ACT-11302: Cálculo Actuarial III

Sesion 01 - Modelos de Probabilidad

Juan Carlos Martínez-Ovando

ITAM

Primavera 2019

Agenda

Modelo de probabilidad

Definición

Notación

- X se refiere a una variable aleatoria observable (discreta o continua)
- x se refiere a un valor específico de esta variable

Modelo de probabilidad

Sin pérdida de generalidad, refirámonos a X. El modelo de probabilidad se define como la distribución de probabilidades de X indizada por θ, i.e.

$$X \sim F(x|\theta). \tag{1}$$

El *soporte* de X, denotado por $\mathcal{X}$, se define como,

$$\mathcal{X} = \{x : F(x|\theta) > 0\}, \tag{2}$$

donde $\mathcal{X}$ forma un subconjunto de un espacion Euclidiano de dimensión finita. El parámetro θ, toma valores en el espacio parametral Θ (generalmente de dimensión finita).

Definición

Notación

- X se refiere a una variable aleatoria observable (discreta o continua)
- x se refiere a un valor específico de esta variable

Modelo de probabilidad

Sin pérdida de generalidad, refirámonos a X. El modelo de probabilidad se define como la distribución de probabilidades de X indizada por θ, i.e.

$$X \sim F(x|\theta). \tag{1}$$

El *soporte* de X, denotado por $\mathcal{X}$, se define como,

$$\mathcal{X} = \{x : F(x|\theta) > 0\}, \tag{2}$$

donde $\mathcal{X}$ forma un subconjunto de un espacion Euclidiano de dimensión finita. El parámetro θ, toma valores en el espacio parametral Θ (generalmente de dimensión finita).

Definición

Densidades y masa de probabilidad

1. Cuando X es absolutamente continua, $F(x|\theta)$ admite una densidad, $f(x|\theta)$, tal que
$$F(x|\theta) = \int_{-\infty}^{x} f(s|\theta)ds,$$
implicando que el soporte no tenga átomos, i.e.
$$\Pr(X = x) = 0$$
para todo $x \in \mathcal{X}$.
2. Cuando X es del tipo discreto, el soporte $\mathcal{X}$ está formado solamente por átomos, i.e. valores especificos de X, digamos $\mathcal{X} = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ tales que
$$\Pr(X = x_i^*) = p_i > 0,$$
para todo $x_i^* \in \mathcal{X}$, con
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Definición

Densidades y masa de probabilidad

3 Cuando X es del tipo mixta, el modelo de probabilidad admite una parte absolutamente continia al mismo tiempo de admitir una parte discreta, i.e.

$$\Pr(X \leq x) = F(x|\theta) = F_c(x|\theta_c)o + \sum_{x_k^* \leq x} p(X = x_k^*|\theta_d), \tag{3}$$

donde

- F_c es el componente continuo de la distribución
- $\{x_k^*\}_{k \geq 1}$ son los átomos de la distribución
- θ_c y θ_d son los parámetros asociados con la parte continua y discreta, respectivamente.

Densidades y masa de probabilidad

En este tipo de distribuciones, el soporte $\mathcal{X}$ está formado de una parte absolutamente continua (sin átomos), $\mathcal{X}_c$, y una parte discreta (formada solo de átomos), $\mathcal{X}_d$, i.e.

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_c \cup \mathcal{X}_d.$$

Definición

Densidades y masa de probabilidad

3 Cuando X es del tipo mixta, el modelo de probabilidad admite una parte absolutamente continia al mismo tiempo de admitir una parte discreta, i.e.

$$\Pr(X \leq x) = F(x|\theta) = F_c(x|\theta_c)o + \sum_{x_k^* \leq x} p(X = x_k^*|\theta_d), \tag{3}$$

donde

- F_c es el componente continuo de la distribución
- $\{x_k^*\}_{k \geq 1}$ son los átomos de la distribución
- θ_c y θ_d son los parámetros asociados con la parte continua y discreta, respectivamente.

Densidades y masa de probabilidad

En este tipo de distribuciones, el soporte $\mathcal{X}$ está formado de una parte absolutamente continua (sin átomos), $\mathcal{X}_c$, y una parte discreta (formada solo de átomos), $\mathcal{X}_d$, i.e.

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_c \cup \mathcal{X}_d.$$

Ejemplo

Ejemplo

Pensemos en el modelo de probabilidad con un átomo en $\{0\}$ que admite la posibilidad de tomar valores en la recta real positiva, i.e.

$$\mathcal{X} = \{0\} \cup (0, \infty).$$

Modelo de probabilidad

El modelo de probabilidad estará definido por una masa de probabilididad en $\{0\}$, i.e.

$$\Pr(X = 0) = \Pr(X \in \{0\}) = \theta_0,$$

y una densidad para la parte continua,

$$f(x|\theta_c) = \theta_c \, \mathsf{exp}\{-x\theta_c\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x),$$

con $0 < \theta_0 < 1$ y $\theta_c > 0$.

Ejercicio

¿Qué forma toma $F(x|\theta)$ y quién es θ?

Ejemplo

Ejemplo

Pensemos en el modelo de probabilidad con un átomo en $\{0\}$ que admite la posibilidad de tomar valores en la recta real positiva, i.e.

$$\mathcal{X} = \{0\} \cup (0, \infty).$$

Modelo de probabilidad

El modelo de probabilidad estará definido por una masa de probabilididad en $\{0\}$, i.e.

$$\Pr(X = 0) = \Pr(X \in \{0\}) = \theta_0,$$

y una densidad para la parte continua,

$$f(x|\theta_c) = \theta_c \, \mathsf{exp}\{-x\theta_c\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x),$$

con $0 < \theta_0 < 1$ y $\theta_c > 0$.

Ejercicio

¿Qué forma toma $F(x|\theta)$ y quién es θ?

Ejemplo

Ejemplo

Pensemos en el modelo de probabilidad con un átomo en $\{0\}$ que admite la posibilidad de tomar valores en la recta real positiva, i.e.

$$\mathcal{X} = \{0\} \cup (0, \infty).$$

Modelo de probabilidad

El modelo de probabilidad estará definido por una masa de probabilididad en $\{0\}$, i.e.

$$\Pr(X = 0) = \Pr(X \in \{0\}) = \theta_0,$$

y una densidad para la parte continua,

$$f(x|\theta_c) = \theta_c \, \mathsf{exp}\{-x\theta_c\}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x),$$

con $0 < \theta_0 < 1$ y $\theta_c > 0$.

Ejercicio

¿Qué forma toma $F(x|\theta)$ y quién es θ?

Gracias por su atención...

juan.martinez.ovando@itam.mx