Tarea #2

Diego García Santoyo 143659

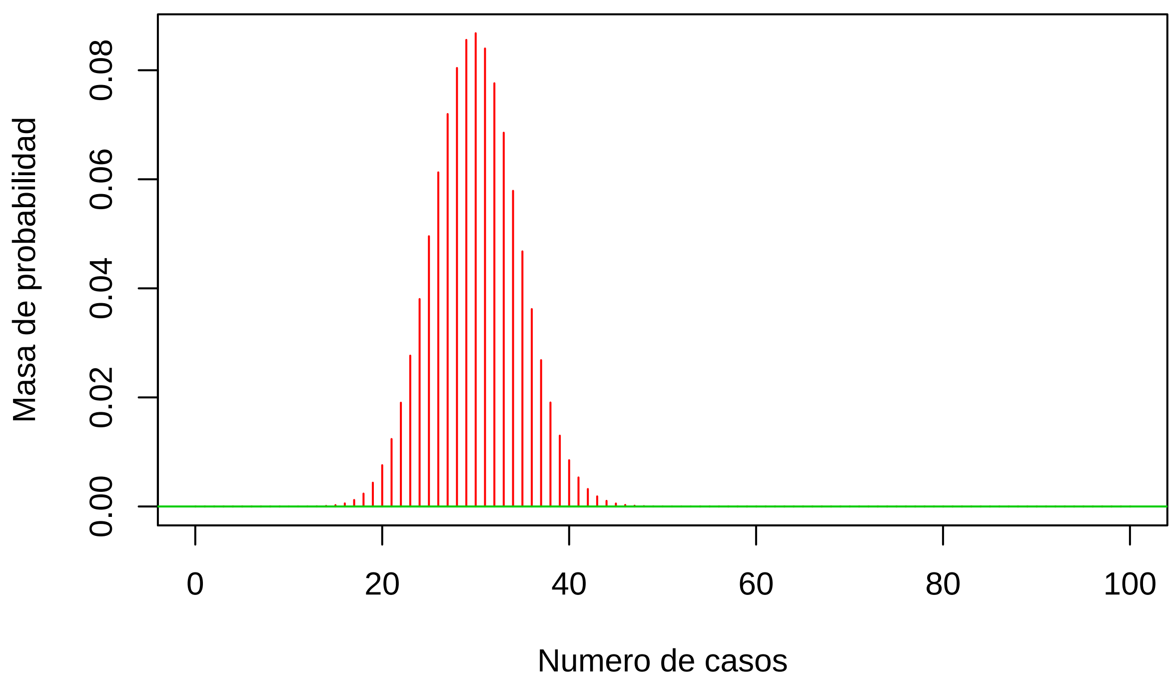
19/2/2019

1. Generación de la funcion BinNeg.Plot

Función Binomial

Primero se presentan los resultados de la función Binomial.Plot ya vistos anteriormente en el markdown

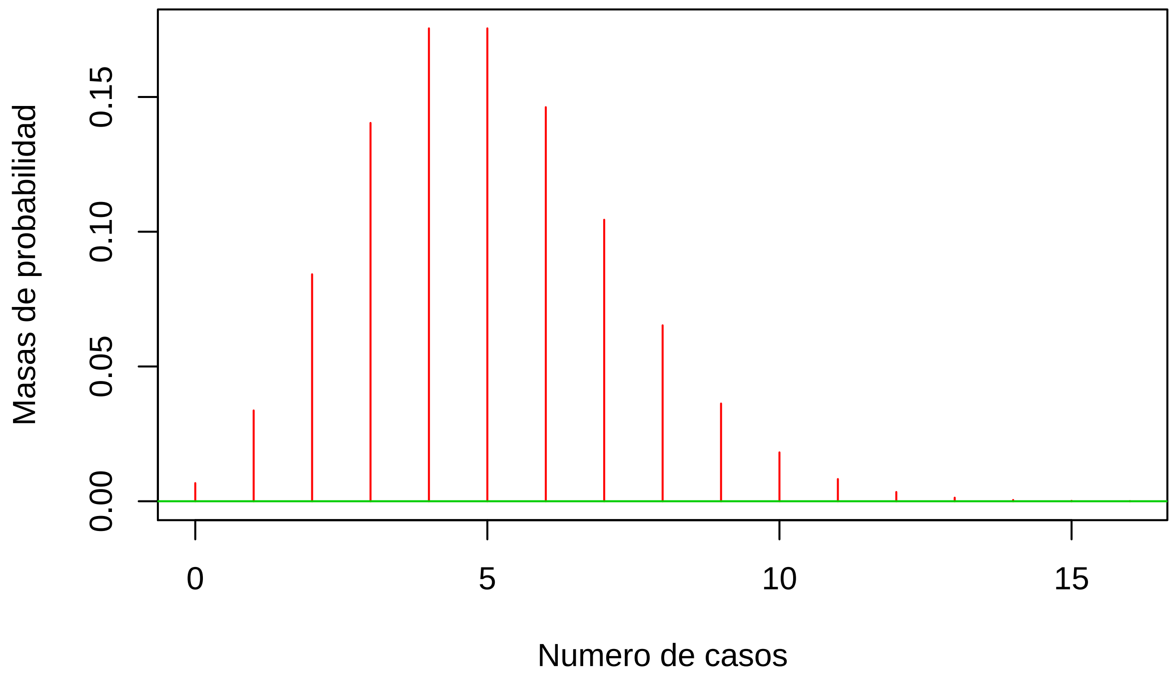
```
Binomial.Plot(100,0.3)
```



Función Poisson

Ahora se presentan los resultados de la función Poisson.Plot con λ=5

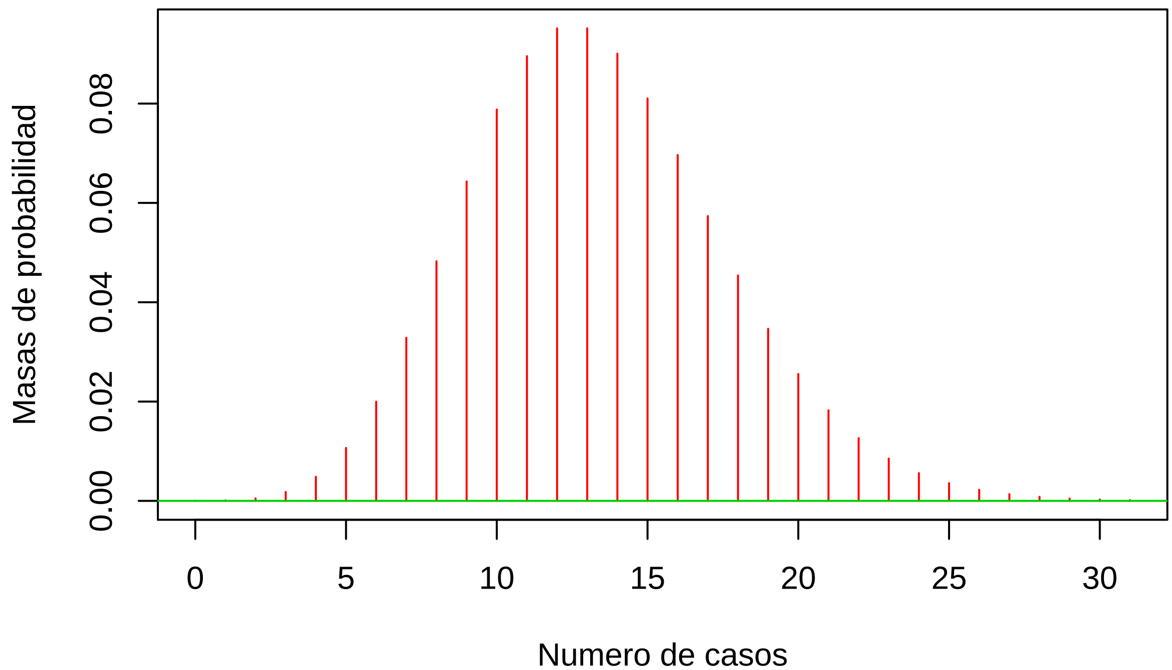
```
Poisson.Plot(5)
```



Función Binomial Negativa

Para finalizar se presenta la gráfica de la función Binomial Negativa usando la funcion BinNeg.Plot (modificación a partir de la Poisson.Plot)

```
BinNeg.Plot(40,0.75)
```



2. Agregación Poisson

Sean $X_1, ..., X_n$ v.a.independientes distribuidas $Pois(\lambda_i)$.

Sabemos que la fgm de una variable aleatoria $X \sim \ Pois(\lambda)$ es $\phi_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$.

Al ser independientes las n variables aleatorias, se tiene que la fgm de la suma de las n variables poisson es
$\phi_{X_1+X_2+...+X_n}(s) = \phi_{X_1}(s)\phi_{X_2}(s)...\phi_{X_n}(s) = e^{\lambda_1(s-1)}e^{\lambda_2(s-1)}...e^{\lambda_n(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)(s-1)}$
De donde se puede ver que $X_1 + ... + X_n \sim \ Pois(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$.

3. Distribución binomial-negativa como mezcla de poisson-gamma

Sean las siguientes v.a. $X_1 \sim Pois(n|\lambda)$ y $X_2 \sim Gam(\lambda|\alpha, \beta)$

Entonces tenemos que

$$P(N = n) = \int_0^\infty Pois(n|\lambda)Gam(\lambda|\alpha, \beta)d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \frac{\lambda^{\alpha-1}e^{\frac{-\lambda}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} d\lambda$$

$$= \frac{1}{n!\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{1+\frac{1}{\beta}}} d\lambda$$

$$= \frac{1}{n!\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{1+\frac{1}{\beta}}} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} \frac{(\frac{\beta}{\beta+1})^{n+\alpha}}{(\frac{\beta}{\beta+1})^{n+\alpha}} d\lambda$$

$$= (\frac{\beta}{\beta+1})^{n+\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n+\alpha-1} e^{\frac{-\lambda}{1+\frac{1}{\beta}}}}{\Gamma(n+\alpha)(\frac{\beta}{\beta+1})^{n+\alpha}}$$

Notar que el término $\int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n+\alpha-1} e^{\frac{-\lambda}{1+\frac{1}{\beta}}}}{\Gamma(n+\alpha)(\frac{\beta}{\beta+1})^{n+\alpha}}$ se va a 1 al ser una $Gam(n+\alpha, \frac{\beta}{\beta+1})$

$$= (\frac{\beta}{\beta+1})^{n+\alpha} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}$$

$$= \frac{\beta^{n}}{(\beta+1)^{n+\alpha}} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}$$

$$= (\frac{1}{\beta+1})^{\alpha} (\frac{\beta}{\beta+1})^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}$$

lo cual coincide con la funcion de probabilidad de una distribucion $BinNeg(\alpha, \frac{1}{\beta+1})$.