

## 2017 年夏季学期数学建模实践课程论文

题目：\_\_\_\_\_CT 系统参数的标定及成像\_\_\_\_\_

作者信息：

编号	学号	姓名	专业年级	分工
1	16060012014	黄佳城 (选课)	16 海洋渔业科学与技术	写作
2	16060012018	李鑫军	16 海渔	建模
3	16060012025	曲延旭	16 海渔	编程

评分指标及分值分布说明：

指标	摘要	写作及整体	模型	解法及结果	分析检验	总分
分布	10 分	20 分	30 分	30 分	10 分	100 分
得分						

# CT 系统参数标定及成像

## 摘要

CT(Computed Tomography) 可以在不破坏样品的情况下, 利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像, 由此获取样品内部的结构信息。

第一问, 为了标定 CT 系统的一些基本参数, 我们先是在标准的情况下分析了 CT 系统对附件一的均匀介质的扫描过程进行了分析。抓住圆形介质的平行切线间的距离相等, 得出探测器单元间的距离是 0.2857mm。在通过对于没有旋转中心偏移的情况和有偏移的情况, 选取长轴和短轴两种特殊情况得到旋转中心的坐标是  $(-9.2857, 6.8571)$ 。最后通过对于椭圆的平行切线间距离的遍历而出 180 个方向。

第二问中, 我们分析来了第一问得到的 180 个 CT 扫描方向, 决定将题目现有的 CT 系统简化为更为利于计算的模型。通过 irand 函数得到题目中要求的几何形状与吸收率, 仍是抓住长短轴的条件算出介质在正方形托盘中的两种情况, 并给出顶点坐标:  $(42.7921, 25.9233)$ 、 $(50.7749, 71.4728)$ 、 $(5.5237, 42.5377)$ 、 $(89.7564, 52.7340)$ 。由于不能排除其中一种情况, 所有没有给出 10 个点的吸收率。

第三问, 我们运用了和第二问同样的算法, 略有不同的是我们扩展了数据表的阶数, 得到了较为完整的介质几何形状和吸收率。至于其他问题, 没有得到较好的解决。

第四问, 时间不足, 尚未有解决。

关键词: 平行束 CT 系统、旋转中心偏移、CT 图像重构、Randon 变换、曲线平行切线间的间距

## 目录

摘要 .....	2
目录 .....	3
一、 问题重述 .....	4
二、 问题的分析 .....	5
三、 模型假设 .....	5
四、 符号与约定 .....	5
五、 模型的建立和求解 .....	6
5.1 问题一模型的建立与求解 .....	6
5.1.1 CT 系统与 Radon 变换 .....	6
5.1.2 绘制和分析与问题一相关的图表 .....	7
5.1.3 关于附件一在标准情况下的 CT 扫描结果 .....	8
5.1.4 探测器单元之间的距离的测定 .....	9
5.1.5 椭圆的最大平行切线组的间距问题 .....	11
5.1.6 旋转中心的确定 .....	11
5.1.7 CT 系统 180 个扫描方向的确定 .....	13
5.2 问题二的模型建立与求解 .....	14
5.2.1 题中 CT 机的近似情况 .....	14
5.2.2 Radon 逆变换 .....	14
5.2.3 几何形状和吸收率的确定 .....	14
5.2.4 位置的确定 .....	15
5.2.4 10 个点的吸收率的确认 .....	15
5.3 问题三的模型建立与求解 .....	15
5.3.1 几何形状与吸收率的确认 .....	15
5.3.2 第三问的其他问题 .....	16
5.3 问题四的模型建立与求解 .....	16
六、 模型检验 .....	16
七、 模型评价 .....	17
7.1 模型的优点 .....	17
7.2 模型的缺点 .....	17
参考文献 .....	17
附录 .....	17
附录 1 CT 系统的 180 个方向 .....	17
附录 2 第一问 旋转中心程序 .....	22
附录 3 第一问 180 个方向 程序 .....	24
附录 4 第二问 几何形状与吸收率 程序 .....	25
附录 5 第二问 位置 程序 .....	25
附录 6 第三问 几何形状与吸收率 程序 .....	26

## 一、 问题重述

CT(Computed Tomography) 可以在不破坏样品的情况下，利用样品对射线能量的吸收特性对生物组织和工程材料的样品进行断层成像，由此获取样品内部的结构信息。一种典型的二维 CT 系统如图 1 所示，平行入射的 X 射线垂直于探测器平面，每个探测器单元看成一个接收点，且等距排列。X 射线的发射器和探测器相对位置固定不变，整个发射-接收系统绕某固定的旋转中心逆时针旋转 180 次。对每一个 X 射线方向，在具有 512 个等距单元的探测器上测量经位置固定不动的二维待检测介质吸收衰减后的射线能量，并经过增益等处理后得到 180 组接收信息。

CT 系统安装时往往存在误差，从而影响成像质量，因此需要对安装好的 CT 系统进行参数标定，即借助于已知结构的样品（称为模板）标定 CT 系统的参数，并据此对未知结构的样品进行成像。

请建立相应的数学模型和算法，解决以下问题：

(1) 在正方形托盘上放置两个均匀固体介质组成的标定模板，模板的几何信息如图 2 所示，相应的数据文件见附件 1，其中每一点的数值反映了该点的吸收强度，这里称为“吸收率”。对应于该模板的接收信息见附件 2。请根据这一模板及其接收信息，确定 CT 系统旋转中心在正方形托盘中的位置、探测器单元之间的距离以及该 CT 系统使用的 X 射线的 180 个方向。

(2) 附件 3 是利用上述 CT 系统得到的某未知介质的接收信息。利用(1)中得到的标定参数，确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率等信息。另外，请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率，相应的数据文件见附件 4。

(3) 附件 5 是利用上述 CT 系统得到的另一个未知介质的接收信息。利用(1)中得到的标定参数，给出该未知介质的相关信息。另外，请具体给出图 3 所给的 10 个位置处的吸收率。

(4) 分析(1)中参数标定的精度和稳定性。在此基础上自行设计新模板、建立对应的标定模型，以改进标定精度和稳定性，并说明理由。

(1) - (4) 中的所有数值结果均保留 4 位小数。同时提供(2)和(3)重建得到的介质吸收率的数据文件（大小为  $256 \times 256$ ，格式同附件 1，文件名分别为 problem2.xls 和 problem3.xls）。

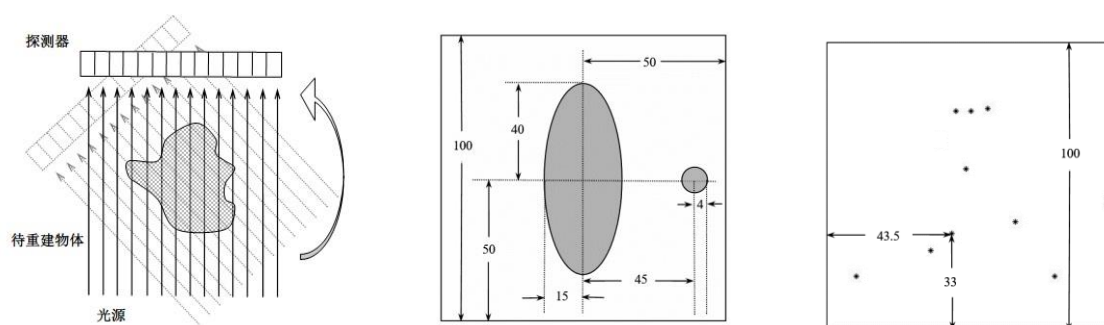


图 1. CT 系统示意图 图 2. 模板示意图（单位：mm）图 3. 10 个位置示意图

## 二、 问题的分析

第一问，要求对 CT 的参数进行标定，那么应该对比标准情况，并善用结合关系。

第二、三问，CT 图像重构，涉及 Radon 变换或者图像处理。需要比较复杂的计算。

第四问，稳定性分析与准确性分析需要对模型进行重新的检查，设计心得模板以检测整个模型。

## 三、 模型假设

1. 题目中提供的数据真实可靠。
2. 在 X 射线传播及穿透介质时，我们只考虑介质对于 X 射线的衰减作用，不考虑衍射等现象。
3. 第（2）（3）中，为了简化计算，我们假设 X 光发射-接收器每次转过的角度都是一样的。

## 四、 符号与约定

序号	符号	含义
1	$I_0$	初始 X 射线的入射强度
2	$\mu$	物质的衰减系数
3	$D$	检测器单元之间的长度
4	$D_{\parallel}$	理论平行切线之间的距离
5	R	旋转中心
6	$D'_{\parallel}$	实际平行切线之间的距离

## 五、模型的建立和求解

### 5.1 问题一模型的建立与求解

#### 5.1.1 CT 系统与 Radon 变换

CT 系统来检测物体的方法主要是发射出 X 射线，让 X 射线去穿过待检测物质，进而检测通过待检测物质后的 X 射线强度，再通过一定的数学手段来得到待测物质的内部结构。总而言之，CT 系统检测的原理就是 X 射线与物质发生的相互作用。本论文中考虑 X 射线仅考虑物质对 X 射线的衰减作用，不考虑衍射、康普顿效应等。

假如 X 射线穿过的待检测物体是均匀的话，那么一般满足下列方程<sup>[1]</sup>：

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (1)$$

其中， $I_0$ 是初始 X 射线的入射强度， $\mu$ 是均匀物质的衰减系数， $x$ 是 X 射线穿过的介质的厚度， $I$ 则是 X 射线穿过后的强度。

如果 X 射线穿过的待检测物质是不均匀的话，那么由 Beer-Lambert 定律可有<sup>[1]</sup>：

$$I(L) = I_0 e^{-\int_L \mu(x) dl} \quad (2)$$

其中， $L$ 表示射线经过的直线长度， $dl$ 表示直线的线积分微元， $\mu(x)$ 表示待测物质在点 $x$ 处对于 X 射线的衰减系数。上式经过变换后得到：

$$p(L) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln \frac{I(L)}{I_0} = \int_L \mu(x) dl. \quad (3)$$

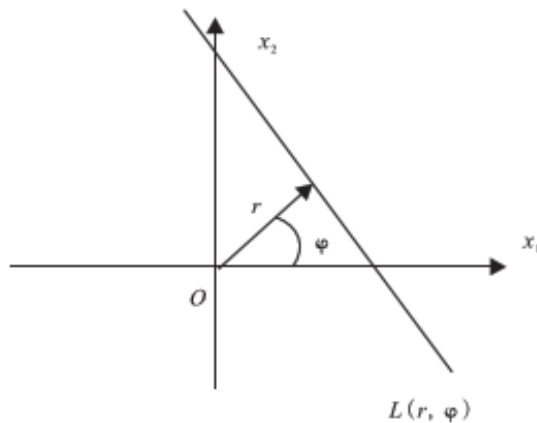


图 4. 平行束 CT 系统成像的数学模型

在数学上，对题目中给出的平行束 CT 的模型如下<sup>[1]</sup>：

设  $\gamma = (\cos\theta, \sin\theta)$ ， $\rho = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 。如图 4 所示，在平面  $Ox$  中给定一

对参数  $(r, \theta)$ , 可以唯一确定一条 X 射线  $L(r, \theta)$ , 其中  $r$  为原点  $O$  到  $L(r, \theta)$  的有向距离 (即原点  $O$  到  $L(r, \theta)$  的垂足的方向与  $\gamma$  相同的时候,  $r > 0$ ; 若相反, 则  $r < 0$ )。  $L(r, \theta)$  可以表示为<sup>[1]</sup>:

$$\gamma \cdot x = r \text{ 或 } x = r \cdot \gamma + t \cdot \rho, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

于是令泛函  $p(r, \theta) = p(L(r, \theta))$ , 则 (3) 式可以表示为<sup>[1]</sup>:

$$p(r, \theta) = \int_{\gamma \cdot x = r} \mu(x) dl = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(r \cdot \gamma + t \cdot \rho) dt.$$

对于固定的角度  $\theta$ ,  $r$  变化的时候,  $\gamma \cdot x = r$  得到的结果是一束平行射线, 简称为平行束。对于固定的  $\theta$ ,  $p(r, \theta)$  被称为  $\mu(x)$  沿着方向  $\rho$  的平行束投影。  $p(r, \theta)$  也被称为函数  $\mu(x)$  的 Radon 变换。

### 5.1.2 绘制和分析与问题一相关的图表

问题一在提出要求我们标定 CT 系统的各种参数的同时, 给出了用来辅助我们标定参数用的附件一和附件二。附件一给的是用来标定参数的均匀介质的吸收率, 附件二则给的是关于均匀介质的 CT 扫描结果。

首先, 我们先对附件一的结果使用 matlab 做出直观的图像。

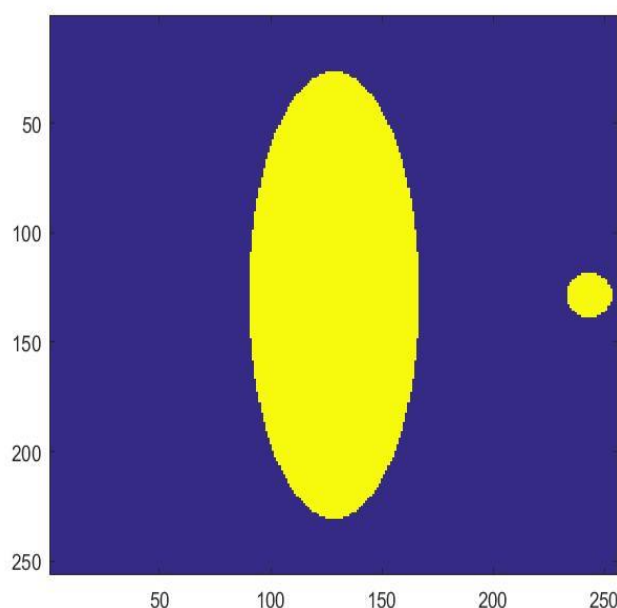


图 5. 附件一的直观图像

由于这是一个均匀的介质, 所以他对 X 射线的衰减作用都是一致的, 这从图像中不难看出, 也与附件一中只含有 0, 1 两个数的情况相对应。

接着, 我们对附件二使用 matlab 的做出直观图像。

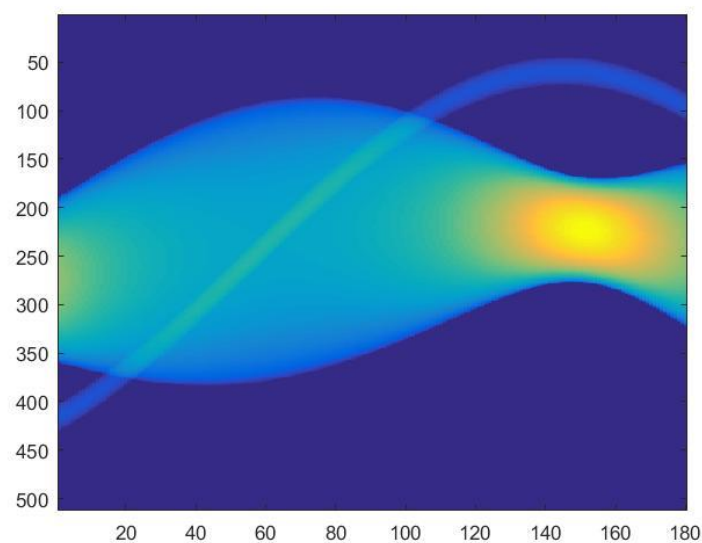


图 6. 附件二的直观图像

由容易辨识的色温图中可以看出整个附件二给出的数据是连续旋转的扫描结果，不存在打乱数据的情况，这对我们后面的分析是有利的。

### 5.1.3 关于附件一在标准情况下的 CT 扫描结果

问题一让我们标定的参数有 CT 旋转中心的位置，这是因为由安装时产生的旋转中心的偏移这个误差会对图像的形成质量造成影响。于是，我们就对附件一中提到的物体在标准情况下的 CT 扫描结果，这里提到的标准状况是指在没有 CT 旋转中心偏移、并且初始扫描角度与正方形托盘边界垂直的情况下的结果。于是我们在 matlab 下使用 Radon 变换得到了关于附件一在标准情况下， $360^\circ$  扫描的 CT 扫描结果。

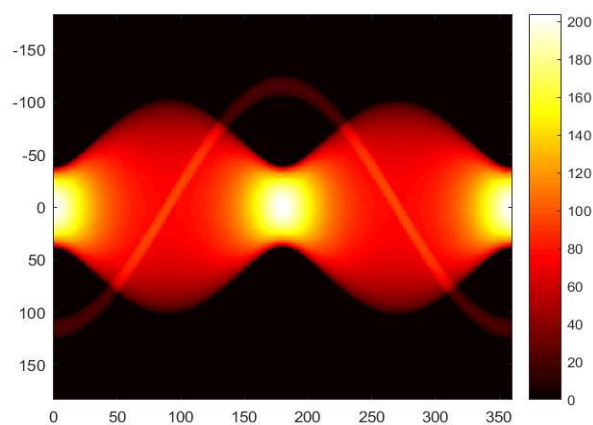


图 7. 附件一在标准情况下的  $360^\circ$  扫描的 CT 扫描结果

由我们的到的图 6 和图 7 的图进行对比可以看出：附件 2 中采集的数据大约是



扫描 $180^\circ$ 的结果；并且初始坐标的对比，可以得出初始的扫描角度与标准情况下大概有 $30^\circ$ 左右的偏差。这样的对比得到的结果对于我们后面的检验还是有一定帮助的。

另外的，我们对图 7 中各个部分进行一些过程性的分析：在一开始有两个连续的探测器单元接收到了信号，这是由于一开始的时候两个部件在 X 射线的方向上并没有重合的部分，因而产生了两个部分的图像。接着两个图像就开始重合，圆形介质的部分开始被椭圆部分所覆盖，但是仍然有一部分不被椭圆介质所覆盖的部分。在 X 射线发射-接收系统不断地转动中，圆形介质渐渐的完全被椭圆介质在 X 射线的发射方向上覆盖，最后再覆盖一段时间后再分离，这整个过程中 X 射线发射-接收系统转过了 $180^\circ$ 。由于图 2 中提供的模板是完全对称的，所以在图 7 中也是周期性的图像。

#### 5.1.4 探测器单元之间的距离的测定

在 X 射线的发射-接收系统中，我们很容易的观察到：对应于 512 个探测器的 512 道发射出来的 X 射线是相互平行的。而对于图 2，也就是题目提供的模板中，有一个椭圆和一个小圆的情况：在 X 射线发射-接收系统不断旋转的过程中，那 512 道 X 射线线在经过椭圆和圆的边界时，就相当于椭圆和圆的平行切线组。

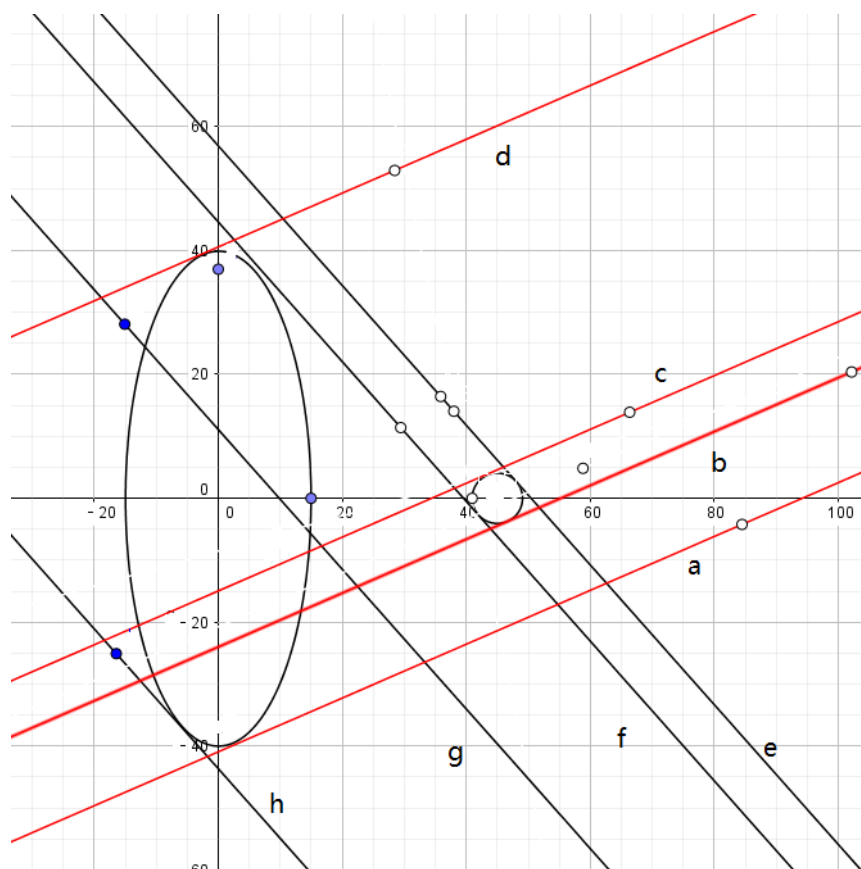


图 8. X 射线扫描示意图

如图 8 中所示，红色线  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  是指同一角度扫描的 X 射线，黑色线  $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$  则是另一相同角度扫描的 X 射线。其中  $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $h$  就是 X 射线遇到介质边缘出现的平行切线组情况。

对于圆形介质的边缘切线组  $b$ 、 $c$  和  $e$ 、 $f$ ，这两组边缘切线组之间的间距不会随着 X 射线发射-接收系统的旋转而不断变化，一直都是圆的直径  $r = 44\text{mm}$ ，所以我们将运用这个数据来求得探测器单元之间的距离。

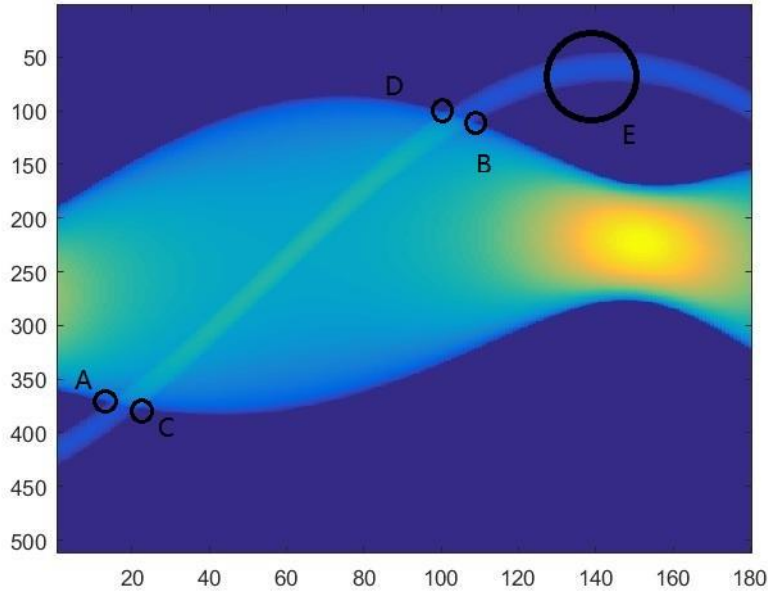


图 9 一些重要的节点

在对于图 6、图 7 和图 8 的综合分析，我们可以得到以下结论：

①在 X 射线的发射方向上，圆形介质和椭圆介质开始重叠的时候是：椭圆图形和圆形的内公切线方向和 X 射线的发射方向相同的时候。在附件二中体现为图 9 的 A、B 两点。

②在 X 射线的发射方向上，圆形介质和椭圆介质完全重叠的时候是：椭圆图形和圆形的外公切线方向和 X 射线的发射方向相同的时候。在附件二中体现为图 9 的 C、D 两点。

再结合上面两个结论之后，我们就可以得出，图 6 中出现的条带较细的区域，也即图 9 中的 E 区域，这就是在椭圆介质和圆形介质在 X 射线的发射方向没有重合的时候的图像。

我们计算了细条带所覆盖的检测器单元的数量，基本稳定在 29 个检测器单元这个数据上，这也间接验证了我们的想法。

29 个检测器单元，那么中间就有 28 个距离。也就是检测器之间的距离为：

$$D = \frac{r}{28} = \frac{8}{28} \approx 0.2857\text{mm}$$

### 5.1.5 椭圆的最大平行切线组的间距问题

在我们求出 CT 系统真正的旋转中心之前，我们先考虑这个问题：对于某个倾斜角，椭圆总是存在有一对切线，那么这组切线间的间距是多少呢？

我们假设存在椭圆  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$  和他的切线  $y = kx + b$ 。显然，对于一个相同的  $k$ ，有两个  $b$  与它相对应，这就是那两组平行线，假设两个  $b$  为  $b_1$ 、 $b_2$ 。

由两平行线间的距离公式可有：

$$D_{\parallel} = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

联立椭圆和切线的方程可以得到：

$$(A^2k^2 + B^2)x^2 + 2A^2kb + A^2(b^2 - B^2) = 0 \quad (4)$$

由于切线的原因，所以  $\Delta = 0$ 。化简（4）式可得：

$$b^2 - (A^2 + k^2B^2) = 0 \quad (5)$$

注意到  $|b_1 - b_2|$  可以用韦达定理表示，于是把（5）式中把  $b$  作为主元，于是可以化简得到：

$$D_{\parallel} = 2\sqrt{\frac{A^2 + k^2B^2}{k^2 + 1}}. \quad (6)$$

$$\text{化简（6）式可得： } D_{\parallel} = 2\sqrt{B^2 + \frac{A^2 - B^2}{k^2 + 1}}$$

### 5.1.6 旋转中心的确定

对于我们附件一提供的椭圆介质， $A = 40$ ， $B = 15$ ，由（6）式中可以得到， $D_{\parallel}$  的最大值和最小值恰好是长轴和短轴。这将成为我们判断旋转中心位置的启发处。

我们先假设旋转中心就在正方形托盘的中心，那我们得到的 CT 扫描图像就应该是中规中矩的，和图 7 得到的扫描结果类似。由于我们附件一的椭圆的特殊性，他的平行切线的最大距离和最小距离恰好是长轴和短轴，这样的话就说明在标准情况下，也即在旋转中心没有偏移的情况下，长轴的中心和短轴的中心在附件二的直观显示图像中应该是在第 256 个检测器单元处。

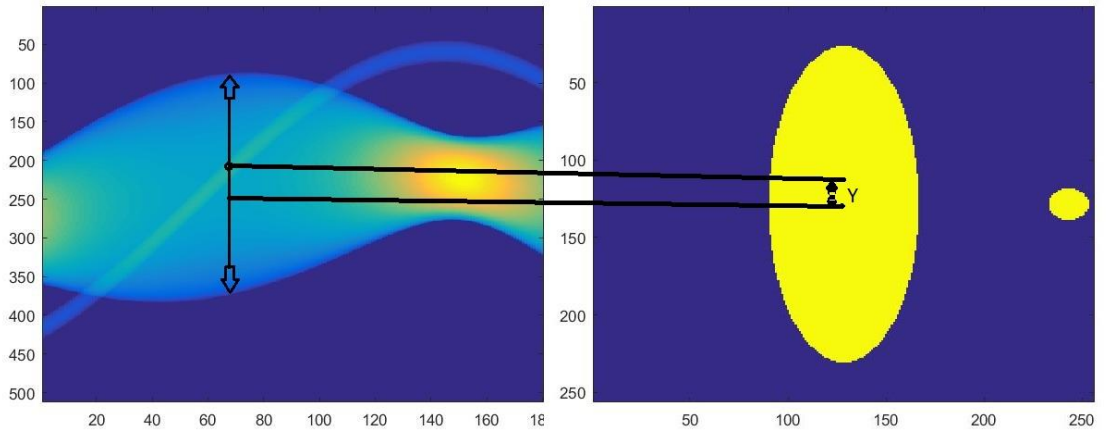


图 10 旋转中心的偏移

现在回到正常的情况，由于旋转中心的偏移，那么就造成了长轴和短轴的中点对于正方形托盘中心的偏移<sup>[2]</sup>：

对于当 X 射线平行于长轴方向时，偏移的值是恰好是旋转中心的y值；对于当 X 射线平行于短轴方向是，偏移的值恰好是先转中心的x值。具体示意图如图 10。

有了具体的论文支撑，我们就想着通过这一方法解出旋转中心的坐标值。于是我们设计了整个算法的过程。

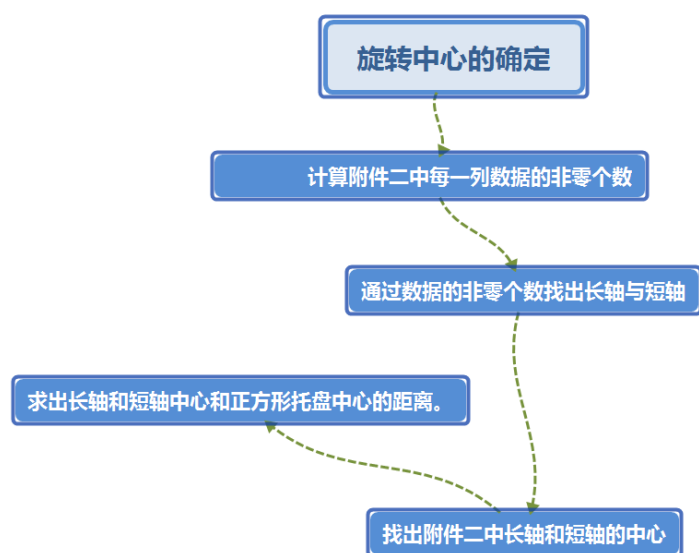


图 11. 旋转中心的确定

其中，在计算附件二中每一列数据的非零个数到通过非零个数找出长轴短轴时这个过程中需要注意的是图 12 中的两个黑框区域，也就是在 X 射线发射-接收系统转动过程中，椭圆介质无法与圆形介质在 X 射线发射方向相互覆盖的区域。那段区域中，圆形介质的条带会影响寻找长轴短轴，因而需要扣除 29 个探测器单元的距离。

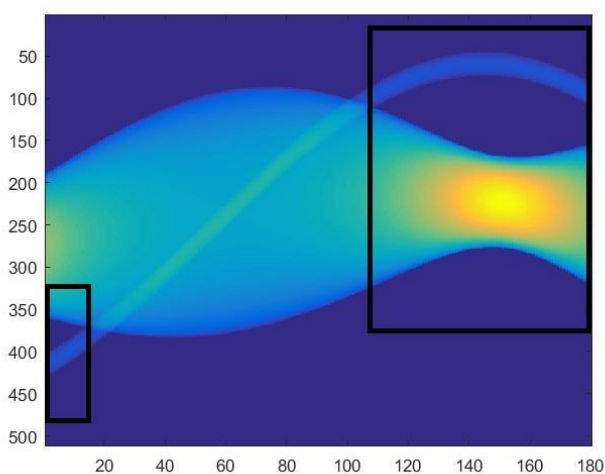


图 12. 需要特殊处理的区域

在确定了算法之后，我们使用 matlab 编程计算了旋转中心的坐标（以椭圆中心建立坐标轴）：

$$R = (-9.2857, 6.8571)_-$$

### 5.1.7 CT 系统 180 个扫描方向的确定

我们在上疑问确认旋转中心的时候，等于算是获得了在 X 射线发射-接收系统旋转时，椭圆的所有的边界平行切线组的实际切线间距离，因为我们已经扣除了圆形介质所占用的 29 个的探测器单元。我们通过 matlab 可以做出在 180 个扫描方向下，椭圆介质的实际平行切线之间的距离 $D'_\parallel$ ，如图 13 所示。

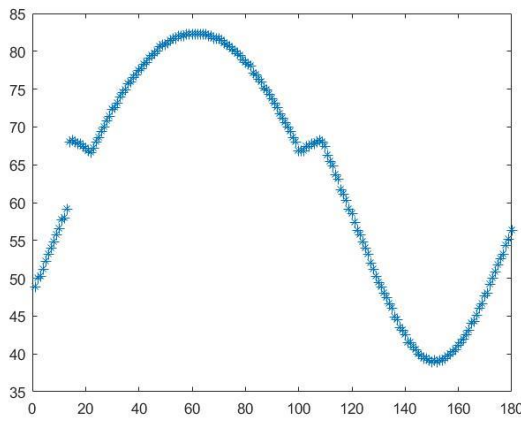


图 13. 椭圆介质的平行切线之间的距离

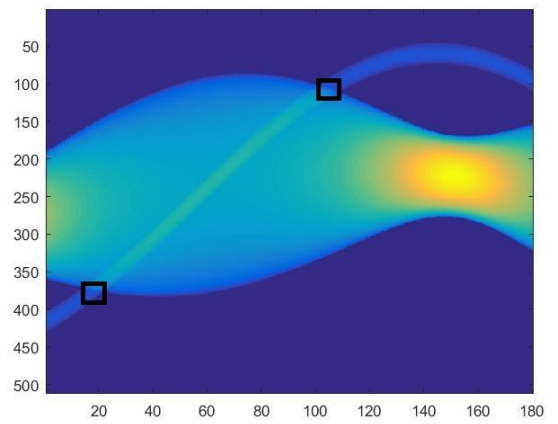


图 14. 两处异常区域

从图中可以看到有两处的异常值，这是因为在图 14 中的两个黑框区域是夹于椭圆介质和圆形介质开始发生覆盖到完全覆盖之间，中间应该减去多少个探测器单元不好控制，所以我们没有做出处理。这中间产生的异常值，我们将使用插值的方法替换掉。

现在回到式（6）上，式（6）是理论平行切线之间的距离 $D_\parallel$ 关于切线斜率 $k$ 的关系。其实注意看得话， $k = \tan\theta$ ， $\theta$ 恰好是切线的倾斜角，这可以作为我们在以椭圆中心为坐标中心的坐标系下对于 CT 系统 180 个旋转方向的参考。

代入本题椭圆的基本数据 $A = 40$ ， $B = 15$ ，则式（6）可以化成一下形式：

$$k^2 = \frac{1375}{1600 - \frac{1}{4}D_\parallel^2} - 1 \quad (7)$$

式（7）是一个关于理论平行切线之间的距离 $D_\parallel$ 与切线斜率 $k$ 的关系式。我们假设理论平行切线之间的距离 $D_\parallel$ 与实际平行切线之间的距离 $D'_\parallel$ 相等，然后通过解方程的方式求出 180 个方向。

我们通过 matlab 编程可以得到 180 个方向。这里给出以椭圆中心为坐标中心为坐标轴的初始的初始角度为 $31.3301^\circ$ 。更为具体的 180 个方向角度作为附录，可以

到论文的附录查阅。

5.2 问题二的模型建立与求解

5.2.1 题中 CT 机的近似情况

我们从第一问的 CT 系统的 180 个方向中可以看到，每次 CT 机旋转的角度虽然大小各异，但都总是在1°左右。于是我们就想通过近似性的将它看成每次转的角度都是1°的情况来减少计算的复杂性。

5.2.2 Radon 逆变换

在 5.1.1 中提到的 Radon 变换是 CT 的成像原理的数学模型。相反的，他也有他的反演变换，讲的问题是如何通过平行束的投影 $p(r, \theta)$ 重建  $\mu(x)$ 的问题。

1917 年，Radon 给出平行束投影的反演公式<sup>[1]</sup>:

$$\mu(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_r p(r, \theta)}{\gamma \cdot x - r} dr$$

由于反演公式中带有奇异积分，一般和傅里叶变换配合使用来减少运算的复杂性。

5.2.3 几何形状和吸收率的确定

Matlab 中带有 iradon 函数解决 Radon 逆变换的计算，补足的是旋转中心设置在了图片中心且每次的旋转固定。随时如此，我们还是可以通过这个函数得到附件三固件的几何形状和吸收率。

通过 Matlab 的编程，我们可以得到如下结果：

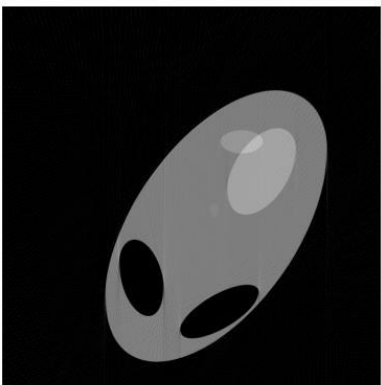


图 15. 附件三的介质的几何形状

	1	2	3	4	5
1	0.0091	0.0054	-0.0053	0.0102	0.0
2	0.0043	0.0069	-0.0068	-0.0131	0.0
3	-0.0118	0.0019	-0.0062	-0.0242	0.0
4	0.0022	-0.0158	-0.0180	-0.0349	-0.0
5	0.0207	0.0159	0.0127	-0.0129	-0.0
6	0.0134	0.0173	0.0128	0.0069	-0.0
7	0.0039	0.0144	0.0133	0.0118	-0.0
8	-0.0134	0.0055	0.0122	0.0124	-0.0
9	-0.0184	-0.0097	-0.0060	0.0024	6.5045
10	-0.0117	0.0030	0.0142	0.0078	0.0

图 16 需阈值处理

对于吸收率，我们则是通过 iradon 函数的返回值作为吸收率的答案。当然，我们发现有两个问题，如图 16 所示：接近 0 但是非零的数太多。于是我们设定了一个阈值“-0.1~0.1”来把他们变成 0；需要用 imresize 函数调整文件阶数。



#### 5.2.4 位置的确定

通过对于图 15 的观察，我们可以得出我们这一题的介质依旧是一个椭圆，只不过是介质不均匀罢了。对于其位置的测定，由于我们已经知道了该 CT 扫描系统的 180 个扫描方向，这个问题的确认就会显得比较简单了。

先通过我们得到的  $256 \times 256$  的像素文件，我们得到了关于附件三中的椭圆介质的 A、B 比值，进而通过式 (6) 验证该椭圆的理论平行切线间的间距的最大值仍然是长轴。有了这一重要信息，我们就直接套用 5.1.6 中关于寻找长轴的方法，经过 Matlab 编程，我们找到他的长轴与 CT 机第 60 次扫描的方向相同，这就证明这个椭圆与以正方形托盘为中心建立的直角坐标系的偏差夹角为  $0^\circ$ ，也就是和 X 轴平行的结果。

接着确定椭圆介质在 X 轴上的位置，取附件二第 60 列的数据来看，椭圆长轴位于第 156 个探测器单元到 296 个探测器单元之间。这个时候，椭圆只有两种情况了：要么是正向的，要么是反向的，并且两者是完全按照长轴反转的。

我们做到这里，暂时就告一段落了，没有什么比较好的方法分辨两种情况。

但是，我们任然可以给出得到椭圆的四个顶点坐标： $(42.7921, 25.9233)$ 、 $(50.7749, 71.4728)$ 、 $(5.5237, 42.5377)$ 、 $(89.7564, 52.7340)$ ，因为两种情况完全按照长轴对称。

#### 5.2.4 10 个点的吸收率的确认

由于我们对于与椭圆的位置没有比较好的思路分辨最后两种情况，所以我们对 10 个点的吸收率确认没有比较好的结果。

### 5.3 问题三的模型建立与求解

#### 5.3.1 几何形状与吸收率的确认

这个题目一开始在与几何形状与吸收率这方面上与问题二相差不大，我们决定先用第二问的思路解决一下题目。我们得到以下结果：

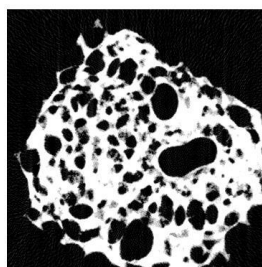


图 17 附件五的介质还原

我们可以看到一个边角被遮挡住了，我们认为是数据文件不够大的原因，于是我们增加了数据文件的阶数，由  $512 \times 180$  变为  $912 \times 180$  的阶数，得到了以下更完整的文件：

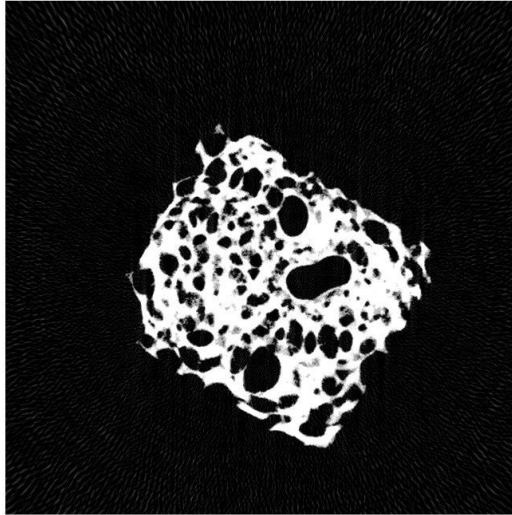


图 17. 加大阶数的附件五还原的介质

仍然以 `irand` 的返回值作为吸收率，用 `imresize` 函数调整文件阶数。

### 5.3.2 第三问的其他问题

对于其他问题，仍未有一个比较好的想法。

### 5.3 问题四的模型建立与求解

时间不足，尚未求解。

## 六、 模型检验

对于前文建立的模型，我们对最需要做的检验就是关于 `irnad` 函数的检验效果。我们使用著名的 Shepp-Logan 模型进行检验。



图 18. 原件

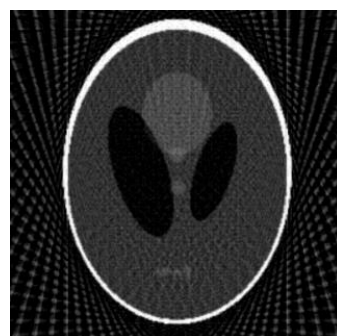


图 19. 经过扫描后再回复的件



## 七、 模型评价

### 7.1 模型的优点

第（1）问中建立的模型，巧算的部分居多，较为简便。

第（2）（3）问中建立的模型，对已有的 CT 系统进行简化，简单方便，易于编程。

### 7.2 模型的缺点

第（1）问中，细条带的探测器个数影响较大。

第（2）（3）问过于精简，对结果有影响。

## 参考文献

【1】 张朋、张慧滔、赵云松，X 射线 CT 成像的数学模型及有关问题，数学建模及应用，1（1）：1-12, 2012。

【2】 李增云、吕东辉，利用部分投影的二维 CT 旋转中心偏移快速校正，CT 理论与应用研究，24（4），533-543, 2015

## 附录

### 附录 1 CT 系统的 180 个方向

1	31.3301453973636
2	32.6400744085447
3	32.9678213524684
4	33.9523449072339
5	35.2695007793338
6	36.2620604873684
7	37.2597888961921
8	38.2637217519121
9	39.2749106462826
10	40.2944344379840
11	41.6687044296099
12	42.0152223248925
13	43.4144680776856
14	44.8616541223177
15	46.5366808839727
16	48.3716541223177
17	49.9409238243765

18	51. 9409238243765	
19	52. 5143222265695	
20	53. 0916907766073	
21	53. 6728794093559	
22	53. 2577458929610	
23	54. 0916907766073	
24	55. 3716541223177	
25	56. 2461818881202	
26	57. 5934779027895	
27	58. 5178458947062	
28	59. 9487191293824	
29	60. 9357117946419	
30	62. 4731662299876	
31	63. 0026114816201	
32	64. 0901184222864	
33	65. 8028268919583	
34	67. 0085084797741	
35	67. 6336140459602	
36	69. 6146185044982	
37	70. 3161334952062	
38	71. 7951857767967	
39	72. 5792035957658	
40	74. 2584400880020	
41	75. 1662723867481	
42	77. 1666153715374 +	
43	78. 2906698126651	
44	80. 9390608954877	
45	82. 6054520000443	
46	84. 7738541184980	
47	90. 0000000000000	
48	-90. 0000000000000 7. 37999692453232i	+
49	-90. 0000000000000 9. 03420603927900i	+
50	-90. 0000000000000 9. 03420603927900i	+
51	-90. 0000000000000 10. 4267351179011i	+
52	-90. 0000000000000 11. 6518026758412i	+
53	-90. 0000000000000 12. 7577563187650i	+
54	-90. 0000000000000	+

	12.7577563187650i	
55	-90.0000000000000 13.7733325153360i	+
56	-90.0000000000000 13.7733325153360i	+
57	-90.0000000000000 13.7733325153360i	+
58	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
59	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
60	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
61	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
62	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
63	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
64	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
65	-90.0000000000000 14.7172649883379i	+
66	-90.0000000000000 13.7733325153360i	+
67	-90.0000000000000 13.7733325153360i	+
68	-90.0000000000000 12.7577563187650i	+
69	-90.0000000000000 12.7577563187650i	+
70	-90.0000000000000 12.7577563187650i	+
71	-90.0000000000000 11.6518026758412i	+
72	-90.0000000000000 10.4267351179011i	+
73	-90.0000000000000 9.03420603927900i	+
74	-90.0000000000000 7.37999692453232i	+
75	-90.0000000000000 5.22100141868161i	+

76	90.00000000000000 + 0.00000000000000i
77	84.7738541184980
78	82.6054520000443
79	79.5321044091789
80	78.2906698126651
81	77.1666153715374
82	76.1313553389601
83	73.3984504009797
84	72.5792035957658
85	71.0420134358655
86	70.3161334952062
87	68.2752770030534
88	67.6336140459602
89	66.3986336285477
90	65.2200626386616
91	64.0901184222864
92	63.0026114816201
93	61.4401873870052
94	60.4386824138917
95	59.4654711182860
96	58.5178458947062
97	57.5934779027895
98	56.2461818881202
99	55.3716541223177
100	54.6728794093559
101	53.6728794093559
102	52.8461552370250
103	51.6313882117779
104	50.8370633681861
105	49.2819635393385
106	48.5197296490280
107	46.6536728992589
108	45.9215686153423
109	44.8371472969028
110	43.4144680776856
111	42.7121155917842
112	41.3234111216149
113	39.9535990024491
114	39.2749106462826
115	38.2637217519121
116	37.2597888961921
117	36.2620604873684

118	34.9396179976759
119	33.9523449072339
120	32.9678213524684
121	31.9849806662784
122	31.3301453973636
123	30.3476316325888
124	29.6919301417999
125	28.7064001902339
126	28.0474778149833
127	26.7231121693080
128	26.3903181950828
129	25.0503707501620
130	24.7128290170916
131	24.0341253569993
132	22.6597000514939
133	22.6597000514939
134	21.9623418499282
135	21.6107195566134
136	20.9009220965705
137	20.5424528220822
138	20.1813895276941
139	20.1813895276941
140	19.8175570313270
141	19.4507665660930
142	19.8175570313270
143	19.4507665660930
144	19.8175570313270
145	19.8175570313270
146	20.1813895276941
147	20.5424528220822
148	20.9009220965705
149	21.2569603384606
150	21.6107195566134
151	22.3119603493825
152	22.6597000514939
153	23.3500067355046
154	24.0341253569993
155	24.7128290170916
156	25.7222388866927
157	26.0567163861549
158	27.0551635035437
159	28.0474778149833
160	28.7064001902339

161	30.0198806825665
162	30.3476316325888
163	31.6575516597153
164	32.6400744085447
165	33.6239169530216
166	34.6101567247052
167	35.5998433387732
168	36.2620604873684
169	37.5936923025564
170	38.5999258856160
171	39.9535990024491
172	41.3234111216149
173	42.7121155917842
174	43.4144680776856
175	44.8371472969028
176	45.9215686153423
177	46.6536728992589
178	48.5197296490280
179	49.2819635393385
180	50.8370633681861

## 附录2 第一问 旋转中心程序

```

a=xlsread('A题附件.xls','附件2');
d=8/28;
k=zeros(1,180);
for i=1:180;
    t=0;
    for j=1:512;
        if a(j,i)>0
            t=t+1;
        end
    end
    k(1,i)=t;
end
for i=1:180;
    if i<=13
        k(1,i)=k(1,i)-29;
    else if 14<=i<=108
        k(1,i)=k(1,i);
    else if 109<=i<=180
        k(1,i)=k(1,i)-29
    end
end

```

```

        end
    end
end

kmax=k(1,1);
kmin=k(1,1);
maxnum=1;
    for i=2:180
        if k(1,i)>=kmax
            kmax=k(1,i);
            maxnum=i;
        end
    end

minnum=1;
    for i=2:180
        if k(1,i)<=kmin
            kmin=k(1,i);
            minnum=i;
        end
    end

for j=1:512
    if a(j,maxnum)~=0
        hangnum1=j
    break
    end
end

for j=1:512
    j2=513-j;
    if a(j2,maxnum)~=0
        hangnum2=j2
    break
    end
end

hangmun3=0;
temp=0;
for j=1:512
    if a(j,minnum)~=0
        temp=temp+1;
    end
    if temp==30

```

```

        hangnum3=j;
    break
end
end

    for j=1:512
        j2=513-j;
        if a(j2,minnum)~=0
            hangnum4=j2
        break
        end
    end
end

yr=(256-((hangnum2+hangnum1)/2))*d
xr=-((256-((hangnum4+hangnum3)/2))*d

```

附录3 第一问 180 个方向 程序

```

a=xlsread('A题附件.xls','附件2');
d=8/28;
k=zeros(1,180);
for i=1:180;
    t=0;
    for j=1:512;
        if a(j,i)>0
            t=t+1;
        end
    end
    k(1,i)=t;
end
for i=1:180;
    if i<=13
        k(1,i)=k(1,i)-29;
    else if 14<=i<=108
        k(1,i)=k(1,i);
    else if 109<=i<=180
        k(1,i)=k(1,i)-29
    end
end
end
end
betweenlong=zeros(1,180);
for i=1:180
    betweenlong(1,i)=(k(1,i)-1)*d

```



```

end

for i=1:180
k1(1,i)=sqrt((1375/(1600-
betweenlong(1,i)*betweenlong(1,i)/4))-1);
end

for i=1:180
    k2(1,i)=(atan(k1(1,i))*180)/pi
end

```

#### 附录4 第二问 几何形状与吸收率 程序

```

a=xlsread('A题附件.xls','附件3');
b=iradon(a,1);
c=imresize(b,[256,256]);

```

#### 附录5 第二问 位置 程序

```

a=xlsread('A题附件.xls','附件3');
d=8/28;
k=zeros(1,180);
for i=1:180;
    t=0;
    for j=1:512;
        if a(j,i)>0
            t=t+1;
        end
    end
    k(1,i)=t;
end
for i=1:180;
    if i<=13
        k(1,i)=k(1,i)-29;
    else if 14<=i<=108
        k(1,i)=k(1,i);
    else if 109<=i<=180
        k(1,i)=k(1,i)-29
    end
    end
end
end
end

```

```

kmax=k(1,1);
kmin=k(1,1);
maxnum=1;
    for i=2:180
        if k(1,i)>=kmax
            kmax=k(1,i);
            maxnum=i;
        end
    end

minnum=1;
    for i=2:180
        if k(1,i)<=kmin
            kmin=k(1,i);
            minnum=i;
        end
    end

```

附录6 第三问 几何形状与吸收率 程序

```

a=xlsread('A题附件.xls','附件5');

a=[zeros(200,180); a;zeros(200,180) ];
b=iradon(a,1);
c=imresize(b,[256,256]);

```