IPHY 2A - DS de Magnétisme - Session 2

Tous documents autorisés - Caculatrice autorisée - durée 2h

1 Questions de cours sur le couplage Spin-Orbite

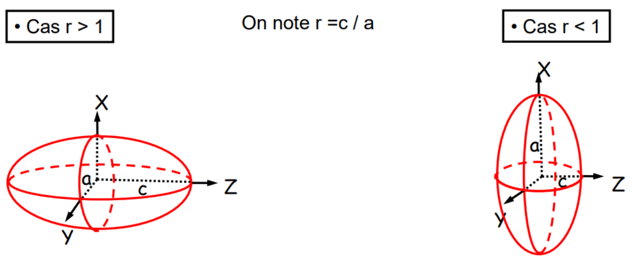
Bien que $\hat{L}^2$ et $\hat{S}^2$ commutent avec l'hamiltonien lié au spin-orbite $\hat{H}_{SO}$,

1. démontrer que $\hat{L}_z$ et $\hat{S}_z$ ne commutent plus avec $\hat{H}_{SO}$,
2. démontrer que $\hat{J}_z$ et $\hat{J}^2$ commutent avec $\hat{H}_{SO}$.
3. Quels sont les nombres quantiques pertinents caractérisant finalement un état quantique orbital et de spin.

2 Questions de cours sur la magnétostatique

Soit une plaque uniformément aimantée d'épaisseur e_z très petites par rapport à ses deux autres dimensions L_x et L_y. On suppose que l'aimantation de module M_s a pour composantes M_X, M_Y et M_Z.

4. Localisez les charges magnétiques de volume et de surface.
5. Quelle est l'expression mathématique approximative du champ démagnétisant ? Pourquoi est-ce une approximation ?



$$N_{ZZ} = N_{//} = \frac{1}{r^2-1}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}\operatorname{argch}(r)-1\right)$$
$$N_{XX} = N_{YY} = \frac{1-N_{//}}{2}$$

$$N_{ZZ} = N_{//} = \frac{1}{1-r^2}\left(1-\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\arccos(r)\right)$$
$$N_{XX} = N_{YY} = \frac{1-N_{//}}{2}$$

Figure 1 – Coefficients du tenseur démagnétisant.

Soit un ellipsoïde de révolution uniformément aimanté, placé en champ appliqué nul. On note M_X, M_Y et M_Z les composantes de l'aimantation dans le repère OXYZ lié aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

6. Donner l'expression des composantes du champ magnétique à l'intérieur de l'ellipsoïde en fonction de M_X, M_Y, M_Z et des coefficients de champ démagnétisant.
7. Que peut-on dire de la projection du champ selon l'aimantation ?
8. Quelle est la direction du champ si $\mathbf{M} = M_s\, \mathbf{u}_Z$ où M_s est constant ?
9. Que vaut le champ démagnétisant dans le cas d'une sphère ?

3 Champ magnétostatique généré par une sphère aimantée

On considère une sphère uniformément aimantée le long de l'axe vertical Oz. Le but de l'exercice est de calculer le champ magnétique généré dans tout l'espace.

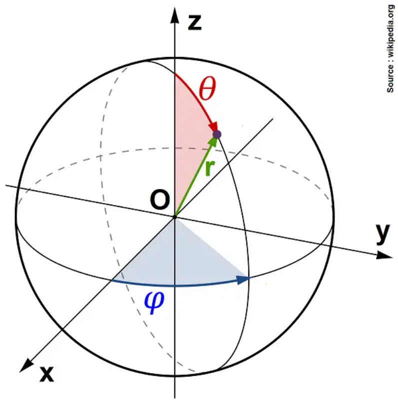


Figure 2 – Système de coordonnées sphériques.

10. Dans l'approche coulombienne où on définit des charges magnétiques fictives de volume $\rho_m = -\mathrm{div}\mathbf{M}$ et de surface $\sigma_m = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$, montrer que le potentiel magnétique est solution de :

$$-\Delta\Phi = \rho_m \tag{1}$$

On donne l'expression du laplacien en coordonnées sphériques (Fig. 2) :

$$\Delta\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\hat{L}^2\Phi \tag{2}$$

avec

$$\hat{L}^2\Phi = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \tag{3}$$

11. Donner l'expression mathématique de la densité $\sigma_m(r,\theta)$. Localisez-la. Quelle est son unité dans le système international de mesure MKSA ?
12. Dans le cas présent, quelle valeur évidente prend la densité $\rho_m(r,\theta)$?
13. Pourquoi le potentiel Φ de dépend pas de φ ?
14. On cherche une solution par la méthode de séparation des variables, autrement dit sous la forme : $\Phi(r,\theta) = R_l(r)T_l(\theta)$
15. En injectant ce produit de fonctions dans l'équation de Poisson obtenue en xxx, montrer que l'on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR_l}{dr}\right) & = l(l+1)R_l \\ \hat{L}^2\, T_l(\theta) & = l(l+1)T_l(\theta) \end{cases} \tag{4}$$

où $T_l(\theta) = P_l(\cos(\theta)) \equiv Y_l^{m=0}(\theta,\cancel{\varphi})$.

16. On admettra que la solution générale est définie par morceaux et s'écrit :

$$\begin{cases} \Phi_1(r,\theta) & = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l^1\, r^l + B_l^1\, r^{-l-1})\, P_l(\cos\theta) \\ \Phi_2(r,\theta) & = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l^2\, r^l + B_l^2\, r^{-l-1})\, P_l(\cos\theta) \end{cases} \tag{5}$$

en notant 1 la région de la sphère aimantée et 2 la région à l'extérieur de la sphère s'étendant jusqu'à l'infini,

17. Expliquer pourquoi B_l^1 et A_l^2 sont obligatoirement nuls.
18. Rappeler les relations de continuité aux interfaces aimant-air. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques $\nabla\Phi = \frac{\partial}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$.
19. Les appliquer pour en déduire les expressions de $\Phi_1(r,\theta)$ et $\Phi_2(r,\theta)$.
20. Calculer les expressions du champ magnétiques dans les 2 régions.
21. Vérifier à posteriori, les conditions de passage pour le champ magnétique à l'interface air-aimant.
22. Montrer qu'à l'extérieur, l'expression du champ magnétique peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{3(\mathcal{M}\cdot\mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \mathcal{M}}{r^3} \tag{6}$$

où $\mathcal{M}$ est le moment magnétique total porté par la sphère.

23. On rappelle que la densité d'énergie démagnétisante (énergie par unité de volume) est définie par $e_d = -\frac{1}{2}\mathbf{M}\cdot\mathbf{H_d}$. Quelle est son expression dans le cas présent ?