MOUVEMENT CHAOTIQUE D'UN PENDULE PESANT

On se propose d'étudier le mouvement d'un pendule pesant soumis à une excitation sinusoïdale d'abord dans le régime classique puis dans le régime chaotique.

Les trois principaux objectifs de ce projet sont :

- Ecrire et implanter les équations du mouvement du pendule. Pour vous faciliter la tâche un programme de simulation du mouvement d'une masse soumise à une force de rappel du type ressort vous est fourni. Pour l'intégration temporelle, on utilise la librairie de calcul numérique GNU-gsl.
- La représentation graphique de la trajectoire vous est demandée, vous utiliserez la librairie gfx d'utilisation très simplifiée et très efficace. De même que précédemment, un exemple vous est fourni.
- Mener un ensemble de simulations dont les paramètres vous sont donnés.

La découverte du comportement aléatoire d'une grande variété de systèmes déterministes simples est à l'origine d'une constatation saisissante en astronomie: *au-delà d'une centaine de millions d'années, l'orbite de la Terre devient chaotique remettant en cause la stabilité du système solaire. La distance entre deux orbites théoriques de la Terre, initialement proches, est en effet multipliée par trois tous les cinq millions d'années.*
La contradiction apparente dans le mouvement chaotique entre déterminisme et hasard est maintenant bien comprise du point de vue mathématique. Pour les non-initiés, une présentation possible du chaos peut être faite lors de l'étude d'un pendule pesant soumis à une force excitatrice et à une force de frottements visqueux. L'équation du mouvement déduite du théorème du moment cinétique s'écrit:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\phi) - f\,\frac{d\phi}{dt} + A\sin(\omega t) \qquad (1)$$

où *1* est la longueur du pendule, *f* l'amplitude de la force de frottement et *A* l'amplitude de l'excitation. Pour simplifier l'étude, on se place dans le cas où *g/l*=l rad.s-2 .

Le but du projet est de développer un programme de simulation pour étudier le comportement d'un pendule théorique pour un ensemble de valeurs des paramètres *f, A* et ω et de conditions initiales c'est à dire les valeurs de l'angle ϕ et de la vitesse angulaire dϕ/dt à l'instant t=0. Connaissant ϕ(0) et dϕ/dt(0), il est en principe possible de résoudre numériquement l'équation (1) et de déterminer à chaque instant ϕ(t) et dϕ/dt(t). L'état du système est par conséquent complètement décrit dès que l'on connaît les deux variables d'états ϕ(t) et dϕ/dt(t). L'espace {ϕ(t), dϕ/dt(t)} constitue l'espace des phases.
Cette représentation permet de dessiner un grand nombre de trajectoires sans qu'il y ait de recouvrement. La raison est qu'un point de cet espace correspond précisément à un ensemble de conditions initiales {$\phi(t_0)$, $d\phi/dt(t_0)$}. Deux trajectoires qui passent par un même point sont donc forcément confondues puisqu'elles correspondent aux mêmes conditions initiales à partir de ce point. De plus, l'examen de leur forme permet d'obtenir, d'un simple coup d'œil, une information

sur la nature du mouvement: lorsqu'elle correspond, par exemple, à une courbe fermée, on a affaire à un mouvement périodique, puisqu'un mobile repasse par son point de départ.
Par contre, comme dans notre exemple lorsqu'on ajoute une force de freinage, la donnée de l'angle $\phi(t)$ et de la vitesse $d\phi/dt(t)$ ne suffit plus pour déterminer de façon unique la trajectoire. Lorsque l'excitation est périodique, l'astuce consiste à ne regarder le système qu'à chaque fois que l'excitation est maximale, un peu comme si l'on avait placé un stroboscope synchronisé avec la fréquence de l'excitation. Au lieu de tracer la totalité de la trajectoire dans l'espace des phases, on ne dessine le point représentatif $\{\phi\ (t)\ ;\ d\phi/dt(t)\}$ qu'aux instants $t=n.\tau=2\pi n/\omega$. Ce tracé partiel s'appelle une section de Poincaré et permet de visualiser l'ensemble des comportements du pendule, tout en éliminant la dépendance temporelle de la force excitatrice. Cette représentation permet de connaître la période réelle du pendule. Par exemple, un mouvement de période $T=m.\tau$, est représenté par m points distincts dans la section de Poincaré, tandis que celle d'une trajectoire chaotique comprend un nombre infini de points distincts.

Installation des librairies mathématique GNU-gsl et graphique GNU-g2:

A titre d'information et aussi pour vous permettre de développer un projet utilisant ces librairies sur des machines Unix autres que celles de l'école, on résume les opérations nécessaires pour installer la librairie GNU-gsl. La même méthode peut être appliquée à GNU-g2.

- 1er cas : vous n'êtes pas l'administrateur de votre machine, autrement dit, vous ne pouvez pas vous connecter en tant que root :

Télécharger la librairie GNU-gsl gsl-latest.tar.gz depuis https://www.gnu.org/software/gsl/
tar –xzf gsl-latest.tar.gz
Placer vous dans le répertoire gsl-2.X puis taper :
./configure --prefix=$HOME/**extralib**
Lancer la compilation et l'installation dans le répertoire local de votre Home Directory :
make ; make install
Pour compiler un programme utilisant la GNU-gsl, il est nécessaire d'indiquer le répertoire des fichiers include $HOME/**extralib/include** et le répertoire où se trouve la librairie $HOME/**extralib/lib**

```
gcc -I $HOME/extralib/include pgm.c -o pgm –L $HOME/extralib/lib -lgsl -
lgslcblas
```

- 2ème cas : l'administrateur de votre machine procède à l'installation de la librairie.

En se plaçant comme précédemment dans le répertoire gsl-2.X, exécuter **./configure** puis **make.**
L'installation s'effectue en mode administrateur. Connecter vous en tant que **root** et dans le répertoire gsl-2.X, taper **make install**

Etudes préliminaires:

Lire la documentation de la librairie GNU-gsl concernant le traitement des équations différentielles. Tester le comportement de la librairie en créant de petits programmes tests comme celui donné ci-après.
Le programme ode.c décrit le mouvement d'une masse soumise à une force de rappel du type ressort :

$m\dfrac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = -k\mathbf{OM}$ que l'on transforme en un système de 4 équations différentielles du premier ordre $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\omega_0^2 x \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\omega_0^2 y \end{cases}$ avec $\omega_0^2 = k/m$ =1 pour simplifier. On note $\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$ et $\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ -\omega_0^2 x \\ -\omega_0^2 y \end{Bmatrix}$ tels que $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y},t)$.

```
/* Pour compiler le programme ode.c
      gcc -I /usr/extralib/include/ ode.c -o ode -lgsl -lgslcblas -lm

   Pour l'exécuter
      Export LD_LIBRARY_PATH = $HOME/extralib:$LD_LIBRARY_PATH
      ./ode
*/

#include <stdio.h>
#include <gsl/gsl_errno.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_odeiv.h>
#include <gsl/gsl_ieee_utils.h>

/* DIM dimension du systeme d'equations */
#define DIM 4

/* limite supérieure du pas d'intégration */
const double hmax=0.01 ;
```

`/* ecriture du systeme d'equations differentielles du 1er ordre` $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y},t)$ `*/`

```
/* eq du ressort en 2D sous la forme dyvec/dt = fvec  */

int fonction (double t, const double *yvec, double *fvec, void *params)
{
  double x =yvec[0];
  double y =yvec[1];
  double vx=yvec[2];
  double vy=yvec[3];

  fvec[0] = vx;
  fvec[1] = vy;

  fvec[2] = -x;
  fvec[3] = -y;

  return GSL_SUCCESS;
}
```

$\mathbf{f}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

```
int main()
{
  const gsl_odeiv_step_type * T = gsl_odeiv_step_rkf45; // Runge Kutta 45
  gsl_odeiv_step * s = gsl_odeiv_step_alloc (T, DIM);

/* controle de la precision de calcul */
  gsl_odeiv_control * c = gsl_odeiv_control_y_new (0., 1.e-6);
  gsl_odeiv_evolve * e  = gsl_odeiv_evolve_alloc (DIM);
  gsl_odeiv_system sys = {fonction, NULL, DIM, NULL};

/* temps initial et temps final */
  double t = 0.0, tfin = 10.0;
/* pas initial d'integration des equations diff */
  double h = hmax;

/* conditions initiales {x0 y0 x0' y0'} */
  double y[DIM] = { 1.0, 1.0, 0., 0. };

  gsl_ieee_env_setup();

  for (;;)
    {
    int status = gsl_odeiv_evolve_apply (e, c, s,
                                          &sys,
                                          &t, tfin,
                                          &h, y);

    if (status != GSL_SUCCESS) break;

/* ---- limite sup du pas d'integration fixee par l'utilisateur */

    if (h>hmax) h=hmax;

/* ------*/

    printf("%lf \t %lf \t %lf \t %lf\n", t, h, y[0], y[1]);
    if (t>=tfin) break;
    }

  gsl_odeiv_evolve_free(e);
  gsl_odeiv_control_free(c);
  gsl_odeiv_step_free(s);
}
```

Travail à réaliser :

- En vous inspirant des exemples précédents, implanter les équations du mouvement du pendule puis
- Développer le code nécessaire à la représentation graphique :
  1. Du mouvement du pendule
  2. De l'espace des phases puis de l'espace de Poincaré.

Pour chacune des simulations suivantes, faites une description succincte du phénomène observé.

Simulation1 : pendule libre sans frottement
$\phi(0)=\pi$, $d\phi/dt(0)=0$, $f=0$, $A=0$ et $\omega=0$. (unités M.K.S.A.)
Vérifier que l'équation de la trajectoire dans l'espace des phases s'écrit: $\left|\frac{d\phi}{dt}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right|$

Simulation 2 : pendule libre dans la limite des petites oscillations
$\phi(0)=0.01$, $d\phi/dt(0)=0$, $f=0$, $A=0$ et $\omega=0$. (unités M.K.S.A.)

Vérifier que l'équation de la trajectoire dans l'espace des phases est un cercle.

Simulation 3 : attracteur à 1 point fixe
$\phi(0)=\pi/2$, $d\phi/dt(0)=0$, $f=0.1$, $A=0$ et $\omega=0$. (unités M.K.S.A.)

Simulation 4 : attracteur périodique
$\phi(0)=-2.83$, $d\phi/dt(0)=-4.25$, $f=0.1$, $A=4.9$ et $\omega=1.4$ (unités M.K.S.A.)

Simulation 5 : brisure de symétrie
$\phi(0)=-0.78$, $d\phi/dt(0)=0.15$, $f=0.1$, $A=9$ et $\omega=3$. (unités M.K.S.A.)

Simulation 6 : pendule inversé
$\phi(0)=-0.78$, $d\phi/dt(0)=0.15$, $f=0.1$, $A=22.5$ et $\omega=3$. (unités M.K.S.A.)

Simulation 7 : doublage de période
$\phi(0)=-1.27$, $d\phi/dt(0)=-2.03$, $f=0.1$, $A=4.9$ et $\omega=1.4$ (unités M.K.S.A.)

Simulation 8 : attracteur chaotique
$\phi(0)=0.$, $d\phi/dt(0)=0.$, $f=0.1$, $A=1.6$ et $\omega=0.8$ (unités M.K.S.A.)
Qu'observe-t-on dans la section de Poincaré ?

Simulation 9 : attracteur chaotique, sensibilité aux conditions initiales
$\phi(0)=0.001$, $d\phi/dt(0)=0.$, $f=0.1$, $A=1.6$ et $\omega=0.8$ (unités M.K.S.A.)
Comparer l'avance angulaire par rapport au cas précédent.