1º

155528
Fernando Martín

$\psi(u)$ cuando $X \sim Exp(x \mid 1/m)$ con $E(x) = m$

$F(x) = 1 - e^{-x/m}$. La cola $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-x/m}$

Entonces

$$F(x) = \frac{1}{m}\int_0^x \bar{F}(y)\,dx = \frac{1}{m}\int_0^x e^{-x/m}\,dy = -e^{-y/m}\Big|_0^x = 1 - e^{-x/m}$$

Si aplicamos convolución, sabemos que la suma de n variables aleatorias con distribución exponencial con parámetro m, se distribuye gamma con parámetros n y m.

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-x/m}\frac{(x/m)^k}{k!} \; ; \quad x > 0.$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{k=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} F^{n*}(u) = \frac{\rho}{1+\rho}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-u/m}\frac{(u/m)^k}{k!}\right)\right]$$

$$= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho}\left(\frac{1+\rho}{\rho(1+\rho)}\right) - \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-u/m}\frac{(u/m)^k}{k!}$$

$$= \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} - \frac{\rho}{1+\rho}e^{-u/m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u/m)^k}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}(1+\rho)^{-n} = 1 - \frac{\rho}{1+\rho}e^{-u/m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u/m)^k}{k!}\frac{1}{\rho(1+\rho)^k}$$

$$= 1 - \frac{1}{1+\rho}\exp\left(\frac{-u}{m} + \frac{u}{m(1+\rho)}\right) = 1 - \frac{1}{1+\rho}\exp\left[-\frac{u}{m}\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \psi(u) = \frac{1}{1+\rho}\exp\left(-\frac{\rho}{m(1+\rho)}u\right)$$

② Considera $F_X(x) = Pa(x|\alpha)$ $\quad f_X(x) = (1+x)^{-\alpha}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \quad \alpha > 0$

muestra que la integral no está definida

otra forma de definir a la pareto, la cual simplifica cálculos es:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{\alpha-1}} \quad x \geq 0,\ \alpha > 1.$$

$$F(x) = 1 - \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{\alpha}} \qquad \bar{F}(x) = \beta^{\alpha}(\beta+x)^{-\alpha} \quad x \geq 0 \ \alpha > 1$$

Ahora, se puede utilizar Cramér - Lündberg

$$\int_0^{\infty} e^{Rx}\bar{F}(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{Rx}\left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha} dx = \left[\frac{e^{Rx}\beta^{\alpha}}{R(\beta+x)^{\alpha}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{Rx}\alpha\beta^{\alpha}}{R(\beta+x)^{\alpha+1}} = \infty$$

En este caso no podemos estimar la probabilidad de ruina por la desigualdad de Cramér-Lundberg. Esto se debe a que la distribución Pareto pertenece a la clase de distribuciones subexponenciales.