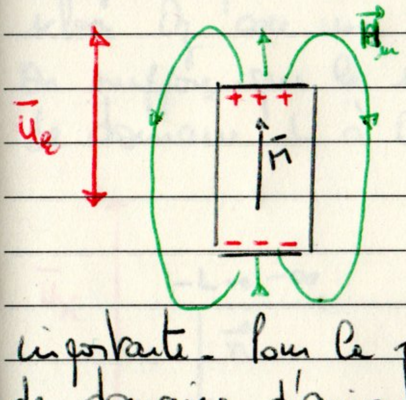
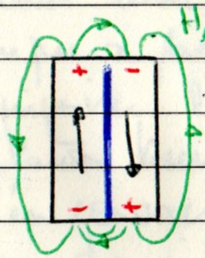
XI Paroi de Bloch.

Soit un corps ferromagnétique en champ ext nul ($H = 0$). La distribution d'aimantation génère des charges magnétiques $\rho_m = -\operatorname{div} \vec{M}$ et $\sigma_m = \vec{M}.\vec{n}$ source du champ démagnétisant.

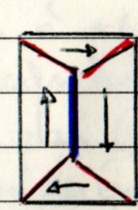
Considérons un échantillon de forme parallélépipédique avec une direction de facile aimantation $\vec{u}_e$



les charges magnétiques apparaissant en surface induisent un champ démagnétisant associé à une énergie magnétostatique importante. Pour la réduire, le système crée des domaines d'aimantation opposés séparées par des parois. (zône où l'aimantation tourne) (b)



(b)



(c)

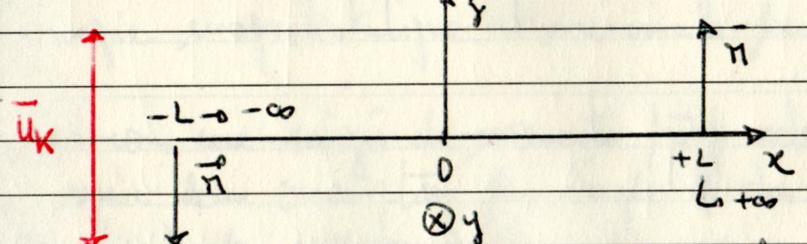
Finalement, il crée des domaines de fermeture éliminant les charges mag.

- paroi à 180°

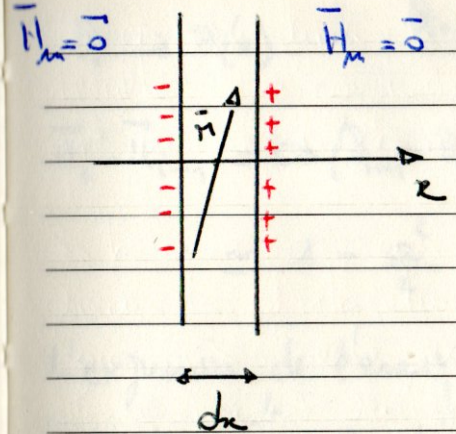
- paroi à 90°

la configuration des domaines à l'équilibre résulte d'un compromis entre énergie magnétostatique et énergie de paroi.

Soit à $T=0$, un système de moment mag soumis à l'intéraction d'échange d'Heisenberg avec $J>0$ entre premiers voisins.
Ils se trouvent sur un réseau cubique de paramètre a.
le système possède un axe de facile aimantation selon Oz avec une cte d'anisotropie $K>0$.
On suppose que le système contient une paroi de domaine $\perp$ à Ox et centrée en $x=0$.



l'aimantation $\vec{n}$ est ds la direction de facile aimantation loin de la paroi et tourne de 180° lorsque x passe de $-L$ à $+L$
pour minimiser l'énergie magnétostatique, l'aimantation tourne ds le plan (yz).
Pour s'en convaincre, considérons une tranche d'épaisseur dx, infiniment haute et profonde.
Imaginons que $\vec{n}$ ait une composante selon Ox



Par déf, cette tranche uniformément aimantée ne génère pas de champ à l'extérieur.
Par contre à l'intérieur,

$$\vec{H}_d = - M_x \, \vec{e}_x$$

l'énergie magnétostatique associée est donc (par unité de surface latérale)

$$dE_d = -\frac{1}{2}\mu_0 \vec{M}.\vec{H}_d \, dx = +\frac{1}{2}\mu_0 M_x^2 \, dx \qquad (80)$$

L'énergie magnétostatique est minimale pour $M_x \equiv 0$

Considérons une rangée de moments $\{\vec{\mu}_i\}$ selon Ox.
On repère leur orientation par l'angle θ_i dans le plan (yz) par rapport à Oz.
L'énergie du système par unité de surface (yz) est :

$$E\{\vec{\mu}_i\} = -\frac{J\mu^2}{a^2}\sum_i \vec{u}_i.\vec{u}_{i+1} - \frac{K}{a^2}\sum_i (\vec{u}_i.\vec{u}_x)^2 \qquad (81)$$

avec $\vec{\mu}_i = \mu \, \vec{u}_i$

Dans l'hypothèse d'une rotation lente de l'aimantation, on peut passer à la limite continue en effectuant les substitutions suivantes dans (81)

$$\theta_i \to \theta(x) \qquad \frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{a} \to \frac{d\theta}{dx} \text{ et } \sum_i \to \int \frac{dx}{a}$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_{i+1} = \cos(\theta_{i+1}-\theta_i) \simeq 1 - \frac{(\theta_{i+1}-\theta_i)^2}{2}$$

$$\simeq 1 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2$$

L'expression de l'énergie dans la limite continue s'écrit :

$$E(\theta(x)) = \int_{-L}^{L} \frac{dx}{a}\left[\frac{J\mu^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 - \frac{K}{a^2}\cos^2\theta\right] + c^{te}$$

$$E(\theta(x)) = \frac{K}{a^2}\int_{-L}^{L} \frac{dx}{a}\left[\left(\frac{J\mu^2 a^2}{2K}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 - \cos^2\theta\right] + c^{te} \quad (II)$$

On introduit la longueur caractéristique

$$\Delta^2 = \frac{J\mu^2 a^2}{2K} \quad \text{où } J\mu^2 \text{ s'exprime en } [J] \text{, } K \text{ en } [J]$$

Dans la littérature, l'anisotropie est exprimée en J/m^3 ce qui revient à faire la substitution

$$\frac{K}{a^3} \to K \text{, on a alors } \Delta^2 = \underbrace{\frac{J\mu^2}{2a}}_{=A}\frac{1}{K}$$

ce qui permet de définir une nouvelle c^{te} d'échange

$$A = \frac{J\mu^2}{2a} \text{ qui s'exprime en } J/m$$

l'énergie par unité de surface s'écrit alors :

$$E(\theta(x)) = K \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\Delta^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 - \cos^2\theta \right) + c^{te} \qquad (83)$$

dans la limite $L \to +\infty$

l'énergie de surface de la paroi σ est obtenue en retranchant l'énergie de surface du système sans paroi :

$$\sigma(\theta(x)) = E(\theta(x)) - E(\theta = 0)$$

On a : $\sigma(\theta(x)) = K \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Delta^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \sin^2\theta \right] dx$

Pour obtenir la configuration d'équilibre, on minimise l'intégrale fonctionnelle.
A partir d'une distribution $\theta(x)$ donnée, on effectue une variation locale $\delta\theta(x)$, la distribution qui minimise est telle que

$$\sigma(\theta + \delta\theta(x)) - \sigma(\theta(x)) = 0 \text{ au 1}^{er} \text{ ordre en } \delta\theta$$

Cela revient à différentier $\sigma(\theta(x))$
On impose que $\delta\theta(\pm\infty) = 0$

On a alors :

$$\delta\sigma = K\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Delta^2\,\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \delta\sin^2\theta\right]dx$$

$$= K\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\Delta^2\frac{d\theta}{dx}\,\delta\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + 2\sin\theta\cos\theta\,\delta\theta\right]dx \qquad (84)$$

Comme $\delta\dfrac{d\theta}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{d(\theta+\delta\theta)}{dx} - \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d\,\delta\theta}{dx}$,

on intègre le 1er terme par partie pour obtenir $\delta\theta$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{d\theta}{dx}\frac{d}{dx}\delta\theta = \frac{d\theta}{dx}\cancel{\delta\theta}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{d^2\theta}{dx^2}\,\delta\theta$$

On obtient finalement

$$\delta\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\left[-\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\sin 2\theta}{2\Delta^2}\right]\delta\theta(x) = 0 \qquad (85)$$

Comme la variation $\delta\theta(x)$ est arbitraire, cela impose $[\ ] = 0$.

$\theta(x)$ est solution de l'éq de Sine-Gordon

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\sin 2\theta}{\Delta^2} \qquad (86)$$

Exercice : intégrer cette éq. avec les conditions aux limites $\theta(-\infty) = 0$ et $\theta(+\infty) = \pi$, la paroi étant centrée en $x = 0$

On multiplie l'éq par $2\dfrac{d\theta}{dx}$

$$2\frac{d\theta}{dx}\frac{d^2\theta}{dx^2} = 2\frac{d\theta}{dx}\sin 2\theta \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 = -\frac{\cos 2\theta}{2\Delta^2} + c^{te}$$

Comme l'aimantation tend vers des valeurs c^{tes} aux bornes, elle vérifie

$$\frac{d\theta}{dx} \to 0 \text{ quand } \theta \to \Big|_{\pi}^{0} \text{ pour } x \to \Big|_{+\infty}^{-\infty}$$

$$\Rightarrow c^{te} = \frac{-1}{2\Delta^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \pm\frac{\sin\theta}{\Delta}.$$

or $\sin\theta \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$ et $\dfrac{d\theta}{dx} \geqslant 0$, d'où

$$\frac{d\theta}{dx} = +\frac{\sin\theta}{\Delta}$$

la paroi étant centrée en $x = 0$, on a pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

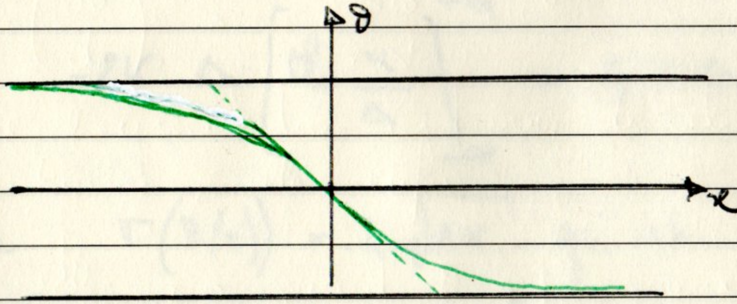
$$\int_{\pi/2}^{\theta(x)} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int_0^x \frac{dx}{\Delta}$$

Comme $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + c^{te}$

On obtient : $\displaystyle\frac{x}{\Delta} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|_{\pi/2}^{\theta(x)} = \ln \operatorname{tg}\frac{\theta(x)}{2}$

On a finalement

$$\theta(x) = 2\,\operatorname{arctg}\left(\exp\left(\frac{x}{\Delta}\right)\right) \qquad (87)$$



Δ est la largeur de paroi

Comme $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = e^{\frac{x}{\Delta}}$ alors

$$\cos\theta(x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = -\operatorname{th}\frac{x}{\Delta} \quad \text{et}$$

$$\Delta\frac{d\theta}{dx} = \sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{\Delta}}$$

On en déduit l'énergie de paroi par unité de surface.

$$\sigma(\theta(x)) = K \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\Delta^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \sin^2\theta \right]$$

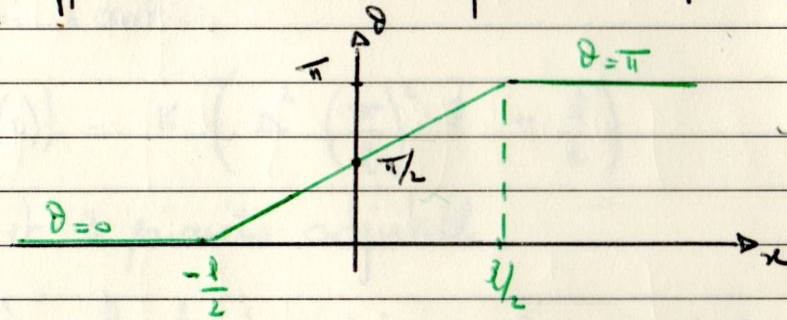
$$= K \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{ch^2 \frac{x}{\Delta}} + \frac{1}{ch^2 \frac{x}{\Delta}} \right]$$

$$= 2K\,\Delta \left[th \frac{x}{\Delta} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 4 K \Delta$$

On a $\quad \sigma(\theta(x)) = 4\sqrt{AK}$ qui est

l'énergie d'une paroi de Bloch.

Calcul approché des caractéristiques de la paroi de Bloch.



$$\vartheta(x) = \frac{\pi}{\ell} x + \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } x \in \left[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right]$$

avec $\vartheta(x) = 0$ pour $x < -\frac{\ell}{2}$

$\vartheta(x) = \pi$ pour $x > +\frac{\ell}{2}$

Energie de la paroi

$$\sigma(\vartheta(x)) = K \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\Delta^2 \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 + \sin^2\vartheta \right) dx$$

or

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sin^2\vartheta \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \frac{dx}{d\vartheta} d\vartheta \quad \text{avec } \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\pi}{\ell}$$

$$= \frac{\ell}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{\ell}{2}$$

Pour la paroi linéaire, l'expression de l'énergie de paroi s'écrit :

$$\sigma(\theta(x)) = K\left(\Delta^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 l + \frac{l}{2}\right)$$

où l est le paramètre adjustable.

Le système cherche à minimiser l'énergie de paroi

$$\sigma(\theta(x)) = K\left(\Delta^2\frac{\pi^2}{l} + \frac{l}{2}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{dl} = K\left(-\Delta^2\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \Delta^2\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad l^2 = 2\pi^2\Delta^2 \quad \Rightarrow l_0 = \sqrt{2}\,\pi\,\Delta$$

$$\Rightarrow \quad \theta_0(x) = \frac{\pi}{l_0}x + \frac{\pi}{2}$$ distribution d'équilibre.

$$\sigma(\theta_0(x)) = K l_0\left(\Delta^2\left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = K l_0$$

$$= \pi\sqrt{2\Lambda K} \simeq 4.44\sqrt{\Lambda K}$$

à comparer avec la solution exacte $4\sqrt{\Lambda K}$

Il est normal que le profil linéaire ait une énergie de paroi légèrement supérieure à celle de la solution exacte qui correspond au minimum exact.

ordre de grandeur.

	K [MJ/m³]	l [nm]
Fe	0.05	40
Co	0.85	15-20