19/02/19

Tarea 02

② Demuestren las propiedades de agregación y desgregación de la distribución Poisson

Agregación

Supongamos que $N_1, \dots, N_q$ son variables aleatorias independientes con distribución Poisson, $Po(N_j = n_j | \lambda_j)$, respectivamente, con λ_js posiblemente diferentes. Se sigue,

- $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ se distribuye Poisson
- N tiene tasa de intensidad $\lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$

Demostramos para el caso de 2 y para general se ve por inducción.

Sabemos que $N(t+s) - N(s) \sim Po(\lambda t)$

Se puede saber que la suma tiene incrementos independientes y que $N_1(0) + N_2(0) = 0$

Definimos $Y = N_1(t+s) - N_1(s) \sim Po(\lambda_1 t)$

$Z = N_2(t+s) - N_2(s) \sim Po(\lambda_2 t)$

Entonces

$$N(t+s) - N(s) = [N_1(t+s) - N_1(s)] + [N_2(t+s) - N_2(s)]$$
$$= Y + Z \sim Po((\lambda_1 + \lambda_2)t) \blacksquare$$

Desgregación

Supongamos que $N \sim Po(n|\lambda)$, con $\lambda > 0$, y consideremos que los eventos pueden clasificarse en m tipos distintos independientes, con probabilidades $p_1, \dots, p_m$. Se sigue,

- N_js, que son los números de eventos en cada clase, son mutuamente independientes
- Cada N_j tiene distribución $Po(n|\lambda_j)$, con $\lambda_j = p_j \lambda$

Consideramos $N = N_1 + N_2 + \dots + N_j$

$N_j, j \geq 1 \sim \text{Bernoulli}(p)$

La f.g.p. de la Bernoulli es $\Phi(t) = E(t^x) = q + tp$

La f.g.p. de N es $\Phi_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$

La f.g.p. de N es la composición de

$\Phi_N(\Phi(t)) = e^{\lambda(q+tp-1)} = e^{\lambda(tp-p)} = e^{\lambda p(t-1)}$ que es la f.g.p. de una v.a. $\sim Po(p\lambda)$

19/02/19

③ Realicen el cálculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial-negativa como mezcla de poisson-gamma

$$N|\lambda \sim Po(n|\lambda) \quad , \quad \lambda \sim Ga(\lambda|a,b)$$

$$P(N=n) = \int_0^{\infty} Po(n|\lambda)\, Ga(\lambda|a,b)\, d\lambda$$

Poisson

$$Po(n|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Gamma

$$Ga(\lambda|a,b) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} \lambda^{b-1} e^{-a\lambda} \quad , \quad \lambda > 0$$

$$P(N=n) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \lambda^{b-1} e^{-a\lambda}\, d\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{a^b}{n!\,\Gamma(b)} \lambda^{n+b-1} e^{-\lambda(a+1)}\, d\lambda$$

$$= \frac{a^b}{n!\,\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(n+b)}{(a+1)^{n+b}} \int_0^{\infty} \frac{(a+1)^{n+b}}{\Gamma(n+b)} \lambda^{n+b-1} e^{-\lambda(a+1)}\, d\lambda$$

$$= \frac{a^b}{n!\,\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(n+b)}{(a+1)^{n+b}} \qquad (* \ \Gamma(n+1) = n!\ )$$

$$= \frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+1)\Gamma(b)} \left(\frac{a}{a+1}\right)^b \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$$

$$= \frac{(n+b-1)!}{n!\,(b-1)!} \left(\frac{a}{a+1}\right)^b \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$$

$$= \binom{n+b-1}{n} \left(\frac{a}{a+1}\right)^b \left(\frac{1}{a+1}\right)^n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$