EST-46114 Métodos Multivariados **Nombre:** Arantza Ivonne Pineda Sandoval
Primavera 2019 **C.U.:** 141194
Tarea 03 **26/Feb/2018**
Fecha de entrega: 5/Mar/2019

Consideren la sesión 12 del curso.

1. Desarrolla los cálculos analíticos para mostrar que la distribución condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$, en el contexto donde (X_1, X_2) tienen la distribución gaussiana bivariada, corresponde a la distribución gaussiana donde la media es una regresión de la X_1 en x_2.

2. Generalicen el resultado anterior considerando $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$, donde $\mathbf{X}$ es p-variado, $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ son p_1 y p_2 variados ($p = p_1 + p_2$), con $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, para derivar la distribucion de $\boldsymbol{X}_1$ condicional en $\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{x}_2$.

2

Se comienza con el ejercicio 2, para entender lo general y concluir al caso particular.

Los supuestos son:

$$X \sim \Sigma \; ; \; Y = Ax \; ; \; \Sigma^Y = A \Sigma A^T \; ; \; -1 \leq \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \leq 1$$

Se asume que $\rho = 0$ y que $Cov(X,Y) = 0$

Considerando que X es p-variado:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \hdashline X_2 \end{bmatrix} \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

donde,

$$\mu = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ \hdashline E[X_2] \end{bmatrix} \; ; \; \Sigma = \left[\begin{array}{c:c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hdashline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right]$$

Se tiene que:

$$A = \left[\begin{array}{c:c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hdashline 0 & I \end{array}\right]$$

Scanned with CamScanner

Con lo anterior se quiere derivar la distribución de X_1 condicional en $X_2 = x_2$.

$$X_1 \mid X_2 = x_2 \sim \text{Normal Multivariada}$$

Retomando el supuesto de que $Y = AX$ se tiene ahora,

$$A(X-\mu) = \underset{(2\times 2)}{\left[\begin{array}{c|c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right]} \cdot \underset{(2\times 1)}{\left[\begin{array}{c} X_1-\mu_1 \\ \hline X_2-\mu_2 \end{array}\right]} = \underset{(2\times 1)}{\left[\begin{array}{c} X_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2) \\ \hline X_2-\mu_2 \end{array}\right]}$$

"Y"

También, se desarrolla la matriz Σ^Y bajo el supuesto de $\Sigma^Y = A\Sigma A^T$:

$$\Sigma^Y = \left[\begin{array}{c|c} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} & I \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ \hline 0 & \Sigma_{22} \end{array}\right]$$

De los resultados anteriores, se identifican los parámetros siguientes para $X \sim N_p(x \mid \mu, \Sigma)$:

$$\underline{X_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2)} \sim N_p(0, \underline{\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}})$$

Donde la media es $\emptyset$ debido a que:

$$E[X_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2)] = E[X_1]-E[\mu_1]-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}E[X_2] + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}E[\mu_2] = \cancel{\mu_1-\mu_1}+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\cancel{(-\mu_2+\mu_2)} = \emptyset$$

Scanned with CamScanner

Por el supuesto de $Cov(X, Y) = 0$ se sabe que:

$$X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2) \perp X_2$$

Ahora, sabemos que $X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)) \sim N_q(\mu^*, \Sigma^*)$

$q = \#$ de Particiones

Para sacar la Media de la Distribución

Por independencia de $X_2 - \mu_2$ se cumple:

$$X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \mid X_2 = x_2 \sim N_q(0, \Sigma^*)$$

Sabemos: $E[X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)) \mid X_2 = x_2] = 0$

$$\Rightarrow E[X_1 \mid X_2 = x_2] = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) = \mu^*.$$

Para sacar la Varianza:

$$\Sigma^* = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} = Var(X_1 - (\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \mid X_2 = x_2)$$

$$= Var(X_1 \mid X_2 = x_2)$$

//

①

A partir de la generalización anterior, se deriva el caso particular para mostrar que la distribución condicional de X_1 dado $X_2 = x_2$, en el contexto donde (X_1, X_2) tienen la distribución gaussiana bivariada, donde la media es una regresión de la X_1 en x_2.

Se tiene que:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

Con:

$$X_1 \mid X_2 = x_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Por el ejercicio ② anterior se deriva la media:

$$\mu = \mu_1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{Var(X_2)}(x_2 - \mu_2)$$

$$\sigma^2 = Var(X_1) - \frac{Cov(X_1, X_2)^2}{Var(X_2)}$$

Sustituyendo por la correlación: $\rho = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}$

Se tiene:

$$\mu_x + \frac{\rho\,\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_2) = \mu_1 + \frac{Cov(X_1 X_2)\,\sigma_{x_1}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\ \sigma_{x_2}}(y - \mu_2)$$

$$= \mu_1 + \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma_{x_2}^2}(x_2 - \mu_2)$$

Scanned with CamScanner

Para mostiar que se tiene una regresión:

$$X_1 = \beta_0 + \beta_1 X_2$$

$$\mu_x + \frac{\rho \sigma_x}{\sigma_y} y - \frac{\varphi \sigma_x}{\sigma_y} \mu_2$$

Con $\beta_1 = \varphi \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ y $\beta_0 = \mu_x - \varphi \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \mu_2$ //

Scanned with CamScanner