Selección de carteras con base en valor en riesgo y en déficit esperado

Juan Carlos Martínez-Ovando

Primavera 2019

ITAM, México

Agenda

Construcción de carteras

Notación

Variables

- X_{ji} - componente j de la observación i
- $S_j = \sum_i X_{ji}$ - agregado del componente j
- π_j - prima de riesgo del componente j
- α_j - composición del componente j de la cartera
- $C = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j S_j$ - composición de la cartera para la observación i
- $j = 1 \ldots, J$ - componentes
- $i = 1, \ldots, n$ - observaciones

Composición de la cartera

Objetivo

Definir α_j*s tal que minimicen un* **tipo de riesgo** *particular en términos del valor de la cartera*

$$C = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j S_j.$$

Composición de la cartera

Objetivo

Definir α_j*s tal que minimicen un* **tipo de riesgo** *particular en términos del valor de la cartera*

$$C = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j S_j.$$

Composición de la cartera

- $\alpha_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, p$
- $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$

Enfoques

Maximización de utilidad
El enfoque tradicional para la construcción de carteras define

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \underset{\mathcal{A}_{J-1}}{\arg\max}\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left\{U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{S})\right\}$$

donde

- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_J)$
- $\boldsymbol{S} = (S_1 \ldots, S_J)$
- $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad para $\boldsymbol{S}$

Enfoque: Media-varianza

Markowitz-de Finetti
Considerando la función de utilidad propuesta por Markowitz y de Finetti

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \arg\max_{\mathcal{A}_{J-1}} \left\{ \boldsymbol{\alpha}' \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\boldsymbol{S}\right) - 1/2\lambda \boldsymbol{\alpha}' var_{\mathbb{P}}\left(\boldsymbol{S}\right) \boldsymbol{\alpha} \right\}$$

donde

- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_J)$
- $\boldsymbol{S} = (S_1 \ldots, S_J)$
- $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad para $\boldsymbol{S}$
- λ - lagrangiano
- *La optimización admite restricciones adicionales...*

Enfoque: Media-varianza

Comentarios

- La construcción del portafolio está basada en un argumento de *dispersión*
- Inclusive, extensiones con funciones de utilidad más flexibles (más momentos) considerarán también argumentos referentes a la *dispersión* y *sesgo* de los componentes de la cartera
- Sería **deseable** definir la cartera considerando argumentos relativos a **pérdidas** (y/o **ganancias**), particularmente cuando éstas sean **extremas**

Medidas de riesgo

Valor en riesgo

Un poco más de notación

El valor en riesgo (VaR) es el valor de la cartera que caracteriza las pérdidas extremas con relación a un nivel de probabilidad $0 < q < 1$ *dado, i.e.*

$$VaR_{\boldsymbol{\alpha},q} \quad \text{tal que} \quad \int_{VaR_{\boldsymbol{\alpha},q}}^{\infty} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\alpha}}(c)\mathrm{d}c = q$$

donde

- $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ - distribución para C inducida por $\mathbb{P}$ y $\boldsymbol{\alpha}$
- $\mathbb{P}$ - incertidumbre en los componentes de la cartera
- $\boldsymbol{\alpha}$ - composición de la cartera

Déficit esperado

Definición

El deficit esperado (ES_q) se define como el valor esperado del valor de la cartera en exceso del VaR para un cierto nivel $0 < q < 1$*, i.e.*

$$ES_{\boldsymbol{\alpha},q} = \int_{VaR_{\boldsymbol{\alpha},q}}^{\infty} c\mathbb{P}_{\boldsymbol{\alpha}}(c)\mathrm{d}c \tag{1}$$

donde

- $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ - distribución para C inducida por $\mathbb{P}$ y $\boldsymbol{\alpha}$
- $\mathbb{P}$ - incertidumbre en los componentes de la cartera
- $\boldsymbol{\alpha}$ - composición de la cartera

Composición de la cartera

Objetivo

Definir la composición de la cartera α tal que para un nivel

$$0 < q < 1,$$

las pérdidas esperadas en exceso del VaR sean mínimas, i.e.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^* &= \underset{\mathcal{A}_{J-1}}{\arg\min} \left\{ ES_{\boldsymbol{\alpha},q} \right\} \\
&= \underset{\mathcal{A}_{J-1}}{\arg\min} \left\{ \int_{VaR_{\boldsymbol{\alpha},q}}^{\infty} c\mathbb{P}_{\boldsymbol{\alpha}}(c)\mathrm{d}c \right\}.
\end{aligned}$$

Observaciones

- La optimización no es trivial
- La optimización es estocástica (involucra aleatoriedad *intrínseca* y *epistémica*)

Composición de la cartera

Replanteamiento

Supongamos M (relativamente grande) posibles escenarios futuros de los componentes de la cartera

$$\mathcal{S}^M = \left\{ S_1^{(m)}, \ldots, S_J^{(m)} \right\}_{m=1}^{M}.$$

Entonces, el valor ES puede replantearse como

$$\begin{aligned} ES_{\boldsymbol{\alpha},q} &\approx \frac{1}{M_q} \sum_m c_{\boldsymbol{\alpha}}^{(m)} \\ &= \frac{1}{M_q} \sum_m \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{s}^{(m)} \mathbb{I}\left(\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{s}^{(m)} > VaR_{\boldsymbol{\alpha},q} \right) \\ &= \widehat{ES}_{\boldsymbol{\alpha},q} \qquad (2) \end{aligned}$$

Composición de la cartera

Replanteamiento
Considerando la aproximación anterior, definimos el problema de construcción de cartera como

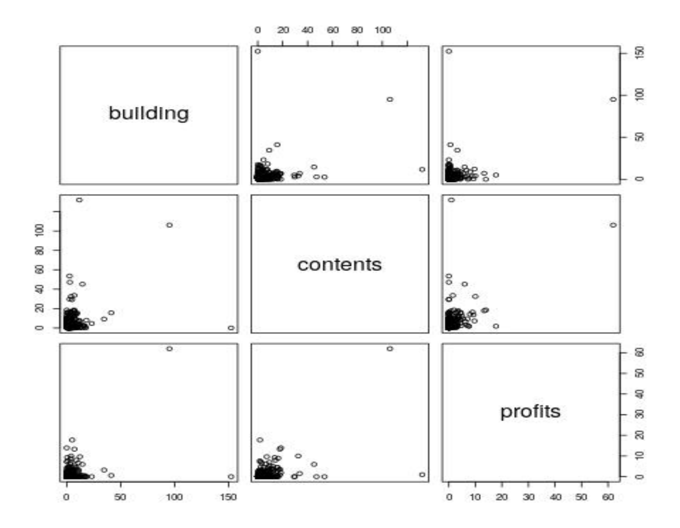
$$\boldsymbol{\alpha}^* \quad = \quad \underset{\mathcal{A}_{J-1}}{\arg\max} \left\{ \alpha \mathbb{E}(\boldsymbol{S}) - \lambda \widehat{ES}_{\boldsymbol{\alpha},q} \right\}$$

- Necesitamos definir un algoritmo para controlar la estimación de Monte Carlo de $ES_{\boldsymbol{\alpha},q}$

Reaseguro cuota-parte

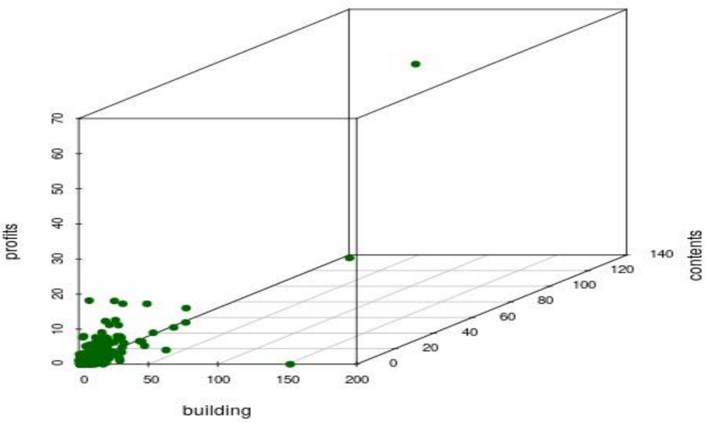
Datos

Figure 1: Cartera de seguros de edificios en Dinamarca



Datos

Figure 2: Cartera de seguros de edificios en Dinamarca



Modelo

Especificación
Suponemos que la composición de los reclamos se describe como

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{s}_i) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k p(\boldsymbol{s}_i|\boldsymbol{u}_k)$$

donde

$$\begin{aligned} p\left(\{w_k, \boldsymbol{u}_k\}_{k=1}^{\infty}\right) &= \mathrm{SB}\left(\{w_k\}_{k=1}^{\infty}\right) \times \prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}(\boldsymbol{u}_k|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \\ p(\boldsymbol{s}_i|\boldsymbol{u}_k) &= \left\{\prod_{j=1}^{p} a_j x_i^{a_j-1}\right\} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{p} a_j u_j\right\} \mathbb{I}\left(\boldsymbol{s}_i < \exp\{\boldsymbol{u}_k\}\right) \end{aligned}$$

Modelo

Especificación

- El la distribución media de $\boldsymbol{s}_i$ es multivariada beta-log-normal
- Las distribuciones marginales de s_{ij} son beta-log-normales
- Caso límite cuando $a_k \to \infty$ se recupera la distribución log-normal
- Los parámetros de *sesgo*, *localización* y *dispersión* se modelan por separado

Parámetros

Distribuciones iniciales

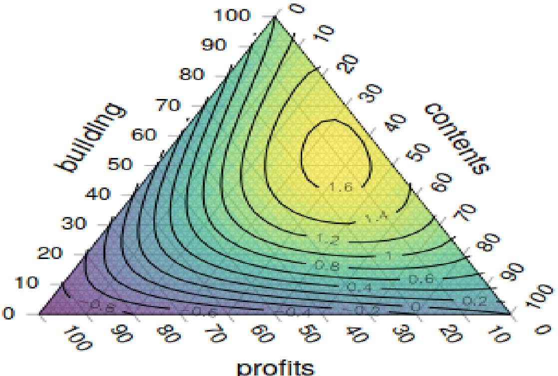
$$
\begin{aligned}
p(a_1, \ldots, a_p) &= \prod_{j=1}^{p} \mathrm{Ga}(a_j | c_0.d_0) \\
p(\boldsymbol{\mu}) &= \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{S}_0) \\
p(\boldsymbol{\Sigma}) &= \mathrm{WiInv}(\boldsymbol{\Sigma} | e_0, \boldsymbol{C}_0)
\end{aligned}
$$

Distribuciones final objetivo
Introducimos varibales latentes y aleatorizamos α

$$p\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \{w_k, \boldsymbol{u}_k\}, \left\{\boldsymbol{S}_{T+1}^{(m)}\right\}_{m=1}^{M}, \alpha | \boldsymbol{S}_1, \ldots, \boldsymbol{S}_T\right)$$

Datos

Figure 3: Composición de la cartera óptima de edificios en Dinamarca



Discusión

Discusión

Resumen

- El procedimiento de optimización considera la aleatoriedad intrínseca y epistémica del modelo
- La optimización descansa en un resultado de Monte Carlo anidado
- La optimizacón es estocástica

¡Gracias por su atención!

juan.martinez.ovando@itam.mx