

## Mini-Projet

### Volumes Finis pour l'équation de diffusion 2D

## 1 Modèle Mathématique

On souhaite étudier et comparer deux schémas aux volumes finis pour l'approximation de la solution d'une équation modèle de diffusion 2D de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = 0 \quad (1)$$

définie sur un domaine rectangulaire  $\Omega$  et soumise à une condition initiale et des conditions aux limites.  $D$  étant le coefficient de diffusion et  $u = u(x, y, t)$  désigne la température (ou une concentration) en  $(x, y)$  au temps physique  $t$ .

## 2 Maillage de $\Omega$

On considère un maillage  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$  admissible au sens volumes finis (angles des triangles compris entre 0 et  $\pi/2$ ). On utilise la formulation volumes finis "cell-centered" : les volumes de contrôles sont choisis comme étant les triangles  $K$  de Delaunay du domaine  $\Omega$  et la solution est évaluée sur chacun de ces volumes de contrôles.

On note par :

- $\mathbf{x}_K$  : l'orthocentre du triangle  $K$ .
- $|K|$  : l'aire du triangle  $K$ .
- $|e|$  : la longueur de l'arête  $e$  de  $K$ .
- $\epsilon_K$  : l'ensemble des arêtes  $e$  de  $K$ .

Le temps est aussi discrétisé en des pas  $\Delta t$ , et on note par  $u_K^n$  la valeur approchée de  $u$  sur le volume de contrôle  $K$  au temps  $t^n = n\Delta t$ .

## 3 Schéma Volumes Finis

La formulation volumes finis pour (1) s'obtient en intégrant l'EDP sur chaque volume de contrôle  $K$ . L'utilisation de la formule de la divergence donne :

$$|K| \frac{\partial u_K}{\partial t} + \sum_{e_i \in \epsilon_K} \bar{F}_{K,e_i} = 0 \quad (2)$$

où  $\bar{F}_{K,e} = -D \int_e \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,e} d\sigma$  désigne le flux exacte de diffusion sur l'arête  $e$  de  $K$  et  $\mathbf{n}_{K,e}$  est la normale à l'arête  $e$  unitaire et sortante du triangle  $K$ .

Notons par  $F_{K,e}$  le flux numérique sur l'arête  $e$ . Un schéma d'Euler explicite permet d'écrire la forme itérative du schéma aux volumes finis :

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} F_{K,e_i}^n \quad (3)$$

## 4 Approximation des flux de diffusion sur les arêtes

### 4.1 Schéma 1 : (VF4)

Le gradient dans la direction normale à l'arête  $e_i$  est approximé par :

$$\int_{e_i} \nabla u \cdot n_{K,e_i} d\sigma \simeq |e_i| \frac{u_{L_i} - u_K}{d_{K,L_i}} \quad (4)$$

$K$  et  $L_i$  étant les deux triangles séparés par l'arête  $e_i$  et  $d_{K,L_i} = \text{dist}(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_{L_i})$ .

### 4.2 Schéma 2 : (VF4 - version 2)

Le gradient dans la direction normale à l'arête  $e_i$  est approximé par :

$$\int_{e_i} \nabla u \cdot n_{K,e_i} d\sigma \simeq |e_i| \frac{u_{L_i} - u_K}{d_{K,e_i} + d_{L_i,e_i}} \quad (5)$$

$K$  et  $L_i$  étant les deux triangles séparés par l'arête  $e_i$ ,  $d_{K,e_i} = \text{dist}(\mathbf{x}'_K, e_i)$  et  $d_{L_i,e_i} = \text{dist}(\mathbf{x}'_{L_i}, e_i)$ .  $\mathbf{x}'_K$  et  $\mathbf{x}'_{L_i}$  sont les barycentres des triangles  $K$  et  $L_i$ .

## 5 Test 1 : Diffusion d'une gaussienne dans un carré

**Domaine de calcul :**

$$\Omega = [-2; 2] \times [-2; 2].$$

**Condition initiale :**

On choisit une condition initiale de forme Gaussienne :

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = u_{max} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma^2}\right) \quad (6)$$

où l'amplitude maximale est  $u_{max} = 1$  et la constante  $\sigma = 0.25$ .

**Conditions aux bords :**

On utilise ici la notion de cellules fictives. Ces cellules sont symétriques aux volumes de contrôles adjacents ayant une ou deux arêtes sur le bord. Pour les conditions aux limites de Dirichlet, il suffit d'affecter la valeur sur la cellule fictive. Ces cellules fictives sont utilisées pour pouvoir calculer le flux numérique sur les arêtes du bord de la même façon que sur les arêtes internes.

1) En considérant que le domaine du calcul  $\Omega$  est non borné (pas d'influence des bords sur la solution), la solution analytique du problème (1) avec la condition initiale choisie (6), s'écrit :

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi D t} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4Dt}\right) u_0(x', y') dx' dy'$$

Montrer que :

$$u(x, y, t) = \frac{u_{max}}{1 + \frac{4Dt}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2 + 4Dt}\right)$$

2) Générer un maillage de  $\Omega$ .

3) Implémenter la condition initiale  $u_0(x, y)$ , puis représenter ses isovaleurs.

4) Montrer que le schéma VF explicite (3), utilisant l'approximation VF4 (4) pour les flux de diffusion, vérifie un principe du maximum discret et qu'il est  $L^\infty$ -stable sous la condition :

$$\lambda = \Delta t D \max_{K \in \mathcal{T}} \left( \frac{1}{|K|} \sum_{e_i \in \epsilon_K} \frac{|e_i|}{d_{K,L_i}} \right) \leq 1$$

5) Refaire la même analyse du schéma (3), utilisant cette fois-ci la version 2 du schéma VF4 (5).

Pour les simulations, choisir par la suite  $\lambda = 0.8$ , puis calculer  $\Delta t$  pour le maillage généré. Le coefficient de diffusion est  $D = 1$ .

6) Tester chacun des trois schémas sur trois maillages différents : grossier, fin et très fin. Effectuer les simulations jusqu'au temps physique  $t = 0.15$  s.

a) Représenter les isovaleurs de la solution numérique obtenue sur chacun des trois maillages.

b) Evaluer les erreurs absolues en norme  $L^1$  de la solution numérique sur les trois maillages.

On rappelle que :

$$\begin{aligned} Err_{L_1} &= \iint_{\Omega} |u(x, y, t) - u_{num}(x, y, t)| dx dy \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| |u(K) - u_{num}(K)| \end{aligned} \quad (7)$$

c) Représenter la solution exacte et les solutions numériques le long de l'axe  $y = 0$  m.

## 6 Test 2 : Un problème d'équilibre thermique

On considère un domaine rectangulaire  $\Omega = [0; 100] \times [0; 80]$ . avec des conditions initiales et aux limites schématisées sur la figure suivante :

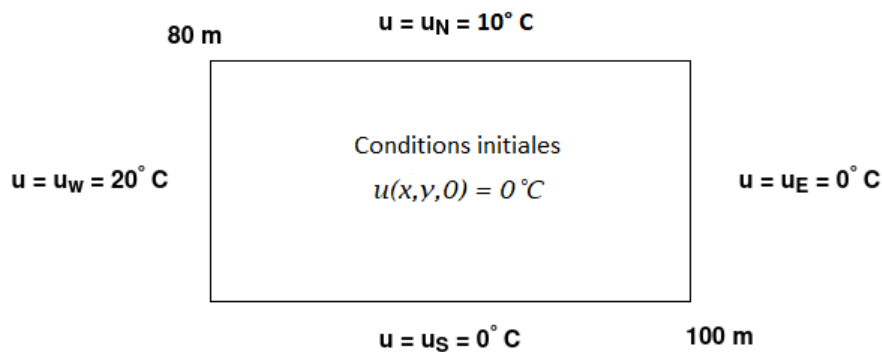


Figure 1: Domaine  $\Omega$  et conditions initiales et aux limites.

1) Tester chacun des trois schémas, puis représenter les résultats à 4 temps physiques différents.

2) Que se passe-t-il pour un temps physique assez grand ?