Tarea 02

Victor Morales

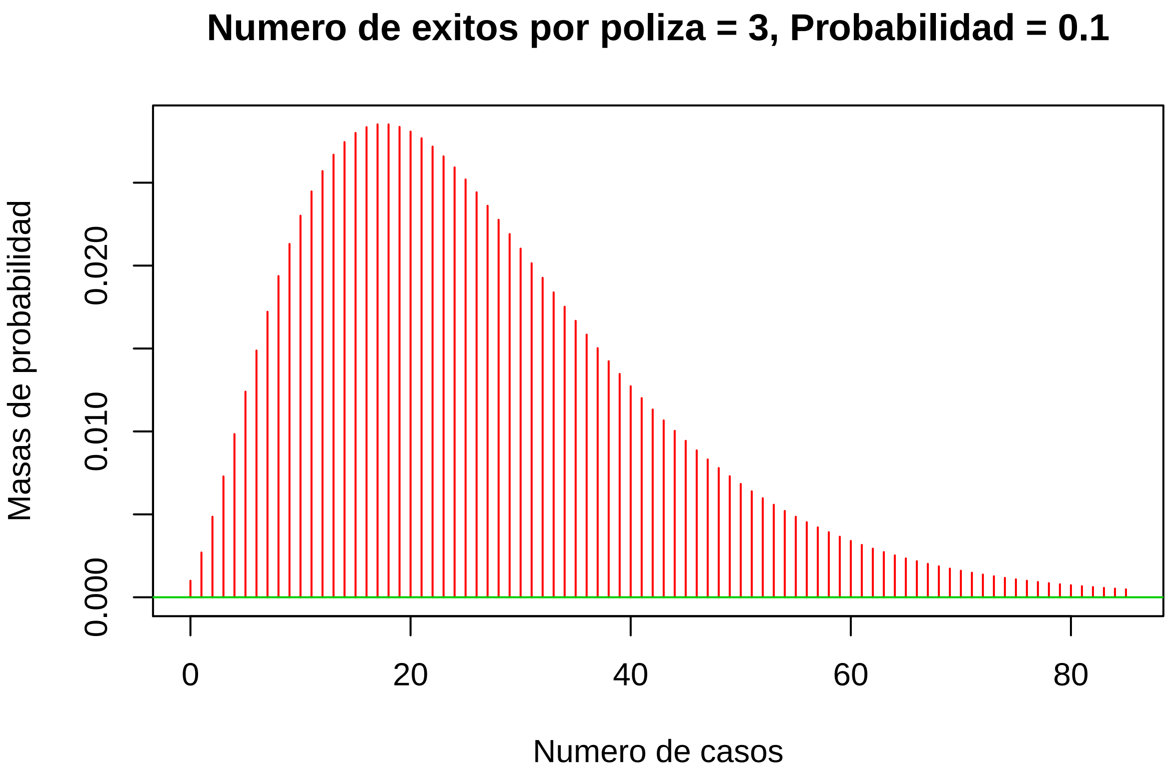
19/02/2019

1. Binomial Negativa

Se modifica la funcion `Poisson.plot()` para llegar a la funcion `BinNeg.plot()`.

```
BinNeg.Plot <- function(r,p, a=NA,b=NA,calcProb=(!is.na(a) | !is.na(b)),quantile=NA,calcQuant=!is.na(qu

  mean = r*(1-p)/p
  sd = sqrt(r*(1-p)/(p^2))

  low = max(0, round(r - 3 * sd))
  high = round(r + 5 * sd)

  values = low:high
  probs = dnbinom(values,r, p,log=FALSE)
  plot(c(low,high), c(0,max(probs)), type = "n",
       xlab = "Numero de casos",
       ylab = "Masas de probabilidad",
       main = "Numero de exitos por poliza = 3, Probabilidad = 0.1")
  lines(values, probs, type = "h", col = 2)
  abline(h=0,col=3)
  if(calcProb) {
    if(is.na(a)){ a = 0 }
    if(is.na(b)){
      a = round(a)
      prob = 1-pnbinom(a-1,r,p)
      title(paste("P(",a," <= Y ) = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
      u = seq(max(c(a,low)),high,by=1)
    }
    else {
      if(a > b) {d = a; a = b; b = d;}
      a = round(a); b = round(b)
      prob = pnbinom(b,r,p) - pnbinom(a-1,r,p)
      title(paste("P(",a," <= N <= ",b,") = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
      u = seq(max(c(a,low)),min(c(b,high)),by=1)
    }
    v = dnbinom(values,r,p,log=FALSE)
    lines(u,v,type="h",col=4)
  }
  else if(calcQuant==T) {
    if(quantile < 0 || quantile > 1)
      stop("El cuantil debe estar entre 0 y 1")
    x = qnbinom(quantile,r,p)
    title(paste("",quantile," quantile = ",x,sep=""),line=0,col.main=4)
    u = 0:x
    v = dnbinom(values,r,p,log=FALSE)
    lines(u,v,type="h",col=4)
  }
```

```r
  return(invisible())
}

BinNeg.Plot(3,0.1)
```



2. Propiedades de agregacion y desagregacion para la distribucion Poisson

Agregacion:

Supongamos que $N_1, \ldots, N_m$ son variables aleatorias independientes con distribucion Poisson, $\text{Poisson}(N_j = n_j|\lambda_j)$, respectivamente, con λ_js posiblemente diferentes. Se sigue,

- $N = \sum_{j=1}^{m} N_j$ se distribuye Poisson
- N tiene tasa de intensidad $\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$

Demostracion con la generadora de momentos:

$$\mathbf{M_t}(\mathbf{N}) = \mathbf{E}[\exp(tN)] = M_t(\sum_{j=1}^{m} N_j) = \mathbf{E}[\exp(t\sum_{j=1}^{m} N_j))]$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_t}(\mathbf{N}) = \mathbf{E}[\exp(t\sum_{j=1}^{m} N_j))] = \mathbf{E}[\prod_{j=1}^{m} \exp(tN_j))] \quad * \, independencia$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_t}(\mathbf{N}) = \prod_{j=1}^{m} \mathbf{E}[\exp(tN_j)] = \prod_{j=1}^{m} M_t(N_j) = \prod_{j=1}^{m} \exp[\lambda_j(\exp t - 1)]$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_t}(\mathbf{N}) = \exp[(\exp t - 1)\sum_{j=1}^{m} \lambda_j]$$

Asi vemos que N efectivamente se distribuye Poisson con una tasa de intensidad $\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$.

Desagregacion:

Supongamos que $N \sim \text{Poisson}(n|\lambda)$, con $\lambda > 0$, y consideremos que los eventos pueden clasificarse en m tipos distintos independientes, con probabilidades $p_1, \ldots, p_m$. Se sigue,

- N_js, que son los numeros de eventos en cada clase, son mutuamente independientes
- Cada N_j tiene distribucion $\text{Poisson}(n|\lambda_j)$, con $\lambda_j = p_j\lambda$

Se toma N como la suma total de los m "tipos" por lo que $N = \sum_{j=1}^{m} N_j$. Dado que los eventos totales se separan en m tipos distintos *independientes* entonces por construccion las N_js son mutuamente *independientes*. Ahora bien, por lo demostrado en la propiedad de *agregacion* para que $N = \sum_{j=1}^{m} N_j \sim \text{Poisson}(n|\lambda)$ necesitamos que $N_j \sim \text{Poisson}(n_j|\lambda_j)$ solo que en vez de tener la relacion directa $\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$ para la tasa de cambio, se tiene una relacion ponderada $\lambda = \sum_{j=1}^{m} p_j\lambda$ dado que $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. *q.e.d.*

3. Identidad para BinomialNegativa con mezcla PoissonGamma

Suponemos que $N|\lambda \sim \text{Poisson}(n|\lambda)$ y que $\lambda \sim \text{Gamma}(\lambda|\alpha, \beta)$. Queremos demostrar que se cumple la identidad:

$$P(N = n) = \int_0^\infty \text{Poi}(n|\lambda)\text{Gam}(\lambda|a, b)d\lambda.$$

Primero, de $N|\lambda \sim \text{Poisson}(n|\lambda)$ sabemos que:

$$P(N = n|\lambda) = \text{Poi}(n|\lambda)$$

Entonces, para obtener la probabilidad marginal $P(N = n)$ tenemos que integrar sobre todos los valores posibles para $\lambda \in [0, \infty]$ por lo que integramos sobre el soporte de $\text{Gamma}(\lambda|\alpha, \beta)$ y llegamos a la identidad propuesta. *q.e.d.*