# ACT-11302 Calculo Actuarial III

## Sesion 10 - Agregacion de Riesgos - Parte 1/4

Juan Carlos Martinez-Ovando

Departamento Academico de Actuaria y Seguros

**Supuesto**

Tradicionalmente se supone en cada periodo de tiempo $t$ los reclamos $X_{tj}$s son *independientes* y *homogeneos en distribucion* (i.i.d.), con distribucion marginal data por la distribucion tipo mezcla,

$$F_X(x) = \theta\delta_{\{0\}}(x) + (1-\theta)F_X^c(x),$$

donde

$$\theta = \mathbb{P}(\text{no siniestro})$$

y

$$F_X^c(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x | \text{siniestro}\right)$$

representa la parte continua de la distribucion, con soporte en $(0, \infty)$.

## Monto agregado

Asi, para el periodo de tiempo $t$, el monto agregado de reclamos del portafolio de tamano $J_t$ se define como

$$S_t = \sum_{j=1}^{J_t} X_{tj}.$$

Siendo que $J_t$ se considera como un parametro fijo en el modelo, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t) &= J_t\mathbb{E}(X) \\ var(S_t) &= J_t var(X),\end{aligned}$$

Denotando los primeros dos momentos de los montos individuales de siniestros como

$$\mu_X = \mathbb{E}\left(X|\text{siniestro}\right)$$

y

$$\sigma_X^2 = var\left(X|\text{siniestro}\right),$$

se obtiene una simplificacion de las ecuaciones enteriores.

Siendo las severidades individuales $X_{tj}$ variables aleatorias del tipo mixta, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= J_t(1-\theta)\mu_X \\ var(S_t) &= J_t\left(\mu_X^2\theta(1-\theta)+(1-\theta)\sigma_X^2\right). \end{aligned}$$

Aunque el calculo del primer y segundo momentos de $S_t$ es simple, **necesitamos** cuantificar la incertidumbre completa de $S_t$ a traves de su distribucion exacta,

$$F_{S_t}(s) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{J_t} X_{tj} \leq s\right),$$

inducida por $F_X(x)$.

## Procedimientos

Hemos visto que esta puede calcularse a traves del siguientes metodos:

1. Convolucion directa
2. Metodo de momentos
3. Simulacion estocastica
4. Aproximacion analitica
5. Recursion

# 1. Convoluciones

Supongamos que $(X_{tj})_{j=1}^{J_t}$ son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, con funcion de distribucion $F_X(x)$ y soporte en $\mathcal{X} = (0, \infty)$.

**Caso** $N = 2$

Consideremos el caso donde definimos

$$S_t = X_{t1} + X_{t2}.$$

De manera general, para soportes de $\mathcal{X}$en $\Re$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_t \leq s) &= \mathbb{P}(X_{t1} + X_{t2} \leq s) \\
&= \int_{\mathcal{X}} \mathbb{P}(X_{t1} + X_{t2} \leq s | X_{t2} = x)\mathbb{P}(X_{t2} \in dx) \\
&= \int_{\mathcal{X}} F_X(s - x)F_X(dx) \\
&= \int_{\mathcal{X}} F_X(s - x)f_X(x)dx \\
&= F_X * F_X(s) \\
&= F_X^{*(2)}(s). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $X$ tiene soporte en $(0,\infty)$, entonces $F_X(x)$ est'a determinada por la funci'on indicadora $\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, mientras que $F_X(s-x)$ estar'a determinada por $\mathbb{I}_{(0,\infty)}(s-x)$, en cuyo caso la integral (1) se convierte en,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t \leq s) &= \mathbb{P}(X_{t1} + X_{t2} \leq s) \\ &= \int_0^s F_X(s-x) f_X(x) dx \\ &= F_X * F_X(s) \\ &= F_X^{*(2)}(s). \end{aligned} \tag{2}$$

Siguiendo lo anterior se tiene que en el *ejemplo* donde $X_{t1}$ y $X_{t2}$ son variables aleatorias i.i.d. con distribucion marginal $\mathrm{Exp}(x|\theta)$, con $\theta > 0$, se sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_t \leq s) &= \mathbb{P}(X_{t1} + X_{t2} \leq s) \\ &= F_X^{*(2)}(s) \\ &= \mathrm{Ga}(s|2, \theta). \end{aligned} \tag{3}$$

**Caso $N$ general**

En el caso donde

$$S_t = \sum_{i=1}^{J_t} X_{ti},$$

se sigue (por induccion), bajo los supuestos mencionados antes, que

$$\mathbb{P}(S_t \leq s) \quad = \quad F_X^{*(J_t)}(s|\theta). \tag{4}$$

**NOTA 1:** Solo en casos especificos de $F_X(\cdot)$ pertenecientes a distribuciones en la familia exponencial se pueden obtener expresiones analíticas cerradas para las convoluciones.

**NOTA 2:** En el caso general donde $F_X(\cdot)$ tenga uno o más átomos, la expresión analítica de la convolución es bastante compleja y, en muchos casos, imposible de obtener; aun cuando la parte absolutamente continua de $F_X$ pertenezca a la familia exponencial.

De esta forma, se puede descansar en otros métodos descritos a continuación.

# 2. Método de momentos

El método de momentos se basa en la identificación de $F_{S_t}(s)$ a través de su correspondiente función generadora de momentos, $M_{S_t}(w)$ definida como

$$M_{S_t}(w) = \mathbb{E}_{F_{S_t}}\left(\exp\{wS_t\}\right).$$

La identificación es única pues la relación entre ambas funciones es $1:1$.
Bajo el supuesto de *independencia y homogeneidad en distribución* se sigue que

$$M_{S_t}(w) = \left[M_X(w)\right]^{J_t},$$

donde $M_X(w)$ es la función generadora de momentos genérica para las $X_{tj}$s.

**Ejercicio:** ¿Cómo sería la expresión de $M_X(w)$ bajo el supuesto de intercambiabilidad en las $X_{tj}$s?
De esta forma, **identificando** la forma estructural de $M_X(w)$ puede identificarle la forma funcional asociada con $F_{S_t}(s)$.

**Supuestos**
El procedimiento descansa en el supuesto que $M_X(w)$ existe y que ésta elevada a una cierta potencia tiene una forma analítica cerrada y conocida.
**Nota:**
El resultado se generaliza al uso de la *función característica*, $\phi_X(w)$, y la *función generadora de probabilidades*, $\rho_X(w)$.

El reto analitico fundamental de este procedimiento reside en que $F_X(x)$ tiene típicamente al menos un punto de discontinuidad en $\{0\}$ (no reclamo por no siniestro), i.e.

$$F_X(x) = \theta \mathbb{I}_{\{0\}}(x) + (1-\theta) F_X^c(x),$$

donde $F_X^c(x)$ corresponde a la parte (absolutamente) continua de $F_X(\cdot)$. En este caso, la función generadora de momentos asociada puede verse como la comosición de:

a. Distribución continua para el reclamo, sujeto a un siniestro, i.e.

$$M_X^c(w) = \mathbb{E}_{F_X^c}\left(\exp\{wX\}\right),$$

b. Distriución Bernoulli asociada con el eveneto de tener siniestro o no, i.e.

$$M_{\text{Siniestro}}(w) = \theta + (1-\theta)\exp\{w\}.$$

Así, la expresión general para $M_X(w)$ es la siguiente,

$$M_X(w) = \theta + (1-\theta)\exp\{M_X^c(w)\}.$$

Esta expresión tendrá una forma anlítica anipulable en función de que $M_X^c(w)$ sea simple y compatible con $\exp(\cdot)$.
Empleando la expresión anterior, se sigue (bajo el supuesto de independencia y homogeneidad distribucional en las $X_{tj}$), la función generadora de momentos para $F_{S_t}(s)$ está asociada con

$$M_{S_t}(w) = \left[\theta_t + (1-\theta_t)\exp\{M_{X_t}^c(w)\}\right]^{J_t}.$$

Al rededor de esta expresión debemos anotar dos cosas:

1. La distribución para la ocurrencia de siniestros para un tiempo $t$ dado presupone homogeneidad entre las $\{X_{tj}\}_{j=1}^{J_t}$. Sin embargo, podría hacerce alusión a homogeneidad distribucional a través de $t$.
2. El comentario anterior aplica análogamente a $F_{X_t}^c(x)$.

Como podrán anticipar, sólo pocos casos particulares será posible identificar $F_{S_t}(s)$ a través de $M_{S_t}(w)$.

# 3. Método basado en simulación estocástica

Un método alternativo de calculo/aproximación de $F_{S_t}(s)$ consiste en generar muestras (pseudo) aleatorias de $\{X_{tj}\}_{j=1}^{J_t}$, agregándolas en cada caso descansando en el método de Monte Carlo. Así, el algoritmo se resume en los siguientes pasos:

a. Fijar $K$ número de simulaciones deseadas de $F_{S_t}(s)$ (entre mayor sera $K$ la aproximación será más precisa, pero menos eficiente computacionalente).

b. Para $k = 1, \ldots, K$ generar $J_t$ variables pseudo aleatorias de $F_{X_t}(x)$, denottadas por

$$\left\{x_{tj}^{(k)}\right\}_{j=1}^{J_t}$$

.

c. Para cada $k$, generar la muestra de $F_{S_t}(s)$ correspondiente mediante la agregación de las $x_{tj}^{(k)}$s correspondientes, i.e.

$$s_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{J_t} x_{tj}^{(k)}.$$

d. la colección de datos simulados $\{s_t^{(k)}\}_{k=1}^{K}$ corresponde a una muestra aleatoria de $F_{S_t}(s)$.

# Table of Contents