**ACT-11302 Cálculo Actuarial III** **Nombre:** **Fabrizzio Pérez Aceituno**
**Primavera 2019** **C.U.:** **156165**
**Tarea 06** **09/Abr/2019**
**Fecha de entrega: 11/Abr/2019**

**Consideren la clase del martes 9 de abril de 2019.**

1. **Calcula la probabilidad de ruina $\Psi(C_0)$ cuando $X \sim$ Exp$(x|1/\mu)$, con E$(X) = \mu$.**

- La función de distribución de una Exponencial está dada por:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}},\ x \geq 0.$$

- Además, sabemos que el coeficiente de Lündberg está dado por:

$$1 + (1+\theta)\mu r = M_X(r)$$

con $M_X(r)$ la f.g.m de una Exponencial dada por $M_X(r) = (1-\mu t)^{-1}\ , t < \frac{1}{\mu}$.

- Ahora, vamos a despejar la r:

$$1 + (1+\theta)\mu r = (1-\mu r)^{-1}$$
$$1 + (\mu + \mu\theta) r = (1-\mu r)^{-1}$$
$$1 + (\mu + \mu\theta) r - (1-\mu r)^{-1} = 0$$
$$1 - \mu r + (1-\mu r) * (\mu + \mu\theta) r - 1 = 0$$
$$1 - \mu r + \mu r + \mu\theta r - \mu^2 r^2 - \mu^2 r^2 \theta - 1 = 0$$
$$\mu\theta r - \mu^2 r^2 - \mu^2 r^2 \theta = 0$$
$$\theta - \mu\, r - \mu\, r\, \theta = 0$$
$$\theta = r(\mu(1+\theta))$$
$$\boxed{\therefore r = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)}}$$

- Con este resultado, demostramos que r existe por lo que podemos asegurar que el denominador de la probabilidad de ruina dado por $\mathbb{E}_{F_{S_t}}[exp\{-rC_T\}|\ T < \infty]$ es mayor a 1.

- Por lo tanto, podemos asegurar que:

$$\Psi(C_0) = \frac{exp\{-rC_0\}}{\mathbb{E}_{F_{S_t}}[exp\{-rC_T\}|\ T < \infty]} \leq exp\{-rC_0\}$$

- Para obtener la n-ésima convolución, sabemos que la suma de n variables aleatorias con distribución Exponencial con parámetro μ, se distribuye Gamma con parámetros n y μ y podemos expresar su función de distribución como:

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{x}{\mu}} * \frac{\left(\frac{x}{\mu}\right)^k}{k!} \; para\; x > 0.$$

Usando el resultado anterior, podemos expresar lo siguiente:

$$1 - \psi(C_0) = \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^n} * F^{n*}(C_0)$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^n} * \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{C_0}{\mu}} * \frac{\left(\frac{C_0}{\mu}\right)^k}{k!}\right)\right]$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1+\theta}{\theta(1+\theta)}\right) - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{C_0}{\mu}} * \frac{\left(\frac{C_0}{\mu}\right)^k}{k!}$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta} - \frac{\theta * e^{-\frac{C_0}{\mu}}}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{C_0}{\mu}\right)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^n}$$

$$= 1 - \frac{\theta * e^{-\frac{C_0}{\mu}}}{1+\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{C_0}{\mu}\right)^k}{k!} * \frac{1}{\theta * (1+\theta)^k}$$

$$\boxed{1 - \psi(C_0) = 1 - \frac{\theta}{1+\theta} exp\left\{-\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\right\}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\boxed{\psi(C_0) = \frac{\theta}{1+\theta} exp\left\{-\frac{C_0}{\mu}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\right\}}}$$

2. **Considera $F_X(x)=Pa(x|\alpha)$, con densidad $f_X(x)=(1+x)^{-\alpha}\ I_{(0,\infty)}(x)$, y $\alpha > 0$. Muestra que para valores de $\alpha > 0$ (caso con colas pesadas) la integral de la Sección 2.4. de las notas no está definida.**

- La función de distribución de la Pareto está dada por:

$$F_X(x) = \int_0^x f_x(x)dx = \frac{(1+x)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

- Ahora, aplicando la integral de la Sección 2.4:

$$\int_0^{\infty} e^{rx} * \frac{(1+x)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{rx} * \frac{(1+x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} dx - \int_0^{\infty} e^{rx} * \frac{dx}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^{\infty} e^{rx}\,(1+x)^{1-\alpha} dx - \int_0^{\infty} e^{rx} dx\right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_0^{\infty} e^{rx}\,(1+x)^{1-\alpha} dx - \underbrace{\int_0^{\infty} e^{rx} dx}_{A}\right)$$

- A $= \int_0^{\infty} e^{rx} dx = \left.\frac{e^{rx}}{r}\right|_0^{\infty} = \infty$ por lo que la integral no converge. De la misma forma, la primera integral tampoco converge, por lo que podemos concluir que cuando tenemos una distribución Pareto, la integral de la Sección 2.4. no está definida.