EJERCICIO 2. Elisa García Esc. 150153

a) AGREGACIÓN. $X \sim Po(\lambda_1)$, $Y \sim Po(\lambda_2)$ iid

(SE HACE LA PRUEBA con $Z = X + Y$ si $X, Y \sim$ Poisson, el caso con n sumas es análogo)

$$P\{Z = n\} = P\{X + Y = n\} = \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n-k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) P(Y = n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{n-k}}{n-k!}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

$$\therefore Z \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

b) DESAGREGACIÓN

SI CONSIDERAMOS a $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_j$

LOS EVENTOS SE CLASIFICAN EN DISTINTOS TIPOS INDEPENDIENTES EN ESTE CASO HAY m TIPOS CADA UNO CON PROBABILIDAD p_i $i = 1, \ldots, n$

POR LO TANTO:

$N_j \sim Ber(p_j)$

GENERADORA DE MOMENTOS BERNOULLI · POR SIMPLICIDAD TOMAMOS $e^t = t$

$$M_{N_j}(t) = p_j \cdot e^t + (1 - p_j)$$

POR OTRO LADO LA GENERADORA DE MOMENTOS POISSON $M_N = e^{\lambda(e^t-1)}$

$$M_N(M_{N_j}(t)) = e^{\lambda(p_j t + (1-p_j) - 1)} = e^{-\lambda(p_j t - p_j)} = e^{-\lambda(p_j(t-1))}$$

La cual es la generadora de momentos de N_i's independiente de una $Po(\lambda p_j)$

PREGUNTA 3.

EXPRESAR

$$P(N=n \mid \lambda=\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \cdot Ga \quad n=0,1,2,\dots$$

DADO QUE

$$\lambda \sim Ga(a,b)$$

i.e.

$$f(\lambda) = \frac{a^{b} \cdot e^{-a\lambda}\lambda^{b-1}}{\Gamma(b)}$$

ENTONCES

$$P(N=n) = Po(\lambda) \cdot Ga(\lambda \mid a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{n}}{n!} \cdot \frac{a^{b}}{\Gamma(b)} e^{-a\lambda}\lambda^{b-1}\, d\lambda$$

$$= \frac{a^{b}}{\Gamma(b)\cdot n!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda}\lambda^{n} e^{-a\lambda}\lambda^{b-1}\, d\lambda$$

$$= \frac{a^{b}}{\Gamma(b)\cdot n!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+a)} \lambda^{n+b-1}\, d\lambda$$

$$= \frac{a^{b}}{\Gamma(b)\cdot n!} \cdot \frac{\Gamma(n+b)}{(1+a)^{n+b}} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(1+a)^{n+b}}{\Gamma(n+b)} e^{-\lambda(1+a)} \lambda^{n+b-1}\, d\lambda}_{Ga(1+a,\, n+b)}$$

∴ ESTO ES 1

$$= \frac{a^{b}}{\Gamma(b)\cdot n!} \cdot \frac{\Gamma(n+b)}{(1+a)^{n+b}}$$

$$= \frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(b)\, n!} \cdot \left(\frac{a}{1+a}\right)^{b} \cdot \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n} = \frac{(n+b-1)!}{b-1!\, n!} \cdot \left(\frac{a}{1+a}\right)^{b} \cdot \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n}$$

$$p = \frac{a}{1+a} \qquad 1-p = 1 - \frac{a}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a} = \frac{1}{1+a}$$

$$= \frac{(n+b-1)!}{b-1!\, n!}\, p^{b} \cdot q^{n}$$