Tarea 3

Ana Luisa Masetto Herrera
183203

* Pregunta 2: Generalización

→ Considerar

① $\mathbf{X} \sim N(\mu, \Sigma)$

② $Y = Ax$ donde A es una transformación

cuando una matriz A multiplica X la distribución de la nueva variable $\mathbf{Y}$ también sigue la misma distribución que X, por lo tanto,

$\Sigma^{Y} = A \Sigma A^{T}$

③ Se espera que $Cov(X, Y) = 0 \Rightarrow X \perp Y$

④ Correlación $(\rho) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$, $-1 \leq \rho \leq 1$

y para nosotros $\rho = 0$

→ Caso Ilustrativo

$$X = \left[\frac{X_1}{X_2}\right] \sim N_p(\mu, \Sigma) \qquad \mu = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{\Sigma_{11}} & \boxed{\Sigma_{12}} \\ \boxed{\Sigma_{21}} & \boxed{\Sigma_{22}} \end{array}\right]$$

Por ejemplo:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\, X_1 \\ \\ \\ \}\, X_2 \\ \\ \end{array} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} \\ \sigma_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{31} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{41} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{51} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{55} \end{pmatrix}$$

→ Planteamiento

Se tiene $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ $\quad \mu = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{pmatrix}$ $\quad \Sigma = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right)$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

Lo que se quiere es demostrar que

$X_1 \mid X_2 = x_2$ se distribuye Normal Multivariada

→ Paso 0:

Retomando el inciso (2) mencionado anteriormente, $y = AX$, se hace el siguiente procedimiento

$$Y = AX = A(X - \mu) = \left[\begin{array}{c|c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X_1 - \mu_1 \\ \hline X_2 - \mu_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2) \\ \hline X_2 - \mu_2 \end{array}\right]$$

Ahora la nueva Variable Y tiene una matriz de Varianzas y Covarianzas:

$$\Sigma^Y = A \Sigma A^{-1}$$

$$\Sigma^y = \left[\begin{array}{c|c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} & \Sigma_{22} \end{array}\right]$$

Varianza

Cov ( )

$$= \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_{22} \end{array}\right]$$

Cov ( )

Varianza

Por lo tanto,

$$X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2) \sim N_p\left(0, \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)$$

Para Obtener 0 se debe de sacar el Valor esperado de $X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)$

y se sabe que

$$X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2) \perp X_2 - \mu_2$$

porque las covarianzas son 0.

→ Paso 1: (Media)

Se sabe que,

$$X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)) \sim N_q(\overbrace{\mu^*, \Sigma^*}^{\text{Desconozco}})$$

donde q es el número de particiones, en el caso ilustrativo $q = 2$ y p que son las dimensiones $= 8$.

Por independencia de $X_2 - \mu_2$ se cumple

$$X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)) \mid X_2 = x_2 \sim N_q(0, \Sigma^*)$$

y sabemos que,

$$E[X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)) \mid X_2 = x_2] = 0$$

$$E[X_1 / X_2 = x_2] = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2) = \mu^*$$

→ Paso 2: (Varianza)

Por los cálculos efectuados con anterioridad (Paso 0) se tiene que

$$\Sigma^* = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = Var(X_1 - (\underbrace{\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)}) \mid X_2 = x_2)$$

$$= Var(X_1 \mid X_2 = x_2)$$

al ser una constante su varianza es 0

→ Paso 3:

$$X_1 \mid X_2 = x_2 \sim N_q(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2),\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

* Pregunta 1: Caso Bivariado

Demostrar que la Media de $X_1 | X_2 = x_2$ es una regresión de la X_1 en x_2.

Se tiene que,

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

Del ejercicio anterior (Pregunta 1) se obtuvo que la Media es:

$\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2)$, sustituimos con los Valores de la matriz previa y tenemos,

$$\mu = \mu_1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{Var(X_2)} (x_2 - \mu_2)$$

$$\sigma^2 = Var(X_1) - \frac{Cov(X_1, X_2)^2}{Var(X_2)}$$

y sabemos que $\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}}$

Ahora queremos $X_1 = \beta_0 + \beta_1 X_2$ y sustituimos ρ en Valores Previos

$$\mu_1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{x_2}^2} (x_2 - \mu_2) = \underbrace{\mu_x + \frac{\rho \sigma_x}{\sigma_y} (y - \mu_2)}_{a}$$ y Cambiamos relación a x, y

desarrollamos (a) y tenemos $\mu_x + \frac{\rho \sigma_x}{\sigma_y}(y) - \frac{\rho \sigma_x}{\sigma_y} \mu_2$ y por eso,

$$\boxed{\beta_1 = \frac{\rho \sigma_x}{\sigma_y} \qquad \beta_0 = \mu_x - \frac{\rho \sigma_x}{\sigma_y} \mu_2}$$

y se ve que la media es una regresión.