ACT-11302 Cálculo Actuarial III **Nombre:** Fabrizzio Pérez Aceituno
Primavera 2019 **C.U.:** 156165
Tarea 02-a **12/Feb/2018**
Fecha de entrega: 19/Feb/2019

Consideren las notas del martes 12 de febrero de 2019.

1. **Demuestren las propiedades de agregación y desagregación de la distribución Poisson.**

Agregación: Sean $N_1, N_2, \ldots, N_q$ variables aleatorias independientes distribuidas Poisson ($N_j = n_j \mid \lambda_j$), demostrar que $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ ~ Poisson (N|λ) en donde $\lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$:

Usando la función generadora de momentos, dada por $M_x(t) = exp\{\lambda(e^t - 1)\}$ obtenemos que:

$$M_N(t) = E[e^{tN}] = E\left[e^{t\left(\sum_{j=1}^{q} N_j\right)}\right] = E\left[e^{t(N_1+N_2+\cdots+N_q)}\right] = E[e^{tN_1} * e^{tN_2} * \ldots * e^{tN_q}]$$

Entonces, como las variables aleatorias son independientes podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$E[e^{tN_1} * e^{tN_2} * \ldots * e^{tN_q}] = E[e^{tN_1}] * E[e^{tN_2}] * \ldots * E[e^{tN_q}] = \prod_{j=1}^{q} E[e^{tN_j}] = \prod_{j=1}^{q} M_{N_j}(t)$$

$$= exp\{\lambda_1(e^t - 1)\} * exp\{\lambda_2(e^t - 1)\} * \ldots * exp\{\lambda_q(e^t - 1)\} = exp\left\{\sum_{j=1}^{q} \lambda_j\,(e^t - 1)\right\}$$

$$= \boxed{exp\{\lambda(e^t - 1)\}}$$

∴ Por la forma de la f.g.m de N, podemos concluir que $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ ~ Poisson (N| λ)

Desagregación: Suponer que N ~ Poisson (N|λ) con λ >0 y también supongamos que podemos clasificar los eventos en m tipos distintos e independientes, cada uno con probabilidad $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Demostrar que cada N_j~ Poisson ($n|\lambda_j$) con $\lambda_j = p_j * \lambda$

Tenemos que la distribución de ($N_1, \ldots, N_m$) condicionada a que N=n corresponde a una distribución Multinomial (($n_1, \ldots, n_m$) | n, $\theta_1, \ldots, \theta_m$).

Derivado del resultado anterior, la distribución marginal para cada una de las N_m condicionadas en N=n corresponde a una distribución Binomial ($n_m \mid n, \theta_m$) para m=1, 2, ..., M. Entonces, tenemos que:

$$E(N_m|N = n) = E_{Bin}(N_m|n, \theta m) = \boxed{n * \theta_m}$$

Ahora, obtenemos la marginal respecto a N para las N_m:

$$P(N_m = n_m) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_m = n_m, N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_m = n_m | N = n) * P(N = n)$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} Bin(n_m | n, \theta\mathrm{m}) * Poisson(n|\lambda)}$$

De donde obtenemos que $E(N_m) = \lambda*\theta_m$.

Por lo tanto, lo único que nos queda es demostrar que la distribución marginal de las N_m se distribuye Poisson. Entonces, usando probabilidad total para $(N_1, \ldots, N_m)$:

$$P(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m | N = n) * P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{n_1! \ldots n_m!}\right) \theta_1^{n_1} * \ldots * \theta_m^{n_m} * \left(\frac{e^{-\lambda} * \lambda^n}{n!}\right) = \prod_{m=1}^{M} \frac{e^{-\lambda*\theta_m} * (\lambda * \theta_m)^{n_m}}{n_m!}$$

$$\boxed{= \prod_{m=1}^{M} Poisson(n_m | \lambda * \theta_m)}$$

Por lo tanto, concluimos que cada N_m sigue una distribución Poisson $(n_m|\lambda * \theta_m)$ en donde cada componente es mutuamente independiente de los otros.