Tarea 02 Jorge Casares

2 Demostrar las propiedades de agregación y desagregación de la distribución Poisson.

Agregación

sean $X_1, \dots, X_K$ v.a. indep donde $X_j \sim$ Poisson(λ_j) $j \geq 1$.

$\Rightarrow$ sea $Y = X_1 + \dots + X_K$

$$P(Y=y) = P(X_1 + X_2 + \dots X_K = y) \overset{\text{por indep de } X_j}{=} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_K = x_K)$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{x_1}}{x_1!} \left(\frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{x_2}}{x_2!} \right) \cdots \left(\frac{e^{-\lambda_K} \lambda_K^{x_K}}{x_K!} \right)$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K)} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_K)^{(x_1 + x_2 + \dots + x_K)}}{(x_1 + x_2 \dots x_K)!}$$

$\therefore Y \sim$ Poisson$(\sum \lambda_j)$

Desagregación

Podemos considerar N como $N = N_1 + \dots N_j$ donde N_j $j \geq 1$ tiene distribución Bernoulli con probabilidad p.

La f.g.p. de Bernoulli es

$$\phi(s) = E(s^x) = q + sp$$

y la clase pasada vimos que f.g.p de N es $\Phi_N(t) = e^{\lambda(s-1)}$

$\therefore$ la f.g.p de N es la composición de estas dos

$$h_N(s) = \Phi_N(\phi(s)) = e^{\lambda(q + sp - 1)} = e^{\lambda(sp - p)}$$

$$= e^{\lambda p(s-1)}$$

que es la f.g.p de una v.a Poisson con parámetro λp.

3. Demostrar la identidad de la distribución binomial negativa como mezcla de Poisson- Gama

Poisson $\quad P(N=n \mid \lambda=\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \quad n=0,1,\ldots$

Gamma $\quad \text{Gamma}(\lambda \mid a,b) = \dfrac{a^{b}}{\Gamma(b)}\lambda^{b-1}e^{-a\lambda} \quad \lambda>0$

$$\Rightarrow P(n\mid\lambda)\,\text{Gamma}(\lambda\mid a\,b) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}\,\frac{a^{b}}{\Gamma(b)}\lambda^{b-1}e^{-a\lambda}$$

Integramos : $P(N=n) = \int_0^{\infty} P(N=n\mid\lambda=\lambda)\,\text{Gamma}(\lambda\mid a,b)\,d\lambda$

$$= \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}\,\frac{a^{b}}{\Gamma(b)}\lambda^{b-1}e^{-a\lambda}\,d\lambda = \int_0^{\infty}\frac{a^{b}}{n!\,\Gamma(b)}\lambda^{n+b-1}e^{-\lambda(a+1)}\,d\lambda$$

$$= \frac{a^{b}}{n!\,\Gamma(b)}\,\frac{\Gamma(n+b)}{(a+1)^{n+b}} \quad \text{con } n! = \Gamma(n+1)$$

$$= \frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+1)\Gamma(b)}\cdot\left(\frac{a}{a+1}\right)^{b}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n} = \frac{(n+b-1)!}{n!\,(b-1)!}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{b}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n}$$

$$= \binom{n+b-1}{n}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{b}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n} \quad n=0,1\ldots$$