

# ACT-11302: Cálculo Actuarial III

## Sesión 10a: Teoría de ruina

Juan Carlos Martínez-Ovando

ITAM

Otoño 2019

# 1. Teoría de ruina

# 1.1. Teoría de ruina: Preliminares

## Antecedentes

- ▶ Una aseguradora se vuelve **insolvente** (o está en **quiebra**) cuando sus egresos son mayores que sus ingresos
- ▶ Bajo ciertas condiciones sobre el **capital inicial** y los **flujos de efectivo operativos**, el **tiempo** y el **tamaño** de la próxima quiebra son naturalmente dos variables aleatorias
- ▶ La **teoría de ruina** tiene como objetivo estudiar las conexiones entre estas condiciones iniciales y las distribuciones de estas variables, para cuantificar la posibilidad de ruina y controlarla.

# 1.1. Teoría de ruina: Preliminares

## Preliminares

La **teoría de ruina** consiste en el estudio de procesos temporales en  $t$  del **capital** de una empresa, denotado por  $U(t)$ , en particular para una **empresa aseguradora**. El **capital**, en si mismo, es definido a través de una relación contable, donde en un  $t$  particular se cumple

$$U(t) = U(0) + \Pi(t) - S(t),$$

siendo

- ▶  $U(0)$  el **capital inicial** de operación en el tiempo  $t = 0$ ,
- ▶  $\Pi(t)$  el **monto acumulado por derechos** (a.k.a. por suscripción) entre  $t = 0$  y  $t$
- ▶  $S(t)$  el **monto acumulado de obligaciones** (a.k.a. reclamos) entre  $t = 0$  y  $t$
- El estudio de  $\Pi(t)$  compete al 'estudio de riesgos de mercado', mientras que  $S(t)$  compete al 'estudio de riesgo operacional' (nuestro curso).
- Nosotros supondremos que  $U(0)$  y  $\Pi(t)$ , para todo  $t \geq 0$  son dados.
- Suponiendo que  $U(0)$  y  $\Pi(t)$  son dados, y  $S(t)$  desconocido/aleatorio, tendremos que  $U(t)$  es en si mismo aleatorio.

# 1.1. Teoría de ruina: Preliminares

## Solvencia

- ▶ La implicación social del seguro justifica la regulación de solvencia; aunque no es claro
- ▶ Quizás la justificación más convincente para la supervisión prudencial de los seguros es la **hipótesis de representación** (Dewatripont y Tirole,1994):

*...las deudas en seguros afecta a agentes económicos dispersos que no letrados en cuestiones financieras (asegurados) ... la autoridad reguladora es responsable de representarlos y tomar en su lugar la decisión de amortización anticipada o de liquidación...*

## 1.2. Teoría de ruina: Objetivos

### Objetivos

- ▶ El propósito de la **teoría de ruina** es el de estudiar/anticipar escenarios en que el **capital de operaciones** es negativo, en cuyo caso la **empresa** incurriría en **ruina**.
- ▶ Siendo  $S(t)$  y, por ende,  $U(t)$  aleatorios, la **ruina** tendrá una probabilidad de ocurrencia, denotada por

$$\psi(t) = \mathbb{P}(U(t) < 0 | U(0), \Pi(t)).$$

- ▶ En **riesgo operacional**, la probabilidad  $\mathbb{P}(\cdot)$  se calcula respecto a la incertidumbre acerca de  $S(t)$ .

## 1.2. Teoría de ruina: Objetivos

### Objetivos

1. Definir un procedimiento para determinar el capital de operaciones  $U$
2. Calcular la posibilidad de ruina operativa (horizontes de 12 meses)
3. Identificar elementos de transferencia de riesgos/reaseguro





# 1.4 Teoría de ruina: Un ejemplo

## Reaseguro (un escenario)

Elaboramos sobre la conexión entre **reaseguro** y **solvencia** (un ejemplo):

- ▶ Una compañía de seguros deposita  $U$  capital inicial y suscribe  $J$  riesgos i.i.d.
- ▶ La prima de riesgo *individual* se fija según el **principio del valor esperado**

$$\Pi_X = (1 + \rho) \mathbb{E}_{F_X}(X). \quad (1)$$

**Lo veremos en un momento...**

- ▶ Definimos  $S$  el monto agregado de pérdida. La **probabilidad de ruina** de la compañía de seguros, se define como

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbb{P}(C + J(1 + \rho) \mathbb{E}_{F_X}(X) - S < 0) \\ &= \mathbb{P}(S - J \mathbb{E}_{F_X}(X) > C + J\rho \mathbb{E}_{F_X}(X)). \end{aligned}$$

# 1.4 Teoría de ruina: Un ejemplo

## Reaseguro (un escenario)

- Por la desigualdad de Tchebychev,

$$\psi \leq 1/\beta^2,$$

donde

$$\beta = \frac{C + J\rho \mathbb{E}(X)}{J^{1/2} d.e.(X)},$$

es un coeficiente conocido como **coeficiente de seguridad** de la operación de la aseguradora.

# 1.4 Teoría de ruina: Un ejemplo

## Reaseguro (un escenario)

- ▶ La desigualdad anterior da una cota a la probabilidad de ruina, pero esta cota es demasiado **conservadora**
- ▶ Cuanto mayor sea  $\beta$ , menor será  $\psi$  (probabilidad de ruina)
- ▶ Para aumentar el coeficiente de seguridad, bajo una estructura de riesgo dada, es posible:
  - a) Incrementar el capital  $U$
  - b) Incrementar la suscripción  $J$
  - c) Incrementar la prima de riesgo *individual* a través de incrementar  $\rho$

# 1.4 Teoría de ruina: Un ejemplo

## Reaseguro (un escenario)

- Obs.1 Para un  $U$  dado, las opciones (b) y (c) son complicadas
- Obs.2 Para un  $U$  dado, la única manera de ajustar el coeficiente de seguridad en el corto plazo es actuar a través del reaseguro, i.e. **alterar la estructura de riesgo**
- El **reaseguro** consiste en reducir  $d.e.(X)$  (transferencia de riesgo) y disminuir  $\rho$  (transferencia de utilidades)

*Determinar una estrategia óptima de reaseguro consiste en arbitrar entre estos dos efectos, uno positivo y otro negativo.*

## 2. Modelo de Crámer-Lündberg

## 2.1 Modelo de Crámer-Lündberg: Fundamentos

### Antecedentes

El modelo de Crámer-Lündberg (C-L) describe el valor neto de capital en el tiempo,  $U_t$ , de acuerdo a un **proceso de riesgo**,

$$U_t = U_0 + \Pi_t - S_t, \quad (2)$$

donde

$U_0$  - capital inicial al tiempo  $t = 0$

$\Pi_t$  - suscripción al tiempo  $t_0$

$S_t$  - reclamos totales al tiempo  $t$ .

## 2.1 Modelo de Crámer-Lündberg: Fundamentos

### Supuestos

Respecto a  $S_t$ , enfoque de **riesgo colectivo**, i.e.

$$S_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_j,$$

donde,

$N_t$  - proceso Poisson homogéneo con intensidad  $\lambda > 0$

$X_j$ s - v.a.i.i.d. con  $F_X(x)$  y  $M_X(s)$  dadas tales que  $\mathbb{E}(X_j) = \mu < \infty$ .

Respecto a  $\Pi_t$ , enfoque de **suscripción continua**,  $\Pi_t = \Pi t$

$\Pi$  - prima de riesgo instantanea,

$$\Pi = (1 + \theta)\lambda\mu,$$

con  $\theta$  factor de recarga.

## 2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Definición

### Definición ruina

Se define un episodio de **ruina** cuando

$$U_t < 0.$$

Asociado con esto, consideramos

$$T = \inf \{t : U_t < 0\},$$

como la variable de **tiempo de ruina**.



## 2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Definición

### Probabilidades de interés

**Probabilidad de ruina:**

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \Psi(U_0). \quad (3)$$

**Probabilidad de ruina finita:**

$$\mathbb{P}(T < t) = \Psi(U_0, t). \quad (4)$$

### Objetivo

*Calcular o acotar las probabilidades de ruina.*

## 2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Definición

### Probabilidades de interés

**Probabilidad de ruina:**

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \Psi(U_0). \quad (3)$$

**Probabilidad de ruina finita:**

$$\mathbb{P}(T < t) = \Psi(U_0, t). \quad (4)$$

### Objetivo

*Calcular o acotar las probabilidades de ruina.*

## 2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Coeficiente de Lündberg

### Definición

El **coeficiente de Lündberg** se define como la solución positiva de la ecuación

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r) \quad (5)$$

en términos de  $r$ . (*La solución no siempre existe*).

### Equivalencias

$$\lambda + \Pi r = \lambda M_X(r),$$

o,

$$\Pi = \frac{\log M_S(r)}{r},$$

para

$$\Pi = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

## 2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Coeficiente de Lündberg

### Definición

El **coeficiente de Lündberg** se define como la solución positiva de la ecuación

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r) \quad (5)$$

en términos de  $r$ . (*La solución no siempre existe*).

### Equivalencias

$$\lambda + \Pi r = \lambda M_X(r),$$

o,

$$\Pi = \frac{\log M_S(r)}{r},$$

para

$$\Pi = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

## 2.3. Modelo de Crámer-Lündberg: Cota

### Definición

Si la solución para  $r$  existe en las ecuaciones anteriores, se sigue que las **probabilidades de ruina** pueden acotarse por

$$\Psi(U_0, t) \leq \Psi(U_0) \leq \exp\{-rU_0\}. \quad (6)$$

Se define así a la cota de Lündberg de la probabilidad de ruina.

### Probabilidad de ruina

Adicionalmente, la probabilidad de ruina puede definirse como

$$\Psi(U_0) = \frac{\exp\{-rU_0\}}{\mathbb{E}_{F_{S_t}}(\exp\{-rC_T\} | T < \infty)} \leq \exp\{-rU_0\}.$$

El denominador  $\mathbb{E}_{F_{S_t}}(\exp\{-rC_T\} | T < \infty)$  es mayor a 1, cuando  $r$  existe.

## 2.3. Modelo de Crámer-Lündberg: Cota

### Definición

Si la solución para  $r$  existe en las ecuaciones anteriores, se sigue que las **probabilidades de ruina** pueden acotarse por

$$\Psi(U_0, t) \leq \Psi(U_0) \leq \exp\{-rU_0\}. \quad (6)$$

Se define así a la cota de Lündberg de la probabilidad de ruina.

### Probabilidad de ruina

Adicionalmente, la probabilidad de ruina puede definirse como

$$\Psi(U_0) = \frac{\exp\{-rU_0\}}{\mathbb{E}_{F_{S_t}}(\exp\{-rC_T\} | T < \infty)} \leq \exp\{-rU_0\}.$$

El denominador  $\mathbb{E}_{F_{S_t}}(\exp\{-rC_T\} | T < \infty)$  es mayor a 1, cuando  $r$  existe.

## 2.4. Modelo de Crámer-Lündberg: Inexistencia

### Condición

En el modelo C-L, la ecuación que define la existencia de la cota de Lündberg tiene solución no negativa si y sólo si

$$\int_0^{\infty} \exp\{rx\} F_X(dx) < \infty \quad (7)$$

al rededor de 0 en términos de  $r$ .

- Esta condición se satisface si,

$$\frac{1 - F_X(x)}{\exp\{-rx\}} \leq \mathbb{E}_{F_X}(\exp\{rX\}).$$

- La cola de la distribución  $F_X$  debe estar acotada exponencialmente.

## 2.5. Modelo de Crámer-Lündberg: Comentarios

### Comentarios

El modelo de C-L es un modelo que descansa en supuestos estrictos de

- ▶ **homogeneidad temporal**
- ▶ **homogeneidad de riesgos (dentro del portafolio)**
- ▶ **previsión moderada de riesgos individuales.**

Estos supuestos hacen que los cálculos analíticos sean posibles de obtener.

### Consideraciones prácticas

En la **práctica**, muchos de estos supuestos tienen que relajarse; en cuyo caso, cálculos basados en aproximaciones asintóticas, analíticas y/o numéricas serán requeridos.



## 2.5. Modelo de Crámer-Lündberg: Comentarios

### Comentarios

El modelo de C-L es un modelo que descansa en supuestos estrictos de

- ▶ **homogeneidad temporal**
- ▶ **homogeneidad de riesgos (dentro del portafolio)**
- ▶ **previsión moderada de riesgos individuales.**

Estos supuestos hacen que los cálculos analíticos sean posibles de obtener.

### Consideraciones prácticas

En la **práctica**, muchos de estos supuestos tienen que relajarse; en cuyo caso, cálculos basados en aproximaciones asintóticas, analíticas y/o numéricas serán requeridos.