

# ACT-11302: Cálculo Actuarial III

## Sesion 09b: Primas de riesgo

Juan Carlos Martínez-Ovando

ITAM

Otoño 2019

# 1. Prima de riesgo

# 1.1 Prima de riesgo: Antecedentes

## Definición

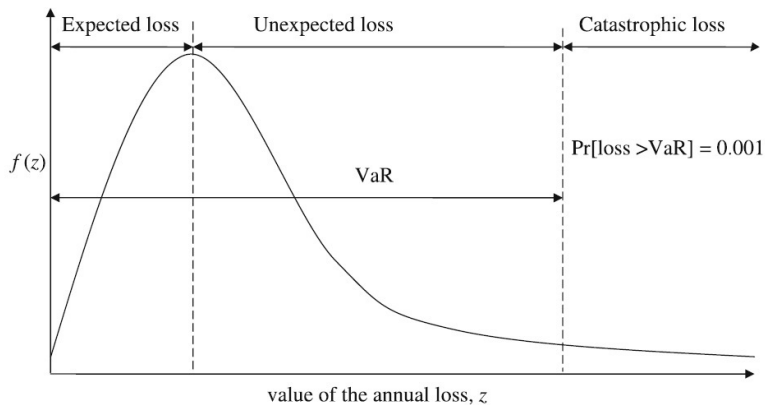
- ▶ La **prima de riesgo** es el monto que un asegurado paga por la cobertura parcial o total contra un riesgo.
- ▶ Denotamos por  $\Pi_S$  a la prima que una aseguradora cobra para cubrir el riesgo  $S$ .
- ▶ El riesgo  $S$  es una variable aleatoria, así,  $\Pi_S$  es una función de la v.a.  $S$ , i.e.

$$\Pi_S = \phi(S),$$

para alguna función  $\phi$ , la cual define el **principio de cálculo de primas**.

## 1.1 Prima de riesgo: Antecedentes

Figura: Principio de cálculo de primas



## 1.2 Prima de riesgo: Propiedades

### a) No negatividad

Es deseable que la prima de riesgo no sea menor que la pérdida esperada, i.e.

$$\Pi_S \geq \mathbb{E}(S). \quad (1)$$

Esta propiedad es fundamental para la *teoría de ruina*.

### b) Aditividad

Para dos riesgos independientes,  $S_1$  y  $S_2$ , se desea,

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}. \quad (2)$$

Esta propiedad es fundamental para la combinación de riesgos.

## 1.2 Prima de riesgo: Propiedades

### a) No negatividad

Es deseable que la prima de riesgo no sea menor que la pérdida esperada, i.e.

$$\Pi_S \geq \mathbb{E}(S). \quad (1)$$

Esta propiedad es fundamental para la *teoría de ruina*.

### b) Aditividad

Para dos riesgos independientes,  $S_1$  y  $S_2$ , se desea,

$$\Pi_{S_1+S_2} = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2}. \quad (2)$$

Esta propiedad es fundamental para la combinación de riesgos.

## 1.2 Prima de riesgo: Propiedades

### c) Invarianza en escala

Si  $S$  es un riesgo y  $\alpha$  es un escalar positivo (fijo y conocido), es deseable,

$$\Pi_{\alpha S} \geq \alpha \Pi_S. \quad (3)$$

Esta propiedad es fundamental para manipular primar de riesgo en unidades monetarias.

### d) Consistencia

Si  $S$  es un riesgo y  $\delta$  es un escalar positivo (fijo y conocido), se desea,

$$\Pi_{S+\delta} = \Pi_S + \delta. \quad (4)$$

Esta propiedad se refiere a la invarianza ante traslaciones.

## 1.2 Prima de riesgo: Propiedades

### c) Invarianza en escala

Si  $S$  es un riesgo y  $\alpha$  es un escalar positivo (fijo y conocido), es deseable,

$$\Pi_{\alpha S} \geq \alpha \Pi_S. \quad (3)$$

Esta propiedad es fundamental para manipular primar de riesgo en unidades monetarias.

### d) Consistencia

Si  $S$  es un riesgo y  $\delta$  es un escalar positivo (fijo y conocido), se desea,

$$\Pi_{S+\delta} = \Pi_S + \delta. \quad (4)$$

Esta propiedad se refiere a la invarianza ante traslaciones.



## 1.2 Prima de riesgo: Propiedades

### e) No estafa

En caso de existir un monto máximo de reclamo,  $x^*$ , se desea,

$$\Pi_S \leq x^*. \quad (5)$$

En este caso,  $\Pi_S$  se refiere a la prima se riesgo individual.

Esta propiedad es fundamental para efectuar el seguro.

# 1.3 Prima de riesgo: Ejemplos

## I. Prima de riesgo pura

Es la prima de riesgo básica, se define como la pérdida esperada, i.e.

$$\Pi_S = \mathbb{E}(S). \quad (6)$$

- ▶ No es atractiva para la aseguradora.
- ▶ No tiene margen de ganancia (o negocio).
- ▶ Alta exposición a riesgo de ruina.
- ▶ A pesar de lo anterior, satisface los 5 principios anteriores.

## 1.3 Prima de riesgo: Ejemplos

### II. Prima de riesgo basada en el principio del valor esperado

Es la prima de riesgo básica, se define como la pérdida esperada ajustada por un margen de aceptación de riesgo,  $\theta > 0$ , i.e.

$$\Pi_S = (1 + \theta) \mathbb{E}(S). \quad (7)$$

El factor  $\theta$  se conoce como factor de carga o ajuste. Representa el nivel de aversión al riesgo de la aseguradora.

- Satisface los principios deseables salvo el de consistencia, pues

$$\Pi_{S+\delta} > \Pi_S + \delta,$$

y el de **no estafa**.

- Es más conservadora que la prima de riesgo básica.
- Asigna la misma prima a todos los riesgos con la "misma" pérdida esperada.
- No toma en cuenta momentos mayores al primero.

## 1.3 Prima de riesgo: Ejemplos

### III. Prima de riesgo basada en el principio de la varianza

Es la prima de riesgo básica, se define como la pérdida esperada ajustada por un margen de aceptación de riesgo,  $\alpha > 0$  en función de su varianza, i.e.

$$\Pi_S = \mathbb{E}(S) + \alpha \text{var}(S). \quad (8)$$

En este caso, el factor de recarga es un múltiplo del segundo momento del riesgo.

- Satisface los principios deseables salvo el de invarianza en escala, pues

$$\Pi_{\gamma S} \neq \gamma \Pi_S,$$

para  $\gamma > 0$ , y el de **no estafa**.

- Es más conservadora que la prima de riesgo básica.
- Asigna primas diferenciadas en función del segundo momento del riesgo.
- No toma en cuenta momentos mayores al segundo momento.

## 1.3 Prima de riesgo: Ejemplos

### IV. Prima de riesgo basada en el principio de utilidad cero

La aseguradora tiene una preferencia de riesgos dada por la función de utilidad  $u(\cdot)$  (con  $u'(\cdot) > 0$  y  $u''(\cdot) < 0$ ). Es deseable así que  $\Pi_S$  sea tal que,

$$u(W) = \mathbb{E}(u(W + \Pi_S - X)), \quad (9)$$

donde  $W$  es el excedente de la aseguradora.

En este caso, el factor de recarga es un múltiplo del segundo momento del riesgo.

- ▶ Es atractiva, pues incorpora información acerca de todos los momentos del riesgo  $S$ .
- ▶ Está en función del margen de excedente de la aseguradora.
- ▶ Satisface los principios desables, salvo el de invarianza en escala, pues

$$\Pi_{\gamma S} \neq \gamma \Pi_S.$$

## 1.3 Prima de riesgo: Ejemplos

### V. Prima de riesgo basada en el principio de prima ajustada

Suponiendo que el riesgo  $S$  se describe con  $F_S(S)$ , se define

$$\Pi_S = \int_0^\infty (1 - F_S(S))^{1/\rho} dx, \quad (10)$$

donde  $\rho \geq 1$  es el índice de riesgo.

En este caso, se da un mayor peso a los riesgos extremos en  $S$  (cola derecha de la distribución  $F_S$ ).

- Es la prima de riesgo base inducida por la transformación

$$1 - H_S(S) = (1 - F_S(S))^{1/\rho}.$$

- Si  $F_S$  es absolutamente continua, entonces

$$h_S(S) = \frac{1}{\rho} (1 - F_S(S))^{1/\rho-1} f_S(S),$$

i.e. la densidad de la modificación es función ponderada de  $f_S$ .

- Satisface los 5 principios desables, salvo el de aditividad.

## 1.3 Prima de riesgo: Ejemplos

### VI. Prima de riesgo basada en el principio exponencial

Suponiendo que el riesgo  $S$  se describe con  $F_S(S)$ , se define

$$\Pi_S = \frac{1}{\alpha} \log \left( \mathbb{E}_{F_S}(e^{\alpha S}) \right), \quad (11)$$

donde  $\alpha > 0$  es el parámetro de aversión al riesgo.

Esta prima asigna una mayor probabilidad a los riesgos extremos en  $S$  (cola derecha de la distribución  $F_S$ ).

- ▶ La prima de riesgo será grande cuando  $\alpha$  lo sea. Cuando  $\alpha$  sea cercana a cero se aproximará a la prima de riesgo pura.
- ▶ El principio exponencial coincide con el de utilidad cero empleando una función de utilidad exponencial ( $\alpha$  mide el índice de aversión al riesgo).
- ▶ Satisface los 5 principios desables, salvo el de aditividad.

## 1.3 Prima de riesgo: Ejemplos

### VII. Prima de riesgo basada en el principio de Esscher

Suponiendo que el riesgo  $S$  se describe con  $F_S(S)$ , se define

$$\Pi_S = \frac{\mathbb{E}_{F_S}(X e^{\alpha S})}{\mathbb{E}_{F_S}(e^{\alpha S})}, \quad (12)$$

donde  $\alpha \geq 0$  es el parámetro de aversión al riesgo.

Al igual que la prima anterior, ésta da un mayor peso a los riesgos extremos en  $S$  (cola derecha de la distribución  $F_S$ ).

- Esta distribución se puede definir alternativamente como el valor esperado del riesgo  $S$  bajo la distribución modificada

$$G_S(S) = \frac{e^{\alpha x} F_S(S)}{\int e^{\alpha S} F_S(dx)}.$$

- Satisface los 5 principios desables, salvo el de aditividad.



## 2. Usos de primas de riesgo

## 2.1 Usos de primas de riesgo: Coaseguro óptimo

### Planteamiento

- ▶ Coseguro es un acuerdo por el cual varios aseguradores comparten un riesgo.
- ▶ Cada participante asume una parte del mismo, por una parte de las primas.
- ▶ Considera  $K$  aseguradoras, tal que cada una de ellas fija su prima de riesgo bajo el **principio exponencial** con  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ .
- ▶ ¿Cuál es el coseguro óptimo?

### Solución

- ▶ Por la desigualdad de Hölder, asumiendo independencia entre las aseguradoras, se tiene que

$$\mathbb{E} \left( e^{\alpha S} \right) \leq \prod_{k=1}^K \mathbb{E} \left( e^{\alpha_k S_k} \right)^{\alpha / \alpha_k},$$

con  $1/\alpha = \sum_{k=1}^K 1/\alpha_k$ .

- ▶ Así, el coseguro óptimo se define como

$$S_k^* = \frac{\alpha}{\alpha_k} S.$$

## 2.1 Usos de primas de riesgo: Coaseguro óptimo

### Planteamiento

- ▶ Coseguro es un acuerdo por el cual varios aseguradores comparten un riesgo.
- ▶ Cada participante asume una parte del mismo, por una parte de las primas.
- ▶ Considera  $K$  aseguradoras, tal que cada una de ellas fija su prima de riesgo bajo el **principio exponencial** con  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ .
- ▶ ¿Cuál es el coseguro óptimo?

### Solución

- ▶ Por la desigualdad de Hölder, asumiendo independencia entre las aseguradoras, se tiene que

$$\mathbb{E} \left( e^{\alpha S} \right) \leq \prod_{k=1}^K \mathbb{E} \left( e^{\alpha_k S_k} \right)^{\alpha / \alpha_k},$$

con  $1/\alpha = \sum_{k=1}^K 1/\alpha_k$ .

- ▶ Así, el coseguro óptimo se define como

$$S_k^* = \frac{\alpha}{\alpha_k} S.$$

## 1.2 Usos de primas de riesgo: Costo de reaseguro

### Planteamiento

- ▶ Supongamos que una aseguradora fija su prima de riesgo de acuerdo al **principio de varianza**
- ▶ Una reaseguradora participa definiendo su prima de riesgo bajo el mismo principio
- ▶ Se propone contratar el riesgo agregado con prioridad  $M$  (i.e. se paga el reclamo total que excede  $M$ )
- ▶ ¿Cuál es el impacto del costo del reaseguro en el costo del seguro?

### Solución

- ▶ Sin reaseguro, la prima de riesgo de la aseguradora sería

$$\Pi_S = \mathbb{E}(X) + \alpha \cdot \text{var}(X),$$

para algún  $\alpha$  positivo.

- ▶  $\Pi'_S$  denota la prima de riesgo de la reaseguradora; el costo es transferido, con

$$a(S) = \min(S, M) \quad \text{y} \quad r(S) = \max(S - M, 0).$$

## 1.2 Usos de primas de riesgo: Costo de reaseguro

### Planteamiento

- ▶ Supongamos que una aseguradora fija su prima de riesgo de acuerdo al **principio de varianza**
- ▶ Una reaseguradora participa definiendo su prima de riesgo bajo el mismo principio
- ▶ Se propone contratar el riesgo agregado con prioridad  $M$  (i.e. se paga el reclamo total que excede  $M$ )
- ▶ ¿Cuál es el impacto del costo del reaseguro en el costo del seguro?

### Solución

- ▶ Sin reaseguro, la prima de riesgo de la aseguradora sería

$$\Pi_S = \mathbb{E}(X) + \alpha \cdot \text{var}(X),$$

para algún  $\alpha$  positivo.

- ▶  $\Pi_S^r$  denota la prima de riesgo de la reaseguradora; el costo es transferido, con

$$a(S) = \min(S, M) \quad \text{y} \quad r(S) = \max(S - M, 0).$$

## 2.2 Usos de primas de riesgo: Costo de reaseguro

### Solución

- Se cumple

$$S = a(S) + r(S).$$

- Así, la prima de riesgo de la reaseguradora es

$$\begin{aligned}\Pi_S^r &= \mathbb{E}(a(S)) + \mathbb{E}(r(S)) + \alpha \cdot (\text{var}(a(S)) + \text{var}(r(S))) \\ &= \mathbb{E}(S) + \alpha \cdot \text{var}(S) - \alpha \cdot \text{cov}(a(S), r(S)).\end{aligned}$$

- Además, tenemos,

$$\text{cov}(a(S), r(S)) = (M - \mathbb{E}(a(s))) \mathbb{E}(r(S)) \geq 0.$$

- Como  $M \geq \mathbb{E}(\min(S, M))$ , se tiene que

$$\Pi_S \geq \Pi_S^r.$$