Modificaciones de parches y axiomas de separación en topología sin puntos

25 de julio de 2025

Juan Carlos Monter Cortés
Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi
Universidad de Guadalajara

El axioma T_2

T_2: Si $x, y \in S$ con $x \neq y$, $\exists\, U, V \in \mathcal{O}S$ tal que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Si S es T_2,

- Todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.
- El subespacio diagonal es cerrado.
- T_2+ compacto $\Rightarrow$ Regular.
- $\vdots$

Construcciones de parches

La construcción en Top:

- $S \in$ Top es empaquetado si y solo si $Q \in \mathcal{Q}S$ entonces $Q \in \mathcal{C}S$.
- ${}^{p}S \in$ Top es el espacio de parches con la topología generada por
$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S,\ Q \in \mathcal{Q}S\}.$$
- S es empaquetado si y solo si ${}^{p}S = S$.
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado $\Rightarrow T_1$.
- Si S es T_1, entonces ${}^{p}S = {}^{pp}S$.
- Si S es T_0, entonces ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

$$\mathcal{O}S \hookrightarrow \mathcal{O}^{p}S \hookrightarrow \mathcal{O}^{f}S$$

Para la "traducción"

Lo que necesitamos:

1. Núcleos
   - Núcleos abiertos
   - Núcleos cerrados
2. Filtros
   - Filtros abiertos
   - Filtros admisibles
3. El Teorema de Hoffman-Mislove

Construcciones de parches

La construcción en Frm:

- Para $A \in \mathsf{Frm}$, PA es el marco de parches y es generado por

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

- A es parche trivial si y solo si $A \simeq PA$.
- ¿Cuándo ocurre que $A \simeq PA$?
- ¿Cómo se comparta PA?

$$A \longrightarrow PA \hookrightarrow NA$$

¿Qué tanto se parece empaquetado y parche trivial?

Ejemplo

Sea $S = \mathbb{R}$ y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde $a, b \in S$. Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

Se puede verificar que

$$\mathcal{O}_l^p S = \mathcal{O}_m S \simeq P\mathcal{O}_l S \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_l^f S = \mathcal{O}_n S \simeq N\mathcal{O}_l S,$$

es decir,

$$\mathcal{O}_l S = A \to PA \hookrightarrow NA$$

El diagrama de parches

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "U_A"'] & PA \arrow[r, hook] \arrow[d, "PU_A"] & NA \arrow[d, "NU_A"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[dr] & P\mathcal{O}S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_S"] & N\mathcal{O}S \arrow[d, "\sigma_S"] \\
& \mathcal{O}^p S \arrow[r, hook] & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

- La construcción de parches es funtorial si para

  $$f\colon A \to B$$

  convierte filtros abiertos.
- U_A convierte filtros abiertos.

Marcos arreglados

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

- $F \in A^{\wedge}$ es α-arreglado si
$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1,$$
donde $d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$ y $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$
- A es α-arreglado si todo $F \in A^{\wedge}$ es α-arreglado.
- A es arreglado si A es α-arreglado para algún α.

Porpiedades de los marcos arreglados

- Arreglado $\Leftrightarrow$ Parche trivial.
- Regular $\Rightarrow$ Arreglado.
- Si A es arreglado $\Rightarrow S = \mathrm{pt}\, A$ es T_1.
- Si A es 1-arreglado $\Rightarrow S$ es T_2.
- $\mathcal{O}S$ es 1-arreglado $\Leftrightarrow S$ es T_2.
- $\mathcal{O}S$ es arreglado $\Leftrightarrow S$ es empaquetado y apilado.

¿Qué relación existe entre la propiedad arreglado y los distintas propiedades de separación que existe en Frm?

Axiomas de separación en Frm

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathbf{reg}) \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & & \\
(\mathbf{aju}) \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] \arrow[drrrr, dotted, no head] & & (\mathbf{fH}) \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] \arrow[dll, dotted, no head] & & (\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dllll, Rightarrow] \arrow[dll, dotted, no head] \\
(\mathbf{saju}) \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[drr, dotted, no head] & & T_U \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[d, Rightarrow] & & (\mathbf{H}) \arrow[dll, Rightarrow] \\
 & & T_1 & &
\end{tikzcd}
$$

Axiomas tipo Hausdorff

(**dH**) : Si $a \vee b = 1$, con $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**H**) : Si $1 \neq a \nleq b$ $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**Hp**) : Todo elemento semiprimo es máximo.

(**fH**) : El sublocal diagonal es cerrado.

En resumen...

Propiedad/Comportamiento	**C.**	1°	2°	**S. H.**	**C. S. E.**
$(\mathbf{dH})$	x	✓	x	x	x
$(\mathbf{H})$	✓	✓	x	✓	x
$(\mathbf{Hp})$	✓	✓	x	✓	?
$(\mathbf{fH})$	x	x	✓	✓	✓

S. H.= Suficientemente Huasdorff ($P \Rightarrow T_2$)
C.= Propiedad conservativa ($P \Leftrightarrow T_2$)
C. S. E.= Comportamiento similar al espacial

$$((\mathbf{H}) + \text{Compacto} \nRightarrow (\mathbf{reg}))$$

Otros objetivos

- Conocer la relación entre parche trivial y empaquetado.
- Ver el comportamiento de arreglado con respecto a los axiomas tipo Hausdorff.
- Desarrollar teoría que permita comprender la interacción entre las propiedades.
- Ver ejemplos.

Analizando *PA*

¿El marco de parches se comporta como el espacio de parches?

- PA, en general, no es T_1.
- Al no ser T_1 no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que T_1.
- ¿PA cumple (**saju**)?
- ¿Se cumple que $PA \simeq P^2A$?
- Se cumple que $P^2A \simeq P^3A$.

¿Qué pasa si el marco A cumple (**H**)?

- Si A es $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \mathrm{pt}\, A$ es T_2
- Si S es $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$ es 1-arreglado.
- Si $\mathcal{O}S$ es 1-arreglado $\Rightarrow \mathcal{O}S \simeq P\mathcal{O}S$.
- Si S es $T_2 \Rightarrow {}^pS = S$.
- Si ${}^pS = S \Rightarrow \mathcal{O}S = \mathcal{O}^pS$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, "U_A"'] & PA \arrow[r] \arrow[d, "PU_A"] & NA \arrow[d, "NU_A"] \\
 & \mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[dr] & N\mathcal{O}S \arrow[d, "\sigma_S"] \\
 & & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}$$

Marcos arreglados vs propiedades en Frm

Corolario

Si $A \in \mathsf{Frm}$ es espacial, entonces $\mathcal{O}S$ cumple $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow A$ es 1-arreglado.

Corolario

Todo marco ajustado es arreglado.

Proposición

Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.

Proposición

Si A es arreglado, A_j es arreglado para $j \in NA$.

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{aju}) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Arreglado} \\
(\mathbf{fH}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \\
(\mathbf{H}) \arrow[uur, Rightarrow, "?"'] &
\end{tikzcd}
$$

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Si $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Arreglado $\Leftrightarrow v_F \leqslant u_d$
- (**fH**) $\Leftrightarrow \forall j \in [v_F, w_F], j = u_\bullet$ y $\bullet \in A$.
- (**aju**) $\Leftrightarrow [v_F, w_F] = \{*\}$ y $* = u_\bullet$ para $\bullet \in A$.

Por el Teorema de Hoffman-Mislove

$$Q \in \mathcal{Q}S \leftrightarrow F \in A^{\wedge} \quad \text{y} \quad Q \in \mathcal{Q}S \leftrightarrow \nabla \in \mathcal{O}S^{\wedge}.$$

Además, $[v_Q, w_Q] \subseteq N\mathcal{O}S$ es un intervalo de admisibilidad.

Proposición

Con F y Q como antes, si j $\in [v_Q, w_Q]$*, entonces*

$$\nabla(U_* j U^*) = F$$

donde U^* *es la reflexión espacial y* U_* *es su adjunto derecho.*

Equivalentemente

$$\mho\colon [v_Q, w_Q] \to [v_F, w_F].$$

El Q-cuadrado

En [12] construyen el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\infty"] \arrow[d, "U_A"'] & A \arrow[d, "U_A"] \\ \mathcal{O}S \arrow[r, "F^\infty"'] & \mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

y prueban que $U_A \circ f^\infty \leqslant F^\infty \circ U_A$.
Si $j \in NA$, $\widehat{f}^\infty$ es el núcleo asociado al filtro $j_* F \in A^\wedge$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widehat{f}^\infty"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "j"] \\ A_j \arrow[r, "f^\infty"'] & A_j \end{tikzcd}$$

Proposición

Para j, f y $\widehat{f}$ como antes, se cumple que

1. $j \circ \widehat{f} \leqslant f \circ j$.
2. $j \circ \widehat{f}^{\infty} \leqslant f^{\infty} \circ j$.

Definiendo $H = f^{\infty} \circ j$ y $h = H_{|A_{j_* F}}$, obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widehat{f}^{\infty}"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "H"'] & A_{\widehat{f}^{\infty}} \arrow[d, "h"] \\ A_j \arrow[r, "f^{\infty}"'] & A_{f^{\infty}} \end{tikzcd} \tag{2}$$

Proposición

El diagrama (2) *es conmutativo.*

Consideremos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

¿Qué pasa si A cumple $(\mathbf{H})$?

Marcos *KC*

$S \in \mathsf{Top}$ es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Definición

$A \in \mathsf{Frm}$ *es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.*

Equivalentemente

$$A_F = u_d$$

para algún $d \in A$ y $F \in A^{\wedge}$.

Propiedades de los marcos KC

$$KC \Rightarrow \text{Arreglado}$$

Proposición

Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.

Proposición

Si A es KC, entonces A es T_1.

De hecho

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & KC \arrow[r, Rightarrow] & \text{Arreglado} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
& (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$ es una topología..

Propiedades de $\mathcal{O}S$

- $\mathcal{O}S$ es T_1.
- $\mathcal{O}S$ no es (**H**).
- $\mathcal{O}S$ es compacto.
- $\mathcal{O}S$ es (**aju**).
- $\mathcal{O}S$ es KC.
- $\mathcal{O}S$ es 2-arreglado.

El ejemplo de Paseka y Smarda

Consideremos $A \in \mathsf{Frm}$ y $A_r = \{a \in A \mid \neg\neg a = a\}$. Definimos

$$K(A) = \{(u, v) \mid u \in A,\ v \in A_r,\ u \leqslant v\}$$

$K(A) \in \mathsf{Frm}$.

Propiedades de $K(A)$

- Si A es $(\mathbf{H})$ y $\neg m = 0$ para m máximo, $K(A)$ es $(\mathbf{H})$.
- Si A es compacto, entonces $K(A)$ es compacto.
- $K(A)$ no es subajustado

De manera adicional, sea $A = [0, 1]$ con la topología usual. Entonces

- $\mathcal{O}I$ es $(\mathbf{H})$.
- $\mathcal{O}I$ es compacto.
- $K(\mathcal{O}I)$ es compacto y $(\mathbf{H})$.
- $K(\mathcal{O}I)$ no es subajustado.
- $K(\mathcal{O}I)$ no es espacial.

Existe marcos Hausdorr y compactos que no son espaciales.

Conclusiones

- Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea *US*.
- Conocer más sobre el comportamiento del marco de parches para niveles superiores.
- Verificar que (**H**) implica (o no) *KC* (o arreglado).
- Desarrollar ejemplos donde aparezcan las propiedades que están involucradas en la investigación.
- Explorar las posibilidades que brindan los intervalos de admisibilidad y el Q-cuadrado.

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

- J. Paseka and B. Smarda, *T_2-frames and almost compact frames.* Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

Bibliografía III

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.
- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.
- H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

Bibliografía IV

- H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.
- A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.
- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.