Dante Ruiz Martínez

Tarea 03

(2) Generalicen el resultado anterior considerando $X = (X_1, X_2)$, donde X es p-variado, X_1 y X_2 son p_1 y p_2 variados ($p = p_1 + p_2$) con X
$X \sim N_p(X \mid \mu, \Sigma)$, para derivar la distribución de X_1 condicional en $X_2 = x_2$.

Notas:

$x \sim \Sigma$; $Y = Ax$; $\Sigma^Y = A\Sigma A^T$; $- \leq \rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \leq 1$; $\rho = 0$

$cov(X,Y) = 0 \Rightarrow X \perp Y$.

(1) Suponemos $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_p(\mu, \Sigma)$ un vector p variado que sigue una distribución normal p variada con un vector μ de medias y una matriz de var-cov.

$$\mu = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ \hdashline E[X_2] \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

En este caso X_1 y X_2 son particiones en el vector p dimensional.

Por ejemplo:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} & \sigma_{45} \\ \sigma_{51} & \sigma_{52} & \sigma_{53} & \sigma_{54} & \sigma_{55} \end{bmatrix}$$

Construimos una matriz A para calcular la matriz de varianzas y covarianzas.

$$A = \begin{bmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

③ Queremos demostrar $X_1 | X_2 = x_2$ se distribuye normal multivariada.

Retomamos el supuesto que $Y = AX$ y con lo que ya tenemos sabemos lo siguiente

$$A(X-\mu) = \left[\begin{array}{c:c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hdashline 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1-\mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2) \\ \hdashline x_2-\mu_2 \end{array}\right]$$

2x2 2x1 2x1

También sabemos que:

ⓑ $\Sigma^{Y} = A \Sigma A^{T}$

$$= \left[\begin{array}{c:c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hdashline 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} & I \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ \hdashline 0 & \Sigma_{22} \end{array}\right]$$

Notar que la cov de X_1 y X_2 es igual a cero.

Tenemos que la Var(X_1) es:

$$\therefore \; x_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2) \sim N_p(\underbrace{0}_{a}, \underbrace{\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}}_{b})$$

$$\therefore \; x_1-\mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_1-\mu_1) \perp X_2$$

son independientes

ⓐ La media es cero porque

$$E[X_1-\mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2)] =$$

$$E[X_1] - E[\mu_1] - \Sigma_{11}\Sigma_{22}^{-1}E[X_2] + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}E[\mu_2]$$

$$\cancel{\mu_1} - \cancel{\mu_1} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(-\cancel{\mu_2}+\cancel{\mu_2}) = 0$$

Scanned with CamScanner

Sabemos que $x_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2)) \sim N_q(\mu^*, \Sigma^*)$

\# de particiones

Por independencia de $X_2 - \mu_2$ se cumple

$$x_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2)) \mid X_2 = x_2 \sim N_q(0, \Sigma^*)$$

$$\boxed{\text{Sabemos } E[X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2)) \mid X_2 = x_2] = 0}$$

$$\boxed{\Longrightarrow E[X_1 \mid X_2 = x_2] = \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2) = \mu^*}$$

Para sacar la varianza

$$\Sigma^* = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$\Sigma^* = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} = Var(X_1 - (\underbrace{\mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2)}) \mid X_2 = x_2)$$

$$= Var(X_1 \mid X_2 = x_2)$$

Esto es una constante, entonces su varianza es cero.

(I) Desarrollar cálculos analíticos para mostrar que la distribución condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$, en el contexto donde (X_1, X_2) tienen la distribución gaussiana bivariada corresponde a la distribución gaussiana donde la media es una regresión de la X_1 en x_2,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

$$X_1 \mid X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = \mu_1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{Var(X_2)} (x_2 - \mu_2)$$

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}$$

$$\sigma^2 = Var(X_1) - \frac{Cov(X_1, X_2)^2}{Var(X_2)}$$

Scanned with CamScanner

$$\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\mu_2) = \mu_1 + \frac{cov(X_1,X_2)\cancel{\sigma_{X_1}}}{\cancel{\sigma_{X_1}}\sigma_{X_2}\sigma_{X_2}}(Y-\mu_2)$$

$$= \mu_1 + \frac{cov(X_1 X_2)}{\sigma_{X_2}^2}(X_2-\mu_2)$$

Sabemos que la forma de una reg lineal es

$$X_1 = \beta_0 + \beta_1 X_2$$

Ahora tenemos que

$$\underbrace{\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}y}_{\beta_0} - \underbrace{\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_2}_{\beta_1}$$

$$\boxed{\beta_0 = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}y}$$

Scanned with CamScanner