

Consideren las notas del martes 12 de febrero de 2019.

1. Modifiquen la funcion `Poisson.Plot()` para crear la funcion `BinNeg.Plot()` para generar los resultados analogos de `Poisson.Plot()` y `Binomial.Plot()` incluidas en el markdown de esta presentacion.

```

1
2
3 BinNeg.Plot <- function(successes,proba, a=NA,b=NA,calcProb=(!is.na(a) | !is.na(b)),quantile=NA,calcquant=!is.na(quantile)) {
4   # Binomial Negativa
5   sd = sqrt((successes*(1-proba))/(proba^2))
6   low = max(0,round(((successes*(1-proba))/(proba)) - (5*sd)))
7   high = round(((successes*(1-proba))/(proba)) + (5*sd))
8   values = low:high
9   probs = dnbinom(values,successes,proba)
10  plot(c(low,high), c(0,max(probs)), type = "n",
11       xlab = "Numero de casos",
12       ylab = "Masas de probabilidad",
13       main = "")
14  lines(values, probs, type = "h", col = 2)
15  abline(h=0,col=3)
16  if(calcProb) {
17    if(is.na(a)) { a = 0 }
18    if(is.na(b)) {
19      a = round(a)
20      prob = 1-pnbinom(a-1,successes,proba)
21      title(paste("P(",a," <= Y ) = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
22      u = seq(max(c(a,low)),high,by=1)
23    }
24  } else {
25    if(a > b) {d = a; a = b; b = d;}
26    a = round(a); b = round(b)
27    prob = pnbinom(b,successes,proba) - pnbinom(a-1,successes,proba)
28    title(paste("P(",a," <= N <= ",b," ) = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
29    u = seq(max(c(a,low)),min(c(b,high)),by=1)
30  }
31  v = dnbinom(u,successes,proba)
32  lines(u,v,type="h",col=4)
33 }
34 else if(calcquant==T) {
35   if(quantile < 0 || quantile > 1)
36     stop("El cuantil debe estar entre 0 y 1")
37   x = qnbinom(quantile,successes,proba)
38   title(paste("",quantile," quantile = ",x,sep=""),line=0,col.main=4)
39   u = 0:x
40   v = dnbinom(u,successes,proba)
41   lines(u,v,type="h",col=4)
42 }
43 return(invisible())
44 }
45

```

2. Demuestren las propiedades de agregación y desagregación de la distribución Poisson.

### a) Agregación

$N_1, \dots, N_q$  variables aleatorias independientes con distribución Poisson,  $P(N_j = n_j | \lambda_j)$

$$* N = \sum_{j=1}^q N_j \quad y \quad N \sim \text{Poisson}$$

$$+ N \text{ tiene } \lambda = \sum_{j=1}^q \lambda_j \Rightarrow \lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q}$$

Señalen que la generadora de momentos de una Poisson es:

$$M_N(t) = \exp \{ \lambda (e^t - 1) \}$$

¿Cuál es  $F(x)$ ?

$$M_N(t) = \exp [ \lambda (e^t - 1) ]$$

$$\Rightarrow M_N(t) = M_{N_1}(t) \cdot M_{N_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{N_q}(t)$$

$$= e \left[ \lambda \left( \frac{\lambda_1}{\lambda} M_{N_1}(1) + \frac{\lambda_2}{\lambda} M_{N_2}(2) + \dots + \frac{\lambda_q}{\lambda} M_{N_q}(q) - 1 \right) \right]$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} F_2(x) + \dots + \frac{\lambda_q}{\lambda} F_q(x)$$

### b) Desagregación

3. Realicen el cálculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial negativa como mezcla de poisson-gamma

$$N | \lambda \sim \text{Po}(n | \lambda) \quad \text{donde} \quad \lambda \sim \text{Gamma}(\lambda | a, b)$$

P.D. que  $P(N=n) = \int_0^{\infty} p_0(n | \lambda) \text{Gamma}(\lambda | a, b) d\lambda$

$$\Rightarrow P(N=n) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \frac{\lambda^{a-1} e^{-\lambda/b}}{\Gamma(a) b^a} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \frac{1}{\Gamma(a)} \left( \frac{\lambda}{b} \right)^{a-1} e^{-\frac{\lambda}{b}} \cdot \frac{1}{b} d\lambda$$

$$= \frac{1}{x! \Gamma(a) b^a} \int_0^{\infty} \lambda^{x+a-1} e^{-\lambda(1+1/b)} d\lambda$$

$$= \frac{1}{x! \Gamma(a) b^a} \left( \frac{b}{b+1} \right)^{x+a} \int_0^{\infty} (\lambda(1+1/b))^{x+a-1} e^{-\lambda(1+1/b)} (1+1/b) d\lambda$$

$$= \frac{1}{x! \Gamma(a) b^a} \left( \frac{b}{b+1} \right)^{x+a} \int_0^{\infty} u^{x+a-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\Gamma(x+a)}{x! \Gamma(a) b^a} \left( \frac{b}{b+1} \right)^{x+a}$$

$$= \frac{\Gamma(x+a)}{x! \Gamma(a)} \left( \frac{1}{b+1} \right)^a \left( \frac{b}{b+1} \right)^x \quad [\text{esto ya es una binomial negativa}]$$

\* con  $p = \frac{1}{b+1}$  y  $q = \frac{b}{b+1}$