odrigo Tinoco Martínez
150728

Tarea 2

2. a) Propiedad de agregación

sean X_1 y X_2 v.a. con distribución Poisson parametro λ_1 y λ_2 respectivamente,

y sea $Z = X_1 + X_2$; X_1 y X_2 son ind

P.D

$Z \sim$ Poisson $(\lambda_1+\lambda_2)$

Dem.

Sea $m_{X_i}(t) = e^{(\lambda_i(e^t-1))}$ la función generadora de momentos para X_i con $i=1,2$.

$\Rightarrow m_Z(t) \underset{\text{por ind}}{=} m_{X_1}(t) \cdot m_{X_2}(t) = e^{(\lambda_1(e^t-1))} e^{(\lambda_2(e^t-1))} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$

fgm de una v.a. con distribución Poisson $(\lambda_1+\lambda_2)$ ∎

Esta demostración aplica para la suma de n v.c. Poisson independientes

$\Rightarrow X_i \sim$ Poisson (λ_i) con $i=1,\dots,n$

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Poisson $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$

) Propiedad de desagregación

Sea $N \sim Poisson(n|\lambda)$ con $\lambda > 0$

con m eventos independientes con probabilidad p_i, $i = 1, \dots, m$.

N_j el evento de cada clase

$\Rightarrow N_j \sim Poisson(n|\lambda_j)$ con $\lambda_j = p_j \lambda$ ← P.D.

Dem

Consideremos a N como $N = \sum_{i=1}^{m} N_i$ donde cada N_j tiene distribución Bernoulli (p_j)

La fgp de Bernoulli es: $\phi(s) = E(s^x) = q + sp$ donde $q = (1-p)$

y ya sabemos que la fgp de N es $\phi(s) = e^{\lambda(s-1)}$ (Poisson)

$\therefore$ la fgp de N es la composición de estas dos

$\phi_N(\phi(s)) = e^{\lambda(q+sp-1)} = e^{\lambda(sp-p)} = e^{\lambda p(s-1)}$ que es la fgp de una Poisson (λp) ■

3 Identidad de la binomial negativa como mezcla de poisson-gamma.

Consideremos una v.a. con distribución Poisson(λ) en la cual λ es una v.a con distribución Gamma $\left(r, \frac{(1-p)}{p}\right)$

$$f(k; r, p) = \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} e^{-\lambda} \lambda^{r-1} \frac{e^{-\lambda \frac{(1-p)}{p}}}{\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \Gamma(r)} d\lambda = \frac{(1-p)^r p^{-r}}{k!\, \Gamma(r)} \int_0^\infty \lambda^{r+k-1} e^{-\lambda/p} d\lambda$$

$$= \frac{(1-p)^r p^{-r}}{k!\, \Gamma(r)} p^{r+k}\, \Gamma(r+k) = \frac{\Gamma(r+k)}{k!\, \Gamma(r)} p^k (1-p)^r$$

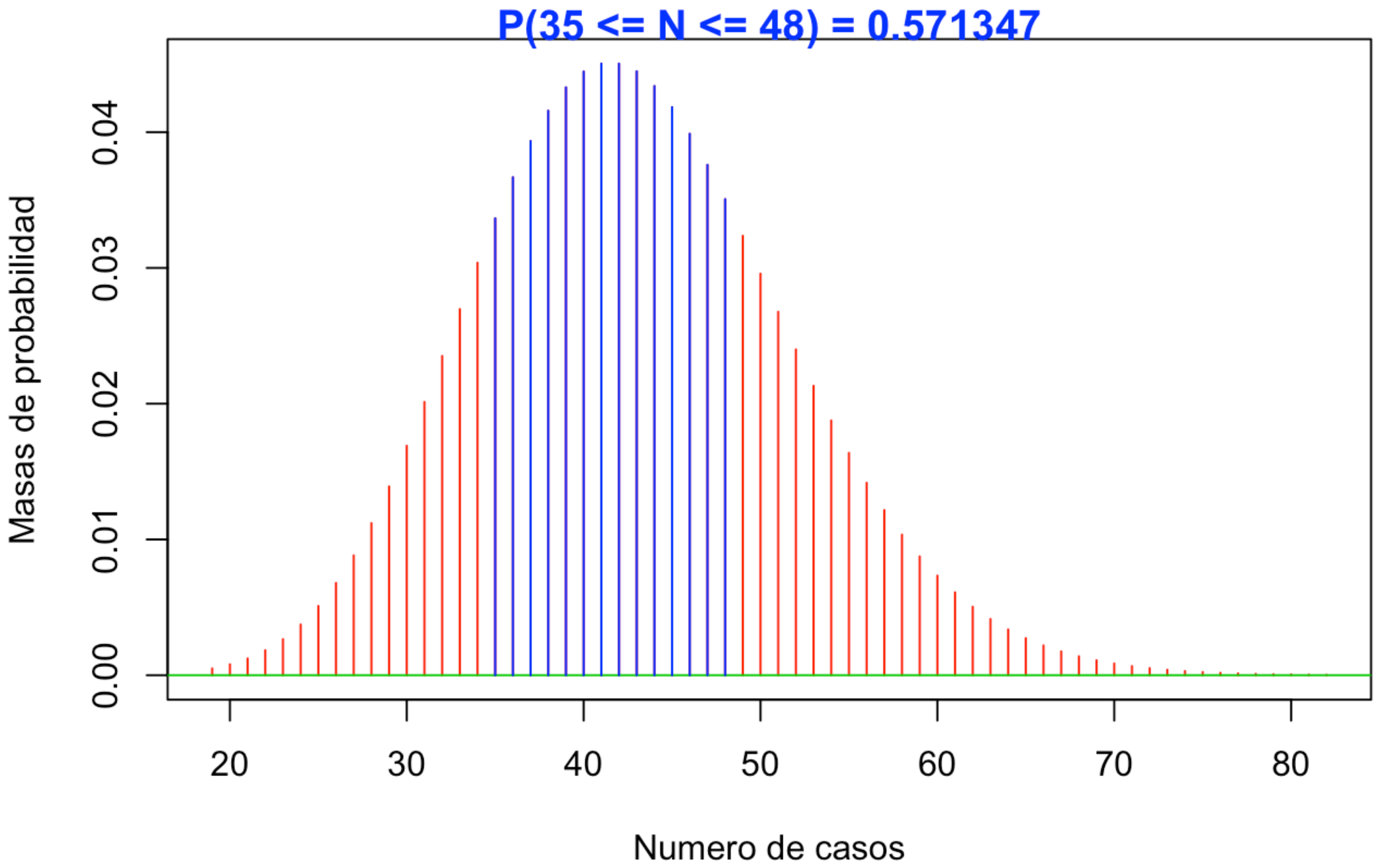
Tarea 2

Rodrigo Tinoco Martinez

18/2/2019

```r
BinNeg.Plot <- function(n,p, a=NA,b=NA,calcProb=(!is.na(a) | !is.na(b)),quantile=NA,c
alcQuant=!is.na(quantile)){
  # Binomial Negativa
  media = n*(1-p)/p
  sd = sqrt(n*(1-p)/p^2)
  low = max(0, round(media - 3 * sd))
  high = round(media + 5 * sd)
  values = low:high
  probs = dnbinom(values,size=50,mu=media)
  plot(c(low,high), c(0,max(probs)), type = "n",
       xlab = "Numero de casos",
       ylab = "Masas de probabilidad",
       main = "")
  lines(values, probs, type = "h", col = 2)
  abline(h=0,col=3)
  if(calcProb) {
    if(is.na(a)){ a = 0 }
    if(is.na(b)){
      a = round(a)
      prob = 1-pnbinom(a-1,size=50,mu=media)
      title(paste("P(",a," <= Y ) = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
      u = seq(max(c(a,low)),high,by=1)
    }
    else {
      if(a > b) {d = a; a = b; b = d;}
      a = round(a); b = round(b)
      prob = pnbinom(b,size=50,mu=media) - pnbinom(a-1,size=50,mu=media)
      title(paste("P(",a," <= N <= ",b,") = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4
)
      u = seq(max(c(a,low)),min(c(b,high)),by=1)
    }
    v = dnbinom(u,size=50,mu=media)
    lines(u,v,type="h",col=4)
  }
  else if(calcQuant==T) {
    if(quantile < 0 || quantile > 1)
      stop("El cuantil debe estar entre 0 y 1")
    x = qnbinom(quantile,mu=media)
    title(paste("",quantile," quantile = ",x,sep=""),line=0,col.main=4)
    u = 0:x
    v = dnbinom(u,mu=media)
    lines(u,v,type="h",col=4)
  }
  return(invisible())
}

BinNeg.Plot(100,.7,a=35,b=48)
```


P(35 <= N <= 48) = 0.571347
Masas de probabilidad
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
20
30
40
50
60
70
80
Numero de casos