ACT-11302 Calculo Actuarial III

Sesion 15 - Agregacion de Riesgos - Parte 3/4

Juan Carlos Martinez-Ovando

Departamento Academico de Actuaria y Seguros

Objetivo de la sesion

- Estudiar y comprender el uso de `aproximaciones asintoticas` para estimar la distribucion del monto agregado de siniestros $F_S(s)$ de un periodo de operacion dado.

4. Aproximacion analitica

- La aproximacion analitica para $F_{S_t}(s)$ descansa en el Teorema Central de Limite (TCL), argumentando que la composicion del portafolio, J_t, es relativamente `grande`.
- **Supone** que la media y varianza de S_t, $\mu_{S_t} = \mathbb{E}(S_t)$ y $\sigma^2_{S_t} = var(S_t)$ son conocidas.
- En la practica, ambos parametros son `estimados puntualmente` de alguna forma.

De acuerdo a lo anterior, **teoricamente** se sigue que cuando $J_t \to \infty$, la distribucion del **monto agregado de siniestros** puede aproximarse como:

$$
\begin{aligned}
F_{S_t}(s) &= \mathbb{P}\left(S_t \leq s\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_t - \mu_{S_t}}{\sigma_{S_t}} \leq \frac{s - \mu_{S_t}}{\sigma_{S_t}}\right) \\
&\approx \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{s - \mu_{S_t}}{\sigma_{S_t}}\right) \\
&\approx N\left(S_t | \mu_{S_t}, \sigma^2_{S_t}\right),
\end{aligned}
$$

donde Z es una variable aleatoria con,

$$Z \sim N(z|0,1).$$

Como anticipamos, **en la practica** los parametros μ_{S_t} y σ_{S_t} son desconocidos, pero se `estiman puntualmente` como

$$\begin{aligned} \mu_{S_t} &= J_t \widehat{\mu}_{X_t} \\ \mu_{S_t} &= J_t \widehat{\sigma}_{X_t}, \end{aligned}$$

donde $\widehat{\mu}_{X_t}$ y $\widehat{\sigma}_{X_t}$ son los `estimadores puntuales` de la **severidad individual media** y de la **desviacion estandar de la severidad individual**, respectivamente. Asi, se sigue

$$\begin{aligned} F_{S_t}(s) &\approx \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{s - \widehat{\mu}_{S_t}}{\widehat{\sigma}_{S_t}} \right) \\ &\approx N\left(S_t | \widehat{\mu}_{S_t}, \widehat{\sigma}^2_{S_t} \right). \end{aligned}$$

Comentarios

- El resultado anterior presupone que las severidades individuales, $(X_{tj})_{j=1}^{J_t}$, son `iid`.
- El resultado asintotico anterior tambien es valido solo en el caso que

$$var(X_t < \infty,$$

  (o equivalentemente, sujeto a $\mathbb{E}\left(X_t^2\right)$ sea finito).
- La condicion anterior se cumple solo en el caso en el que las severidades individuales sean de *riesgo moderado*, i.e. que no exista prevalencia de riesgos indidividuales grandes.
- Desde un punto de vista probabilistico, se sigue cuando el la distribucion del reclamo individual no sea de colas pesada (i.e. que no exhiba valores extremos).

Comentarios

- La aproximacion basada en el TCL resulta ser eficiente para aproximar $F_{S_t}(s)$ en la region concentrada en μ_{S_t} (*monto agregado de riesgo esperado*).
- **Sin embargo**, esta aproximacion puede ser imprecisa cuando deseemos estudiar alguna region extrema (generalmente la derecha) de la distribucion $F_{S_t}(s)$.

En tal circunstancia, es recomendable invocar a una `aproximacion asintotica ad-hoc`, como veremos a continuacion.

4.1. Aproximacion analitica modificada por sesgo

Previniendo que el monto agregado de siniestros, S_t, pueda exhibir sesgos en su distribucion, debido principalmente a que tiene soporte en la recta real positiva, pero tambien a sesgos en:

- la distribucion de los reclamos individuales
- distribucion del numero de reclamos a traves de θ,

se ha desarrollado una approximacion analitica alternativa a la del TCL.
Esta aproximacion descansa en la distribucion **gamma trasladada** con tres parametros, dada por

$$F_{S_t}(s) \approx Ga\left(s - s_{0t} | \alpha_t, \beta_t\right), \tag{1}$$

donde

- s_{0t} es un parametro de traslacion,
- α_t es un parametro de forma,
- β_t es un parametro de escala.

El kernel de la distribucion gamma en cuestion es de la forma

$$Ga\,(s - s_{0t}|\alpha_t, \beta_t) \propto (s - s_{0t})^{\alpha_t - 1} \exp\{-\beta_t(s - s_{0t})\}\mathbb{I}_{[s_{0t},\infty)}(s).$$

- Noten que el parametro s_{0t} no solo desplaza la distribucion, sino que modifica el soporte de la misma.

Comentarios

- Al igual que la aproximacion basada en el TCL, esta aproximacion presupone que los parametros $(s_{0t}, \alpha_t, \beta_t)$ son conocidos.
- En la practica, estos parametros deben `estimarse puntualmente`. La aproximacion, en este caso, descansara en el **metodo de momentos (MM).**

4.2. Calibracion por el metodo de momentos

El MM consiste en elegir los `valores expecificos de los parametros` de una distribucion de tal forma que los `primeros momentos teoricos` de la distribucion sean iguales a los `primeros momentos muestrales` de los datos.

- En nuestro caso, deseamos que los `primeros tres momentos teoricos` coincidan con los `primeros tres momentos muestrales` de la *distribucion gamma trasladada*.

Los `primeros tres momentos teoricos` de esta distribucion son:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{F_{S_t}}(S_t) &= s_{0t} + \frac{\alpha_t}{\beta_t} \\
\mathrm{var}_{F_{S_t}}(S_t) &= \frac{\alpha_t}{\beta_t^2} \\
\mathrm{sesgo}_{F_{S_t}}(S_t) &= \frac{2}{\alpha_t^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Considerando que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{S_t} &= \widehat{\mathbb{E}(S_t)}\\ \widehat{\sigma}_{S_t} &= \widehat{\mathrm{var}(S_t)}^{1/2}\\ \widehat{\gamma}_{S_t} &= \widehat{\mathrm{sesgo}(S_t)},\end{aligned}$$

son los `estimadores muestrales puntuales` de los tres momentos, planteamos el sistema de ecuaciones del MM:

$$\widehat{\mu}_{S_t} = s_{0t} + \frac{\alpha_t}{\beta_t} \tag{2}$$

$$\widehat{\sigma}_{S_t} = \frac{\alpha_t}{\beta_t^2} \tag{3}$$

$$\widehat{\gamma}_{S_t} = \frac{2}{\alpha_t^{1/2}}. \tag{4}$$

Resolviendo las ecuaciones (2)-(4), identificamos `estimadores puntuale del MM` de los tres parametros, como:

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}_t &= \frac{4}{\widehat{\gamma}_{S_t}},\\ \widehat{\beta}_t &= \frac{2}{\widehat{\gamma}_{S_t}\widehat{\sigma}_{S_t}},\\ \widehat{s}_{t0} &= \widehat{\mu}_{S_t} - 2\frac{\widehat{\sigma}_{S_t}}{\widehat{\gamma}_{S_t}}.\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$F_{S_t}(s) \approx Ga\left(s - \widehat{s}_{0t}|\widehat{\alpha}_t, \widehat{\beta}_t\right).$$

Comentarios

- Esta aproximacion es valida solo en el caso en que sesgo$(S_t) > 0$.
- En el caso limite cuando sesgo$(S_t) \to 0$ se tiene que la aproximacion gamma trasladada converge a la aproximacion normal inducida por el TCL.

El ultimo punto es un ejercicio de TAREA para entregarse.

4.3. Aproximacion analitica modificada por sesgo

Consideremos una aproximacion adicional a $F_S(s)$ basada en el ajuste a los primeros tres momentos de su distribucion.
La nueva aproximacion hace referencia a la distribucion `normal potencia`.
Considerando que los `parametros teoricos` $\mathbb{E}_{F_{S_t}}(S_t)$, $\text{var}_{F_{S_t}}(S_t)$ y $\text{sesgo}_{F_{S_t}}(S_t)$ son conocidos, tenemos

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_t - \mathbb{E}(S_t)}{sd(S_t)} \leq s + \frac{sesgo(S_t)}{6}(s^2 - 1)\right) \quad \approx \quad N(s|0,1).$$

Comentarios

- Al igual que con la `aproximacion gamma trasladada`, partimos del supuesto que $\mathbb{E}(S_t)$, $var(S_t)$ y $sesgo(S_t)$ son conocidos (con $sesgo(S_t) > 0$).
- **En la practica,** estos tres parametros tienen que estimarse.

Considerando que

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{S_t} &= \widehat{\mathbb{E}(S_t)} \\
\widehat{\sigma}_{S_t} &= \widehat{\mathrm{var}(S_t)}^{1/2} \\
\widehat{\gamma}_{S_t} &= \widehat{\mathrm{sesgo}(S_t)},
\end{aligned}
$$

son los `estimadores muestrales puntuales` de los tres momentos, tenemos el siguiente resultado.

La `tercera aproximacion asintotica` es de la forma:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{S_t-\widehat{\mu}_{S_t}}{\widehat{\sigma}_{S_t}}\leq s\right) &\approx N\left(\left(\frac{9}{\widehat{\gamma}^2_{S_t}}+\frac{6s}{\widehat{\gamma}_{S_t}}+1\right)^{1/2}-\frac{3}{\widehat{\gamma}_{S_t}}|0,1\right)\\
&= N\left(\underbrace{\left(\frac{9}{\widehat{\gamma}^2_{S_t}}+\frac{6s}{\widehat{\gamma}_{S_t}}+1\right)^{1/2}-\frac{3}{\widehat{\gamma}_{S_t}}}_{\text{argumento}}|\underbrace{0,1}_{\text{parametros}}\right),
\end{aligned}
$$

para cualquier valor de $s\geq 1$.

Comentario

- La `tercera aproximacion asintitica` es particularmente valida cuando para valores $s \geq 1$.
- En casos donde $s < 1$ (poco empleados), la aproximacion asintotica TCL o basada en la distribucion `gamma trasladada` seran mejores.

Comentarios de la sesion

- Hemos estudiado `tres aproximaciones asintoticas` de la distribucion de montos agregados $F_{S_t}(s)$.
- Las tres aproximaciones descansan en el supuesto que los montos individuales tienen momentos finitos:
  - Para `TCL` suponemos que $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$.
  - Para `gamma trasladada` y `modificada por sesgo` suponemos que $\mathbb{E}(X_t^3) < \infty$.
- De esta forma, `TCL` es valida en el caso donde la distribiucion de los montos individuales de siniestros *no es de colas pesadas*.
- Sin embargo, `gamma trasladada` y `modificada por sesgo` son dos aproximacion que pueden emplearse en casos donde la distribucion de los montos individuales si es de *valores extremos*.

Temas siguientes

- Recursiones en le modelo de riesgo colectivo (Recursion de De Pril y Panjer)

Table of Contents