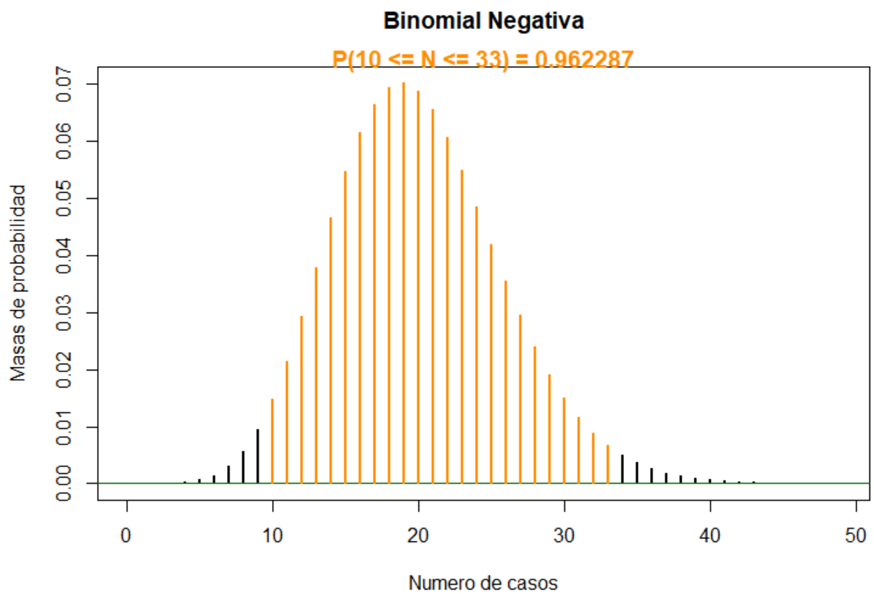
ACT-11302 Cálculo Actuarial III **Nombre:** Fabrizzio Pérez Aceituno
Primavera 2019 **C.U.:** 156165
Tarea 02 **12/Feb/2018**
Fecha de entrega: 19/Feb/2019

Consideren las notas del martes 12 de febrero de 2019.

1. **Modifiquen la función Poisson.Plot() para crear la función BinNeg.Plot() para generar los resultados análogos de Poisson.Plot() y Binomial.Plot() incluidas en el markdown de esta presentación.**



*El código de la función se encuentra en el archivo "act11302_156165_t02.R"

2. **Demuestren las propiedades de agregación y desagregación de la distribución Poisson.**

Agregación: Sean $N_1, N_2, \ldots, N_q$ variables aleatorias independientes distribuidas Poisson ($N_j = n_j \mid \lambda_j$), demostrar que $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ ~ Poisson ($N|\lambda$) en donde $\lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$:

Usando la función generadora de momentos, dada por $M_x(t) = exp\{\lambda(e^t - 1)\}$ obtenemos que:

$$M_N(t) = E[e^{tN}] = E\left[e^{t\left(\sum_{j=1}^{q} N_j\right)}\right] = E\left[e^{t(N_1+N_2+\cdots+N_q)}\right] = E[e^{tN_1} * e^{tN_2} * \ldots * e^{tN_q}]$$

Entonces, como las variables aleatorias son independientes podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$E[e^{tN_1} * e^{tN_2} * \ldots * e^{tN_q}] = E[e^{tN_1}] * E[e^{tN_2}] * \ldots * \ E[e^{tN_q}] = \prod_{j=1}^{q} E[e^{tN_j}] = \prod_{j=1}^{q} M_{N_j}(t)$$

$$= exp\{\lambda_1(e^t - 1)\} * exp\{\lambda_2(e^t - 1)\} * \ldots * exp\{\lambda_q(e^t - 1)\} = exp\left\{\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, (e^t - 1)\right\}$$

$$= \boxed{exp\{\lambda(e^t - 1)\}}$$

∴ Por la forma de la f.g.m de N, podemos concluir que $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ ~ Poisson (N| λ)

<u>Desagregación:</u> Suponer que N ~ Poisson (N|λ) con λ >0 y también supongamos que podemos clasificar los eventos en m tipos distintos e independientes, cada uno con probabilidad p_1, p_2, ..., p_m. Demostrar que cada N_j~ Poisson (n|λ_j) con $\lambda_j = p_j * \lambda$:

3. **Realicen el cálculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial- negativa como mezcla de poisson-gamma.**

Objetivo: Representar la distribución Binomial Negativa como una mezcla de una Poisson respecto a una Gamma:

(N|λ) ~ Poisson (n|λ) y λ ~ Gamma (α,β)

De esta forma:

$$P(N = n) = \int_0^\infty \text{Poisson(n|λ)} * \text{Gamma(α, β)} \ d\lambda = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right) * \left(\frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\beta^\alpha \, \Gamma(\alpha)}\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{n! \ \beta^\alpha \, \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} \, e^{-\lambda\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \, d\lambda$$

Entonces, completando la integral para una distribución Gamma con parámetros α^*=n+ α y $\beta^* = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-1}$:

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)} \Gamma(n+\alpha)}{n! \ \beta^\alpha \, \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+\alpha-1} \, e^{-\lambda\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}}{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)} \Gamma(n+\alpha)} \, d\lambda = \frac{\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)} \Gamma(n+\alpha)}{n! \ \beta^\alpha \, \Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\ \Gamma(\alpha)} * \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha} * \frac{\beta^{n+\alpha}}{(1+\beta)^{n+\alpha}} = \frac{(n+\alpha-1)!}{n!\,(\alpha-1)!} * \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{n} * \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{a} = \boxed{BinNeg(n,\theta)}$$

En donde $\theta=\frac{1}{\beta+1}$, por lo que se comprueba que mezclando una distribución Poisson respecto a una Gamma podemos representar a la distribución Binomial Negativa.