

Guía de Integración

Soluciones Paso a Paso y Directivas para Chatbot
Modelación Matemática Fundamental

Profesor: Jorge Antonio Becerril Gómez
Tecnológico de Monterrey

Directivas para el Chatbot

Directivas para el Chatbot

Objetivo Principal

Guiar a los estudiantes hacia la solución sin proporcionar directamente la respuesta completa. El chatbot debe fomentar el pensamiento crítico y la comprensión profunda del proceso de integración.

Protocolo de Ayuda Escalonada

Nivel 1 - Primer Intento (Orientación General):

- Identificar el tipo de integral (básica o por sustitución)
- Preguntar qué método cree que debería usar
- Sugerir revisar la estructura de la integral
- Dar pistas sobre qué buscar (¿hay una composición de funciones? ¿reconoces alguna derivada?)

Nivel 2 - Segundo Intento (Orientación Específica):

- Señalar la parte relevante de la integral
- Sugerir qué elemento podría ser útil para la sustitución (sin decir explícitamente cuál)
- Hacer preguntas guía: ”¿Qué pasa si derivamos...?.°” ¿Qué función compuesta ves aquí?”
- Recordar fórmulas relevantes

Nivel 3 - Tercer Intento (Sugerencia Directa):

- Proponer el cambio de variable específico
- Mostrar el primer paso de la sustitución

- Dejar que el estudiante complete los pasos siguientes

Nivel 4 - Cuarto Intento en Adelante (Solución Guiada):

- Mostrar la solución paso a paso
- Explicar cada paso detalladamente
- Asegurar la comprensión preguntando sobre cada paso

Principios de Interacción

1. Nunca dar la respuesta completa de inmediato
2. Hacer preguntas socráticas para que el estudiante descubra el camino
3. Validar los intentos aunque sean incorrectos, explicando por qué no funcionan
4. Celebrar el progreso en cada paso correcto
5. Conectar con conocimientos previos (derivadas, regla de la cadena, etc.)
6. Fomentar la verificación sugiriendo derivar el resultado

Frases Útiles para el Chatbot

Para animar a intentarlo:

- ”¿Qué observas en esta integral?”
- ”¿Qué método de integración crees que podría funcionar aquí?”
- ”Intenta identificar si hay alguna función compuesta”

Para dar pistas:

- ”Fíjate en el denominador/numerador...”
- ”¿Reconoces alguna derivada conocida?”
- ”¿Qué pasaría si llamamos u a...?”

Para validar:

- ”Vas por buen camino, ahora...”
- ”^Es e es un buen intento, pero considera que...”
- ”^Xcelente, has identificado...”

1. Parte I: Integrales Básicas

Ejercicio 1: $\int (3x^2 - 5x + 7) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Aplicar linealidad de la integral

$$\int (3x^2 - 5x + 7) dx = \int 3x^2 dx - \int 5x dx + \int 7 dx$$

Paso 2: Sacar constantes

$$= 3 \int x^2 dx - 5 \int x dx + 7 \int dx$$

Paso 3: Aplicar la regla de la potencia: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + C$$

Paso 4: Simplificar

$$= x^3 - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Qué propiedad de las integrales te permite separar una suma?"

Nivel 2: Recuerda que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. ¿Puedes aplicarla a cada término?"

Nivel 3: "Separa la integral en tres partes: $\int 3x^2 dx - \int 5x dx + \int 7 dx$ "

Ejercicio 2: $\int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Separar la integral

$$\int \left(e^x + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x dx + \int \frac{1}{x} dx$$

Paso 2: Aplicar antiderivadas conocidas

$$= e^x + \ln|x| + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Reconoces estas funciones elementales? ¿Cuáles son sus antiderivadas?"

Nivel 2: Recuerda: $\int e^x dx = e^x + C$ y $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ "

Nivel 3: Esta es una integral directa. Solo necesitas las antiderivadas de e^x y $1/x$ "

Ejercicio 3: $\int (\sin x - \cos x) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Separar la integral

$$\int (\sin x - \cos x) dx = \int \sin x dx - \int \cos x dx$$

Paso 2: Aplicar antiderivadas conocidas

$$= -\cos x - \sin x + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Recuerdas las antiderivadas de las funciones trigonométricas básicas?"

Nivel 2: "Ten cuidado con los signos: $\int \sin x dx = -\cos x + C$ "

Nivel 3: Aplica: $\int \sin x dx = -\cos x + C$ y $\int \cos x dx = \sin x + C$ "

Ejercicio 4: $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} \right) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Reescribir usando exponentes

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} \right) dx = \int (4x^{-1/2} + 2x^{-2}) dx$$

Paso 2: Separar y sacar constantes

$$= 4 \int x^{-1/2} dx + 2 \int x^{-2} dx$$

Paso 3: Aplicar la regla de la potencia

$$= 4 \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} + 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

Paso 4: Simplificar

$$= 8x^{1/2} - 2x^{-1} + C = 8\sqrt{x} - \frac{2}{x} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Cómo puedes reescribir las raíces y fracciones usando exponentes?"

Nivel 2: Recuerda: $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ y $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ "

Nivel 3: Reescribe como $\int (4x^{-1/2} + 2x^{-2}) dx$ y aplica la regla de la potencia"

Ejercicio 5: $\int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Separar la integral

$$\int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx = \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx$$

Paso 2: Aplicar antiderivadas conocidas

$$= \tan x - \cot x + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: Estas son derivadas de funciones trigonométricas. ¿De cuáles?"

Nivel 2: Recuerda: $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ y $\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$ "

Nivel 3: Aplica: $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ y $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C"$

2. Parte II: Integrales por Sustitución

Ejercicio 6: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución apropiada

$$u = x^3 + 1$$

Paso 2: Calcular du

$$du = 3x^2 dx \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = \frac{1}{3} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du$$

Paso 4: Integrar

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3} u^{1/2} + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 1} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: ”¿Ves alguna función compuesta? ¿Hay algo en el numerador relacionado con la derivada de lo que está dentro de la raíz?”

Nivel 2: .óbserva que en el numerador tienes x^2 y dentro de la raíz está $x^3 + 1$. ¿Qué relación hay?”

Nivel 3: Íntenta $u = x^3 + 1$. ¿Qué obtienes para du ?”

Ejercicio 7: $\int x \cos(x^2) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = x^2$$

Paso 2: Calcular du

$$du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad x dx = \frac{1}{2} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int x \cos(x^2) dx = \int \cos(u) \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \cos(u) du$$

Paso 4: Integrar

$$= \frac{1}{2} \sin(u) + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Qué función está dentro del coseno? ¿Su derivada aparece en algún lugar?"**Nivel 2:** "El argumento del coseno es x^2 , y su derivada es $2x$. ¿Ves la x en el integrando?"**Nivel 3:** "Usa $u = x^2$, entonces $du = 2x dx$ "Ejercicio 8: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ **Solución Paso a Paso:****Paso 1:** Identificar la sustitución

$$u = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

Paso 2: Calcular du

$$du = \frac{1}{2}x^{-1/2} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int e^u \cdot 2 du = 2 \int e^u du$$

Paso 4: Integrar

$$= 2e^u + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= 2e^{\sqrt{x}} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Qué función está en el exponente de e ? ¿Puedes relacionarla con el denominador?"**Nivel 2:** "Tienes \sqrt{x} en el exponente y en el denominador. ¿Cuál es la derivada de \sqrt{x} ?"**Nivel 3:** "Prueba $u = \sqrt{x}$. Entonces $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ "

Ejercicio 9: $\int \frac{1}{\sec(5x + 1)} dx$

Solución Paso a Paso:**Paso 1:** Simplificar usando identidades trigonométricas

$$\frac{1}{\sec(5x + 1)} = \cos(5x + 1)$$

Paso 2: Reescribir la integral

$$\int \frac{1}{\sec(5x + 1)} dx = \int \cos(5x + 1) dx$$

Paso 3: Identificar la sustitución

$$u = 5x + 1$$

Paso 4: Calcular du

$$du = 5 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{5} du$$

Paso 5: Reescribir y resolver

$$\int \cos(5x + 1) dx = \int \cos(u) \cdot \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \sin(u) + C$$

Paso 6: Sustituir de vuelta

$$= \frac{1}{5} \sin(5x + 1) + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "Primero simplifica. ¿Qué es $1/\sec(\theta)$?"**Nivel 2:** Recuerda que $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$, entonces $1/\sec(\theta) = \cos(\theta)$ "**Nivel 3:** "Después de simplificar a $\cos(5x + 1)$, usa $u = 5x + 1$ "

Ejercicio 10: $\int 4^{2x} dx$

Solución Paso a Paso:**Paso 1:** Reescribir usando exponencial natural

$$4^{2x} = e^{\ln(4^{2x})} = e^{2x \ln 4}$$

Paso 2: Identificar la sustitución

$$u = 2x \ln 4$$

Paso 3: Calcular du

$$du = 2 \ln 4 dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2 \ln 4} du$$

Paso 4: Reescribir y resolver

$$\int e^{2x \ln 4} dx = \int e^u \cdot \frac{1}{2 \ln 4} du = \frac{1}{2 \ln 4} e^u + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= \frac{1}{2 \ln 4} e^{2x \ln 4} + C = \frac{1}{2 \ln 4} \cdot 4^{2x} + C = \frac{4^{2x}}{2 \ln 4} + C$$

Alternativa: Usando la fórmula directa $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$:

$$\int 4^{2x} dx = \frac{4^{2x}}{2 \ln 4} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: ”¿Recuerdas la fórmula para integrar a^x ? ¿Cómo se relaciona con e^x ?“

Nivel 2: ”Para integrar a^{kx} , usa $\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$ “

Nivel 3: .Aplica directamente: $\int 4^{2x} dx = \frac{4^{2x}}{2 \ln 4} + C$ “

Ejercicio 11: $\int x \sin(x^2) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = x^2$$

Paso 2: Calcular du

$$du = 2x dx \quad \Rightarrow \quad x dx = \frac{1}{2} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int x \sin(x^2) dx = \int \sin(u) \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \sin(u) du$$

Paso 4: Integrar

$$= -\frac{1}{2} \cos(u) + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: .Este problema es muy similar al ejercicio 7. ¿Qué observas?“

Nivel 2: .El argumento del seno es x^2 , y tienes $x dx$ en el integrando“

Nivel 3: .Usa $u = x^2$, entonces $du = 2x dx$ “

Ejercicio 12: $\int \frac{2x^2 + 1}{2x^3 + 3x - 1} dx$

Solución Paso a Paso:**Paso 1:** Observar la relación entre numerador y denominador

$$\frac{d}{dx}[2x^3 + 3x - 1] = 6x^2 + 3 = 3(2x^2 + 1)$$

Paso 2: Identificar la sustitución

$$u = 2x^3 + 3x - 1$$

Paso 3: Calcular du

$$du = (6x^2 + 3) dx = 3(2x^2 + 1) dx \Rightarrow (2x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} du$$

Paso 4: Reescribir la integral

$$\int \frac{2x^2 + 1}{2x^3 + 3x - 1} dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du$$

Paso 5: Integrar

$$= \frac{1}{3} \ln |u| + C$$

Paso 6: Sustituir de vuelta

$$= \frac{1}{3} \ln |2x^3 + 3x - 1| + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: Cuando ves una fracción, pregúntate: ¿el numerador es (casi) la derivada del denominador?"

Nivel 2: "Deriva el denominador y compáralo con el numerador. ¿Qué relación encuentras?"

Nivel 3: "La derivada de $2x^3 + 3x - 1$ es $6x^2 + 3 = 3(2x^2 + 1)$. Usa $u = 2x^3 + 3x - 1$ "

Ejercicio 13: $\int e^{1+\ln x}(1 + \ln x) dx$

Solución Paso a Paso:**Paso 1:** Identificar la sustitución

$$u = 1 + \ln x$$

Paso 2: Calcular du

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Paso 3: Necesitamos expresar dx en términos de du . Pero tenemos $(1 + \ln x) dx$ en

el integrando, no $\frac{1}{x} dx$.

Paso alternativo: Reescribir la integral

$$\int e^{1+\ln x}(1 + \ln x) dx$$

Observemos que podemos hacer: $u = 1 + \ln x$, entonces $du = \frac{dx}{x}$, pero esto no coincide exactamente.

Mejor enfoque - Paso 1: Simplificar primero

$$e^{1+\ln x} = e^1 \cdot e^{\ln x} = e \cdot x$$

Paso 2: Reescribir la integral

$$\int e^{1+\ln x}(1 + \ln x) dx = \int ex(1 + \ln x) dx = e \int x(1 + \ln x) dx$$

Paso 3: Ahora usar sustitución $u = 1 + \ln x$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad dx = x du$$

Paso 4: De $u = 1 + \ln x$ obtenemos $\ln x = u - 1$, entonces $x = e^{u-1}$

Paso 5: Sustituyendo:

$$e \int x(1 + \ln x) dx = e \int e^{u-1} \cdot u \cdot e^{u-1} du = e \int u \cdot e^{2(u-1)} du$$

Esto se complica. Probemos otro enfoque.

Enfoque directo - Paso 1: Observar que si $u = e^{1+\ln x}$, entonces:

$$u = e \cdot e^{\ln x} = ex$$

Paso 2: Calcular du

$$du = e dx$$

Esto tampoco funciona directamente.

Mejor solución: Usar $u = 1 + \ln x$

Paso 1: $u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

Paso 2: De $u = 1 + \ln x$, tenemos $e^u = e^{1+\ln x}$ y $\ln x = u - 1$, entonces $x = e^{u-1}$

Paso 3: $dx = x du = e^{u-1} du$

Paso 4: Sustituir:

$$\int e^{1+\ln x}(1 + \ln x) dx = \int e^u \cdot u \cdot e^{u-1} du = \int u \cdot e^{2u-1} du = e^{-1} \int ue^{2u} du$$

Esto requiere integración por partes.

Solución más simple - Reconocimiento de patrón:

Si $f(x) = e^{1+\ln x}$, entonces $f(x) = ex$ y $f'(x) = e$

Observamos que la integral tiene la forma $\int e^u \cdot u dx$ donde $u = 1 + \ln x$

La antiderivada de e^u con respecto a x cuando $u = 1 + \ln x$ es:

Usando la regla del producto invertida:

$$\frac{d}{dx}[xe^{1+\ln x}] = e^{1+\ln x} + x \cdot e^{1+\ln x} \cdot \frac{1}{x} = e^{1+\ln x} + e^{1+\ln x} = 2e^{1+\ln x}$$

Probemos: $\frac{d}{dx}[(1 + \ln x)e^{1+\ln x}]$:

$$= \frac{1}{x}e^{1+\ln x} + (1 + \ln x) \cdot e^{1+\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{1+\ln x}}{x}[1 + 1 + \ln x] = \frac{e^{1+\ln x}(2 + \ln x)}{x}$$

Intentemos otro enfoque. Sabiendo que $e^{1+\ln x} = ex$:

$$\int ex(1 + \ln x) dx$$

Por partes: $u = 1 + \ln x$, $dv = ex dx$ $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{ex^2}{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{ex^2(1 + \ln x)}{2} - \int \frac{ex^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{ex^2(1 + \ln x)}{2} - \frac{e}{2} \int x dx \\ &= \frac{ex^2(1 + \ln x)}{2} - \frac{ex^2}{4} + C = \frac{ex^2}{4}[2(1 + \ln x) - 1] + C \\ &= \frac{ex^2}{4}(1 + 2\ln x) + C = \frac{ex^2(1 + 2\ln x)}{4} + C \end{aligned}$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "Primero simplifica $e^{1+\ln x}$ usando propiedades de exponentiales"

Nivel 2: Recuerda que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ y que $e^{\ln x} = x$ "

Nivel 3: "Simplifica a $ex(1+\ln x)$ y usa integración por partes con $u = 1+\ln x$ y $dv = ex dx$ "

Ejercicio 14: $\int \frac{e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = 1 + e^{2x}$$

Paso 2: Calcular du

$$du = 2e^{2x} dx \Rightarrow e^{2x} dx = \frac{1}{2} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \frac{e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{-2} du$$

Paso 4: Integrar

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2u} + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= -\frac{1}{2(1 + e^{2x})} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: .ºbserva el denominador elevado al cuadrado. ¿El numerador está relacionado con su derivada?"**Nivel 2:** "Si derivas $1 + e^{2x}$, ¿qué obtienes? ¿Se parece al numerador?"**Nivel 3:** Úsa $u = 1 + e^{2x}$, entonces $du = 2e^{2x}dx$ "

Ejercicio 15: $\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{1 - 2\sin(3x)}} dx$

Solución Paso a Paso:**Paso 1:** Identificar la sustitución

$$u = 1 - 2\sin(3x)$$

Paso 2: Calcular du

$$du = -2\cos(3x) \cdot 3 dx = -6\cos(3x) dx$$

$$\Rightarrow \cos(3x) dx = -\frac{1}{6} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{1 - 2\sin(3x)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) du = -\frac{1}{6} \int u^{-1/2} du$$

Paso 4: Integrar

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = -\frac{1}{3}u^{1/2} + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1 - 2\sin(3x)} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Qué hay dentro de la raíz cuadrada? ¿El numerador está relacionado con su derivada?"**Nivel 2:** "Si derivas $\sin(3x)$, obtienes $3\cos(3x)$. ¿Ves algo similar en el numerador?"**Nivel 3:** Úsa $u = 1 - 2\sin(3x)$, entonces $du = -6\cos(3x)dx$ "

Ejercicio 16: $\int \frac{x \, dx}{1 + x^2}$

Solución Paso a Paso:**Paso 1:** Identificar la sustitución

$$u = 1 + x^2$$

Paso 2: Calcular du

$$du = 2x \, dx \quad \Rightarrow \quad x \, dx = \frac{1}{2} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \frac{x \, dx}{1 + x^2} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

Paso 4: Integrar

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

(Nota: $1 + x^2 > 0$ siempre, así que no necesitamos valor absoluto)**Estrategia de Ayuda para el Chatbot****Nivel 1:** "¿El numerador es la derivada (o casi) del denominador?"**Nivel 2:** "Deriva $1 + x^2$ y compara con el numerador"**Nivel 3:** Úsa $u = 1 + x^2$, entonces $du = 2x \, dx$ "

Ejercicio 17: $\int \frac{x^2 \, dx}{1 + x^2}$

Solución Paso a Paso:**Paso 1:** Realizar división larga o reescribir el numerador

$$\frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} = \frac{x^2 + 1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$$

Paso 2: Reescribir la integral

$$\int \frac{x^2 \, dx}{1 + x^2} = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx$$

Paso 3: Separar la integral

$$= \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1 + x^2} \, dx$$

Paso 4: Integrar usando antiderivadas conocidas

$$= x - \arctan(x) + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: El grado del numerador es igual al del denominador. ¿Qué técnica usas en estos casos?"

Nivel 2: Intenta reescribir $x^2 = (x^2 + 1) - 1$ en el numerador"

Nivel 3: "Separa: $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. Recuerda que $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$ "

Ejercicio 18: $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Multiplicar numerador y denominador por e^x

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

Paso 2: Identificar la sustitución

$$u = e^x$$

Paso 3: Calcular du

$$du = e^x dx$$

Paso 4: Reescribir la integral

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

Paso 5: Integrar usando antiderivada conocida

$$= \arctan(u) + C$$

Paso 6: Sustituir de vuelta

$$= \arctan(e^x) + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "La suma $e^x + e^{-x}$ es complicada. ¿Puedes multiplicar por algo para simplificarla?"

Nivel 2: Intenta multiplicar numerador y denominador por e^x . ¿Qué obtienes?"

Nivel 3: "Multiplica por e^x para obtener $\frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$, luego usa $u = e^x$ "

Ejercicio 19: $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 5}$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Reescribir $e^{2x} = e^x \cdot e^x$

$$\int \frac{e^{2x} dx}{e^x - 5} = \int \frac{e^x \cdot e^x dx}{e^x - 5}$$

Paso 2: Identificar la sustitución

$$u = e^x - 5$$

Paso 3: Calcular du

$$du = e^x dx$$

De $u = e^x - 5$, tenemos $e^x = u + 5$

Paso 4: Reescribir la integral

$$\int \frac{e^x \cdot e^x dx}{e^x - 5} = \int \frac{(u + 5)du}{u} = \int \left(1 + \frac{5}{u}\right) du$$

Paso 5: Integrar

$$= u + 5 \ln |u| + C$$

Paso 6: Sustituir de vuelta

$$= (e^x - 5) + 5 \ln |e^x - 5| + C = e^x + 5 \ln |e^x - 5| + C$$

(Podemos absorber la constante -5 en C)

$$= e^x + 5 \ln |e^x - 5| + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: ¿Puedes reescribir e^{2x} de otra forma? ¿Ves alguna relación con el denominador?

Nivel 2: Escribe $e^{2x} = e^x \cdot e^x$ y observa que la derivada de $e^x - 5$ es e^x

Nivel 3: Usa $u = e^x - 5$. Entonces $e^x = u + 5$ y $du = e^x dx$

Ejercicio 20: $\int \frac{\cos(x) dx}{\sin(x)\sqrt{\sin^2(x) - 1}}$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = \sin(x)$$

Paso 2: Calcular du

$$du = \cos(x) dx$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \frac{\cos(x) dx}{\sin(x)\sqrt{\sin^2(x) - 1}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

Paso 4: Esta es una integral estándar. Podemos usar otra sustitución trigonométrica o reconocer el patrón.

Para $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$, la antiderivada es $\text{arcsec}(u) + C$ (o $-\arcsin(1/u) + C$)

Verificación: $\frac{d}{du}[\text{arcsec}(u)] = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Para que coincida exactamente, necesitamos considerar el valor absoluto.

Paso 5: La solución es

$$= \text{arcsec} |\sin(x)| + C$$

o equivalentemente:

$$= \arccos \left(\frac{1}{|\sin(x)|} \right) + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: Observa que el numerador tiene $\cos(x)$. ¿Con qué función trigonométrica está relacionado?

Nivel 2: "La derivada de $\sin(x)$ es $\cos(x)$. Intenta $u = \sin(x)$ "

Nivel 3: "Después de $u = \sin(x)$, obtienes $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$, que es $\text{arcsec}(u) + C$ "

Ejercicio 21: $\int (z+1)e^{z^2+2z} dz$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = z^2 + 2z$$

Paso 2: Calcular du

$$du = (2z + 2) dz = 2(z + 1) dz$$

$$\Rightarrow (z + 1) dz = \frac{1}{2} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int (z+1)e^{z^2+2z} dz = \int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du$$

Paso 4: Integrar

$$= \frac{1}{2} e^u + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= \frac{1}{2} e^{z^2+2z} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: "¿Qué hay en el exponente de e ? ¿Su derivada aparece en algún lugar?"

Nivel 2: "Deriva $z^2 + 2z$ y compáralo con $(z + 1)$ "

Nivel 3: "Usa $u = z^2 + 2z$, entonces $du = 2(z + 1)dz$ "

Ejercicio 22: $\int \sec^2(x) \cdot e^{\tan x} dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = \tan x$$

Paso 2: Calcular du

$$du = \sec^2(x) dx$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \sec^2(x) \cdot e^{\tan x} dx = \int e^u du$$

Paso 4: Integrar

$$= e^u + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= e^{\tan x} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: ”¿Reconoces $\sec^2(x)$ como la derivada de alguna función trigonométrica?”

Nivel 2: Recuerda que $\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$ ”

Nivel 3: Usa $u = \tan x$, entonces $du = \sec^2(x)dx$ ”

Ejercicio 23: $\int \sin(x) \cos(x) e^{\cos^2(x)} dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = \cos^2(x)$$

Paso 2: Calcular du

$$du = 2 \cos(x) \cdot (-\sin(x)) dx = -2 \sin(x) \cos(x) dx$$

$$\Rightarrow \sin(x) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} du$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \sin(x) \cos(x) e^{\cos^2(x)} dx = \int e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \int e^u du$$

Paso 4: Integrar

$$= -\frac{1}{2} e^u + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= -\frac{1}{2}e^{\cos^2(x)} + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: ”¿Qué está en el exponente? ¿Puedes relacionar $\sin(x)\cos(x)$ con la derivada de $\cos^2(x)$?”

Nivel 2: Úsa la regla de la cadena: $\frac{d}{dx}[\cos^2(x)] = 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) = -2\sin(x)\cos(x)$ ”

Nivel 3: Úsa $u = \cos^2(x)$, entonces $du = -2\sin(x)\cos(x)dx$ ”

Ejercicio 24: $\int e^x \sec(e^x + 3) dx$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = e^x + 3$$

Paso 2: Calcular du

$$du = e^x dx$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int e^x \sec(e^x + 3) dx = \int \sec(u) du$$

Paso 4: Integrar usando antiderivada conocida

$$= \ln |\sec(u) + \tan(u)| + C$$

Paso 5: Sustituir de vuelta

$$= \ln |\sec(e^x + 3) + \tan(e^x + 3)| + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: ”¿Qué está dentro de la función secante? ¿Su derivada aparece en el integrando?”

Nivel 2: ”La derivada de $e^x + 3$ es e^x , que está multiplicando”

Nivel 3: Úsa $u = e^x + 3$. Recuerda que $\int \sec(u) du = \ln |\sec(u) + \tan(u)| + C$ ”

Ejercicio 25: $\int \frac{(\ln x)^2 dx}{x(1 - \ln x)}$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la sustitución

$$u = \ln x$$

Paso 2: Calcular du

$$du = \frac{1}{x} dx$$

Paso 3: Reescribir la integral

$$\int \frac{(\ln x)^2 dx}{x(1 - \ln x)} = \int \frac{u^2}{1 - u} du$$

Paso 4: Realizar división larga de polinomios

Dividiendo u^2 entre $1 - u = -(u - 1)$:

$$\frac{u^2}{1 - u} = \frac{u^2}{-(u - 1)} = -\frac{u^2}{u - 1}$$

Dividiendo u^2 entre $u - 1$:

$$u^2 = (u - 1)(u + 1) + 1$$

Entonces:

$$\frac{u^2}{u - 1} = u + 1 + \frac{1}{u - 1}$$

Por lo tanto:

$$\frac{u^2}{1 - u} = -(u + 1) - \frac{1}{u - 1} = -u - 1 - \frac{1}{u - 1}$$

Paso 5: Integrar

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2}{1 - u} du &= \int \left(-u - 1 - \frac{1}{u - 1} \right) du \\ &= -\frac{u^2}{2} - u - \ln |u - 1| + C \end{aligned}$$

Paso 6: Sustituir de vuelta

$$= -\frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x - \ln |\ln x - 1| + C$$

Estrategia de Ayuda para el Chatbot

Nivel 1: Observa el factor $1/x$ en el denominador. ¿Con qué función está relacionado?"

Nivel 2: "La derivada de $\ln x$ es $1/x$. Intenta $u = \ln x$ "

Nivel 3: Usa $u = \ln x$, luego necesitarás división larga para $\frac{u^2}{1-u}$ "

Recomendaciones Finales para el Chatbot

Directivas para el Chatbot

Verificación de Comprensión

Después de ayudar al estudiante a resolver un problema, el chatbot debe:

1. Pedir al estudiante que explique el proceso con sus propias palabras
2. Sugerir derivar el resultado para verificar la respuesta
3. Proponer un ejercicio similar para practicar
4. Conectar con conceptos relacionados

Manejo de Errores Comunes

El chatbot debe estar atento a errores frecuentes:

- Olvidar la constante de integración C
- Errores de signo en sustituciones
- No simplificar la respuesta final
- Confundir cuándo aplicar la regla de la cadena
- Olvidar ajustar los coeficientes después de la sustitución

Fomentando la Independencia

El chatbot debe:

- Recordar al estudiante que puede verificar sus respuestas derivando
- Sugerir que intente problemas similares por su cuenta
- Animar a consultar sus notas y libro de texto
- Celebrar cuando resuelven partes del problema independientemente