Pontificia Universidad Javeriana

Análisis numérico

Taller 1

Autor:
John Stiven, Jimmy Alejandro, Pablo Veintemilla, Camilo Maldonado

1 de Octubre

TALLER 1

EDDY HERRERA

Resumen. En este documento se presenta el desarrollo del taller 1. Se compone de 4 puntos, Numero de Operaciones, Raíces de una Ecuación, Convergencia de Metodos Iterativos y Convergencia Acelerada.

Parte 1. Numero de Operaciones

1. Utilice el metodo de Horner para evaluar de manera óptima las derivadas de un polinomio en un valor x0 e implemente en R o Python

   implementación en Python

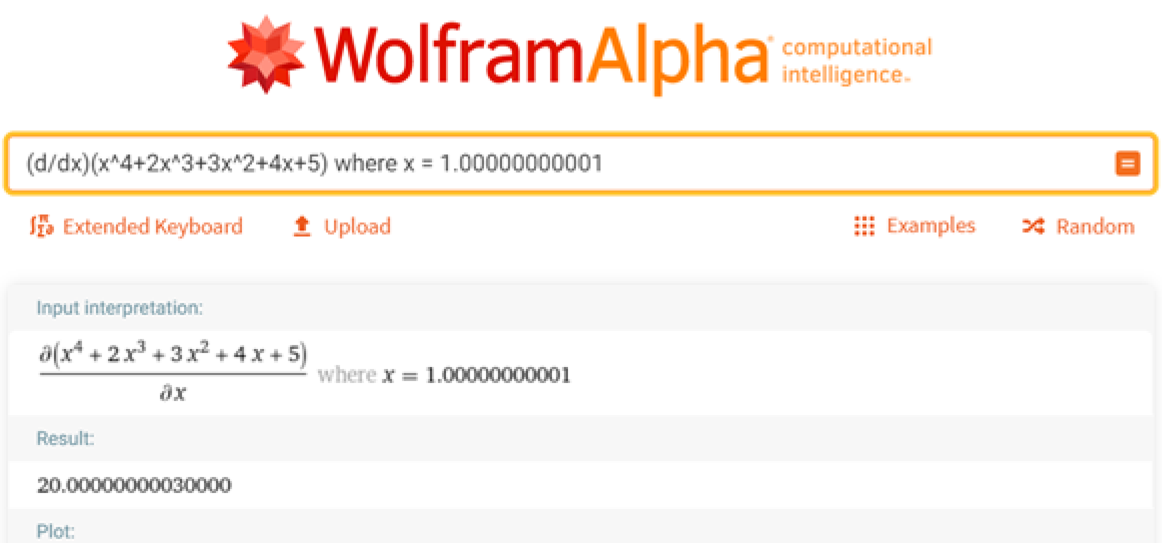
   Se implemento una sucesión de todas las derivadas del polinomio ‘p’ hasta que llegue al cero que significa la derivada de una función constante o en otras palabras ‘un polinomio de grado 0’.Esta implementación se puede realizar para un polinomio cualquiera representado por la lista ‘p’ y se evalúa dado el valor x0 de la función main() utilizando el metodode horner definido en la función Pol(), el tamaño menos uno de la lista determina el grado del polinomio.

```
        # Evaluar un polinomio por el metodo de Horner
def Pol(p,x):
    r = 0
    for v in p:
        r = r*x + v
    return r
# Derivada de un polinomio
def dP(p):
    d = []
    n = len(p) - 1
    for i in range(len(p) - 1):
        d.append((n-i)*p[i])
    return d
# Funcion Main
def main():
    x0 = 1
    # p = x^4+2x^3+3x^2+4x+5
    p = [1,2,3,4,5]
    #######################
```

Date: septiembre 26 de 2020.

```
    print("Derivadas de P(x0) evaluadas en x0 = ",x0)
    #######################
    q = p
    while len(q) > 0:
        q = dP(q)
        print(len(p) - len(q)," P(x0) = {:.32f}".format(Pol(q,x0)))
main()
```

Resultados: Se evalua el polinomio $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ en el valor x0 = 1.00000000001 y los resultados obtenidos fueron:
Primera derivada:
En código: $P(x0) = 20.00000000029999824846527189947665$ Usando la herramienta Wolfram Alpha:



Segunda Derivada:
En código: $P(x0) = 30.00000000036000002978653355967253$ Usando la herramienta Wolfram Alpha:

Tercera derivada:
En código: $P(x0) = 36.00000000024000019857689039781169$ Usando la herramienta Wolfram Alpha:

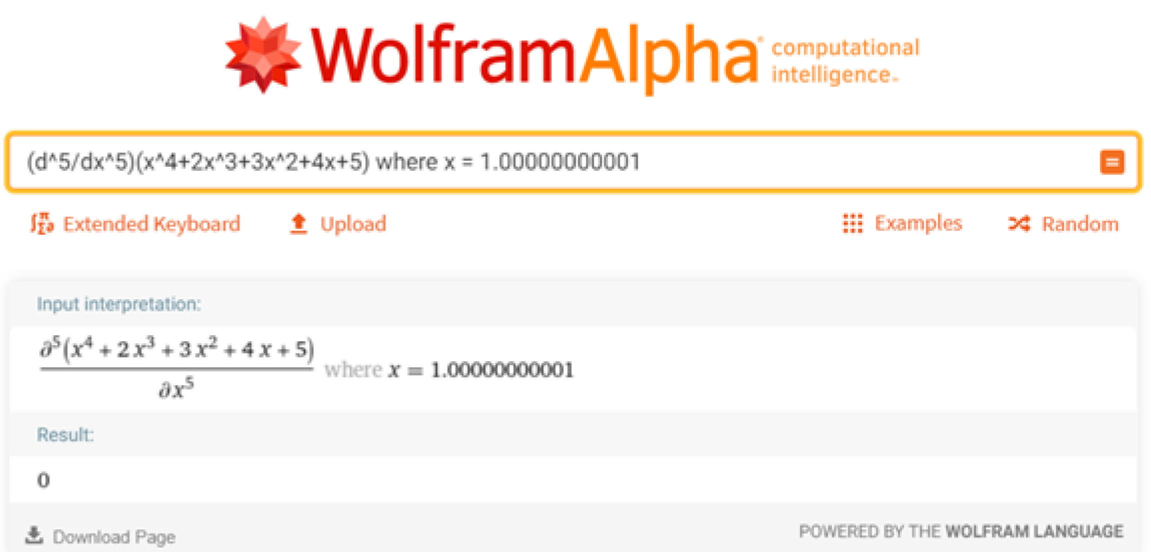
Cuarta derivada:
Nota: Se sabe que la derivada de x^n es $nx^{(n-1)}$, si derivamos esto de nuevo se obtiene $n(n-1)x^{(n-2)}$, al realizar la derivada 'n' veces sobre el polinomio entonces se tiene el valor n(n-1)(n-2)...2 entonces se puede concluir que la derivada n-esima de un polinomio de grado n es n!.

Aplicado a este caso particular ya que el polinomio es de grado 4 al realizar la cuarta derivada se debería obtener $4! = 4*3*2 = 24$

En código: $P(x0) = 24.0000000000000000000000000000000$ Usando la herramienta Wolfram Alpha:

Quinta derivada: Ya que al derivar n veces el polinomio de grado n se obtiene n! y este valor es un numero natural, al intentar derivar este valor aplica que la derivada de una constante es igual a cero.

En código: $P(x0) = 0.0000000000000000000000000000000$ Usando la herramienta Wolfram Alpha:



2. Evaluar en x = 1.00000000001 con $P(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^50$ la primera y la tercera derivada y encuentre el error de cálculo al compáralo con las derivadas de la expresión equivalente $Q(x) = \frac{(x^{51}-1)}{(x-1)}$ **Implementación en Python:** Usando el método Pol() para evaluar polinomios y d P() para hallar la derivada de un polinomio se construyó la solución a este punto

```
import sympy as sp
# Evaluar un polinomio por el metodo de Horner
def Pol(p, x):
    r = 0
    for v in p:
        r = r*x + v
    return r
# Derivada de un polinomio
def dP(p):
    d = []
    n = len(p) - 1
    for i in range(len(p) - 1):
        d.append((n-i)*p[i])
    return d
# Funcion Main

def main():
    x0 = 1 + 1e-11
    p = [1] * 51
    # Segunda Funcion #####
    x = (sp.var('x'))
    Q = ((x**51 - 1)/(x - 1))
    ########################
    print("\nValor de P(x0) con el metodo de Horner = {:.32f} ".format(Pol(p, x0)))
    print("Valor por funcion equivalente:           {:.32f}".format(Q.evalf(subs={x: x0
    error = abs(Pol(p,x0) - Q.evalf(subs={x: x0}))
    print("Error: {:.32f}".format(error))
    ########################
    d = dP(p)
    dQ = sp.diff(Q)
    print("\nValor de P'(x) con el metodo de Horner = {:.32f}".format(Pol(d, x0)))
    print("Valor por funcion quivalente:            {:.32f}".format(dQ.evalf(subs={x: x
    error = abs(Pol(d,x0) - dQ.evalf(subs={x: x0}))
    print("Error: {:.32f}".format(error))
    ########################
    d = dP(dP(d))
    d3Q = sp.diff(sp.diff(dQ))
    print("\nValor de P'''(x) con el metodo de Horner = {:.32f}".format(Pol(d, x0)))
    print("Valor por funcion equivalente:             {:.32f}".format(d3Q.evalf(subs={x
    error = abs(Pol(d,x0) - d3Q.evalf(subs={x: x0}))
    print("Error: {:.32f}".format(error))
main()
```

y se obtuvieron los siguientes resultados:

```
Valor de P(x0) con el metodo de Horner = 51.00000001275002148304338334128261
Valor por funcion equivalente:           51.00000001275000000000000000000000
Error:  2.13162820728030e-14

Valor de P'(x) con el metodo de Horner = 1275.00000041649991544545628130435944
Valor por funcion quivalente:            1275.00000041650000000000000000000000
Error:  0

Valor de P'''(x) con el metodo de Horner = 1499400.00056377425789833068847656250000
Valor por funcion equivalente:             1499400.00056377000000000000000000000000
Error:  2.32830643653870e-10
```

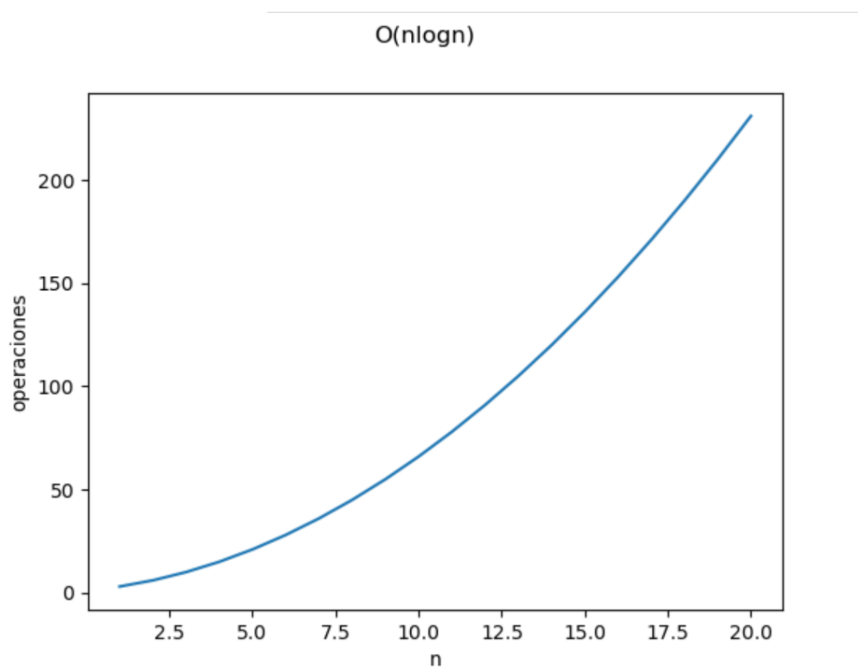
Parte 2. Raíces de una Ecuación

Ejercicios

1. Implemente en R o Python un algoritmo que le permita sumar unicamente los elementos de la sub matriz triangular superior o triangular inferior, dada la matriz cuadrada An. Imprima varias pruebas, para diferentes valores de n y exprese $f(n)$ en notacion $O()$ con una gráfica que muestre su orden de convergencia.
   Solución:
   Se ha realizado el ejercicio con 20 matrices generadas automaticamente por la herramienta random.randn() que ofrece python en la libreria numpy.
   El codigo es el siguiente:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
count = 0
bs = 0
bi = []
bc = 0
bci = []
print("para inferior presione i, para superor s")
option = input()
if(option == 's'):
    for n in range (2, 22):
        A = np.random.randn(n,n)
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                if(j>=i):
                    count = count + A[i][j]
                    bs += 1
        print(bs, n)
        print('Suma de matriz ', count)
```

```
        bi.append(bs)
        bs = 0
        print()
else:
    for n in range (2, 22):
        A = np.random.randn(n,n)
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                if(j<=i):
                    count = count + A[i][j]
                    bs += 1
        print(bs, n)
        print('Suma de matriz ', count)
        bi.append(bs)
        bs = 0
        print()
x = np.linspace(1, 20, num=20)
y = bi
plt.suptitle('O(2**n)')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('operaciones')
plt.plot(x,y)
plt.show()
```



Se recorre la matriz y se identifican los elementos que deben ser incluidos en la solución. Para el caso de la matriz superior, se seleccionan los elementos cuando j>=i y al contrario para la inferior.

Se toman los datos de la cantidad de operaciones realizadas para cada matriz y se le grafica para cada caso desde n = 2 hasta n = 22, esto para tener suficientes medidas para la grafica de convergencia.

Pruebas:

```
36 operaciones para n = 8
Suma de matriz  -10.600404763171964

45 operaciones para n = 9
Suma de matriz  -7.182761687198888

55 operaciones para n = 10
Suma de matriz  -12.37329318128559

66 operaciones para n = 11
Suma de matriz  -6.187559824121052

78 operaciones para n = 12
Suma de matriz  -24.17605108745268

91 operaciones para n = 13
Suma de matriz  -25.365646457860173

105 operaciones para n = 14
Suma de matriz  -37.40538230180919

120 operaciones para n = 15
Suma de matriz  -34.04557017933367

136 operaciones para n = 16
Suma de matriz  -36.48337623868603

153 operaciones para n = 17
Suma de matriz  -26.498094974929913

171 operaciones para n = 18
Suma de matriz  3.6096493065642195

190 operaciones para n = 19
Suma de matriz  12.84193227760997

210 operaciones para n = 20
Suma de matriz  17.487374857264047

231 operaciones para n = 21
Suma de matriz  -5.401733505327044
```

2. Implemente en R o Python un algoritmo que le permita sumar los n^2 primeros números naturales al cuadrado. Imprima varias pruebas, para diferentes valores de n y exprese $f(n)$ en notación $O()$ con una gráfica que muestre su orden de convergencia.

   Solución:

   Se ha realizado el ejercicio con 20 valores de n

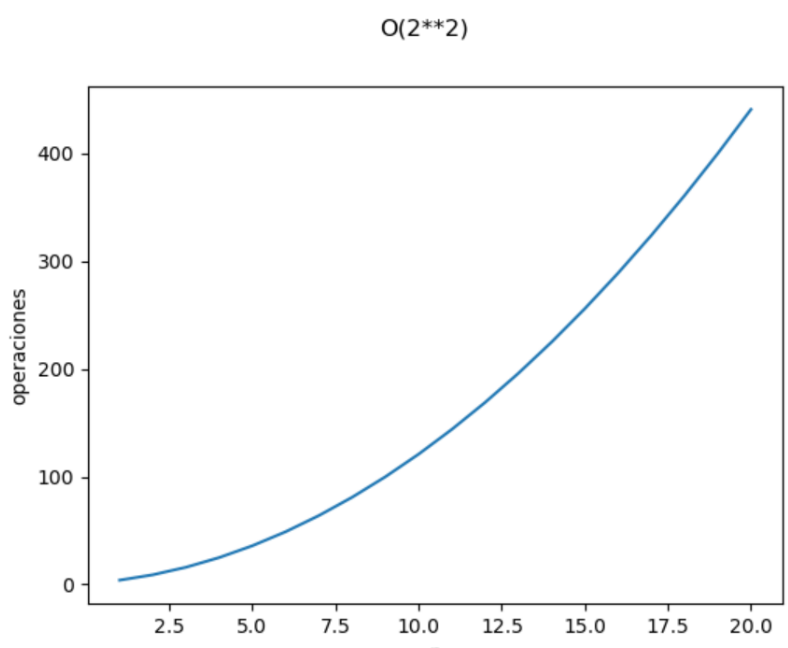
El codigo es el siguiente:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

acum = 0
cont = 0
conti = []
for n in range(2, 22):
    for i in range(n**2):
        acum += i**2
        cont += 1
    print(acum)
    conti.append(cont)
    cont = 0

x = np.linspace(1, 20, num=20)
y = conti
plt.suptitle('O(2**2)')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('operaciones')
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Convergencia:



Se recorren los primeros n numeros

Pruebas:

```
2  =>  4
14
3  =>  9
218
4  =>  16
1458
5  =>  25
6358
6  =>  36
21268
7  =>  49
59292
8  =>  64
144636
9  =>  81
318516
10  =>  100
646866
11  =>  121
1230086
12  =>  144
2215070
13  =>  169
3809754
14  =>  196
6300424
15  =>  225
10072024
16  =>  256
15631704
17  =>  289
23635848
18  =>  324
34920822
19  =>  361
50537682
20  =>  400
71791082
21  =>  441
100282622
```

3. Para describir la trayectoria de un cohete se tiene el modelo:

$$y(t) = 6 + 2{,}13t^2 - 0{,}0013t^4$$

Donde, y es la altura en $[m]$ y t tiempo en $[s]$. El cohete esta colocado verticalmente sobre la tierra. Utilizando dos metodos de solución de ecuación no lineal, encuentre la altura máxima que alcanza el cohete.

Solución:

Para la solucion de este ejercicio se tomó la derivada de la función de trayectoria y se aplciaron los metodos de brent y de bisección para encontrar el punto de corte (los ceros) que es, en la derivada la que nos da el t que da la funcion de trayectoria el valor máximo.

```
El cohete volará a 878.4807692307693 m con brent
El cohete volará a 878.4807692307692 m con biseccion
```

Parte 3. Convergencia de Métodos Iterativos

Ejercicios:

Para cada uno de los siguientes ejercicios implemente en R o Python, debe determinar el número de iteraciones realizadas,una grafica que evidencie el tipo de convergencia del método y debe expresarla en notación $O()$

1. . Sean $f(x) = ln(x+2)$ y $g(x) = sin(x)$ dos funciones de valor real.

   a) Utilice la siguiente formula recursiva con $E = 10^{16}$ para determinar aproximadamente el punto de intersección.:

   $$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})}{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}$$

   Solución:

   Utilizando el método correspondiente y ejecutándolo en R, tenemos lo siguiente:

   ```
   Iteracion # 0 valor: 1.485705674304172330124629297642968595028
   Iteracion # 1 valor: 2.281868404290545629130799121427005605382
   Iteracion # 2 valor: 1.033758274851175602209842275494552818148
   Iteracion # 3 valor: 0.3327769268984742979384193665225429878688
   Iteracion # 4 valor: 1.684749959000812606313610333626902838466
   Iteracion # 5 valor: 3.687792362259584491398747186797415337726
   Iteracion # 6 valor: 1.365131463956961741719848710580549840702
   Iteracion # 7 valor: 1.095877755964146240956266162463137950286
   Iteracion # 8 valor: 11.55096516927093568869389841568875512550
   Iteracion # 9 valor: 0.3130932835731341115228417454634889579091
   Iteracion # 10 valor: -1.725012625558363384871162585962861512630
   Iteracion # 11 valor: -0.9843379538088663007746426436591351563101
   Iteracion # 12 valor: -1.530154526419864517987118420119841454178
   Iteracion # 13 valor: -1.750262550337807081570965987356829560289
   Iteracion # 14 valor: -1.613073205464596593422828607317497638237
   Iteracion # 15 valor: -1.628090593080915489921339576697779076026
   Iteracion # 16 valor: -1.631536274652495796394430529705014342546
   Iteracion # 17 valor: -1.63144312881889401786611881590900747467
   Iteracion # 18 valor: -1.631443596903503413699695895188591899361
   Iteracion # 19 valor: -1.631443596968884869020385776816715516096
   Iteracion # 20 valor: -1.631443596968884822896061383153441574973
   ```

   Después de 20 iteraciones, el valor de la intersección es de
   $x = -1{,}631443596968884822896061383153441574973$
   con un error de: $-7{,}680^{-17}$.

   b) Aplicar el metodo iterativo siguiente con E = 108 para encontrar el punto de intersección:

   $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

   Solución:

   En este punto, la ecuación utilizada en punto 1a, fue modificada para que el método en R del punto anterior también sirviera para el punto 1b. Para esto, la ecuación no empieza desde n-2 sino en n-1, es por esto que xn se transforma en xn+1 y a todas las enes de la ecuación se le suma 1 para poder obtener una equivalencia entre la ecuación del punto 1a con la ecuación del punto 1b. Ya teniendo esto en claro se procedió a ejecutar el código en R y obtener el valor aproximado de la intersección el cual es de:

$x = -1{,}63144359696888486902038576712331979836 2$
con un error de: $-1{,}229e^{-16}$

c) **Newton:** Determine el valor de los coeficientes a y b tal que $f(1) = 3yf(2) = 4conf(x) = a + (ax + b)eax + b$. Obtenga la respuesta con $E = 10^{-8}$

Solución:
Para este ejercicio se identificó que se tiene un sistema de ecuaciones no lineales con dos variables y dos ecuaciones el cual puede ser solucionado simplemente con reemplazar x y para despejar el sistema.
La solución del sistema de ecuaciones se realizó de la siguiente forma:

$$3 = a + (a + b) * e^{a+b}$$

$$4 = a + (2a + b) * e^{2a+b}$$

Despejando para a:

$$c = a + b$$

$$a = c - b$$

$$3 = (c - b) + c * e^{c}$$

$$b = c + c * e^{c} - 3$$

$$4 = (c - b) + (2(c - b) + b) * e^{2(c-b)+b}$$

$$4 = (c - b) + (2c - b) * e^{2c-b}$$

$$4 = (c - (c + c * e^{c} - 3)) + (2c - (c + c * e^{c} - 3)) * e^{2c-(c+c*e^{c}-3)}$$

Al despejar la anterior ecuación, se obtiene una ecuación con solo la

$$4 = -c * e^{c} + 3 + (c - c * e^{c} + 3) * e^{c-c*e^{c}+3}$$

$$0 = -c * e^{c} + (c - c * e^{c} + 3) * e^{c-c*e^{c}+3} - 1$$

variable c

Al comprobar que la derivada con respecto a c es diferente que 0, ya podemos utilizar la ecuación resultante se puede utilizar con Newton para hallar el valor de c, el valor es el siguiente:

$c = 1{,}0223992115294836254508051188481624501 14$

Es posible reemplazar este valor en la siguiente ecuación para obtener a y b:

$$3 = (c - b) + c * e^{c}$$

Reemplazando,obtenemos:
a=0.15787717946446916245518647151467095602 45
b=0.86452203206501446299561864733349149408 94

Ahora, reemplazando en f(x) original, obtenemos:
f(1) = 3,00000000000000000000000000000000000000
f(2) = 4,00000000000000000002765162956017394437

Con los resultados obtenidos, obtenemos un error de 0 para $f(1)$ y un error de e
2.7651629560173944366529350716183371504869e21 para $f(2)$.

Ejercicio: Sea $f(x) = e^x x1$

a) Demuestre que Tiene un cero de multiplicidad 2 en x = 0

$$f(x) = (x-0)^2 * q(x)$$

$$e^x - x - 1 = x^2 * q(x)$$

$$\frac{e^x - x - 1}{x^2} = q(x)$$

Reemplazando q(x) en la ecuación obtenemos:

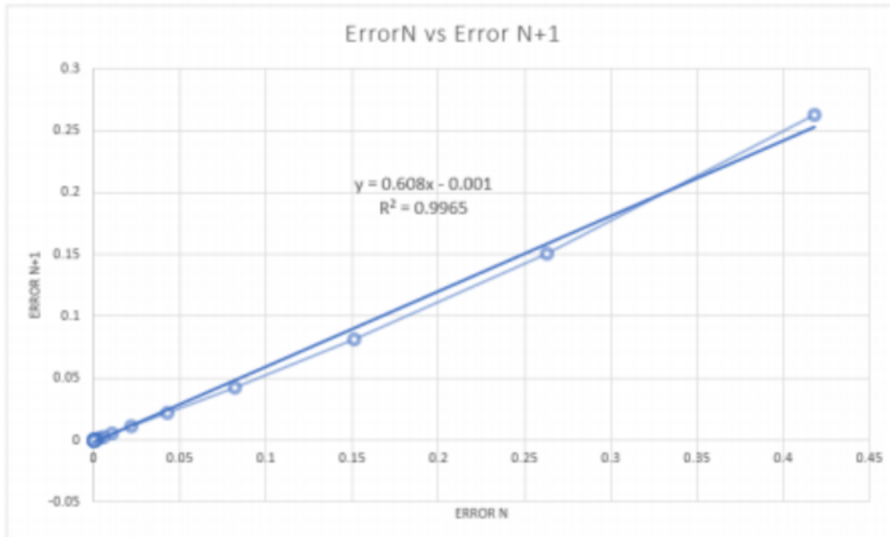
$$f(x) = x^2 * \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

Con esta ecuación se puede afirmar que x=0 satisface la raíz de multiplicidad 2.

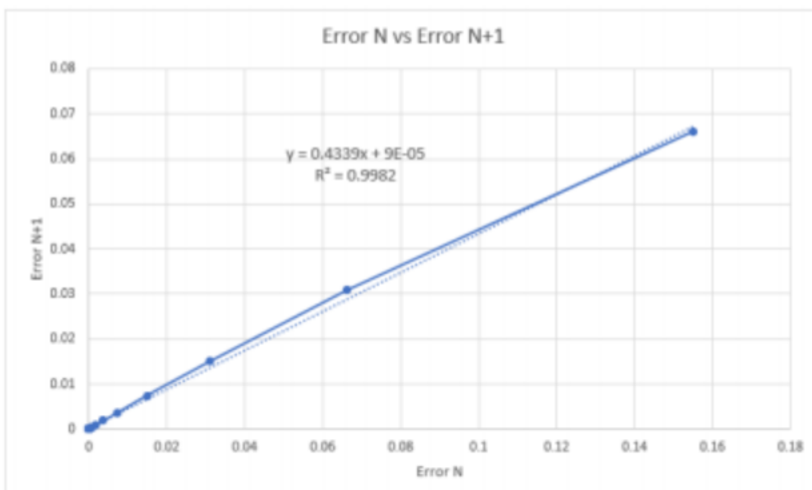
b) Utilizando el metodo de Newton con p0 = 1 verifique que converge a cero pero no de forma cuadratica Con los resultados obtenidos en R se realizó la gráfica de la comparación de los errores:

1	0.41802329313067355
2	0.26292166595850802
3	0.15105886802504795
4	0.081647299137989113
5	0.042553170074067288
6	0.021738018307945847
7	0.010988297888028936
8	0.0055244828148080707
9	0.0027698901687939711
10	0.0013868655217479909
11	0.00069391390640960514
12	0.00034707736931453078
13	0.00017356880506783995
14	8.6791935023070596e-05
15	4.3397849540299617e-05
16	2.1699397179760574e-05
17	1.0849822556837258e-05
18	5.4249347556939693e-06
19	2.7124805213663479e-06
20	1.3561828300359917e-06
21	6.7810621549089107e-07
22	3.3919774053129604e-07
23	1.6965205894818476e-07
24	8.5233729703832846e-08
25	4.224419676155565e-08
26	2.1220239416608511e-08
27	0

c) Utilizando el metodo de Newton generalizado, mejora la tasa de rendimiento? explique su respuesta



Método de Newton: Error n vs Error n+1



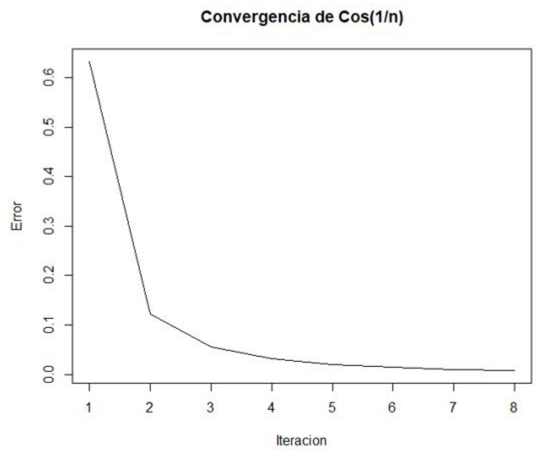
Método Newton generalizado: Error n vs Error n+1

En el método de Newton se obtuvieron 52 iteraciones y el resultado fue de 6.3154925280443565307911717 6862e16. Por otro lado, el método de Newton generalizado arrojó 50 iteraciones y un resultado de 8.2647083418937860969621264 8726e16. En las gráficas se puede observar que ambas tienen una línea de tendencia lineal y aunque el resultado obtenido sea parecido, se puede decir que el método de Newton tiene mejor rendimiento ya que realiza más iteraciones y el resultado posee un error mayor al error del valor teórico.

Parte 4. Convergencia Acelerada

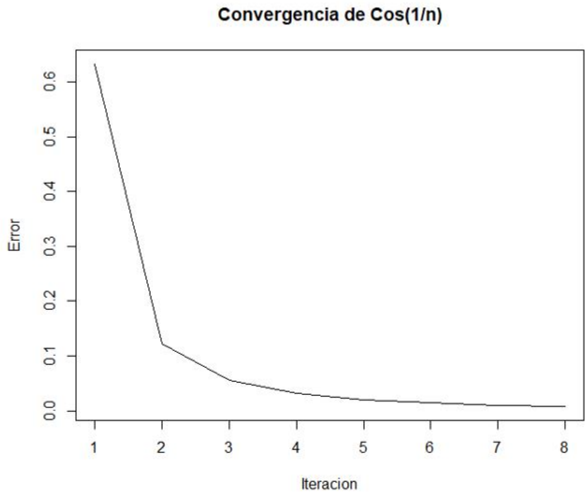
Dada la sucesión

1. Verifique el tipo de convergencia en x = 1 independientemente de origen
Solucion:
La grafica tiene un comporta exponencial negativo esto lo podemos apreciar en las siguientes graficas.



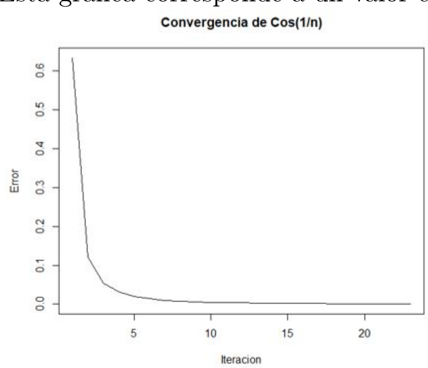

```
Sumatoria(0.7,1.0,1e-2)
iteracion   x      f.x. Sumatoria       error
        1 0.7 0.5403023 0.3664452 0.633554781
        2 1.4 0.8775826 1.2440278 0.122417438
        3 2.1 0.9449569 2.1889847 0.055043054
        4 2.8 0.9689124 3.1578971 0.031087578
        5 3.5 0.9800666 4.1379637 0.019933422
        6 4.2 0.9861432 5.1241070 0.013856768
        7 4.9 0.9898133 6.1139202 0.010186740
        8 5.6 0.9921977 7.1061179 0.007802333
```

Esta grafica corresponde a un valor de x_0 =0.7 y un error de $E = 10^{-2}$




```
Sumatoria(0.000002,1.0,1e-2)
iteracion       x      f.x. Sumatoria       error
        1 2.0e-06 0.5403023 0.3664452 0.633554781
        2 4.0e-06 0.8775826 1.2440278 0.122417438
        3 6.0e-06 0.9449569 2.1889847 0.055043054
        4 8.0e-06 0.9689124 3.1578971 0.031087578
        5 1.0e-05 0.9800666 4.1379637 0.019933422
        6 1.2e-05 0.9861432 5.1241070 0.013856768
        7 1.4e-05 0.9898133 6.1139202 0.010186740
        8 1.6e-05 0.9921977 7.1061179 0.007802333
```

Esta grafica corresponde a un valor de x_0 =0.000002 y un error de $E = 10^{-2}$




```
Sumatoria(0.3,1.0,1e-3)
 iteracion   x      f.x.  Sumatoria        error
         1 0.3 0.5403023  0.3664452 0.6335547812
         2 0.6 0.8775826  1.2440278 0.1224174381
         3 0.9 0.9449569  2.1889847 0.0550430537
         4 1.2 0.9689124  3.1578971 0.0310875783
         5 1.5 0.9800666  4.1379637 0.0199334222
         6 1.8 0.9861432  5.1241070 0.0138567684
         7 2.1 0.9898133  6.1139202 0.0101867396
         8 2.4 0.9921977  7.1061179 0.0078023328
         9 2.7 0.9938335  8.0999514 0.0061664915
        10 3.0 0.9950042  9.0949556 0.0049958347
        11 3.3 0.9958706 10.0908262 0.0041293863
        12 3.6 0.9965298 11.0873560 0.0034702133
        13 3.9 0.9970429 12.0843988 0.0029571213
        14 4.2 0.9974501 13.0818489 0.0025499360
        15 4.5 0.9977786 14.0796275 0.0022213993
        16 4.8 0.9980475 15.0776750 0.0019524893
        17 5.1 0.9982704 16.0759454 0.0017296050
        18 5.4 0.9984572 17.0744026 0.0015428130
        19 5.7 0.9986153 18.0730179 0.0013847219
        20 6.0 0.9987503 19.0717681 0.0012497396
        21 6.3 0.9988664 20.0706346 0.0011335726
        22 6.6 0.9989671 21.0696017 0.0010328800
        23 6.9 0.9990550 22.0686567 0.0009450307
```

Esta grafica corresponde a un valor de x_0 =0.3 y un error de $E = 10^{-3}$

2. Compare los primeros terminos con la sucesion A_n

Como veremos en las siguientes tablas se puede apreciar que en el caso sumatoria esta inicia con un error bajo y por ende se acerca a el límite especificado, pero así mismo se demora varias iteraciones para ir afinando el error. Este método funciona muy bien cuando se busca un error alto. Por otro lado, para Eitken inicia con un gran error, pero lo va reduciendo con rapidez esto nos lleva a afirma que, aunque para errores grandes no es mejor que el otro método, cuando se necesita un error mas bajo es la mejor opción. Esta mejora que produce Eitken se aprecia mejor con errores mayores a $E = 10^{-2}$.

```
Aitken
it  1 : solucion  25.787050160004227  error:  25.150430160004227
it  2 : solucion  -0.008262554266931232  error:  25.79531271427116
it  3 : solucion  13.05265520816747  error:  13.060917762434402
it  4 : solucion  8.662430765285851  error:  4.390224442881619
it  5 : solucion  9.76688974178791  error:  1.104458976502059
```

```
] "Sumatoria"
iteracion   x      f.x. Sumatoria       error
        1 0.7 0.5403023 0.3664452 0.633554781
        2 1.4 0.8775826 1.2440278 0.122417438
        3 2.1 0.9449569 2.1889847 0.055043054
        4 2.8 0.9689124 3.1578971 0.031087578
```

Ejercicio: Metodo Steffensen

```
> f = function(x) x^2-cos(x)
> Steffensen(f, 0, 1e-8)
  iteracion          x        Error
1         1 -0.6850734 6.850734e-01
2         2 -0.8113684 1.262950e-01
3         3 -0.8240076 1.263924e-02
4         4 -0.8241323 1.246710e-04
5         5 -0.8241323 1.208145e-08
6         6 -0.8241323 2.220446e-16
Solucion:  -0.8241323
```

Metodo Steffensen con un $E = 10^{-8}$

```
> Steffensen(f, 0, 1e-16)
  iteracion          x        Error
1         1 -0.6850734 6.850734e-01
2         2 -0.8113684 1.262950e-01
3         3 -0.8240076 1.263924e-02
4         4 -0.8241323 1.246710e-04
5         5 -0.8241323 1.208145e-08
6         6 -0.8241323 2.220446e-16
7         7 -0.8241323 1.110223e-16
8         8 -0.8241323 0.000000e+00
Solucion:  -0.8241323
```

Metodo Steffensen con un $E = 10^{-16}$