ACT-11302 Calculo Actuarial III

Sesion 08 - Modificacion de distribuciones para la frecuencia de siniestros 1/

Juan Carlos Martinez-Ovando

Departamento Academico de Actuaria y Seguros

Objetivos

- Estudiaremos la nocion de modificacion de distribuciones
- Revisaremos aspectos inferenciales asociados con esta modificaciones

Frecuencia de Siniestros

Recordemos que N_t denota el numero de siniestros de un periodo de operacion t. Usualmente concebimos el soporte de N_t de dos formas:

1. **Riesgo individual.**- Suponiendo que cada poliza puede siniestrarse a lo mas una vez en t, tenemos un **soporte finito**
$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots, J_t\}.$$
2. **Riesgo colectivo.**- Suponiendo que cada poliza puede siniestrarse mas de una vez en t, tenemos un **soporte numerable**
$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Masas de probabilidades

En ambos enfoques para $\mathcal{N}$ tenemos un conjunto de *masas de probabilidades*,

$$(p_n)_{n\in\mathcal{N}},$$

donde

$$p_n := \mathbb{P}(N_t = n),$$

para todo $n \in \mathcal{N}$.

- El **modelo libre de supuestos estructurales** considera la coleccion de $(p_n)_{n\in\mathcal{N}}$ como **pamametros del modelo**.

Comentarios

- Si las $(p_n)_{n \in \mathcal{N}}$ (a.k.a. el **modelo de probabilidad**) pertenece a la clase $(a, b, 0)$, hemos visto que las p_ns siguen un patron especifico en n.
- En el caso anterior, se dice que **el modelo es parametrico**, en cuyo caso se remplaza el numero de parametros libres $\#\{\mathcal{N}\}$ por **tres parametros (a lo mas)**, (p_0, a, b).

Lo anterior resulta en una simplificacion estructural considerable.

En ocasiones, necesitaremos definir cambios/alteraciones en las masas de probabilidad asignadas por las p_ns. Estas alteraciones se conocen como ***modificacion de distribuciones de probabilidad***

Definicion

La **modificacion de distribuciones** para la *frecuencia de siniestros* consiste en definir un mapeo,

$$(p_n)_{n\in\mathcal{N}} \to (q_n)_{n\in\mathcal{M}}$$

donde $(q_n)_{n\in\mathcal{M}}$ define una nueva coleccion de masas de probabiliad.

Observaciones

- La modificar las masas de probabilidad, reasignamos probabilidades a eventos semejantes.
- La modificacion puede implicar un *cambio en el soporte* (particularmente inducido cuando algunas p_ns se colapsas a cero).
- La modificacion puede romper/alterar los patrones recursivos de las p_ns originales.

Distribuciones 0 modificadas 1/

Un tipo de modificacioes ampliamente usada en ciencias actuariales es la modificacion en 0, i.e. se modifican las p_ns para garantizar que

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = q_0,$$

con $0 < q_0 < 1$ un valor o parametro arbitrario.

- Esto es util para modelar la frecuencia de siniestros de datos tipo 'AllState', por ejemplo.

Los nuevos $(q_n)_{n \in \mathcal{M}}$ deben ser masas de probabilidad, por lo que es necesario que tomen valores en el **simplejo** $\#\mathcal{M}$-dimensional, i.e.

1. $q_n > 0$ para todo $n \in \mathcal{M}$
2. $\sum_{n \in \mathcal{M}} q_n = 1$.

Distribuciones 0 modificadas 2/

Siguiendo con la mododificacion en 0, teniendo el primer elemento mapeado

$$p_0 \to q_0,$$

procede ahora definir el mapeo para $n \geq 1$.
En este caso, necesitamos distribuir el peso restante $(1 - q_0)$ en la estructura de masas de probabilidad de las p_ns originales.
¿Como hacer eso?

Condicionando y reescalando...

Distribuciones 0 modificadas 3/

1. Condicionamos respecto a la parte del soporte que no es modificada, i.e.

$$\frac{\mathbb{P}(N_t = n)}{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)} = \frac{p_n}{1 - p_0},$$

   para $n \geq 1$, i.e. $\sum_{n \geq 1} \frac{p_n}{1-p_0} = 1$.
2. Reescalamos respecto a la probabilidad modificada restante, i.e. definimos

$$\mathbb{Q}(N_t = n) = (1 - q_0)\frac{p_n}{1 - p_0},$$

   para $n \geq 1$.

Distribuciones 0 modificadas 4/

De esta forma, las masas de probabilidades originales,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = p_n,$$

para $n \in \mathcal{N}$, se modifican para las **nuevas** masas de probabilidades,

$$\mathbb{Q}(N_t = n) = q_n,$$

para $n \in \mathcal{M}$.

- Si $q_0 \neq 0$, la modificacion anterior implica que $\mathcal{N} = \mathcal{M}$.

Clase $(a, b, 1)$

La clase de distribuciones $(a, b, 0)$ puede **modificarse** para la clase $(a, b, 1)$, en cuyo caso

$$\mathbb{Q}(N_t = 0) = 0,$$

con

$$0 < q_1 < 1,$$

valor inicial de la recursion, y

$$q_n = q_{n-1}\left(a + \frac{b}{n}\right),$$

para todo $n \geq 2$.

- En este caso, el soporte $\mathcal{N}$ queda **modificado** a $\mathcal{M} = \mathcal{N} \setminus \{0\}$.

Verosimilitud

En todos los casos estudiados para la frecuencia de siniestros, la identificacion del **modelo especifico** (o **modelos diferenciados**) compatibles con un conjunto de `datos`, desacansara en la *funcion de verosimilitud*.
Si $n_1, n_2, \ldots, n_{t-1}$ representan un conjunto de frecuencias de siniestros para $(t-1)$ periodos pasados del modelo, la funcion de verosimilitud para $(p_n)_{n\in\mathcal{N}}$ (caso del modelo sin restricciones), es de la forma

$$lik\left((p_n)_{n\in\mathcal{N}} | n_1, n_2, \ldots, n_{t-1}\right) = p_{n_1} p_{n_2} \cdots p_{n_{t-1}},$$

en cuso caso es posible derivar que el modelo mas compatible con los datos consistiria en el **modelo estimado**,

$$\hat{p}_{n_j} = \frac{n_j}{\sum_{i=1}^{t-1} n_i},$$

para todo $n_j \in \{n_1, n_2, \ldots, n_{t-1}\}$, y

$$\hat{p}_n = 0,$$

para todo $n \notin \{n_1, n_2, \ldots, n_{t-1}\}$.

Comentarios

- La razon por la cual se adoptan modelos parametricos en la practica, es para prevenir tener estimadores de probabilidades `colapsados` a 0 como en el caso anterior.

Inferencia en modificaciones

Cuando se desee hacer inferencia en **modificacion de distribuciones**, $(q_n)_{n\mathcal{M}}$, inducidas por una alteracion de las $(p_n)_{n\in\mathcal{N}}$, podemos

1. Definir la *funcion de verosimilitud* para las $(p_n)_{n\in\mathcal{N}}$ originales, derivando los estimadores correspondientes $\hat{p}_n$s; y, entonces, definir

$$\hat{q}_n = q(\hat{p}_n),$$

   para $n\mathcal{M}$, con base en el mapeo de la modificacion.
2. Definir la funcion de verosimilitud para las $(q_n)_{n\mathcal{M}}$ directamente, y proceder inferencialmente.

Lecturas complementarias

- Klugman et al (2004) *Loss Model: From Data to Decisions*, Seccion 4.7.
- Panjer (2006) *Operational Risk Modeling Analytics*, Capitulo 5.

Table of Contents