ACT-11302 Cálculo Actuarial III **Nombre:** Augusto Brogno Corona
Primavera 2019 **C.U.:** 152037
Tarea 02 **12/Feb/2018**
Fecha de entrega: 19/Feb/2019

Consideren las notas del martes 12 de febrero de 2019.

1. Modifiquen la funcion `Poisson.Plot()` para crear la funcion `BinNeg.Plot()` para generar los resultados analogos de `Poisson.Plot()` y `Binomial.Plot()` incluidas en el markdown de esta presentacion.

2. Demuestren las propiedades de agregacion y desagregacion de la distribucion Poisson.

3. Realicen el calculo analitico para demostrar la identidad de la distribucion binomial-negativa como mezcla de poisson-gamma.

$\boxed{2}$ a) AGREGACIÓN

Sean $N_1, \ldots, N_q$ v.a.i.id. $N_j \sim Po(\lambda_j)$ $j=1,\ldots,q$

P.D. $\sum_{j=1}^{q} N_j \sim Po\left(\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\right) = Po(\lambda^*)$ -t. $\lambda^* = \sum_{j=1}^{q}\lambda_i$

$$M_{N_i}(t) = e^{(\lambda e^t - \lambda)} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Ahora $M_{\sum_{i=1}^{q} N_i}(t) \overset{\text{indep}}{=} \prod_{i=1}^{q} M_{N_i}(t) = \prod_{i=1}^{q} e^{\lambda_i(e^t-1)} = e^{\sum \lambda_i (e^t-1)}$

$$= e^{(e^t-1)\sum\lambda_i} = e^{\lambda^*(e^t-1)}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{q} N_j \sim Po\left(\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\right)$$

$\boxed{2}$ b) DESAGREGACIÓN

$N \sim Po(n|\lambda)$ $\lambda > 0$ consideremos que los eventos pueden clasificarse en m tipos distintos indep. con $p_1, \dots, p_m \Rightarrow$ forman una partición t.q. $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$

P.D. N_j's indep. $\wedge$ $N_j \sim Po(n|\lambda_j)$ t.q. $\lambda_j = p_j \lambda$

$$N \sim Po(\lambda) = Po(\lambda \cdot 1) = Po(\lambda \cdot \sum p_j) = Po(\sum \lambda p_j) = Po(\sum \lambda_j)$$

$\Rightarrow$ Por otro lado $\sum_{j=1}^{m} N_j \sim Po(\sum \lambda_j)$ [Dem. en inciso anterior]

$\Rightarrow N = \sum_{j=1}^{m} N_j \Leftrightarrow N_j$ son indep. //

$\boxed{3}$ $N|\lambda \sim Po(n|\lambda)$, $\lambda \sim Ga(\lambda|\alpha,\beta)$

$$\Rightarrow f_{N|\lambda}(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}, \quad f_{\lambda}(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}$$

$$\rightarrow f_{N,\lambda}(n,\lambda) = \frac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{\beta})}\lambda^{(n+\alpha)-1}}{n!\,\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow f_N(n) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{\beta})}\lambda^{(n+\alpha)-1}}{n!\,\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\,d\lambda \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha)\,(1+\frac{1}{\beta})^{-(n+\alpha)}}{n!\;(\alpha-1)!\;\beta^{\alpha}} \cancelto{1}{\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1+\frac{1}{\beta})}\lambda^{(n+\alpha)-1}\cdot(1+\frac{1}{\beta})^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\,d\lambda}$$

$$= \frac{(n+\alpha-1)!}{n!\;\alpha!}\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^{-(n+\alpha)}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha} = \underbrace{\binom{n+\alpha-1}{n}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{n+\alpha}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha}}_{f_N(n) \sim BinNeg(n+\alpha;\, 1/\beta+1)}$$ //