



ADVANCED COMPUTATIONAL METHODS FOR FINANCE

Final Project done by

GBODOGBE S. Conité
&
Jean-Claude S. MITCHOZOUNOU

AFRICA BUSINESS SCHOOL, UM6P, MOROCCO

MASTER OF QUANTITATIVE AND FINANCIAL MODELLING (QFM)

ETUDE ET APPLICATION DE QUELQUES SCHÉMAS AUX
DIFFÉRENCES FINIES POUR DEUX LOIS DE CONSERVATION

Teacher: PROF. IMAD ELMAHI

Academic Year 2023-2024

UNIVERSITY MOHAMMED VI POLYTECHNIC (UM6P)

CONTENTS

0	Mini-Project	1
0.1	Equation de transport	1
0.2	Equation de Burgers	15

Mini-Project

0.1 Equation de transport

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) & \forall t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

1.1 Déterminons la solution exacte $u(x, t)$ de l'équation (E_1) .

Cherchons la $\Gamma(x(s), t(s))$ une courbe caractéristique le long de laquelle l'EDP devient un EDO

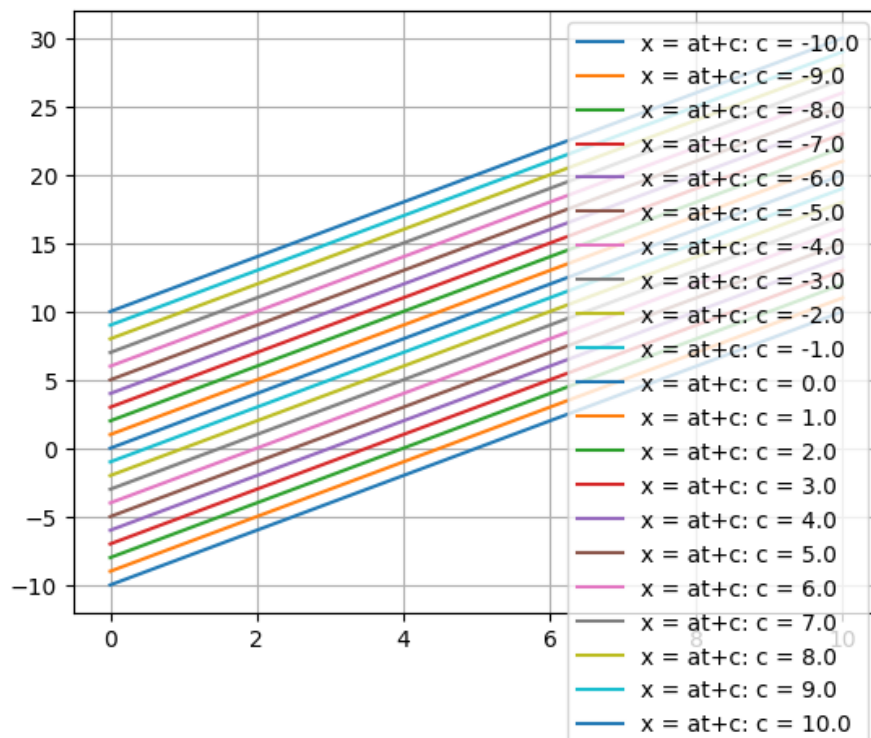
$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} - a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} \right) \end{aligned}$$

E_1 est une EDO si $\frac{dx}{ds} - a \frac{dt}{ds} = 0$

Ainsi les courbes caractéristiques vérifient l'équation $dx = a dt$

$dx = a dt \Leftrightarrow x = at + c$ (avec $c \in \mathbb{R}$)

Courbes caractéristiques



Resolvons $\frac{du}{ds} = 0$ sur les caractérisques

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} &= 0 \Leftrightarrow du = 0 \\ u &= cste\end{aligned}$$

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad u(x, t) = \epsilon$$

Soit $(x_0, t_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

$\exists!$ courbe caractéristique qui passe par cet point et cette courbe, c'est la droite $(\Gamma^0) : x - at = x_0 - at_0$

$u(x, t) = \epsilon = u(x, 0) \quad \forall x \in [0, L]$ Or le point de coordonnée $(x_0 - at_0, 0) \in (\Gamma^0)$

$$u(x, t) = \epsilon = u(x_0 - at_0, 0) = u_0(x_0 - at_0)$$

1.2. Etudions la consistance, stabilité et la convergence de chacun des schemas

1. Schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Consistance:

Développement limité selon Taylor à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)\end{aligned}$$

En discret, on a :

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \textcircled{a} \\ u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (1) \\ u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (2)\end{aligned}$$

(1)-(2), donne:

$$\begin{aligned}u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)\end{aligned}$$

En discret on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + a \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \iff \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_j^n + a \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_j^n - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2)\end{aligned}$$

Soit alors

$$ET = \mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

$$\begin{aligned}|ET| &= |\mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}(\Delta t)| \leq |\mathcal{O}((\Delta x)^2)| + |\mathcal{O}(\Delta t)| \\ &\leq \lambda_1 |\Delta x|^2 + \lambda_2 |\Delta t|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

Ainsi, $0 \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \lambda_1 |\Delta x|^2 + \lambda_2 |\Delta t| = 0$, i.e. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| = 0$

D'où le schéma 1 est consistant.

Stabilité:

Appliquons la méthode de Fourier en écrivant la solution numérique sous la forme $u_j^n = C^n e^{i\epsilon j \Delta x}$, où C est la condition de stabilité, n est l'indice de temps, j est l'indice spatial, ϵ est le nombre d'onde, et Δx est le pas spatial.

$$C^{n+1} e^{i\epsilon j \Delta x} = C^n e^{i\epsilon j \Delta x} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\epsilon(j-1)\Delta x})$$

$$C^{n+1} e^{i\epsilon j \Delta x} = C^n e^{i\epsilon j \Delta x} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\epsilon(j-1)\Delta x})$$

$$C^{n+1} = C^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} C^n \left(\frac{e^{i\epsilon \Delta x} - e^{-i\epsilon \Delta x}}{2} \right)$$

$$C^{n+1} = C^n \left(1 - \lambda \left(\frac{e^{i\epsilon \Delta x} - e^{-i\epsilon \Delta x}}{2} \right) \right) \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x})$$

$$C^{n+1} = C^n (1 - \lambda i \sin(\epsilon \Delta x)) \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x})$$

Posons $A = 1 - \lambda i \sin(\epsilon \Delta x)$.

Soit u_o une solution bornée de (E_1) , le schéma est stable si et seulement si $|A| \leq 1$.

$$|A|^2 = 1 + (\lambda \sin(\epsilon \Delta x))^2 = 1 + \lambda^2 (\sin(\epsilon \Delta x))^2 \geq 1.$$

Ainsi $|A| > 1$. Par suite le schéma est instable.

2. Schéma décentré

$$\text{En amont: } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } a > 0$$

$$\text{En aval: } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } a < 0$$

- Considérons le schéma

$$\text{En amont: } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } a > 0$$

Consistance:

D'après ② on a; en discret: $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$ (3)

Par ailleurs,

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad . \text{ C'est-à-dire,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)). \text{ En discret, on obtient:}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (4).$$

De (3) et (4) on a:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)) \\ \iff \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)) \end{aligned}$$

Soit alors

$$ET = \mathcal{O}((\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

$$\begin{aligned} |ET| &= |\mathcal{O}((\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta t)| \leq |\mathcal{O}((\Delta x))| + |\mathcal{O}(\Delta t)| \\ &\leq \lambda_1 |\Delta x| + \lambda_2 |\Delta t|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Ainsi, $0 \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \lambda_1 |\Delta x| + \lambda_2 |\Delta t| = 0$, i.e. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| = 0$

D'où le schéma 2(décentré) en amont est consistant.

Stabilité:

Appliquons la méthode de Fourier en écrivant la solution numérique sous la forme $u_j^n = C^n e^{i\epsilon j \Delta x}$, où C est la condition de stabilité, n est l'indice de temps, j est l'indice spatial, ϵ est le nombre d'onde, et Δx est le pas spatial.

$$C^{m+1}e^{i\epsilon j\Delta x} = C^m e^{i\epsilon j\Delta x} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(C^m e^{i\epsilon(j)\Delta x} - C^m e^{i\epsilon(j-1)\Delta x})$$

$$C^{m+1}e^{i\epsilon j\Delta x} = C^m e^{i\epsilon j\Delta x} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(C^m e^{i\epsilon(j)\Delta x} - C^m e^{i\epsilon(j-1)\Delta x})$$

$$C^{m+1} = C^m - a \frac{\Delta t}{\Delta x} C^m (1 - e^{-i\epsilon\Delta x})$$

$$C^{m+1} = C^m (1 - \lambda + \lambda e^{-i\epsilon\Delta x}) \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x})$$

$$C^{m+1} = C^m [1 - \lambda + \lambda(\cos(\epsilon\Delta x) - i\sin(\epsilon\Delta x))] \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x})$$

Posons $A = 1 - \lambda + \lambda \cos(\epsilon\Delta x) - i\lambda \sin(\epsilon\Delta x)$.

Soit u_o une solution borné de (E_1) , le schéma est stable si et seulement si $|A| \leq 1$.

$$\begin{aligned} |A|^2 &= [1 - \lambda + \lambda \cos(\epsilon\Delta x)]^2 + (\lambda \sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(\epsilon\Delta x) + \lambda^2(\cos(\epsilon\Delta x))^2 + \lambda^2(\sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(\epsilon\Delta x) \\ &= 1 - 2\lambda(1 - \lambda) + 2\lambda(1 - \lambda) \cos(\epsilon\Delta x) \\ &= 1 - 2\lambda(1 - \lambda) [1 - \cos(\epsilon\Delta x)] \\ &= 1 - 2\lambda(1 - \lambda) \left(2 \sin^2\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \right) \\ |A|^2 &= 1 - 4\lambda(1 - \lambda) \sin^2\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| \leq 1 &\iff |A|^2 \leq 1 \\ &\iff 1 - 4\lambda(1 - \lambda) \sin^2\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \leq 1 \\ &\iff -4\lambda(1 - \lambda) \sin^2\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \leq 0 \\ &\iff -(1 - \lambda) \leq 0 \text{ because } \sin^2\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \geq 0 \forall \epsilon \text{ and } \lambda > 0 \\ &\iff 1 - \lambda \geq 0 \\ &\iff \lambda \leq 1 \text{ i.e. } \frac{a\Delta t}{\Delta x} = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \end{aligned}$$

Par suite le schéma est stable ssi $\boxed{|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$

Convergence:

De ce qui précède, on a obtenu que le schéma décentré en amont est stable et consistant. De plus l'EDP étudié est une EDP linéaire. Alors d'après le théorème de Lax on conclut que le schéma décentré en amont est stable.

- Considérons le schéma

$$\text{En aval: } \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \text{ si } a < 0$$

Consistance:

D'après ② on a; en discret: $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$ (5)

Par ailleurs,

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad . \text{ C'est-à-dire,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)). \text{ En discret, on obtient:}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \text{ (6).}$$

De (5) et (6) on a:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)) \\ \iff \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n - \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) &= \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}((\Delta x)) \end{aligned}$$

Soit alors

$$ET = \mathcal{O}((\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

$$\begin{aligned} |ET| &= |\mathcal{O}((\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta t)| \leq |\mathcal{O}((\Delta x))| + |\mathcal{O}(\Delta t)| \\ &\leq \lambda_1 |(\Delta x)| + \lambda_2 |(\Delta t)|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Ainsi, $0 \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \lambda_1 |(\Delta x)| + \lambda_2 |(\Delta t)| = 0$, i.e. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| = 0$

D'où le schéma 2(décentré) en aval est consistant d'ordre 1 en temps et en espace.

Stabilité:

Appliquons la méthode de Fourier en écrivant la solution numérique sous la forme $u_j^n = C^n e^{i\epsilon j \Delta x}$.

$$C^{n+1} e^{i\epsilon j \Delta x} = C^n e^{i\epsilon j \Delta x} - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\epsilon j \Delta x})$$

$$C^{n+1} e^{i\epsilon j \Delta x} = C^n e^{i\epsilon j \Delta x} - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\epsilon j \Delta x})$$

$$C^{n+1} = C^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} C^n (e^{i\epsilon \Delta x} - 1)$$

$$C^{n+1} = C^n \left(1 + \lambda - \lambda e^{i\epsilon \Delta x} \right) \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a \Delta t}{\Delta x})$$

$$C^{n+1} = C^n [1 + \lambda - \lambda (\cos(\epsilon \Delta x) + i \sin(\epsilon \Delta x))] \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a \Delta t}{\Delta x})$$

Posons $A = 1 + \lambda - \lambda \cos(\epsilon \Delta x) - i \sin(\epsilon \Delta x)$.

Soit u_o une solution borné de (E_1) , le schéma est stable si et seulement si $|A| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
|A|^2 &= [1 + \lambda - \lambda \cos(\epsilon \Delta x)]^2 + (-\lambda \sin(\epsilon \Delta x))^2 \\
&= (1 + \lambda)^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\epsilon \Delta x) + \lambda^2 (\cos(\epsilon \Delta x))^2 + \lambda^2 (\sin(\epsilon \Delta x))^2 \\
&= 1 + 2\lambda + 2\lambda^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\epsilon \Delta x) \\
&= 1 + 2\lambda(1 + \lambda) - 2\lambda(1 + \lambda) \cos(\epsilon \Delta x) \\
&= 1 + 2\lambda(1 + \lambda) [1 - \cos(\epsilon \Delta x)] \\
&= 1 + 2\lambda(1 + \lambda) \left(2 \sin^2\left(\frac{\epsilon \Delta x}{2}\right) \right) \\
|A|^2 &= 1 + 4\lambda(1 + \lambda) \sin^2\left(\frac{\epsilon \Delta x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A| \leq 1 &\iff |A|^2 \leq 1 \\
&\iff 1 + 4\lambda(1 + \lambda) \sin^2\left(\frac{\epsilon \Delta x}{2}\right) \leq 1 \\
&\iff +4\lambda(1 + \lambda) \sin^2\left(\frac{\epsilon \Delta x}{2}\right) \leq 0 \\
&\iff \lambda(1 + \lambda) \leq 0 \text{ because } \sin^2\left(\frac{\epsilon \Delta x}{2}\right) \geq 0 \forall \epsilon \\
&\iff 1 + \lambda \geq 0 \text{ because } \lambda < 0 \\
&\iff -\lambda \leq 1 \text{ i.e. } -\frac{a \Delta t}{\Delta x} = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1
\end{aligned}$$

Par suite le schéma est stable ssi $\boxed{|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$

Convergence:

De ce qui précède, on a obtenu que le schéma décentré en aval est stable et consistant. De plus l'EDP étudié est une EDP linéaire. Alors d'après le théorème de Lax on conclut que le schéma décentré en amont est stable.

3. Schéma de Lax-Friedrichs

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Consistance:

Développement limité selon Taylor à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta t) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad \textcircled{a}
\end{aligned}$$

De plus en faisant le développement de Taylor à l'ordre 1 en espace on a:

$$\begin{cases} u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \\ u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow u(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad \textcircled{b}$$

⑥ dans ⑤ donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ &= \frac{u(x, t + \Delta t) - \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t)}{2}}{\Delta t} + \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned}$$

En discret, on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (7) \\ u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \quad (8) \end{aligned}$$

(7)-(8), donne:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

En discret on obtient:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \Longleftrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n - \left(\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) &= \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned}$$

Soit alors

$$ET = \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right) + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Comme l'erreur de troncature contient un terme en $\mathcal{O}\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right)$, alors, si Δt tend vers 0 plus vite que $(\Delta x)^2$, le schéma n'est pas consistant. Néanmoins, il est consistant si le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est constant. En effet, si $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$ alors,

$$\begin{aligned} ET &= \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta x\right) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ &= \mathcal{O}(c\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ ET &= \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} |ET| &= |\mathcal{O}((\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta t)| \leq |\mathcal{O}((\Delta x))| + |\mathcal{O}(\Delta t)| \\ &\leq \lambda_1|(\Delta x)| + \lambda_2|(\Delta t)|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Ainsi, $0 \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \lambda_1|(\Delta x)| + \lambda_2|(\Delta t)| = 0$, i.e. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| = 0$

D'ou le schema de Lax-Friedrichs est consistant si $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{cste}$.

Stabilité:

Appliquons la méthode de Fourier en écrivant la solution numérique sous la forme $u_j^n = C^n e^{i\epsilon j \Delta x}$.

$$2C^{n+1}e^{i\epsilon j \Delta x} = C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} + e^{i\epsilon(j-1)\Delta x} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\epsilon(j-1)\Delta x})$$

$$2C^{n+1}e^{i\epsilon j \Delta x} = C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} + e^{i\epsilon(j-1)\Delta x} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\epsilon(j-1)\Delta x})$$

$$2C^{n+1} = C^n \left((1 - \lambda)e^{i\epsilon \Delta x} + (1 + \lambda)e^{-i\epsilon \Delta x} \right) \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x})$$

$$C^{n+1} = C^n (\cos(\epsilon \Delta x) - i\lambda \sin(\epsilon \Delta x)) \quad (\text{avec } \lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x})$$

Posons $A = \cos(\epsilon \Delta x) - i\lambda \sin(\epsilon \Delta x)$.

Soit u_o une solution borné de (E_1) , le schéma est stable si et seulement si $|A| \leq 1$.

$$\begin{aligned} |A|^2 &= (\cos(\epsilon \Delta x))^2 + (-\lambda \sin(\epsilon \Delta x))^2 \\ &= 1 - (\sin(\epsilon \Delta x))^2 + \lambda^2 (\sin(\epsilon \Delta x))^2 \\ &= 1 + (\lambda^2 - 1)(\sin(\epsilon \Delta x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A| \leq 1 &\iff |A|^2 \leq 1 \\
&\iff 1 + (\lambda^2 - 1)(\sin(\epsilon\Delta x))^2 \leq 1 \\
&\iff (\lambda^2 - 1)(\sin(\epsilon\Delta x))^2 \leq 0 \\
&\iff \lambda^2 - 1 \leq 0 \text{ because } \sin^2(\epsilon\Delta x) \geq 0 \forall \epsilon \\
&\iff \lambda^2 \leq 1 \\
&\iff |\lambda| \leq 1 \text{ i.e. } \left| \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1
\end{aligned}$$

Par suite le schéma est stable si $\boxed{\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$

Convergence:

- Le schéma est consistant si $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{Cste}$

- Le schéma est stable si $\boxed{\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$.

- L'EDP est linéaire.

Alors d'après le théorème de Lax, on déduit que le schéma est convergent

si $\boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{Cste} \text{ et } \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1}$.

4. Schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$

Consistance:

D'après (7) et (8) on a:

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^3) \\
\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)
\end{aligned}$$

En discret on obtient:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (9)$$

$$\text{Par ailleurs, on a } \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = -a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x, t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, t) = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \end{cases} \iff \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \textcircled{a}$$

En faisant le développement limité d'ordre 2 en temps on obtient:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \iff$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{(\Delta t)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \quad \textcircled{B}$$

② dans ⑥ donne

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - a^2 \frac{(\Delta t)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \quad (*).$$

Or

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \quad (10)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \quad (11)$$

(10) + (11) donne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (**)$$

(**) dans (*) donne:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{a^2}{2} \frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)] + \mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

En discret on obtient:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \quad (12)$$

De (9) et (12) on obtient donc:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \\ \text{i.e } \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^n + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^n &- \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{a^2}{2} \frac{\Delta}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \right) = \\ &\mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{aligned}$$

Soit alors

$$ET = \mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

$$\begin{aligned} |ET| &= |\mathcal{O}((\Delta x)^2) + \mathcal{O}((\Delta t)^2)| \leq |\mathcal{O}((\Delta x))| + |\mathcal{O}(\Delta t)| \\ &\leq \lambda_1 |(\Delta x)^2| + \lambda_2 |(\Delta t)^2|, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Ainsi, $0 \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \lambda_1 |(\Delta x)^2| + \lambda_2 |(\Delta t)^2| = 0$, i.e. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} |ET| = 0$

D'où le schéma de Lax-Wendroff est consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

Stabilité:

Appliquons la méthode de Fourier en écrivant la solution numérique sous la forme $u_j^n = C^n e^{i\epsilon j \Delta x}$.

Le schéma se réécrit:

$$u_j^{n+1} = \left[1 - \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] u_j^n - \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$$

En posant $\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$, on a

$$\begin{aligned} C^{n+1} e^{i\epsilon j \Delta x} &= (1 - \lambda^2) C^n e^{i\epsilon j \Delta x} - \lambda \frac{C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} - C^n e^{i\epsilon(j-1)\Delta x}}{2} + \lambda^2 \frac{C^n e^{i\epsilon(j+1)\Delta x} + C^n e^{i\epsilon(j-1)\Delta x}}{2} \\ C^{n+1} &= \left[(1 - \lambda^2) - \lambda \frac{e^{i\epsilon\Delta x} - e^{-i\epsilon\Delta x}}{2} + \lambda^2 \frac{e^{i\epsilon\Delta x} + e^{-i\epsilon\Delta x}}{2} \right] C^n \\ C^{n+1} &= \left[(1 - \lambda^2) - i\lambda \sin(\epsilon\Delta x) + \lambda^2 \cos(\epsilon\Delta x) \right] C^n \end{aligned}$$

Posons $A = (1 - \lambda^2) + \lambda^2 \cos(\epsilon\Delta x) - i\lambda \sin(\epsilon\Delta x)$.

Soit u_o une solution borné de (E_1) , le schéma est stable si et seulement si $|A| \leq 1$.

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \left[(1 - \lambda^2) + \lambda^2 \cos(\epsilon\Delta x) \right]^2 + (-\lambda \sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= 1 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) \cos(\epsilon\Delta x) + \lambda^4 (\cos(\epsilon\Delta x))^2 + \lambda^2 (\sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= 1 - 2\lambda^2 + \lambda^4 + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) \cos(\epsilon\Delta x) + \lambda^4 - \lambda^4 (\sin(\epsilon\Delta x))^2 + \lambda^2 (\sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= 1 + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) \cos(\epsilon\Delta x) - 2\lambda^2 + 2\lambda^4 + \lambda^2(1 - \lambda^2) (\sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= 1 + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) \cos(\epsilon\Delta x) - 2\lambda^2(1 - \lambda^2) + \lambda^2(1 - \lambda^2) (\sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= 1 + 2\lambda^2(1 - \lambda^2) (\cos(\epsilon\Delta x) - 1) + \lambda^2(1 - \lambda^2) (\sin(\epsilon\Delta x))^2 \\ &= 1 - 4\lambda^2(1 - \lambda^2) \left(\sin\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \right)^2 + 4\lambda^2(1 - \lambda^2) \left(\sin\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \right)^2 \left(\cos\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \right)^2 \\ &= 1 - 4\lambda^2(1 - \lambda^2) \left(\sin\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \right)^2 \left(1 - \left(\cos\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \right)^2 \right) \\ |A|^2 &= 1 - 4\lambda^2(1 - \lambda^2) \left(\sin\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right) \right)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A| \leq 1 &\iff |A|^2 \leq 1 \\
&\iff 1 - 4\lambda^2(1 - \lambda^2)\left(\sin\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right)\right)^4 \leq 1 \\
&\iff -4\lambda^2(1 - \lambda^2)\left(\sin\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right)\right)^4 \leq 0 \\
&\iff -(1 - \lambda^2) \leq 0 \text{ because } \left(\sin\left(\frac{\epsilon\Delta x}{2}\right)\right)^4 \geq 0 \forall \epsilon < \text{ and } \lambda^2 \geq 0 \\
&\iff 1 - \lambda^2 \geq 0 \\
&\iff \lambda^2 \leq 1 \\
|A| \leq 1 &\iff |\lambda| \leq 1 \text{ i.e. } \left|\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1
\end{aligned}$$

Par suite le schéma est stable si et seulement si $\left|\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$

Convergence:

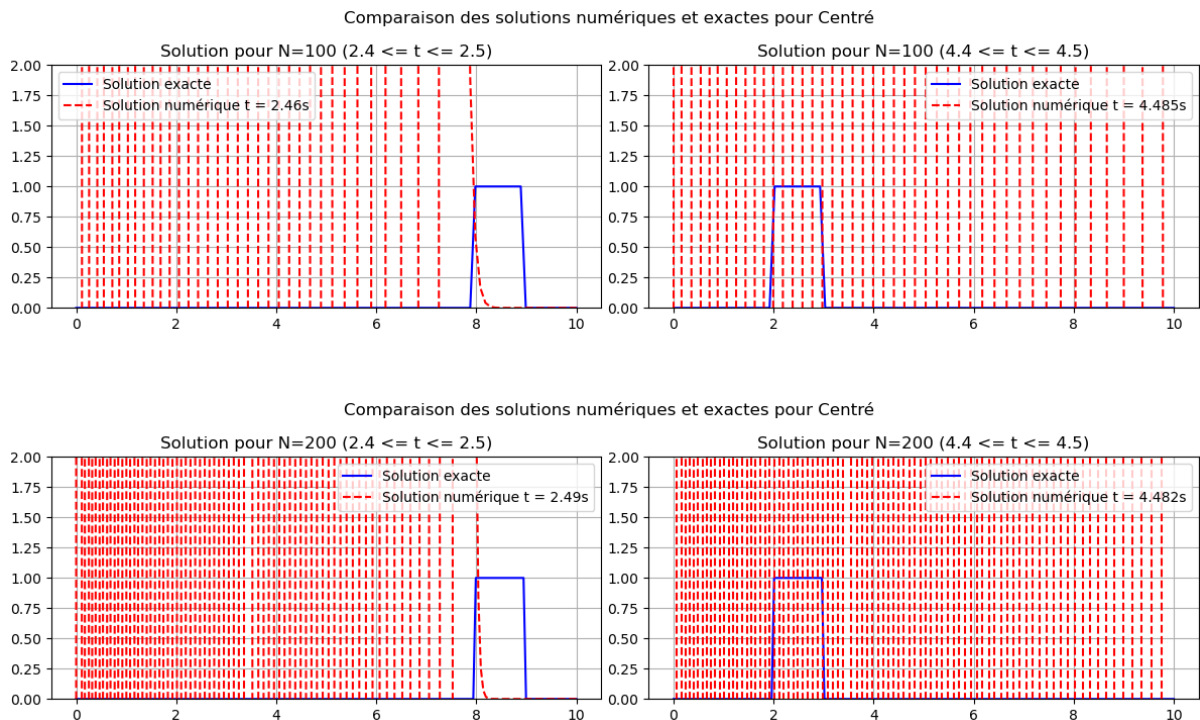
- Le schéma est consistant.
- Le schéma est stable ssi $\left|\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$.
- L'EDP est linéaire.

Alors d'après le théorème de Lax, on déduit que le schéma est convergent.

1.3. Implémentation des schémas numériques, évaluation de la solution approchée, puis comparaison de cette solution avec la solution exacte(Voir code)

Interprétation des résultats.

1. Schéma centré

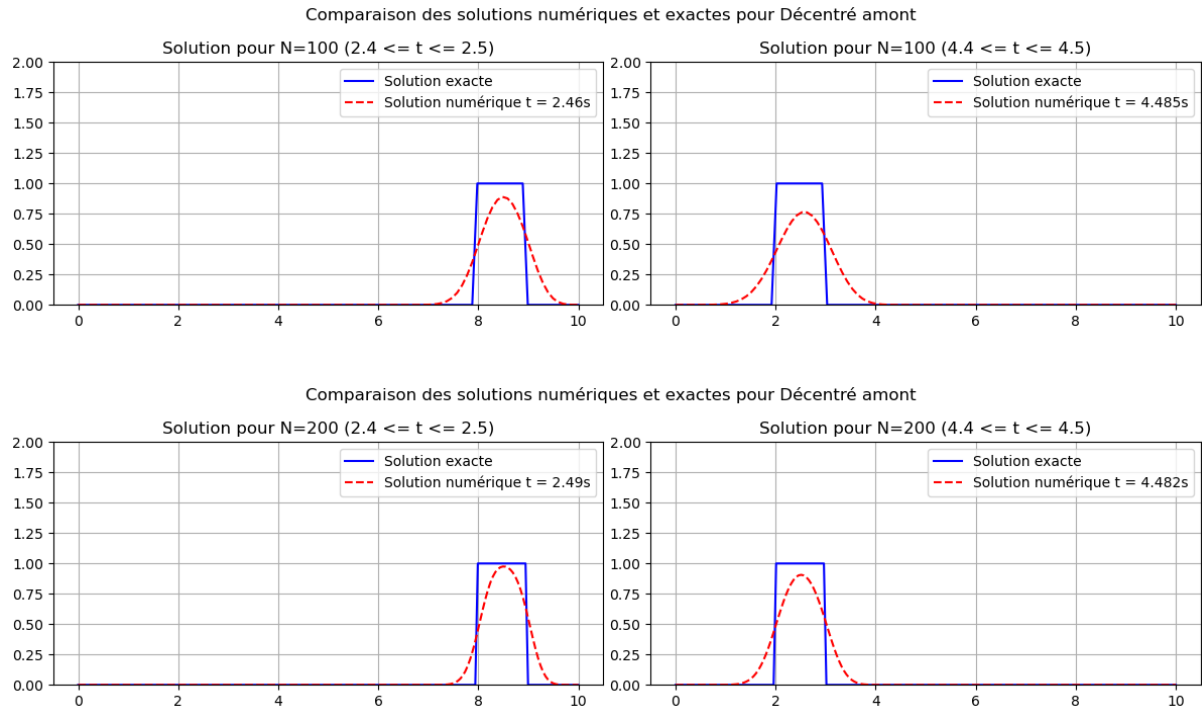


Interpretations : Le schéma centré pour l'équation de transport présente une instabilité inconditionnelle, même s'il demeure consistant. L'instabilité se manifeste par une croissance exponentielle des valeurs de u au fil du temps, notamment lorsque l'on ne limite pas l'ordonnée à une valeur raisonnable, comme 2. Cette observation suggère que, loin de diffuser l'énergie, la solution contribue indéfiniment à l'apport d'énergie dans le système.

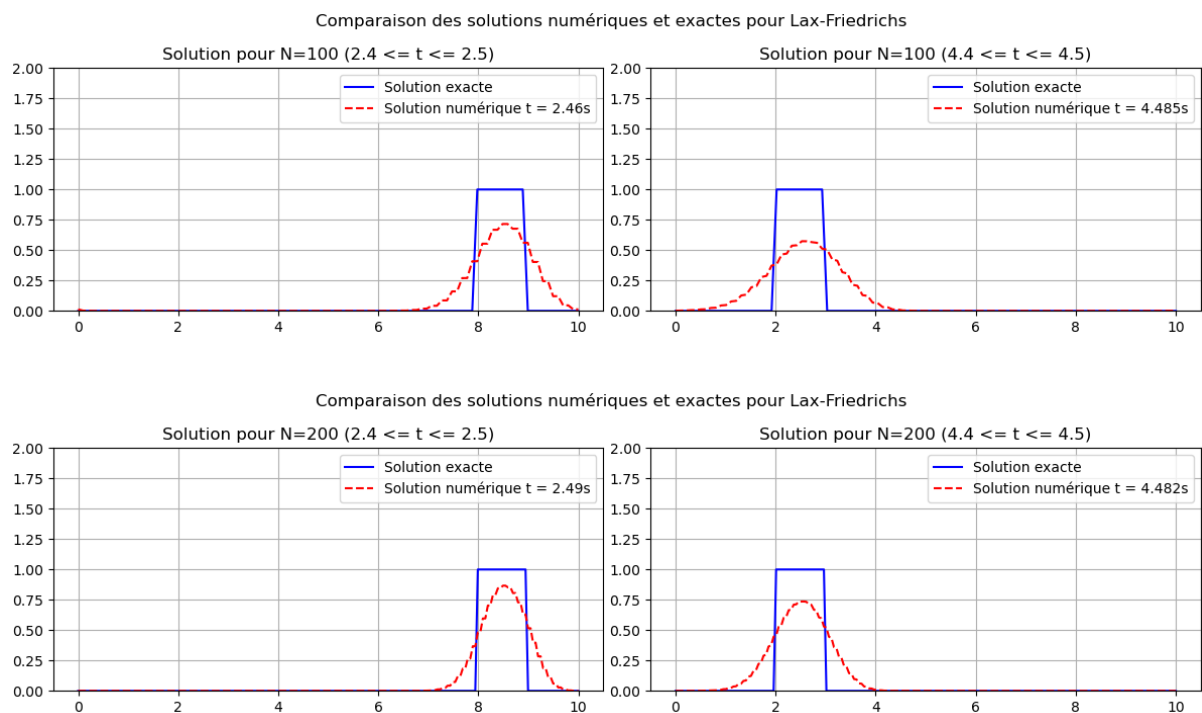
Conclusion :

En conséquence, ce schéma se révèle inadéquat pour résoudre l'équation de transport, car il conduit à des solutions non-physiques

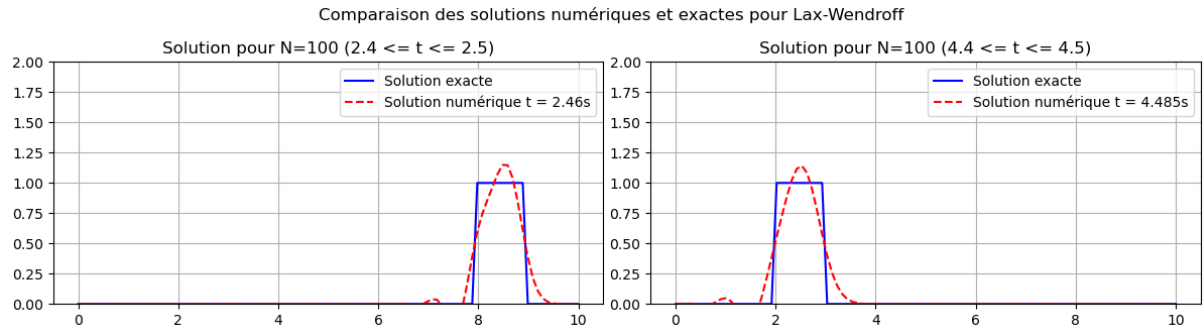
2. Schéma décentré ($a > 0$)



3. Schéma de Lax-Friedrichs



4. Schéma de Lax-Wendroff



Interpretations

On constate que la solution numérique que se soit avec le schéma décentré d'ordre 1 ou avec le schéma de Lax-Friedrichs présente une forte diffusion, et la discontinuité se trouve étalée sur une vingtaine de mailles. Avec le schéma d'ordre 2 de Lax Wendroff, la discontinuité est mieux captée (i.e. l'étalement du front est inférieure à 10 mailles), mais elle présente des oscillations.

Conclusion :

On conclut donc que le schéma de Lax-Wendroff présente les meilleures performances pour la résolution de l'équation de transport

1.4. Evaluation de l'erreur en norme L1 de la solution numérique obtenue par chaque schéma au temps $t_1 = 2.5$ s et pour $N = 100$ et interprétation.

Schéma	Centré	Décentré en amont	Lax-Fredrichs	Lax-Wendroff
t = 2.5	$\rightarrow \infty$	5.111	7.620	3.679
t = 4.5	$\rightarrow \infty$	6.803	9.637	4.194

Table 1: Tableau récapitulatif des erreurs en norme L1

- Le schéma centré montre des erreurs extrêmement élevées, ce qui suggère une instabilité numérique majeure. La solution diverge considérablement de la solution exacte, compromettant la fiabilité du schéma.
- Le schéma décentré en amont présente des erreurs relativement plus faibles que le schéma de Lax-Friedrichs, indiquant une meilleure performance en termes de précision.
- Le schéma de Lax-Wendroff présente les erreurs les plus faibles parmi les schémas évalués, suggérant une meilleure précision numérique et une meilleure adéquation pour résoudre l'équation de transport.

En somme, les résultats indiquent que le schéma de Lax-Wendroff offre la meilleure précision numérique parmi les schémas évalués.

0.2 Equation de Burgers

On considère maintenant l'équation de Burgers suivante :

$$(E_2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall x \in]0, L[; \forall t > 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{cases}$$

1. A l'aide de la méthode des caractéristiques, déterminons la solution exacte $u(x, t)$ du problème (E_2) .

Cherchons une courbe caractéristique $\Gamma = \Gamma(x(s); y(s))$ le long de laquelle l'EDP (E_2) se réduit à une EDO.

On écrit

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds}$$

En utilisant le fait que $\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}$, on obtient

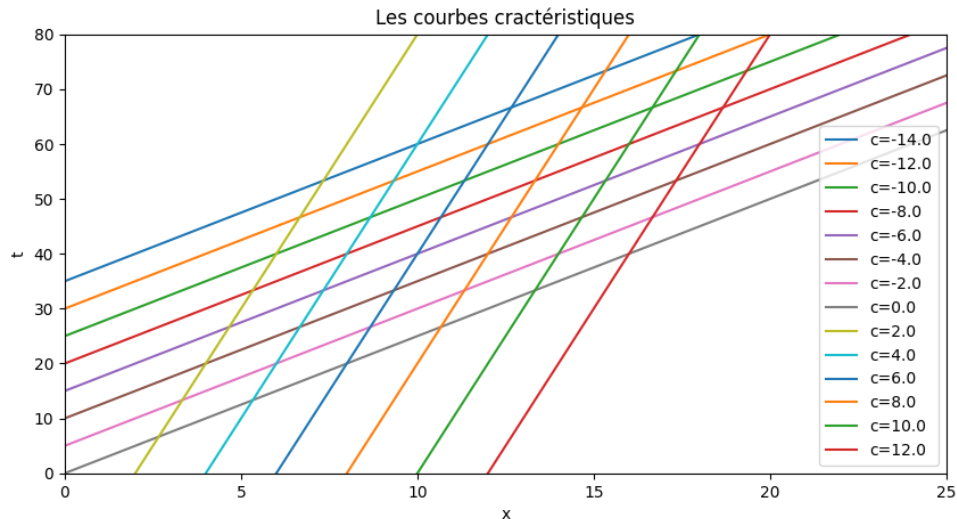
$$\frac{du}{ds} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \left[\frac{dx}{ds} - u \frac{dt}{ds} \right]$$

L'EDP (E_2) devient une EDO si $\frac{dx}{ds} - u \frac{dt}{ds} = 0 \iff dx = u dt$.

Ainsi on a $\begin{cases} du = 0 \text{ ① (l'équation à résoudre sur chaque caractéristique)} \\ dx = u dt \text{ ② (l'équation des caractéristiques)} \end{cases}$

De ① on a $du = 0 \iff u = \beta = u_0(x)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Courbes caractéristiques



De ② on a $dx = u dt$ i.e $x - \beta t = \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Soit $(x_0, t_0) \in]0, L[\times \mathbb{R}_+^*$, il existe une unique caractéristique qui Γ_0 passe par le point (x_0, t_0) : C'est la droite d'équation $x - \beta t = x_0 - \beta t_0$.

Par ailleurs $u(x, t = 0) = u_0(x)$, $\forall x \in [0, L]$. Or $(x_0 - \beta t_0, 0) \in \Gamma_0 \implies u(x, t) = u(x_0 - \beta t_0, 0) = u_0(x_0 - \beta t_0)$. Par suite $u(x, t) = u_0(x - u_0(x)t)$

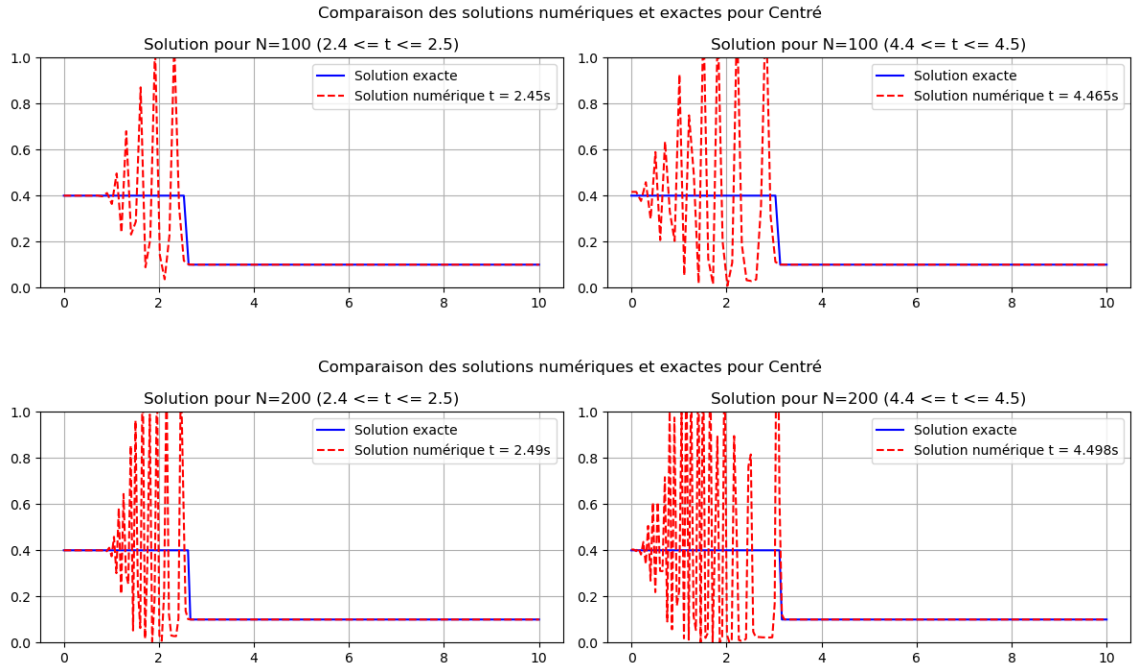
En utilisant la condition initiale de l'énoncé, on déduit la forme explicite de la solution qui s'écrit:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0.4 & \text{si } \frac{x-2}{t} < \frac{0.4+0.1}{2} = 0.25 \\ 0.1 & \text{si } \frac{x-2}{t} > \frac{0.4+0.1}{2} = 0.25 \end{cases}$$

2. Schémas numérique de l'équation de Burgers.

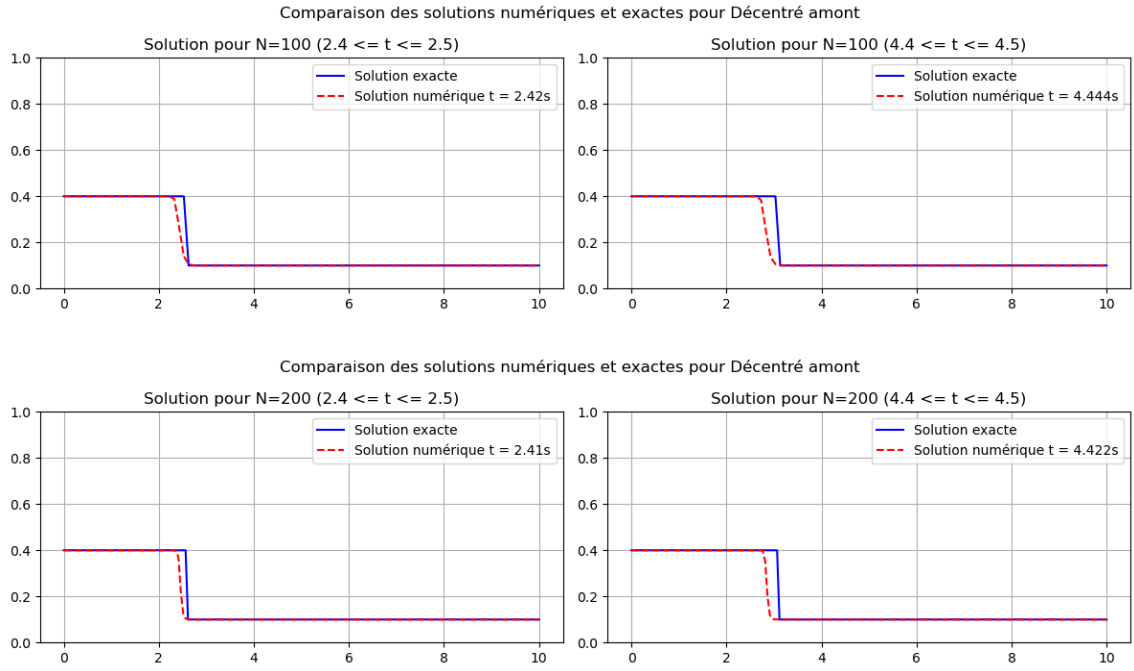
(a) Schéma (centré)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



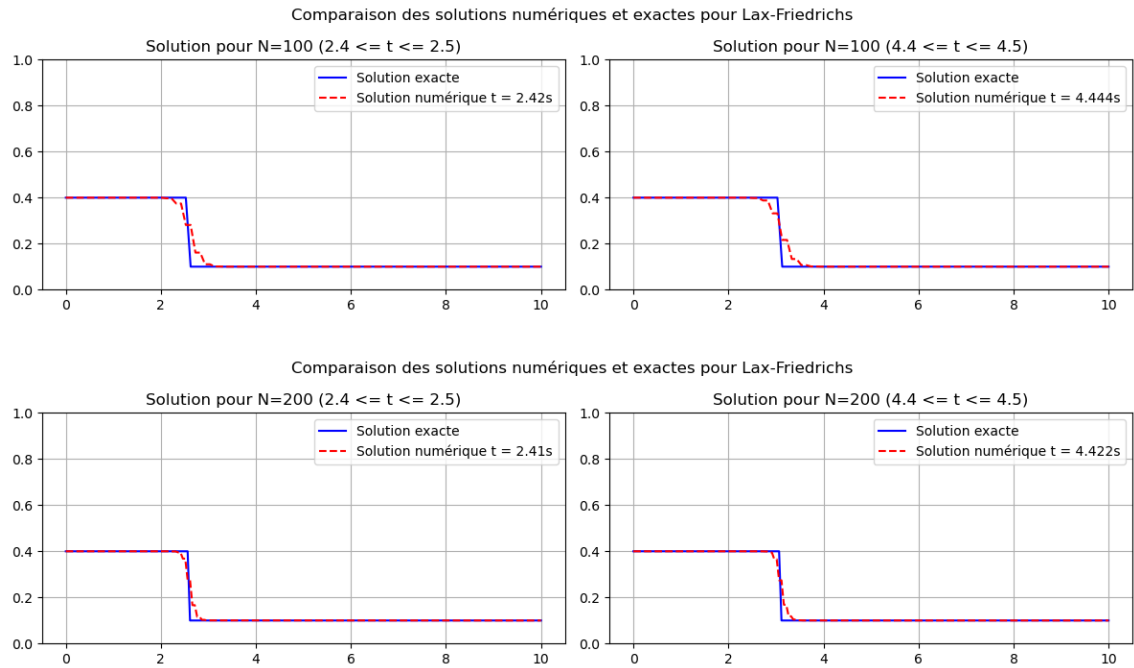
(b) Schéma (décentré en amont)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



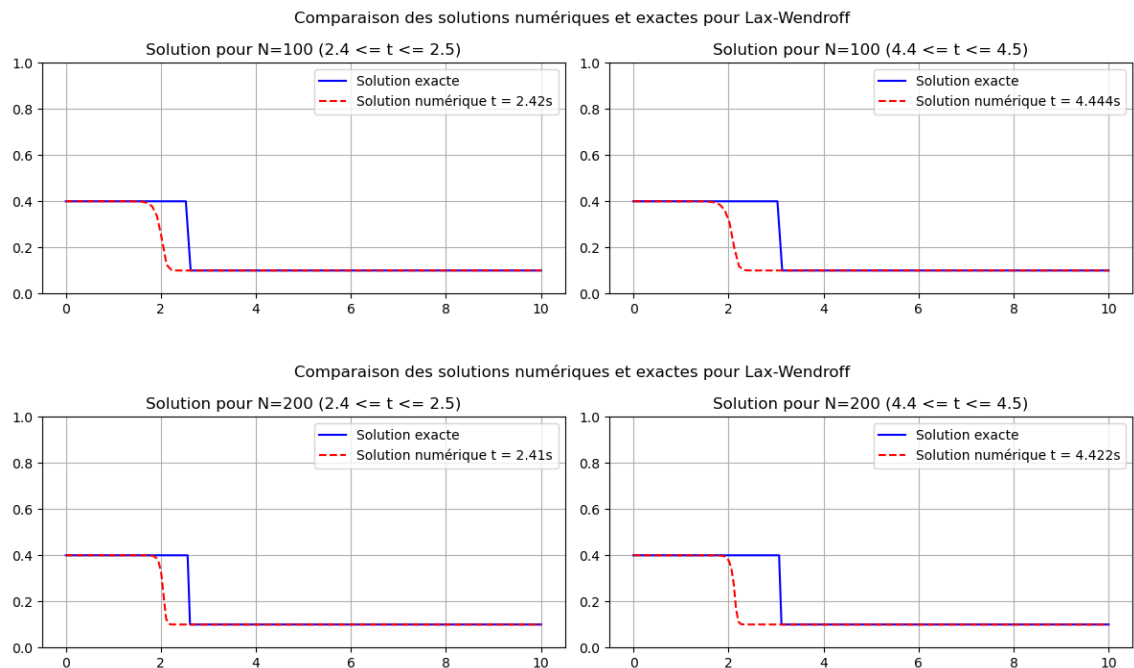
(c) Schéma (Lax-Friedrichs)

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



(d) Schéma (Lax-Wendroff)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{(u_j^n)^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$$



3. Implémentation(Voir code)

Interprétation et conclusion :

La convergence de la solution numérique est altérée aux abords de la discontinuité pour le schéma décentré en amont et le schéma de Lax-Friedrichs. Cependant, en augmentant la finesse de la discrétisation (en augmentant $N = 200$), le schéma de Lax-Friedrichs démontre une amélioration significative de la solution, avec une réduction notable de

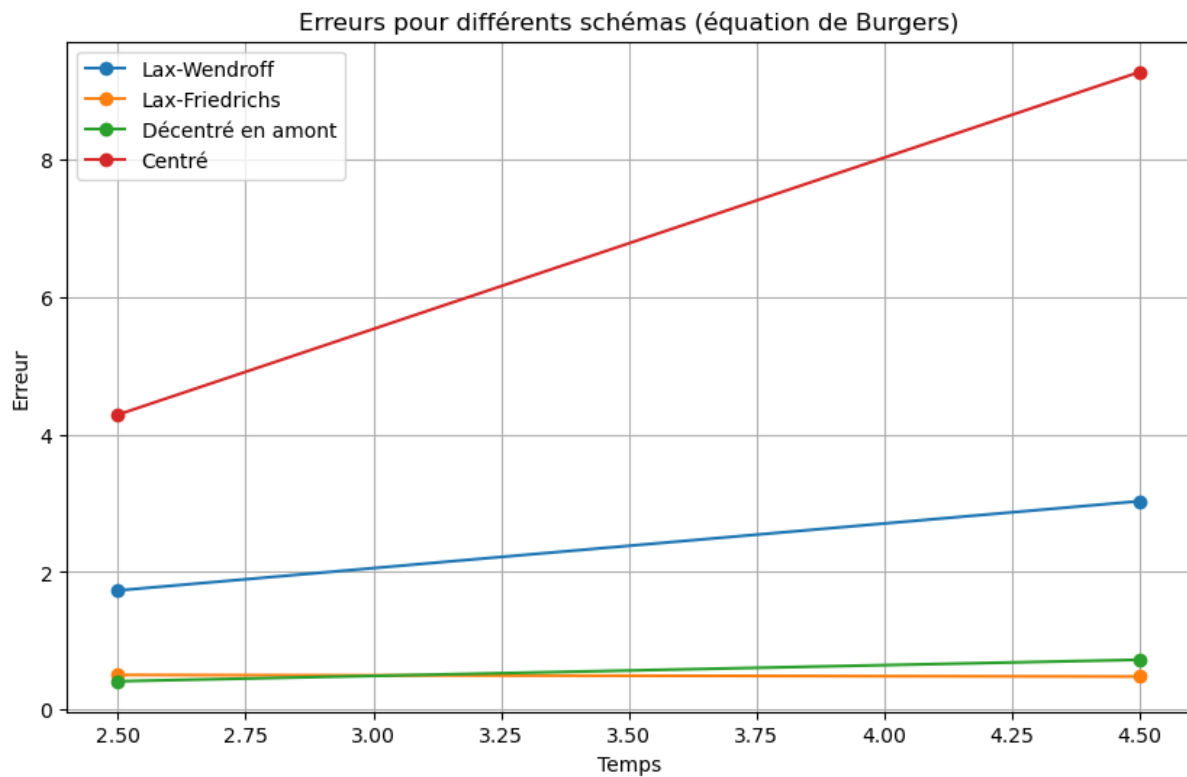
l'erreur. Cela suggère que, bien que les deux schémas convergent, le schéma de Lax-Friedrichs peut fournir des résultats plus prometteurs avec une résolution plus fine.

D'un autre côté, le schéma de Lax-Wendroff présente une diffusion significative du côté gauche. Le schéma centré avec ces valeurs extrêmement élevées, n'est pas non plus souhaitable. Ces deux méthodes sont tout simplement pas adaptées car la solution diverge considérablement de la solution exacte, compromettant la fiabilité du schéma.

4. Evaluation de l'erreur en norme L1 (Voir code)

Schéma	Centré	Décentré en amont	Lax-Fredrichs	Lax-Wendroff
$t = 2.5$	4.292	0.410	0.502	1.732
$t = 4.5$	9.280	0.723	0.479	3.032

Table 2: Tableau récapitulatif des erreurs en norme L1



Ces résultats montrent que le schéma centré présente des erreurs significativement plus élevées par rapport aux autres schémas pour les temps 2.5 et 4.5. Le schéma Lax-Friedrichs performe mieux en termes d'erreur, suivi du schéma décentré en amont.