sc
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \leq -3 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

MAX $z' = -x_1 - 2x_2$

PRIMAL forme standart de passage au DUAL

2 Variables x_1 et x_2 $\Longleftrightarrow$ 2 variables y_1 et y_2

2 contraintes 2 contraintes

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 \geq -1 \\ -3y_1 + 2y_2 \geq -2 \end{cases}$$

MIN $w = -3y_1 + 4y_2$

DUAL

$$2y_1 - 3y_2 \leq 1$$
$$3y_1 - 2y_2 \leq 2$$

MAX $w' = 3y_1 - 4y_2$

DUAL en forme standart

(3) Donner le tableau optimal du DUAL

$2y_1 - 3y_2 + y_{\bar{1}} = -1$

$3y_1 - y_2 + y_{\bar{2}} = 2$

$x_1^* = \frac{9}{7} \Rightarrow \Delta y_{\bar{1}}^* = -9/7$

$x_{\bar{2}}^* = \frac{1}{7} \Rightarrow \Delta y_{\bar{2}}^* = -1/7$

$x_{\bar{1}}^* = x_2^* = 0 \Rightarrow \Delta y_1^* = \Delta_2^* = 0$

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	
3	1	1	0	$-1/7$	$3/7$	$5/7$
-4	2	0	1	$-3/7$	$2/7$	$1/7$
	c_j					
	Δ_j	0	0	$-\frac{9}{7}$	$-1/7$	$11/7$
				(1)	(2)	w'

$\Delta x_2^* = \Delta x_1^* = 0 \rightarrow y_{\bar{1}}^* = y_{\bar{2}}^* = 0$

$\Delta x_{\bar{1}}^* = -5/7 \rightarrow y_1^* = \frac{5}{7}$

$\Delta x_{\bar{2}}^* = -1/7 \rightarrow y_2^* = \frac{1}{7}$

$w^*_{DUAL} = z'_{PRIMAL} = \frac{-11}{7}$

(1)
$$\begin{array}{c|c} & \bar{1} \\ \hline 2 & -\frac{3}{7} \\ 1 & -1/7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & \bar{2} & \bar{1} \\ \hline 1 & 3/7 & -1/7 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{c|c} & \bar{2} \\ \hline 2 & -2/7 \\ 1 & 3/7 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \bar{2} & \bar{1} \\ \hline 2 & 2/7 & -3/7 \end{array}$$

(4) On modifie la fonct° objectif z du PRIMAL

$$MIN\ z = \lambda x_1 + 2x_2$$

Discuter l'évolut° de l'optimum selon les valeurs de λ

$MAX\ z' = -z = -\lambda x_1 - 2x_2$

Remarque : lorsque l'on modifie un coefficient de la fonct° objectif, le tableau central ne change pas, il suffit de recalculer Δj.

c_i	i	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	
-2	2	0	1	$-3/7$	$-2/7$	X	$1/7$
$-\lambda$	1	1	0	$1/7$	$3/7$	X	$9/7$
	c_j	$-\lambda$	-2	0	0	$-M$	$-\frac{9}{7}\lambda - \frac{2}{7}$
	Δ_j	0	0	$-\frac{6}{7} + \frac{\lambda}{7}$	$-\frac{4}{7} + \frac{3\lambda}{7}$	X	

Le tableau est resté optimum si $\forall \Delta_j \leq 0$.

$$\begin{cases} -\frac{6}{7} + \frac{\lambda}{7} \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 6 \\ -\frac{4}{7} + \frac{3\lambda}{7} \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

- Si $\lambda < \frac{4}{3}$, l'optimum reste au même endroit et le tableau est resté optimal.
- Si $\lambda > \frac{4}{3}$, on n'est plus à l'optimum car on a un $\Delta j > 0$.