Tarea 05

Victor Morales

19/03/2019

1. Reflexión sobre observaciones

Sección 2.3.4: efectivamente se pude notar una tendencia a la alta para el tercer cuantil muestral, lo que significa que un mayor numero de polizas tuvieron siniestralidades "moderadas" por una suma aproximada de 140 unidades monetarias. Aunado con el hecho que tanto el máximo muestral como el rango entre éste y el tercer cuantil fueron disminuyendo, se puede observar que en el portafolio las siniestralidades grandes se hacen menos comunes y menos severas. El desplazamiento en 4 unidades para la mediana muestral tambien enfatiza el hecho de que siniestros con una severidad "baja" se hicieron más comunes para el último año de observación.

Sección 3.1: efectivamente por el modelo que usamos los parámetros θ y λ serán los mismos para cualquier año t pero como se puede observar, al cambiar la severidad de los siniestros y la frecuencia de éstos conforme cambia el tiempo, este supuesto no es sustentable. Por lo antes descrito, el supuesto de independencia estocástica respecto a t tampoco es sustentable pues podríamos contemplar la posibilidad de que la siniestralidad del portafolio se vea afectada por la historia del mismo. Esto podría ayudarnos a explicar la tendencia a la baja de la frecuencia de siniestros y siniestralidad agregada. Por lo mismo, el tener una distribución homogénea para todos los años $X_{tj} \sim Exp(x|\lambda)$ no sirve mucho pues el análisis de los datos nos revela que la media va cambiando con el tiempo.

2. Gráfica de verosimilitud

La verosimilitud para (θ, λ) dados los `datos` queda expresada como,

$$
\begin{aligned}
lik(\theta, \lambda|\text{datos}) &= p(n_{2005}, (x_{2005,i})_{i=1}^{n_{2005}}, n_{2006}, (x_{2006,i})_{i=1}^{n_{2006}}, n_{2007}, (x_{2007,i})_{i=1}^{n_{2007}}|\theta, \lambda) \\
&= \prod_{t=2005}^{2007} p(n_t, (x_{t,i})_{i=1}^{n_t}|\theta, \lambda) \\
&= \prod_{t=2005}^{2007} \text{Bin}(n_t|J_t, \theta) \times \prod_{t=2005}^{2007} \prod_{i=1}^{n_t} \text{Exp}(x_{t,i}|\lambda) \\
&= lik\left(\theta|(J_t, n_t)_{t=2005}^{2007}\right) \times lik\left(\lambda|(x_{t,i})_{t=2005,i=1}^{2007,n_t}\right).
\end{aligned}
$$

Como vimos en clase, los parámetros de máxima verosimilitud que maximizan $lik(\theta, \lambda|\{datos\})$ son aquellos que maximizan su respectiva parte marginal. Es decir, usraemos $\hat{\theta}$ que maximiza $lik1(\theta|\{datos\})$ y $\hat{\lambda}$ que maximiza $lik2(\lambda|\{datos\})$. Así la log-verosimilitud queda $log[like(\theta, \lambda|\{datos\})] = log[lik1(\theta|\{datos\})] + log[lik2(\lambda|\{datos\})]$.

Primero vemos la maximización marginal para $\hat{\theta}$.

```
theta_grid <- seq(0,1,0.01)
if(!require('lattice')){install.packages("lattice")}
```

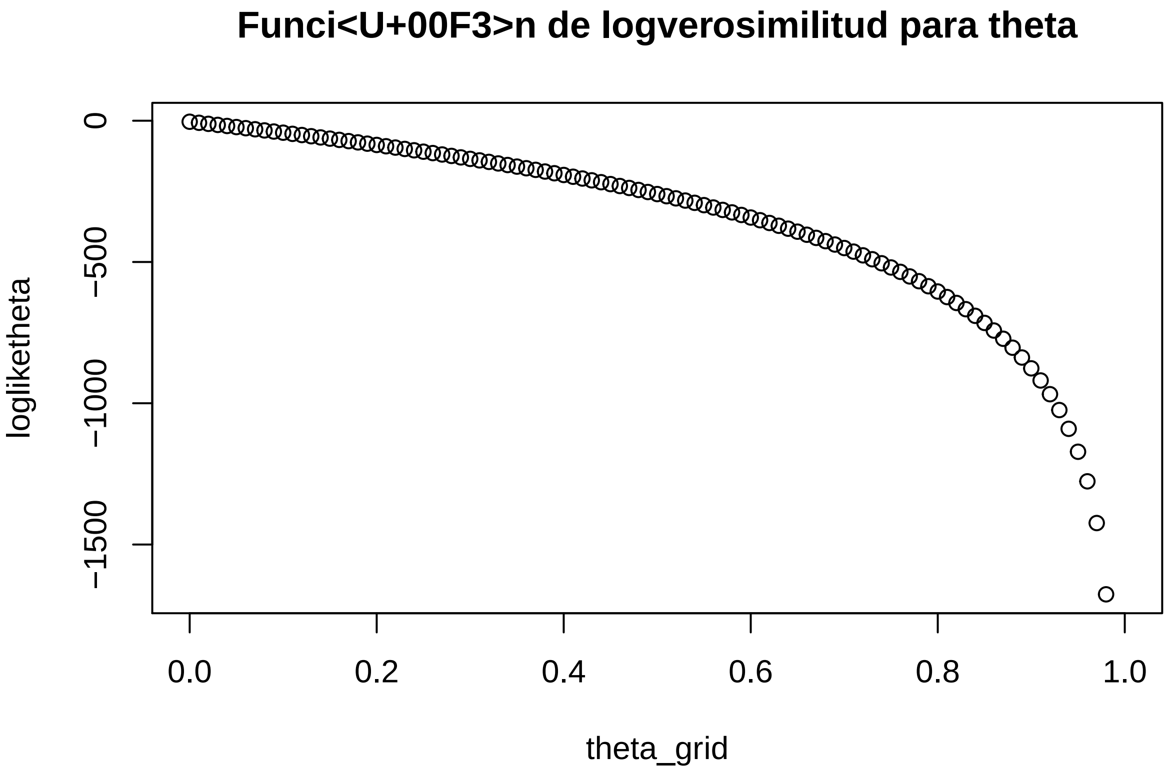
```
## Loading required package: lattice
```

```
library("lattice")
data_n <- sum(data$iota);
data_J <- nrow(data);
theta <- data_n/data_J;
loglik1<- function(theta,data_n,data_J)
  {
  loglik.theta <- data_n*log(theta) + (data_J-data_n)*log(1-theta)
  loglik <- loglik.theta
  return(loglik)
}

logliketheta <- c();
logliketheta[0] <- loglik1(0.01,data_n,data_J)
for (i in 1:101)
{
    logliketheta[i] <- loglik1(0.01*i,data_n,data_J)
}
```

```
## Warning in log(1 - theta): NaNs produced
```

```
plot(theta_grid,logliketheta, main="Función de logverosimilitud para theta")
```



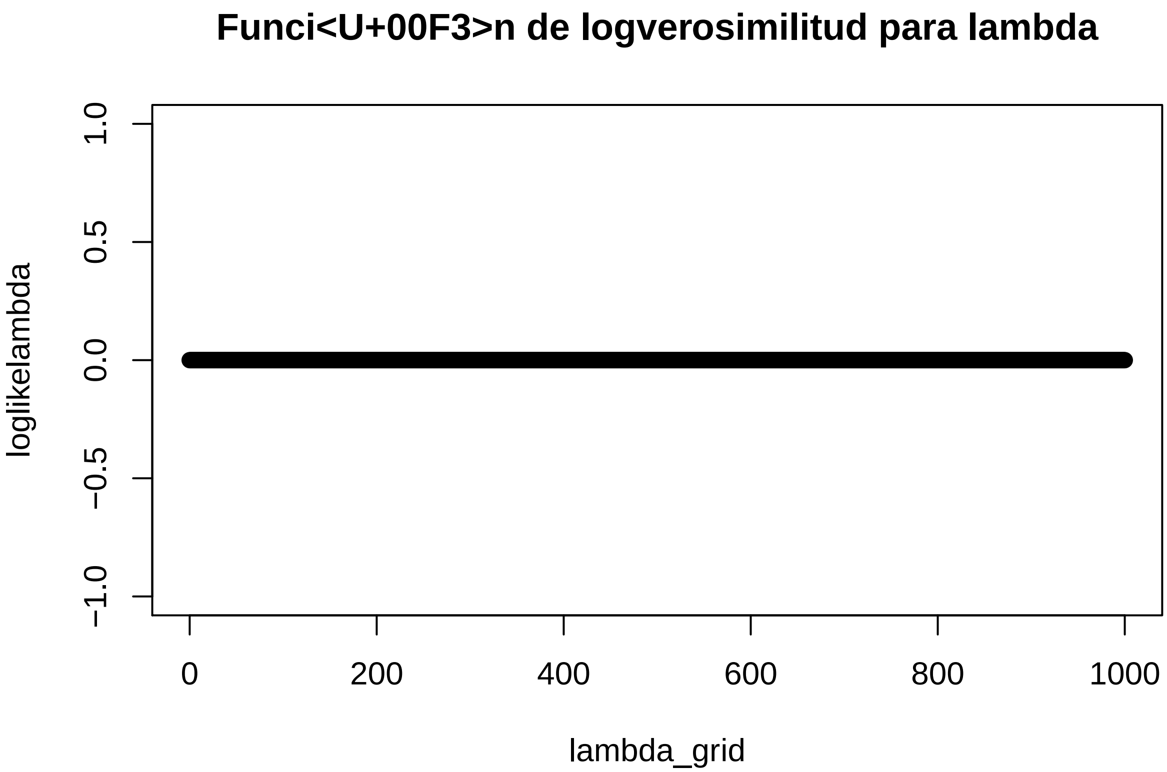
Ahora vemos la lamximización marginal para $\hat{\lambda}$.

```
lambda_grid <- seq(0,1000,1);
if(!require('lattice')){install.packages("lattice")}
library("lattice")
data_n <- sum(data$iota);
data_xsum <- sum(data[which(data$iota==1),"Claim_Amount"]);
lambda <- (data_xsum / data_n);
loglik2<- function(lambda,data_n,data_xsum){
```

```
  loglik.lambda <- data_n*log(lambda) -lambda*data_xsum
  loglik <- loglik.lambda
  return(loglik)
}

loglikelambda <- c();
loglikelambda[0] <- loglik2(1,data_n,data_xsum)
for (j in 1:1001)
{
    loglikelambda[j] <- loglik2(1*j,data_n,data_xsum)
}

plot(lambda_grid,loglikelambda, main="Función de logverosimilitud para lambda")
```



Ahora graficamos las curvas de nivel de la función de verosimilitud para el vector de parámetros (θ, λ).

```
theta_grid <- seq(0,1,0.01)
lambda_grid <- seq(0,1000,1)
if(!require('lattice')){install.packages("lattice")}
library("lattice")
data_n <- sum(data$iota)
data_J <- nrow(data)
data_xsum <- sum(data[which(data$iota==1),"Claim_Amount"])
theta <- data_n/data_J; lambda <- (data_xsum / data_n)
loglikelihood <- function(theta,lambda,data_n,data_J,data_xsum){
  loglik.theta <- data_n*log(theta) + (data_J-data_n)*log(1-theta)
  loglik.lambda <- data_n*log(lambda) -lambda*data_xsum
  loglik <- loglik.theta + loglik.lambda
  return(loglik)
}
```

```r
thetalambda_grid <- expand.grid( x = theta_grid, y = lambda_grid);
loglik_grid <- matrix(NaN,ncol=1,nrow=nrow(thetalambda_grid));
G <- nrow(thetalambda_grid);
loglik_grid[0] <- 0;
for(g in 1:G)
{
  loglik_grid[g] <- loglikelihood(thetalambda_grid[g,1],thetalambda_grid[g,2],data_n,data_J,data_xsum);
  if(loglik_grid[g]=="NaN"){loglik_grid[g] <-0}
  if(loglik_grid[g]=="-Inf"){loglik_grid[g] <- -999999999}
}

if(!require('plot3D')){install.packages("plot3D")}
```

```
## Loading required package: plot3D
```

```r
library("plot3D")

# scatter3D(thetalambda_grid[,1], thetalambda_grid[,2], loglik_grid,
#           pch = 18, cex = 2,
#           theta = 20, phi = 20, ticktype = "detailed",
#           xlab = "theta", ylab = "lambda", zlab = "log-lik",
#           surf = list(x = thetalambda_grid[,1], y = thetalambda_grid[,2], z = loglik_grid,
#                       facets = NA, fit = fitpoints), main = "")

# Sale un error: object 'fitpoints' not found por lo que no se grafica
# la relación entre thetalambda_grid y loglik_grid.
```

3. Estimadores de máxima verosimilitud

Los supuestos de homogeneidad e independencia estocástica son los que permiten el cálculo por separado de los estimadores de máxima verosimilitud para el vector (θ, λ). De romper con el supeusto de homogeneidad aún podríamos calcular estos estimadores máximo verosímiles por separado, sólo que nos quedarán en "pedazos homogéneos" (partes que tengan una misma distribución). Mas si rompemos con el supeusto de independencia estocástica entonces ya no sería posible calcular estos estimaodres de manera separada pues la función de verosimilitud conjunta no se podría separa en un producto de funciones de verosimilitud marginales.