ACT-11302 Calculo Actuarial III

Sesion 07 - Distribuciones para la frecuencia de siniestros 2/

Juan Carlos Martinez-Ovando

Departamento Academico de Actuaria y Seguros

Objetivos

- Estudiaremos algunas conexiones entre las distribuciones de frecuencias de siniestros.
- Estudiaremos aspectos de temporalidad en la especificacion de estas distribuciones.

Frecuencia de Siniestros

En esta seccion consideramos que estamos trabajando con la especificacion del **numero/frecuencia de siniestros**, N, donde

$$N = \sum_{j=1}^{J} \iota_j,$$

donde J es el tamanio de suscripcion del portafolio de seguros, y ι_j es el la indicadora de siniestros de la poliza j-esima.

En esta sesion prestaremos atencion a algunos modelos de probabilidad empleados para describir la incertidumbre entorno a N.

Posteriormente analizaremos la modelacion de las severidades/monto de siniestros individuales.

1. Distribucion binomial

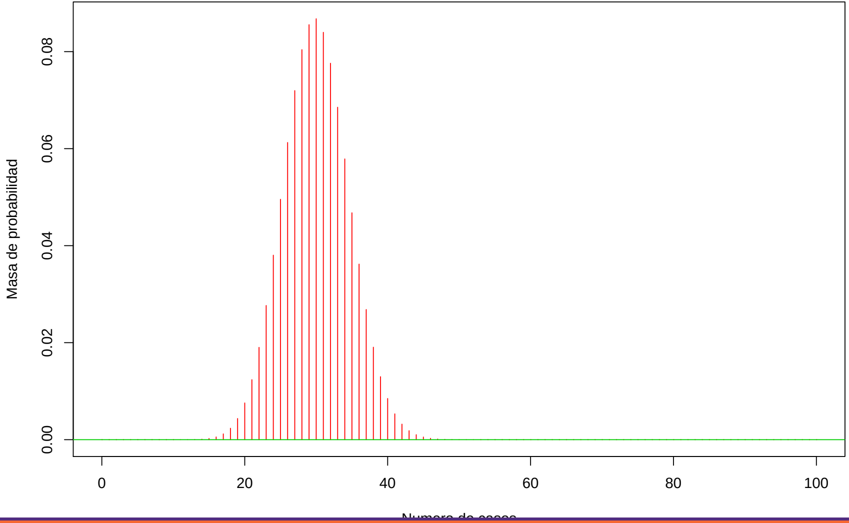
Se dice que N sigue una distribucion binomial, $Bin(n|J,\theta)$, cuando

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= J\theta \\
var(N) &= J\theta(1-\theta) \\
M_N(t) &= \left(\theta e^t + 1 - \theta\right)^J \\
P_N(t) &= (\theta t + 1 - \theta)^J .
\end{aligned}$$

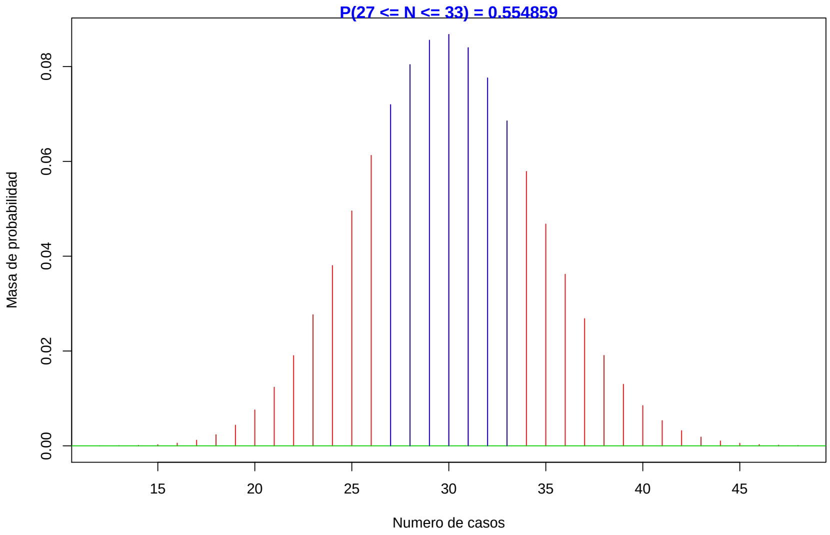
El parametro $0 < \theta < 1$ se interpreta como $\mathbb{P}(\text{siniestro})$ para cualquier poliza dentro del portafolio de seguros, referente al periodo de operacion.
La distribucion binomial se usa en el contexto donde cada poliza en el portafiolio puede producir solo un reclamo dentro del periodo de operacion.
Presupone que cada poliza puede siniestrase a lo mas solo una vez en el periodo de operaciones.

1. Binomial - Calculo y visualizacion

```
Binomial.Plot(100,.3)
```



```
Binomial.Plot(100,0.3,a=27,b=33,scale=T)
```



Revisen la funcion `Binomial.Plot()` en el `markdown` de esta presentacion.

2. Distribucion Poisson

La distribucion Poisson es quizas la distribucion de frecuencias de siniestros mas empleada en la practica y en la teoria.

Se dice que N se distribuye Poisson, $Po(n|\lambda)$ cuando,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \lambda \\
var(N) &= \lambda \\
M_N(t) &= \exp\left\{\lambda\left(e^t - 1\right)\right\} \\
P_N(t) &= \exp\left\{\lambda\left(t - 1\right)\right\},
\end{aligned}$$

donde λ es la tasa de intensidad de siniestros referente al periodo de operacion.

Al igual que la distribucion binomial negativa, esta distribucion se emplea en el caso donde cada poliza dentro del portafolio de seguros puede producir mas de un siniestro en el periodo de operacion.

Esta dsitribucion presupone que cada poliza puede siniestrarse mas de una vez en el periodo de operaciones.

2. Poisson - Calculo y visualizacion

Revisen la funcion `Poisson.Plot()` en el `markdown` de esta presentacion.

3. Distribucion binomial-negativa

Se dice que N tiene una distribucion binomial negativa, $BinNeg(n|r,\theta)$ si

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \frac{r(1-\theta)}{\theta} \\
var(N) &= \frac{r(1-\theta)}{\theta^2} \\
M_N(t) &= \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t}\right)^r \\
P_N(t) &= \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)t}\right)^r,
\end{aligned}
$$

para r entero positivo y $0 < \theta < 1$.
Esta distribucion se emplea en el caso de portafolios en los que cada polia puede producir mas de un reclamo dentro del periodo de operacion.
Esta dsitribucion presupone que cada poliza puede siniestrarse mas de una vez en el periodo de operaciones.

3. Binomial negativa - Calculo y visualizacion

Modifiquen la funcion `Poisson.Plot()` para crear la funcion `BinNeg.Plot()` para generar los resultados analogos de `Poisson.Plot()` y `Binomial.Plot()` incluidas en el `markdown` de esta presentacion.

Definicion

Las distribuciones `binomial`, `Poisson` y `binomial negativa` pueden expresarse como una clase de distribuciones mas general, con *decrementos exponenciales o tasas de cambio lineal* en las $(p_n)_{n\in\mathcal{N}}$. Esta clase es conocida como la **clase** $(a, b, 0)$.

Las masas de probabilidades, $\Pr(N = n) = p_n$, en esta clase se definien de **manera recursiva**, como

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a + \frac{b}{n},$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

El valor

$$p_0 := \Pr(N = 0)$$

se define como un parametro adicional inicial.

Soporte

El **soporte** de las distribuciones (α, β), para $\mathcal{N}$, es tipicamente un subconjunto de los enteros positivos, i.e.

$$\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Sin embargo, puede definirse tambien sobre **latices**, que son soportes

$$\mathcal{K} = \{kn : n \in \mathcal{N}\},$$

para algun escalar k
Este se usa para definir **distribuciones de probabilidad sobre rangos** de variables –que es de utilidad para severidades individuales ranqueadas–.

Usos

El uso de las distribuciones $(\alpha, \beta, 0)$ se relaciona principalmente con las formulas de recursion (especificamente la recursion de Panjer) para calcular la distribucion de S, **monto agregado de distribuciones** (lo estudiaremos mas adelante).

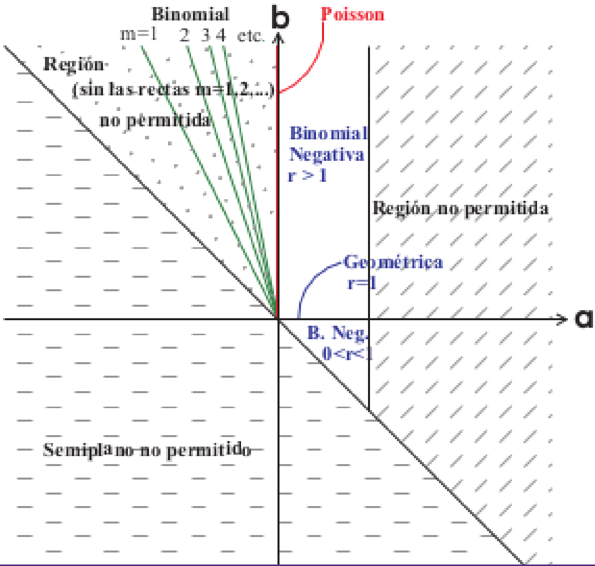
Relaciones

Los valores especificos de (α, β) y p_0 asociados con las distribuciones parametricas convencionales estan dados en la siguiente tabla.

Distribucion	p_0	α	β
$\mathrm{Po}(\cdot\|\lambda)$	$e^{-\lambda}$	0	λ
$\mathrm{BinNeg}(\cdot\|r,\theta)$	$(1+\theta)^{-r}$	$\frac{\theta}{1+\theta}$	$r\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$
$\mathrm{Bin}(\cdot\|J,\theta)$	$(1-\theta)^{J}$	$-\frac{\theta}{1-\theta}$	$(J+1)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$

El caso de la distribucion $\mathrm{Geo}(\cdot|\theta)$ se deriva directamente del caso correspodiente en la tabla anterior.

Parametrizacion



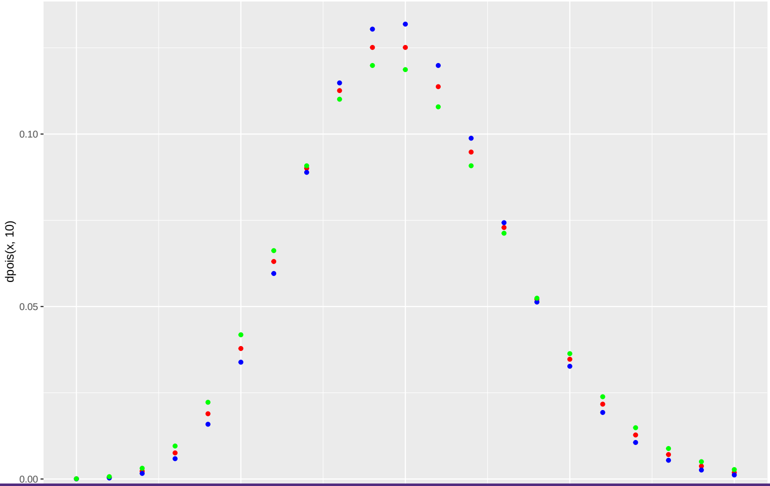
Calculo y visualizacion

Vean la funcion `aboclass()` en `R`.

```
ab0class <- function(alpha, beta, p0, K){
  ab0dist <- array(NA, dim=c(K+1,3))
  ab0dist[,1] <- seq(0:K)-1
  ab0dist[1,2] <- p0
  k <- 1
  for(k in 1:K){
    ab0dist[(k+1),2] <- as.numeric(ab0dist[k,2] %*% (alpha + beta/k))
    }
  ab0dist[,3] <- cumsum(ab0dist[,2])
  return(ab0dist)
  }
```

Comparativo

```
## Loading required package: ggplot2
## Warning: Ignoring unknown parameters: ylab, xlab
```

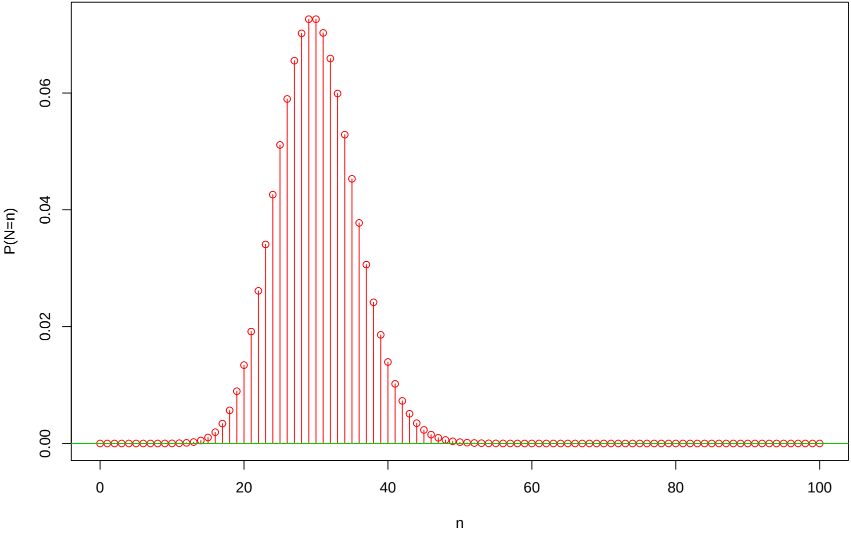


Comentarios

- En `azul` marcamos las masas de probabilidad de la `distribucion binomial`
- En `verde` marcamos las masas de probabilidad de la `distribucion binomial-negativa`
- En `rojo` marcamos las masas de probabilidad de la `distribucion Poisson`

Asi, vemos que la distribucion `binomial negativa` es la *mas dispersa*, la `binomial` la *menos dispersa*. La distribucion `Poisson` esta entre ambas.

Ejemplo: Poisson



Poisson: Agregacion/desagregacion

Agregacion: Supongamos que $N_1, \ldots, N_q$ son variables aleatorias independientes con distribucion Poisson, $\text{Po}(N_j = n_j | \lambda_j)$, respectivamente, con λ_js posiblemente diferentes. Se sigue,

- $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ se distribuye Poisson
- N tiene tasa de intensidad $\lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$

Desagregacion: Supongamos que $N \sim \text{Po}(n|\lambda)$, con $\lambda > 0$, y consideremos que los eventos pueden clasificarse en m tipos distintos independientes, con probabilidades $p_1, \ldots, p_m$. Se sigue,

- N_js, que son los numeros de eventos en cada clase, son mutuamente independientes
- Cada N_j tiene distribucion $\text{Po}(n|\lambda_j)$, con $\lambda_j = p_j \lambda$

Binomial-negativa: Representacion tipo mezcla

Un modelo bastante util en la practica representar la `distribucion binomial-negativa` como una *mezcla de una distribucion Poisson* respecto a una distribucion gamma, i.e.

$$N|\lambda \sim \mathrm{Po}(n|\lambda),$$

$$\lambda \sim \mathrm{Ga}(\lambda|a,b).$$

De esta forma,

$$P(N=n) = \int_0^\infty \mathrm{Po}(n|\lambda)\mathrm{Ga}(\lambda|a,b)d\lambda.$$

- Al representar la distribucion binomial negativa como una mezcla puede hacerse inferencia (bayesiana o frecuentista) de manera mas simple. Para esto, invocamos la nocion de *verosimilitud extendida*.

  Esta representacion es originada por una ***modificacion de la distribucion Poisson via mezclas.***

Tarea

1. Modifiquen la funcion `Poisson.Plot()` para crear la funcion `BinNeg.Plot()` para generar los resultados analogos de `Poisson.Plot()` y `Binomial.Plot()` incluidas en el markdown de esta presentacion.
2. Demuestren las propiedades de *agregacion* y *desagregacion* de la distribucion `Poisson`.
3. Realicen el calculo analitico para demostrar la identidad de la distribucion `binomial-negativa` como `mezcla de poisson-gamma`.

Fecha de entrega: **Martes 19 de febrero.**

Lecturas complementarias

- Klugman et al (2004) *Loss Model: From Data to Decisions*, Seccion 4.6.
- Panjer (2006) *Operational Risk Modeling Analytics*, Capitulo 5.

Table of Contents