

Pour $T > T_c$, $m_0 = 0$ et :

$$\chi = \frac{T_c}{T} \chi + \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B T}$$

$$\boxed{\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B (T - T_c)}} \quad (\text{VIII.134})$$

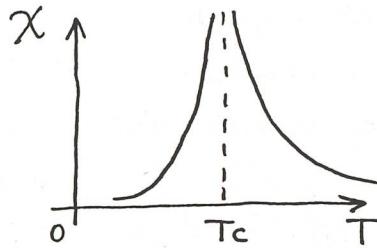
Remarque: Quand $J=0$, $T_c=0$ et on retrouve la susceptibilité paramagnétique du spin $1/2$ (VIII.7)

Pour $T < T_c$, d'après (VIII.133) :

$$\chi \left\{ 1 - \frac{T_c}{T} \left[1 - \left(\frac{m_0}{\mu_B} \right)^2 \right] \right\} = \left[1 - \left(\frac{m_0}{\mu_B} \right)^2 \right] \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B T}$$

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B T \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{m_0}{\mu_B} \right)^2} - \frac{T_c}{T} \right]} \approx \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B T \left[1 + \left(\frac{m_0}{\mu_B} \right)^2 - \frac{T_c}{T} \right]}$$

$$\boxed{\chi \approx \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B \left[T - T_c + 3 \frac{T}{T_c} (T_c - T) \right]} \approx \frac{\mu_0 \mu_B^2}{\alpha k_B (T_c - T)}} \quad (\text{VIII.135})$$



La susceptibilité diverge au point critique en suivant une loi de puissance ($\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$) avec un exposant critique $\gamma = 1$ des deux côtés de la singularité.

Exercice 9: Calculer l'énergie interne et le chaleur spécifique en champ nul pour $T > T_c$ et $T < T_c$.

Solution: D'après (VIII.128) :

$$\bar{e} = - \frac{3 \beta J m_0^2}{2}$$

L'énergie interne est donc nulle au-dessus de T_c et, compte-tenu de (VIII.133), elle est égale à :

$$\boxed{\bar{e} = - \frac{3}{2} \beta J \mu_B^2 \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)} = - \frac{3}{2} k_B (T_c - T) \quad (\text{VIII.136})$$

au-dessous de T_c . Elle s'annule donc linéairement en T à T_c .

Le chaleur spécifique est obtenue en divisant \bar{e} par rapport à T , de sorte que :

$$\boxed{C = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \frac{3}{2} k_B & T < T_c \end{cases}} \quad (\text{VIII.137})$$

Elle présente une discontinuité au point critique. Ce comportement correspond à une loi de puissance, $C \sim |T - T_c|^{-\alpha}$ dont l'exposant critique $\alpha = 0$.

Dans la transition, les dérivées premières de l'énergie libre m_0 et \bar{e} sont continues alors que les dérivées secondes χ et C divergent ou sont discontinues, la transition est du second ordre.

Exercice 10: Calculer l'isotherme critique $m_0(B_c, T_c)$ au voisinage de $B_c = 0$.

Solution: D'après (VIII.130) :

$$\frac{m_0}{\mu_B} = \text{th} \left(\frac{m_0}{\mu_B} + \frac{\mu_B B_0}{k_B T_c} \right) = \frac{\text{th} \left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T_c} \right) + \text{th} \left(\frac{m_0}{\mu_B} \right)}{1 + \text{th} \left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T_c} \right) \text{th} \left(\frac{m_0}{\mu_B} \right)}$$

et avec $\frac{\mu_B B_0}{k_B T_c} \ll 1$, $\frac{m_0}{\mu_B} \ll 1$:

Au voisinage de T_c et en champ faible, m est petit et on peut effectuer un développement de Landau de l'énergie libre $f(m)$. Au 4^e ordre de m et au 1^{er} ordre de B_0 , avec $\ln \cosh x \sim \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$, on obtient :

$$f(m) \approx f_0 + \frac{1}{2} \gamma J m^2 - \frac{k_B T}{2} \left[\left(\frac{3Jm\mu_B}{k_B T} \right)^2 + \frac{2Jm\mu_B^2 B_0}{(k_B T)^2} \right] + \frac{k_B T}{12} \left(\frac{3Jm\mu_B}{k_B T} \right)^4$$

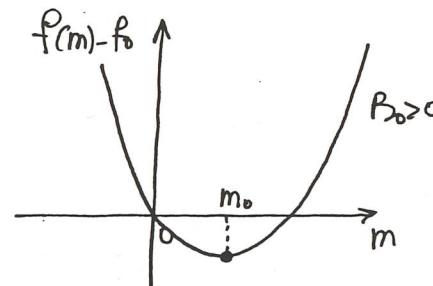
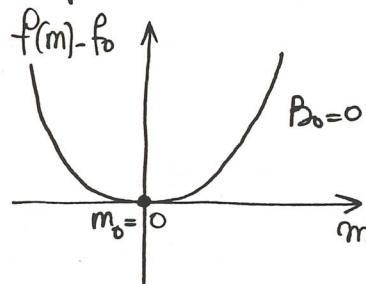
et en utilisant (VIII.131) :

$$f(m) \approx f_0 + \frac{1}{2} k_B \frac{T_c}{T} (T - T_c) \left(\frac{m}{\mu_B} \right)^2 + \frac{k_B T_c}{12} \left(\frac{T_c}{T} \right)^4 \left(\frac{m}{\mu_B} \right)^4 - \frac{T_c}{T} m B_0$$

soit encore, avec $T \approx T_c$:

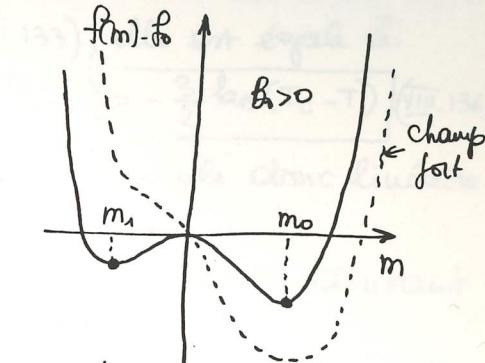
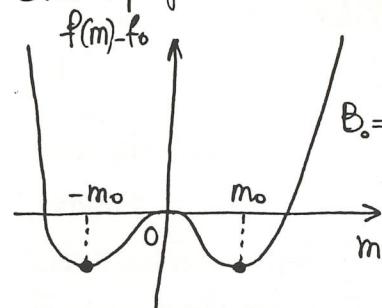
$$f(m) \approx f_0 + \frac{1}{2} k_B (T - T_c) \left(\frac{m}{\mu_B} \right)^2 + \frac{k_B T_c}{12} \left(\frac{m}{\mu_B} \right)^4 - m B_0 \quad (\text{VIII.132})$$

lorsque $T > T_c$, le coefficient du terme en m^2 est positif et $f(m)$ présente un minimum en $m_0 = 0$ en champ nul. Quand $B_0 > 0$, ce minimum est déplacé vers $m_0 > 0$.



lorsque $T < T_c$, le coefficient du terme en m^2 est négatif et la stabilité est assurée par le terme en m^4 positif. On obtient alors deux minima symétriques en champ nul correspondant aux deux orientations possibles pour l'aimantation. Sous champ positif, le minimum avec $m_0 > 0$

est toujours stable. Le second minimum avec $m_0 < 0$, qui est instable en champ faible, disparaît en champ fort.



Au voisinage de T_c , en champ nul, m_0 est faible et (VIII.130) conduit à :

$$m_0 \approx \frac{T_c}{T} m_0 - \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 \frac{m_0^3}{\mu_B^2} \quad (\ln x \sim x - \frac{x^3}{3})$$

avec la solution $m_0 = 0$ stable uniquement au-dessus de T_c . Au-dessous de T_c , on a :

$$\frac{m_0^2}{\mu_B^2} \approx 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right)$$

$$m_0 \approx \sqrt{3} \mu_B \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/2} \quad (\text{VIII.133})$$

L'aimantation spontanée s'annule en fin de puissance à T_c avec un exposant critique $\beta = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 : Calculer la susceptibilité par hôte $\chi = \frac{\partial m_0}{\partial H_0} \Big|_{H_0 \rightarrow 0}$ pour $T > T_c$ puis $T < T_c$.

Solution : D'après (VIII.130) :

$$\chi = \frac{\partial m_0}{\partial H_0} \Big|_{H_0 \rightarrow 0} = \mu_B \left[1 - \mu_B^2 \left(\frac{2Jm_0\mu_B}{k_B T} \right) \right] \left(\frac{T_c}{T} \chi + \frac{\mu_0 \mu_B}{k_B T} \right)$$

$$\chi = \left[1 - \left(\frac{m_0}{\mu_B} \right)^2 \right] \left(\frac{T_c}{T} \chi + \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B T} \right)$$

pour chaque des 3 interactions entre le site i et ses premiers voisins. de facteur $\frac{1}{2}$ à gauche et le terme soustractif à droite enlève le double comptage des termes d'interaction.

La fonction de partition associée au site i est:

$$z(m) = \sum_{\mu_i^3 = \pm \mu_B} \exp\left(-\frac{e(\mu_i^3, m)}{k_B T}\right) = \exp -\frac{3Jm^2}{2k_B T} \sum_{\mu_i^3 = \pm \mu_B} \exp\left(\frac{3Jm + \mu_0}{k_B T} \mu_i^3\right)$$

$$z(m) = 2 \exp -\frac{3Jm^2}{2k_B T} \cosh\left(\frac{3Jm + \mu_0}{k_B T} \mu_B\right)$$

d'où l'on déduit l'énergie libre par site: $f(m) = -k_B T \ln z$

$$f(m) = -k_B T \ln 2 + \frac{3Jm^2}{2} - k_B T \ln \cosh\left(\frac{3Jm + \mu_0}{k_B T} \mu_B\right) \quad (\text{VIII.129})$$

Qui présente un minimum pour la valeur m_0 de m correspondant à l'état d'équilibre. On a donc:

$$\frac{\partial f}{\partial m} \Big|_{m_0} = 0 = \frac{3J}{k_B T} \left[m_0 - \mu_B \tanh\left(\frac{3Jm_0 + \mu_0}{k_B T} \mu_B\right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} \Big|_{m_0} > 0$$

et l'aimantation moyenne m_0 est donnée par:

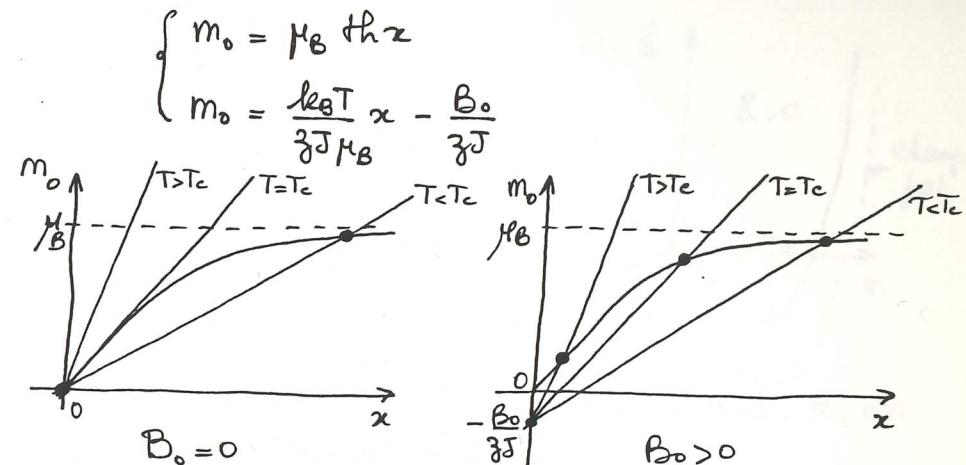
$$m_0 = \mu_B \tanh\left(\frac{3Jm_0 + \mu_0}{k_B T} \mu_B\right) \quad (\text{VIII.130})$$

Remarque: m_0 peut également être obtenu directement en écrivant la moyenne de μ_i^3 pour $m=m_0$:

$$m_0 = \frac{\sum_{\mu_i^3 = \pm \mu_B} \exp\left(\frac{3Jm_0 + \mu_0}{k_B T} \mu_i^3\right) \mu_i^3}{\sum_{\mu_i^3 = \pm \mu_B} \exp\left(\frac{3Jm_0 + \mu_0}{k_B T} \mu_i^3\right)}$$

Qui conduit à (VIII.130).

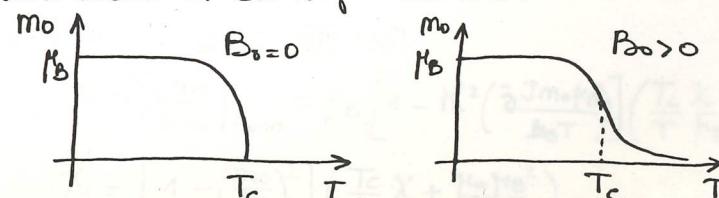
Examions graphiquement le comportement de m_0 . Soit $x = \frac{3Jm_0 + \mu_0}{k_B T} \mu_B$, m_0 est solution du système:



En champ nul, au-dessous d'une température critique T_c , le système possède 3 solutions ($\pm m_0, 0$) mais celle correspondant à une aimantation nulle, qui conduit à un maximum de l'énergie libre, est instable (sur la figure, seul le secteur positif a été représenté). Au-dessus de T_c , il n'y a qu'une solution avec $m_0=0$. T_c est la température pour laquelle la pente initiale des deux courbes est la même, soit:

$$T_c = \frac{3J\mu_B^2}{k_B} \quad (\text{VIII.131})$$

Sous champ, il n'existe qu'une solution stable non nulle et du signe de B_0 .



suivant cette direction. Le paramètre d'ordre est alors scalaire (une composante m_z), c'est le modèle d'Ising d'Hamiltonien :

$$\hat{H}_{\text{Ising}} = - \sum_{i \neq j} J_{ij} \hat{\mu}_i^z \hat{\mu}_j^z \quad (\text{VIII.127})$$

invariant dans un changement de signe des moments.

Le nombre de composantes donne la dimension n du paramètre d'ordre.

modèle	Ising	XY	Heisenberg
n	1	2	3

Lorsque n augmente, le nombre d'états accessibles devient plus grand, le désordre coûte peu d'énergie et rapporte beaucoup en entropie, de sorte que la stabilité de l'ordre à grande distance diminue. Les modèles d'Heisenberg et XY sont d'ordre à grande distance à $T > 0$ que pour $d \geq 3$ alors que le modèle d'Ising s'ordonne déjà pour $d=2$.

Ferro-magnétisme dans l'approximation du champ moyen :

Le calcul de la fonction de partition pour un système de moments en interaction est un problème difficile dès que $d > 1$. On ne connaît que peu de solutions exactes. Les propriétés thermodynamiques peuvent être obtenues

assez simplement dans l'approximation du champ moyen qui consiste à isoler un moment $\vec{\mu}_i$ et à remplacer les moments interagissants avec $\vec{\mu}_i$ par leur valeur moyenne \vec{m} . En faisant, on néglige les fluctuations, importants au voisinage du point critique.

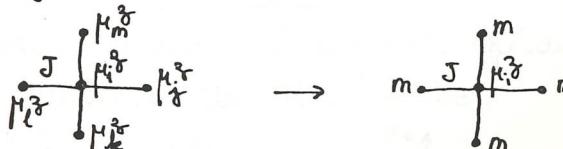
Pour simplifier, nous étudierons le modèle d'Ising avec des spins $1/2$. Chaque moment possède alors deux états $\mu_i^z = \pm \mu_B$ (cf. VIII.27) et nous supposons que le champ extérieur est appliqué dans la direction de facile orientation d'Hamiltonien du système, avec une interaction d'échange J entre premiers voisins uniquement, est alors de la forme :

$$\hat{H}_{\text{Ising}} = - J \sum_{(ij)} \hat{\mu}_i^z \hat{\mu}_j^z - B_0 \sum_i \hat{\mu}_i^z \quad (\text{VIII.127})$$

Comme tous les opérateurs apparaissant dans \hat{H}_{Ising} commutent, le problème est classique et on peut remplacer $\hat{\mu}_i^z$ par une variable classique discrète $\mu_i^z = \pm \mu_B$. Dans l'approximation du champ moyen, l'énergie associée au site i peut s'écrire :

$$E(\mu_i^z, m) = - z J m \mu_i^z - B_0 \mu_i^z + \frac{1}{2} z J m^2 \quad (\text{VIII.128})$$

où z est le nombre de premiers voisins.



Le dernier terme dans (VIII.128) provient de la substitution

$$\frac{1}{2} \mu_i^z \mu_j^z \rightarrow \mu_i^z m - \frac{m^2}{2}$$

premiers voisins et un système constitué de deux sous-réseaux alternés, au-dessous de la température de Néel T_N apparaît un ordre à grande distance antiferromagnétique pour lequel les aimanisations des deux sous-réseaux α et β portent dans des directions opposées. Le paramètre d'ordre est alors l'aimantation alternée définie par :

$$\vec{m}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2N} \left[\sum_i \langle \hat{\mu}_i^\alpha \rangle - \sum_j \langle \hat{\mu}_j^\beta \rangle \right] \quad (\text{VIII.125})$$

Dans ce cas l'ordre peut être détruit en appliquant un champ extérieur uniforme.

Lorsque les deux sous-réseaux portent des moments magnétiques différents, le système est dit ferromagnétique. Avec des interactions plus complexes, on peut observer un ordre hélicoïdal.

$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow$ $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$
 ferromagnétique anti-ferromagnétique ferromagnétique hélicoïdal

L'ordre à grande distance est généré de proche en proche par les interactions d'échange à courte portée.



Pour les systèmes de basse dimension, le nombre de chemins, permettant la propagation de l'ordre d'un moment à un autre, est réduit. Des

fluctuations sont alors importantes et l'ordre magnétique est moins stable. Dans le cas d'une chaîne, il suffit qu'une liaison ne soit pas parfaitement pour que la propagation de l'ordre soit perturbée. On montre rigoureusement que dans ce cas, l'ordre à grande distance est instable pour $T > 0$ lorsque les interactions sont à courte portée. La stabilité de l'ordre à grande distance dépend également de l'autoskopie. Lorsqu'elle est nulle, on a le modèle de Heisenberg dont le paramètre d'ordre \vec{m} a trois composants (m_x, m_y et m_z). L'Hamiltonien (VIII.123) en champ nul est invariant dans une rotation d'ensemble des moments. Lorsque l'autoskopie est de la forme (VIII.122), avec K_2 négligeable devant K_1 , le comportement critique du système est le même que dans la limite où $|K_1| \rightarrow \infty$. lorsque $K_1 \rightarrow +\infty$, le système possède un plan d'aimantation facile et les moments sont contraints à rester dans ce plan. Le paramètre d'ordre est alors un vecteur à deux composantes (m_x et m_y) et on obtient le modèle XY dont l'Hamiltonien en champ nul est :

$$\mathcal{H}_{XY} = - \sum_{i,j} J_{ij} (\hat{\mu}_i^x \hat{\mu}_j^x + \hat{\mu}_i^y \hat{\mu}_j^y) \quad (\text{VIII.126})$$

Invariant dans une rotation d'axe Oz des moments. lorsque $K_1 \rightarrow -\infty$, on a une direction d'aimantation facile et les moments restent

Soit encore, en posant $k_1 = K_1 \mu^2$, $k_2 = K_2 \mu^4$ et $k_3 = K_3$:

$$E_a(\vec{\mu}) = K_1 (\vec{\mu} \cdot \vec{u}_3)^2 + K_2 (\vec{\mu} \cdot \vec{u}_3)^4 + k_3 \quad (\text{VIII.122})$$

dansque K_2 est faible devant K_1 , on obtient une direction de facile aimantation suivant l'axe binaire quand $K_1 < 0$ et un plan de facile aimantation perpendiculaire à cet axe quand $K_1 > 0$.

D) Ordre magnétique et modèles:

L'interaction d'échange (VIII.101) a été obtenue dans le cas d'orbitales s pour lesquelles les moments magnétiques sont dus uniquement aux spins électroniques, elle se généralise à des moments quelconques. Pour un ensemble de moments $\vec{\mu}_i$ en interaction, placés dans une induction extérieure \vec{B}_0 , l'Hamiltonien s'écrit:

$$\text{H}_{\text{Heisenberg}} = - \sum_{i,j} J_{ij} \vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j - \vec{B}_0 \cdot \sum_i \vec{\mu}_i \quad (\text{VIII.123})$$

où l'interaction d'échange J_{ij} a été redéfinie pour inclure les facteurs de proportionnalité entre moments cinétiques et moments magnétiques (VIII.33) et où l'on a négligé l'interaction dipolaire (VIII.120), faible comparée à l'énergie d'échange, ainsi que l'énergie d'anisotropie.

A température nulle, lorsque J_{ij} est positif, le système se trouve dans l'état d'énergie minimum

où tous les moments sont dirigés suivant \vec{B}_0 . Cet état nommé ferromagnétique persiste quand on annule le champ appliqué. En champ nul et en absence d'anisotropie, il existe une infinité d'états fondamentaux dégénérés qui se correspondent par une rotation d'ensemble des moments et le système choisit spontanément l'un de ces états. On dit qu'il y a transition spontanée de symétrie. L'ordre magnétique tend à diminuer lorsque la température augmente. En effet, à l'équilibre thermo-dynamique, l'énergie libre est minimum et il y a compétition entre l'énergie, qui favorise l'ordre, et l'entropie, qui favorise le désordre. En champ nul au-delà de la température critique (température de Curie dans le cas du ferromagnétisme) l'ordre disparaît. L'ordre est mesuré par un paramètre d'ordre nul dans la phase paramagnétique au-dessus de T_c et non nul dans la phase ferromagnétique au-dessous de T_c . C'est une grandeur proportionnelle à l'aimantation que l'on peut prendre égale à l'aimantation moyenne par site :

$$\vec{m} = \frac{1}{N} \sum_i \langle \vec{\mu}_i \rangle \quad (\text{VIII.124})$$

Lorsque l'interaction d'échange est négative, deux moments en interaction tendent à s'orienter antiparallèlement. Pour une interaction entre

l'énergie d'anisotropie est faible comparée à l'énergie d'échange, ce qui rend son interprétation physique délicate. Plusieurs mécanismes ont été proposés, tous reliés à l'interaction spin-orbite qui couple les moments aux orbitales atomiques. Ces orbitales étant elles-mêmes couplées au réseau sous l'influence du champ cristallin (Bloch) ou interagissant différemment suivant leur orientation par rapport au réseau (Van Vleck), il en résulte un couplage entre moments et réseau à la source de l'anisotropie magnétique.

On peut introduire l'énergie d'anisotropie dans une approche phénoménologique. Soit, dans un cristal cubique un moment $\vec{\mu} = \mu \vec{u}$, de axes directeurs α_i avec les vecteurs unitaires \vec{u}_i suivant les axes du cube :

$$\alpha_i = \vec{u} \cdot \vec{u}_i \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{u}_i$$

On a la relation :

$$\left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1 \right] \quad (\text{VII.121})$$

L'énergie d'anisotropie associée à $\vec{\mu}$ est une fonction des α_i qui doit être invariante dans les opérations de symétrie du cristal. Elle est donc paire en chaque des α_i (symétrie par rapport aux faces du cube) et invariante dans la permutation des α_i . Compte tenu de (VII.121), la fonction de plus bas degré est du quatrième degré. On a alors deux

possibilités :

$$a = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2$$

$$b = \alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$$

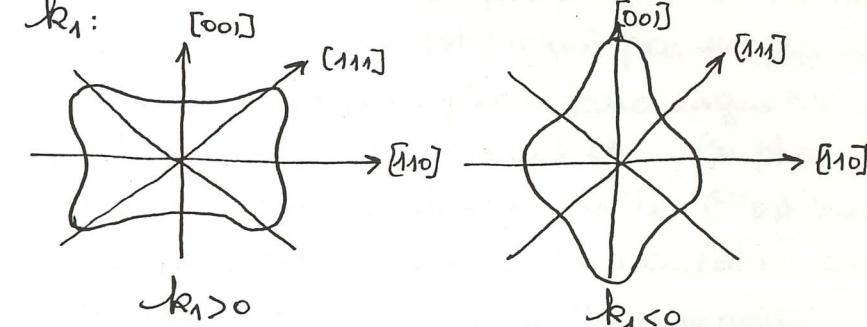
mais ces deux expressions ne sont pas indépendantes. En effet :

$$2a + b = \left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right]^2 = 1$$

A l'ordre six, on n'obtient également qu'une fonction et en se limitant à cet ordre, l'énergie d'anisotropie peut s'écrire :

$$k_1(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) + k_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 + k_3$$

Dans ce cas, on obtient les diagrammes polaires suivants, donnant l'énergie d'anisotropie en fonction de la direction du moment dans le plan (110) lorsque k_2 est faible devant k_1 :



Dans le cas d'un cristal hexagonal, en première approximation, l'énergie d'anisotropie associée à $\vec{\mu}$ ne dépend que du cosinus directeur α_3 de $\vec{\mu}$ avec l'axe hexagonal suivant \vec{u}_3 .

Elle peut s'écrire :

$$k_1 \alpha_3^2 + k_2 \alpha_3^4 + k_3$$

$$\vec{h}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{r}_{ij}^2 \vec{H}_i - 3(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{H}_i) \vec{r}_{ij}}{\vec{r}_{ij}^5} \quad (\text{VIII.117})$$

$$\vec{H}(\vec{r}_i) = \vec{H}_o + \sum_{j \neq i} \vec{h}_{ij} \quad (\text{VIII.118})$$

direction des moments \vec{F}_j étant fluctuante, le champ local

$$\vec{H}_p(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} \vec{h}_{ij}$$

lui-même fluctuant et son calcul est délicat. Si des moments \vec{F}_i fixes, le calcul a été effectué à Lorentz en décomposant le système en deux parties, délimitées par une sphère (S) centrée en \vec{r}_i de rayon grand par rapport à la distance des moments. La contribution extérieure à (S) a traité dans l'approximation continue tandis qu'on effectue un calcul discret pour les moments intérieurs à (S). Pour un réseau de symétrie cubique, seul l'extérieur de (S) contribue à (\vec{F}_i) et on obtient:

$$\vec{H}(\vec{r}_i) = \vec{H}_o + \frac{1}{3} \vec{M} - \lambda \vec{M} \quad (\text{VIII.119})$$

λ est le coefficient du champ dimuquéstant. On travaille en \vec{r}_i dans le vide et $\vec{S}(\vec{r}_i) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}_i)$, il faut éviter la confusion entre (\vec{r}_i) et \vec{H} donné par (VIII.108) dans l'approximation statique avec un milieu.

En physique statistique, on aura à considérer

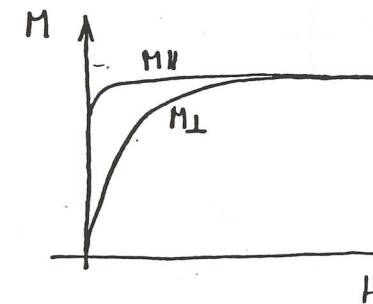
à côté de l'interaction d'échange d'Heisenberg (VIII.101), l'interaction des moments avec leur champ local et le champ extérieur:

$$E = - \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{B}(\vec{r}_i) = - \vec{B}_o \cdot \sum_i \vec{\mu}_i - \mu_0 \sum_{i,j} \vec{\mu}_i \cdot \vec{h}_{ij}$$

$$E = - \vec{B}_o \cdot \sum_i \vec{\mu}_i - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i,j} \left(\frac{\vec{F}_i \cdot \vec{F}_j}{\vec{r}_{ij}^3} - 3 \frac{(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{F}_i)(\vec{r}_{ij} \cdot \vec{F}_j)}{\vec{r}_{ij}^5} \right) \quad (\text{VIII.12c})$$

En pratique, l'interaction dipolaire est en général négligeable devant l'interaction d'échange et peut être ignorée.

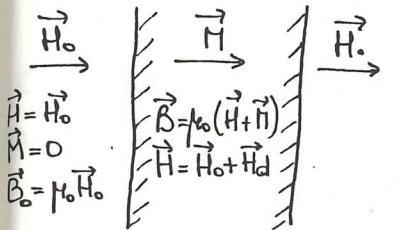
On constate expérimentalement qu'un monosatellite de forme sphérique peut avoir des courbes d'aimantation très différentes suivant l'orientation du champ appliqué par rapport aux axes du cristal. Dans le cas du cobalt, de structure hexagonale, l'aimantation atteint plus rapidement la saturation dans la direction parallèle à l'axe binaire que dans une direction perpendiculaire.



L'aimantation est donc dirigée préférentiellement suivant certaines directions cristallographiques appelées directions de facile aimantation.

L'interaction d'Heisenberg (VIII.101), invariante dans une rotation d'ensemble des moments, ne peut expliquer cette anisotropie magnétique.

alors les charges magnétiques superficielles de signes opposés, uniformément réparties sur les deux surfaces du milieu, qui ne modifient pas le champ extérieur. Il suffit donc d'utiliser les conditions de continuité (VIII.105) pour obtenir \vec{H}_d :



$$H_t \text{ continue} \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_d \text{ normal}$$

$$B_n \text{ continue} \Rightarrow H_0 = H_0 + H_d + M$$

d'où:

$$\vec{H}_d = -\vec{M} \quad (\text{VIII.114})$$

Dans le cas d'un ellipsoïde dont l'un des axes coïncide avec la direction du champ extérieur appliqué uniforme, le champ démagétisant est également uniforme et on montre que suivant l'axe i :

$$\vec{H}_d = -\lambda_i \vec{M} \quad (\text{VIII.115})$$

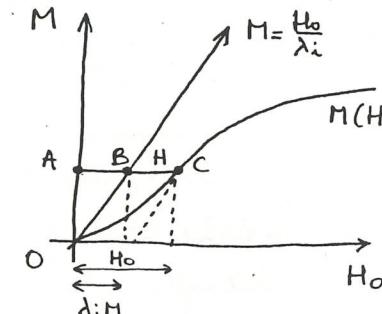
avec:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \quad (\text{VIII.116})$$

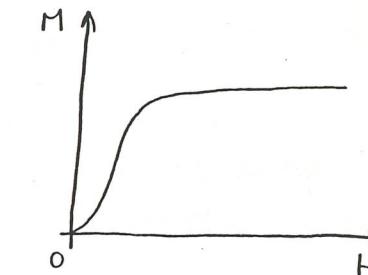
Pour la sphère, les coefficients du champ démagétisant λ_i sont tous égaux à $1/3$. Pour une aiguille allongée, les charges magnétiques deviennent négligeables et le champ démagétisant est nul suivant l'axe de l'aiguille. Pour une plaque mince, le champ démagétisant est opposé à l'aimantation comme nous venons de le voir.

Pour un échantillon ellipsoïdal, il est possible de corriger les mesures pour tenir compte de l'effet du champ démagétisant lorsqu'on applique

le champ extérieur suivant l'un des axes principaux. On mesure la courbe d'aimantation $M(H_0)$, en fonction du champ appliqué H_0 tandis que le milieu est soumis au champ $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_d = \vec{H}_0 - \lambda_i \vec{M}$



Courbe expérimentale



courbe $M(H)$

Dans le système d'axes (M, H_0) , on peut tracer la courbe $M(H_0)$ et la droite $M = H_0 / \lambda_i$. Pour la valeur $H_0 = AC$ du champ appliqué, $M = OA$ et $\lambda_i M = AB$ de sorte que le milieu est soumis au champ $BC = H = H_0 - \lambda_i M$. Il suffit donc de lire la valeur de H suivant l'axe oblique indiqué. En revenant aux axes perpendiculaires, on obtient la courbe d'aimantation vraie tracée à droite.

Nous avons jusqu'à maintenant raisonné macroscopiquement, dans l'approximation d'une distribution continue de l'aimantation \vec{M} . En réalité un moment \vec{M}_i , situé en \vec{r}_i au sein du matériau magnétique, est soumis à un champ $\vec{H}(\vec{r}_i)$ qui est la somme du champ appliqué \vec{H}_0 et des champs dipolaires \vec{h}_{ij} produits en \vec{r}_i par tous les autres moments avec:

o) Champ d'aimagnétisant, interaction dipolaire, énergie d'anisotropie:

Dans un milieu magnétique d'aimantation \vec{M} par unité de volume et de susceptibilité χ , les champs respectent les équations de Maxwell:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_e & \vec{M} &= \chi \vec{H} \end{aligned} \quad (\text{VIII. 103})$$

Où \vec{j}_e est la densité de courant à l'origine du champ appliqué au milieu et \vec{H} l'intensité du champ magnétique (ou excitation magnétique)

On définit la perméabilité du milieu $\mu = \mu_0 \mu_r$, où μ_r est la perméabilité relative, comme le rapport B/H soit, d'après (VIII. 103) :

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (\text{VIII. 104})$$

Placons-nous dans un domaine où $\vec{j}_e = 0$, on a alors:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \Rightarrow B_n \text{ continu} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= 0 \Rightarrow H_t \text{ continu} \end{aligned} \quad (\text{VIII. 105})$$

Soit \vec{H}_0 l'intensité du champ appliqué et $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$. Par induction, on a:

$$\operatorname{div} \vec{B}_0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{H}_0 = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{H}_0 = 0 \quad (\text{VIII. 106})$$

alors que:

$$\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 (\operatorname{div} \vec{H} + \operatorname{div} \vec{M}) = 0 \quad (\text{VIII. 107})$$

En introduisant le champ démagétisant \vec{H}_d tel que:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_d \quad (\text{VIII. 108})$$

on obtient:

$$\operatorname{div} \vec{H} = - \operatorname{div} \vec{H}$$

et, compte-tenu de (VIII. 106) et (VIII. 108):

$$\operatorname{div} \vec{H}_d = - \operatorname{div} \vec{H} \quad (\text{VIII. 109})$$

alors qu'en absence de courant excitateur:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{H}_0 = 0$$

entraîne:

$$\operatorname{rot} \vec{H}_d = 0$$

Le parallèle avec les équations de l'électrostatique

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}_d &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{H}_d &= - \operatorname{div} \vec{H} & \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (\text{VIII. 110})$$

Munissons l'introduction d'une densité de charges magnétiques :

$$\rho_m = - \operatorname{div} \vec{M} \quad (\text{VIII. 111})$$

et d'un potentiel scalaire ϕ_d tel que:

$$\vec{H}_d = - \vec{\nabla} \phi_d \quad (\text{VIII. 112})$$

dans tout domaine dépourvu de courant excita-
-teur. Le champ démagétisant \vec{H}_d peut être
calculé de ϕ_d , lui-même solution de:

$$\Delta \phi_d = - \rho_m \quad (\text{VIII. 113})$$

Le champ démagétisant \vec{H}_d est produit par les inhomogénéités de l'aimantation qui entraînent l'apparition de charges magnétiques.

Son calcul se traite comme un problème d'électro-
-statique. Examinons le cas d'un milieu d'ai-
-mantation uniforme \vec{M} , limité par deux surfaces
planes infinies perpendiculaires à \vec{M} . Il apparaît