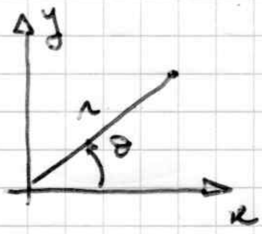
On considère un disque uniformément aimanté selon Ox de rayon a



$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{avec } \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{H} = \vec{0} & \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $\operatorname{div} \vec{H} = - \operatorname{div} \vec{M} = \vec{0}$ car $\vec{M} = c^{te}$ dans le disque et nulle à l'extérieur.

(2) $\Rightarrow$ $\vec{H} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$

où ϕ est le potentiel magnétique.

Dans la région (1) aimantée, on a ϕ_1 tq

$$\Delta \phi_1 = 0 \qquad (3)$$

et dans la région extérieure, on a ϕ_2 tq

$$\Delta \phi_2 = 0 \qquad (4)$$

A l'interface entre (1) et (2), on a continuité de ϕ : $\phi_1(a) = \phi_2(a)$ (5)
et continuité de $\vec{B}$ normale et de $\vec{H}$ tangentiel.

$$\left(- \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi_1 + \vec{M} \right) \cdot \vec{n}_{12} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi_2 \cdot \vec{n}_{12} \qquad (6)$$

et

$$- \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi_1 \wedge \vec{n}_{12} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi_2 \wedge \vec{n}_{12} \qquad (7)$$

En polaire $\Delta \phi = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r \dfrac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$

Séparation des variables $\phi(r, \theta) = R(r)\, T(\theta)$

$$\Rightarrow \quad \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{d\theta^2} = 0 \qquad (8)$$

soit

$$\frac{1}{T_n} \frac{d^2 T_n}{d\theta^2} = - k_n^2 \quad \text{et} \quad \frac{r}{R_n} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_n}{dr} \right) = + k_n^2 \qquad (9)$$

Les solutions de (9) sont

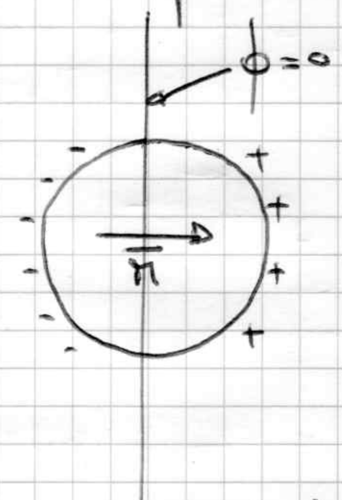
pour $k_n \neq 0$
$$\begin{cases} T_n = A_n \cos(k_n \theta) + B_n \sin(k_n \theta) \\ R_n = C_n\, r^{k_n} + D_n\, r^{-k_n} \end{cases}$$

pour $k_n = 0$
$$\begin{cases} T_0 = E + F\theta \\ R_0 = G + H \ln r \end{cases}$$

La solution générale de (8) est donc

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(k_n\theta) + B_n \sin(k_n \theta)\right)\left(C_n\, r^{k_n} + D_n\, r^{-k_n}\right) + (E + F\theta)(G + H \ln r)$$

Cas du disque aimanté selon Ox.



Comme $\phi(r, \theta + 2\pi) = \phi(r,\theta)$
$k_n = n \in \mathbb{N}$

De plus $\phi(r, -\theta) = \phi(r,\theta)$
ϕ est donc une fct paire de θ
$\Rightarrow F = 0$ et $B_n = 0$

$\phi_1(r=0, \theta)$ est fini et est nul $\Rightarrow H = 0$ et $D_n = 0$, $E=0$

$\phi_2(r \to \infty, \theta) \to 0 \Rightarrow H = 0$ et $C_n = 0$, $E = 0$

Rem : l'axe Oy coïncide avec l'isopotentielle $\phi = 0$

$$\phi(r, \pi - \theta) = -\phi(r,\theta) \Rightarrow \cos(n(\pi-\theta)) = -\cos(n\theta)$$
$\Rightarrow n$ est impair.

En résumé :

$$\phi_1(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \cos((2n+1)\theta)\, r^{2n+1} \quad \text{et}$$

$$\phi_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} \cos((2n+1)\theta)\, r^{-(2n+1)}$$

(5) $\Rightarrow$ $$A_n^{(1)} a^{2n+1} = A_n^{(2)} a^{-(2n+1)}$$

(6) $\Rightarrow$ $$-\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\bigg|_a + M\cos\theta = -\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\bigg|_a$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} -(2n+1) A_n^{(1)} \cos(2n+1)\theta\, a^{2n} + M\cos\theta =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n^{(2)} \cos(2n+1)\theta\, a^{-(2n+2)}$$

Séparons le cas $n=0$ des autres cas.

$n=0$ $$-A_n^{(1)} a^0 + M = A_n^{(2)} a^{-2} \quad (7)$$

$n\neq 0$ $$-(2n+1) A_n^{(1)} a^{2n} = (2n+1) A_n^{(2)} a^{-(2n+2)} \quad (8)$$

(5) et (7) avec $n=0$ $\Rightarrow$ $$\begin{cases} A_n^{(1)} a = A_n^{(2)} a^{-1} \\ -A_n^{(1)} a^0 + M = A_n^{(2)} a^{-2} \end{cases} \Rightarrow 2A_n^{(1)} = M \quad \text{et} \quad A_n^{(2)} = a^2 A_n^{(1)}$$

$$\Rightarrow A_{n=0}^{(1)} = \frac{M}{2} \quad \text{et} \quad A_{n=0}^{(2)} = a^2 \frac{M}{2}$$

(6) et (7) pour $n\neq 0$ $\Rightarrow$ $A_n^{(1)} = 0$ et $A_n^{(2)} = 0$

En conclusion : $\phi_1(r,\theta) = \frac{M}{2} r\cos\theta$ et $\phi_2(r,\theta) = \frac{M}{2}\frac{a^2}{r}\cos\theta$

Rem dans le disque $\phi_1(r,\theta) = \phi_1(x) = \frac{M}{2} x$

et $\vec{H}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi_1 = -\frac{M}{2}\vec{e}_x$