Agregación

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. independientes que se distribuyen Poisson con parametro λ_i $i = 1, 2, \dots, n$

La función generadora de momentos de una Poisson es: $\mu_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}$

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ independientes

entonces
$$\mu_{X_1+X_2 \dots +X_n}(t) = \mu_{X_1}(t) \cdot \mu_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot \mu_{X_n}(t)$$
$$= e^{\lambda_1(e^t-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t-1)} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n(e^t-1)}$$
$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \dots + \lambda_n)(e^t-1)}$$

$\Rightarrow (X_1 + X_2 + \dots X_n) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$

ya que la función generadora de momentos es única. $\blacksquare$

Desagregación

$N \sim Poisson(n|\lambda)$ $\lambda > 0$, tenemos que lose ventos se pueden clasificar en m tipos con probabilidades $p_1, \dots, p_m$. donde $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$.

$$N \sim Po(n | \lambda \cdot 1) = Po(n | \lambda \sum_{i=1}^{m} p_i)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} N_i \sim Po(n | \sum \lambda_i)$$

$$\Rightarrow N = \sum N_i \iff \lambda_i = p_i \lambda$$ con N_i indep.

3) Realiza el calculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial negativa como mezcla de Poisson - Gamma.

Tenemos que $N|X \sim Poisson(n|x)$ y $X \sim Gamma(x|\lambda,\alpha)$

Veamos como se distribuyen N

$$\Rightarrow \mathbb{P}(N=n) = \int_0^\infty P_o(n|x)\, Ga(x|\lambda,\alpha)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^n}{n!} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, d\alpha$$

$$\Rightarrow = \frac{\lambda \lambda^{\alpha-1}}{n!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x} e^{-\lambda x} x^n x^{\alpha-1}\, dx = \frac{\lambda^\alpha}{n!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+1)x} x^{n+\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{n!\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\lambda+1}{\lambda+1} e^{-(\lambda+1)x} \frac{(\lambda+1)^{n+\alpha-1} x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(\lambda+1)^{n+\alpha-1}}\, dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{n!\,\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(\lambda+1)(\lambda+1)^{n+\alpha-1}} \underbrace{\cancel{\int_0^\infty (\lambda+1) e^{-(\lambda+1)x} \frac{[(\lambda+1)x]^{(n+\alpha)-1}}{\Gamma(n+\alpha)}\, dx}}_{\to 1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda+1)^{n+\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^n$$

si $p = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ y $(1-p) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{1}{\lambda+1}$

$\therefore$ $N \sim BinNegativa(n|\alpha)$,

donde $f_N(n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)} p^\alpha (1-p)^n$.