Sujet1 :EPITA-ING1-2011-S2-APPROXIMATIONS
M.REGRAGUI

PARTIEL APPROXIMATIONS

Notes de cours et calculatrice autorisées

Exercice 1 :

Considérons la fonction $f(x)$ supposée continue et donnée par points :

$f(-2) = 25$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = 7$

1. Donner le tableau des différences divisées et en déduire le polynôme d'interpolation de Newton
2. Donner l'expression de l'erreur d'interpolation
3. En utilisant l'algorithme division synthétique, calculer le développement du polynôme d'interpolation en puissance de $(x-3)$
4. En déduire la valeur interpolée $f(3)$ et les approximations des dérivées successives $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$

Exercice 2 :

1) Soient α_i, $(1 \leq i \leq 4)$, quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $p \in IP_3$ (espace des polynômes de degré ≤ 3) vérifiant :

   (1) $p(0) = \alpha_1, p'(0) = \alpha_2, p(1) = \alpha_3, p'(1) = \alpha_4$

2) Calculer les quatre polynômes $p_i \in IP_3, (1 \leq i \leq 4)$ satisfaisant

   Les équations (1) avec $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4})$

   où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

3) Montrer que le même polynôme p de la première question s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i p_i(x)$$

4) Soit $f(x)$ une fonction continue et dérivable sur $[0,1]$ et soit $p(x)$ le polynôme qui interpole $f(x)$: $p(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p(1) = f(1), p'(1) = f'(1)$

   On considère la méthode d'intégration : $\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \int_0^1 p_i(x)dx$

   Avec $\alpha_1 = f(0), \alpha_2 = f'(0), \alpha_3 = f(1), \alpha_4 = f'(1)$

   Montrer que cette méthode est exacte pour les polynômes de IP_3 et calculer les poids

$$\omega_i = \int_0^1 p_i(x)dx \quad (1 \leq i \leq 4)$$

5) Déterminer le noyau de PEANO de cette méthode numérique
6) Donner une majoration de l'erreur d'intégration