Magnétostatique : structure à aimants permanents

1 Présentation du dispositif

On considère une structure alternée d'aimants permanents aimantés uniformément selon +Ox et -Ox comme le suggère la figure ci-dessous. On suppose qu'elle est périodique selon Ox et qu'elle s'étend à l'infini.

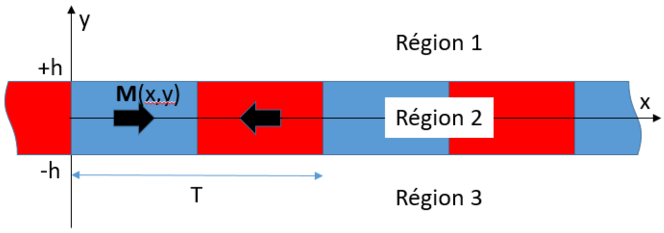

FIGURE 1 – Structure alternée d'aimants

La couche d'aimants d'épaisseur $e = 2h$ a donc une distribution d'aimantation que l'on peut écrire sous la forme d'une série de Fourier :

$$M_x(x,y) = M_s \sum_k \sin(kx) \tag{1}$$

1. Le dispositif réel est naturellement tri-dimensionnel. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour traiter ce problème en 2D ?

2 Pseudo-potentiel magnétique

Considérons d'abord un mode k de la distribution telle que $M_x(x,y) = M_k \sin(kx)$. Le champ magnétique $\vec{H}(x,y)$ généré par ce mode peut être calculé par l'intermédiaire du pseudo-potentiel magnétique $\Phi(x,y)$, solution de l'équation de Poisson :

$$-\partial_x^2\Phi - \partial_y^2\Phi = -\mathrm{div}\ \vec{M} \quad \text{avec} \quad \vec{H} = -\mathbf{grad}\ \Phi \tag{2}$$

2. Dans l'approche coulombienne, retrouver l'expression 2. Identifier les densités de pseudo-charges magnétiques de surface et de volume, sources du champ magnétique $\vec{H}$. Localiser-les.
3. En absence de champ appliqué, quel est le nom donné à $\vec{H}$ à l'intérieur de la matière aimantée ?
4. Quelle condition aux limites vérifie le potentiel ϕ en $y \to \pm\infty$? Rappeler les conditions de passage aux interfaces.
5. Avec cette distribution de pseudo-charges, quelle symétrie vérifie $\phi(x,y)$?

6. Notre but est maintenant de résoudre l'équation 2 dans chaque région et d'appliquer les conditions aux limites et de passage pour obtenir une solution unique.

   On admettra que la solution du noyau (EDP sans second membre) est de la forme $\phi(x, y) = (A\sin(kx) + B\cos(kx))\exp(+ky) + (A'\sin(kx) + B'\cos(kx))\exp(-ky))$ et que la solution particulière est $\frac{-M_k}{k}\cos(kx)$ dans la région 2 et aussi vraie dans les régions 1 et 3 car l'aimantation M_k est nulle dans ces régions. On rappelle que la solution générale étant la somme des deux.

7. Retrouver finalement la forme de la solution du tableau ci-après :

Région	$\Phi(x, y)$ définie par morceaux
1	$\Phi_1(x, y) = (a_1\cos(kx) + b_1\sin(kx))\exp(-ky)$
2	$\Phi_2(x, y) = (a_2\cos(kx) + b_2\sin(kx))\cosh(ky) - \frac{M_k}{k}\cos(kx)$
3	$\Phi_3(x, y) = (a_1\cos(kx) + b_1\sin(kx))\exp(+ky)$

Table 1 – Expressions de la solution définie par région.

8. Déterminer tous les coefficients a_i et b_i en appliquant les relations de passage en $y = h$.
9. La distribution d'aimantation est maintenant celle de la figure 1 et est donnée plus précisément par la relation :

$$M_x(x, y) = +8M_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(k_n x)}{k_n T} \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{2\pi}{T}(2n+1). \tag{3}$$

   En remarquant que l'équation de Poisson est linéaire en $\vec{M}$, quel théorème peut-on utiliser pour déterminer le potentiel complet à l'intérieur du système ? Donner son expression.

3 Champ magnétique

10. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{H}$ régnant dans le matériau magnétique.
11. Schématiser les lignes d'induction à l'extérieur de la couche et à l'intérieur.
12. Donner l'orientation du champ magnétique $\vec{H}(x, y)$ dans la matière aimantée. Est-il constant dans chaque aimant ?