1 - Modèle de Lotka-Volterra

1) Montrons qu'en posant $\mu(t) = \frac{cP(\tau)}{d}$, $v(t) = \frac{bR(\tau)}{a}$, $t = a\tau$, $\alpha = \frac{d}{a}$

le système ① se simplifie en : $\begin{cases} \frac{du}{dt} = \mu(t)(1 - v(t)) \\ \frac{dv}{dt} = \alpha v(t)(\mu(t) - 1) \end{cases}$

On a : $\frac{du}{dt} = \frac{c}{d} \frac{d\tau}{dt} \frac{dP}{d\tau}$

$= \frac{c}{d} \frac{1}{a} (P(a - bR))$

$= \frac{c}{d} P\left(1 - \frac{bR}{a}\right)$

$= \mu(t)(1 - v(t))$ car $\mu(t) = \frac{cP(\tau)}{d}$ et $v(t) = \frac{bR(\tau)}{a}$

donc $\frac{du}{dt} = \frac{c}{d} P\left(1 - \frac{bR}{a}\right) = \mu(t)(1 - v(t))$ ①

Aussi $\frac{dv}{dt} = \frac{b}{a} \frac{d\tau}{dt} \frac{dR}{d\tau}$

$= \frac{b}{a} \frac{1}{a} (R(cP - d))$

$= \frac{bR}{a}\left(\frac{d}{a}\left(\frac{cP}{d} - 1\right)\right)$

$= \frac{d}{a}\left(\frac{bR}{a}\left(\frac{cP}{d} - 1\right)\right]$

$\frac{dv}{dt} = \alpha v(t)(\mu(t) - 1)$ ②

De 1 et 2, on conclut que le système 1 se simplifie en :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(t)\left(1 - v(t)\right) \\ \dfrac{dv}{dt} = \alpha v(t)\left(u(t) - 1\right) \end{cases}$$

2) Etudions l'existence de solutions pour le problème de Cauchy (2), (3).

La fonction second membre est définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(t, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} z_1(1 - z_2) \\ \alpha z_2 (z_1 - 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Les fonctions $(z_1, z_2) \mapsto z_1(1 - z_2)$ et $(z_1, z_2) \mapsto \alpha z_2 (z_1 - 1)$ sont les fonctions polynomiales, donc f est de classe C^1. D'où l'existence de solutions pour le problème de Cauchy.

- Montrons que si $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ alors $u(t) > 0$ et $v(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Il s'agira de montrer le théorème de positivité des solutions du problème de Cauchy : $\begin{cases} (u'(t), v'(t)) = f(t, u(t), v(t)) \\ (u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0) \end{cases}$

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Dans chacun des cas suivant, la fonction (u, v) ainsi

définie est l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (u'(t), v'(t)) = f(t, u(t), v(t)) \\ (u(t_1), v(t_1)) = (u_1, v_1) \end{cases}$$

(i) Si $u_1 = 0$ et $v_2 = 0$ alors pour tout réel t, on définit $(u(t), v(t)) = (0, 0)$

(ii) Si $u_1 = 0$ et si $v_2 > 0$ alors pour tout réel t, on définit

$$(u(t), v(t)) = \left(0, v_2 e^{-d(t-t_1)}\right)$$

(iii) Si $u_1 > 0$ et $v_2 = 0$, alors pour tout réel t, on définit

$$(u(t), v(t)) = \left(u_1 e^{a(t-t_1)}, 0\right)$$

- Démonstration

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe t_1 tel que $u(t_1) \leq 0$ ou $v(t_1) \leq 0$.

Supposons plutôt qu'il existe t_1 tel que $u(t_1) = 0$ ou $v(t_1) = 0$ (ie une solution franchit l'axe (Ou) ou l'axe (Ov)).

Si jamais nous obtenons une contradiction, la continuité des solutions empêchera leurs cordonnées de devenir négatives, sachant que les conditions initiales sont strictement positives.

* Si $u(t_1) = 0$ et $v(t_1) = 0$ alors (u, v) vérifie le problème de Cauchy $\begin{cases} (u'(t), v'(t)) = f(t, u(t), v(t)) \\ (u(t_1), v(t_1)) = (0, 0) \end{cases}$ donc d'après le lemme,

$(u(t), v(t)) = (0, 0)$ pour tout réel t. Ceci est absurde car pour $t = t_0$ $u(t_0) >$

* Si $\mu(t_1)=0$ et $v(t_1)>0$ alors (μ,v) vérifie le problème de Cauchy:

$$\begin{cases}(u'(t),v'(t)) = f(t,u(t),v(t)) \\ (\mu(t_1);v(t_1)) = (0,v_1)\end{cases}$$ donc d'après le lemme,

$(\mu(t),v(t)) = (0, v_1 e^{-d(t-t_1)})$ pour tout réel t. Ceci est à nouveau absurde, car on aurait $\mu(t_0)=0>0$.

* Le raisonnement est strictement le même pour le dernier cas ; $u(t_1)>0$ et $v(t_1)=0$.

3) Montrons que si $(\mu(t),v(t))$ est une solution de ② alors la quantité $L(\mu,v) = \alpha u + v - \ln(\mu^\alpha v)$ est constante.

D'après la question précédente, $L(\mu,v)$ est bien définie

Supposons que $(u(t),v(t))$ est solution de ②

Alors $u'(t)=u(t)(1-v(t))$ et $v'(t)=\alpha v(t)(\mu(t)-1)$

On a: $\frac{dL}{dt}(\mu,v) = \alpha u' + v' - \frac{\alpha u' \mu^{\alpha-1} v(t) + \mu^\alpha v'}{\mu^\alpha v(t)}$

$$= \alpha u - \alpha u v + \alpha v \mu - \alpha v + \frac{(\alpha u v - \alpha u)\mu^{\alpha-1} v}{\mu^\alpha v} + \frac{\mu^\alpha(-\alpha v \mu + \alpha v)}{\mu^\alpha v}$$

$$= \alpha \mu - \alpha v - \frac{\alpha v \mu + \alpha v^2}{v}$$

$$= \alpha u - \alpha v - \alpha u + \alpha v$$

$$\frac{dL}{dt}(u,v) = 0$$

D'où la quantité $L(u,v)$ est constante.

- Montrons que c'est une fonction de Lyapounov pour ce système.

$$L(u,v) = \alpha u + v - \ln(u^{\alpha} v)$$
$$= \alpha u + v - (\alpha \ln(u) + \ln(v))$$

$$\forall u>0, v>0, \quad \begin{cases} \ln(u) \leq u \\ \ln(v) \leq v \end{cases}, \alpha > 0$$

donc $\alpha u + v \geq \alpha \ln(u) + \ln(v) \quad \forall u>0, v>0$

$$\Leftrightarrow \alpha u + v - (\alpha \ln(u) + \ln(v)) \geq 0 \quad , u>0, v>0$$

$$\Rightarrow L(u,v) \geq 0 \quad (**)$$

De plus L est de classe C^1 et on a :

$$\nabla L(u,v) = \left(\alpha - \frac{\alpha}{u}, 1 - \frac{1}{v}\right)$$
$$= \left(\alpha\left(\frac{u-1}{u}\right), \left(\frac{v-1}{v}\right)\right)$$

$$dL(u,v) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \alpha\left(\frac{u-1}{u}\right) h_1 + \left(\frac{v-1}{v}\right) h_2$$
$$= \left\langle \nabla L(u,v), \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$dL(u,v) \cdot f\left(t; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = \left\langle \nabla L(u,v), \begin{pmatrix} u(1-v) \\ \alpha v(u-1) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} \alpha\left(\frac{u-1}{u}\right) \\ \frac{v-1}{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(1-v) \\ \alpha v(u-1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$dL(u,v) : f\left(t,\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = \alpha\left(\frac{u-1}{u}\right)u(1-v) + \left(\frac{v-1}{v}\right)\alpha v(u-1)$$

$$= \alpha(u-1)(1-v) + \alpha(v-1)(u-1)$$

$$= \alpha(u-1)(1-v) - \alpha(u-1)(1-v)$$

$$dL(u,v) : f\left(t\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = 0$$

donc $dL(u,v) : f\left(t,\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) \leq 0 \; L(u,v) \vdash 0$ $(**)$

De $(*)$ et $(**)$, on déduit que L est une fonction de Lyapounov.

4) Calculons le ou les points d'équilibre et étudions leur stabilité.

Soit (u,v) un point d'équilibre

On a $f\left(t,\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = 0 \iff \begin{cases} u(1-v) = 0 \\ \alpha v(u-1) = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} u = 0 \text{ ou } 1-v = 0 \\ v = 0 \text{ ou } u-1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = 0 \text{ ou } v = 1 \\ v = 0 \text{ ou } u = 1 \end{cases}$$

Donc les points d'équilibre sont : $(0,0)$ et $(1,1)$

— Stabilité des points d'équilibre :

La matrice Jacobienne est : $Jf\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z_2 & -z_1 \\ \alpha z_2 & \alpha z_1 - \alpha \end{pmatrix}$

$$Jf\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $JF\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ sont 1 et $-\alpha$.

Or $1>0$ alors le point d'équilibre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est instable.

$$J_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|J_f(1,1) - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = (i\sqrt{\alpha})^2 \text{ car } \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$$

On ne peut rien dire sur le point d'équilibre $(1,1)$ avec cette méthode

En considérant la fonction de Lyapounov

on a $L(1,1) = \alpha + 1$ or $\alpha > 0$

donc $L(1,1) > 0$, D'autre par $L'(1,1) = 0 \leq 0$

Ainsi ~~le~~ point d'équilibre $(1,1)$ est un point d'équilibre stable. Mais

5-) ; 6-) , 7-) ; 8-) , 9-) et 10-)

(Voir code Python

Scanned with CamScanner

2- Extension du modèle.

Soit $\begin{cases} \dfrac{dP}{d\tau} = P(a-\beta P - bR) \\ \dfrac{dR}{d\tau} = R(cP-d) \end{cases}$

1) Adimensionnalisons le système et déterminons les points d'équilibre

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{d\tau} = a\frac{dP}{d\tau} \quad \text{car } a = \frac{dt}{d\tau}$$

$$= \frac{ad}{c}\frac{du(t)}{dt} \quad \text{car } \frac{dP}{dt} = \frac{d}{c}\frac{du(t)}{dt}$$

Or $$\frac{ad}{c}\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{c}u(t)\left(a - \beta\frac{d}{c}u(t) - b\cdot\frac{a}{b}v(t)\right)$$

$$\frac{ad}{c}\frac{du(t)}{dt} = \frac{ad}{c}u(t)\left(1 - \frac{\beta d}{ac}u(t) - v(t)\right)$$

Donc $$\frac{du}{dt} = u(t)\left(1 - \gamma u(t) - v(t)\right) \quad \text{car } \gamma = \frac{\beta d}{ac} \quad (1)$$

De la même façon, on a : $\dfrac{dR}{d\tau} = \dfrac{dR}{dt}\dfrac{dt}{d\tau} = a\dfrac{dR}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{a}{b}\frac{dv(t)}{dt}$$

$$= \frac{a^2}{b}\frac{dv(t)}{dt} = R(cP-d)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{a}v(t)\left(u(t)-1\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v(t)\left(u(t)-1\right) \quad (2) \quad \text{car } \alpha = \frac{d}{a}$$

De ① et ② on déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(t)\left(1-\gamma u(t) - v(t)\right) \\ \dfrac{dv}{dt} = \alpha v(t)\left(u(t)-1\right) \end{cases}$$

.. Les points d'équilibres

$$\begin{cases} u(t)\left(1-\gamma u(t)-v(t)\right) = 0 \\ \alpha v(t)\left(u(t)-1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = 0 \text{ ou } 1-\gamma u(t) - v(t) = 0 \\ \alpha v(t) = 0 \text{ ou } u(t)-1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u,v) = (0,0) \\ (u,v) = (1;1-\gamma). \end{cases}$$

Les points d'équilibres sont alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\gamma \end{pmatrix}$.

2) Etudions la stabilité.

Soit G la fonction second membre définie par :

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(t, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} u(t)\left(1-\gamma u(t) - v(t)\right) \\ \alpha v(t)\left(u(t)-1\right) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$JG\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $JG\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont 1 et $-\alpha$ et $1>0$

Alors le point d'équilibre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est instable.

$$JG\begin{pmatrix}1\\1-\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta & -1\\ \alpha-\alpha\delta & \delta\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont : $-\lambda(\delta-\lambda)+(\alpha-\alpha\delta)=0$

$\lambda^2-\lambda\delta+\alpha(1-\delta)=0$

$\Delta=\delta^2-4\alpha(1-\delta)$

On a : $\Delta>0$ et $\lambda_1=\frac{\delta-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2=\frac{\delta+\sqrt{\Delta}}{2}$ qui sont les valeurs propres de $JG\begin{pmatrix}1\\1-\delta\end{pmatrix}$

Donc les point $\begin{pmatrix}1\\1-\delta\end{pmatrix}$ est stable.

4) Si l'une des espèces en compétition ne change pas de comportement trophique alors le principe d'exclusion compétitif serait validé par ce modèle quelque soit les paramètres.

5) Interprétation

Dans les équations du modèle de Lotka-Volterra, la vitesse maximale d'accroissement d'une population de prédateurs se situe au moment de la densité maximale de ses proies réflétant que le taux de multiplication du prédateur dépend essentiellement de la disponibilité de sa nourriture, donc une indisponibilité de sa nourriture (proie) peut amener à son extinction.

3- voir Code Python.