WIL IRÁN VÁZQUEZ LÓPEZ
CU: 156961

TAREA 2

Ej. 2. Demuestren las propiedades de agregación y desagregación de la distribución Poisson

Agregación: $N_1, \dots, N_q$ v.a.i $N \sim Po(N_j = n_j \mid \lambda_j)$ con λ_j's posiblemente diferentes.

- $Y = \sum N_j \sim$ Poisson
- Y tiene tasa de ~~identidad~~ intensidad $\lambda = \sum \lambda_j$

dem

al ser N_j v.a independientes podemos encontrar la distribución de $\sum N_j$ con ayuda de la fgm, pues sabemos que

$$M_{\sum N_j}(t) = \prod M_{N_j}(t) \quad , \text{ en nuestro caso } Y = \sum N_j$$

la fgm de N_j $\quad M_{N_j}(t) = e^{\lambda_j(e^t - 1)}$

$$\Rightarrow M_{\sum N_j}(t) = \prod M_{N_j}(t) = \prod e^{\lambda_j(e^t-1)} = e^{(e^t-1)\sum\lambda_j} \longrightarrow \text{fgm poisson}$$

$\therefore Y = \sum N_j \sim$ Poisson y tiene tasa de intensidad $\sum \lambda_j$ $\blacksquare$

Desagregación

Sea $\{N(t)\}$ proceso de Poisson (PP) con tasa λ. Suponga que los eventos los podemos clasificar en tipo I y tipo II con probabilidad p y $(1-p)$ respectivamente (independientes)

Sea $N_1(t)$ y $N_2(t)$ el número de eventos del tipo I y II respectivamente que ocurren en el intervalo $[0, t]$. $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$

Prop $\{N_1(t)\}$ y $\{N_2(t)\}$ son PP. con tasa λp y $\lambda(1-p)$ respectivamente. Además los procesos son independientes

dem

- si $N(0) = 0 \Rightarrow N_1(0) = 0$
- $\{N_1(t)\}$ hereda las propiedades de estacionaridad e incrementos independientes del proceso $\{N(t)\}$.

sig página

Esto ocurre debido a que la distribución del número de eventos del tipo I en un intervalo de tiempo puede obtenerse condicionando al número total de eventos en ese intervalo, pues la distribución del total de eventos sólo depende de la longitud del intervalo y es independiente de lo que haya pasado en algún otro intervalo que no se intersecten. Esto es,

$$P\{N_1(h)=1\} = P\{N_1(h)=1 \mid N(h)=1\} P\{N(h)=1\} + P\{N_1(h)=1 \mid N(h)\geq 2\} P\{N(h)\geq 2\}$$
$$= P(\lambda h + Q(h)) + Q(h)$$
$$= \lambda P h + Q(h)$$

$$P\{N_1(h)\geq 2\} \leq P\{N(h)\geq 2\} = Q(h)$$

$\therefore$ vemos que $\{N_1(t)\}$ es un PP con tasa λp. Resulta análogo mostrar que $\{N_2(t)\}$ es un PP con tasa $\lambda(1-p)$.

Dado que la probabilidad del evento tipo I en un intervalo t a $t+h$ es independiente de todo lo que ocurra en un intervalo que no se cruce con $(t, t+h)$, es independiente del conocimiento de cuando ocurra un evento del tipo II. Debido a esto los 2 procesos de Poisson son independientes.

3. Realicen el cálculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial-negativa como mezcla de poisson-gamma.

dem. Sea $(N \mid \Lambda = \lambda) \sim Po(\lambda)$ $\wedge$ $\Lambda \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$$f_N(n) = \int_{\mathbb{R}} f(n \mid \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} d\lambda$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, n!\, \beta^\alpha} \int_0^\infty \lambda^{(n+\alpha-1)} e^{-\lambda(1+1/\beta)} d\lambda$$ tenemos el nucleo de una gamma, completamos.

$\alpha^* = n+\alpha$ $\quad$ $\beta^* = (1+\frac{1}{\beta})$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, n!\, \beta^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(1+\frac{1}{\beta})^{n+\alpha}} \underbrace{\cancel{\int_0^\infty \frac{(1+\frac{1}{\beta})^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \lambda^{(n+\alpha)-1} e^{-\lambda(1+1/\beta)} d\lambda}}_{=1}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\, \beta^\alpha\, n!\, (1+\frac{1}{\beta})^{n+\alpha}} = \frac{(n+\alpha-1)!}{(\alpha-1)!\, n!} \cdot \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{(\beta+1)^{n+\alpha}}{\beta^{n+\alpha}}}$$

$$= \binom{n+\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot \frac{\beta^{n+\alpha}}{(\beta+1)^{n+\alpha}} = \binom{n+\alpha-1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^n$$

$$= \binom{n+\alpha-1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^n$$

$$\therefore f_N(n) = \binom{n+\alpha-1}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^n \sim BinNeg\left(\alpha, \frac{1}{\beta+1}\right) \blacksquare$$

$$\therefore N \sim BinNeg\left(\alpha, \frac{1}{\beta+1}\right)$$