Tarea 06

Victor Morales

11/04/2019

1. Calculo de probabilidad de ruina

Sea $X \sim Exp(x|\frac{1}{\mu})$. Calcular la probabilidad de ruina $\psi(\cdot)$ dado el capital inicial C_0. Utilizando la prima de riesgo Π_X bajo el prinicipio del valor esperado con un recargo ρ, tenemos:

$$\Pi_X = (1+\rho)E_{F_X}[X] = (1+\rho)\mu$$

Asi, bajo un enfoque de solvencia y suponiendo que tenemos suscrita tan solo la poliza X con siniestro, podemos defniir $\psi(\cdot)$ de la siguiente manera:

$$\psi(C_0) = \mathbb{P}[C_0 + \Pi_X - X > 0] = P[X - E_{F_X}(X) > C_0 + \rho E_{F_X}(X)]$$

Y por la desigualdad de Chebyshev, al definir $\beta = \frac{C_0+\rho\mu}{s.d.(X)} = \mu(C_0 + \rho\mu)$, tenemos que:

$$\psi(C_0) \leq \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\mu^2(C_0+\rho\mu)^2}$$

Asi, $\frac{1}{\beta^2}$ acota superiormente la probabilidad de ruina buscada $\psi(C_0)$ aunque de manera conservadora. El modelo de Cramer-Lundberg nos da una alternativa mas precisa.

Seguimos tomando $X \sim Exp(x|\frac{1}{\mu})$ como unica poliza en el portafolio, con siniestro. Definimos la prima de riesgo instantanea $\pi_X = (1+\rho)\mu$ y el **coeficiente de Lundberg** r si existe una solucion positiva para la siguiente ecuacion.

$$M_X(r) = 1 + (1+\rho)\mu r$$

Sustityendo $M_X(r) = (1-\mu r)^{-1}$ despejamos para r:

$$\begin{aligned}
(1-\mu r)^{-1} &= 1 + (1+\rho)\mu r \\
1 &= (1-\mu r) + (1+\rho)\mu r(1-\mu r) \\
0 &= -\mu r + (1+\rho)\mu r - (1+\rho)\mu^2 r^2 \\
0 &= \mu r[-1 + (1+\rho) - (1+\rho)\mu r] \\
0 &= -1 + (1+\rho) - (1+\rho)\mu r \\
0 &= \rho - (1+\rho)\mu r
\end{aligned}$$

Dados $\rho > 0$ y $\mu > 0$ despejamos para r y tenemos una solucion positiva:

$$r = \frac{\rho}{\mu + \rho\mu} > 0$$

Por lo que podemos definir la probabilidad de ruina $\psi(C_0)$ de la siguiente manera.

$$\psi(C_0) = \frac{exp(-\frac{\rho}{\mu+\rho\mu}C_0)}{E_{F_X}[exp(-\frac{\rho}{\mu+\rho\mu}C_T)|T < \infty]}$$

Dado que pudimos encontrar $r > 0$, entonces $E_{F_X}[exp(-\frac{\rho}{\mu+\rho\mu}C_T)|T < \infty] > 1$ y la probabilidad buscada $\psi(C_0)$ pertenece al intertvalo [0,1].

2. Modelo Cramer-Lundberg

Sea $F(x) \sim Pa(x|\alpha)$ con densidad $f(x) = (1+x)^{-\alpha}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x), \alpha > 0$. Demostrar que para valores positivos de α la integral $\int_{\mathbb{R}^+} exp(rx)f(x)dx = I$ no esta definida.

Para que la integral I est?? definida, se tiene que cumplir:

$$\frac{1 - F_X(x)}{exp(-rx)} \leq \mathbb{E}_{F_X}[exp(rX)] = M_X(r) \qquad (1)$$

Primero vemos el lado izquierdo. Sabemos que $F_X(x) = \frac{(1+x)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$.

$$\begin{aligned}\frac{1 - F_X}{exp(-rx)} &= \frac{1 - \frac{(1+x)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}}{exp(-rx)} \\ &= \frac{2 - \alpha - (1+x)^{1-\alpha}}{exp(-rx)(1-\alpha)}\end{aligned}$$

Ahora, el lado derecho $M_X(r)$.

$$\begin{aligned}M_X(r) &= \int_0^\infty exp(rX)F_X(dx) \\ &= \int_0^\infty exp(rX)\frac{(1+x)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^\infty exp(rX)(1+x)^{1-\alpha} - 1dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^\infty exp(rX)(1+x)^{1-\alpha}dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^\infty exp(rX)dx\end{aligned}$$

Aqui notamos que la integral $\int_0^\infty exp(rX)(1+x)^{1-\alpha}dx = \frac{exp(rx)}{r}|_0^\infty = \infty$ por lo que $M_X(r) > \infty$ y no se cumplira la condicion (1) por lo que la integral I no esta definida para los valores de α positivos.