ACT-11302 Cálculo Actuarial III **Nombre:** **Paulina Gómez Zúñiga**

Primavera 2019 **C.U.:** 157945

Tarea 02 **12/Feb/2018**

Fecha de entrega: 19/Feb/2019

Consideren las notas del martes 12 de febrero de 2019.

1. Modifiquen la funcion Poisson.Plot() para crear la funcion BinNeg.Plot() para generar los resultados analogos de Poisson.Plot() y Binomial.Plot() incluidas en el markdown de esta presentacion.

```r


BinNeg.Plot <- function(successes,proba, a=NA,b=NA,calcProb=(!is.na(a) | !is.na(b)),quantile=NA,calcQuant=!is.na(quantile)){
  # Binomial Negativa
  sd = sqrt((successes*(1-proba))/(proba^2))
  low = max(0,round(((successes*(1-proba))/(proba)) - (5*sd)))
  high = round(((successes*(1-proba))/(proba)) + (5*sd))
  values = low:high
  probs = dnbinom(values,successes,proba)
  plot(c(low,high), c(0,max(probs)), type = "n",
       xlab = "Numero de casos",
       ylab = "Masas de probabilidad",
       main = "")
  lines(values, probs, type = "h", col = 2)
  abline(h=0,col=3)
  if(calcProb) {
    if(is.na(a)){ a = 0 }
    if(is.na(b)){
      a = round(a)
      prob = 1-pnbinom(a-1,successes,proba)
      title(paste("P(",a," <= Y ) = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
      u = seq(max(c(a,low)),high,by=1)
    }
    else {
      if(a > b) {d = a; a = b; b = d;}
      a = round(a); b = round(b)
      prob = pnbinom(b,successes,proba) - pnbinom(a-1,successes,proba)
      title(paste("P(",a," <= N <= ",b,") = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
      u = seq(max(c(a,low)),min(c(b,high)),by=1)
    }
    v = dnbinom(u,successes,proba)
    lines(u,v,type="h",col=4)
  }
  else if(calcQuant==T) {
    if(quantile < 0 || quantile > 1)
      stop("El cuantil debe estar entre 0 y 1")
    x = qnbinom(quantile,successes,proba)
    title(paste("",quantile," quantile = ",x,sep=""),line=0,col.main=4)
    u = 0:x
    v = dnbinom(u,successes,proba)
    lines(u,v,type="h",col=4)
  }
  return(invisible())
}

```

2. Demuestren las propiedades de agregación y desagregación de la distribución Poisson.

a) Agregación

$N_1, \ldots N_q$ variables aleatorias independientes con distribución Poisson, $Po(N_j = n_j \mid \lambda_j)$

* $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ y $N \sim$ Poisson

+ N tiene $\lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \Rightarrow \lambda_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_q}$

Sabemos que la generadora de momentos de una Poisson es:

$$M_n(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$$

¿cuál es $F(x)$?

$$M_n(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$$

$$\Rightarrow M_n(t) = M_{n_1}(t) \cdot M_{n_2}(t) \cdot \ldots \cdot M_{n_q}(t)$$

$$= e[\lambda(\frac{\lambda_1}{\lambda} M_{n_1}(1) + \frac{\lambda_2}{\lambda} M_{n_2}(2) + \cdots + \frac{\lambda_q}{\lambda} M_{n_q}(q) - 1]$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} F_2(x) + \cdots + \frac{\lambda_q}{\lambda} F_q(x) \blacksquare$$

b) Desagregación

$N \sim$ Poisson$(n \mid \lambda)$ con $\lambda = 0$

$\Rightarrow$ tenemos eventos clasificados en K tipos de probabilidades, es decir, $P_1, P_2, \ldots P_K$

tal que $\sum_{i=1}^{K} P_i = 1$

$$\Rightarrow N \sim \text{Poisson}(n \mid \lambda \cdot 1) = Po(n \mid \lambda \sum_{i=1}^{K} P_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} N_i \sim Po(n \mid \Sigma \lambda_i)$$

$\Rightarrow N = \Sigma N_i \Rightarrow \lambda_i = P_i \lambda$ con N_i independientes $\blacksquare$

3. Realicen el cálculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial negativa como mezcla de poisson-gamma

$N \mid \lambda \sim Po(n \mid \lambda)$ donde $\lambda \sim Gamma(\lambda \mid a, b)$

P.D qu $P(N=n) = \int_0^\infty Po(n \mid \lambda)\, Gamma(\lambda \mid a, b)\, d\lambda$

$$\Rightarrow P(N=n) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \frac{\lambda^{a-1} e^{-\lambda/b}}{\Gamma(a)\, b^a} = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{x!\,\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \int_0^\infty \lambda^{x+\alpha-1} e^{-\lambda(1+1/\beta)}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{x!\,\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha} \int_0^\infty (\lambda(1+1/\beta))^{x+\alpha-1} e^{-\lambda(1+1/\beta)} (1+1/\beta)\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{x!\,\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha} \int_0^\infty u^{x+\alpha-1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x!\,\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x!\,\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x} \quad \blacksquare$$

[esto ya es una binomial negativa]

$*$ con $p = \frac{1}{\beta+1}$ y $q = \frac{\beta}{\beta+1}$