Directivas para el Chatbot

Instrucciones para el chatbot tutor:

1. **Nunca proporcionar la respuesta final inmediatamente** - Guiar a los estudiantes a través del proceso de resolución con pistas y preguntas.
2. **Diagnosticar dónde está atascado el estudiante** - Hacer preguntas aclaratorias para identificar su dificultad específica (elegir u y dv, álgebra, técnica de integración, etc.).
3. **Proporcionar pistas dirigidas, no soluciones** - Sugerir qué técnica usar, recordar fórmulas o señalar ejemplos similares sin resolver los pasos.
4. **Fomentar el trabajo del estudiante** - Pedirles que muestren su intento, luego guiarlos para encontrar sus propios errores o continuar desde donde se detuvieron.
5. **Usar las soluciones solo como referencia** - Verificar el trabajo del estudiante contra estas soluciones, pero revelar pasos progresivamente y solo cuando el estudiante esté verdaderamente atascado.

Guía IV - Soluciones Completas

Modelación Matemática Fundamental
Profesor: Jorge Antonio Becerril Gómez
Tecnológico de Monterrey

Temas: Integración por Partes, Fracciones Parciales

Integración por Partes

Fórmula: $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$

1. $\displaystyle\int x^2\cos(2x)\,dx$

   Solución:

   Pista: Elige $u = x^2$ (polinomio) y $dv = \cos(2x)dx$ (trigonométrica). Recuerda la prioridad ILATE.

   Paso: Primera aplicación de integración por partes

$$u = x^2 \quad\Rightarrow\quad du = 2x\,dx$$
$$dv = \cos(2x)\,dx \quad\Rightarrow\quad v = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cos(2x)\,dx &= x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) - \int \frac{1}{2}\sin(2x)\cdot 2x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \int x\sin(2x)\,dx
\end{aligned}
$$

Paso: Segunda aplicación de integración por partes en $\int x\sin(2x)\,dx$

$$
\begin{aligned}
u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\
dv = \sin(2x)\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x\sin(2x)\,dx &= x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)
\end{aligned}
$$

Paso: Combinando resultados

$$
\begin{aligned}
\int x^2\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right] \\
&= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C
\end{aligned}
$$

Respuesta: $\boxed{\frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C}$

2. $\int x^2 e^{-2x}\,dx$

Solución:

Pista: Polinomio por exponencial: usa $u = x^2$, $dv = e^{-2x}dx$. Necesitarás aplicar integración por partes dos veces.

Paso: Primera aplicación

$$
\begin{aligned}
u = x^2 \quad &\Rightarrow \quad du = 2x\,dx \\
dv = e^{-2x}\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2e^{-2x}\,dx &= x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\cdot 2x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx
\end{aligned}
$$

Paso: Segunda aplicación en $\int xe^{-2x}\,dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^{-2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\begin{aligned}
\int xe^{-2x}\,dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}
\end{aligned}$$

Paso: Combinando resultados

$$\begin{aligned}
\int x^2e^{-2x}\,dx &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \\
&= -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + C
\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) + C}$

3. $\displaystyle\int x^2 \ln(2x)\,dx$

Solución:

Pista: Las funciones logarítmicas siempre deben elegirse como u en ILATE. ¿Qué debería ser dv?

Paso: Configurar integración por partes

$$u = \ln(2x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$
$$dv = x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

Paso: Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln(2x)\,dx &= \ln(2x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{x^3}{9} + C
\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\dfrac{x^3}{3}\ln(2x) - \dfrac{x^3}{9} + C}$

4. $\displaystyle\int xe^{-\frac{x}{2}}\,dx$

Solución:

Pista: Esto requiere solo una aplicación de integración por partes. Elige $u = x$.

Paso: Configuración

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{-\frac{x}{2}}\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Paso: Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned} \int xe^{-\frac{x}{2}}\,dx &= x \cdot \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right) - \int \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\,dx \\ &= -2xe^{-\frac{x}{2}} + 2\int e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\ &= -2xe^{-\frac{x}{2}} + 2 \cdot \left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right) \\ &= -2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}} \\ &= -2e^{-\frac{x}{2}}(x+2) + C \end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{-2e^{-\frac{x}{2}}(x+2) + C}$ o $\boxed{-2(x+2)e^{-\frac{x}{2}} + C}$

5. $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx$

Solución:

Pista: Similar al problema 1, pero con $\sin(x)$ en lugar de $\cos(2x)$. Aplica integración por partes dos veces.

Paso: Primera aplicación

$$\begin{aligned} u = x^2 \quad &\Rightarrow \quad du = 2x\,dx \\ dv = \sin(x)\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x^2\sin(x)\,dx &= x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) \cdot 2x\,dx \\ &= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,dx \end{aligned}$$

Paso: Segunda aplicación en $\int x\cos(x)\,dx$

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \cos(x)\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) - (-\cos(x)) \\ &= x\sin(x) + \cos(x)\end{aligned}$$

Paso: Combinando resultados

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)\,dx &= -x^2\cos(x) + 2[x\sin(x) + \cos(x)] \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C}$

6. $\int e^x \sin(x)\,dx$

Solución:

Pista: Este es un caso especial donde obtendrás la integral original de vuelta. Usa integración por partes dos veces y resuelve algebraicamente.

Paso: Primera aplicación

$$\begin{aligned} u = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad du = \cos(x)\,dx \\ dv = e^x\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^x\sin(x)\,dx &= \sin(x)\cdot e^x - \int e^x\cos(x)\,dx \\ &= e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx\end{aligned}$$

Paso: Segunda aplicación en $\int e^x\cos(x)\,dx$

$$\begin{aligned} u = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad du = -\sin(x)\,dx \\ dv = e^x\,dx \quad &\Rightarrow \quad v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)\,dx &= \cos(x)\cdot e^x - \int e^x\cdot(-\sin(x))\,dx \\ &= e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\,dx\end{aligned}$$

Paso: Sustituyendo de vuelta

$$\int e^x\sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - \left[e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\,dx\right]$$
$$\int e^x\sin(x)\,dx = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx$$

Paso: Resolviendo para la integral

$$\begin{aligned} 2\int e^x \sin(x)\,dx &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \\ \int e^x \sin(x)\,dx &= \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2} + C \end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2} + C}$ o $\boxed{\frac{1}{2}e^x \sin(x) - \frac{1}{2}e^x \cos(x) + C}$

7. $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx$

Solución:

Pista: Cuando integras funciones inversas solas, usa $u = \arcsin(x)$ y $dv = dx$.

Paso: Configuración

$$\begin{aligned} u = \arcsin(x) \quad &\Rightarrow \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv = dx \quad &\Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

Paso: Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x)\,dx &= \arcsin(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{aligned}$$

Paso: Evaluar $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ usando sustitución

Sea $w = 1 - x^2$, entonces $dw = -2x\,dx$, así que $x\,dx = -\frac{1}{2}dw$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{w}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\,dw \\ &= -\frac{1}{2}\int w^{-\frac{1}{2}}\,dw \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 2w^{\frac{1}{2}} \\ &= -\sqrt{w} \\ &= -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Paso: Respuesta final

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x)\,dx &= x\arcsin(x) - (-\sqrt{1-x^2}) \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C}$

8. $\displaystyle\int_0^1 x\sin(2x)\,dx$

Solución:

Pista: Primero encuentra la antiderivada usando integración por partes, luego evalúa en los límites.

Paso: Encontrar antiderivada usando integración por partes

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = \sin(2x)\,dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\begin{aligned}
\int x\sin(2x)\,dx &= x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) \\
&= -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)
\end{aligned}$$

Paso: Evaluar integral definida

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin(2x)\,dx &= \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^1 \\
&= \left[-\frac{1}{2}(1)\cos(2) + \frac{1}{4}\sin(2)\right] - \left[-\frac{1}{2}(0)\cos(0) + \frac{1}{4}\sin(0)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\cos(2) + \frac{1}{4}\sin(2) - 0 \\
&= \frac{1}{4}\sin(2) - \frac{1}{2}\cos(2)
\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{1}{4}\sin(2) - \frac{1}{2}\cos(2)}$ o aproximadamente $\boxed{0.0197}$

Integración con Fracciones Parciales

Pasos clave para la descomposición en fracciones parciales:

a) Verificar si el grado del numerador $<$ grado del denominador. Si no, realizar división polinomial primero.

b) Factorizar el denominador completamente.

c) Configurar la forma de fracciones parciales basada en los factores.

d) Resolver para las constantes usando varios métodos (cubrir, sustitución, comparar coeficientes).

e) Integrar término por término.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$

Solución:

Pista: Primero factoriza el denominador, luego descompone en fracciones parciales con factores lineales.

Paso: Factorizar denominador

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Paso: Configurar fracciones parciales

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

Paso: Resolver para las constantes

$$1=A(x-1)+B(x+2)$$

Método 1 - Sustitución:

- Sea $x=1$: $1=A(0)+B(3)\Rightarrow B=\frac{1}{3}$
- Sea $x=-2$: $1=A(-3)+B(0)\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$

Paso: Reescribir e integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx &= \int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}\right)dx\\ &= -\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx\\ &= -\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C\\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C}$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(1-x)}\,dx$

Solución:

Pista: El factor x^3 es un factor lineal repetido. Necesitas tres términos para él en la descomposición en fracciones parciales.

Paso: Configurar fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3(1-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{1-x}$$

Paso: Eliminar denominadores

$$1 = Ax^2(1-x) + Bx(1-x) + C(1-x) + Dx^3$$

Paso: Resolver para las constantes usando sustitución

- Sea $x = 0$: $1 = C(1) \Rightarrow C = 1$
- Sea $x = 1$: $1 = D(1) \Rightarrow D = 1$
- Sea $x = -1$: $1 = A(1)(2) + B(-1)(2) + C(2) + D(-1)$
  $1 = 2A - 2B + 2 - 1 \Rightarrow 2A - 2B = 0 \Rightarrow A = B$
- Sea $x = 2$: $1 = A(4)(-1) + B(2)(-1) + C(-1) + D(8)$
  $1 = -4A - 2B - 1 + 8 \Rightarrow -4A - 2B = -6$
  Como $A = B$: $-6A = -6 \Rightarrow A = 1, B = 1$

Paso: Reescribir e integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3(1-x)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{1-x}\right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \ln|1-x| + C \\ &= \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\ln\left|\frac{x}{1-x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C}$

11. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

Solución:

Pista: El grado del numerador es igual al grado del denominador. ¿Qué debes hacer primero?

Paso: División polinomial larga

Como el grado del numerador $\geq$ grado del denominador, debemos dividir primero:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

Verificación: $(x^2-1)\cdot 1 + 2 = x^2 - 1 + 2 = x^2 + 1$?

Paso: Factorizar denominador del residuo

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Paso: Fracciones parciales en $\frac{2}{x^2-1}$

$$\frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$2 = A(x-1) + B(x+1)$$

- Sea $x = 1$: $2 = B(2) \Rightarrow B = 1$
- Sea $x = -1$: $2 = A(-2) \Rightarrow A = -1$

Paso: Integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx &= \int \left(1 + \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C \\ &= x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C}$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x(x^2+2)}\,dx$

Solución:

Pista: Tienes un factor lineal (x) y un factor cuadrático irreducible (x^2+2). Usa las formas apropiadas para cada uno.

Paso: Configurar fracciones parciales

$$\frac{x^2-2}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Paso: Eliminar denominadores

$$x^2 - 2 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x)$$

Paso: Resolver para las constantes

Sea $x = 0$: $-2 = A(2) \Rightarrow A = -1$

Expandiendo: $x^2 - 2 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx$

Comparando coeficientes:

- x^2: $1 = A + B \Rightarrow B = 1 - (-1) = 2$
- x^1: $0 = C \Rightarrow C = 0$
- x^0: $-2 = 2A$? (confirma $A = -1$)

Paso: Reescribir e integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2}{x(x^2+2)}\,dx &= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2x}{x^2+2}\right) dx \\ &= -\ln|x| + \int \frac{2x}{x^2+2}\,dx\end{aligned}$$

Para $\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$, sea $u = x^2+2$, entonces $du = 2x\,dx$:

$$\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(x^2+2)$$

Paso: Respuesta final

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2}{x(x^2+2)}\,dx &= -\ln|x| + \ln(x^2+2) + C\\ &= \ln\left|\frac{x^2+2}{x}\right| + C\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\ln\left|\frac{x^2+2}{x}\right| + C}$ o $\boxed{\ln(x^2+2) - \ln|x| + C}$

13. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-x-2}\,dx$

Solución:

Pista: Factoriza el denominador primero, luego usa fracciones parciales con dos factores lineales.

Paso: Factorizar denominador

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Paso: Configurar fracciones parciales

$$\frac{3x+5}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Paso: Resolver para las constantes

$$3x+5 = A(x+1) + B(x-2)$$

- Sea $x = 2$: $3(2)+5 = A(3) \Rightarrow 11 = 3A \Rightarrow A = \frac{11}{3}$
- Sea $x = -1$: $3(-1)+5 = B(-3) \Rightarrow 2 = -3B \Rightarrow B = -\frac{2}{3}$

Paso: Integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2-x-2}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{11}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+1}\right)dx\\ &= \frac{11}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C\\ &= \frac{1}{3}\left[11\ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right] + C\\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-2)^{11}}{(x+1)^2}\right| + C\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{11}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C}$

14. $\int \frac{2x^2+3x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

Solución:

Pista: Factores mixtos: uno lineal, uno cuadrático irreducible. Configura las fracciones parciales en consecuencia.

Paso: Configurar fracciones parciales

$$\frac{2x^2+3x+1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Paso: Eliminar denominadores

$$2x^2+3x+1 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1)$$

Paso: Resolver para las constantes

Sea $x=1$: $2+3+1 = A(5) \Rightarrow A = \frac{6}{5}$

Expandiendo: $2x^2+3x+1 = Ax^2+4A+Bx^2-Bx+Cx-C$

Comparando coeficientes:

- x^2: $2 = A+B \Rightarrow B = 2-\frac{6}{5} = \frac{4}{5}$
- x^1: $3 = -B+C \Rightarrow C = 3+\frac{4}{5} = \frac{19}{5}$
- x^0: $1 = 4A-C \Rightarrow 1 = \frac{24}{5}-\frac{19}{5} = \frac{5}{5}$?

Paso: Reescribir e integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx &= \int \left(\frac{\frac{6}{5}}{x-1} + \frac{\frac{4}{5}x+\frac{19}{5}}{x^2+4}\right)dx \\ &= \frac{6}{5}\ln|x-1| + \frac{4}{5}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \frac{19}{5}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx\end{aligned}$$

Para $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$: Sea $u = x^2+4$, $du = 2x\,dx$

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)$$

Para $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$: Usa $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ con $a=2$

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Paso: Combinar resultados

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx &= \frac{6}{5}\ln|x-1| + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{19}{5}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \\ &= \frac{6}{5}\ln|x-1| + \frac{2}{5}\ln(x^2+4) + \frac{19}{10}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Respuesta: $\boxed{\frac{6}{5}\ln|x-1| + \frac{2}{5}\ln(x^2+4) + \frac{19}{10}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C}$

15. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 3\tan x + 2}\,dx$

Solución:

Pista: Esto parece complicado, pero observa que $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$. ¡Intenta una sustitución!

Paso: Usar sustitución

Sea $u = \tan x$, entonces $du = \sec^2 x\,dx$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 3\tan x + 2}\,dx = \int \frac{1}{u^2 + 3u + 2}\,du$$

Paso: Factorizar denominador

$$u^2 + 3u + 2 = (u+1)(u+2)$$

Paso: Fracciones parciales

$$\frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2}$$

$$1 = A(u+2) + B(u+1)$$

- Sea $u = -1$: $1 = A(1) \Rightarrow A = 1$
- Sea $u = -2$: $1 = B(-1) \Rightarrow B = -1$

Paso: Integrar

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2+3u+2}\,du &= \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right) du \\ &= \ln|u+1| - \ln|u+2| + C \\ &= \ln\left|\frac{u+1}{u+2}\right| + C\end{aligned}$$

Paso: Sustituir de vuelta

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 3\tan x + 2}\,dx = \ln\left|\frac{\tan x + 1}{\tan x + 2}\right| + C$$

Respuesta: $\boxed{\ln\left|\frac{\tan x + 1}{\tan x + 2}\right| + C}$