



ADVANCED COMPUTATIONAL METHODS FOR FINANCE

Final Project done by

Geofroy LONMADON
&
Jean-Claude S. MITCHOZOUNOU

AFRICA BUSINESS SCHOOL, UM6P, MOROCCO

MASTER OF QUANTITATIVE AND FINANCIAL MODELLING (QFM)

VOLUMES FINIS POUR L'ÉQUATION DE DIFFUSION 2D

Teacher: PROF. IMAD ELMAHI

Academic Year 2023-2024

CONTENTS

0	Mini-Project	1
0.1	Test 1: Diffusion d'une gaussienne dans un carré	1
0.2	Test 2: Un problème d'équilibre thermique	11

Mini-Project

0.1 Test 1: Diffusion d'une gaussienne dans un carré

1) En considérant que le domaine du calcul Ω est non borné (pas d'influence des bords sur la solution), la solution analytique du problème (1) avec la condition initiale choisie (6), s'écrit :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \int \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}\right) u_0(x', y') dx' dy'$$

Montrons que :

$$u(x, y, t) = \frac{u_{\max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2 + 4Dt}\right)$$

On a :

$$u_0(x, y) = u_{\max} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right)$$

Alors

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{4\pi Dt} \int \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}\right) u_{\max} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{\sigma^2}\right) dx' dy' \\ &= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \int \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}\right) \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{\sigma^2}\right) dx' dy' \\ &= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \int \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt} - \frac{x'^2 + y'^2}{\sigma^2}\right) dx' dy' \\ &= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \int \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2(x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2) + 4Dt(x'^2 + y'^2)}{4\sigma^2 Dt}\right) dx' dy' \end{aligned}$$

Ainsi

$$u(x, y, t) = \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \int \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right) \exp\left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)x'^2 - 2\sigma^2 xx'}{4\sigma^2 Dt}\right) \exp\left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)y'^2 - 2\sigma^2 yy'}{4\sigma^2 Dt}\right) dx' dy'$$

En utilisant le théorème de Fubini on obtient:

$$u(x, y, t) = \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)x'^2 - 2\sigma^2 xx'}{4\sigma^2 Dt}\right) dx' \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)y'^2 - 2\sigma^2 yy'}{4\sigma^2 Dt}\right) dy'$$

$$\text{Posons: } \begin{cases} I_1 = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)x'^2 - 2\sigma^2 xx'}{4\sigma^2 Dt}\right) dx', \\ I_2 = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)y'^2 - 2\sigma^2 yy'}{4\sigma^2 Dt}\right) dy' \end{cases}$$

Soit alors,

$$u(x, y, t) = \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right) I_1 I_2 \quad \textcircled{1}$$

Les variables x' et y' étant muettes, calculer I_1 revient encore à calculer I_2 ($I_1 = I_2$).

• Calculons I_1

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)x'^2 - 2\sigma^2 xx'}{4\sigma^2 Dt} \right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt) \left[x'^2 - 2\frac{\sigma^2 x}{\sigma^2 + 4Dt} x' \right]}{4\sigma^2 Dt} \right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)}{4\sigma^2 Dt} \left[x'^2 - 2\frac{\sigma^2 x}{\sigma^2 + 4Dt} x' \right] \right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)}{4\sigma^2 Dt} \left[x'^2 - 2\frac{\sigma^2 x}{\sigma^2 + 4Dt} x' + \frac{\sigma^4 x^2}{(\sigma^2 + 4Dt)^2} - \frac{\sigma^4 x^2}{(\sigma^2 + 4Dt)^2} \right] \right) dx' \\
&= \exp \left(\frac{\sigma^2 x^2}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)}{4\sigma^2 Dt} \left[x'^2 - 2\frac{\sigma^2 x}{\sigma^2 + 4Dt} x' + \frac{\sigma^4 x^2}{(\sigma^2 + 4Dt)^2} \right] \right) dx' \\
&= \exp \left(\frac{\sigma^2 x^2}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)}{4\sigma^2 Dt} \left[x' - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 4Dt} x \right]^2 \right) dx'
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $X' = x' - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 4Dt}x$, on obtient:

$$I_1 = \exp \left(\frac{\sigma^2 x^2}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)}{4\sigma^2 Dt} X'^2 \right) dX'$$

L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{(\sigma^2 + 4Dt)}{4\sigma^2 Dt} X'^2 \right) dX'$ est une intégrale de Gauss et il est bien connu que pour $\alpha > 0$, $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. En utilisant ce resultat, on déduit que:

$$I_1 = \exp \left(\frac{\sigma^2 x^2}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \sqrt{\frac{4\sigma^2 Dt\pi}{\sigma^2 + 4Dt}} \quad (2)$$

De manière analogue on obtient:

$$I_2 = \exp \left(\frac{\sigma^2 y^2}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \sqrt{\frac{4\sigma^2 Dt\pi}{\sigma^2 + 4Dt}} \quad (3)$$

$$I_1 I_2 =$$

② et ③ dans ① donne:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt} \right) \exp \left(\frac{\sigma^2 x^2}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \exp \left(\frac{\sigma^2 y^2}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \frac{4\sigma^2 Dt\pi}{\sigma^2 + 4Dt} \\
&= \frac{u_{\max}}{4\pi Dt} \frac{4\sigma^2 Dt\pi}{\sigma^2 + 4Dt} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt} \right) \exp \left(\frac{\sigma^2(x^2 + y^2)}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \\
&= \frac{\sigma^2 u_{\max}}{\sigma^2 + 4Dt} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt} + \frac{\sigma^2(x^2 + y^2)}{4Dt(\sigma^2 + 4Dt)} \right) \\
&= \frac{u_{\max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt} \left[1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 4Dt} \right] \right) \\
&= \frac{u_{\max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt} \cdot \frac{4Dt}{\sigma^2 + 4Dt} \right) \\
u(x, y, t) &= \frac{u_{\max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2 + 4Dt} \right)
\end{aligned}$$

D'où
$$u(x, y, t) = \frac{u_{\max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2 4Dt}\right)$$

2) Génération d'un maillage de Ω

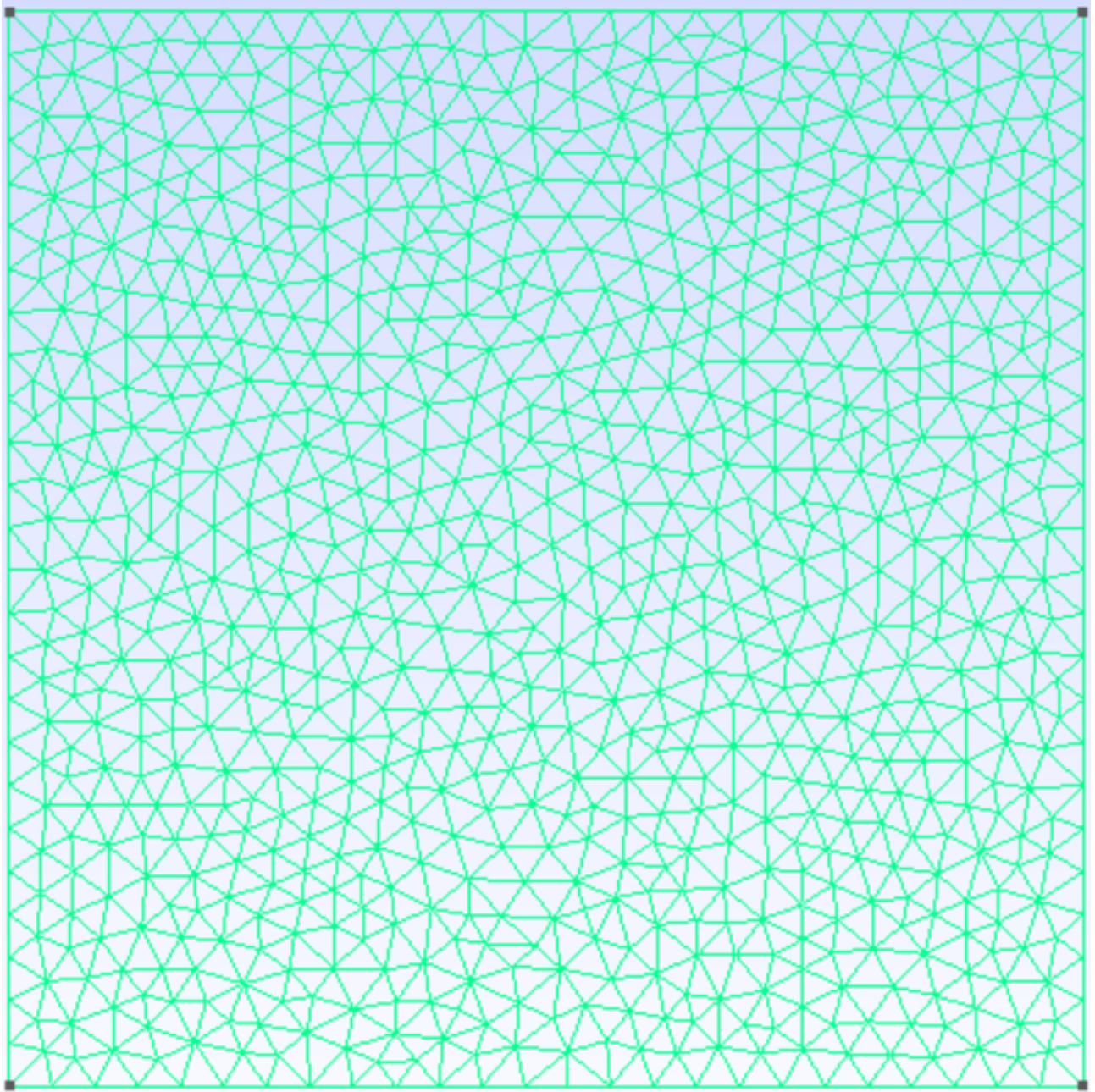


Figure 1: Maillage de Ω avec gmesh

3) Implémentons la solution initiale et traçons ses isovaleurs

La solution initiale s'écrit:

$$u_0(x, y) = u_{\max} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right)$$

```
1 def Sol_initiale(x, y, umax=1, sigma = 0.25):
2     return umax*np.exp(-1*(x**2+y**2)/sigma**2)
3
```

```

4 u_initiale = [ Sol_initiale(cell[0], cell[1]) for cell in domain.cells.center]
5 u_initiale = np.array(u_initiale)
6
7 save_n=0
8 save_paraview_one_variable(u_initiale, cells._nodeid, nodes._vertex, 2,
  ↪ "res_VF4"+str(save_n))

```

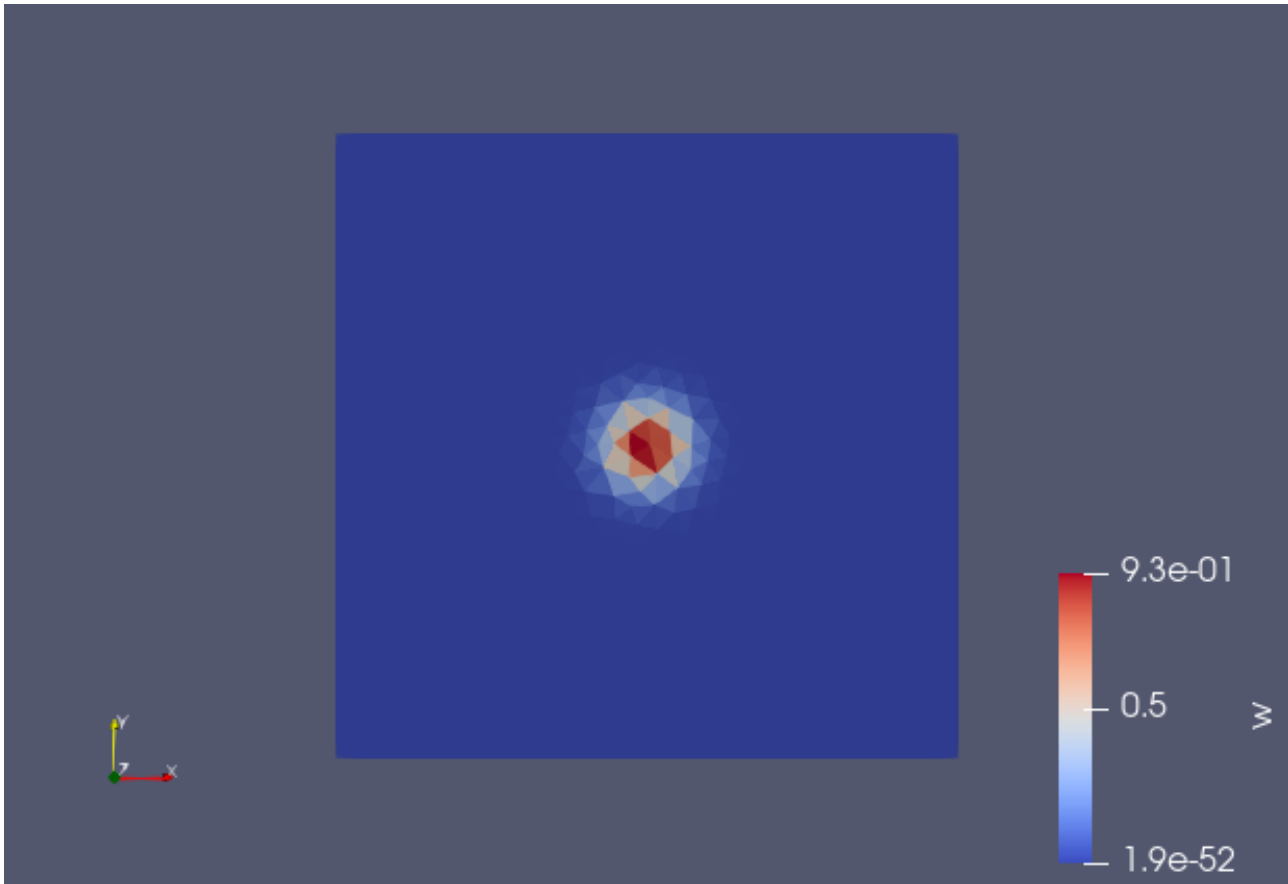
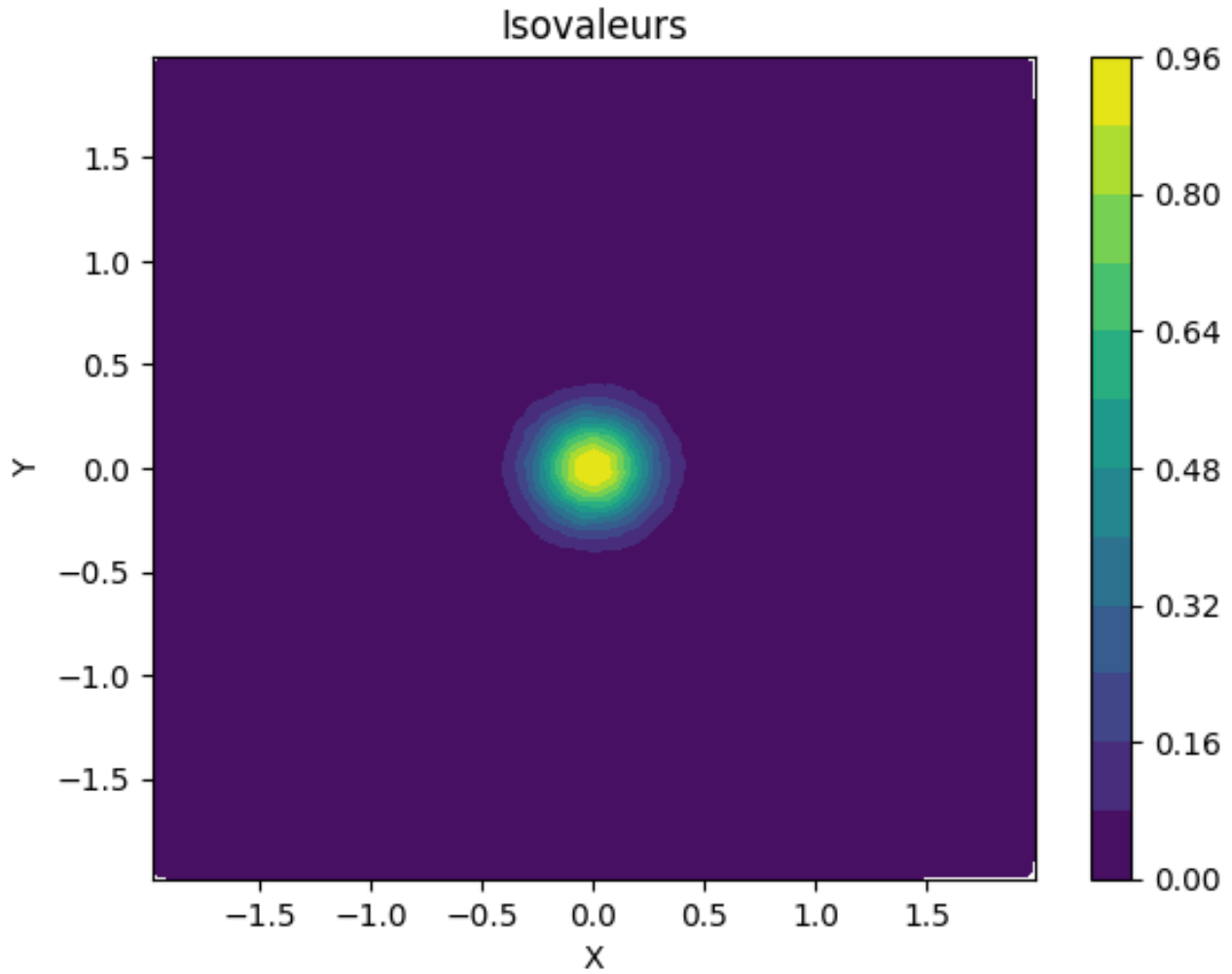


Figure 2: Affichage de la solution initiale dans paraview

```

1 #-----Fonction qui trace les isovaleurs-----#
2
3 def plot_isovaleurs(Orthocentre, u):
4     triang = Triangulation(Orthocentre[:, 0], Orthocentre[:, 1])
5     plt.figure()
6     plt.tricontourf(triang, u, levels=14) # 14 niveaux de contour
7     plt.colorbar()
8     plt.title("Isovaleurs")
9     plt.xlabel('X')
10    plt.ylabel('Y')
11    plt.show()
12
13 Orthocentre = np.array(Orthocentre)
14 plot_isovaleurs(Orthocentre, u_initiale)

```



4) Montrons que le schéma VF explicite (3), utilisant l'approximation VF4 (4) pour les flux de diffusion, vérifie un principe du maximum discret et qu'il est L^∞ -stable sous la condition :

$$\lambda = \Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$$

La mise à jour de la solution u au temps $n + 1$ dans la cellule K est donnée par :

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} F_{K,e_i}^n.$$

L'approximation VF4 pour le flux de diffusion le long de l'arête e_i entre les cellules K et L_i est :

$$F_{K,e_i}^n = -D|e_i| \frac{u_{L_i}^n - u_K^n}{d_{K,L_i}}$$

En utilisant l'approximation VF4, le schéma discret devient :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{u_{L_i}^n - u_K^n}{d_{K,L_i}} |e_i| \quad (\text{schéma 1}).$$

Principe du maximum(schéma 1)

$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = u_{\max} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \geq 0.$

Supposons que $u^n \geq 0$. Alors $\forall K \subset \Omega, u_K^n \geq 0$.

On a:

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{u_{L_i}^n - u_K^n}{d_{K,L_i}} |e_i|, \quad \forall K \subset \Omega.$$

En regroupant les termes, nous avons:

$$u_K^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}}\right) u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} u_{L_i}^n, \quad \forall K \subset \Omega.$$

$\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} u_{L_i}^n \geq 0$ et $u_K^n \geq 0$ (D'après l'hypothèse sur u^n).

Ainsi $u_K^{n+1} \geq 0$ si $1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \geq 0$. C'est-à-dire $\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \leq 1$.

Et donc $u^{n+1} \geq 0$ si $\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \leq 1 \quad \forall K \subset \Omega$. Or

$$\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \leq 1 \quad \forall K \subset \Omega \iff \Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$$

Par suite, si $\Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$ alors $u^{n+1} \geq 0$. D'où le schéma 1 vérifie un

principe du maximum discret sous la condition $\lambda = \Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$

Stabilité L^∞ du (schéma 1)

On a:

$$u_K^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}}\right) u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} u_{L_i}^n.$$

Alors $\forall K \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} |u_K^{n+1}| &= \left| \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}}\right) u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} u_{L_i}^n \right| \\ &\leq \left| \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}}\right) \right| |u_K^n| + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} |u_{L_i}^n| \\ &= \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}}\right) |u_K^n| + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} |u_{L_i}^n| \quad \text{car } \lambda \leq 1 \\ &\leq \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}}\right) \|u^n\|_\infty + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \|u^n\|_\infty \\ |u_K^{n+1}| &\leq \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

Puisque $|u_K^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty \quad \forall K \subset \Omega$, on déduit donc que $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty, \quad \forall n$. Par conséquent, le schéma 1 est L^∞ -stable sous la condition $\lambda = \Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$

5) Reprenons la question 4) sur le schéma 2 (version 2 du schéma VF4)

L'approximation VF4-version 2 pour le flux de diffusion le long de l'arête e_i entre les cellules K et L_i est :

$$F_{K,e_i}^n = -D|e_i| \frac{u_{L_i}^n - u_K^n}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}$$

En utilisant cette approximation, le schéma discret devient :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{u_{L_i}^n - u_K^n}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} |e_i| \quad (\text{schéma 2}).$$

Principe du maximum (schéma 2)

$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = u_{\max} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right) \geq 0$.

Supposons que $u^n \geq 0$. Alors $\forall K \subset \Omega, u_K^n \geq 0$.

On a :

$$u_K^{n+1} = u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{u_{L_i}^n - u_K^n}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} |e_i|, \quad \forall K \subset \Omega.$$

En regroupant les termes, nous avons :

$$u_K^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}\right) u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} u_{L_i}^n, \quad \forall K \subset \Omega.$$

$\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} u_{L_i}^n \geq 0$ et $u_K^n \geq 0$ (D'après l'hypothèse sur u^n).

Ainsi $u_K^{n+1} \geq 0$ si $1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \geq 0$. C'est-à-dire $\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \leq 1$.

Et donc $u^{n+1} \geq 0$ si $\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \leq 1 \quad \forall K \subset \Omega$. Or

$$\frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \leq 1 \quad \forall K \subset \Omega \iff \Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \leq 1$$

Par suite, si $\Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \leq 1$ alors $u^{n+1} \geq 0$. D'où le schéma 1 vérifie

un principe du maximum discret sous la condition $\beta = \Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \leq 1$

Stabilité L^∞ (schéma 2)

On a :

$$u_K^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}\right) u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} u_{L_i}^n.$$

Alors $\forall K \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} |u_K^{n+1}| &= \left| \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}\right) u_K^n + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} u_{L_i}^n \right| \\ &\leq \left| \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}\right) \right| |u_K^n| + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} |u_{L_i}^n| \\ &= \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}\right) |u_K^n| + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} |u_{L_i}^n| \quad \text{car } \beta \leq 1 \\ &\leq \left(1 - \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}}\right) \|u^n\|_\infty + \frac{\Delta t D}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \|u^n\|_\infty \\ |u_K^{n+1}| &\leq \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

Puisque $|u_K^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty \quad \forall K \subset \Omega$, on déduit donc que $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty, \quad \forall n$. Par conséquent, le schéma 1 est L^∞ -stable sous la condition $\beta = \Delta t D \max_{K \in T} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \right) \leq 1$

6) Simulations numériques sur trois différents maillages

- **Maillage grossier:**(1152 cellules, 621 noeuds)
- **Maillage fin:**(3372 cellules, 1763 noeuds)
- **Maillage très fin:**(9254 cellules, 4754 noeuds)

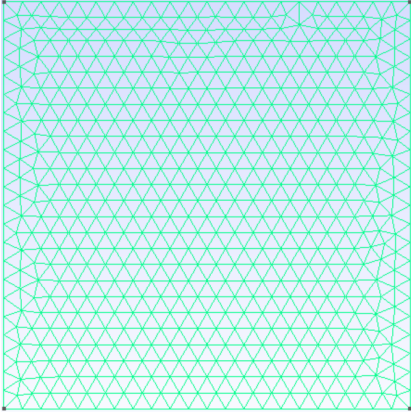


Figure 3: Grossier

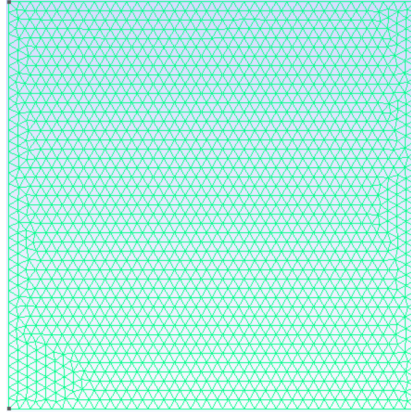


Figure 4: Fin

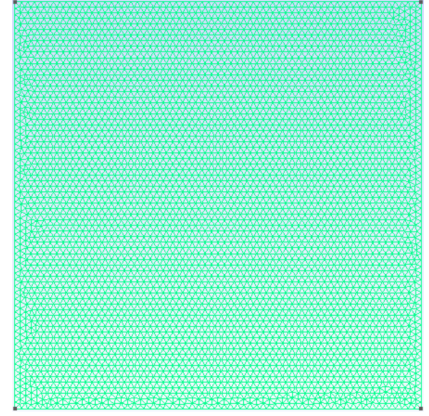


Figure 5: Très fin

Figure 6: Les maillages de la simulation

- a) Représentons les isovaleurs de la solution numérique obtenue sur chacun des trois maillages.

Schéma VF4

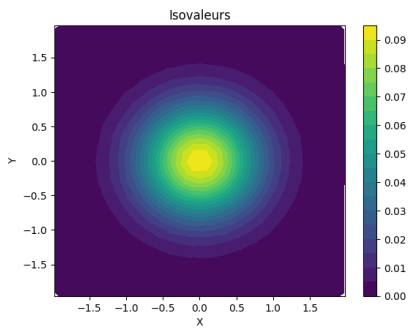


Figure 7: Grossier

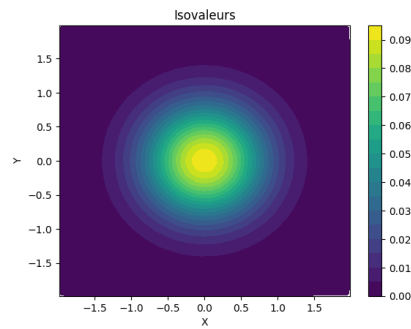


Figure 8: Fin

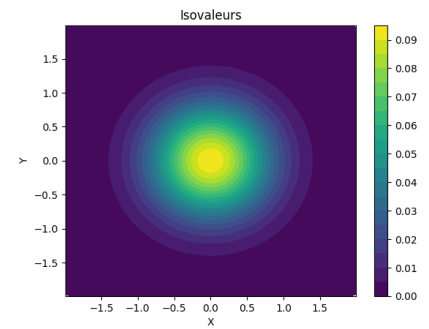


Figure 9: Très fin

Figure 10: Isovaleurs de la solution numérique sur chaque maillage

Schéma VF4-version 2

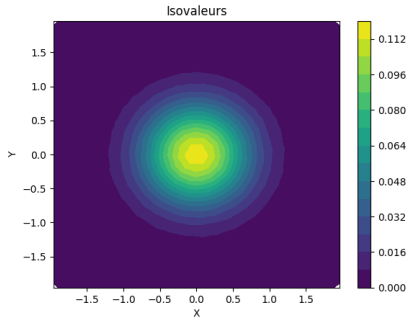


Figure 11: Grossier

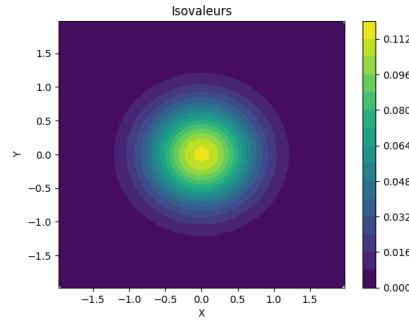


Figure 12: Fin

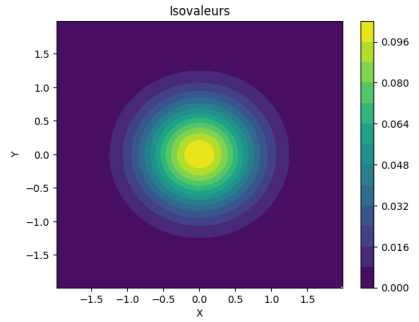


Figure 13: Très fin

Figure 14: Isovaleurs de la solution numérique sur chaque maillage

b) Evaluons les erreurs absolues en norme L_1 de la solution numérique sur les trois maillages.

```

1 #-----Fonction qui calcul l'erreur d'approximation-----#
2 def ErreurL_1(u_exact, u_numeric, mesure_cellules):
3     """
4     mesure_cellules: tableaux contenant la mesure de chaque surface
5     """
6     err = np.dot(np.abs(mesure_cellules), np.abs(u_exact-u_numeric))
7     return err
8 mesure_cellules = np.array([cells.volume[i] for i in range(nbcells)])

```

Schéma VF4

Maillages	Grossier	Fin	Très fin
Err_{L_1}	0.0007158	0.0005952	0.0002159

Table 1: Recueil des erreurs L_1 sur chaque maillage

- **Commentaire :** L'erreur d'approximation du schéma VF4 est de l'ordre de 10^{-4} et elle diminue au fur et à mesure que le maillage devient de plus en plus fin. ①

Schéma VF4-version 2

Maillages	Grossier	Fin	Très fin
Err_{L_1}	0.03181960	0.02804137	0.0124291

Table 2: Recueil des erreurs L_1 sur chaque maillage

- **Commentaire :** L'erreur d'approximation du schéma VF4_version 2 est de l'ordre de 10^{-2} et elle diminue au fur et à mesure que le maillage devient de plus en plus fin. ②

Conclusion: Le schéma VF4 performe mieux (est beaucoup plus précis) que le schéma VF4_version 2.

c) Représentons la solution exacte et les solutions numériques le long de l'axe $y = 0$ m.

```

1  ##-----Fonction qui trace la solution exate et numérique-----##
2  def plotsolutions(u_exact,u_numeric, ControlVolumes_type):
3      """
4      ControlVolumes_type: orthocentres ou barycentres
5      """
6      plt.figure()
7      plt.scatter(ControlVolumes_type[:,0], u_exact, label='u_exact')
8      plt.scatter(ControlVolumes_type[:,0], u, s=15, label = 'u_numeric')
9      plt.xlabel("x")
10     plt.ylabel("u(x,y=0)")
11     plt.grid(True)
12     plt.legend()
13     plt.title("Solution Exacte et numérique à $T = 0.15s$")

```

Schéma VF4

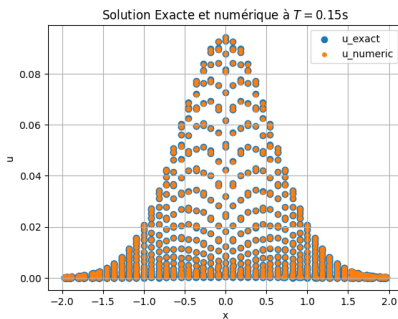


Figure 15: Grossier

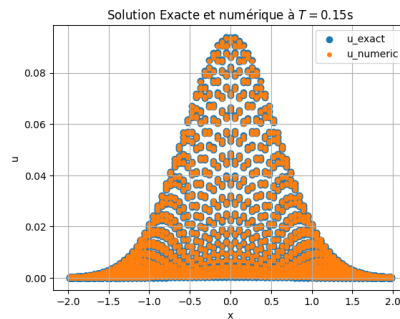


Figure 16: Fin

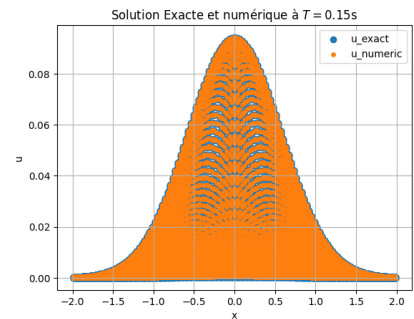


Figure 17: Très fin

Figure 18: Solutions Exacte et numérique sur les trois maillages

Schéma VF4-version 2

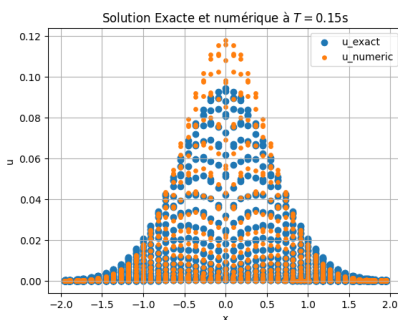


Figure 19: Grossier

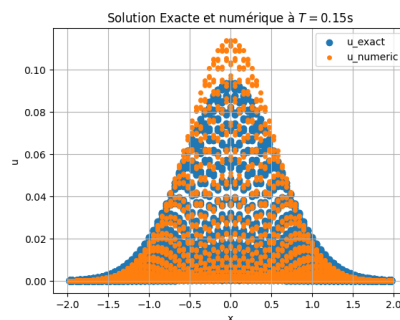


Figure 20: Fin

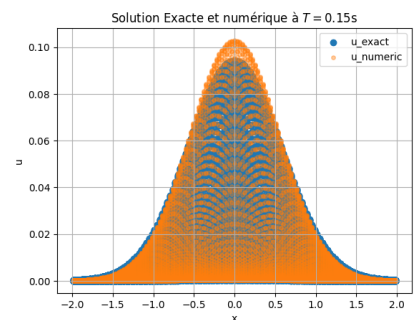


Figure 21: Très fin

Figure 22: Solutions Exacte et numérique sur les trois maillages

0.2 Test 2: Un problème d'équilibre thermique

Maillage

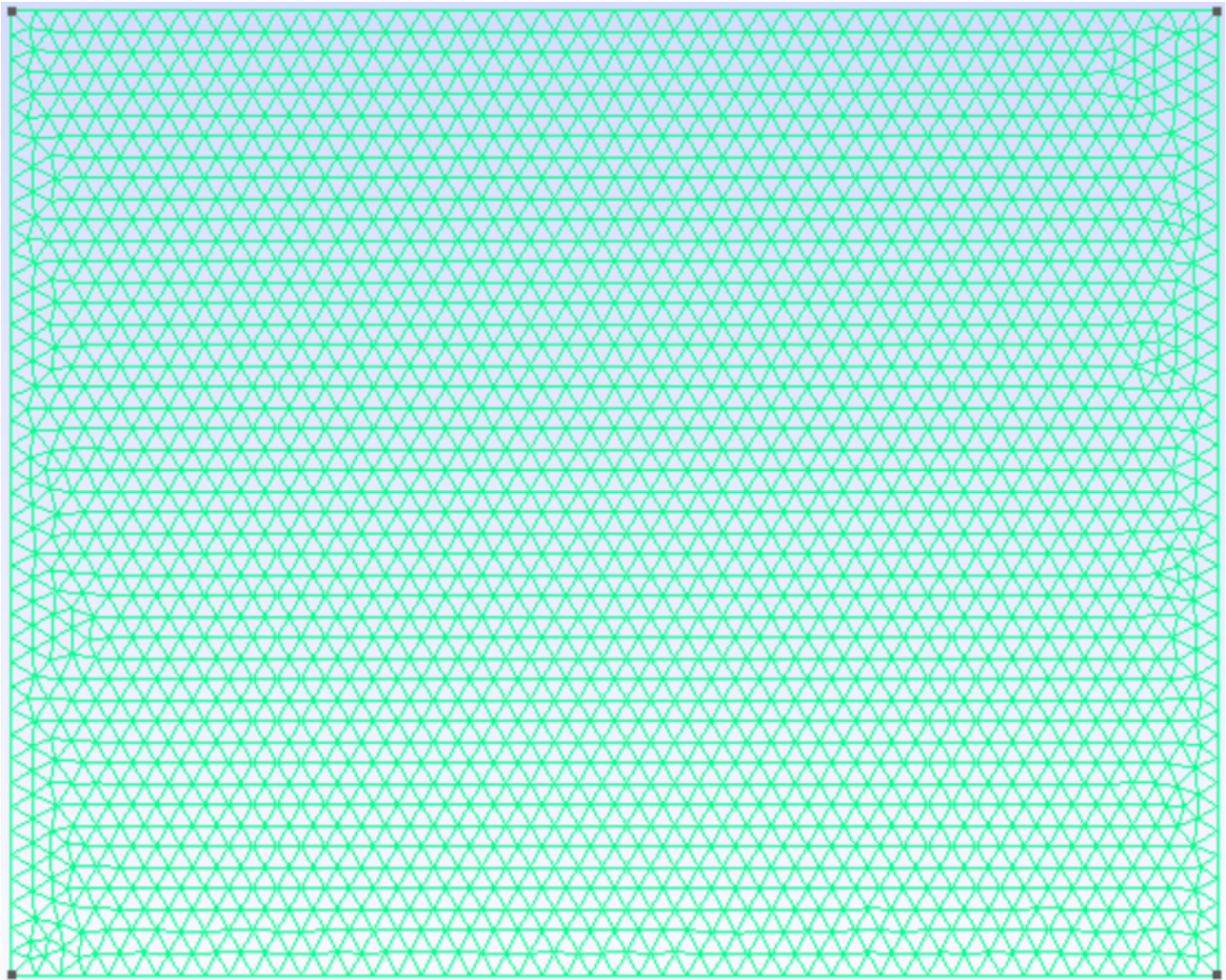


Figure 23: Maille de 4636 cellules, 2409 noeuds

Condition initiale et conditons aux limites

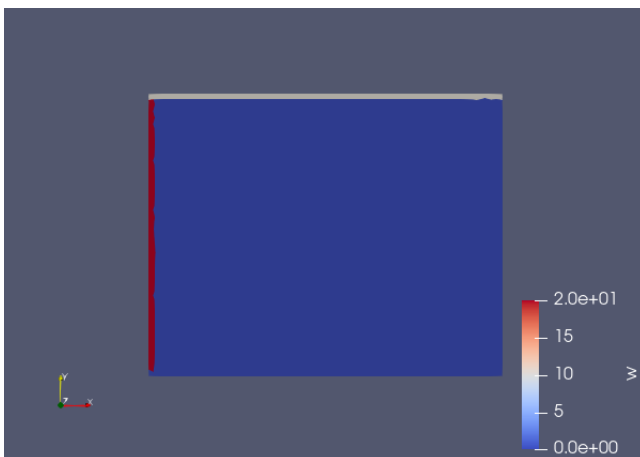


Figure 24: Affichage paraview

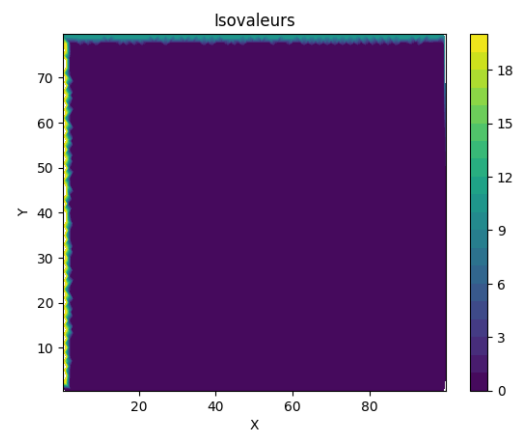


Figure 25: Isovaleurs

Figure 26: Conditions initiale et aux limites

1) Testons chacun des deux schémas, puis représenter les résultats à 4 temps physiques différents.

Schéma VF4

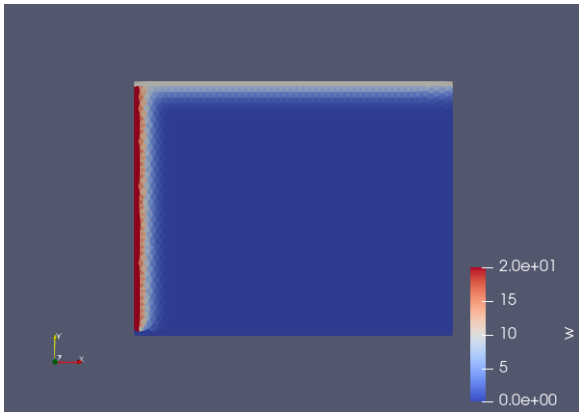


Figure 27: $t = 5.967s$

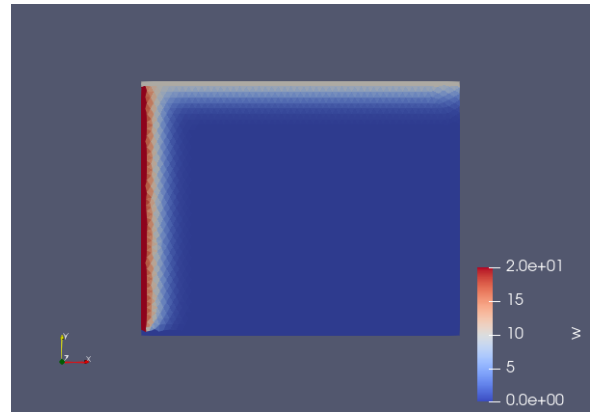


Figure 28: $t=11.934s$

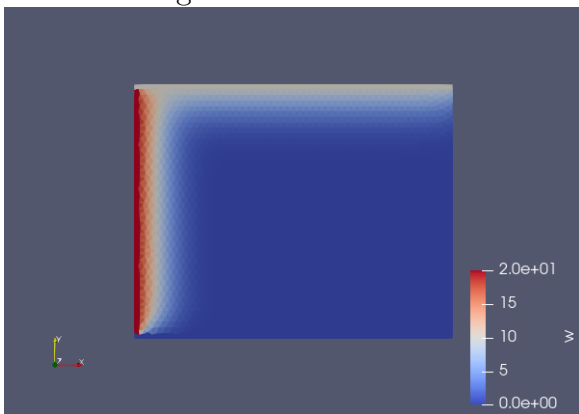


Figure 29: 35.803s

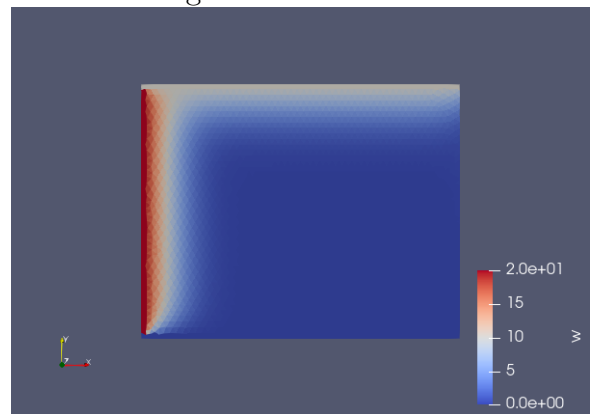


Figure 30: $t=T=50s$

Figure 31: Evolution de la diffusion à temps physiques différents

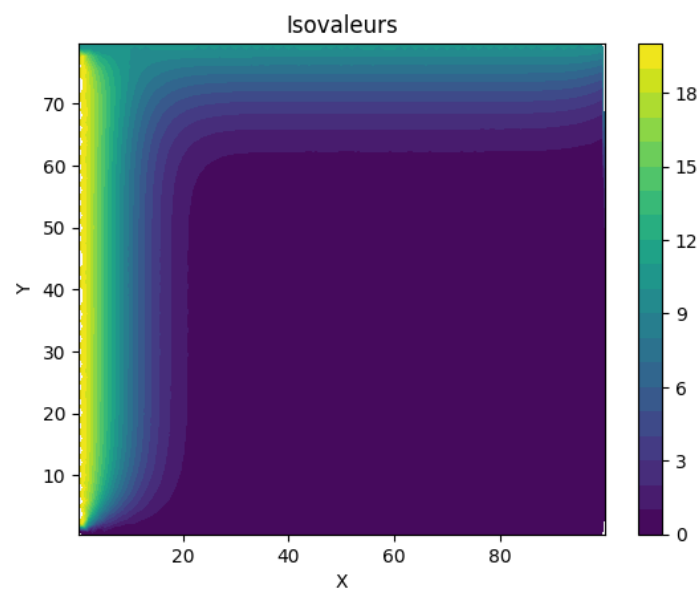


Figure 32: Isovaleurs de la solution numérique du schéma VF4

Schéma VF4-version 2

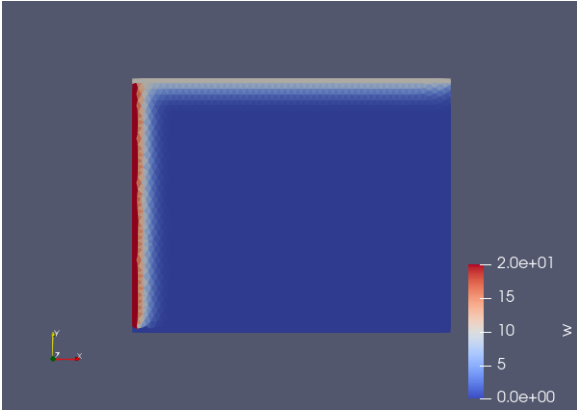
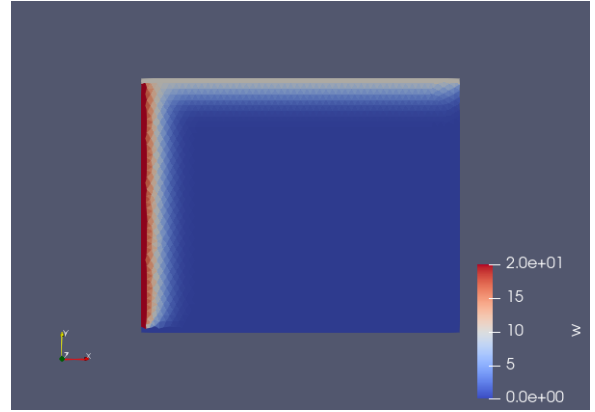
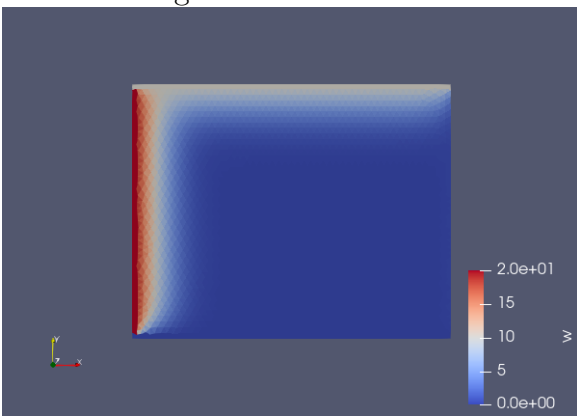
Figure 33: $t = 6.935s$ Figure 34: $t=13.562s$ 

Figure 35: 40.504s

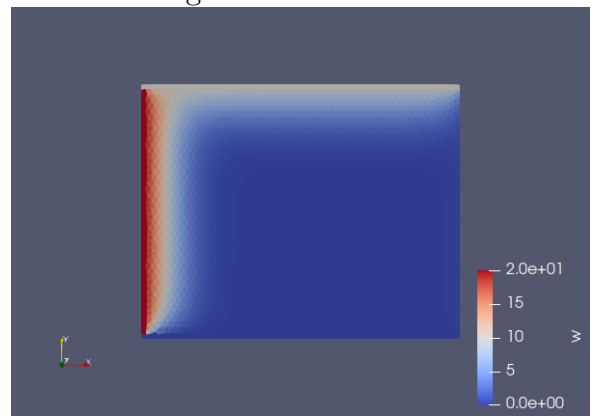
Figure 36: $t=T=50s$

Figure 37: Evolution de la diffusion à temps physiques différents

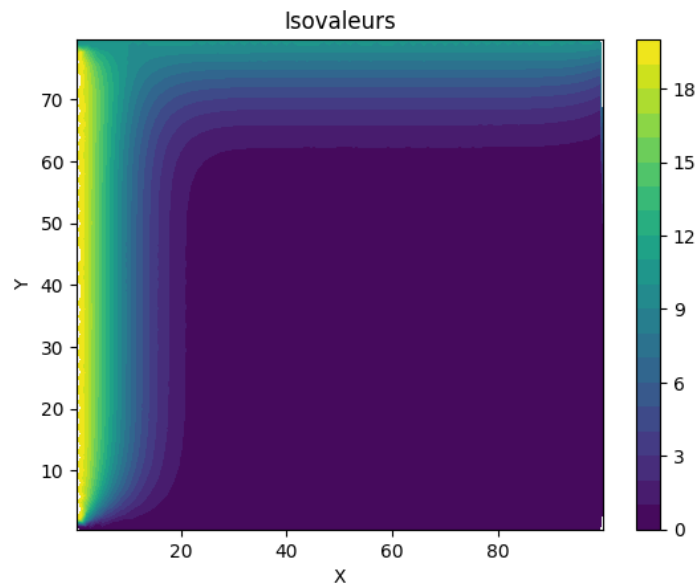


Figure 38: Isovaleurs de la solution numérique du schéma VF4-version 2

2) Constat pour un temps physique assez grand

Lorsque le temps physique est assez grand, on atteint l'équilibre thermique. Il s'agit d'une repartition uniforme de l'énergie thermique. Il n'y aura plus de transfert d'énergie thermique les bords. Et dont à partir de cet instant l'évolution de la température est indépendante du temps. Autrement dit si T_e est la température à l'instant $t_{equilibre}$, pour tout $t > t_{equilibre}$, la température à l'instant t est égale à T_e : $\frac{du}{dt} = 0$

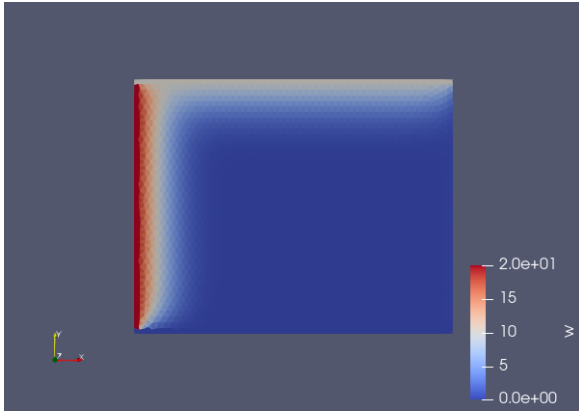


Figure 39: $t=40.504s$

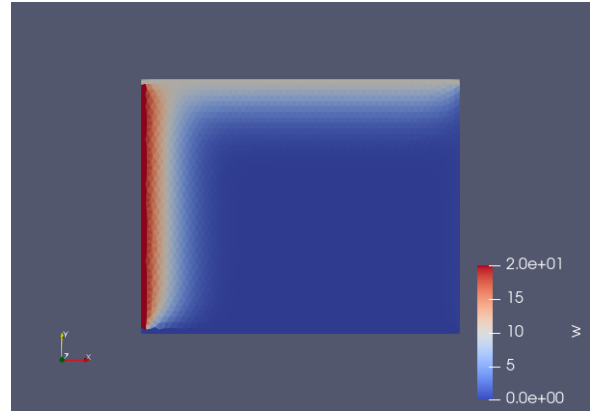


Figure 40: $t=50s$

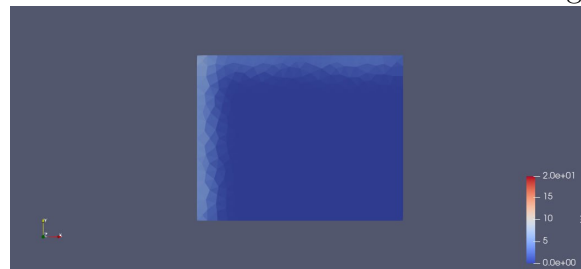


Figure 41: 900s



Figure 42: 1200s



Figure 43: 1500s



Figure 44: 1800s

Figure 45: Evolution du transfert thermique jusqu'à l'équilibre thermique