Tarea 2 Gabriel Mauricio Moreno. 148938.

• $N = \sum_{i}^{q} N_j$ se distribuyen Poisson , $N \sim$ tiene tasa de intensidad $\lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$

Agregación. Sabemos que si $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, donde $f_{X_i}(x_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{x_i}}{x_i!}$

y función generadora de Momentos $M_{X_i}(t) = e^{\lambda_i [e^t - 1]}$

Sea $\{X_{(n)}\}$ una colección de v.a poisson independientes donde cada x_i tiene una tasa λ_i

$$\Rightarrow M_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(t) = M_{x_1}(t) \cdot M_{x_2}(t) \cdots M_{x_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t)$$

, por la independencia de las X_i

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i [e^t - 1]}$$

$$= e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i [e^t - 1]}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)[e^t - 1]}$$

y por la unicidad de la fn generadora de Momentos

$$\Rightarrow$$

$$\therefore \left(\sum x_i \sim Poisson\left(\sum \lambda_i\right)\right)$$

Desagregación sup. $X_{(n)} \sim Poisson(\lambda)$, y consideremos q los eventos pueden clasificarse en n tipos distintos indep con $p_1, \dots, p_n$

- X_i's son los núm de eventos en cada clase., son mutuamente independientes.

+ Dem que cada ~~...~~ $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, con $\lambda_i = p_i \lambda$ (#)

Suponemos que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$\Rightarrow$ Sea $X_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (*)

$\Rightarrow$ $X_{(n)} \sim Poisson((1)\lambda)$

$\Rightarrow$ $X_{(n)} \sim Poisson[\sum_{i=1}^{n} p_i \lambda]$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson\left[\sum_{i=1}^{n} (p_i \lambda)\right]$, Por (*)

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i]$, Por (#)

$\therefore$ Por la propiedad de Agregación sabemos que cada
$X_i \sim Poisson(\lambda_i)$

3) Realiza el Calculo analitico para demostrar la identidad de la distribución binomial negativa como mezcla de Poisson-gamma

Tenemos que $N|X \sim Poisson(n|x)$ y $X \sim Gama(x|\lambda, \alpha)$

Veamos como se distribuye N

$$\Rightarrow P(N=n) = \int_0^\infty P_o(n|x)\, Ga(x|\lambda,\alpha)\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^n}{n!} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\lambda \lambda^{\alpha-1}}{n!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x} e^{-\lambda x} x^n x^{\alpha-1}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{n!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+1)x} x^{n+\alpha-1}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\lambda^\alpha}{n!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{(\lambda+1)}{(\lambda+1)} e^{-(\lambda+1)x} \frac{(\lambda+1)^{(n+\alpha)-1} x^{(n+\alpha)-1}}{\Gamma(n+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(\lambda+1)^{(n+\alpha)-1}}\, dx$$

(*) completamos una nueva gama.

$$\Rightarrow \quad = \frac{\lambda^\alpha}{n!\,\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(\lambda+1)(\lambda+1)^{n+\alpha-1}} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda+1) e^{-(\lambda+1)x} \frac{[(\lambda+1)x]^{(n+\alpha)-1}}{\Gamma(n+\alpha)}\, dx}_{\to 1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+1)^{n+\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^n$$

si $P = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}$ y $(1-P) = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+1} = \dfrac{1}{\lambda+1}$

$N \sim BinNegativa(n|\alpha)$, donde $f_N(n) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} p^\alpha (1-p)^n$.

donde.