23/11 Ex (Jacobi)

$a \in \mathbb{R}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

1) Pour quelles valeurs de A est elle déf >0
2) Donner la matrice de Jacobi
3) Pour quelle valeurs de a, jacobi CV ?

1) A est déf $>0 \iff (Ax, x) > 0 \quad \forall x \neq \vec{0}$

$\iff$ Les valeurs propres de $A > 0$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2a+1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1-\lambda & a \\ 1 & a & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (2a+1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-\lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda-a \end{vmatrix} = (2a+1-\lambda)(1-\lambda-a)^2$$

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - (2a+1))(1-\lambda-a)^2$$

$$P_A(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 2a+1 \text{ simple} \\ \lambda_2 = 1-a \text{ double} \end{cases}$$

$$A \text{ est déf} > 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 > 0 \Rightarrow 2a+1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 > 0 \Rightarrow 1-a > 0 \Rightarrow a < 1 \end{cases}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} < a < 1}$$

2) Matrice de Jacobi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} = D - E - F$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi $A = M - N$ $\quad F = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

avec $M = D = I$

$$N = E + F = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = D(E+F) = E + F$$

Matrice de Jacobi

$$\boxed{X^{(k+1)} = JX^{(k)} + D^{-1}b = JX^{(k)} + b} \quad \text{car } D^{-1} = I$$

3) Convergence ?

Jacobi converge $\iff \rho(J) < 1$

$$J = E + F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} = I - A$$

Les valeurs propres de Jacobi

$$\alpha_1 = 1 - \lambda_1 = \cancel{1+2a} -2a$$

$$\alpha_2 = 1 - \lambda_2 = a$$

$$\rho(J) = \max |\alpha_i| = 2|a|$$

Jacobi converge

si $\rho(J) < 1 \Rightarrow 2\,|a| < 1 \Rightarrow \boxed{|a| < \frac{1}{2}}$