Capítulo 2

Elaboração e Análise de Projetos de Investimento

VALOR TEMPORAL DO DINHEIRO

→ **"Um euro não tem sempre o mesmo valor"** :

- **Timing (valor temporal)**
  Um euro hoje vale mais que um euro amanhã
  (preferência pelo consumo presente, **adiar o consumo** pressupõe uma compensação).

- **Risco**
  Euros certos valem mais que euros incertos
  (necessário **compensação pela incerteza**).

- **Inflação**
  Perda de **poder de compra** – desvalorização da moeda.

- Regra de Ouro do Cálculo Financeiro:

Só é possível comparar cash-flows e operar sobre eles quando os mesmos estiverem reportados ao mesmo momento de tempo, ou seja, **Homogeneizados**

Fator de Homogeneização ? **TAXA DE JURO**

2.2 Noções básicas de cálculo financeiro

•Juro

Exemplo:

Qual o juro (J) produzido por um capital de 100€, à taxa anual de 5%, durante 1 ano?

$$J = 100 \times 1 \times 0{,}05 = 5\ €$$

- Juro é igual, em cada período de capitalização, ao produto do capital no início do período (C_{t-1}) pela taxa de juro do período (i_t):
- $$\mathbf{J_t = C_{t-1} * i_t}$$

•Taxa de Juro

- **Corresponde ao preço de uma unidade de capital** numa unidade de tempo (*C= 1; n= 1)*
  - *i _ é normalmente referida a* um capital de 100 unidades (em termos percentuais): i%
  - *n* e *i* _ devem ser referidos à mesma unidade de tempo

•Processos de Homogeneização

- **Capitalização**

Reportar um cash flow a um momento no futuro

- **Atualização (desconto)**

Reportar um cash flow futuro para o momento presente

→ *são processos inversos*

Período de Capitalização:

Tempo decorrido desde a cedência de capital até à adição de juro (período de formação do juro)

Frequência de Capitalização:

Número de vezes em que (anualmente) se equaciona o juro

Maturidade:

Período de tempo que decorre entre o início da operação (cedência de fundos) e o seu fim (recuperação de fundos)

•EXEMPLO:

• Empréstimo bancário a 2 anos, com pagamento de juros trimestral e reembolsos anuais constantes

Período de capitalização?
trimestre (3 meses)

Frequência de capitalização?
4

Maturidade ?
2 anos

•Regimes de Capitalização

Destino do juro aquando do seu vencimento

- **Regime de Juro simples** – juro sai do processo (não capitaliza, não gera juro no período seguinte)
- **Regime de Juro composto** – juro é acumulado ao capital, constituindo um novo capital inicial, onde se inclui o juro do período anterior e gerando "juro de juro"
- **Regime misto** – incorporação parcial dos juros

Capitalização e Atualização em Regime Simples

Em regime de capitalização simples:

$$C_t = C_0, \forall t$$

$$J_t = i \times C_0, \forall t$$

Capitalização e Atualização em Regime Simples

Qual o valor acumulado (S_n) de um capital, investido hoje (C_o), ao fim de n períodos?

- Calcular S_n = Capital acumulado após n períodos de capitalização

- $= C_o + n$ Juros
- $= C_o + n \times i \times C_o$
- $= C_o \ (1 + n \times i)$

…

$S_n = C_o \ (1 + n \times i)$

Capitalização e Atualização em Regime Simples

Equação de Capitalização: $S_n = C_o (1 + n \times i)$

Fator de Capitalização: $FC = (1 + n \times i)$

Uma vez conhecido um capital futuro C_n, qual o seu valor no momento atual?

Equação de Atualização: $C_o = C_n / (1 + n \times i)$

Fator de Atualização: $FA = 1 / (1 + n \times i)$

Atualização = inverso de Capitalização

Capitalização e Atualização em Regime de Capitalização Composto

Com adição de juros

- **Capital é sempre crescente**
- **Juro é sempre crescente**

J1 J2 … Jn-1 Jn

C_0 $C_1 = C_0 + J_1$ $C_2 = C_1 + J_2$ … $C_{n-1} = C_{n-2} + J_{n-1}$ $C_n = C_{n-1} + J_n$

$S_1 = C_1$ $S_2 = C_2$ … $S_{n-1} = C_{n-1}$ $\mathbf{S_n = C_n}$ **?**

Capitalização e Atualização em Regime de Capitalização Composto

- Equação de Capitalização:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n$$

- Fator de Capitalização:

$$FC = (1+i)^n$$

→ Qual o valor futuro de um capital investido hoje?

Capitalização e Atualização em Regime de Capitalização Composto

- Equação de Atualização:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

- Fator de Atualização :

$$FA = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Qual o valor presente (atual) de um montante disponível no futuro?

Capitalização e Atualização em Regime de Capitalização Composto

- Qual o valor de um capital futuro (C_n) num momento *m* entre o momento atual *o* e *n* (C_m)?

$$C_m = C_n \times (1+i)^{-n+m} \quad , o < m < n$$

- O que fazer se as taxas de juro forem diferentes ao longo do período?
  - Capitalização / atualização por passos (tantos quantos as taxas)

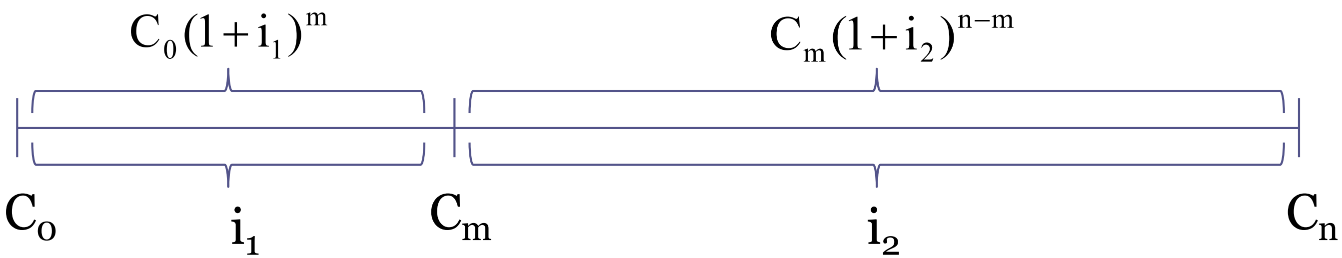
Capitalização e Atualização em Regime de Capitalização Composto

- Equação de Capitalização:

$$C_n = C_0(1+i_1)^m(1+i_2)^{n-m}$$

- Equação de Atualização:

$$C_0 = C_n(1+i_2)^{-n+m}(1+i_1)^{-m}$$



Assincronismo entre Taxas de Juro e Período de Capitalização

Exemplo:

- Investimento de um capital de 100€, por um período de 14 meses, com capitalização semestral, à taxa de juro anual de 16%.

- Qual o valor final deste investimento?

Assincronismo entre Taxas de Juro e Período de Capitalização

→ Nestas condições, as fórmulas anteriores não são válidas

- Solução: **operar sobre as taxas**

Para isso, há que dar resposta a duas situações:

(1) No período inicial, de 1 ano, há que saber o modo como a taxa de referência é encarada pelas partes – trata-se de uma **taxa efetiva** ou de uma **taxa nominal**?

(2) Para os dois últimos meses, período não inteiro, há que substituir a taxa de referência dada por uma outra, com período de referência de 2 meses: usamos uma **taxa equivalente** ou uma **taxa proporcional**?

Taxas Efetivas *versus* Taxas Nominais

A distinção reside no facto de refletirem ou não o efeito da capitalização …

taxa efetiva , considera os efeitos da capitalização composta em períodos menores (taxa verdadeira)

- Logo, **só existe diferença entre elas em regime de capitalização composta** (em regime de juro simples, a taxa nominal é a taxa efetiva)

    - OBS : Na prática corrente as taxas anunciadas são taxas (anuais) nominais (TAN)

Exemplo _ Taxas Efetivas e Taxas Nominais

- C (€ 100) está aplicado à taxa anual (nominal) de 16% (TAN), com frequência de capitalização semestral. Valor do investimento ao fim de 1 ano?

- **Qual a taxa a aplicar no semestre?**

  - **Regra da proporcionalidade** $\frac{16\%}{2} = 8\%$

    (taxa efetiva semestral)

$C_1=100(1+8\%)=100+8=108$ fim 1ºsemestre

e $C_2=100(1+8\%)^2= 116,64$ fim 2º semestre (1 ano)

Exemplo _ Taxas Efetivas e Taxas Nominais

Qual a taxa anual efetiva (TAE)?

Passou um ano e 2 capitalizações.

- $C_1=100(1+8\%)=100+8=108$
- $C_2=C_1(1+8\%)=(100+8)\ (1+8\%)$
  - $100+8+\underbrace{8+\ 8*8\%}_{\text{juro de juro = juro composto}}=116{,}64$

- Qual a taxa anual a que efetivamente o capital estava aplicado (i.e. que produziu juros de 16,64) ?
- $100(1+TAE)=116{,}64$
- $TAE = 16{,}64\%$

Taxas Equivalentes e Taxas Proporcionais

Taxas Equivalentes:

- Duas **taxas** reportadas a períodos diferentes são **equivalentes** quando aplicadas ao mesmo capital, pelo mesmo prazo, **produzem o mesmo montante acumulado**. Pressupõe juro composto.
  - No exemplo anterior :
    - 16,64% ao ano e 8% ao semestre **são taxas equivalentes**
- COMO calcular?

Taxas Equivalentes

- Taxa anual i_s, é equivalente a uma taxa semestral i_s, a uma taxa trimestral i_t, a uma mensal i_m, sse:

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_m)^{12}$$

$$i_s = \sqrt[2]{1+i_a\%} - 1 =$$

OBS : A potência a que se eleva a expressão (1+i), relativa ao período menor, é o número de vezes em que esse período cabe no maior

...e qual a taxa para os 2 últimos meses (a taxa bi-mensal)?

$$i_{bm} = \sqrt[\frac{12}{2}]{1+TAE} \quad -1$$

Taxas Proporcionais

- Duas **taxas** são **proporcionais** entre si se a **razão (quociente) entre elas coincide com a razão (quociente) entre os respectivos períodos** a que se reportam

$$\frac{i_a}{i_s} = 2; \frac{i_a}{i_t} = 4; \frac{i_a}{i_m} = 12; \ldots$$

  - Ex.: 16% ao ano e 8% ao semestre são taxas proporcionais pois: $\frac{16\%}{8\%} = \frac{1\,\text{ano}}{0{,}5\,\text{anos}} = 2$

- **Não refletem a existência de capitalização**

Equação de Equivalência de Taxas

$$(1+i) = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

Permite:
- Passar de uma taxa anual efetiva para uma taxa anual nominal e vice-versa;
- Calcular uma taxa efetiva para uma fração do ano, a partir de uma taxa anual (efetiva ou nominal).

Em que:

- i = taxa anual efetiva
- j = taxa anual nominal
- m = número de períodos de capitalização no ano
- j/m = taxa efetiva para uma fração do ano

SÉRIES TEMPORAIS /TABELAS FINANCEIRAS

Rendas

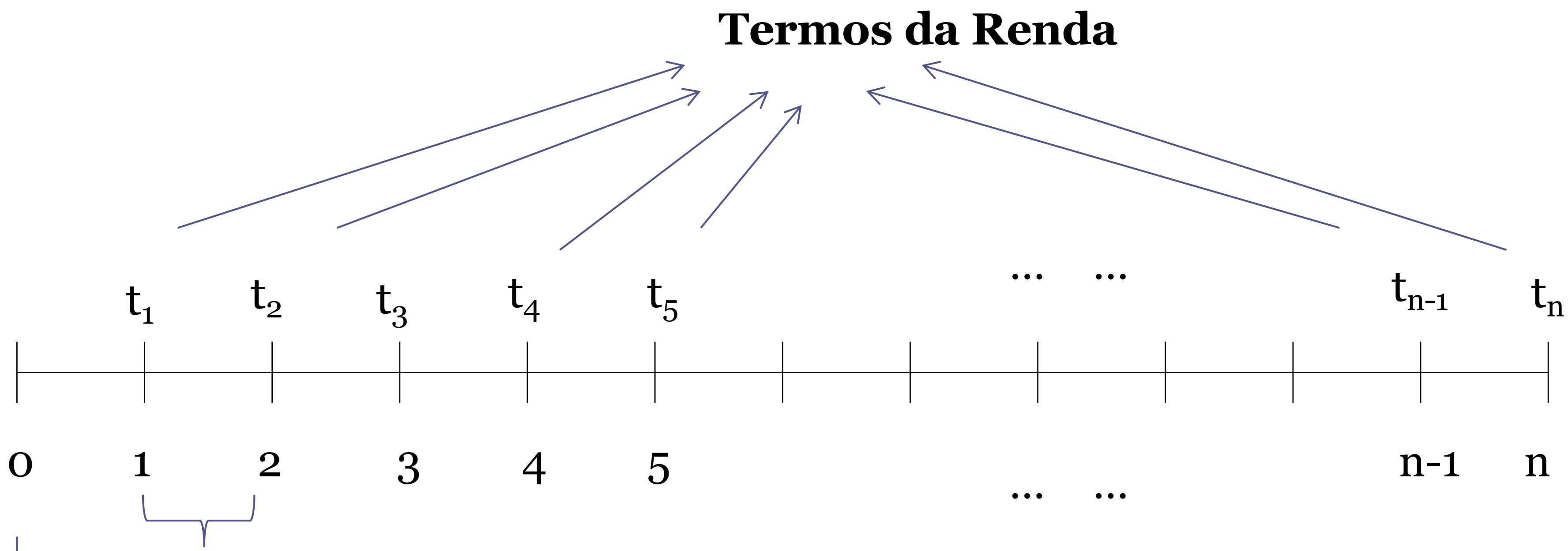
Nos exemplos anteriores consideramos atualização e capitalização a juros compostos de um **capital único**.

Contudo, podemos considerar um **conjunto de capitais** a ocorrer a intervalos de tempo iguais – **rendas**

Ex: prestações relativas ao pagamento de um empréstimo para aquisição de uma habitação, contrato de "leasing", Planos Poupança Reforma, ...

Cada um dos capitais é um **termo da renda**.

Rendas em Regime de Juro Composto



Período: intervalo de tempo que medeia entre dois termos consecutivos

Origem: período antes do vencimento do 1º termos

TABELAS FINANCEIRAS

Tabela 1 - factor de capitalização para o **termo** do período final (n) **de uma só aplicação** inicial à taxa i:

$$(1+i)^{n}$$

Tabela 2 - factor de actualização (desconto) à taxa i, para o começo do período inicial **de um só montante** disponível no termo do período final (n): $\frac{1}{(1+i)^{n}}$

Tabela 3 - factor de capitalização para o termo do período final (n) de **uma série uniforme** de aplicações periódicas (anuidades) à taxa i: $\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$

Tabela 4 - factor de equivalência anual (anuidade) à taxa i **de um só montante** disponível no termo do periodo final (n): $\frac{i}{(1+i)^{n}-1}$

Tabela 5 - factor de actualização (desconto) à taxa i para o começo do período inicial **de uma série uniforme** de montantes de fim de período (anuidades):

$$\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

Tabela 6 - factor **de equivalência anual** (anuidade) à taxa i, de **uma só aplicação** no começo do período inicial :

$$\left(\frac{i}{1-(1+i)^{\wedge}-n}\right)$$

T3_Valor Futuro de uma Série uniforme de n aplicações periódicas (anuidades): S_n

- Quanto terei se todos os meses aplicar € 125 a uma taxa de juro de 6% (a.n.), durante os próximos 12 meses?

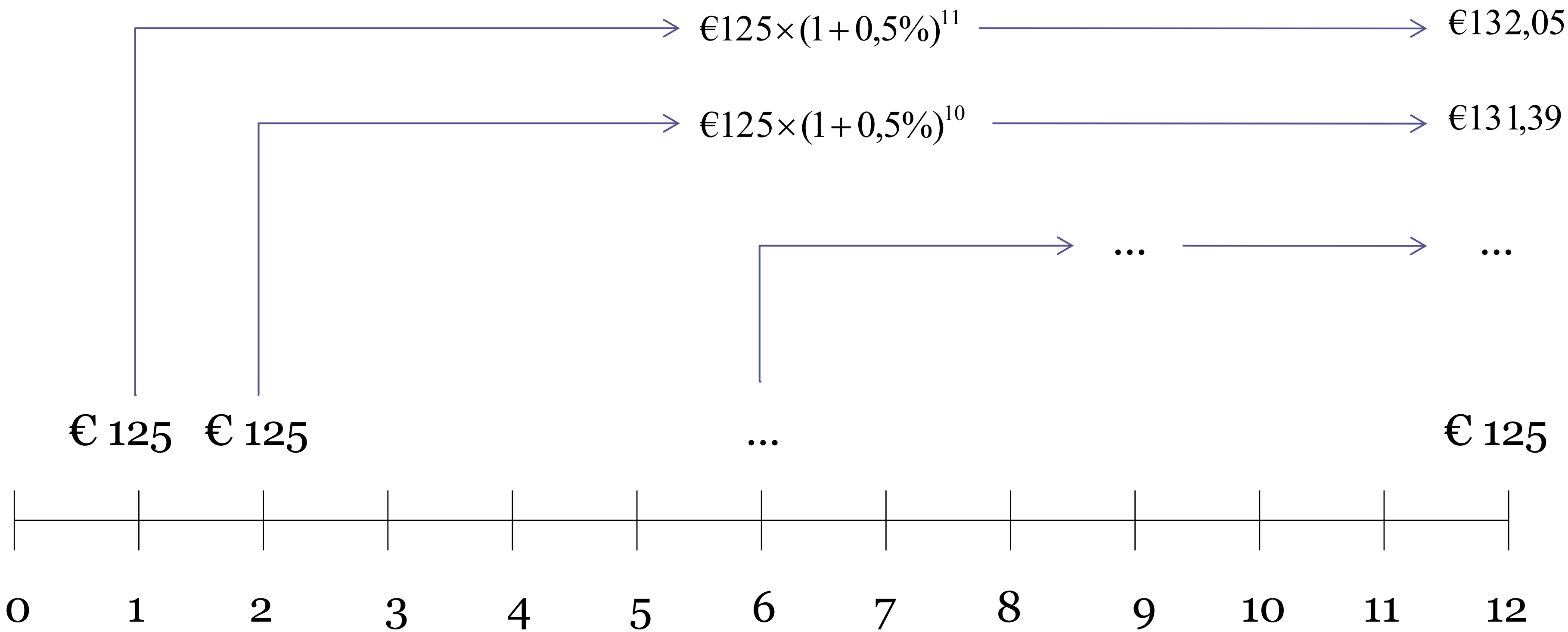
  - Pela regra da proporcionalidade, a taxa mensal é:

$$i_m = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% \text{ ao mês}$$

  - Começo a aplicar daqui a um mês, no momento 1, estando situado no momento 0: aplicações postecipadas.

Valor Futuro de uma Série uniforme de n aplicações periódicas (anuidades): S_n

- Graficamente:



Valor Futuro de uma Série uniforme de n aplicações periódicas(anuidades): S_n

- Qual o valor desta soma?

- $125(1+0{,}5\%)^{11}+125(1+0{,}5\%)^{10}+\ldots+125=$
- $125[1+(1+0{,}5\%)^{1}+\ldots+(1+0{,}5\%)^{10}+(1+0{,}5\%)^{11}]=?$

- Trata-se da soma de 12 termos de uma progressão geométrica cuja razão (r) é (1+0,5%) e u_1 (primeiro termo da série) é 1

Valor Futuro de uma Série uniforme de n aplicações periódicas(anuidades): S_n

- Relembrando:

  - Progressão Geométrica (PG)

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r} \times u_1$$

Valor Futuro de uma Série uniforme de n aplicações periódicas (anuidades): S_n

- O Valor Futuro da aplicação descrita, a começar daqui a um período (postecipadas) é, pois:

$$S_n = 125 \times \left[\frac{(1+0{,}5\%)^{12} - 1}{0{,}5\%} \right]$$

$$= 125 \times 12{,}33556237$$

$$= 1541{,}945296$$

Factor de capitalização para o termo do período final de uma **série uniforme de aplicações periódicas** (anuidades) à taxa *i*:

$$((1+i)^n - 1) \ / \ i$$

Valor Atual de uma perpetuidade

- Calcula-se o limite para que tende a expressão da soma , quando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)=\frac{1}{i}$$

uma vez que $(1+i)^{-n} \to 0$

Valor Atual de uma perpetuidade crescente à taxa g (g < i)

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{i-g} - \frac{1}{i-g} \times \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^n \right] = \frac{1}{i-g}$$

Factor **de equivalência anual** (anuidade) à taxa i, de **uma só aplicação** no começo do período inicial

- Uma exemplificação prática muito comum, é o caso de um empréstimo à habitação, em que as prestações (capital amortizado + juros) são constantes

- Pedimos hoje (momento 0) um capital emprestado (mutuado) de € 350.000, a pagar em 35 anos (420 meses), em prestações constantes, à taxa anual de 6%.

- Qual o valor da prestação? (T6)

Valor Actual de uma Série uniforme de n aplicações periódicas (anuidades): A_n

- Sabemos que o capital inicial é de € 350.000 que pagaremos em 420 prestações mensais iguais e sucessivas, de valor a

- Podemos escrever:

- a = 350000* Tab 6(n=420;i=0,005)

$$a = 1.995,663979$$

... ou usar Tab 5:

$$350.000 = a \times \frac{(1+\frac{6\%}{12})^{420} - 1}{\frac{6\%}{12} \times (1+\frac{6\%}{12})^{420}}$$

Regimes de Amortização de Empréstimos

- Os dois principais regimes de amortização de empréstimos são:
  - **Prestações Constantes** _ Capital + Juros (+ encargos) (usar tabela 6)
  - **Amortizações de capital (reembolsos) constante**
    - Neste caso, dividimos o montante a pagar pelo número de pagamentos e acrescentamos o juro (e encargos) a pagar em cada período.

Regimes de Amortização de Empréstimos

- Os empréstimos podem ainda ter:
  - **Período ou Prazo de Carência**
    Intervalo de tempo, após a contratação do empréstimo, durante o qual o devedor (mutuário) paga ao credor (mutuante), nos períodos convencionados, apenas os juros do período, **não havendo lugar a qualquer amortização** do capital mutuado
  - **Período ou Prazo de Diferimento**
    Intervalo de tempo, após a celebração do mútuo, durante o qual o mutuário **não efectua qualquer pagamento**, quer de capital quer de juros, ao mutuante

Regimes de Amortização de Empréstimos

EXEMPLO:

Um empréstimo de 5000 euros vai ser pago em 4 prestações anuais, variáveis incluindo amortizações constantes de capital. A taxa de juro em vigor é de 10% (ano). Construa o quadro de reembolso deste empréstimo:

Anos	Capital em dívida	Prestação			Capital amortizado	Capital em
	no início	Juro	Amortização de capital	Total	acumulado	dívida no fim
1						
2						
3						
4						
	1	$2 = 1 \times i$	3	$4 = 2 + 3$	$5 = \Sigma 3$	$6 = 1 - 3$

Regimes de Amortização de Empréstimos

Resolução:

Anos	Capital em dívida	Prestação			Capital amortizado	Capital em
	no início	Juro	Amortização de capital	Total	acumulado	dívida no fim
1	5000	500	1250	1750	1250	3750
2	3750	375	1250	1625	2500	2500
3	2500	250	1250	1500	3750	1250
4	1250	125	1250	1375	5000	0
	1	2 = 1 x i	3	4 = 2 + 3	5 = Σ 3	6 = 1 - 3