Modes propres de vibration d'une corde

Le but de l'exercice est de caractériser les modes de vibration $u_k(x)$ selon Oz d'une corde. Dans la limite des faibles amplitudes de vibration, ils sont solutions de l'équation d'Helmholtz stationnaire :

$$\partial_x^2 \, u_k + k^2 \, u_k = 0 \tag{1}$$

On considère que la corde est fixée à ses deux extrémités.

1 Partie Mathématique

La corde de longueur L est dicrétisée en différences finies avec une grille comportant N noeuds selon Ox. On note $\Delta x = L/(N-1)$ le pas de la grille. On numérote de manière unique et ordonnée, les noeuds dans $[\![0, N[\![$.

1. Donner l'expression discrète en différences finies, de l'opérateur laplacien appliqué à $u(x)$ en un point **intérieur** x de la grille.
   Indication : faire un développement de Taylor de $u(x, y)$ à partir des premiers voisins. On utilisera le développement limité suivant, pour une fonction à deux variables :

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \, \partial_x u + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \, \partial_x^2 \, u + \frac{1}{6}(\Delta x)^3 \, \partial_x^3 \, u + \vartheta(\Delta x)^4 \tag{2}$$

   Les dérivées partielles étant évaluées en x. Faire de même avec $u(x - \Delta x)$.
   Réponse :

$$\partial_x^2 \, u = \frac{u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) - 2u(x)}{\Delta x^2} + \vartheta(\Delta x)^2$$

2. En déduire la forme discrète en tout point intérieur $i \in]\!]0, N-1[\![$ localisé en $x_i = i \times \Delta x$.
3. Montrer que l'on peut écrire l'équation (1) après discrétisation, sous la forme matricielle :

$$\sum_j K_{i,j} \, u_j = k^2 u_i = \lambda_k u_i \tag{3}$$

   Préciser la forme générale de la matrice K sans se soucier des bords.

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

4. On tient maintenant compte du déplacement nul des noeuds du bord. Dans le cas d'une grille avec 4 noeuds, donner précisément le remplissage de K avec l'expression des termes non-nuls. Dans la suite, on verra comment éliminer les degrés de liberté liés aux noeuds de dirichlet. On admet que pour tout noeud i du bord, on laisse vide la ligne i dans la matrice K. Utiliser le patron de la matrice vide fournie ci-après.

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

2 Modes propres avec conditions de dirichlet

On présente ici une méthode générale pour calculer les modes propres en tenant compte des conditions de vibration nulle sur le bord .

En notant N_d le nombre de noeuds où la condition de dirichlet est imposée, le nombre de degrés de liberté se réduit alors à $N_{dof} = N - N_d$ et correspond ici au nombre de noeuds pouvant vibrer.

2.1 Algorithme

L'algorithme consiste à former une liste l_d où apparaissent de manière unique les numéros des noeuds fixes du bord.

On forme ensuite une matrice de projection P permettant de passer de l'espace des solutions à N degrés de liberté (étude précédente) à celui restreint à N_{dof} degrés de liberté. Les dimensions de P sont $N_{dof} \times N$ (nombre de lignes × nombre de colonnes).

On initialise la matrice P avec la matrice identité $\mathtt{Id}(N)$ puis de supprimer toutes les lignes correspondant aux noeuds de dirichlet. Cette technique est bien adaptée à Matlab : si ld est la liste des noeuds de dirichlet sans doublon alors
$P = \mathtt{Id}(N);\ P(ld,:) = [\ ];$

$$P = \begin{pmatrix} \cancel{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \cancel{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIGURE 1 – exemple de matrice P avec $ld = [0, 2]$

On construit ensuite K_p qui est la matrice projetée de K dans l'espace solution à N_{dof} degrés de liberté : $K_p = PKP^t$.

On résoud l'équation aux valeurs propres : $PKP^t u_p = \lambda_p u_p$.

On obtient alors les valeurs propres λ_p associées aux vecteurs propres u_p.

On reconstruit la solution dans l'espace à N noeuds en appliquant $u = P^t u_p$. Elle vérifie automatiquement, $u(i) = 0$ pour tout noeud i de dirichlet.

3 Mise en application

On vous fournit un embryon de programme `numpy_modes_corde.py` à compléter, utilisant une classe `Fdm` pour stocker tous les paramètres de la simulation.

1. Compléter la fonction `__dirichlet` permettant de construire la liste ld des noeuds du bord où sont appliquées la conditions de dirichlet. On rappelle que l'instruction `ld.append(e)` permet d'insérer l'élément e dans la liste ld. Utiliser sous Numpy, la fonction `ld=numpy.unique(ld)` pour éliminer tout doublon dans la liste `ld`.
2. Compléter la fonction `__build_K` permettant de remplir la matrice K pour une grille de taille N_x. On rappelle que toute ligne n de K correspondant à un noeud de dirichlet n'est pas remplie.
   Pour tester l'appartenance d'un noeud n dans la liste `ld`, on utilisera l'expression booléenne `n in ld`.
3. Compléter la fonction `solve` permettant de calculer la n^{eme} plus petite valeur propre en module ainsi que le mode propre associé. On utilisera la fonction scipy `eigsh`
4. Pour un système de taille $L = 1m$, déterminer les 4 premiers modes de basse énergie et comparer à la solution analytique de l'équation d'Helmholtz (1). *Indication* : chercher des solutions de la forme $\sin(kx)$ avec $k = n\frac{\pi}{L}$.