

Optimización de la supervivencia de las colonias de insectos

Sofía Palacios Cuevas, Martín Morales Trejo

Diciembre 07, 2021

Introducción

En este trabajo se utilizarán las ecuaciones diferenciales ordinarias para modelar la propagación / supervivencia de las colonias de insectos. El estudio de los ciclos de vida de las colonias ha dado pie a la creencia de que la colonia, aparentemente, maximiza el número de insectos reproductores al final de la temporada. Lo anterior permite que la colonia esparza sus genes, propagando así a los de su tipo en una moda óptima. Pueden considerarse diferentes modelos para el estudio de insectos hibernantes y no hibernantes. Sin embargo, el caso de los no hibernantes es más complejo debido a la necesidad de construir recursos substanciales y colmenas para sobrevivir al invierno.

A continuación se considerará un modelo para una colonia en la que estudiamos dos tipos de insectos propios de la misma, obreros y reproductores (reinas). Sea $W(t)$ el número de insectos obreros en la colonia al tiempo t (el cual se mide en días de la temporada), mientras que $Q(t)$ corresponde al número de insectos reproductores (reinas) en la colonia al tiempo t . Para este estudio, no vamos a suponer ninguna distinción de clase de edad.

Para estudiar las tasas de crecimiento de cada especie, se propone el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dQ(t)}{dt} &= b \cdot c \cdot (1 - u(t)) \cdot R(t) \cdot W(t) - v \cdot Q(t) \\ \frac{dW(t)}{dt} &= b \cdot u(t) \cdot R(t) \cdot W(t) - \mu \cdot W(t)\end{aligned}$$

Como condiciones iniciales, usamos $W(0) = 1$ y $Q(0) = 0$ debido a que consideramos a la abeja reina fundadora como una obrera, puesto que ella busca alimento para la primera cría.

Existe también otra población a considerar: los zánganos. Éstos vienen de otras colmenas y son necesarios para fertilizar a las hembras. Una buena colmena durante la temporada de apareamiento puede tener entre 1 - 10 por ciento de zánganos que se reúnen diariamente en nubes que las reinas buscan para ser fecundadas. Las reinas se aparean con 5-20 zánganos y cada zángano muere después del apareamiento. Desafortunadamente, los zánganos no hacen otra cosa que comer miel. No recogen recursos, no defienden, no hacen cera ni cuidan de las crías. Normalmente, todos los zánganos son expulsados de la colmena al final de la temporada. Por lo tanto, en nuestro modelo, no los consideramos.

Descripción de las variables:

Variable	Descripción
$R(t)$	Es la función de retorno (por unidad de miembro de la colonia) que representa la abundancia de recursos y la capacidad de forrajeo de la colonia en el momento t . La abundancia de recursos es muy importante para las abejas melíferas y no es en absoluto una constante. Se trata, pues, de una primera aproximación. Puede ser una medida de la diversidad floral en el caso de una colonia de abejas. A menudo se puede suponer que es constante, pero los modelos son bastante robustos y se aplican cuando $R(t)$ refleja más los cambios más amplios del ecosistema.
$-\mu W(t)$	Es un término de decaimiento exponencial que dice que, en ausencia de cualquier entrada de energía ($R(t)$), la población de obreras morirá.
$u(t)$	Es el porcentaje de utilización (entre 0 y 1) que la colonia aplica a la producción de las obreras. Volviendo a la ecuación de $Q(t)$ vemos que $(1 - u(t))$ representa entonces la parte (entre 0 y 1) del recurso que la colonia aplica a la producción de reproductores (reinas).
b	Significa un factor de conversión de la biomasa, es decir, de la energía del recurso, cuánto se convierte realmente en insectos trabajadores por unidad de tiempo.
c	representa un factor de conversión diferencial, es decir, si $c > 1$ se necesita más energía para producir un insecto reproductor que para producir un insecto trabajador y si $c = 1$ la energía necesaria para producir un insecto trabajador y uno reproductor es la misma. A menudo se asume este último caso. Mientras que para producir una reina se necesita más energía, por ejemplo, más cera para la célula (más grande) y más jalea real (probablemente el doble), para una reina es más grande, tanto como el doble de un insecto obrero. Pero la energía no es mucha en ambos casos.
$-vQ(t)$	Representa la decadencia exponencial de la población de reproductores en ausencia de otros aportes de energía. Nota: En el caso de las abejas melíferas, la población reproductora es básicamente de 1 ó 2. Producen varias reinas al mismo tiempo (de 2 a 8 aproximadamente) cuando se preparan para enjambrear. Pero las reinas “luchan” y sólo una sobrevive. No se sabe por qué hacen esto, pero se cree que es para gestionar el riesgo, ya que deben tener una (pero no más) que sobreviva o la colmena morirá. Esto se debe a que la madre de estas reinas suele salir en un enjambre una semana antes de este evento. Por lo tanto, tienes dos reinas supervivientes, una en casa y otra que se ha ido para empezar una nueva colmena. Esto puede repetirse varias veces en una temporada, por lo que puede haber hasta 4 reinas supervivientes (3 enjambres) al final de la temporada.

Otro factor es el inventario de miel. Cuando hay mucha, las abejas empiezan a cambiar de comportamiento. Se preparan para un enjambre y crían más abejas. Así que tal vez también se podría incluir un “Inventario” de recursos que se añade con los recursos disponibles de fuera de la colonia. Tal vez haya un umbral de inventario por encima del cual el comportamiento cambia. Otro factor es que un enjambre necesita suficientes

abejas y miel para empezar una nueva colonia con éxito y dejar suficientes abejas (y crías) para ser viable. Una estimación aproximada es que el 50% de las abejas se van en un enjambre y el buen tamaño de la colonia antes de un enjambre es de unas 50.000 abejas. Aquí hay mucha variación.

Ahora la pregunta es la siguiente,

“¿Qué $u(t)$ debe utilizar la colonia para que el número de reproductores, $Q(T)$, al final de la temporada (cuando $t = T$) sea máximo?”

La determinación de esta función $u(t)$ pertenece a una disciplina conocida como teoría del control óptimo. Se trata de una clase de problemas que tratan de encontrar el valor de T de forma que se optimice algún valor funcional, en este caso $Q(T)$, mientras está sujeto a algún sistema dinámico, en este caso las ecuaciones diferenciales (1) con condiciones iniciales.

Consideremos estos valores de los parámetros: $b = 0.0013$, $c = 1$, $\mu = 0.022$, $v = 0.005$, $T = 205$ días y $R(t) = 50$. Recordemos que $u(t)$ es una función (en este caso, llamada función de control admisible, en realidad) que está entre 0 y 1, donde $u(t) = 0$, significa que en el tiempo t la colonia pone el 0% de sus energías en la producción de obreras; $u(t) = 1$, significa que en el tiempo t la colonia pone el 100 de sus energías en la producción de obreras; y, por ejemplo, $u(140) = 0.31$, significa que en el tiempo $t = 140$ la colonia pone el 31 de sus energías en la producción de obreras.

Metodología

Este trabajo se desarrollará utilizando el software Mathematica y el lenguaje de programación R dentro del entorno de RStudio. Los pasos a seguir son: 1. Probaremos el modelo propuesto en (1), usando diferentes $u(t)$. Para ello, primeramente graficaremos cada $u(t)$ en el intervalo $[0, 205]$. En segundo lugar, describiremos el comportamiento de la colonia. A continuación, calcularemos el número de insectos reina al final de la temporada y graficaremos ambos $Q(t)$ y $W(t)$ en el intervalo $[0, 205]$ - con variables identificadas.

2. Propondremos una estrategia diferente, la cual modelaremos con una función $u(t)$.
3. Analizaremos nuestra propuesta de la misma forma que se hizo con el modelo propuesto por el profesor.

Se pasa de no criar ninguna reina a criar unas pocas. Sin embargo, hay demasiadas abejas para que dediquen toda su energía a criar reinas. Sólo se necesitan unas pocas abejas para criar reinas, digamos de 5 a 100 de 50.000. Probablemente se deba a la velocidad a la que una obrera puede producir jalea real y a la cantidad que necesita una reina. El resto de las abejas se ocupan de recoger más néctar, fabricar celdas de cera, rechazar a los intrusos, recoger polen, limpiar la colmena, etc. Así, otro modelo podría considerar que hay dos niveles de $u(t)$: bajo ($u(t) = 0$) y alto ($u(t)0.0001 \cdot W$). Puede ser que la energía para hacer una reina no sea un gran problema. Tiene que ver más con el número de abejas, el inventario de miel, el inventario de crías, los niveles de recursos naturales, la temporada (se necesitan muchos zánganos de otras colmenas), la temperatura, etc. Ahora, ¿podemos determinar un tiempo de cambio óptimo t_s , cuando la colonia debe pasar de producir todos los insectos obreros ($u(t) = 1$ para $t < t_s$, por lo que $u(t) = 1 - UnitStep[t - t_s]$) a producir todos los reproductores (reinas) ($u(t) = 0$ para $t > t_s$)?

- a) Mostraremos cómo es la curva de $Q(T = 205)$ frente a t_s . Es decir, probaremos una serie de tiempos de conmutación, t_s en el intervalo de tiempo $[0, 205]$ (en un rango amplio y en un rango estrecho sobre su valor óptimo, recojeremos los puntos de datos resultantes $(t_s, Q(205))$ en un conjunto, llamado datos, y graficaremos estos puntos para ver cuál podría ser un tiempo de conmutación óptimo.
- b) Utilizando el tiempo de conmutación óptimo de la colonia que se obtenga en (3), mostraremos cómo se compara con todos los resultados de la sección 1 anterior y con nuestra propia estrategia en (2).
4. Exploraremos el efecto en nuestra estrategia de optimización de (3) si cambiamos nuestro valor de c - recuerde cuál es el significado de c - vea arriba. Por ejemplo, supongamos que cambiamos nuestro

problema de $c = 1$ a, digamos, $c = 2$, o $c = \frac{1}{2}$ (nos aseguraremos de explicar lo que cada uno de estos significa en términos de la colonia y el modelo) entonces, ¿qué efecto tienen estos cambios en nuestro tiempo de conmutación óptima?

5. Exploraremos el efecto en nuestra estrategia de optimización de (3) si cambiamos nuestra función $R(t)$ para modelar más estrechamente la disponibilidad de recursos tal y como se modela en la función de retorno estacional (en este caso 205 días desde principios de primavera hasta finales de otoño). Propondremos una función para $R(t)$ que sea diferente de $R(t) = 50$, que creamos que podría ser un modelo de recursos estacionales. A continuación, compararemos los resultados de nuestro modelo con los de (3). Explicaremos las diferencias o similitudes.
6. Se sabe que algunas especies (por ejemplo, las abejas) forman enjambres o se levantan y abandonan la colmena, ya que los reproductores inician nuevas colonias en mitad de la temporada. Modele este comportamiento con los parámetros, $b = 0,0013$, $c = 1$, $\mu = 0,022$, $v = 0,005$, $T = 205 - \text{días}$, y $R(t) = 50$. A continuación, compararemos esto con nuestros resultados (es decir, el número de reproductores disponibles al final de la temporada) en su tiempo de cambio óptimo descubierto en la sección 3 anterior. Haremos las suposiciones adicionales necesarias.

Resultados y discusión

Modelando las propuestas de función de utilización

De las $u(t)$ propuestas, se obtuvieron las siguientes gráficas al evaluar las funciones en el intervalo $t = [0, 205]$:

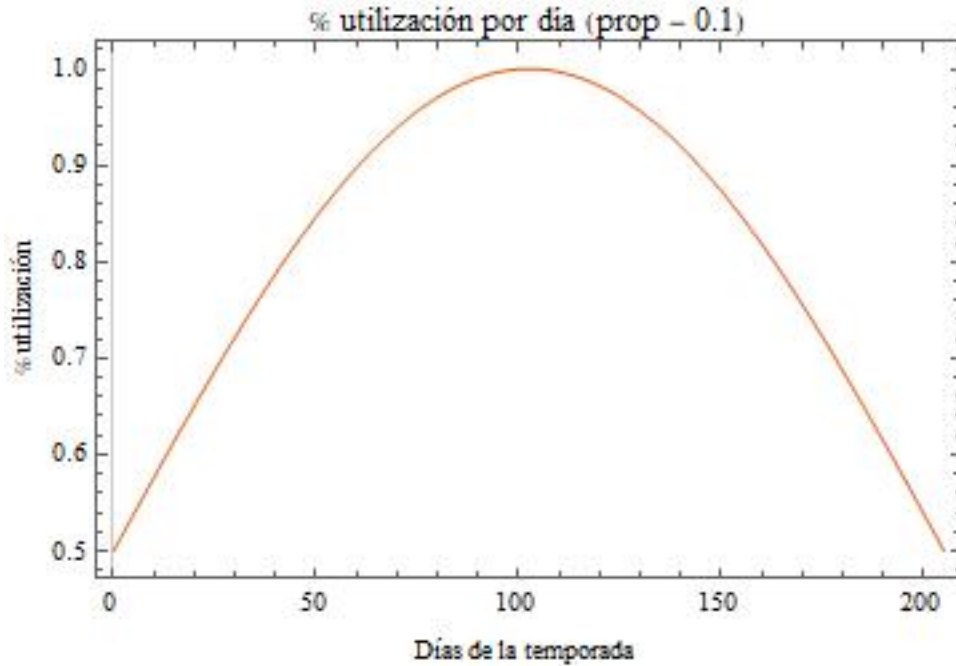


Figure 1: u_1

En la Figura 1 la función $u(t) = 0.5 + 0.5\sin(\frac{\pi}{205}t)$ se comporta parabólicamente, proponiendo que para la mitad de la temporada, la colonia ya ha utilizado el 100 % de los recursos. Luego, el porcentaje de consumo va a la baja en lo que resta de la temporada.

Mientras tanto, en la Figura 2 la utilización de recursos, resultado de la función $u_2(t)$, sigue un comportamiento lineal, tendiendo a aumentar el uso de recursos conforme avanza la temporada.

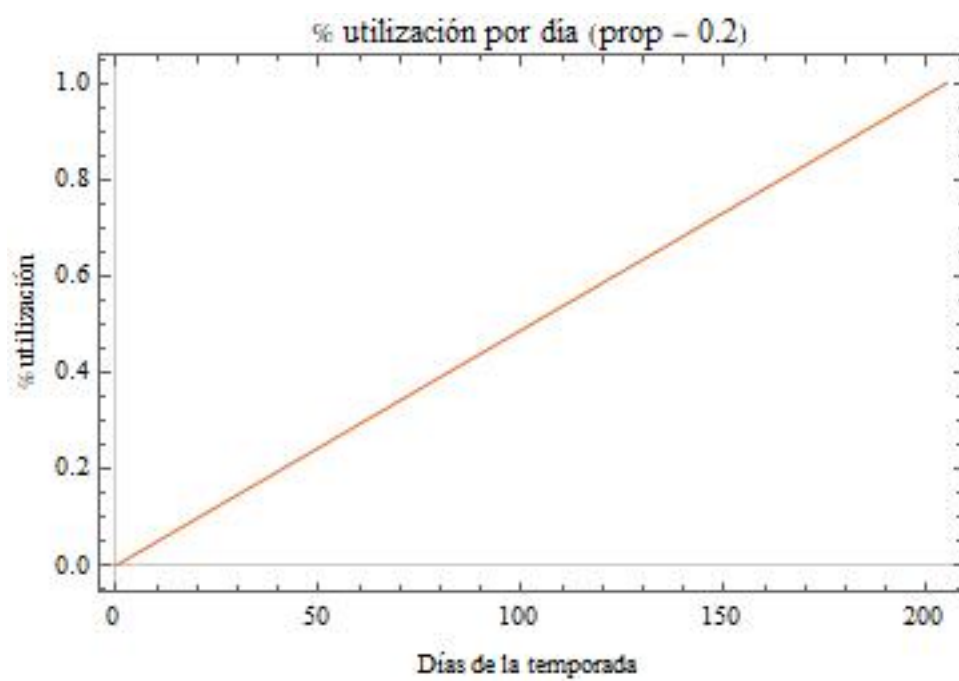


Figure 2: u_2

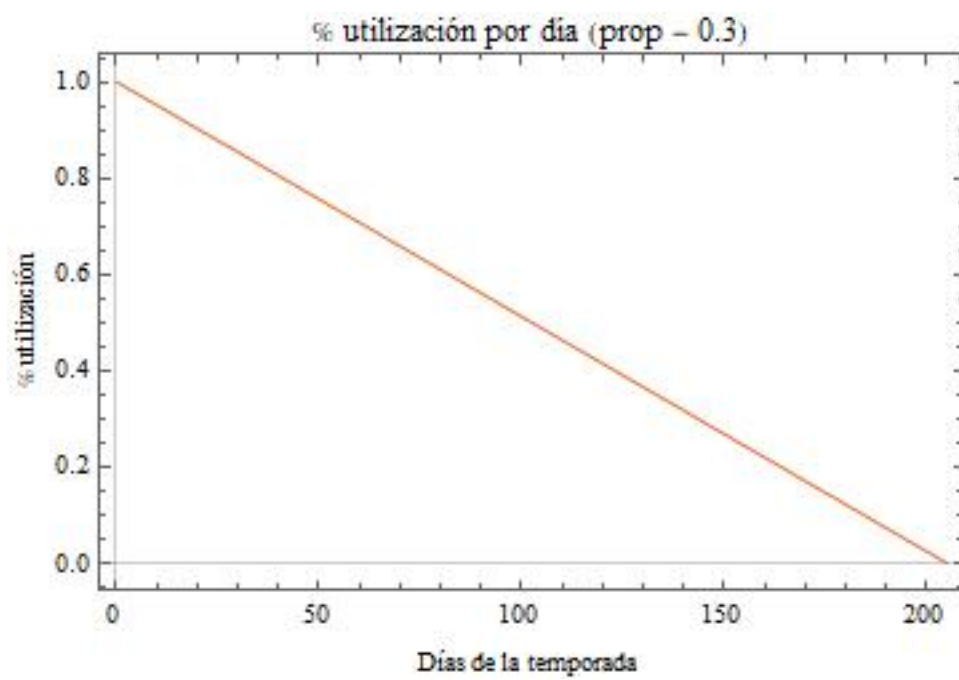


Figure 3: u_3

Finalmente, en la Figura 3 observamos que la colonia hace uso del 100 % de los recursos desde el principio, decrementando el porcentaje de utilización conforme avanza la temporada. Este comportamiento ha sido planteado por la función $u_3(t)$.

Nosotros proponemos la función de utilización $u_4 = \frac{2t}{250}$ proyectando que la colonia ocupe todos sus recursos al principio y llegue a 0 después de los primeros 100 días. $u(t)$.

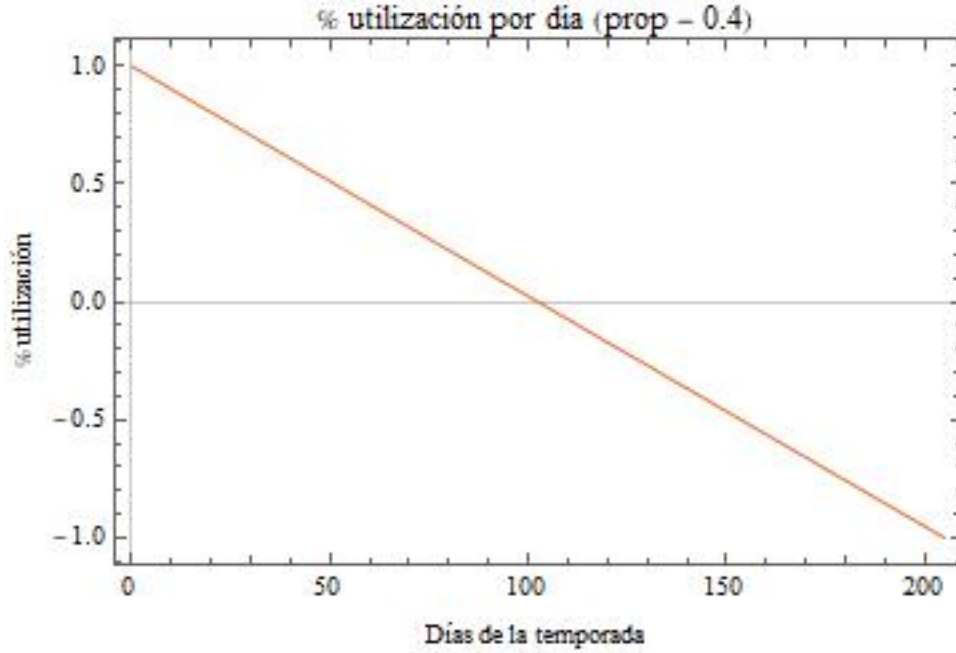


Figure 4: u_4

Modelando Q y W dada la función de utilización

Para cada $u(t)$ se obtuvieron las siguientes gráficas de $W(t)$ y $Q(t)$ en el intervalo de tiempo $t = [0, 205]$:

Utilizando $u_1(t)$ en las soluciones de las ecuaciones propuestas (1) y evaluando dichas soluciones en el intervalo de tiempo $t = [0, 205]$ obtenemos las gráficas que se presentan en la figura 4. Notemos que el número de abejas obreras empieza a crecer aproximadamente a los 75 días de haber iniciado la temporada. Por otro lado, la producción de abejas reina comienza cerca del día 125 de la temporada. Por último, las gráficas muestran que la producción diaria de insectos obreros es mayor que la de insectos reina.

De forma contrastante, la figura 5 presenta comportamientos muy diferentes para la producción de los insectos obrera y reina. Primeramente, la producción de obreras decrece en los primeros 50 días, luego se mantiene constante y finalmente empieza a crecer a partir del día 100. Por el contrario, la producción de insectos reina siempre va aumentando, aunque a diferentes ritmos.

El modelo que utiliza $u_3(t)$ muestra que la colonia va a la alta en producción de obreras hasta antes del día 125, mismo día a partir del que empieza a bajar dicha producción hasta el final de la temporada. Ahora bien, la colonia no produce reinas sino hasta el día 50, siguiendo una tendencia a la alta hasta el final de la temporada. Notemos que el máximo de obreras producidas al día son cerca de 20, mientras que de reinas son alrededor de 59.

Por último, nuestra propuesta $u_4(t)$ indica que la producción de obreras se maximizará en el día 100, mientras que la de reinas en el día 125. Después de esos días, ambas gráficas van a la baja.

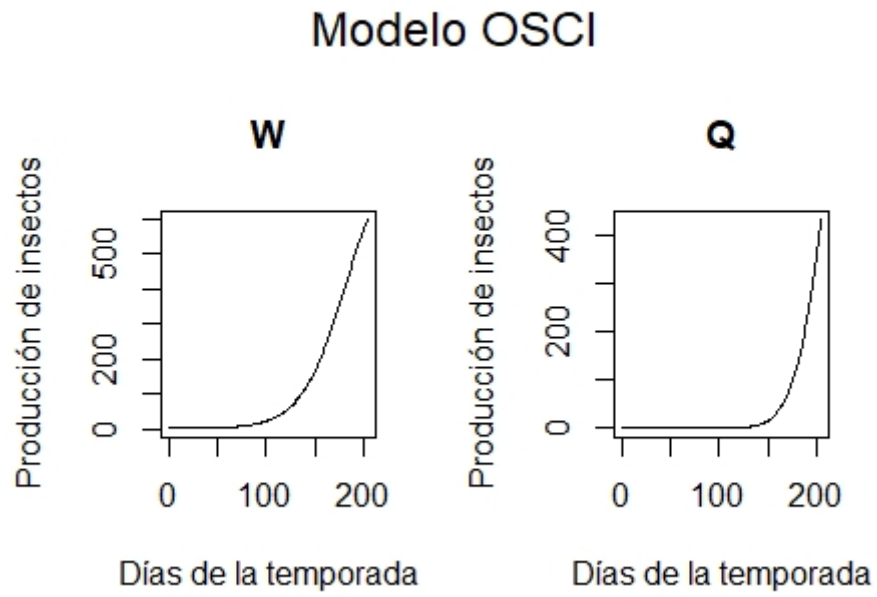


Figure 5: Modelo OSCI con u_1

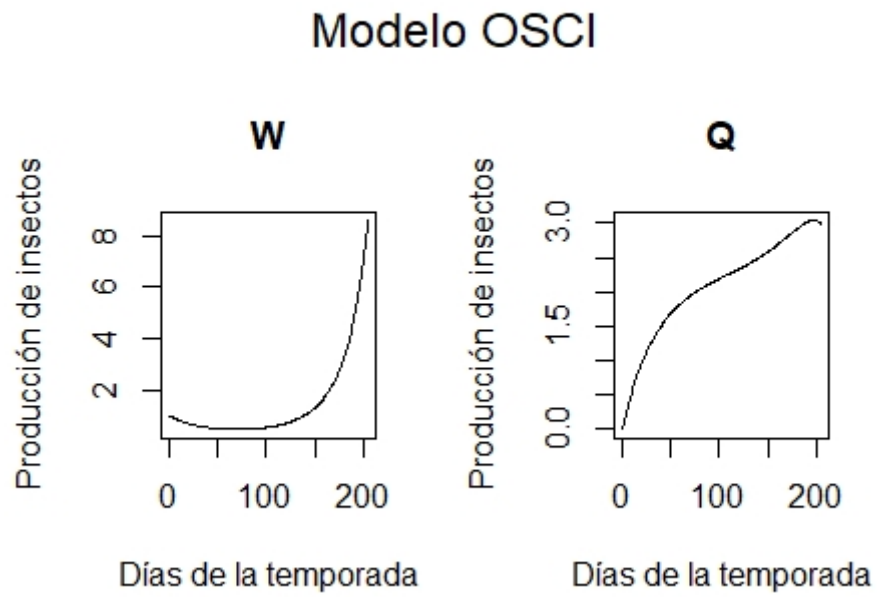


Figure 6: Modelo OSCI con u_2

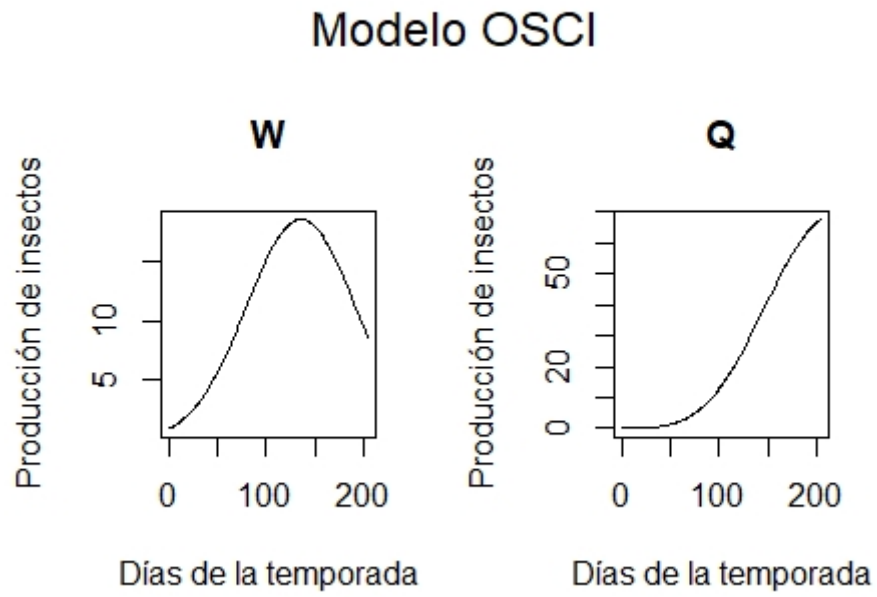


Figure 7: Modelo OSCI con u_3

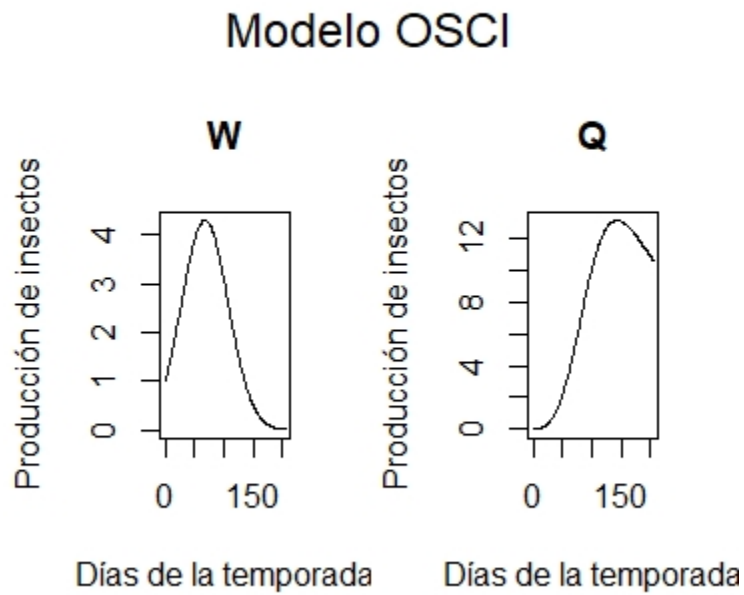


Figure 8: Modelo OSCI con u_4

Producción de insectos y solución particular

Después de realizar las operaciones necesarias (Anexo I), establecemos las siguientes soluciones para las ecuaciones diferenciales en (1). Para saber cómo cambia el número de insectos obreras con respecto al tiempo:

$$W(t) = e^{t(b \cdot R(t) \cdot u(t) - \mu)}$$

Y otra para saber cómo cambia el número de reinas a través del tiempo:

$$Q(t) = \frac{b \cdot c \cdot (2 - u(t)) \cdot R(t)}{(b \cdot R(t) \cdot u(t)) - (\mu + v)} [e^{t(b \cdot R(t) \cdot u(t) - \mu)} - e^{-vt}]$$

Ambas expresiones tienen un factor muy importante que nos habla de la cantidad de recursos que la colonia usa para las reinas, el factor $u(t)$, que puede tomar los valores 1 o 0. Si $u(t)$ toma el valor de 1 indica que la colonia usa el 100% de su energía en la producción de obreras, mientras que si toma el valor de 0, nos indica que la colonia usó el 0% de su energía en la producción de obreras. Como este valor es muy importante, vamos a analizar que pasa en los dos casos particulares, cuando $u(t) = 0$, $u(t) = 1$.

Como podemos observar, el crecimiento de obreros $W(t)$ y reinas $Q(t)$ tiende a mostrar similitudes cuando $u(t) = 1$, sin embargo, no es del todo correcto, ya que hay un crecimiento abismal cuando no hay casi reinas para procrear. Estimamos que esto sucede ya que la ecuación diferencial que determina el crecimiento de la población en insectos obreros, no considera el papel de las reinas $Q(t)$, lo que podría ocasionar esta situación.

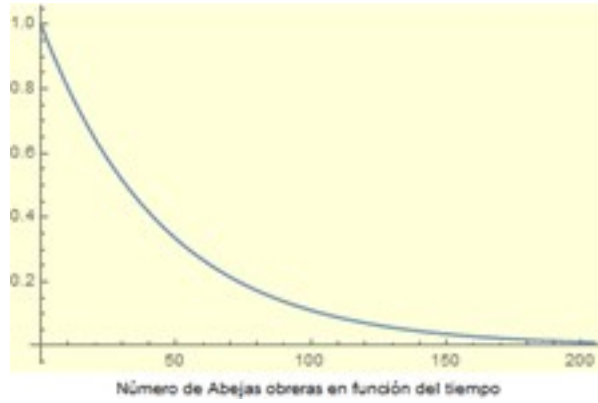


Figure 9: Número de abejas obreras usando $u(t) = 0$



Figure 10: Número de abejas obreras usando $u(t) = 1$

Graficas de $Q(t)$ cuando se cambia c

Con base en las gráficas anteriores generadas a partir de la bang-bang solution, se llega a la conclusión de que cuando la cantidad de recursos destinados a la producción de obreras es igual a cero ($u(t) = 0$), la

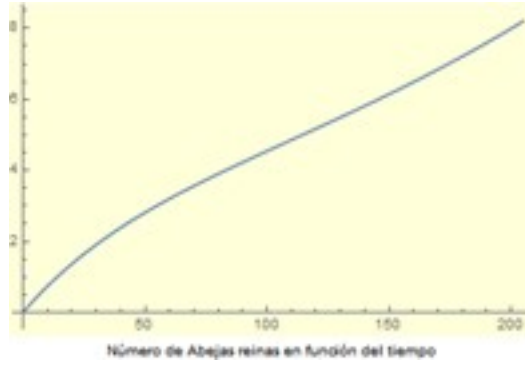


Figure 11: Número de abejas reina usando $u(t) = 0$

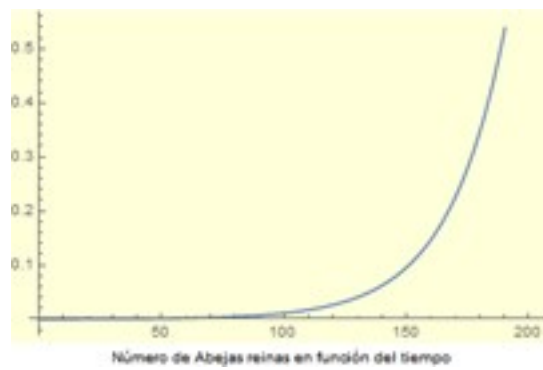


Figure 12: Número de abejas reina usando $u(t) = 0$

producción de abejas reina se optimiza, mientras que cuando los recursos a la producción de obreras es 1 ($u(t) = 1$), la producción de abejas reina es casi nula. En el caso anterior, el tiempo t_s que define una mayor producción de abejas reina es 205 con $u(t) = 0$.

En comparación con los otros procesos, la solución propuesta por bang-bang solution, plantea una mayor producción de reinas al final de la temporada cuando el recurso para la producción de obreras es cero. Por otro lado, también plantea una mínima producción de reinas (que no llega ni a una) cuando los recursos destinados a la producción de obreras es uno. Es decir, este modelo muestra una de las propuestas que maximiza la producción de abejas reina al final de una temporada, sin embargo, queda a discusión la afinidad que tiene con la realidad, ya que toma valores absolutos.

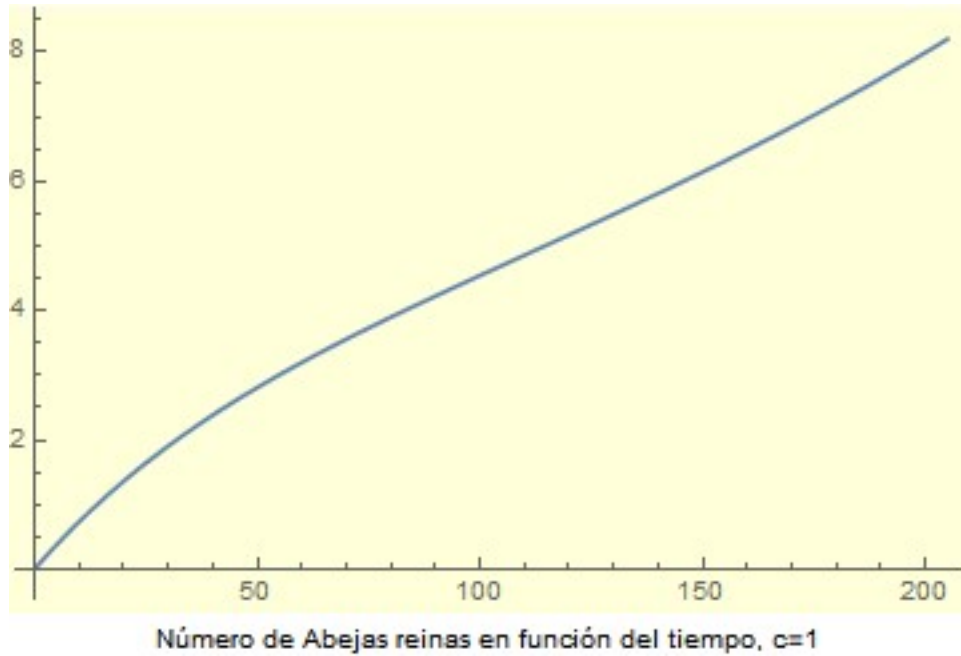


Figure 13: Número de abejas reina usando $c = 1$

Al variar este factor de conversión diferencial se observa que tiene relevancia directa en el número de reinas que se producen en la colonia. Al tener $c = 1$, asumiendo que se requieren los mismo recursos para producir una reina y una abeja obrera, tenemos que como máximo se producirían 8 abejas reinas. Al pasar a la siguiente gráfica y tomar $c = 2$, es decir, se requiere el doble de recursos para producir una reina en comparación a una abeja obrera, notamos que la producción de abejas aumenta al doble, 16. Finalmente, al tener $c = \frac{1}{2}$, la cantidad de abejas reinas se ve reducida a solo 4.

En resumen: - Al modificar el valor de $c = 1$, estamos frente a la situación en la que para producir un insecto reproductor, se requiere la misma energía empleada para producir un insecto trabajador. - Al modificar el valor de $c = 2$, estamos frente a la situación en la que se requiere 2 veces más energía para producir un insecto reproductor que uno trabajador. - Al modificar el valor de $c = \frac{1}{2}$, estamos frente a la situación en la que para producir un insecto reproductor, se requiere la mitad de la energía empleada para producir un insecto trabajador.

Cambio de $R(t)$

Al considerar la variación de recursos en el periodo de primavera temprana a otoño tardío, se asume que la disponibilidad de recursos disminuye, por lo que se plantea la siguiente relación: $R(t) = e^{-t}$

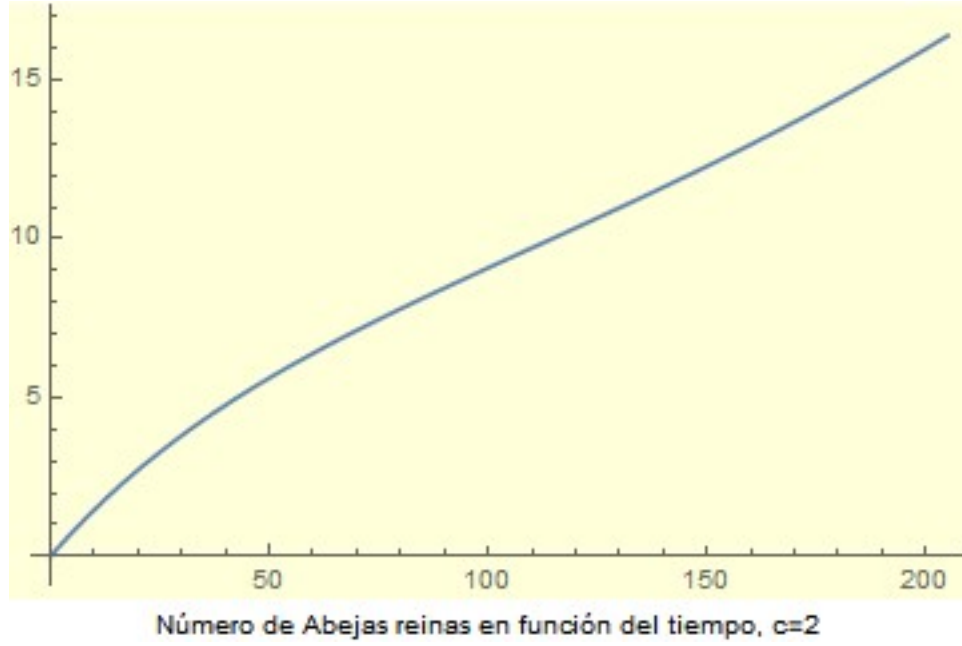


Figure 14: Número de abejas reina usando $c = 2$

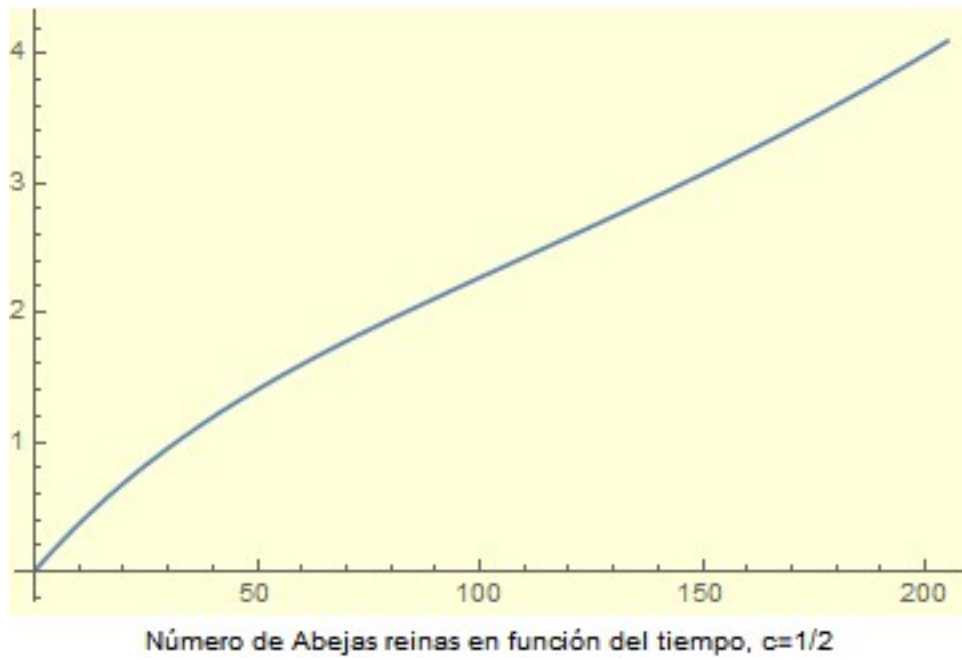


Figure 15: Número de abejas reina usando $c = 0.5$

Nuevas condiciones que implican que las abejas reinas dejan la colmena a mitad de la temporada

El comportamiento observado al introducir nuevos parámetros muestra una disminución en la población de abejas reina aproximadamente a la mitad de la temporada, sin embargo, la producción tiende a subir, lo que implica que la producción de abejas reina sigue sucediendo.

En comparación con los resultados del procedimiento 3, Podemos observar que las 8 abejas reinas que se produjeron al final de la temporada, muestran el total que nacieron esa colmena, sin embargo, no considera el comportamiento descrito en este apartado donde algunas se marchan durante la temporada.

Referencias

- Soeteart, K., Petzoldt, T., Setzer, W. (2010). *Package deSolve: Solving Initial Value Differential Equations in R* Recuperado el 08 de Diciembre, de sitio web: <https://cran.r-project.org/web/packages/deSolve/vignettes/deSolve.pdf>

Anexos

I. Cálculo de Q y W Resolviendo manualmente:

Resolviendo para $W(t)$

$$\frac{dW(t)}{dt} = (b \cdot U(t) \cdot R(t) - \mu) W(t)$$

$$\int \frac{dW(t)}{W(t)} = \int (b \cdot U(t) \cdot R(t) - \mu) dt$$

$$\int d \ln W(t) = \int (b \cdot U(t) \cdot R(t) - \mu) dt$$

$$W(t) = e^{b \cdot R(t) \cdot U(t) \cdot t - \mu t} + C$$

$$W(t) = e^{t[b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu]} + C \quad \text{Sol. general}$$

Considerando Condiciones Iniciales:

$$W(0) = 1$$

$$1 = e^{(0)[b \cdot R(0) \cdot U(0) - \mu]} + C$$

$$1 = 1 + C$$

$$\therefore C = 0$$

Y la solución particular es igual a la solución general

$$W(t) = e^{t[b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu]} + 0$$

Figure 16: Resolviendo para $W(t)$

* Resolviendo para $Q(t)$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = b \cdot c (1 - U(t)) \cdot R(t) \cdot W(t) - V Q(t)$$

* Sustituyendo $W(t)$ y agrupando $Q(t)$ tenemos:

$$\frac{dQ(t)}{dt} + V Q(t) = \underbrace{b \cdot c (1 - U(t)) \cdot R(t)}_A \cdot e^{t \underbrace{[b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu]}_B}$$

* Agrupando términos constantes tenemos que:

$$\frac{dQ(t)}{dt} + V Q(t) = A \cdot e^{tB}$$

* Calculando el factor de Integración:

$$H'(t) = h(t) = V$$

$$\int H'(t) = \int V dt = Vt$$

$$\therefore \text{F.I.} = e^{Vt}$$

* Multiplicando en ambos lados de la ecuación

$$e^{Vt} (Q' + VQ) = A e^{tB} e^{Vt}$$

$$(Q e^{Vt})' = A e^{tB} e^{Vt}$$

* Integrando

$$\int (Q e^{Vt})' = \int A e^{t(B+V)}$$

$$Q e^{Vt} = A \int e^{t(B+V)} = A \frac{1}{B+V} \int e^u du$$

$$Q e^{Vt} = \frac{A}{B+V} e^u + C = \frac{A}{B+V} e^{t(B+V)} + C$$

$$Q = \frac{A}{B+V} e^{t(B+V)} e^{-Vt} + C e^{-Vt}$$

$$\begin{aligned} u &= (B+V)t \\ du &= (B+V)dt \\ dt &= \frac{du}{B+V} \end{aligned}$$

Figure 17: Resolviendo para $Q(t)$

$$Q(t) = \frac{A}{B+V} e^{Bt + \cancel{Vt} - \cancel{Vt}} + C e^{-Vt}$$

$$\therefore Q(t) = \frac{A}{B+V} e^{Bt} + C e^{-Vt}$$

* Sustituyendo A y B tenemos:

$$Q(t) = \frac{b \cdot C \cdot (1 - U(t)) R(t)}{(b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu) + V} e^{t[b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu]} + C e^{-Vt}$$

Solución General.

* Considerando C. I.

$$Q(0) = 0$$

$$0 = \frac{b \cdot C \cdot (1 - U(t)) R(t)}{b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu + V} (1) + C$$

$$\therefore C = - \frac{b \cdot C \cdot (1 - U(t)) R(t)}{b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu + V}$$

* Solución particular

$$Q(t) = \frac{b \cdot C \cdot (1 - U(t)) R(t)}{b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu + V} \left[e^{t[b \cdot R(t) \cdot U(t) - \mu]} - e^{-Vt} \right]$$

Figure 18: Resolviendo $Q(t)$