ACT-11302: Cálculo Actuarial III

Sesión 09a: Teoría de ruina

Juan Carlos Martínez-Ovando

ITAM

Otoño 2019

1. Teoría de ruina

1.1. Teoría de ruina: Preliminares

Antecedentes

- Una aseguradora se vuelve insolvente (o está en quiebra) cuando sus egresos son mayores que sus ingresos
- Bajo ciertas condiciones sobre el capital inicial y los flujos de efectivo operativos, el **tiempo** y el **tamaño** de la próxima quiebra son naturalmente dos variables aleatorias
- La **teoría de ruina** tiene como objetivo estudiar las conexiones entre estas condiciones iniciales y las distribuciones de estas variables, para cuantificar la posibilidad de ruina y controlarla.

1.1. Teoría de ruina: Preliminares

Preliminares

La **teoria de ruina** consiste en el estudio de procesos temporales en t del **capital** de una empresa, denotado por $U(t)$, en particular para una **empresa aseguradora**. El **capital**, en si mismo, es definico a traves de una relacion contable, donde en un t particular se cumple

$$U(t) = U(0) + \Pi(t) - S(t),$$

siendo

- $U(0)$ el **capital inicial** de operacion en el tiempo $t = 0$,
- $\Pi(t)$ el **monto acumulado por derechos** (a.k.a. por suscripcion) entre $t = 0$ y t
- $S(t)$ el **monto acumulado de obligaciones** (a.k.a. reclamos) entre $t = 0$ y t

• *El estudio de $\Pi(t)$ compete al 'estudio de riesgos de mercado', mientras que $S(t)$ compete al 'estudio de riesgo operacional' (nuestro curso).*
• *Nosotros supondremos que $U(0)$ y $\Pi(t)$, para todo $t \geq 0$ son dados.*
• *Suponiendo que $U(0)$ y $\Pi(t)$ son dados, y $S(t)$ desconocido/aleatorio, tendremos que $U(t)$ es en si mismo aleatorio.*

1.1. Teoría de ruina: Preliminares

Solvencia

- La implicación social del seguro justifica la regulación de solvencia; aunque no es claro
- Quizás la justificación más convincente para la supervisión prudencial de los seguros es la hipótesis de representación (Dewatripont y Tirole,1994):

> *...las deudas en seguros afecta a agentes económicos dispersos que no letrados en cuestiones financieras (asegurados) ... la autoridad reguladora es responsable de representarlos y tomar en su lugar la decisión de amortización anticipada o de liquidación...*

1.2. Teoría de ruina: Objetivos

Objetivos

- El proposito de la **teoria de ruina** es el de estudiar/anticipar escenarios en que el **capital de operaciones** es negativo, en cuyo caso la **empresa** incuirria en **ruina**.
- Siendo $S(t)$ y, por ende, $U(t)$ aleatorios, la **ruina** tendra una probabilidad de ocurrencia, denotada por

$$\psi(t) = \mathbb{P}(U(t) < 0 | U(0), \Pi(t)).$$

- En **riesgo operacional**, la probabilidad $\mathbb{P}(\cdot)$ se calcula respecto a la incertidumbre acerca de $S(t)$.

1.2. Teoría de ruina: Objetivos

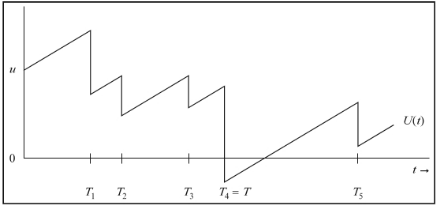
Objetivos

1. Definir un procedimiento para determinar el capital de operaciones U
2. Calcular la posibilidad de ruina operativa (horizontes de 12 meses)
3. Identificar elmentos de transferencia de riesgos/reaseguro

1.3 Teoria de ruina: Proceso estocastico

El proceso evolutivo de $U(t)$ en t, i.e. $(U(t))_{t\geq 0}$, define un proceso estocastico con trayectorias caracteristicas de la siguiente forma.

Figura: Trayectoria tipica del proceso de ruina



Fuente: Kaas et al.

1.4 Teoria de ruina: Un ejemplo

Reaseguro (un escenario)

Elaboramos sobre la conexión entre **reaseguro** y **solvencia** (un ejemplo):

- Una compañía se seguros deposita U capital inicial y suscribe J riesgos i.i.d.
- La prima de riesgo *individual* se fija según el principio del valor esperado

$$\Pi_X = (1+\rho)\,\mathbb{E}_{F_X}(X). \tag{1}$$

Lo veremos en un momento...

- Definimos S el monto agregado de pérdida. La probabilidad de ruina de la compañía de seguros, se define como

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbb{P}\left(C + J(1+\rho)\,\mathbb{E}_{F_X}(X) - S < 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(S - J\,\mathbb{E}_{F_X}(X) > C + J\rho\,\mathbb{E}_{F_X}(X)\right). \end{aligned}$$

1.4 Teoria de ruina: Un ejemplo

Reaseguro (un escenario)

- Por la desigualdad de Tchebychev,

$$\psi \leq 1/\beta^2,$$

donde

$$\beta = \frac{C + J\rho\,\mathbb{E}(X)}{J^{1/2}d.e.(X)},$$

es un coeficiente conocido como **coeficiente de seguridad** de la operación de la aseguradora.

1.4 Teoria de ruina: Un ejemplo

Reaseguro (un escenario)

- La desigualdad anterior da una cota a la probabilidad de ruina, pero esta cota es demasiado **conservadora**
- Cuanto mayor sea β, menor será ψ (probabilidad de ruina)
- Para aumentar el coeficiente de seguridad, bajo una estructura de riesgo dada, es posible:
  a) Incrementar el capital U
  b) Incrementar la suscripción J
  c) Incrementar la prima de riesgo *individual* a través de incrementar ρ

1.4 Teoria de ruina: Un ejemplo

Reaseguro (un escenario)

Obs.1 Para un U dado, las opciones (b) y (c) son complicadas

Obs.2 Para un U dado, la única manera de ajustar el coeficiente de seguridad en el corto plazo es actuar a través del reaseguro, i.e. alterar la estructura de riesgo

- El **reaseguro** consiste en reducir $d.e.(X)$ (transferencia de riesgo) y disminuir ρ (transferencia de utilidades)

> *Determinar una estrategia óptima de reaseguro consiste en arbitrar entre estos dos efectos, uno positivo y otro negativo.*

2. Modelo de Crámer-Lündberg

2.1 Modelo de Crámer-Lündberg: Fundamentos

Antecedentes

El modelo de Crámer-Lündberg (C-L) describe el valor neto de capital en el tiempo, U_t, de acuerdo a un **proceso de riesgo**,

$$U_t = U_0 + \Pi_t - S_t, \tag{2}$$

donde

U_0 - capital inicial al tiempo $t = 0$

Π_t - suscripción al tiempo $t0$

S_t - reclamos totales al tiempo t.

2.1 Modelo de Crámer-Lündberg: Fundamentos

Supuestos

Respecto a S_t, enfoque de **riesgo colectivo**, i.e.

$$S_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_j,$$

donde,

N_t - proceso Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$

X_js - v.a.i.i.d. con $F_X(x)$ y $M_X(s)$ dadas tales que $\mathbb{E}(X_j) = \mu < \infty$.

Respecto a Π_t, enfoque de **suscripción continua**, $\Pi_t = \Pi t$

Π - prima de riesgo instantanea,

$$\Pi = (1+\theta)\lambda\mu,$$

con θ factor de recarga.

2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Defınción

Definición ruina

Se define un episodio de **ruina** cuando

$$U_t < 0.$$

Asociado con esto, consideramos

$$T = \text{ínf}\left\{t : U_t < 0\right\},$$

como la variable de **tiempo de ruina**.

2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Defınción

Probabilidades de interés

Probabilidad de ruina:

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \Psi(U_0). \tag{3}$$

Probabilidad de ruina finita:

$$\mathbb{P}(T < t) = \Psi(U_0, t). \tag{4}$$

Objetivo

Calcular o acotar las probabilidades de ruina.

2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Defición

Probabilidades de interés

Probabilidad de ruina:

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \Psi(U_0). \tag{3}$$

Probabilidad de ruina finita:

$$\mathbb{P}(T < t) = \Psi(U_0, t). \tag{4}$$

Objetivo

Calcular o acotar las probabilidades de ruina.

2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Coeficiente de Lündberg

Definición

El **coeficiente de Lündberg** se define como la solución positiva de la ecuación

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r) \tag{5}$$

en términos de r. (*La solución no siempre existe*).

Equivalencias

$$\lambda + \Pi r = \lambda M_X(r),$$

o,

$$\Pi = \frac{\log M_S(r)}{r},$$

para

$$\Pi = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

2.2. Modelo de Crámer-Lündberg: Coeficiente de Lündberg

Definición

El **coeficiente de Lündberg** se define como la solución positiva de la ecuación

$$1 + (1 + \theta)\mu r = M_X(r) \tag{5}$$

en términos de r. (*La solución no siempre existe*).

Equivalencias

$$\lambda + \Pi r \quad = \quad \lambda M_X(r),$$

o,

$$\Pi \quad = \quad \frac{\log M_S(r)}{r},$$

para

$$\Pi = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

2.3. Modelo de Crámer-Lündberg: Cota

Definición

Si la solución para r existe en las ecuaciones anteriores, se sigue que las **probabilidades de ruina** pueden acotarse por

$$\Psi(U_0, t) \leq \Psi(U_0) \leq \exp\{-rU_0\}. \tag{6}$$

Se define así a la cota de Lündberg de la probabilidad de ruina.

Probabilidad de ruina

Adicionalmente, la probabilidad de ruina puede definirse como

$$\Psi(U_0) = \frac{\exp\{-rU_0\}}{\mathbb{E}_{F_{S_t}}(\exp\{-rC_T\} | T < \infty)} \leq \exp\{-rU_0\}.$$

El denominador $\mathbb{E}_{F_{S_t}}(\exp\{-rC_T\} | T < \infty)$ es mayor a 1, cuando r existe.

2.3. Modelo de Crámer-Lündberg: Cota

Definición

Si la solución para r existe en las ecuaciones anteriores, se sigue que las **probabilidades de ruina** pueden acotarse por

$$\Psi(U_0, t) \leq \Psi(U_0) \leq \exp\{-rU_0\}. \tag{6}$$

Se define así a la cota de Lündberg de la probabilidad de ruina.

Probabilidad de ruina

Adicionalmente, la probabilidad de ruina puede definirse como

$$\Psi(U_0) = \frac{\exp\{-rU_0\}}{\mathbb{E}_{F_{S_t}}\left(\exp\{-rC_T\} \mid T < \infty\right)} \leq \exp\{-rU_0\}.$$

El denominador $\mathbb{E}_{F_{S_t}}(\exp\{-rC_T\}|T < \infty)$ es mayor a 1, cuando r existe.

2.4. Modelo de Crámer-Lündberg: Inexistencia

Condición

En el modelo C-L, la ecuación que define la existencia de la cota de Lündberg tiene solución no negativa si y sólo si

$$\int_0^\infty \exp\{rx\} F_X(dx) < \infty \tag{7}$$

al rededor de 0 en términos de r.

- Esta condición se satisface si,

$$\frac{1 - F_X(x)}{\exp\{-rx\}} \leq \mathbb{E}_{F_X}(\exp\{rX\}).$$

- La cola de la distribución F_X debe estar acotada exponencialmente.

2.5. Modelo de Crámer-Lündberg: Comentarios

Comentarios

El modelo de C-L es un modelo que descansa en supuestos estrictos de

- **homogeneidad temporal**
- **homogeneidad de riesgos (dentro del portafolio)**
- **previsión moderada de riesgos individuales**.

Estos supuestos hacen que los cáculos analíticos sean posibles de obtener.

Consideraciones prácticas

En la **práctica**, muchos de estos supuestos tienen que relajarse; en cuyo caso, cáculos basados en aproximaciones asintóticas, analíticas y/o numéricas serán requeridos.

2.5. Modelo de Crámer-Lündberg: Comentarios

Comentarios

El modelo de C-L es un modelo que descansa en supuestos estrictos de

- **homogeneidad temporal**
- **homogeneidad de riesgos (dentro del portafolio)**
- **previsión moderada de riesgos individuales**.

Estos supuestos hacen que los cáculos analíticos sean posibles de obtener.

Consideraciones prácticas

En la **práctica**, muchos de estos supuestos tienen que relajarse; en cuyo caso, cáculos basados en aproximaciones asintóticas, analíticas y/o numéricas serán requeridos.