Transformée de fourier rapide et convolution

Jean-Christophe Toussaint

10 juin 2025

1 Annexe I : décalage vers la gauche

Son origine est liée à la définition de la transformée de fourier fenêtrée :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} s(t) \exp\left(-i\omega t\right) dt \tag{1}$$

avec $\omega_k = \frac{2\pi}{T} k$ avec $k \in [\![0, N-1]\!]$.

La discrétisation en temps impose que $t = nT/N - T/2$ avec $n \in [\![0, N-1]\!]$. Le pas de temps dt est donc égal à T/N.

On obtient :

$$\hat{f}(\omega_k) = \frac{T}{N} \exp\left(+i\omega_k(T/2)\right) \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \exp\left(-i\frac{2\pi k}{N} n\right) = \frac{T}{N} \exp\left(+i\omega_k(T/2)\right) ft[k] \tag{2}$$

2 Annexe II : produit de convolution

Son origine est liée à la définition de la transformée de fourier fenêtrée :

$$\widehat{f * g}(\omega) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{+L} dy \ \int_{-L}^{+L} dx \ f(y) g(x-y) \exp\left(-i\omega x\right) \tag{3}$$

avec $\omega_k = \frac{2\pi}{T} k$ avec $k \in [\![0, N-1]\!]$.

$$\widehat{f * g}(\omega) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{+L} dy \ f(y) \int_{-L}^{+L} dx \ g(x-y) \exp\left(-i\omega x\right) \tag{4}$$

$$\widehat{f * g}(\omega) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{+L} dy \ f(y) \int_{-L-y}^{+L-y} dx' \ g(x') \exp\left(-i\omega(x'+y)\right) \tag{5}$$

$x' = x - y$

$$\widehat{f * g}(\omega) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{+L} dy \ f(y) \exp\left(-i\omega y\right) \int_{-L-y}^{+L-y} dx' \ g(x') \exp\left(-i\omega x'\right) \tag{6}$$

$x' = x - y$

Dans l'hypothèse où $g(x)$ a été périodisée, on obtient :

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \ \hat{g}(\omega) \tag{7}$$