Tarea 4

Joel Díaz León
147997

(1) Deriven la modificación de la dist. $Po(n|\lambda)$ en la que $Q(N_t=0)=0$ y $Q(N_t=1)=1/3$.

Para poder derivar esta modificación necesitamos que $\forall n \geq 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} Q(N_t=n) = 1-q_0-q_1 = 1-0-1/3 = 2/3 \quad (*)$$

De esta forma condicionamos de la sig manera: Sabemos que

$$1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P\langle N_t=n\rangle}{1-(p_0+p_1)} \quad \text{para } n\geq 2$$

y reescalamos para cumplir la ecuación (*)

$$\frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{P\langle N_t=n\rangle}{1-(p_0+p_1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{P\langle N_t=n\rangle}{1-(p_0+p_1)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow Q(N_t=n) = \frac{2}{3}\cdot\frac{P\langle N_t=n\rangle}{1-(p_0+p_1)} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{p_n}{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}}{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$$

para $n\geq 2$

$$\therefore Q(N_t=n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1/3, & n=1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)\frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}}{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}, & n\geq 2 \end{cases}$$

(2) Deriven la modificación en la que $N_t|N_t\leq 15 \sim Po(n|30)$ y $N_t|N_t>15 \sim Bin(n|100,1/3)$.

Tomaremos como base la parte de $n\leq 15$ dejándola fija y reescalaremos $n>15$ de tal forma que:

$$(*) \quad \sum_{n=15}^{\infty} Q_n = 1-\sum_{n=0}^{15} p_n \quad , \text{ con } p_n = P\langle N=n\rangle,\ N\sim Po(n|30) \text{ para } n\leq 15$$

Sabemos que: $\dfrac{\sum_{n=15}^{\infty} b_n}{1-\sum_{n=0}^{15} b_n} = 1$ entonces reescalamos para cumplir (*): ($b_n = P\langle B=n\rangle$, $B\sim Bin(n|100,1/3)$)

$$\frac{\left(1-\sum_{n=0}^{15}p_n\right)\sum_{n=15}^{\infty}b_n}{1-\sum_{n=0}^{15}b_n} = \sum_{n=15}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{b_n\left(1-\sum_{n=0}^{15}p_n\right)}{1-\sum_{n=0}^{15}b_n}\right]}_{Q_n} = 1-\sum_{n=0}^{15}p_n$$

$$\therefore Q(N_t=n) = \begin{cases} \frac{e^{-30}\,30^n}{n!}, & 0\leq n\leq 15 \\ \frac{b_n\left(1-\sum_{n=0}^{15}p_n\right)}{1-\sum_{n=0}^{15}b_n}, & n>15 \end{cases}$$