Approximations

Regragui Mohammed

ING1 2014

Sources disponibles sur http://ing1.nemunai.re/ ou ing1@nemunai.re

Table des matières

Chapitre 1

Approximations

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner les premières notions de la théorie de l'approximation permettant d'aborder la résolution de problèmes tels que :

- soit $f(x)$ continue sur $[a;b]$, déterminer dans l'espace des polynôme de degré n celui rend : $|f(x) - P_n(x)|$ le plus petit possible ;
- déterminer les coefficients a_k qui minimisent la valeur $\int_a^b (f(x). \sum_{k=0}^{n^2} a_k.\varphi_k)^2.\omega(x)dx$ où $\omega(x)$ est le poid.
- Soit f continue et $(n+1)$ points $X_0, X_1, ..., X_n$:
  $\exists ? P_n(x)/P_n(X_i) = f(X_i) \quad \forall i = 0..n$
  $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de $f(x)$.

1.2 Approximation dans un espace métrique

(E, d) est un espace métrique : il existe une distance d :

$$d : E_x E \longmapsto \mathbb{R}_+$$

$$(f, \Phi) \longmapsto d(f, \Phi)$$

(i) $d(f, \Phi) = 0 \Rightarrow f = \Phi$

(ii) $d(f, \Phi) = d(\Phi, f)$

(iii) $d(f, \Phi) \leq d(f, \psi) + d(\psi, \Phi) \quad \forall f, \Phi, \psi \in E$

Problème Soit (E, d) un espace métrique : $F \subset E$ (sous espace-vectoriel de E).

Déterminer $\Phi^* \in F/d(f, \Phi^*) = Mind(f, \Phi) \qquad \Phi \in F$. S'il existe, cet élément Φ^* sera appelé meilleur approximation (ou sens de la distance d) de $f \in E$.

Définition E est un espace vectoriel normé s'il existe une norme $||f(f)||$, $\forall f \in E$.
$d(f, \Phi) = ||f - \Phi||$ distance sur E.

On suppose que $dim(E) < +\infty$

$$||f - \Phi^*|| = Min(||f - \Phi||) \qquad \Phi \in F$$

1.3 Approximation uniforme

Soit $E = \mathcal{C}([a, b] \in \mathbb{R}) = f$ continue $[a, b] \to \mathbb{R}$.
E est normée $||f|| = Max|f(x)| \quad a \leq x \leq b$

$$d(f, \Phi) = ||f - \Phi|| = Max|f(x) - \Phi(x)|$$

Soit $\mathbb{C}_n$ un sous espace vectoriel de E, de dimension n.
La meilleur approximation uniforme $\Phi^* \in \mathcal{E}_n$ de $f \in E$ est donc la fonction définie par :

$$f - \Phi^* = Min(Max|f(x) - \Phi(x)|) \qquad \Phi \in \mathcal{E}_n$$

Soit $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ une vase de $\mathcal{E}_n$:

$$\Phi^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^*.\varphi_i$$

$$||f - \Phi^*|| = Min(Max|f(x) - \Phi(x)|) \qquad \Phi \in \mathcal{E}, a \leq x \leq b$$

1.3.1 Polynôme de Chibyshev

Les polynômes sont définis pour :

$$T_2 = 2X.T_1(x) - T(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 2x.T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8^4 - 8x^2 + 1$$

Propriétés

(i) $T_n(x) = cos(n.\theta) \qquad -1 \leq x \leq 1$ où $x = cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = cos(x) \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$

(ii) Le coefficient dominant de $T_n(x)$ est $a_n = 2^{n-1}$, $T_n(x) = 2^{n-1}.X^n...$

(iii) $T_0, T_1, T_2, ..., T_n$ est un ensemble de polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$ relativement à la fonction poids $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$

$$< T_n, T_m >= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x).T_m(x)}{\sqrt{1-X^2}} dx = 0 \quad \forall n \neq m \qquad pp. \text{ scalaire}$$

(iv) $T_n(x) = +1; -1; +1; -1; ...$
Pour $X = 1, cos(\frac{\pi}{n}), cos(\frac{2\pi}{n}), cos(\frac{k\pi}{n})$

Théorème Dans l'ensemble des polynômes de degré n ayant le coefficient de tête égal à 1, c'est $T_n^* = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ qui réalise la meilleure approximation uniforme de la fonction nulle sur $[-1;1]$.

$$||T_n^*|| = max|T_n^*(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$\mathcal{P}_n = \text{polynôme : } X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + ... + a_0$$

Démonstration On veut montrer que $||T_n^*|| = Min||R_n|| \quad R_n \in P_n$.

Supposons le contraire : $\exists R_n \in P_n$ tel que $||R_n|| < ||T_n^*|| = \frac{1}{2^{n-1}}$, $T_n^* - R_n = P_{n-1}$ polynôme de degré $\leq n-1$.

$$X_0 = 1 \qquad P_{n-1}(1) = T_n^*(1) - R_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(1) > 0$$

$$X_1 = cos(\frac{\pi}{n}) \quad P_{n-1}(X_1) = T_n^*(X_1) - R_n(X_1) = \frac{-1}{2^{n-1}} - R_n(X_1) < 0$$

$$X_2 = cos(\frac{2\pi}{n}) \quad P_{n-1}(X_2) = T_n^*(X_2) - R_n(X_2) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(X_2) > 0$$

$$\vdots$$

$$X_n = cos(\pi) = -1 \quad P_{n-1}(X_n) = T_n^*(X_n) - R_n(X_n) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(X_n) \lesseqgtr 0$$

Les $(n+1)$ points $X_0 = 1, ..., X_n$ pour lesquels T_n^* prend les valeurs $\frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^{n-1}}; ...$

Donc $P_{n-1}(x)$ possède au moins n racines dans $[-1,1]$. Ceci n'est pas possible car le degré $P_{n-1} \leq n-1$.

Donc $||T_n^*|| = Min||R_n|| \quad R_n \in P_n$.

Théorème Si $P_n \in \mathbb{P}_n$ = polynôme de degré $\leq n$ est tel que la fonction erreur $\epsilon_n = f - P_n$ atteint les *valeurs extrêmes alternées* $M; -M; M; ...$ à $M = ||\epsilon_n||$ en *au moins* $n+2$ points $X_1, X_2, ..., X_{n+2} \in [a,b]$ alors P_n est le polynôme qui réalise la meilleure approximation de f sur $[a,b] (P_n = P_n^*)$

Démonstration (Par l'absurde)

Supposons $\exists q_n \in \mathbb{P}_n / ||f-q_n|| < ||f-P_n|| = ||\epsilon_n|| = M$, $Max|f(x)-q_n(x)| < M \Leftrightarrow -M < f(x) - q_n(x) < M \quad a \leq x \leq b \quad \forall x \in [a,b]$

$$r_n = q_n - p_n \text{degré de } r_n \leq n$$
$$r_n = f - P_n + q_n - f = \epsilon_n + q_n - f$$

$$r_n(x_1) = \epsilon_n(x_1) + q_n(x_1) - f(x_1) = M + q_n(x_1) - f(x_1) > 0$$
$$r_n(x_2) = \epsilon_n(x_2) + q_n(x_2) - f(x_2) = M + q_n(x_2) - f(x_2) < 0$$
$$\vdots$$
$$r_n(x_{n+2}) = \epsilon_n(x_{n+2}) + q_n(x_{n+2}) - f(x_{n+2}) = M + q_n(x_{n+2}) - f(x_{n+2}) \gtrless 0$$

$r_n(x)$ change au moins $(n-1)$ fois de signe dans $[a,b]$ en raison de l'aternance de $\epsilon_n \Rightarrow r_n$ possède au moins $(n+1)$ racines ce qui est impossible.

Exercice 1 Polynôme de Chebyshev

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) & = & 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) & = & 1, T_1(x) = x \end{cases}$$

1. Montrer que $T_n(x) = cos(\theta) \quad |x| \leq 1 \quad \theta = arccos(x)$
2. Montere que le coefficient dominant de T_n est $a_n = 2^{n-1}$
3. Montrer que $T_n(x) = \frac{1}{2}((x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2}-1)^n) \forall x \in \mathbb{R}$
4. Montrer que $\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x).T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \forall n \neq m$

1. Par récurence sur n :

$$\begin{cases} n = 0 & T_0(x) = cos(0) = 1 \\ n = 1 & T_1(x) = x = cos(\theta) \end{cases}$$

Hypothèse Supposons que $T_k(x) = cos(k\theta)$

$$T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2.cos(\theta).cos(n\theta) - cos(n-1)\theta$$
$$= 2.cos(\theta).cos(n\theta) - (cos(n\theta).cos(\theta) + sin(\theta).sin(n\theta))$$
$$= cos(\theta).cos(n\theta) - sin(\theta).sin(n\theta) = cos(n+1)\theta$$

2.

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) & = & 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) & = & 1, T_1(x) = x \end{cases}$$

Supposons que le coefficient dominant de T_n est $a_n = 2^{n-1}$

$$T_{n+1}(x) = 2x.T(x) - T_{n-1}(x) = 2x.(2^{n-1}.X^n + R_{n-1}(x)) - T_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2.2^{n-1} = 2^n$$

3.

$$T_{n+1} = 2x.T_n - T_{n-1}$$

$$T_{n+1} - 2x.T_n + T_{n-1} = 0(\text{équation récurente})(*)$$

L'équation caractéristique : $r^2 - 2xr + 1 = 0$

2 solutions particulières de l'équation (*) : r_1^n et r_2^n.

En effet $r_1^{n+1} - 2x.r_1^n + r_1^{n-1} = r_1^{n-1}(r_1^{n-1} - 2x.r_1 + 1) = 0$, de même pour r_2^n.

La solution générale de $(*)$ est $T_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$ où α et β sont déterminées par les conditions initiales.

4.

$$T_{n+1}(x) = 2 \times T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_n(x) = \cos(n.\theta) \qquad \theta = \arccos(x) \Leftrightarrow$$

$$X = \cos(\theta) \Rightarrow dx = -\sin(\theta)d\theta$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n.\theta).\cos(m\theta)}{|\sin(\theta)|}(-\sin(\theta)d\theta) = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \cos(n\theta).\cos(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\theta}{n-m}\right] = 0$$

5.

$$T_n(x) = 0 \qquad |x| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n.\Theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

Les racines de $T_n(x)$ soit :

$$X_k = \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}) \qquad k = 0,1 \quad n = 1$$

Exercice 2 Polynôme de Legendre

On considère les polynômes :

$$\begin{cases} P_0(x) & = 1 \\ P_n(x) & = \frac{1}{2^n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Les polynômes vérifient la relation $P_n(x) = \frac{2n-1}{n} \times P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_n(x) \quad \forall n \geq 2$.

1. Montrer que $\int_{-1}^{1} x^k.P_n(x)dx = 0 \quad \forall k = 0, 1, ..., n-1$.
2. En déduire la relation d'orthogonalité : $\int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x)dx = 0 \quad \forall n \neq m$.
3. Montrer que le coefficient dominant de $P_n(x)$ est : $a_n = \frac{(2.n)!}{2^n(n!)^2}$
4. Montrer que $||P_n|| = \sqrt{\frac{2}{2n-1}}$

   (Rappel : $||P_n|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx}$)

1.

$$\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)dx \begin{cases} u^1 & = \frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right) \\ v & = x^k \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left(\left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\right]_{-1}^{1}\right) - k\int_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$$

$$= \frac{-k}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)dx$$

Deuxième intégration par partie

$$I = -\frac{k}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)dx$$

$$= -\frac{k}{2^n n!}\left(\left[X^{k-1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\right]_{-1}^{1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)dx\right)$$

$$I = \frac{k(k-1)}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^{k-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)dx$$

Après p intégration par parties, on obtient :

$$I = \frac{(-1)^p.k(k-1)(k-2)...(k-p+1)}{2^n n!} \int_{-1}^{1} x^{k-p} \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}} \left(\left(x^2-1\right)^n \right) dx$$

Si $p = k$ (k intégrations par partie) :

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left(\left(x^2-1\right)^n \right) dx \\ &= \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} \left(\left(x^2-1\right)^n \right) \right]_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} x^k.P_m(x) =^? 0 \quad \forall n \neq m$$

Supposons que $n < m$ $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} x^k.P(x)dx = 0 \quad \text{car } k < m \text{(première partie)}$$

3.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n-1)}{n} x.P_{n-1}(x) - \frac{(n-1)}{n} P_{n-2}(x) \quad \forall n \geq 2 \\ &= n.x.\deg(n) - n.P_{n-2}(x) \end{aligned}$$

a_n est le coefficient dominant de $P_n(x)$.

$$a_n = \frac{(2n-1)}{n} a_{n-1} \quad a_{n-1} \text{ est le coefficient dominant de } P_{n-1}$$

$$\begin{cases} a_n & = & \frac{(2n-1)}{n} a_{n-1} \\ a_{n-1} & = & \frac{(2n-3)}{n-1} a_{n-2} \\ a_{n-2} & = & \frac{(2n-5)}{n-2} a_{n-3} \\ \vdots & & \\ a_2 & = & \frac{3}{2} a_1 \end{cases}$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(x^2-1\right) = \frac{1}{2} \times 2x = x$$

$$P_1(x) = x$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1}{n!} = \frac{(2n)!}{n!.2.4.5\dots 2n} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

4.

$$\left.\begin{array}{ll} ||P_n|| & = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx} \\ P_n(x) & = a_n.x^n + Q_{n-1}(x) \end{array}\right\} ||P_n||^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

$$= a_n \int_{-1}^{1} x^n.P_n(x) + \int_{-1}^{1} Q_{n-1}(x).P_n(x)dx$$

$$= a_n \int_{-1}^{1} x^n \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2-1\right) dx$$

$$= \frac{a_n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} x^n \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2-1\right) dx$$

En utilisant la première question avec $k = 1$:

$$\int_{-1}^{1} x^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\left(x^2-1\right)^n\right) dx = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x-1)^n dx$$

$$||P_n||^2 = \frac{a_n}{2nn!}(-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = \frac{a_n(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx$$

Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$:

$$\left\{\begin{array}{lllll} v & = & (x^2-1) & \rightarrow & v' = n(x^2-1)^{n-1}2x \\ n' & = & 1 & \rightarrow & n = x \end{array}\right.$$

$$I_n = \left[x(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - 2n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} x^2 dx$$

$$= -2n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} x^2 dx = -2n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} (x^2-1+1) dx$$

$$= -2n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx - 2n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} dx$$

$$\begin{array}{lll} (2n-1)I_n & = -2nI_{n-1} & \Rightarrow I_n = \frac{-2n}{2n+1} I_{n-1} \\ & & \Rightarrow I_n = \frac{(-2)^n n!.I_0}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3} = \frac{(-1)^n.2^{n+1}n!}{(2n+1)!} 2^n n! \end{array}$$

$$||P_n||^2 = \frac{(2n)!(-1)^n}{2^n (n!)^2 2^n} (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)} = \frac{2}{2n+1}$$

$$\Rightarrow ||P_n|| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

1.4 Méthode des moindres carrés

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$$(f,g) \in E \times E \longrightarrow < f,g > \in \mathbb{R}$$
$$||f|| = \sqrt{< f,f >}$$

Soit $F \subset E$ (sous-espace vectoriel) de dimension finie.

Théorème Une condition nécessaire et suffisante pour que $\phi^* \in F$ soit une meilleure approximation de $f \in E$ et que $< f.\phi^*, \phi >= 0 \quad \forall \phi \in F$

Démonstration

Condition nécessaire Soit $\phi^* \in F$ la meilleure approximation de $f \in E$, supposons $\exists \phi_1 \in F$ tel que $< f - \phi^*, \phi_1 >= \alpha \neq 0$.

Soit $\phi_2 = \phi^* + \beta.\phi_1$ avec $\beta = \frac{\alpha}{||\phi_1||^2}$

$$\begin{aligned}
||f-\phi_2||^2 \quad &= < f-\phi_2, f-\phi_2 > \\
&= < f-\phi^*-\beta.\phi_1, f-\phi^*-\beta.\phi_1 > \\
&= ||f-\phi^*||^2 - 2\beta < f-\phi^*, \phi_1 > + \beta^2 ||\phi_1||^2 \\
&= ||f-\phi^*||^2 - 2\beta\alpha + \beta^2 ||\phi_1||^2 \\
&= ||f-\phi^*||^2 - 2\frac{\alpha^2}{||\phi_1||} + \frac{\alpha^2}{||\phi_1||^2} \\
&= ||f-\phi^*||^2 - \frac{\alpha^2}{||\phi_1||^2} \\
&= ||f-\phi^*||^2 - \frac{\alpha^2}{||\phi_1||^2} \\
&\Rightarrow ||f-\phi_2|| < ||f-\phi^*|| \text{ce qui est absurde car } \phi^* \text{ est déjà la meilleure approximation de } f \\
&\Rightarrow < f-\phi^*, \phi >= 0 \forall \phi \in F
\end{aligned}$$

Condition suffisante Supposons que $< f - \phi^*, \phi >= 0 \quad \forall \phi \in F$.

Soit $\phi_1 \in F$ tel que $< f - \phi_1, \phi >= 0 \quad \forall \phi \in F$.

$$\begin{aligned}
||f-\phi||^2 \quad &= < f-\phi, f-\phi > \\
&= < (f-\phi_1)-(\phi-\phi_1), (f-\phi_1)-(\phi-\phi_1) > \\
&= ||f-\phi_1||^2 - 2 < f-\phi_1, \phi-\phi_1 > + ||\phi-\phi_1||^2 \\
&= ||f-\phi_1||^2 + ||\phi-\phi_1||^2 \qquad \forall \phi \in F \\
&\Rightarrow ||f-\phi_1|| \leq ||f-\phi|| \quad \forall \phi \in F \\
&\Rightarrow ||f-\phi_1|| = \min ||f-\phi|| \Longrightarrow \phi_1 = \phi^*
\end{aligned}$$

Remarque Cette condition montre que l'élément ϕ^* représente la projection orthogonale de f sur F.
ϕ^* est unique

Construction de ϕ^*

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ une base de F.

$$\varphi^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^* . \varphi_k$$

La condition d'orthogonalisation $< f - \varphi^*, \varphi_j >= 0 \quad \forall j = 1 \dots n$

$$\left\langle f - \sum_{k=1}^{n} a_k^* . \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$$< f, \varphi_j > - \sum_{k=1}^{n} a_{k=1}^* < \varphi_k, \varphi_j >= 0 \quad \forall j = 1 \dots n$$

$$(S) \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} < \varphi_k, \varphi_j > a_k^* =< f, \varphi_j > \\ \forall j = 1 \dots n \end{cases}$$

C'est un système linéaire à n équations et n inconnues.

Remarque Si la base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ est orthonormée, la matrice du système sera diagonale.

La matrice du système (S) est la matrice de *Gram* :

$$G_{kj} =< \varphi_k, \varphi_j > \forall k = 1 \dots n, j = 1 \dots n$$

(a) **Cas continu**

Soit ω une fonction poids, position telle que $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$ existe $\forall f \in E = \mathcal{C}([a, b])$.

$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$ produit scalaire sur E.

$F = \epsilon$ sous-espace vectoriel de dimension n.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k^* \int_a^b \varphi_k(x)\omega(x)dx = \int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx \\ \forall j = 1 \dots n \end{cases}$$

$$\text{La matrice de Gram : } G_{kj} = \int_a^b \varphi_k(x).\varphi_j(x)\omega(x)dx$$

(b) **Cas discret**

Le produit scalaire discret : $< f, g >= \sum_{i=0}^{N} f(x_i)g(x_i)\omega(x_i)$.

f est donnée aux points $x_i (i = 0 \dots N)$

$$||f|| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} f(x_i)\omega(x_i)}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k^* \sum_{i=0}^{N} \varphi_k(x_i).\varphi_j(x_i)\omega(x_i) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)\varphi_j(x_i)\omega(x_i) \\ \forall j = 1 \dots n \text{ La matrice } G_{kj} = \sum_{i=0}^{N} \varphi_k(x_i).\varphi_j(x_i)\omega(x_i) \end{cases}$$

1.5 Interpolation

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a, b]$.

$f(x)$ est connue en $(n+1)$ points $x_i \in [a, b] (i = 1 \dots n+1)$.

Chercher une fonction φ d'un type choisi à l'avance qui interpole $f(x)$ sur $[a, b]$, c'est déterminer φ tel que $\varphi(x_i) \quad \forall i = 1 \dots n+1$.

En général, on cherche φ dans l'espace des polynômes.

1.5.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soit $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i)$ où les fonctions L_i sont des polynômes de degré au plus n, telles que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

$$L_i(x_j) = 0 \Rightarrow L_i(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1}) \qquad \forall j \neq i$$

$$L_i(x_i) = 1 \Rightarrow C = [(x_i - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_{n+1})]$$

$$L_i(x) = \prod_{j=1 \ j/neqi}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \text{ La base de Lagrange}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j=1 \ j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) \text{ Le polynôme de Lagrange}$$

$$P_n(x_k) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x_k) f(x_i)$$

$$P_n(x_k) = f(x_k) \qquad \forall k = 1 \dots n+1$$

Exemple Soit f continue telle que :

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	1	3	2	5

Construire le polynôme d'interpolation $P_z(x)$ de $f(x)$.

$$P_z(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1)(-3)(-4)}.1 + \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)}.3 + \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)}.2 + \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)}.5$$

$$P_z(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{14}{6}x^2 + \frac{13}{3}x + 1$$

Pour vérifier que l'on a pas fait d'erreur de calcul, on véfifie que $P_z(x_i) = f(x_i)$

Remarque L'erreur d'interpolation $\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x)$.

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$ (f est dérivable $n+1$ fois avec ses dérivées continues).

$$\exists \eta_x \in [a,b] / \varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}$$

1.5.2 Polynôme d'interpolation de Newton

Différence divisées Soit f une fonction donnée en $n+1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ($x_i \neq x_j$ $i \neq j$).

On appelle différence divisée d'ordre $0, 1, 2, \ldots, n$ de f les expressions suivantes :

Ordre	Notation	Définition
0	$f[x_i]$	$f(x_i)$
1	$f[x_i, x_j]$	$\frac{f[x_i]-f[x_j]}{x_i-x_j}$ $i \neq j$
2	$f[x_i, x_j, x_k]$	$\frac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$ $i \neq j \neq k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$f[x_1, \ldots, x_{n+1}]$	$\frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_2,\ldots,x_{n+1}]}{x_1-x_{n+1}}$

Polynôme de Newton

$$f[x, x_1] = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \Rightarrow f(x) = f(x_1) + (x - x_1).f[x, x_1]$$

$$f[x, x_1, x_2] = \frac{f[x, x_1] - f[x_1, x_2]}{x - x_2} \Rightarrow f[x, x_1] = f[x_1, x_2] + (x - x_2).f[x, x_1, x_2]$$

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1).f[x_1, x_2] + (x - x_1)(x - x_2).f[x, x_1, x_2]$$

$$P_1(x) = f(x_1) + (x - x_1).f[x_1, x_2]$$

$$P_1(x_1) = f(x_1)$$

$$P_1(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1).\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f(x_1) - f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$$

Donc $P_1(x)$ interpole la fonction f aux points x_1 et x_2. En réitérant le procédé, on obtient :

$$f(x) = f(x_1) + (x-x_1).f[x_1, x_2] + (x-x_1)(x-x_2)f[x_1, x_2, x_3] + \ldots + (x-x_1)\ldots(x-x_n).f[x_1, \ldots, x_{n+1}]$$

$$+ \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i).f[x, x_1, \ldots, x_{n+1}] \qquad \text{l'erreur}$$

$P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de Newton de $f(x)$ aux $(n+1)$ points x_i $(i = 1 \ldots n+1)$.

$$\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).f[x, x_1, \ldots, x_{n+1}]$$

Algorithme de Newton

$$P_0(x) = f(x_1)$$

Pour $m = 0, \ldots, n-1$:

$$P_{m+1}(x) = P_m(x) + (x - x_1) \ldots (x - x_{m-1}).f[x_1, \ldots, x_{m+1}]$$

Exercice 3 Sur $[-1, 1]$ on considère la fonction $f(x) = X^3 - X^2$

1. Décomposer $f(x)$ dans la base de Chebyshev.
2. En déduire $P_2^*(x)$ polynôme de meilleur approximation de degré 2 de $f(x)$. Donner l'erreur d'approximation $||f - P^*||$

$$||f|| = max|f(x)| \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = \quad a_0.T_0(x) + a_1.T_1(x) + a_2.T_2(x) + a_3.T_3(x)$$

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \end{cases} \qquad a_0 + a_1x + a_2(2x^2 - 1) + a_3(4x^3 - 3x)$$

$$a_0 + a_1x + 2a_2x^2 - a_2 + 4a_3 + 4a_3x^3 - 3a_3x$$
$$a_0 - a_2 + (a_1 - 3a_3)x + 2a_2x^2 + 4a_3 + 4a_3x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 - a_2 = 0 \\ a_1 - 3a_3 = 0 \\ 2a_1 = -1 \\ 4a_3 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_1 = \frac{3}{4} \\ a_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc $f(x) = -\frac{1}{2}T_0(x) + \frac{3}{4}T_5(x) - \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{1}{4}T_3(x)$

$$\epsilon = f(x) - P_2(x) = \frac{1}{4} = T_3(x)$$

$$M = ||\epsilon|| = \max|\epsilon(x)| = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} T_3(x) = \cos(3\theta) \\ \theta = \arccos(x) \end{cases}$$

Théorème Si la fonction erreur $\epsilon(x)$ atteint la veuleur extrême alternée M et $-M$ en au moins $(n+2)$ points, alors $P_n(x) = P_n^*(x)$.

$$\epsilon(x) = \frac{1}{4}T_3(x) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) \qquad \theta = \arccos(x)$$

Les $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$ $\quad n = 3$.

$$\begin{array}{lll} k=0 & x_0 = 1 & \varepsilon(x_0) = \frac{1}{4} = M \\ k=1 & x_1 = \cos\frac{\pi}{3} & \varepsilon(x_1) = -\frac{1}{4} \\ k=2 & x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} & \varepsilon(x_2) = \frac{1}{4} \\ k=3 & x_3 = \cos\pi & \varepsilon(x) = -\frac{1}{4} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ x_3 = \cos\pi = -1 \end{cases} \Rightarrow P_2(x) = P_2^*(x)$$

Donc :

$$\begin{array}{rl} P_2^*(x) = & -\frac{1}{2}T_0(x) + \frac{3}{4}T_1(x) - \frac{1}{2}T_2(x) \\ & = -4 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}(2x^3 - 1) \\ & = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}X - x^2 + \frac{1}{2} \\ & = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x - x^2 \end{array}$$

Exercice 4 Soit $f(x)$ une fonction continue donnée aux points $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$.
$f(0) = -5, f(1) = 17, f(2) = 115, f(4) = 143$
En utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange, interpoler $f(2)$.

$$f(0) = -5, f(1) = 17, f(2) = 115. f(4) = 143$$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \left(\frac{x - x_i}{x_i - x_j}\right)$$

Interpolons $f(2)$:

$$L_1(2) = \frac{(2-1)(2-3)(2-4)}{(-1)(-3)(-4)} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

$$L_2(2) = \frac{(2-0)(2-3)(2-4)}{1(-2)(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$L_3(2) = \frac{2(2-1)(2-4)}{3(3-1)(3-4)} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$L_4(2) = \frac{2(2-1)(2-3)}{4(3)(1)} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

La valeur interpolée est : $f(2) \simeq P_3(2) = -\frac{1}{6}(-5) + \frac{2}{3}(17) + \frac{2}{3}(115) - \frac{1}{6}(143) \simeq 65$

Exercice 5 Soit $f \in C^{n+1}[a,b]$, $P_n(x)$ son polynôme d'interpolation de $f(x)$ aux points $x_i \in [a,b]$ $(i = 1 \dots n+1)$

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{erreur d'interpolation}$$

Montrer qu'il existe $\eta_x \in [a,b]$ tel que $\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)\frac{f(\eta_x)}{(n+1)!}$

Rappel Théorème de Rolle

f continue, dérivable sur $[a,b]$. Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists C \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

$$\varepsilon(x_i) = 0 \text{ car } P_n(x_i) = f(x_i)$$

$$\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)A_x \qquad x.f(x_i) \quad x \neq x_i \quad A_x \text{ quantité inconnue}$$

Soit la fonction $\varphi(y) = f(y) - P_n(y) - \prod_{i=1}^{n+1}(y - x_i)A_x \quad \forall y \in [a,b]$

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = 0 & \forall i = 1 \dots n+1 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

φ admet $(n+2)$ racines. $\varphi \in C^{n+1}$ car $f \in C^{n+1}$.
On applique le théorème de Rolle φ' admet au moins $(n+1)$ racines.
On applique le théorème de Rolle φ'' admet au moins n racines.
On applique le théorème de Rolle $\varphi^(3)$ admet au moins $n-1$ racines.

$$\vdots$$

On applique le théorème de Rolle $\varphi^(p)$ admet au moins $(n+1) - p$ racines.
Si $p = n+1 \Rightarrow \varphi^{(n+1)}$ admet au moins 1 racine $\eta_x \quad \varphi^{(n+1)}(\eta_x) = 0$
or :

$$\varphi^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - 0 - (n+1)!A_x$$

$$\varphi^{(n+1)}(\eta_x) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(\eta_x) - (n+1)!A_x = 0 \Rightarrow A_x = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}$$

Donc :

$$\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)\frac{f^{(n+1)(\eta_x)}}{(n+1)!}$$

$$f[x_1, \dots, x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_2, \dots, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}$$

1.6 Dérivation numérique

Lorsqu'une fonction $f(x)$ dont on veut calculer les dérivées siccessives $f'(x)$, $f''(x), \dots$ est données par les valeurs $f(x_i)$, on procède de la manière suivante :

(i) $f(x) \simeq g(x)$ (polynôme d'interpolation).

(ii) $f^(k)(x) \simeq g^{(k)} \simeq g^{(k)}(x)$

1.6.1 Dérivée d'un polynôme par division synthétique

$$f(x) \simeq P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j.x^j$$

Soit à calculer :

$$f^{(k)}(x = t) \qquad \text{dérivée d'ordre } k$$

$$f^{(k)} \simeq P_n^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} j(j-1)\dots(j-k+1)a_j.x^{j-k}$$

Il suffit alors de calculer $P_n^{(k)}(x = t)$.

$$P_n(x)|x-t \qquad \text{(division par)x-t}$$

$$P_n(x) = (x-t)Q_{n-1}(x) + R_n \quad Q_{n-1}(x) = b_{n-1}X^{n+1} + \dots + b + 0$$

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{j-1} = t.b_j + a_j \quad j = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

Exemple

$$P_4(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 6 \qquad t = 2$$

j	4	3	2	1	0	
$P_4 a_j$	2	-5	1	-7	6	
$Q_3 b_j$		2	-1	-1	-9	-12

On peut poursuivre le processus :

j		4	3	2	1	0	Reste
P_4	a_j	2	-5	1	-7	6	
Q_3	b_j		2	-1	-1	-9	$-12 = R_4$
Q_2	c_j			2	3	5	$1 = R_3$
Q_1	d_j				2	7	$19 = R_2$
Q_0	e_j					2	$11 = R_1$

$$R_0 = a_n = 2 = Q_0$$

$$\left.\begin{array}{l} P_4(x) = (x-2).Q_3(x) - 12 \\ Q_3(x) = (x-2).Q_2(x) + 1 \\ Q_2(x) = (x-2).Q_1(x) + 19 \\ Q_1(x) = (x-2).Q_0(x) + 11 \end{array}\right\} P_4(x) = -12+(x-2)+19(x-2)^2+11(x-2)+2(x-2)^4$$

Ainsi les R_k sont les coefficients du développement de $P_n(x)$ en puissance de $(x-t) \quad (t=2)$.

D'une manière générale :

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} R_e(x-t)^{n-l}$$

Em dérivant k fois :

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{n-k}(n-l)\dots(n-l-k+1)R_e(x-t)^{n-l-k}$$

$$x = t \Rightarrow P_n^{(k)}(t) = k!R_{n-k}$$

$$f^{(k)}(t) \simeq k!R_{n-k}$$

Exercice 6 $f(x)$ continue, donnée aux points : $f(-2) = 69$, $f(2) = 17$, $f(3) = 24$, $f(5) = -22$

1. Construire le tableau des différences divisées.
2. En déduire le polynôme d'interpolation de Newton.
3. En utilisant l'algorithme de division synthétique, interpoler $f(4)$ et donner les approximations des dérivées $f'(4)$, $f''(4)$, $f'''(4)$.

x_i	0	1	2	3
-2	**69**	**-13**		
2	17		**4**	**-2**
3	24	7	-10	
5	-22	-23		

Pour calculer les machins de ce tableau :

$$f[x_i;x_j] = \frac{f[x_i]-f[x_j]}{x_j-x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

$$f[-2,2,3] = \frac{f[2,3]-f[-2,2]}{5}$$

2. Le polynôme d'interpolation de Newton

$P_3(x) = f[-2]+(x+2)f[-2,2]+(x+2)(x-2)f[-2,2,3]+(x+2)(x-2)(x-3)f[-2,2,3,5]$

On remplace ensuite les coefficients :

$$P_3(x) = 69 - 13(x+2) + 4(x+2)(x-2) - 2(x+2)(x-2)(x-3)$$

On développe tout pour avoir le polynôme dans sa forme canonique (utile pour la question suivante) :

$$P_3(x) = -2x^3 + 10x^2 - 5x + 3$$

On peut vérifier que ce polynôme interpole bien les points donnés de f.

3. Algorithme de division synthétique Pour Q_1,0 : 4 (coeff) * -2 (valeur précédente sur la ligne) + 2 (valeur au dessus) = -6

	j	3	2	1	0	Reste
P_3	a_j	-2	10	-5	3	
Q_2	b_j		-2	2	3	$15 = R_3$
Q_1	c_j			-2	-6	$-21 = R_2$
Q_0	d_j				-2	$-14 = R_1$

$$P_3(x) = 15 - 21(x-4) - 14(x-4)^2 - 2(x-4)^3$$
$$f(4) \simeq P_3(4) = 15$$

$$f^{(k)}(t) \simeq k!_{n-k}$$
$$f'(4) \simeq 1!R_2 = -21$$
$$f''(4) \simeq 2!R_1 = -28$$
$$f'''(4) \simeq 3!R_0 = -12$$

Exercice 7 Soit $f(x)$ continue, donnée aux points $f(-2) = -32$, $f(-1) = 26$, $f(0) = 30$, $f(1) = 28$

1. Construire le tableau des différences divisées.
2. En déduire le polynôme d'interpolation de Newton.
3. En utilisant l'algorithme de division synthétique, interpoler $f(2)$ et donner les approximations des dérivées $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$.

x_i	0	1	2	3
-2	**-32**	**58**		
-1	26		**27**	**8**
0	30	4	-3	
1	28	-2		

2. Le polynôme d'interpolation de Newton

$P_3(x) = f[-2]+(x+2)f[-2,-1]+(x+2)(x+1)f[-2,-1,0]+(x+2)(x+1)(x)f[-2,-1,0]$

On remplace ensuite les coefficients :

$$P_3(x) = -32 - 58(x+2) - 27(x+2)(x+1) - 8(x+2)(x+1)(x)$$

On développe tout pour avoir le polynôme dans sa forme canonique (utile pour la question suivante) :

$$P_3(x) = 8x^3 - 3x^2 - 7x + 30$$

On peut vérifier que ce polynôme interpole bien les points donnés de f.

j		3	2	1	0	Reste
P_3	a_j	8	-3	-7	30	
Q_2	b_j		8	13	19	$68 = R_3$
Q_1	c_j			8	29	$77 = R_2$
Q_0	d_j				8	$45 = R_1$

$$P_3(x) = 68 + 77(x-2) + 45(x-2)^2 + 8(x-2)^3$$
$$f(2) \simeq P_3(2) = 68$$

$$f^{(k)}(t) \simeq k!_{n-k}$$
$$f'(2) \simeq 1!R_2 = 77$$
$$f''(2) \simeq 2!R_1 = 90$$
$$f'''(2) \simeq 3!R_0 = 48$$

1.7 Intégration numérique

On se propose d'étudier quelques méthodes numériques permettant d'approcher $\int_a^b f(x)dx$. De telles méthodes s'imposent en particulier lorsque la primitive $F(x)$ de $f(x)$ n'est pas connue, ou dans le cas où $f(x)$ n'est donnée que par points.

Par exemple pour : $\int_a^b e^{-x^2}dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$

1.7.1 Méthode générale

$$I = \int_a^b f(x)p(x)dx \quad p(x) : \text{fonction poids}, \ > 0$$

L'idée est d'utiliser les valeurs de f aux points $x_i \in [a,b] \quad i = 0 \ldots n$.

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \sum_{i=0}^{a} \omega_i . f(x_i) + E \quad E \text{ l'erreur}$$

Les coefficients ω_i sont déterminés de telle sorte que E soit nulle lorsque $f(x)$ appartient à une certaine classe de fonctions (les polynômes de degré $\leq N$).

$$f(x) = \phi(x) + E(x)$$

$$\phi(x_i) = f(x_i) \quad i = 0 \ldots n$$

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b \phi(x)p(x)dx + \int_a^b E(x)p(x)dx$$

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)f(x_j) \quad \text{Lagrange}$$

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} L_j(x)f(x_j)p(x)dx + \int_a^b E(x)p(x)dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\int_a^b L_j(x)p(x)dx \right) f(x_j) + \int_a^b E(x)p(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \omega_j f(x_j) + E$$

$$\text{avec } \omega_j = \int_a^b L_j(x_j)p(x_j)dx \text{ et } E = \int_a^b E(x)p(x)dx$$

1.7.2 Quelques exemples de méthodes composées

$$[\alpha, \beta] \qquad I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

La méthode consiste à décomposer $[\alpha, \beta]$ en k intervalles $[\alpha_i, \alpha_{i+1}] \quad i = 0, 1, \ldots k$ et ensuite à approcher chaque $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx$ en remplaçant $f(x)$ par son polynôme d'interpolation.

Exemple 1 $t_i \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

$$f(x) \simeq P_0(x) = f(t_i) \quad \forall x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$$
$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(t_i)$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\, f(t_i) \quad \text{Somme de Riemann}$$

Exemple 2 Sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ on interpole $f(x)$ par $P_1(x)$ polynôme de degré 1 qui interpole $f(x)$ aux points α_i et $\alpha i + 1$.

$$\int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq \int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} P_1(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} \left[\left(\frac{x - \alpha_{i+1}}{\alpha_i - \alpha_{i+1}}\right) f(\alpha_i) + \frac{x - \alpha_{i+1}}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} f(\alpha_{i+1})\right]$$
$$\int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} \left[\frac{(x - \alpha_{i+1})^2}{2}\right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} + \frac{f(\alpha_{i+1})}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$$
$$\int_{\alpha}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{(\alpha_{i+1}) - \alpha_i}{2} \left(f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})\right)$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{2} \left(f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})\right)$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2} (f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1}))$$

Définition Soit la méthode d'intrégration $\int_\alpha^\beta f(x)p(x)dx \simeq \sum_{i=0}^k$.

Nous dirons que la méthode d'intrégration est d'ordre N si elle est exacte pout tout polynôme de degré 'N, c'est-à-dire : $E(f) = \int_\alpha^\beta f(x)p(x)dx - \sum_{i=0}^k \alpha_i f(x_i) = 0 \quad \forall f$ un polynôme $d'N$.

Soit $U_+ = \max(u, 0)$. Pour t fixé, $K_N(t) = E(x \mapsto (x-t)_t^N) \quad N$: ordre de la méthode s'appelle le noyau de Péano de la méthode d'intégration. avec la convention $(x - t)_t^0 = 1 \quad x \geq t \qquad = 0 \quad x < t$.

Théorème de Péano

On suppose que la méthode d'intégration d'intégration est d'ordre $N \geq 0$ et que $f \in \mathcal{C}^{N+1}[a, b]$ alors :

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt$$

Conséquence

$$|E(f)| \leq \frac{1}{N!} M_{N+1} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt$$

Corollaire Si de plus $K_N(t)$ garde un signe constant sur $[a,b]$ alors $\exists \eta \in [a,b]$

$$E(f) = \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{(N+1)!} E(x \mapsto x^{(N+1)})$$

Démonstration du corollaire

Rappel La deuxieme formule de la moyenne.

$f(x)$, $g(x)$ continue sur $[a,b]$. On suppose que $g(x)$ garde un signe constant sur $[a,b]$ alors $\exists \eta \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\eta)\int_a^b g(x)dx$

1$^{\text{re}}$ formule

$$\exists c \in [a,b] / \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t) f(t) dt$$

D'après la deuxième formule de la moyenne :

$$\exists \eta \in [a,b] / E(f) = \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{N!} \int_a^b K_N(t)dt \quad E(x \mapsto X^{N+1})$$

$$= \frac{(N+1)!}{N!} \int_a^b K_N(t)dt = \int_a^b K_N(t)dt = \frac{E(x \mapsto X^{N+1})}{N+1}$$

$$E(t) = \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{N!} \int_a^b K_N(t)dt \quad \forall f \in \mathcal{C}^{N+1}$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{N!} \frac{E(x \mapsto X^{N+1})}{N+1} = \frac{f^{(N+1)}(\eta)}{(N+1)!} E(x \mapsto X^{N+1})$$

Exercice 8 Soit $f(x)$ continue donnée aux points : $f(0) = 1$, $f(2) = 5$, $f(3) = 10$, $f(4) = 15$.

Interpoler $f(1)$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange.

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{3} \prod_{j \neq i \quad j=0}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i)$$

$$L_0(1) = \frac{(1-2)(1-3)(1-4)}{(-2)(-3)(-4)} = \frac{6}{14} = \frac{1}{4}$$

$$L_1(1) = \frac{(1-0)(1-3)(1-4)}{(2)(2-3)(2-4)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$L_2(1) = \frac{1(-1)(-3)}{3(1)(-1)} = -1$$

$$L_3(1) = \frac{(1)(-1)(-2)}{(4)(2)(1)} = \frac{1}{4}$$

Donc : $f(1) \simeq P_3(1) = \frac{1}{4}(1) + \frac{3}{2}(5) - 1 \times 10 + \frac{1}{4} \times 15 = \frac{3}{2}$

Exercice 9 On considère les méthode d'intégration :

$$\int_0^k f(x)dx \simeq h.f(\frac{h}{2}) \tag{1.1}$$

$$\int_0^h f(x)dx \simeq \frac{h.\,(f(i) + f(h))}{2} \tag{1.2}$$

1. Déterminer l'ordre de chaque méthode.
2. Déterminer le noyau de Péano.
3. Étudier l'erreur d'intégration pour chaque méthode.

L'ordre de la méthode (1.1)

$$f(x) = 1 \qquad \int_0^h f(x)dx = \int_0^h dx = h$$

$$h.f(\frac{h}{2}) = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto 1) = 0$$

$$f(x) = x \qquad \int_0^h f(x)dx = \int_0^h xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h = \frac{h^2}{2}$$

$$h(\frac{h}{2}) = \frac{h^2}{2}$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto x) = 0$$

$$f(x) = x^2 \qquad \int_0^h x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{h^3}{3}$$

$$h.f(\frac{h}{12}) = h.\frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{4} = \frac{h^3}{12} \neq 0$$

Donc, la première méthode est d'ordre 1 (exacte pour le polynôme d'ordre ≤ 1).

L'ordre de la méthode (1.2)

$$f(x) = 1 \qquad \int_0^h 1dx = h$$

$$h(\frac{f(0)+f(h)}{2}) = \frac{2h}{2} = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto 1) = 0$$

$$f(x) = x \qquad \int_0^h xdx = \frac{h^2}{2}$$

$$h(\frac{f(0)+f(h)}{2}) = \frac{h^2}{2} = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto x) = 0$$

$$f(x) = x^2 \qquad \int_0^h x^2dx = \left[\frac{h^3}{3}\right]_0^h = \frac{h^3}{3}$$

$$h(\frac{f(0)+f(h)}{2})^2 = \frac{h^3}{2} = h$$

$$\Rightarrow E(x \mapsto x^2) = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = \frac{-h^3}{6} \neq 0$$

$$\Rightarrow N = 1$$

Noyau de Péano

$$K_1(t) = E(x \mapsto (x-t)_+)$$

$$\forall t \in [a,h] \quad K_1(t) = \int_0^h (x-t)_+dx - h\left(\frac{h}{2} - t\right)_+$$

$$= \int_t^h (x-t)dx - h\left(\frac{h}{2} - t\right)_+$$

$$K_1(t) = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right] - h\left(\frac{h}{2} - t\right)_+$$

$$= \frac{(h-t)^2}{2} - h(\frac{h}{2} - t)_+$$

1^{er}cas : si $\frac{h}{2} < t \leq h$

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2}$$

2ecas : $0 \leq t \leq \frac{h}{2}$

$$K_1(t) = \frac{(h-t)^2}{2} - h\left(\frac{h}{2} - t\right)$$

$$K_1(t) = \frac{h^2 - 2ht + t^2}{2} - \frac{h^2}{2} + ht$$

$$K_1(t) = \frac{t^2}{2}$$

On trouve que $K_1(t) \leq 0 \forall t \in [a, h]$. D'après le corollaire de Péano :

$$\exists \eta \in [a, h]/E(f) = \frac{f^{''}(\eta)}{2!}\frac{h^3}{12} = \frac{h}{24}f^{''}(\eta)$$

$$|E(f)| \leq c\frac{h^3}{24} \quad c = \max|f(x)|$$

Péano de la méthode (1.2)

$$K_1(t) = t\,(x \mapsto (x-t)_+)$$

$$= \int_0^h (x-t)_+ dx - \frac{h}{2}\left((-f) + (h-t)_+\right)$$

$$K_1(t) = \int_t^h (x-t)dx - \frac{h}{2}(h-t) \quad \text{car } 0 \leq t \leq h$$

$$(-t)_+ = 0 \quad \text{car } 0 \leq t \leq h$$

$$K_1(t) = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^h - \frac{h}{2}(h-t)$$

$$= \frac{(h-t)^2}{2} - \frac{h}{2}(h-t) = \frac{h^2 - 2ht - t^2}{2} - \frac{h^2}{2} + \frac{ht}{2} = -ht + \frac{t^2}{2} + \frac{ht}{2} = -\frac{ht}{2} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}(t-h) \leq 0 \quad \text{car } 0 \leq t \leq h$$

D'après le corollaire de Péano :

$$\exists \eta \in [a, h]/E(f) = \frac{f^{''}(\eta)}{2!}E(x \mapsto x^2) = -\frac{h^3}{12}f(\eta)$$

$$|E(f)| \leq c\frac{h^3}{12} \quad c = \max|f^{''}(x)|$$

Exercice 10

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{4}\left(f(c) + 3f(\frac{2}{3})\right)$$

1. Ordre
2. Noyau de Péano
3. Erreir d'intégration