Réduction des matrices carrées et systèmes linéaires

I – Rappels et notations

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$)

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes, n colonnes

Si $m = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \to m \\ j=1 \to n}}$ la matrice A à élts de $\mathbb{K}$

${}^tA = (a_{ji})$: transposée de A
$\in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

$A^* = (\overline{a_{ji}}) = a^*_{ij}$: adjointe de A

si $y \in \mathbb{R}^n$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ${}^ty = (y_1, \dots, y_n)$

si $y \in \mathbb{C}^n$, $y^* = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n})$

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propre de
On appelle rayon spectral de A :
$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

Déf :

* Produit scalaire ds $\mathbb{R}^n$

$$(X,Y) = {}^tYX = \sum_1^n x_i y_i$$

Produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$

$$(X,Y) = Y^*X = \sum_1^n x_i \overline{y_i}$$

* Norme de X (vectorielle) :

$$\|X\|_2 = \sqrt{(X,X)} = \sqrt{\sum |x_i|^2}$$

Norme de Hölder :

$$\|X\|_p = \left(\sum_1^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \forall p \geq 1$$

Rmq :

* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

dans $\mathbb{R}$: $(AX,Y) = (X, {}^tAY)$

dans $\mathbb{C}$: $(AX,Y) = (X, A^*Y)$

* $$\begin{cases} {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \\ (AB)^* = B^*A^* \end{cases}$$

Déf :

Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q est orthogonale $\iff Q^{-1} = {}^tQ$

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

U est unitaire $\iff U^{-1} = U^*$

Ces 2 matrices conservent la norme :

$$\|QX\|_2 = \|X\|_2 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$$

$$\|UX\|_2 = \|X\|_2 \quad \forall X \in \mathbb{C}^2$$

II - Trigonalisation des matrices carrées

Lemme 1 : Soit $u \in \mathbb{C}^n$ tq $\|u\|_2 = 1$
alors la matrice $H = I - 2uu^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}$
est hermitienne et unitaire.
On l'appelle matrice unitaire élémentaire

Rappel : * H est Hermitienne $\Leftrightarrow$ $H^* = H$ (ds $\mathbb{C}$

* A est symétrique $\Leftrightarrow$ ${}^tA = A$ (ds $\mathbb{R}$)

⚠ $\begin{cases} u^*u = (u, u) & : \text{scalaire} \\ u.u^* & : \text{matrice carrée} \end{cases}$

Démonstration :

$$H = I - 2uu^*$$
$$H^* = (I - 2uu^*)^*$$
$$= I - 2(u^*)^* u^*$$
$$= I - 2uu^* = H$$

$\Rightarrow$ H est Hermitienne

On a $H \times H^{-1} = I$
on veut mq $H^{-1} = H$ $\Leftrightarrow$ mq $H^2 = I$

$$H^2 = (I - 2uu^*)(I - 2uu^*)$$
$$= I - 2uu^* - 2uu^* + 4u\overbrace{u^*u}^{1}u^*$$
$$= I - 4uu^* + 4uu^*$$
$$= I$$

$\Rightarrow$ H unitaire

$\square$

Lemme 2 : Soit $a \in \mathbb{C}^n$, $a \neq 0$
$\exists$ une matrice H unitaire élémentaire et un nombre α tq $Ha = \alpha e_1$
où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Démo : H sera de la forme :
$$H = I - 2uu^*$$

H doit vérifier $Ha = \alpha e_1$
$$\Rightarrow \|Ha\|_2 = \|\alpha e_1\|_2$$
$$\Rightarrow \underline{\|a\|_2 = \|\alpha\|_2} = |\alpha| \quad (1)$$

$$(I - 2uu^*)a = \alpha e_1$$
$$a - 2uu^*a = \alpha e_1$$
$$a - \alpha e_1 = 2uu^*a$$

On multiplie à gauche par $2a^*$:

$$2a^*a - 2\alpha a^* e_1 = 4a^*uu^*a$$
$$2\|a\|_2^2 - 2\alpha \overline{a_1} = 4a^*uu^*a$$

Posons $\mu = 2u^*a$
$\overline{\mu} = 2a^*u$

$$\text{d'où } 2\|a\|_2^2 - 2\alpha\overline{a_1} = |\mu|^2$$

$$\Rightarrow \underline{2|\alpha|^2 - 2\alpha\overline{a_1} = |\mu|^2} \quad (2)$$

$$a - \alpha e_1 = 2uu^*a = \mu u$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\mu}(a - \alpha e_1) \qquad (3)$$

On obtient donc un système :

$$\begin{cases} |\alpha| = \|a\|_2 \\ |\mu|^2 = 2|\alpha|^2 - 2\alpha \bar{a}_1 \\ u = \frac{1}{\mu}(a - \alpha e_1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On peut déterminer α, μ, et u. donc H.

$\square$

Théorème de Schur :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$\exists$ une matrice unitaire U
tq $U^*AU = T$
où T est triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où λ_i valeur propres de A

Démo : récurrence sur n

$n = 1$ ok ($a = |a|$)

HR : Supposons le résultat vrai pour $n-1$.

Soit λ valeur propre de A :
$\exists \; x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x$
(x vecteur propre)

D'après le lemme 2, $\exists \; H$ unitaire élémentaire et α tq $Hx = \alpha e_1$

$$H^*AHe_1 = \frac{1}{\alpha} HA\overbrace{H\underbrace{Hx}_{\alpha e_1}}^{I}$$

$$= \frac{1}{\alpha} HAx = \frac{\lambda}{\alpha} Hx = \frac{\lambda\alpha}{\alpha} e_1 = \lambda e_1$$

d'où $A^{(1)} = HAH = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & {}^t b \\ \hline 0 & A_{n-1} \end{array}\right)$

où $b \in \mathbb{C}^{n-1}$
$A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

D'après l'Hypothèse de Recurrence :

$\exists \; U_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ tq $U_{n-1}^* A_{n-1} U_{n-1} = T_{n-1}$

où $T_{n-1} = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$

On a :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1}^* \end{array}\right) \times A^{(1)} \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & {}^t v\, U_{n-1} \\ \hline 0 & T_{n-1} \end{array}\right) = T$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1}^* \end{array}\right) H}_{U^*} A \underbrace{H \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_{n-1} \end{array}\right)}_{U} = T$$

$\square$

Corollaire 1 :

> $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne
> $\Leftrightarrow \exists\, U$ unitaire tq :
> $U^*AU = \underset{(\text{notée})}{\Lambda} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \in M_n$

Démo : $(\Rightarrow)$ Soit A hermitienne

D'après Schur, $\exists\, U$ unitaire tq $U^*AU = T$
(où T est triangulaire supérieure

$$A = UTU^*$$
$$T^* = U^* A^* U^{**}$$
$$= U^* A U = T$$

D'où $\underline{T^* = T}$

On a $T^* = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

or $T = T^*$

d'où $T = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} = \Lambda$ réelle

($\Leftarrow$) Supposons $\exists U$ unitaire
tq $U^*AU = \Lambda \Rightarrow A = U \Lambda U^*$

$$A^* = U \Lambda^* U^* = U \Lambda U^* = A$$

D'où $\underline{A = A^*}$

$\square$

<u>Rmq</u>: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A^*A est hermitienne et semi-définie ≥ 0,

en effet, $(A^*A)^* = A^*A$ cad $\forall x \in \mathbb{C}^n, (A^*Ax, x) \geq 0$

et $(A^*Ax, x) = (Ax, A^{**}x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

Donc les VP de A^*A sont ≥ 0 :

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 \geq 0$$

rayon spectral : $\sigma_1^2 = \rho(A^*A)$

III - Normes matricielles et normes vectorielles

Déf : Une norme vectorielle est une application
$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to \|x\|$$
vérifiant :
(i) $\|x\| \geq \forall x$
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemple : $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ où $p \geq 1$

$\|x\|_\infty = \max |x_i|$

Déf : On appelle norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ lte application de $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant
(i) $\|A\| \geq 0$
(ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
(iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Déf : Etant donné une norme vectorielle $\|x\|$ sur $\mathbb{C}^n$, la norme matricielle $\|A\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$$ vecteurs colonne ?

est dite norme subordonnée à la norme vectorielle

Exemple : * $\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \right)$

$p = 2$: norme spectrale

* $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D^* = D = {}^tD$

$\|D\|_2 = \sqrt{\rho(D^*D)} = \sqrt{\rho(D^2)} = \sqrt{(\rho(D))^2} = \rho(D) = 8$

voir poly ou exo 5 pour définition de $\|A\|_2$

Déf : Une norme vectorielle $\|x\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et une norme matricielle $\|A\|$ sont dites compatibles ssi $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \quad \forall (A, x)$

Exemple : $\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \right)$

Théorème 1 :

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors pour toute norme matricielle on a :

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Démo : Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ (spectre de A)

alors $\exists x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x$

$\Rightarrow \|Ax\| = \|\lambda\| \|x\|$

or $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

$\Rightarrow \|\lambda\| \leq \|A\|$ car $x \neq 0$

$\Rightarrow \rho(A) = \max |\lambda| \leq \|A\|$

$\square$

Rmq : On peut mq $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ une norme matriciel[le]
tq $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$

Théorème 2 :

> Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\|A\| < 1$ pour une norme mat[ricielle]
> alors $I + A$ est inversible et vérifie :
> si $\|I\| = 1$
> alors $\|(I + A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|}$

Démo : $\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1$ (thm 1)

Raisonnons par l'absurde : supposons $I + A$ non invers[ible]
alors $\det(I + A) = 0$
$\Rightarrow 0$ est VP de $I + A$: $\exists x \neq 0, (I + A)x = 0$
$\Rightarrow Ax = -x$
$\Rightarrow -1$ est VP
$\Rightarrow$ impossible, car $\rho(A) < 1$
$\Rightarrow I + A$ inversible

$$(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}(I+A-A)$$
$$= I - (I+A)^{-1}A$$
$$\|(I+A)^{-1}\| = \|I - (I+A)^{-1}A\|$$
$$\leq \|I\| + \|(I+A)^{-1}A\|$$
$$\leq 1 + \|(I+A)^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$$\Rightarrow \quad \|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

$\square$

<u>Exo</u> : $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1$

Démo en TD

<u>Théorème 3</u> : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tte norme matricielle, on a :
$$\lim_{k\to\infty} (\|A^k\|)^{1/k} = \rho(A)$$

<u>Démo</u> : $\rho(A) \leq \|A\|$ (thm 1)

$$(\rho(A))^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\rho(A) \leq (\|A^k\|)^{1/k}}$$

Mq $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$ tq $\forall k \geq k_0$, $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, Soit $A(\varepsilon) = \dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}$

$$\Rightarrow \rho(A(\varepsilon)) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$$

$\rho(A(\varepsilon)) < 1 \Rightarrow (A(\varepsilon))^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Donc $\exists k_0 \,/\, \forall k \geq k_0, \ \|(A(\varepsilon))^k\| \leq 1$

$$\frac{\|A^k\|}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} \leq 1$$

$$\Rightarrow \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

On a montré que $\forall k \geq k_0, \ \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$

$\rho(A) - \varepsilon \leq \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

$\square$

IV _ Diagonalisation

A revoir : (cours SPE)
- polynôme caractéristique
- polynôme scindé
- valeurs propres et vecteurs propres (multiplicité)
- Espaces propres
- Thm de diagonalisation

V _ Polynômes annulateurs

Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
$Q(X) = \sum_{0}^{m} a_i X^i$

Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ (endomorphisme). On note $Q(f)$ l'endomorphisme défini par $Q(f) = a_m f^m + \dots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}$

On s'intéresse aux polynômes $Q(f) = 0$

<u>Exemple</u> : $f : E \to E$ tq $f \circ f = f$ (projecteur)

Soit $Q(X) = X^2 - X$

$\Rightarrow Q(f) = f^2 - f = 0$

<u>Déf</u> : Soit $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$.
Un polynôme $Q(X)$ est dit <u>annulateur</u> de f si $Q(f) = 0$.

<u>Proposition 1</u> : Soit $Q(X)$ un polynôme annulateur de f alors les vp de $f \in$ aux racines de Q

<u>Démo</u> : Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$, $\begin{cases} Q(X) = \sum_0^m a_i X^i \\ Q(f) = 0 \end{cases}$

$\exists v \neq 0$ vp tq $\begin{cases} f(v) = \lambda v \\ f^k(v) = \lambda^k v \end{cases}$

$Q(f) = 0 \Rightarrow a_m f^m + \dots + a_1 f + Id\, a_0 = 0$

$Q(f)(v) = a_m f^m(v) + \dots + a_1 f(v) + a_0 v = 0$

$\Rightarrow \sum_0^m a_i \lambda^i v = 0$

$\Rightarrow v . \sum_0^m a_i \lambda^i = 0$

or $v \neq 0 \Rightarrow \sum_0^m a_i \lambda^i = 0$

$\Rightarrow Q(\lambda) = 0$

$\square$

Théorème de Cayley-Hamilton :

Soit f un endomorphisme sur E et $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de f.
Alors $P_f(f) = 0$
($\Leftrightarrow P_A(A) = 0$ où $A = M(f)$)

Démo : f est trigonalisable.
$\exists \{e_i\}_{1,n}$ base de E tq $M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

$P_f(X) = \prod_{1}^{n}(\lambda_i - X)$

On veut mq $(\lambda_1 Id - f) \circ \dots (\lambda_n Id - f) = 0$

Soit $g_i = (\lambda_1 Id - f) \circ \dots \circ (\lambda_i Id - f)$

Montrons par récurrence que g_i annule les vecteurs $e_1, \dots, e_i$:

$i = 1$: $g_1 = \lambda_1 Id - f$
$g_1(e_1) = \lambda_1 e_1 - \lambda_1 e_1 = 0$

HR : Supposons $g_{i-1}(e_1) = 0$, $g_{i-1}(e_{i-1}) = 0$

$$g_i = g_{i-1} \circ (\lambda_i Id - f) = (\lambda_i Id - f) \circ g_{i-1}$$

$$\begin{cases} g_i(e_1) = (\lambda_i Id - f)(\underbrace{g_{i-1}(e_1)}_{=0}) = 0 \\ \vdots \\ g_i(e_{i-1}) = 0 \quad \text{d'après HR} \end{cases}$$

$$g_i(e_i) = g_{i-1}(\lambda_i e_i - f(e_i))$$

D'où $g_i(e_i) = \lambda_i g_{i-1}(e_i) - g_{i-1}\left(\sum_1^{i} a_k e_k\right)$

$= \lambda_i g_{i-1}(e_i) - \sum_{k=1}^{i} a_k \cdot \underbrace{g_{i-1}(e_k)}_{0}$

$\Rightarrow g_i(e_i) = 0$

Pour $i = n$: $(\lambda_1 Id - f) \circ \dots \circ (\lambda_n Id - f) = 0$

$\Rightarrow \underline{P_f(f) = 0}$

□

Polynôme minimal $m_f(x)$:

* $m_f(f) = 0$
* $m_f(x)$ possède le + petit d°
* $m_f(x)$: normalisé
  $m_f(x) = 1.X^m + \dots$

Lemme 1 : Si $Q(x) = \prod^{p} (x - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de f et $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i, j$ alors :

$E = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_p Id)$

Suite dans poly p 21 (Thm 5.2)

VI - Systèmes Linéaires

On considère le système linéaire :

$$(1) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

$$(1) \iff A x = b \quad (2)$$

où $\begin{cases} A = (a_{ij})_{1 \dots n}^{1 \dots n} \\ b = (b_i)_{1 \dots n} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{cases}$

On suppose A inversible.

1. Méthode directe

Nous appelons méthode directe de résolution du système (2) une méthode qui permet de calculer $x = A^{-1}b$ en un nombre fini d'opérations élémentaires.

Si A est triangulaire supérieure :

$$(3) \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \quad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

D'où l'algorithme :

$$(4) \quad \begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad \forall i \in [1, n-1] \end{cases}$$

Si A n'est pas triangulaire supérieure, on cherche une matrice M inversible tq MA soit une matrice triangulaire sup :

$$MAx = Mb \quad (5)$$

voir feuille 11, recto, en bas : $MA = A^{(n)} = L^{-1}A^{(1)}$

On résoud (5) par l'algo (4).

2. Méthode de Gauss

La méthode de Gauss transforme le système $Ax = b$ (6) en un système triangulaire équivalent à l'aide d'un algorithme d'élimination.

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \quad (7)$$

$$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$$
$$b^{(1)} = (b_i^{(1)}) = b$$

Eventuellement, après permutation de lignes ou de colonnes, on peut supposer que $a_{11}^{(1)} \neq 0$: c'est le 1er pivot.

Pour $i = 2 \ldots n$, on multiplie la 1ère équation de (7) par $g_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$ et on retranche l'éq. obtenue de la i^e équation. $i > 1$

On obtient un système de la forme :

$$(8) \quad A^{(2)}x = b^{(2)} \quad \text{où} \quad A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)}), \quad b^{(2)} = (b_i^{(2)})$$

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \\ a_{i1}^{(2)} = 0 \quad \forall i > 1 \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1} a_{1j}^{(1)} \quad \text{où } i = 2 \to n, \ j = 2 \to n \\ b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - g_{i1} b_1^{(1)} \quad \text{où } i = 2 \to n \end{cases}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

Soit $\tilde{A}^{(2)} = \left(A^{(2)} \mid b^{(2)} \right) \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$

$$(10) \quad \begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} & j = 1 \to n+1 \\ a_{i1}^{(2)} = 0 & i = 2 \to n \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1} a_{1j}^{(1)} & \begin{cases} i = 2 \to n \\ j = 2 \to n+1 \end{cases} \end{cases}$$

On peut donc passer à l'étape suivante
(on peut toujours supposer que le pivot est non nul $\to a_{22}^{(2)} \neq 0$)

Plus généralement, la méthode de Gauss consiste à construire une suite de systèmes équivalents à :

$$A^{(k)} x = b^{(k)} \qquad (11)$$

où $A^{(k)}$ et $b^{(k)}$ sont donnés par :

$$\tilde{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

On suppose que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$
($k^{ième}$ pivot)
pour passer du système (11) au système :

$$(12) \quad A^{(k+1)} x = b^{(k+1)}$$

Pour $i = k+1 \to n$ on multiplie la $k^{ième}$ ligne par $g_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$

puis on retranche le résultat de la $i^{ème}$ ligne
On obtient $\tilde{A}^{(k+1)}$ défini par :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} & \text{pour } i = 1 \to k, \ j = 1 \to n+1 \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik} a_{kj}^{(k)} & \text{pour } i = k+1 \to n, \ j = k+1 \to n+1 \end{cases}$$

Les autres éléments sont nuls.
A la $n^{\text{ième}}$ étape, $A^{(n)}$ est triang. sup.

$$\hat{A}^{(n)} = \left(A^{(n)} \mid b^{(n)} \right)$$

On résoud alors $A^{(n)} x = b^{(n)}$ (14)
par l'algorithme (4).

Analyse matricielle de Gauss :

Soit $G^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -g_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -g_{nk} & & 1 \end{pmatrix}$

$$g_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

$$\hat{A}^{(k+1)} = G^{(k)} \hat{A}^{(k)}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^{(n)} &= G^{(n-1)} \hat{A}^{(n-1)} \\ &= G^{(n-1)} G^{(n-2)} \hat{A}^{(n-2)} \\ &= G^{(n-1)} \cdots G^{(1)} \hat{A}^{(1)} \\ &= \left(A^{(n)} \mid b^{(n)} \right) \end{aligned}$$

Posons $U = A^{(n)}$ et $L = \left(G^{(n-1)} \cdots G^{(1)} \right)^{-1}$

$$A^{(n)} = L^{-1} A^{(1)} \quad ; \quad A = A^{(1)} = LU$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} = A^{(n)} \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ g_{ik} & & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

* $A = LU$ est unique
* $\det A = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\det L} \cdot \det U = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$

3 - Méthode de Cholesky

Soit A SDP (symétrique, définie > 0)

cad $\begin{cases} {}^tA = A \\ (Ax, x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \end{cases}$

Théorème de Cholesky.

> Une matrice A est SDP ssi
> $\exists$ une matrice L triangulaire inférieure inversible tq $A = L\,{}^tL$

Démo :

$(\Leftarrow)$ Si $A = L\,{}^tL$

${}^tA = L\,{}^tL \Rightarrow A$ sym.

$(Ax, x) = (L\,{}^tLx, x)$

$= ({}^tLx, {}^tLx)$

$= \|{}^tLx\| > 0$

car ${}^tL$ est inversible

D'où A est SDP

($\Rightarrow$) Récurrence sur n :

$n = 1$ évident

HR : Supposons que la condition est vrai pour une matrice d'ordre $n-1$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & V \\ \hline {}^tV & \alpha \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \\ \alpha \in \mathbb{R} \\ V \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array}$$

D'après l'HR, $\exists\, T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire et inversible tq :

$$B = T\,{}^tT$$

On peut alors chercher L sous la forme :

$$L = \left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline {}^tW & \beta \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \beta \in \mathbb{R} \\ W \in \mathbb{R}^{n-1} \end{array}$$

$$L\,{}^tL = A$$

$$\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline {}^tW & \beta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} {}^tT & W \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & V \\ \hline {}^tV & \alpha \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} B = T\,{}^tT \\ TW = V \\ {}^tWW + \beta^2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \beta^2 = \alpha - {}^tWW$$

$$\begin{cases} W = T^{-1}V \\ \beta^2 = \alpha - {}^tV\,{}^tT^{-1}\,T^{-1}V = \alpha - {}^tVB^{-1}V \end{cases}$$

Donc nous aurons déterminé β si :
$$\alpha - {}^t v \beta^{-1} v > 0$$

$(AX, x) > 0$

Soit $X = \begin{pmatrix} B^{-1} v \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$$(AX, x) = {}^t X A X = \left({}^t(B^{-1}v), -1\right)\left(\begin{array}{c|c} B & v \\ \hline {}^t v & \alpha \end{array}\right)\begin{pmatrix} B^{-1}v \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left({}^t(B^{-1}v), -1\right)\begin{pmatrix} v - v \\ {}^t v B^{-1} v - \alpha \end{pmatrix} = \alpha - {}^t v B^{-1} v$$

D'où $\underline{(AX, x) = \alpha - {}^t v B^{-1} v = \beta^2 > 0}$

$\square$

<u>A préparer</u> :
$\left.\begin{array}{l} \text{– Algo de Cholesky} \\ \text{– Méthode itératives} \end{array}\right\}$ poly n°2

4. Méthode itérative

A partir d'ici, rappels et compléments du poly

<u>Rappel</u> : <u>Méthode itérative</u> (voir poly)

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = B x^{(k)} + c \\ x^{(0)} \text{ qq} \end{cases}$$

, $B \in M_m(\mathbb{C})$ matrice d'itération

$x^{(k)}$: vecteur calculé à l'itération k

$c \in \mathbb{C}^m$

Déf : Une méthode itérative est convergente si $\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X = A^{-1}b$

Théorème de convergence :

Une méthode itérative cvg
$\iff \|B\| < 1$
$\iff B^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\iff$?

Définition : On appelle taux asymptotique de convergence le nombre :
$R_\infty(B) = -\ln(\rho(B))$

Ex : $\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} - \theta(Ax^{(k)} - b) \\ x^{(0)} \text{ qcq} \end{cases}$ A HDP

* Convergence : $x^{(k+1)} = \underbrace{(I - \theta A)}_{B} x^{(k)} + \underbrace{\theta b}_{C}$

La matrice d'itération est $B = I - \theta A$
La méthode est $\text{cvg}^{te} \iff \rho(B) < 1$
$\iff \rho(I - \theta A) < 1$

$\rho(I - \theta A) < 1$
$\iff |1 - \lambda_i \theta| < 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
$\iff -1 < 1 - \lambda_i\theta < 1$
$\iff -2 < -\lambda_i\theta < 0$
$\iff 0 < \lambda_i\theta < 2 \iff 0 < \theta < \frac{2}{\lambda_i}$

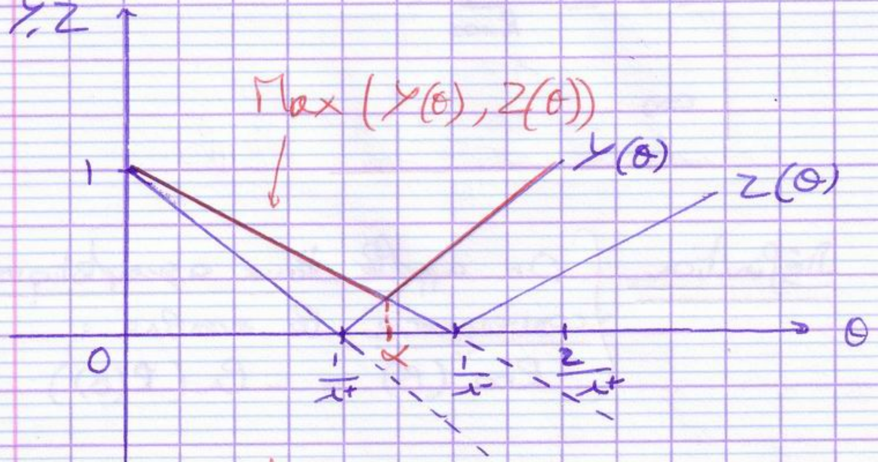
D'où l'intervalle optimum : $0 < \theta < \frac{2}{\lambda^+}$

* Chercher θ_{opt} revient à minimiser $\rho(I-\theta A)$

$$\rho(I-\theta_{opt}A) = \underset{\theta}{\text{Min}}\ \rho(I-\theta A)$$

$$= \underset{\theta}{\text{Min}}\ \text{Max}(|1-\theta\lambda^+|, |1-\theta\lambda^-|)$$

Soit $Y(\theta) = |1-\theta\lambda^+|$
$Z(\theta) = |1-\theta\lambda^-|$



α : θ optimum $\Rightarrow \alpha = \theta_{opt}$

θ_{opt} est le pt d'intersection des 2 droites :

$$1-\theta\lambda^- = \theta\lambda^+ - 1$$
$$\theta(\lambda^+ + \lambda^-) = 2$$
$$\theta_{opt} = \frac{2}{\lambda^+ + \lambda^-}$$

$$\rho(I-\theta_{opt}A) = 1-\theta_{opt}\lambda^- = 1 - \frac{2}{\lambda^+ + \lambda^-}\lambda^-$$

$$= \frac{\lambda^+ + \lambda^- - 2\lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}$$

$$= \underline{\frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}}$$

5 - Méthode de décomposition

$A = M - N$ avec M inversible
on associe à cette décomposition la méthode itérative.

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = M^{-1} N X^{(k)} + M^{-1} b \\ X^{(0)} \quad qcq \end{cases}$$

avec $B = M^{-1}N$ matrice d'itération
et $C = M^{-1} b$

$$\text{convergence} \iff \rho(M^{-1}N) < 1$$
$$\iff \|M^{-1}N\| < 1$$
$$\iff \lim_{\infty} (M^{-1}N)^k = 0$$

$A = D - E - F$

où $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ inversible et $a_{ii} \neq 0$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

6 Méthode de Jacobi

$M = D$ et $N = E + F$

$$M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b$$
$$D x^{(k+1)} = (E+F) x^{(k)} + b$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

$$\Rightarrow \forall i, x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$J = D^{-1}(E+F)$: matrice de Jacobi

6. Méthode de Gauss-Seidel

$$M = D - E \quad , \quad N = F$$
$$(D-E) x^{(k+1)} = F x^{(k)} + b$$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

$\mathcal{L} = (D-E)^{-1} F$: matrice de Gauss Seidel

7. Méthode de Relaxation

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. $A = M - N$
où $M = \frac{1}{\omega}(D - \omega E)$, $N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}\right) + F$

On suppose $(D - \omega E)$ inversible

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D-\omega E)^{-1}[(1-\omega)D + \omega F]}_{M^{-1}N \text{ : matrice de relaxation}} x^{(k)} + \underbrace{\omega (D - \omega E)^{-1} b}_{M^{-1}b}$$

$\omega = 1 \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(G-S)$