¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

Seminario de Álgebra, CUCEI
20 de noviembre de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx
github.com/JCmonter

Investigación apoyada por SECIHTI-PROYECTO CBF2023-2024-2630

Contenido

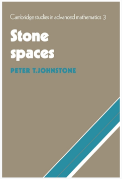
Un poco de historía

1968

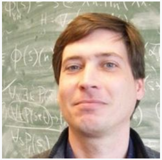
Un poco de historía

1982

1968



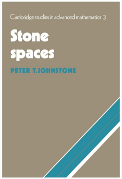
Un poco de historía



1982

1968

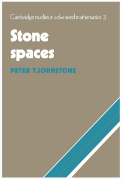
1996

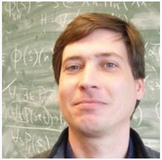


Un poco de historía

1968

1982



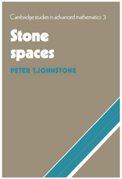


1996

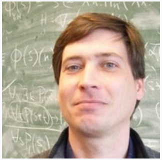
2000

Un poco de historía

1968



1982



1996

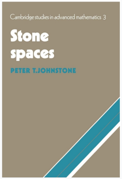
2000

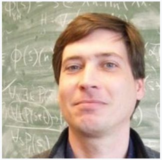
2013

Un poco de historía

1968

1982





1996

2000

2013

2024

Espacio de parches

Consideremos $S \in \mathsf{Top}$. Denotamos por ${}^{p}S = (S, \mathcal{O}^p S)$ al **espacio de parches** de S, donde $\mathcal{O}^p S$ está generado por

$$\mathrm{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^p S \longrightarrow \mathcal{O}^f S$$

Definición

S es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado) es cerrado

S es empaquetado $\iff$ ${}^{p}S = S$ y $T_2 \Rightarrow$ empaquetado $\Rightarrow T_1$

Teoría de marcos

$$\mathsf{Frm} = \begin{cases} \text{Obj :} & (A, \leqslant, \wedge, \bigvee, 1, 0) \\ \\ \text{Flechas:} & f\colon A \to B \end{cases}$$

Para $S \in \mathsf{Top}$,

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \mathsf{Frm}$$

Además,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{O}(\_)"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Frm} \arrow[ll, bend left, "\mathsf{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

es una adjunción.

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j\colon A \to A$. Decimos que j es un **núcleo** si para todo $a, b \in A$ se cumplen:

$$i)\ a \leqslant j(a) \quad ii)\ a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b) \quad iii)\ j^2(a) = j(a) \quad iv)\ j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

$NA = \{\text{núcleos en } A\}$.
Si $a \in A$, definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y $u_a, v_a, w_a \in NA$.

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f\colon A \to B$$

suprayectivo.

Sea $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$. Si $j \in NA$,

$$j\colon A \to A_j \text{ es suprayectivo} \quad \text{y} \quad A_j \in \mathsf{Frm}$$

A_j es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

Filtros

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro** si:

1. $1 \in F$.
2. Si $a \leqslant b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.
3. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

En particular, decimos que F es un **filtro abierto** si:

$$X \subseteq A \text{ dirigido tal que } \bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset.$$

$A^{\wedge} =$Filtros abiertos en A.

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma
$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$
2. Para $j, k \in NA$ definimos
$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$
3. Decimos que $f \in [\, j\,]$ es un **núcleo ajustado** si para todo $k \in [\, j\,], f \leqslant k$. Equivalentemente
$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee\{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}.$$

Axiomas de separación en Frm[2]

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{reg}) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{aju}) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl, dotted, no head] & (\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \arrow[d, Rightarrow] \\
(\mathbf{saju}) \arrow[r, dotted, no head] & T_1 & (\mathbf{H}) \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

---

[2] Para cualesquiera $a \not\leq b \in A$ tenemos que A es:
(reg) si $\exists\, x, y \in A$ tales que $a \vee x = 1$, $y \not\leq b$ y $x \wedge y = 0$.
(H) si $\exists\, c \in A$ tal que $c \not\leq a$ y $\neg c \leqslant b$.
(aju) si $\exists\, x, y \in A$ tales que $x \vee a = 1$, $y \not\leq b$ y $x \wedge y \leqslant b$.
(saju) si $\exists\, c \in A$ tal que $c \vee a = 1 \neq c \vee b$.
(fH) y T_1 son nociones algo diferentes. Todas estas pueden verse en [5].

El Teorema de Hoffman-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[1].
3. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si para todo $k \in [\, j\,]$ se tiene que $v_F \leqslant k$, donde

$$v_F = f^{\infty} \quad \text{y} \quad v_F \text{ es ajustado.}$$

Teorema [Hoffman-Mislove]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \operatorname{pt} A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y $F \in A^{\wedge}$.

[1] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

El Teorema de Hoffman-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[1].
3. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si para todo $k \in [\,j\,]$ se tiene que $v_F \leqslant k$, donde

$$v_F = f^{\infty} \quad \text{y} \quad v_F \text{ es ajustado.}$$

Teorema [Hoffman-Mislove (extendido)]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}\,A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y núcleos ajustados.

[1] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

Marco de parches

Consideremos $A \in \mathsf{Frm}$. Denotamos por PA al **marco de parches** de A, donde PA está generado por

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r] & NA \end{tikzcd}$$

Definición

A es **parche trivial** si y solo si $A \simeq PA$.

$$? \Rightarrow \text{ parche trivial } \Rightarrow T_1$$

El diccionario

Top

Frm

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase$=\{U\cap Q'\}$	

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase$= \{U \cap Q'\}$	• Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase= $\{U \cap Q'\}$	• Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
• Empaquetado (${}^{p}S = S$)	• Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$
${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	¿$PPA = PPPA$?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$
${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	¿$PPA = PPPA$?
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Eficiente?

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$
${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	¿$PPA = PPPA$?
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Eficiente?
Subespacios compactos cerrados	

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase= $\{U \cap Q'\}$	• Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
• Empaquetado (${}^{p}S = S$)	• Parche trivial ($PA \cong A$)
• $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	• $u_d = v_F$
• ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	• ¿$PPA = PPPA$?
• $T_2 \Rightarrow$Empaquetado	• ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Eficiente?
• Subespacios compactos cerrados	• Cocientes compactos cerrados.

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$
${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	¿$PPA = PPPA$?
T_2 $\Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H})$ $\Rightarrow$Eficiente?
Subespacios compactos cerrados	Cocientes compactos cerrados.

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d \vee x = 1$, donde
$$d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.
3. A es **eficiente** si es α-eficiente para algún $\alpha \in \mathsf{Ord}$.

Proposición [[8], Lema 8.2.2]

$$A \text{ es eficiente} \iff A \text{ es parche trivial.}$$

Propiedades de los marcos eficientes

Este es in resumen de las propiedades que Sexton menciona en [8]

- En el caso espacial ($A = \mathcal{O}S$),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}S \text{ es 0-eficiente} &\iff S = \emptyset \\
\mathcal{O}S \text{ es 1-eficiente} &\iff S \text{ is } T_2 \\
\mathcal{O}S \text{ es eficiente} &\iff S \text{ es empaquetado y apilado.}
\end{aligned}
$$

- Para $A \in \mathrm{Frm}$ arbitrario

$$
\begin{aligned}
A \text{ es } (\mathbf{reg}) &\Rightarrow A \text{ es eficiente} \\
A \text{ es } (\mathbf{aju}) &\Rightarrow A \text{ es eficiente} \\
A \text{ es eficiente } &\Rightarrow A \text{ es } T_1
\end{aligned}
$$

Más propiedades de los marcos eficientes

Proposición

Si $A \in \mathsf{Frm}$ es eficiente y $j \in NA$, entonces A_j es eficiente.

Demostración

- Tomamos $x \in F \in A_j^{\wedge}$ y $F \subseteq j_*[F] \in A^{\wedge}$.
- Para f^{∞} y f_j^{∞} como antes, tenemos

$$d = d(\alpha) \geqslant d_j(\alpha) = d_j$$

- Ya que A es eficiente, entonces $d_j \vee x = 1$, para todo $x \in j_*[F]$. En particular, para todo $x \in F$.
- Por lo tanto, $d \vee x = 1$.

□

Proposición

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de marcos eficientes, entonces $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es un marco eficiente.

Demostración

Sabemos que $\bigoplus A_i \in \mathsf{Frm}$ y $(\iota_i \colon A_i \to \bigoplus A_i) \in \mathit{Frm}$. Entonces

- Existe $(\iota_i)_*$ y para $F \in (\bigoplus A_i)^\wedge$, $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$.
- Consideramos $\sup\{\alpha_i\}$ como el grado de eficiencia de cada A_i.
- Por la eficiencia, si $x_i \in (\iota_i)_*[F]$, entonces $x_i \vee d_i = 1$.
- Consideramos $\langle x_i \rangle \in F$.
- Verificamos que $\langle d_i \rangle \leqslant f_F^\alpha(\iota_i(0)) = d(\alpha) = d$.
- Por lo tanto $\langle x_i \rangle \vee d = 1$.

$\square$

Corolario

Si A es $(\mathbf{fH})$, A es eficiente.

Demostración

Bajo $(\mathbf{fH})$ todos los cocientes compactos son cerrados. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{H}) \arrow[dr, Rightarrow, dotted] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{Eficiente} \\
 & (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Cocientes compactos

$$\text{Eficiente} \iff \text{P. trivial} \iff u_d = v_F$$

Notemos que

A_{u_d} es un cociente cerrado y A_{v_F} es un cociente compacto.

Si A es eficiente, tenemos un cociente compacto y cerrado.

Marcos KC

En [13], Wilansky menciona que $S \in$ Top es **KC** si cada subconjunto compacto es cerrado.

Definición

$A \in$ Frm es un **marco KC** si cada cociente compacto es cerrado.

$$\mathbf{KC} \Rightarrow \text{Eficiente}$$

Proposición

Si $A \in$ Frm es **KC** y $j \in NA$, entonces A_j es **KC**.

Demostración

- Consideramos $k \in NA_j$ tal que $\nabla(k) \in A_j^{\wedge}$.
- Si $\nabla(k) \in A_j^{\wedge} \Rightarrow j_*[\nabla(k)] \in A^{\wedge}$[3].
- Tomamos $l = j_* \circ k \circ j \in NA$ y $\nabla(l) \in A^{\wedge} \Rightarrow l = u_a$ para algún $a \in A$.
- Además $a = k(j(a))$.
- Para $x, b \in A_j$ con $b = j(a)$ tenemos $u_b(x) = k(x)$.

$\square$

[3] **Proposición:** Para $j \in NA$ y $k \in NA_j$. Si $\nabla(k) \in A_j^{\wedge}$, $\nabla(j_* k j) \in A^{\wedge}$.

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
 & & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $g = (U_A)_* \circ (v_\nabla)_{|A_F}$.

¿Qué pasa si A tiene la propiedad $(\mathbf{H})$?

Teorema

Sea A un marco con la propiedad $(\mathbf{H})$, entonces para cada $F \in A^{\wedge}$ y su correspondiente $Q \in \mathcal{Q}S$, tenemos

$$\mathcal{O}Q \simeq \uparrow Q',$$

es decir, el marco de abiertos del espacio de puntos de A_F es isomorfo a un cociente compacto y cerrado de un espacio Hausdorff.

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\operatorname{pt} NA \subseteq \operatorname{pt} PA$.
- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.
- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.
- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos α-eficientes.

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

- J. Paseka and B. Smarda, *T_2-frames and almost compact frames.* Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.

- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

Bibliografía III

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

- H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

Bibliografía IV

- H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.

- A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.