ACT-11302 Cálculo Actuarial III **Alumno:** ______________________
Primavera 2019 **Clave única:** ______________________
Examen parcial 3 **Calificación:** ______________________
Fecha: 6-May-19 **Entrega: 16-May-19**

Lean cuidadosamente las preguntas. Sus respuestas deben estar acompañadas con procedimientos y justificaciones. **¡Exito!**

---

1. Un portafolio de seguros consta de 100 pólizas donde cada póliza tiene una probabilidad de reclamo igual a 0.20. Cuando se produce un reclamo, el monto del reclamo sigue una distribución Pareto con parámetros $\alpha = 3$ y $\theta = 1000$. Calculen la media y la varianza de la pérdida agregada.

2. Determina la distribución, densidad y función de riesgo (función *hazard*) de la mezcla de dos distribuciones exponenciales, con parámetros θ_1 y θ_2, y pesos de mezcla α_1 y α_2 (con α_1 y α_2 positivos y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).

3. Sea X una variable aleatoria para la severidad individual de un seguro, con distribución $\text{Exp}(x|\theta)$, tal que $\mathbb{E}_{F_X}(X) = 100$. Defina Y una modificación de X como,

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 20 \\ 0.9(X - 20) & \text{si } 20 \leq X < 300 \\ 0.9(280) & \text{si } X \geq 300. \end{cases}$$

   a. Demuestra que la distribución de Y, $F_Y(y)$, es del tipo mixta.
   b. Calcula $\Pr(Y = 0)$, $\Pr(Y = 252)$ y $\Pr(Y \in (126, 144))$.
   c. Deriva la expresión para $\mathbb{E}[g(Y)]$, con $g(\cdot)$ una función integrable. (Piensa en g como la función asociada con la función generadora de momentos de Y, por ejemplo).

4. Sea X la variable para la severidad individual de un seguro, con función de distribución $F_X(x) = \text{Exp}(x|\lambda)$, $\lambda > 0$.

   1. Calcula la prima de riesgo pura.
   2. Define la prima de riesgo ajustada, $\Pi_X = \int_{\Re_+} \mathbb{P}(X > x)^{1/\rho} dx$. ¿Para qué valores de ρ está Π_X bien definida?
   3. Calcula Π_X y compara con la prima de riesgo pura.

5. Una compañía de seguros describe la distribución de reclamos anuales individuales en un plan de salud como,

Servicio	Prob. Reclamo	Media	Varianza
Visitas Médicas	0.7	160	4,900
Cirugía	0.2	600	20,000
Otros	0.5	240	8,100

   Supongamos independencia entre los montos y ocurrencia de los reclamos. Con esa base, utiliza las tres aproximaciones asintóticas/analíticas de la distribución de siniestros agregados para determinar el número mínimo de miembros del plan de salud tal que la probabilidad del evento que los cargos anuales por reclamos sean mayores a 115 por ciento de los cargos esperados sea menor que 0.05.

6. Dos formas de modificar la dispersión de una variable aleatoria X son:

   I Distribución tipo mezcla, donde

$$f_X(x) = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x),$$

   donde $(f_i)_{i=1}^n$ son funciones de densidad con soporte común en $\mathcal{X}$, y $(\alpha_i)_{i=1}^n$ son escalares positivos tales que $\sum_i \alpha_i = 1$.

II. Distribuciones tipo splicing, donde

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha_1 f_1(x), & x \in \mathcal{X}_1 \\ \alpha_2 f_2(x), & x \in \mathcal{X}_2 \\ \vdots & \\ \alpha_n f_n(x), & x \in \mathcal{X}_n \end{cases}$$

donde $(f_i)_{i=1}^n$ son funciones de densidad con soporte en $\mathcal{X}_i$, respectivamente, sien- do la colección $(X_i)_{i=1}^n$ una partición de tamaño n de $\mathcal{X}$, el soporte de X.

a. Calcula $\mathbb{E}(X)$ para ambos tipos de modificaciones.

b. Discute, en tu entender, las ventajas y desventajas de emplear (I) ó (II) para modelar un conjunto de datos, $x_1, ..., x_m$ de severidades individuales.

7. Considere J asegurados, para los cuales la prima se riesgo es calculada de acuerdo al principio exponencial, con un coeficiente α_j distinto para cada uno de ellos, para $j = 1, \ldots, J$. Suponga que el riesgo S es coasegurado. ¿Qué parte de S_j debe ser adquirida por cada asegurado, de manera que la prima de riesgo total sea mínima?