Guía de Asistencia para Chatbot

Actividad: Sumas de Riemann

Material de Soporte para Estudiantes

INSTRUCCIONES PARA EL CHATBOT:

Este documento contiene información para ayudar a los estudiantes con la actividad de Sumas de Riemann. Tu objetivo es guiar a los estudiantes paso a paso sin darles las respuestas completas directamente.

Cuando un estudiante te haga una pregunta:

- Identifica en qué paso específico está trabajando
- Proporciona ayuda para ese paso particular usando la información de este documento
- Dale pistas y guías, pero NO copies directamente el código o las soluciones completas
- Anima al estudiante a pensar y construir la solución por sí mismo
- Si un estudiante está completamente perdido, puedes mostrar un paso específico y pedirle que intente el siguiente

1. Solución Completa: Implementación en Python

1.1. Código Comentado de la Función

```python
def suma_riemann(f, a, b, n):
    """
    Calcula la suma de Riemann usando extremo derecho.

    Parametros:
        f: funcion a integrar
        a: limite inferior
        b: limite superior
        n: numero de subdivisiones

    Retorna:
        Aproximacion de la integral definida
    """
    # Paso 1: Calcular el ancho de cada subintervalo
    # Formula: Delta_x = (b - a) / n
    delta_x = (b - a) / n

    # Paso 2: Inicializar la suma en cero
    suma = 0

    # Paso 3: Iterar sobre cada subintervalo
    # i va de 1 hasta n (extremo derecho)
```

```
    for i in range(1, n + 1):
        # Paso 4: Calcular el punto x_i (extremo derecho del i-esimo intervalo)
        # Formula: x_i = a + i * Delta_x
        x_i = a + i * delta_x

        # Paso 5: Evaluar la funcion en x_i y multiplicar por Delta_x
        # Acumular en la suma
        suma += f(x_i) * delta_x

    # Paso 6: Devolver el resultado
    return suma
```

1.2. Código de Aplicación

```
# Definir las funciones a integrar

# Ejercicio A: f(x) = 3x
def funcion_A(x):
    return 3 * x

# Ejercicio B: f(x) = x^2 + 1
def funcion_B(x):
    return x**2 + 1

# Valores de n para probar
valores_n = [10, 100, 1000, 10000]

# Ejercicio A: integral de 3x de 0 a 4
print("Ejercicio A: Integral de 3x de 0 a 4")
print("Valor exacto: 24.0")
print("-" * 50)
for n in valores_n:
    resultado = suma_riemann(funcion_A, 0, 4, n)
    error = abs(resultado - 24.0)
    print(f"n = {n:5d}: {resultado:.10f}, Error: {error:.10f}")

print("\n")

# Ejercicio B: integral de x^2 + 1 de 0 a 2
print("Ejercicio B: Integral de x^2 + 1 de 0 a 2")
print("Valor exacto: 4.666666... (14/3)")
valor_exacto_B = 14/3
print("-" * 50)
for n in valores_n:
    resultado = suma_riemann(funcion_B, 0, 2, n)
    error = abs(resultado - valor_exacto_B)
    print(f"n = {n:5d}: {resultado:.10f}, Error: {error:.10f}")
```

2. Soluciones Analíticas Paso a Paso

2.1. Ejercicio A: $\int_0^4 3x\,dx$

Paso 1: Identificar los parámetros

- $f(x) = 3x$

- $a = 0$, $b = 4$
- $\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

Paso 2: Calcular x_i

$$x_i = 0 + i \cdot \frac{4}{n} = \frac{4i}{n}$$

Paso 3: Evaluar $f(x_i)$

$$f(x_i) = 3 \cdot \frac{4i}{n} = \frac{12i}{n}$$

Paso 4: Escribir la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{12i}{n} \cdot \frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{48i}{n^2}$$

Paso 5: Simplificar usando $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S_n = \frac{48}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{48}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{24n(n+1)}{n^2} = \frac{24(n+1)}{n}$$

Paso 6: Tomar el límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{24(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} 24\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 24$$

Paso 7: Verificar con la antiderivada

$$\int_0^4 3x\,dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{3(16)}{2} - 0 = 24 \quad \checkmark$$

2.2. Ejercicio B: $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

Paso 1: Identificar los parámetros

- $f(x) = x^2 + 1$
- $a = 0$, $b = 2$
- $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

Paso 2: Calcular x_i

$$x_i = 0 + i \cdot \frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$$

Paso 3: Evaluar $f(x_i)$

$$f(x_i) = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1 = \frac{4i^2}{n^2} + 1$$

Paso 4: Escribir la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2} + 1\right) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8i^2}{n^3} + \frac{2}{n}\right)$$

Paso 5: Separar las sumas

$$S_n = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

Paso 6: Usar las fórmulas: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

$$S_n = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n} \cdot n = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 2$$

Paso 7: Simplificar

$$S_n = \frac{4(2n^2+3n+1)}{3n^2} + 2 = \frac{8n^2+12n+4}{3n^2} + 2 = \frac{8}{3} + \frac{12}{3n} + \frac{4}{3n^2} + 2$$

Paso 8: Tomar el límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{3} + 0 + 0 + 2 = \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{14}{3}$$

Paso 9: Verificar con la antiderivada

$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - 0 = \frac{14}{3} \approx 4{,}667 \quad \checkmark$$

3. Guía de Ayuda Paso a Paso para Estudiantes

3.1. Ayuda para la Implementación de la Función

3.1.1. Paso 1: Calcular Δx

Concepto: El ancho de cada rectángulo se calcula dividiendo la longitud total del intervalo entre el número de subdivisiones.

Pregunta guía: ¿Cuál es la longitud total del intervalo $[a, b]$? ¿Cómo la divides en n partes iguales?

Pista: La fórmula es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

3.1.2. Paso 2: Inicializar la suma

Concepto: Necesitas una variable para acumular los valores de las áreas de los rectángulos.

Pregunta guía: ¿En qué valor debe empezar tu acumulador antes de comenzar a sumar?

Pista: Piensa en el elemento neutro de la suma.

3.1.3. Paso 3: Crear el ciclo

Concepto: Debes iterar sobre cada subintervalo. Como usamos extremo derecho, i va de 1 hasta n.

Pregunta guía: ¿Qué estructura de control usas para repetir una operación n veces?

Pista: En Python, `range(1, n+1)` genera los números del 1 al n.

3.1.4. Paso 4: Calcular x_i

Concepto: El extremo derecho del i-ésimo subintervalo está en $x_i = a + i \cdot \Delta x$.

Pregunta guía: Si empiezas en a y avanzas i pasos de tamaño Δx, ¿dónde estás?

Pista: Es como caminar desde a dando i pasos de longitud Δx.

3.1.5. Paso 5: Calcular el área del rectángulo

Concepto: El área de cada rectángulo es altura $\times$ base $= f(x_i) \times \Delta x$.

Pregunta guía: ¿Cómo evalúas la función f en el punto x_i? ¿Qué multiplicas ese valor?

Pista: Usa `f(x_i)` para obtener la altura y multiplica por `delta_x`.

3.1.6. Paso 6: Acumular el resultado

Concepto: Debes sumar el área de cada rectángulo a tu acumulador.

Pregunta guía: ¿Cómo agregas un nuevo valor a una suma existente en Python?

Pista: El operador `+=` es útil para acumular valores.

3.2. Ayuda para las Soluciones Analíticas

3.2.1. Fórmulas útiles

Las siguientes fórmulas son fundamentales para resolver sumas de Riemann analíticamente:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \quad \text{(donde } c \text{ es constante)}$$

3.2.2. Estrategia general

Para resolver una integral con sumas de Riemann:

1. Identifica a, b, y calcula $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
2. Encuentra $x_i = a + i\Delta x$
3. Evalúa $f(x_i)$
4. Escribe $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$
5. Expande y simplifica usando las fórmulas de sumas
6. Toma el límite cuando $n \to \infty$
7. Verifica con la antiderivada

3.3. Ayuda para Definir Funciones en Python

3.3.1. Definir la función para el Ejercicio A

Concepto: Para $f(x) = 3x$, necesitas crear una función de Python que tome un valor x y devuelva $3x$.

Estructura básica:

```python
def nombre_funcion(x):
    return [expresion en terminos de x]
```

Pregunta guía: ¿Cómo escribes $3x$ en Python?

3.3.2. Definir la función para el Ejercicio B

Concepto: Para $f(x) = x^2 + 1$, la función debe devolver el cuadrado de x más 1.

Pregunta guía: ¿Cómo elevas un número al cuadrado en Python? (Pista: operador `**`)

4. Preguntas Frecuentes

4.1. Sobre la Implementación

P: ¿Por qué `range(1, n+1)` y no `range(0, n)`?

R: Usamos extremo derecho, por lo que i va de 1 a n. Si usaras `range(0, n)`, estarías usando $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, lo cual corresponde al extremo izquierdo.

P: ¿Puedo usar listas para guardar todos los valores?

R: Sí, aunque no es necesario. Puedes hacer:

```
valores = [f(a + i * delta_x) * delta_x for i in range(1, n+1)]
suma = sum(valores)
```

P: ¿Cómo sé si mi función está correcta?

R: Pruébala con los ejemplos del documento de instrucciones. Para $f(x) = 2x$ en $[0, 3]$, el resultado debe acercarse a 9.

4.2. Sobre las Soluciones Analíticas

P: ¿Cómo simplifico expresiones con n en el denominador?

R: Factoriza n y separa términos. Por ejemplo: $\frac{9(n+1)}{n} = 9 \cdot \frac{n+1}{n} = 9\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

P: ¿Qué hago con los términos $\frac{1}{n}$ cuando tomo el límite?

R: Cuando $n \to \infty$, cualquier término de la forma $\frac{c}{n^k}$ (con $k > 0$) tiende a cero.