Examen de THEG

Avril 2014, S2, ING1. Durée : 1 heure 30

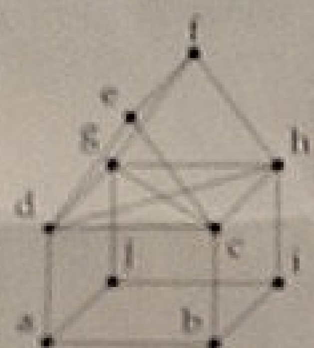
- Document autorisé : une seule page A4 manuscrite (recto/verso).
- Cet examen se déroule **sans calculatrice, ni téléphone, ou ni aucun autre appareil électroménager.**
- Noircir les cases au stylo (pas de crayon à papier) et sans déborder sur les voisines car la correction est automatisée.
- Certaines réponses incorrectes apportent des points négatifs. Dans le doute, s'abstenir.
- Marquez toutes les réponses correctes dans les questions marquées avec ♣.
- Lorsqu'une réponse numérique demande plusieurs chiffres, les chiffres sont lus de haut en bas.

Prénom, NOM [redacted]

UID [redacted]

1 Propriétés de graphe (12 points)

On considère le graphe suivant :



Question 1 Le rayon du graphe est

☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Question 2 Le diamètre du graphe est

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Question 3 ♣ Les états du centre du graphe sont

☐ a ■ c ☐ e ■ g ☐ i
☐ b ■ d ☐ f ■ h ☐ j

Question 4 La maille du graphe est

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ■ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Question 5 La taille de la plus grande clique est

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Question 6 Combien le graphe complémentaire possède-t-il d'arêtes ?

☐ 0 ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

Question 7 ♣ Cochez toutes les assertions correctes :

☐ le graphe est planaire
☐ le graphe n'est pas planaire
☐ le graphe respecte le critère de planarité dérivé de la relation d'Euler
■ le graphe ne respecte pas le critère de planarité dérivé de la relation d'Euler
☐ le graphe contient un sous-graphe qui est une subdivision de $K_{3,3}$
☐ le graphe ne contient pas de sous-graphe qui soit une subdivision de $K_{3,3}$
☐ le graphe contient un sous-graphe qui est une subdivision de K_5
☐ le graphe ne contient pas de sous-graphe qui est une subdivision de K_5
☐ le graphe possède un chemin eulérien
☐ le graphe ne possède pas de chemin eulérien

Question 8 Soit M est la matrice d'adjacence du graphe (avec les lignes et colonnes repérées par $a \ldots j$) interprétée dans le semi-anneau $(\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1)$. Que vaut $(M^2)_{aa}$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9

2 Arbre couvrant minimal (8 points)

L'algorithme de PRIM construit un arbre couvrant minimal dans un graphe orienté connexe et pondéré. L'arbre retourné est minimal au sens où il n'existe pas d'arbre dont la somme des poids des arêtes soit inférieure.

Le principe est simple : on commence par construire un arbre réduit à un seul sommet (choisi arbitrairement dans le graphe) puis on étend l'arbre un arc à la fois, en choisissant toujours l'arc (x, y) de poids $p(x, y)$ minimal parmi tous les arcs qui connectent un sommet x de l'arbre à un sommet y qui n'est pas dans l'arbre. L'algorithme s'arrête lorsque l'arbre ainsi construit couvre le graphe. En pratique, le pseudo-code ci-dessous construit l'arbre (V_T, E_T) en maintenant dans $c[y]$ le coût de l'arc le plus faible reliant un sommet de l'arbre au sommet y. La source de cet arc est donnée par $f[y]$.

```
    PRIM(G = (V, E, p))
1   ∀s ∈ V, c[s] ← ∞
2   Choisir x ∈ V arbitrairement
3   V_T ← {x} ; V_R ← G \ {x} ; E_T ← ∅
4   Pour tout successeur y ∈ δ⁺(x) :
5       c[y] ← p(x, y) ; f[y] ← x
6   Tant que V_R ≠ ∅ :
7       Choisir y tel que c[y] est minimal
8       E_T ← E_T ∪ {(f[y], y)} ; c[y] ← ∞
9       V_T ← V_T ∪ {y} ; V_R ← V_R \ {y}
10      Pour tout successeur z ∈ δ⁺(y) :
11          Si z ∈ V_R et p(y, z) < c[z] :
12              c[z] ← p(y, z) ; f[z] ← y
13  Retourner (V_T, E_T)
```

Question 9 Combien de fois la ligne 7 est-elle exécutée ? (Autrement dit, combien d'itérations la boucle "Tant que" effectue-t-elle ?)

- ☐ $\lfloor |V|/2 \rfloor$
- ☐ $\lceil |V|/2 \rceil$
- ☐ $\lfloor \log_2 |V| \rfloor$
- ☐ $\lceil \log_2 |V| \rceil$
- ☐ $|V| - 1$
- ☐ $|V|$
- ☐ $|V| + 1$
- ☐ $|V|^2$
- ☐ $2 \times |V|$
- ☐ $\lfloor |E|/2 \rfloor$
- ☐ $\lceil |E|/2 \rceil$
- ☐ $\lfloor \log_2 |E| \rfloor$
- ☐ $\lceil \log_2 |E| \rceil$
- ☐ $|E| - 1$
- ☐ $|E|$
- ☐ $|E| + 1$
- ☐ $|E|^2$
- ☐ $2 \times |E|$
- ☐ $|E| + |V|$
- ☐ $|E| \cdot |V|$
- ☐ $\log_2(42)$

Question 10 Combien de fois est exécutée la ligne 11 ?

- ☐ $\Theta(\log |V|)$
- ☐ $\Theta(|V|)$
- ☐ $\Theta(|V|^2)$
- ☐ $\Theta(|E|)$
- ☐ $\Theta(\log |E|)$
- ☐ $\Theta(|E|^2)$
- ☐ $\Theta(|E| \log |V|)$
- ☐ $\Theta(|E| \cdot |V|)$

Question 11 Si c est un tableau comme dans le pseudo code ci-contre, le coût d'exécuter la ligne 8 une fois est $\Theta(|V|)$. En supposant que toutes les opérations sur les ensembles (lignes 2,3,8,9,11) se font en $\Theta(1)$, et que le graphe est donné sous forme de liste d'adjacence, quelle est la complexité de l'algorithme PRIM ainsi décrit ?

- ☐ $\Theta(|V|)$
- ☐ $\Theta(|V| \log |V|)$
- ☐ $\Theta(|V| \log |E|)$
- ☐ $\Theta(|E| \log |V|)$
- ☐ $\Theta((|V| + |E|) \log |V|)$
- ☐ $\Theta(|V| \cdot |E|)$
- ☐ $\Theta(|V| + |E|)$
- ☐ $\Theta(|V|^2)$
- ☐ $\Theta(|V|^2 |E|)$
- ☐ $O(|V|)$
- ☐ $O(|V| \log |V|)$
- ☐ $O(|V| \log |E|)$
- ☐ $O(|E| \log |V|)$
- ☐ $O((|V| + |E|) \log |V|)$
- ☐ $O(|V| \cdot |E|)$
- ☐ $O(|V| + |E|)$
- ☐ $O(|V|^2)$
- ☐ $O(|V|^2 |E|)$

Question 12 Remplaçons l'utilisation du tableau c par un tas qui associe un poids à chaque sommet. Que devient le coût d'une exécution de la ligne 8 ?

- ☐ $\Theta(1)$
- ☐ $\Theta(\log |V|)$
- ☐ $\Theta(\log |E|)$
- ☐ $\Theta(|V|)$
- ☐ $\Theta(|E|)$
- ☐ $O(\log |V|)$
- ☐ $O(\log |E|)$
- ☐ $O(|V|)$
- ☐ $O(|E|)$

3 Double Dijkstra (4 points)

On considère la recherche d'un plus court chemin entre deux sommets s et t dans un très grand graphe (par exemple un itinéraire routier à l'échelle d'un pays). Une façon de faire est d'entrelacer les exécutions de deux instances de l'algorithme de Dijkstra : l'une à partir de s, l'autre à partir de t, et de les arrêter lorsque les deux recherches atteignent des sommets communs.

Question 13 Quel est la complexité d'un tel algorithme ?

- ☐ $\Theta(|E| + |V| \log |V|)$
- ☐ $\Theta((|E| + |V|) \log |V|)$
- ☐ $\Theta(|V|)$
- ☐ $\Theta(|V| \cdot |E|)$
- ☐ $\Theta(|V|^2)$
- ☐ $O(|E| + |V| \log |V|)$
- ☐ $O((|E| + |V|) \log |V|)$
- ☐ $O(|V|)$
- ☐ $O(|V| \cdot |E|)$
- ☐ $O(|V|^2)$

Question 14 Sans compter le graphe donné en entrée, quelle est la consommation mémoire de cet algorithme ?

- ☐ $\Theta(|V|)$
- ☐ $O(|V|)$
- ☐ $\Theta(|V|^2)$
- ☐ $O(|V|^2)$
- ☐ $\Theta(|E|)$
- ☐ $O(|E|)$
- ☐ $\Theta(|E|^2)$
- ☐ $O(|E|^2)$
- ☐ $\Theta(|E| \cdot |V|)$
- ☐ $O(|E| \cdot |V|)$
- ☐ $\Theta(|E| + |V|)$
- ☐ $O(|E| + |V|)$