ALLi

Matrices :

On dit que A est une matrice à m lignes et n colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$ si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ | & & | \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

où les $a_{ij} \in \mathbb{K}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (réel ou complexe)

On note $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$

Vocabulaire :

Lorsque $m = n$, on parle de matrice carré d'ordre n

Lorsque $m = n$ et $i \neq j = 0$ (toutes les cellules en dehors de la diagonale sont égales à 0), on parle de matrice diagonale : $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdot\cdot 0 & a_{ii} & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots\cdots & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}$

Opérations :

1) Somme

Somme impossible sur matrices de tailles différentes.

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$A + B = (c_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

où $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2) Produit externe :

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$

$\lambda \in \mathbb{K}$

$\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ où $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

3) Produit interne

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,\underline{m}}(\mathbb{K})$ * lignes de B = Colonnes de A

$B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{\underline{m},p}(\mathbb{K})$

$AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Remarques :

$AB \neq BA$

$AB = 0 \nRightarrow A = 0$ ou $B = 0$

$A^2 = 0 \nRightarrow A = 0$

Proposition :

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}^3_m(\mathbb{K})$

alors $(AB)C = A(BC)$

4) Transposée :

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$

${}^tA = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ où $b_{ij} = a_{ji}$

Exemple :

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad {}^t\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_m^2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in (\mathbb{K})$

Alors :

1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

2) ${}^t(\lambda A) - \lambda\,{}^tA$

3) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

5) Trace

Seulement pour les matrices carrées.

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

Exemples :

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = 1 - 3 = -2$$

Propriétés :

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}^2_m(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Alors :

1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

2) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$

3) $tr({}^tA) = tr(A)$

4) $tr(AB) = tr(BA)$

6) Inverse

Définition :

On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$

Si c'est le cas, B est noté A^{-1} est appelé inverse de A

méthode :

$$AX = X' \iff X = A^{-1}X'$$

Exemple :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$AX = X' \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$\iff$

$$\begin{cases} x + y + z = x' \\ x + y = y' \\ -x - z = z' \end{cases}$$

$AX = X' \iff (L2 \leftarrow L2 - L1 ; L3 \leftarrow L3 + L1)$

$$\begin{cases} x + y + z = x' \\ -z = y' - x' \\ y = z' + x' \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z' + y' - z' \\ y = x' + z' \\ z = x' - y' \end{cases}$$

$$AX = X' \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Déterminant

Définition :

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

On appelle déterminant de A le nombre noté

$$\det(A) \text{ ou } \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Défini pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, \Delta(ij)$$

où

1) $\Delta(ij)$ est le déterminant de la matrice en supprimant dans la matrice initiale la i^{er} ligne et la j^{er} colonne.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda) = \lambda$

__Exemple :__

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

④ Développement par rapport à une ligne ou une colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & -1 \\ 2 & \boxed{3} & 5 \\ 4 & \boxed{1} & 3 \end{vmatrix} = (-0) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (+3) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 3 \times 7 - 1 \times 7$$

$$= 14$$

Propriétés:

Soient $(A,B) \in M_n^2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Alors:

1) $\det(AB) = (\det(A))(\det(B))$
2) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
3) A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Diagonalisation:

Si D existe, on a : $D = P^{-1}AP$

Vocabulaire:

Polynome caractéristique:

$$P_A(X) = \det(A - XI_n) \text{ où } I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 & 3 \\ 4 & 5-X & 6 \\ 7 & 8 & 9-X \end{vmatrix}$$

Valeurs propre:

Toute racine de P_A s'appelle une valeur propre de A. L'ensemble des valeurs propres s'appellent le spectre de A. Noté $Sp_{\mathbb{R}}(A)$

calculer $\det(A - xI_n)$ et trouvers les racines qui annulent le determinant.