ACT-11302 Cálculo Actuarial III
Primavera 2019
Tarea 02

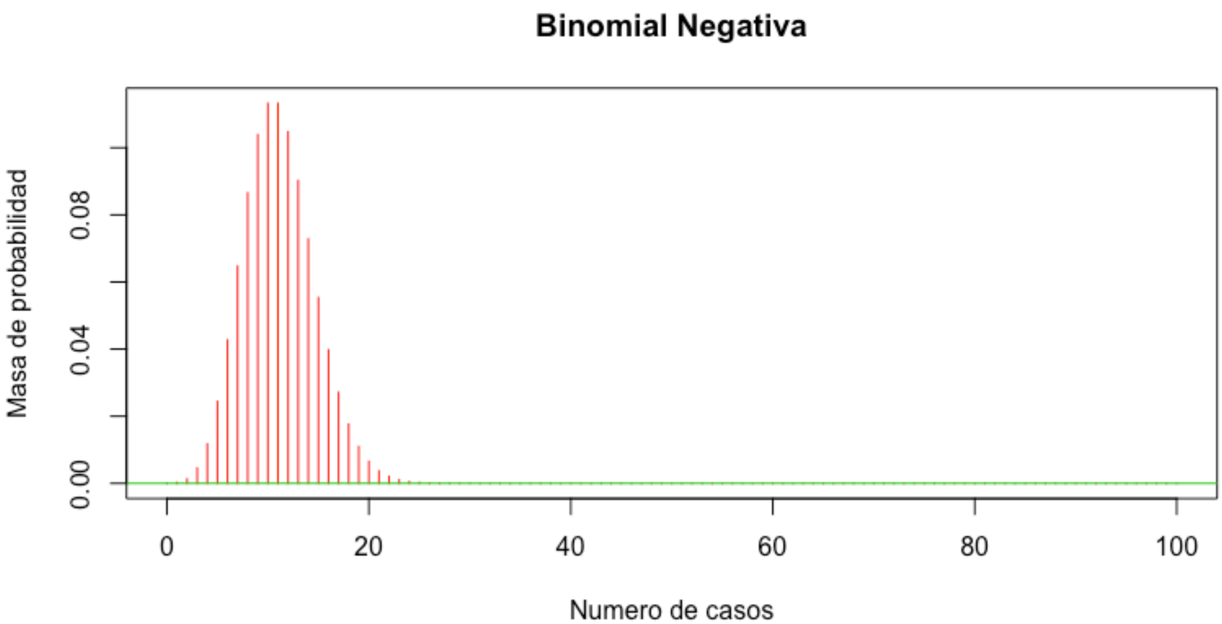
Nombre: Raquel Eugenia Leetoy del Hoyo
C.U.: 151270
19-Febrero-2019

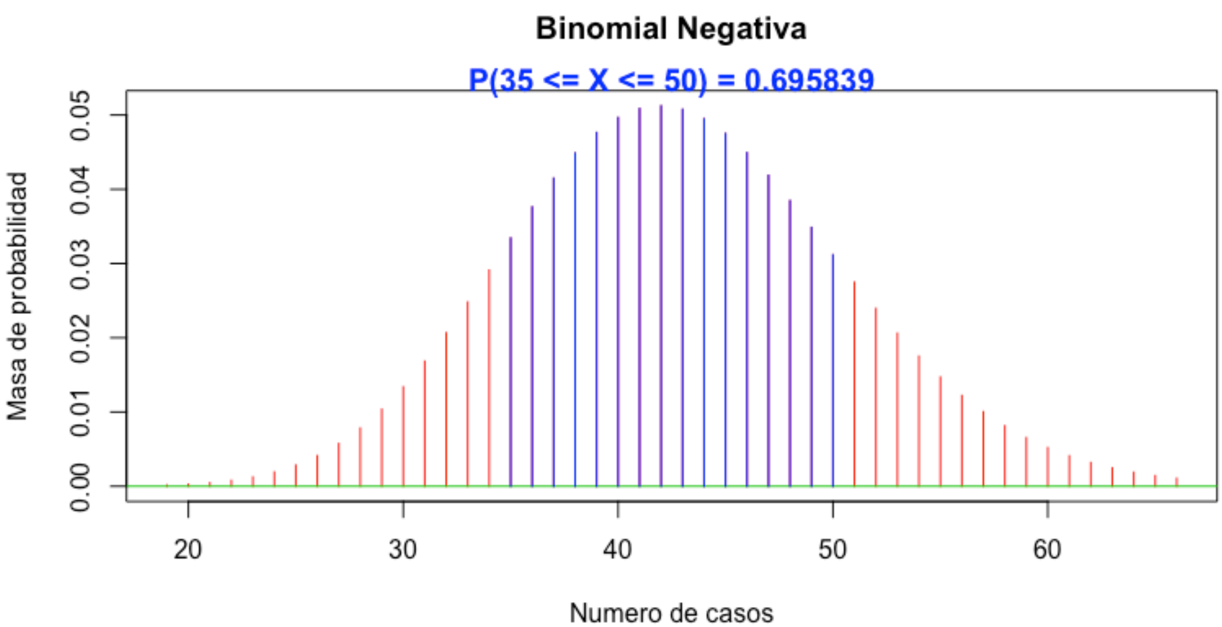
1.Modifique la función Poisson.Plot() para crear la función BinNeg.Plot() para generar resultados análogos a lo visto en el markdown de esta presentación

```
BinNeg.Plot <-
function(r,p,low=0,high=r,scale=F,a=NA,b=NA,calcProb=!all(is.na(c(a,b))),quantile=NA,calcQuant=!is.na(quantile)){
 # Binomial Negativa
 sd = sqrt(r*(1-p)/p^2)
 if(scale && (r > 10)){
  low = max(0, round(r*(1-p)/p-3*sd))
  high = min(r, round(r*(1-p)/p+3*sd))
 }
 values = low:high
 probs = dnbinom(values,r,p)
 plot(c(low,high), c(0,max(probs)), type = "n",
    xlab = "Numero de casos",
    ylab = "Masa de probabilidad",
    main = "Binomial Negativa")
 lines(values, probs, type = "h", col = 2)
 abline(h=0,col=3)
 if(calcProb) {
  if(is.na(a))
   a = 0
  if(is.na(b))
   b = r
  if(a > b) {
   d = a
   a = b
   b = d
  }
  a = round(a)
  b = round(b)
  prob = pnbinom(b,r,p) - pnbinom(a-1,r,p)
  title(paste("P(",a," <= X <= ",b,") = ",round(prob,6),sep=""),line=0,col.main=4)
  u = seq(max(c(a,low)),min(c(b,high)), by=1)
  v = dnbinom(u,r,p)
  lines(u,v,type="h",col=4)
 }
 else if(calcQuant==T) {
  if(quantile < 0 || quantile > 1)
   stop("El cuantil debe estar entre 0 y 1")
  x = qnbinom(quantile,r,p)
  title(paste(" ",quantile," quantile = ",x,sep=""),line=0,col.main=4)
  u = 0:x
  v = dnbinom(u,r,p)
  lines(u,v,type="h",col=2)
 }
 return(invisible())
}

BinNeg.Plot(100,0.9)

BinNeg.Plot(100,0.7,a=35,b=50,scale=T)
```


Binomial Negativa
Masa de probabilidad
0.00
0.04
0.08
0
20
40
60
80
100
Numero de casos


Binomial Negativa
P(35 <= X <= 50) = 0.695839
Masa de probabilidad
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
20
30
40
50
60
Numero de casos

2.-Demuestra las propiedades de agregación y desagregación de la distribución Poisson

a) Agregación

Sean $N_1, \ldots, N_n$ variables aleatorias independientes con distribución Poisson, $Po(N_j = n_j \mid \lambda_j)$

$\Rightarrow N = \sum_{j=1}^{n} N_j$ y $N \sim$ Poisson

$\Rightarrow N$ tiene $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$

$\Rightarrow \lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n}$

$\ni$ la g.m. de la Poisson es $M_N(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$

$\Rightarrow$ ¿$F(x)$?

$M_N(t) = M_{N_1}(t) + M_{N_2}(t) + \ldots + M_{N_n}(t)$

$= e[\lambda(\frac{\lambda_1}{\lambda} M_{N_1}(1) + \frac{\lambda_2}{\lambda} M_{N_2}(2) + \ldots + \frac{\lambda_q}{\lambda} M_{N_n}(n) - 1]$

$\therefore F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} F_2(x) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda} F_n(x)$

b) Desagregación

$N \sim$ Poisson $(n \mid \lambda)$ $\lambda > 0$, tenemos los eventos clasificados en k tipos con probabilidades $p_1, \ldots, p_k$ $\ni$ $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1$

$N \sim$ Poisson $(n \mid \lambda \cdot 1) = Po(n \mid \lambda \sum_{i=1}^{k} p_i)$

$\therefore \sum_{i=1}^{n} N_i \sim Po(n \mid \Sigma \lambda_i)$

$\Rightarrow N = \Sigma N_i \Leftrightarrow \lambda_i = p_i \lambda$ con N_i independientes

3.-Realicen el cálculo analítico para demostrar la identidad de la distribución binomial negativa como mezcla de poisson-gamma

J. $N|\lambda \sim Po(n|\lambda)$ donde $\lambda \sim Gamma(\lambda|a,b)$

$\Rightarrow$ P.d. $P(N=n) = \int_0^\infty Po(n|\lambda)\, Gamma(\lambda|a,b)\, d\lambda$

n=x usé esta notación para facilitarmelo

$$\Rightarrow P(N=x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda/\beta}\cdot\frac{1}{\beta}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{x!\,\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha}\int_0^\infty \left(\lambda(1+1/\beta)\right)^{x+\alpha-1} e^{-\lambda(1+1/\beta)}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)d\lambda$$

$$= \frac{1}{x!\,\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha}\int_0^\infty u^{x+\alpha-1}e^{-u}\,du$$

$$= \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x!\,\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha+x}$$

$$= \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x!\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{x}$$

$\therefore$ llegamos a una binomial negativa con $p=\frac{1}{\beta+1}$, $q=\frac{\beta}{\beta+1}$

$\Rightarrow N \sim$ Bin Negativa $(x|\alpha)$, donde $f_N(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha)}{x!\,\Gamma(\alpha)}\, p^\alpha q^x$