Francisco Ramírez Suárez 150496

Tarea 2

2.- Demuestre las propiedades de agrecación y desagregación de la dist Poisson

$N_1, \dots N_q$ v.a.i.i.d

$N = \sum_{j=1}^{q} N_j \sim$ Poisson $\quad P_o(N_j = r_j / \lambda_j)$

N tiene tasa de intensidad $\lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \quad \boxed{M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}}$

Lo más fácil debido a que son v.a.i.i.d es hacerlo por la generadora de momentos

tq si $N = \sum_{j=1}^{q} N_j \Leftrightarrow M_N(t) = E(e^{tN}) \Leftrightarrow E(e^{t\sum_{j=1}^{q} N_j})$

$\Leftrightarrow E(e^{t(N_1+N_2+\dots+N_q)}) = E(e^{tN_1} e^{tN_2} \dots e^{tN_q}) = E(e^{tN_1}) \dots E(e^{tN_q})$

$\Leftrightarrow e^{\lambda_1(e^t-1)} \dots e^{\lambda_q(e^t-1)} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_q)(e^t-1)}$

$\Rightarrow N = \sum_{j=1}^{q} N_j \sim$ Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q) \quad \lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$

$\sim$ Poisson $(\lambda)$

Francisco Ramirez Suárez 150496

Tarea 02

3:- Realizar el cálculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial-negativa como mezcla de poisson-gamma

$$N|\lambda \sim \text{Poisson}(n|\lambda) \qquad \lambda \sim \text{Gamma}(\lambda|a,b)$$

p.d $$P(N=n) = \int_0^\infty Po(n|\lambda)\,Ga(\lambda|a,b)\,d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^{a-1} e^{-\lambda/b}}{b^a\,\Gamma(a)} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(\frac{1}{b}+1)}}{b^a (a-1)!\,n!}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{b^a(a-1)!\,n!}\int_0^\infty \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda\left(\frac{b+1}{b}\right)}$$

Para completar una gamma $\beta = \frac{b}{b+1}$ $\quad \alpha = n+a$

$$= \frac{\Gamma(n+a)\left(\frac{b}{b+1}\right)^{n+a}}{b^a(a-1)!\,n!}\int_0^\infty \cancel{\frac{\lambda^{n+a-1} e^{-\lambda\left(\frac{b+1}{b}\right)}}{\Gamma(n+a)\left(\frac{b}{b+1}\right)^{n+a}}}\,d\lambda$$

tiende a 1 por que completamos la Gamma sobre todo su soporte

$$= \frac{(n+a-1)!}{(a-1)!\,n!}\,\frac{\left(\frac{b}{b+1}\right)^a\left(\frac{b}{b+1}\right)^N}{b^a} = \frac{(n+a-1)!}{(a-1)!\,n!}\left(\frac{1}{b+1}\right)^a\left(\frac{b}{b+1}\right)^n$$

$$= \binom{n+a-1}{a-1}\left(\frac{1}{b+1}\right)^a\left(\frac{b}{b+1}\right)^n$$

y la fn de la Bin Negativa se puede ver de las sig formas

$$\boxed{f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}\, I_{\{0,1,\dots\}}(x)}$$

$$f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x\, I_{\{0,1,\dots\}}(x)$$

Si tomamos $X = n+a$

$r = a$

$p = \frac{1}{b+1}$

Vemos que es una Bin Neg

$$\therefore\ P(N=n) \sim \text{Bin Neg}(r,p) \sim \text{Bin.Neg}\left(a, \tfrac{1}{b+1}\right)$$