Introducción a la homología singular

José Carlos Entrena Jiménez

Universidad de Granada

jentrena@correo.ugr.es

github.com/JCEntrena

21 de octubre de 2017

Referencias

Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology.
Academic Press, 1973.

Introducción a la topología algebraica.
Reverté, 1972.

Contenidos

Introducción

¿Qué vamos a hacer?

- Construir la homología singular.
- Obtener resultados sencillos sobre la homología.
- Obtener herramientas para calcularla.
- Aplicarlas para calcular la homología de las esferas.

¿Cómo lo vamos a hacer?

- Construiremos la homología singular usando nociones geométricas y algebraicas.
- Demostraremos resultados mediante nuevas definiciones y el uso de propiedades.

Definiciones

Definiciones

Un p-símplice es la envolvente convexa de $p+1$ puntos afínmente independientes. Lo llamaremos estándar si sus puntos son de la forma $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, y lo notaremos σ_p.

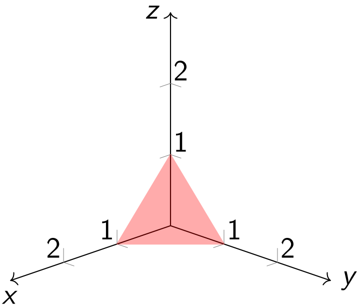

Figura: 2-símplice estándar

Definiciones

Un p-símplice singular en un espacio topológico $\mathbb{X}$ será una aplicación continua de un p-símplice a $\mathbb{X}$. Notaremos por $F_p(\mathbb{X})$ al conjunto de todos los p-símplices singulares de $\mathbb{X}$.

Dada una aplicación continua $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, se puede definir $f_{\#}\colon F_p(\mathbb{X}) \to F_p(\mathbb{Y})$ como $f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$.

Definimos la aplicación $F_p^i\colon \sigma_{p-1} \to \sigma_p$ por $F_p^i(t_0, \ldots, t_{p-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1})$.

Nos permite definir la aplicación que llamaremos i-ésima cara $\partial_i\colon F_p(\mathbb{X}) \to F_{p-1}(\mathbb{X})$ como $\partial_i(\phi) = \phi \circ F_p^i$.

Definiciones

Tomando un $\mathbb{Z}$-módulo sobre $F_p(\mathbb{X})$, creamos el grupo de p-cadenas singulares, $S_p(\mathbb{X}) = \{ \sum_{\phi \in F_p(\mathbb{X})} n_\phi \phi \mid n_\phi \in \mathbb{Z}, \sum n_\phi < \infty \}$.

Sobre el grupo de p-cadenas singulares podemos definir un homomorfismo de grupos ∂, al que llamaremos borde, dado por

$$\partial \colon S_p(\mathbb{X}) \to S_{p-1}(\mathbb{X}) \quad \partial(\phi) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_i(\phi)$$

Lema

$\partial \circ \partial \colon S_p(\mathbb{X}) \to S_{p-2}(\mathbb{X})$ *es el homomorfismo cero.*

Definiciones

Se puede extender la definición de $f_\#$ de $F_p(\mathbb{X})$ a $S_p(\mathbb{X})$ por linealidad.

Lema

La aplicación $f_\#$ conmuta con el borde, esto es, $f_\# \circ \partial = \partial \circ f_\#$

Esto hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots S_{p+1}(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\partial} & S_p(\mathbb{X}) & \xrightarrow{\partial} & S_{p-1}(\mathbb{X}) \ldots \\
\downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# \\
\ldots S_{p+1}(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\partial} & S_p(\mathbb{Y}) & \xrightarrow{\partial} & S_{p-1}(\mathbb{Y}) \ldots
\end{array}$$

Definiciones

Consideramos los grupos de los ciclos y los bordes:

- $Z_p(\mathbb{X}) = \{c \in S_p(\mathbb{X}) \mid \partial(c) = 0\}$ p-ciclos.
- $B_p(\mathbb{X}) = \{c \in S_p(\mathbb{X}) \mid \exists d : \partial(d) = c\}$ p-bordes.

Como $\partial^2 = 0$, $B_p \subseteq Z_p$, y podemos tomar el cociente, el p-ésimo grupo de homología:

$$H_p(\mathbb{X}) = \frac{Z_p(\mathbb{X})}{B_p(\mathbb{X})} = \{[c] \mid c \in Z_p(\mathbb{X})\}$$

Dada una aplicación continua $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, es posible definir el homomorfismo inducido en la homología $f_* : H_p(\mathbb{X}) \to H_p(\mathbb{Y})$ como $f_*([c]) = [f_\#(c)]$. Si f es un homeomorfismo, f_* será un isomorfismo.

Homología de un punto. Homología y arcoconexión

Homología de un punto

Proposición

Dado $\mathbb{X}$ un espacio topológico formado por solo un punto, se verifica que:

$$H_p(\mathbb{X}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La homología singular y la arcoconexión

Proposición

Si $\mathbb{X}$ *es un espacio topológico arcoconexo, entonces* $H_0(\mathbb{X}) = \mathbb{Z}$.

Proposición

Sea $\mathbb{X}$ *un espacio topológico,* $\cup_\alpha \mathbb{X}_\alpha$ *su descomposición en componentes arcoconexas. Entonces*

a) *La función* $i_{\alpha *}: H_p(\mathbb{X}_\alpha) \to H_p(\mathbb{X})$ *es un monomorfismo* $\forall \alpha$.

b) $H_p(\mathbb{X}) = \bigoplus_\alpha i_{\alpha *}(H_p(\mathbb{X}_\alpha)) = \bigoplus_\alpha H_p(\mathbb{X}_\alpha)$.

Invarianza homotópica de la homología singular

Lema de Poincaré

Proposición (Lema de Poincaré)

Sea $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ estrellado desde algún punto. Entonces

$$H_p(\mathbb{X}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Invarianza homotópica

Teorema (Invarianza homotópica de la homología singular)

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *espacios topológicos,* $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *aplicaciones continuas. Si* f *es homotópica a* g*, entonces* $f_* = g_*$*, siendo* $f_*, g_* : H_p(\mathbb{X}) \to H_p(\mathbb{Y})$*.*

Corolario

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *espacios homotópicamente equivalentes. Entonces* $H_p(\mathbb{X}) = H_p(\mathbb{Y}) \quad \forall p$*.*

Definición en pares

Homología en pares

Tomando un par $(\mathbb{X}, \mathbb{A})$, con $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$, se puede definir $S_p(\mathbb{X}, \mathbb{A}) = \frac{S_p(\mathbb{X})}{S_p(\mathbb{A})}$, el grupo de p-cadenas del par, donde podemos volver a tomar el borde ∂.

De nuevo podemos tomar los ciclos y los bordes, que nos permiten definir la homología del par:

$$H_p(\mathbb{X}, \mathbb{A}) = \frac{Z_p(\mathbb{X},\mathbb{A})}{B_p(\mathbb{X},\mathbb{A})}$$

Tomando una aplicación de pares $f\colon (\mathbb{X}, \mathbb{A}) \to (\mathbb{Y}, \mathbb{B})$, se construyen

- $f_{\#}\colon S_p(\mathbb{X}, \mathbb{A}) \to S_p(\mathbb{Y}, \mathbb{B})$, con $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$.
- $f_{*}\colon H_p(\mathbb{X}, \mathbb{A}) \to H_p(\mathbb{Y}, \mathbb{B})$, homomorfismo inducido.

Trasladando los resultados

Los resultados vistos de arcoconexión e invarianza homotópica tienen sus equivalentes en el caso de pares.

Proposición

Si $\mathbb{X}$ *es arcoconexo y* $\mathbb{A} \neq \emptyset$, $H_0(\mathbb{X}, \mathbb{A}) = 0$.

Proposición

Sea $\cup_\alpha \mathbb{X}_\alpha$ *la descomposición de* $\mathbb{X}$ *en componentes arcoconexas,* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{X}$. *Entonces*

a) *La función* $i_{\alpha *} : H_p(\mathbb{X}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha \cap \mathbb{A}) \to H_p(\mathbb{X}, \mathbb{A})$ *es un monomorfismo* $\forall \alpha$.

b) $H_p(\mathbb{X}, \mathbb{A}) = \bigoplus_\alpha H_p(\mathbb{X}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha \cap \mathbb{A})$.

Trasladando los resultados

Nuevamente, si f es un homeomorfismo entre $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, verificando $f(\mathbb{A}) = \mathbb{B}$, entonces f_* es un isomorfismo entre los grupos de homología.

Proposición

Dos aplicaciones de pares f y g homotópicas inducen el mismo homomorfismo en la homología del par.

Sucesión exacta de un par

Notaremos por $\pi\colon S_p(\mathbb{X}) \to S_p(\mathbb{X}, \mathbb{A})$ a la proyección. De igual forma, notaremos por $i_{\#}\colon S_p(\mathbb{A}) \to S_p(\mathbb{X})$ a la inclusión.

Podemos definir la sucesión

$$0 \to S_*(\mathbb{A}) \xrightarrow{i_{\#}} S_*(\mathbb{X}) \xrightarrow{\pi} S_*(\mathbb{X}, \mathbb{A}) \to 0$$

que verifica $\partial \circ i_{\#} = i_{\#} \circ \partial$ y $\partial \circ \pi = \pi \circ \partial$, y donde se tiene $\operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Img} i_{\#} = i_{\#}(S_*(\mathbb{A}))$. A estas sucesiones las llamaremos exactas.

Sucesión exacta de un par

Proposición (Sucesión exacta del par)

Podemos definir un homomorfismo $\Delta\colon H_p(\mathbb{X}, \mathbb{A}) \to H_{p-1}(\mathbb{A})$ *tal que* $\operatorname{Img} \Delta = \operatorname{Ker} i_*$ *y* $\operatorname{Ker} \Delta = \operatorname{Img} \pi_*$.

A la sucesión así construída la llamaremos sucesión exacta del par $(\mathbb{X}, \mathbb{A})$

$$\dots H_{p+1}(\mathbb{X}, \mathbb{A}) \xrightarrow{\Delta} H_p(\mathbb{A}) \xrightarrow{i_*} H_p(\mathbb{X}) \xrightarrow{\pi_*} H_p(\mathbb{X}, \mathbb{A}) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(\mathbb{A}) \dots$$

Teorema de subdivisión baricéntrica

Definiciones

Si $\mathbb{X}$ es un espacio topológico y $\mathbb{U}$ es un recubrimiento suyo, se define $F_p^{\mathbb{U}}(\mathbb{X}) = \{\phi \in F_p \mid \exists U \in \mathbb{U}\colon \operatorname{Img}\phi \subseteq U\}$, que es, por definición, subconjunto de $F_p(\mathbb{X})$.

Volveremos a tomar el grupo abeliano libre generado por $F_p^{\mathbb{U}}(\mathbb{X})$, al que notaremos $S_p^{\mathbb{U}}(\mathbb{X})$. Claramente, es subgrupo de $S_p(\mathbb{X})$. La restricción del borde ∂ a $S_p^{\mathbb{U}}(\mathbb{X})$ define un borde en este espacio.

La inclusión $i\colon S_*^{\mathbb{U}}(\mathbb{X}) \to S_*(\mathbb{X})$ induce un homomorfismo en la homología

$$i_*\colon H_p(S_*^{\mathbb{U}}(\mathbb{X})) \to H_p(\mathbb{X})$$

donde $H_p(S_*^{\mathbb{U}}(\mathbb{X})) = \frac{\operatorname{Ker}\partial}{\operatorname{Img}\partial}$

Teorema de subdivisión baricéntrica

Teorema (Teorema de subdivisión baricéntrica)

Sean $\mathbb{X}$ *un espacio topológico y* $\mathbb{U}$ *un recubrimiento suyo tal que* $\mathring{\mathbb{U}} = \{\mathring{U} \mid U \in \mathbb{U}\}$ *también recubra a* $\mathbb{X}$*. Entonces la aplicación*

$$i_* \colon H_p(S_*^{\mathbb{U}}(\mathbb{X})) \to H_p(\mathbb{X})$$

es un isomorfismo.

Homología de las esferas

Teorema de escisión

Teorema (Teorema de escisión)

Sea $(\mathbb{X}, \mathbb{A})$ *un par,* $U \subseteq \mathbb{A}$ *verificando* $\overline{U} \subseteq \mathring{\mathbb{A}}$*. Entonces la inclusión*

$$i \colon (\mathbb{X} - U, \mathbb{A} - U) \to (\mathbb{X}, \mathbb{A})$$

induce un isomorfismo en la homología.

Homología de las esferas

Con el teorema de escisión es posible calcular los grupos de homología de las esferas.

Teorema (Grupos de homología de las esferas)

$$H_p(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Fin.