

# **Modificaciones de parches** y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

*21 de enero de 2026*

**Juan Carlos Monter Cortés**  
**Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi**  
Universidad de Guadalajara

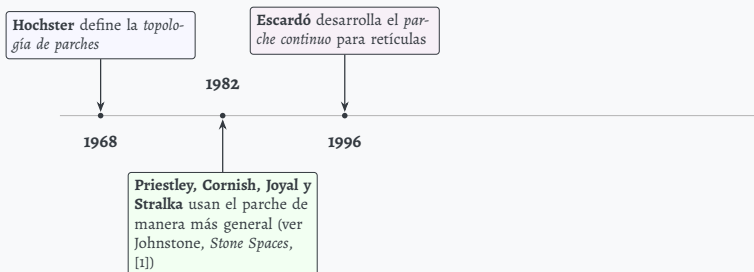
# La construcción de parches

### Hochster define la topología de parches

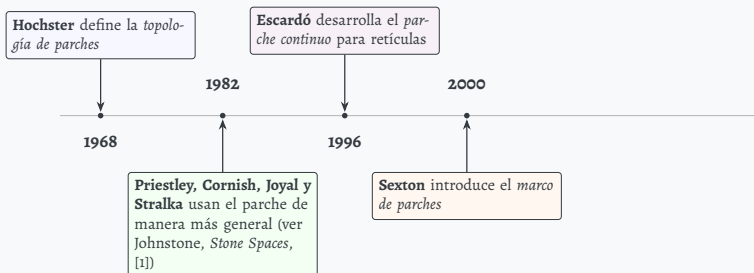
1968



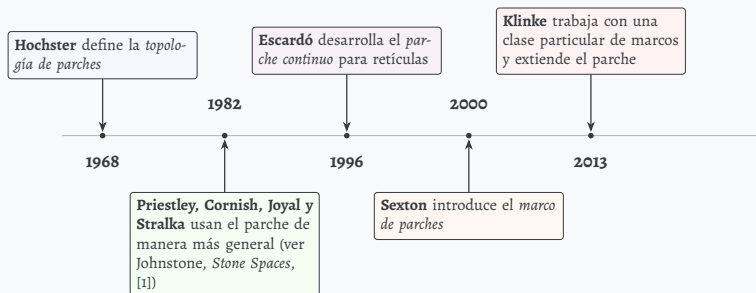
# La construcción de parches



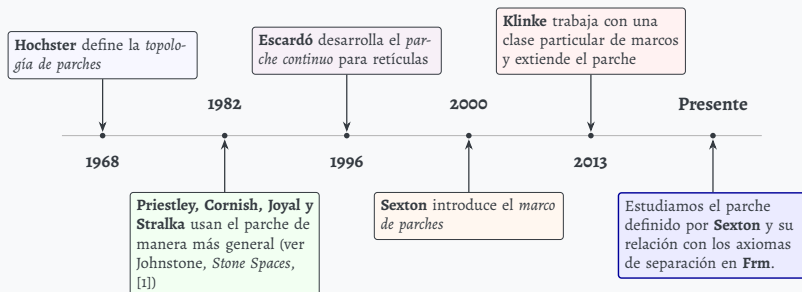
# La construcción de parches



# La construcción de parches



# La construcción de parches



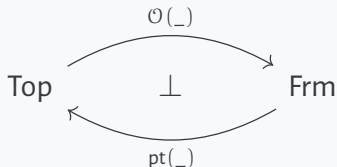
# Teoría de marcos

$$\text{Frm} = \begin{cases} \text{Obj :} & (A, \leq, \wedge, \vee, 1, 0) \\ \text{Flechas:} & f: A \rightarrow B \end{cases}$$

Para  $S \in \text{Top}$ ,

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \text{Frm}$$

Además,

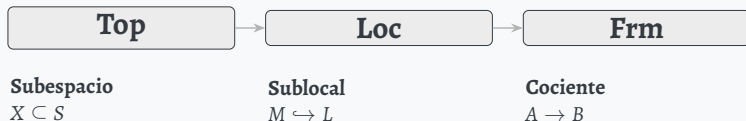


es una adjunción.



# La relación entre Top, Loc y Frm

$$\text{Loc} = \text{Frm}^{\text{op}} \quad \text{y} \quad f \in \text{Frm} \implies f_* \in \text{Loc}.$$



El estudio de los **cocientes** en Frm se realiza a través de los **núcleos**.

# Núcleos y cocientes

## Definición

Sea  $j: A \rightarrow A$ . Decimos que  $j$  es un **núcleo** si:

$$(N1) \quad a \leq j(a).$$

$$(N3) \quad j(j(a)) = j(a).$$

$$(N2) \quad \text{si } a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b).$$

$$(N4) \quad j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b).$$

$NA = \{\text{núcleos en } A\}$ . Para  $a \in A$ , definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y  $u_a, v_a, w_a \in NA$ .

---

°Recordemos que  $a \succ x = \bigvee \{c \in A \mid c \wedge a \leq x\}$ .

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

## Definición

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

Si  $j \in NA$  y  $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$ , entonces

$j^*: A \rightarrow A_j$ , dado por  $j^*(a) = j(a)$ , es suprayectivo y  $A_j \in \text{Frm}$ .

$A_j$  es el *marco cociente*.

## Definición

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

Si  $j \in NA$  y  $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$ , entonces

$j^*: A \rightarrow A_j$ , dado por  $j^*(a) = j(a)$ , es suprayectivo y  $A_j \in \text{Frm}$ .

$A_j$  es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

# Filtros

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Decimos que  $F \subseteq A$  es un **filtro** si:

1.  $1 \in F$ .
2. Si  $a \leq b$  y  $a \in F$ , entonces  $b \in F$ .
3. Si  $a, b \in F$ , entonces  $a \wedge b \in F$ .

# Filtros

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Decimos que  $F \subseteq A$  es un **filtro** si:

1.  $1 \in F$ .
2. Si  $a \leq b$  y  $a \in F$ , entonces  $b \in F$ .
3. Si  $a, b \in F$ , entonces  $a \wedge b \in F$ .

En particular, decimos que  $F$  es un **filtro abierto** si:

$$X \subseteq A \text{ dirigido tal que } \bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset.$$

$$A^\wedge = \text{Filtros abiertos en } A.$$

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $j \in \mathbf{NA}$ .

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$



# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in \text{NA}$ .

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para  $j, k \in \text{NA}$  definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

# Filtros de admisibilidad

## Definición

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para  $j, k \in NA$  definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que  $f$  es un **núcleo ajustado** si es el menor elemento de su bloque. Equivalentemente

$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee \{v_a \mid a \in A\}.$$

# El Teorema de Hofmann-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>1</sup>.
3.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $v_F = f_F^\infty$  es el menor núcleo que admite a  $F$

## *Teorema [Hofmann-Mislove]*

Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $S = \text{pt } A \in \text{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{QS}$  y  $F \in A^\wedge$ .

---

<sup>0</sup> $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$ .  $f_F^0 = \text{id}$ ,  $f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^\alpha)$  y  $f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ .

<sup>1</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# El Teorema de Hofmann-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>1</sup>.
3.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $v_F = f_F^\infty$  es el menor núcleo que admite a  $F$

## *Teorema [Hofmann-Mislove-Johnstone]*

Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $S = \text{pt } A \in \text{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{QS}$  y núcleos ajustados.

---

${}^\circ f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$ .  $f_F^\circ = \text{id}$ ,  $f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^\alpha)$  y  $f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ .

<sup>1</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# El Teorema de Hofmann-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>1</sup>.
3.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $v_F = f_F^\infty$  es el menor núcleo que admite a  $F$

## *Teorema [Hofmann-Mislove-Johnstone]*

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $S = \mathbf{pt} A \in \mathbf{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{QS}$  y núcleos ajustados.

$$Q \longleftrightarrow F \longleftrightarrow v_F$$

---

<sup>0</sup> $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$ .  $f_F^\circ = id$ ,  $f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^\alpha)$  y  $f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ .

<sup>1</sup> $A \in \mathbf{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# Espacio de parches

Consideremos  $S \in \text{Top}$ . Denotamos por  ${}^pS = (S, \mathcal{O}^p S)$  al **espacio de parches** de  $S$ , donde  $\mathcal{O}^p S$  está generado por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^p S$$

## Definición

$S$  es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado<sup>2</sup>) es cerrado

$S$  es empaquetado  $\iff {}^pS = S$     y     $T_2 \Rightarrow \text{empaquetado} \Rightarrow T_1$

---

<sup>2</sup> $E \subseteq S$  es saturado si  $E = \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$ .

# Marco de parches

Consideremos  $A \in \text{Frm}$ . Denotamos por  $PA$  al **marco de parches** de  $A$ , donde  $PA$  está generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}$$

$$\begin{array}{c}
 \eta_A \\
 \curvearrowright \\
 A \longrightarrow PA \longrightarrow NA
 \end{array}
 \qquad
 \eta_A(a) = u_a$$

## Definición

$A$  es **parche trivial** si y solo si  $A \cong PA$ .

$$? \Rightarrow \text{parche trivial} \Rightarrow T_1$$

**¿Cuándo ocurre que  $A \cong PA$ ?**

# El diccionario

Top

Frm



# El diccionario

Top

Frm

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( $^pS$ )

Frm

- Marco de parches ( $PA$ )

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- $\text{pbase} = \{U \cap Q'\}$

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{QS} \Rightarrow Q \in \mathcal{CS}$

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{QS} \Rightarrow Q \in \mathcal{CS}$

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$



# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- $\text{pbase} = \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{QS} \Rightarrow Q \in \mathcal{CS}$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- $\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{QS} \Rightarrow Q \in \mathcal{CS}$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿ $PPA = PPPA$ ?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{QS} \Rightarrow Q \in \mathcal{CS}$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿ $PPA = PPPA$ ?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{QS} \Rightarrow Q \in \mathcal{CS}$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- $\dot{?}PPA = PPPA?$
- $\dot{?}(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿ $PPA = PPPA$ ?
- ¿ $(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿ $PPA = PPPA$ ?
- ¿ $(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^pS$ )
- $\text{pbase} = \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^pS = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado}$
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches ( $PA$ )
- $\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- $\zeta PPA = PPPA?$
- $\zeta(\mathbf{H}) \Rightarrow \text{Parche trivial?}$
- **Cocientes compactos cerrados.**

# Marcos eficientes

*Definición* [[8], Def. 8.2.1]

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:



# Marcos eficientes

## *Definición [[8], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  $\alpha$ -**eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

# Marcos eficientes

## *Definición* [[8], Def. 8.2.1]

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  $\alpha$ -**eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

2.  $A$  es  $\alpha$ -**eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.

# Marcos eficientes

## *Definición* [[8], Def. 8.2.1]

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  $\alpha$ -**eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

2.  $A$  es  $\alpha$ -**eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.
3.  $A$  es **eficiente** si es  $\alpha$ -eficiente para algún  $\alpha \in \text{Ord}$ .

# Marcos eficientes

## *Definición [[8], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  $\alpha$ -**eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

2.  $A$  es  $\alpha$ -**eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.
3.  $A$  es **eficiente** si es  $\alpha$ -eficiente para algún  $\alpha \in \text{Ord}$ .

## *Proposición [[8], Lema 8.2.2]*

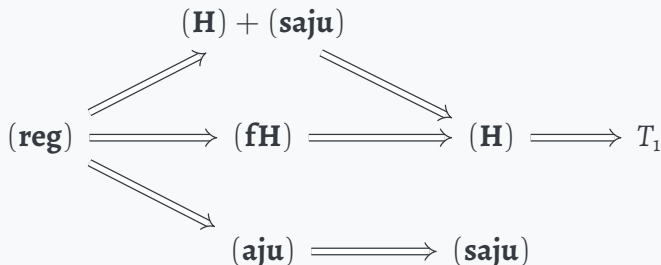
$$A \text{ es eficiente} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ es parche trivial.}$$

# Axiomas de separación en Frm

Para cualesquiera  $a \not\leq b \in A$  tenemos que  $A$  es:

- **(reg)**: si  $\exists x, y \in A$  tales que  $a \vee x = 1, y \not\leq b$  y  $x \wedge y = 0$ .
- **(H)**: si  $\exists c \in A$  tal que  $c \not\leq a$  y  $\neg c \leq b$ .
- **(aju)**: si  $\exists x, y \in A$  tales que  $x \vee a = 1, y \not\leq b$  y  $x \wedge y \leq b$ .
- **(saju)**: si  $\exists c \in A$  tal que  $c \vee a = 1 \neq c \vee b$ .
- **(fH)**: si el sublocal diagonal es cerrado.
- $T_1$ : si  $p \in \text{pt } A$ ,  $p$  es máximo.

# Axiomas de separación en Frm



**¿Qué relación existe entre los axiomas de separación y los marcos eficientes?**

# Propiedades de los marcos eficientes

Este es in resumen de las propiedades que Sexton menciona en [8]

- En el caso espacial ( $A = \mathcal{O}S$ ),

$$\mathcal{O}S \text{ es } 0\text{-eficiente} \iff S = \emptyset$$

$$\mathcal{O}S \text{ es } 1\text{-eficiente} \iff S \text{ is } T_2$$

$$\mathcal{O}S \text{ es eficiente} \iff S \text{ es empaquetado y apilado.}$$

- Para  $A \in \text{Frm}$  arbitrario

$$A \text{ es } (\mathbf{reg}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}$$

$$A \text{ es eficiente} \Rightarrow A \text{ es } T_1$$

$$A \text{ es } (\mathbf{aju}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}$$

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .



# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología connumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología connumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

1-eficiente  $\nRightarrow$  (**reg**)

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología connumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

1-eficiente  $\nRightarrow$  (**reg**)

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

2-eficiente  $\nRightarrow$  (**H**)

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

1-eficiente  $\nRightarrow$  (**reg**)

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

2-eficiente  $\nRightarrow$  (**H**)

- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos  $\omega$ -eficientes.

$\omega$ -eficiente  $\nRightarrow$   $n$ -eficiente para algún  $n \in \mathbb{N}$

# Objetivos

**Objetivo principal:** Establecer la eficiencia como un axioma de separación libre de puntos.

**Objetivos específicos:**

1. Comprender la noción de eficiencia con mayor detalle.
2. Analizar el comportamiento del parche libre de puntos
3. Explorar su relación con algunos axiomas de separación en  $\text{Frm}$ .
4. Investigar nociones libres de puntos y sensibles de puntos relacionadas con la eficiencia.
5. Desarrollar herramientas que permitan el estudio de los marcos eficientes.
6. Construir ejemplos que ilustren el comportamiento de los marcos eficientes y del marco de parches.

# ¿Qué significa $u_d = v_F$ ?

Para  $f = \bigvee \{v_a \mid a \in F\} \notin NA$  y tomamos

$$f^0 = \text{id}, \quad f^{\alpha+1} = f(f^\alpha), \quad f^\lambda = \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Consideramos  $v_F = f^\infty \in NA$ . Entonces

- Si  $d = v_F(o) \Rightarrow u_d \leq v_F$
- Si  $x \in F$  tal que  $u_d(x) = x \vee d = 1 \Rightarrow v_F \leq u_d$
- Bajo eficiencia obtenemos  $F = \nabla(u_d)$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1—Eficiente  $\Rightarrow$  2—Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ —Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$



# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1—Eficiente  $\Rightarrow$  2—Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ —Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

## *Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1—Eficiente  $\Rightarrow$  2—Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ —Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

## *Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

1. Si  $j \leq k$ , entonces  $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1—Eficiente  $\Rightarrow$  2—Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ —Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

## *Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

1. Si  $j \leq k$ , entonces  $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ .
2. Si  $j$  es ajustado, se cumple que

$$j \leq k \iff \nabla(j) \subseteq \nabla(k).$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\
 &\Rightarrow v_F \leq u_{d(1)} \\
 &\Rightarrow v_F(\circ) = d(\infty) \leq u_{d(1)} = d(1). \\
 &\Rightarrow d(\infty) = d(1).
 \end{aligned}$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned}
 u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\
 &\Rightarrow v_F \leq u_{d(1)} \\
 &\Rightarrow v_F(o) = d(\infty) \leq u_{d(1)} = d(1). \\
 &\Rightarrow d(\infty) = d(1).
 \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leq u_d \leq v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leq u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(0) = d(\infty) \leq u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leq u_d \leq v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Por lo tanto  $\nabla(u_{d(1)}) = F$ .



*Observaciones:*

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto  $F$ , proporciona un cociente compacto cerrado.

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto  $F$ , proporciona un cociente compacto cerrado.
- Entre más grande es el grado de eficiencia, más lejos está el marco de ser Hausdorff.

# Algunos resultados

Si  $(f: A \rightarrow B) \in \text{Frm}$ ,  $G \subseteq A$  y  $F \subseteq B$  son filtros, entonces

$$b \in f[G] \iff f_*(b) \in G \quad \text{y} \quad a \in f_*[F] \iff f(a) \in F.$$

También, si  $F \in B^\wedge$ , entonces  $f_*(F) \in A^\wedge$ .

## Proposición

Para  $f^\infty$  y  $f_j^\infty$  los núcleos asociados a  $F \in A_j^\wedge$  y  $j_*F \in A^\wedge$ , respectivamente, tenemos que

$$j \circ f_j^\infty \leq f^\infty \circ j$$

## Demostración

Por inducción transfinita.



# Más propiedades de los marcos eficientes

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  es eficiente y  $j \in NA$ , entonces  $A_j$  es eficiente.

## *Demostración*

- Tomamos  $x \in F \in A_j^\wedge$  y  $F \subseteq j_*[F] \in A^\wedge$ .
- Ya que  $A$  es eficiente, entonces  $d \vee x = 1$ , para todo  $x \in j_*[F]$ .  
En particular, para todo  $x \in F$ .
- Para  $f^\infty$  y  $f_j^\infty$  como antes, tenemos

$$d = d(\alpha) \leq d_j(\alpha) = d_j$$

- Por lo tanto,  $d_j \vee x = 1$ .



## Proposición

Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de marcos eficientes, entonces  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  es un marco eficiente.

## Demostración

Sabemos que  $\bigoplus A_i \in \text{Frm}$  y  $(\iota_i: A_i \rightarrow \bigoplus A_i) \in \text{Frm}$ . Entonces

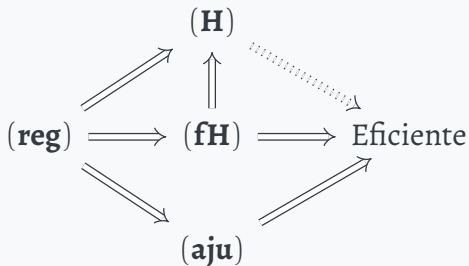
- Existe  $(\iota_i)_*$  y para  $F \in (\bigoplus A_i)^\wedge$ ,  $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$ .
- Consideramos  $\alpha = \sup\{\alpha_i\}$  como el grado de eficiencia de cada  $A_i$ .
- Por la eficiencia, si  $x_i \in (\iota_i)_*[F]$ , entonces  $x_i \vee d_i = 1$ .
- Consideramos  $\langle x_i \rangle \in F$ .
- Verificamos que  $\langle d_i \rangle \leq f_F^\alpha(\iota_i(o)) = d(\alpha) = d$ .
- Por lo tanto  $\langle x_i \rangle \vee d = 1$ .





## Corolario

Si  $A$  es  $(\mathbf{fH})$ ,  $A$  es eficiente.



# Cocientes compactos

$$\text{Eficiente} \iff \text{P. trivial} \iff u_d = v_F$$

Notemos que

$A_{u_d}$  es un cociente cerrado    y     $A_{v_F}$  es un cociente compacto.

Si  $A$  es eficiente, tenemos un cociente compacto y cerrado.

En [13], Wilansky menciona que  $S \in \text{Top}$  es **KC** si cada subconjunto compacto es cerrado.

# Marcos KC

## *Definición*

$A \in \text{Frm}$  es un **marco KC** si cada cociente compacto es cerrado.

**KC**  $\Rightarrow$  Eficiente

**¿Existen marcos que son eficientes y no son KC?**

## *Proposición:*

Para  $j \in NA$  y  $k \in NA_j$ . Si  $\nabla(k) \in A_j^\wedge$ ,  $\nabla(j_*kj) \in A^\wedge$ .

## Proposición

Si  $A \in \text{Frm}$  es **KC** y  $j \in NA$ , entonces  $A_j$  es **KC**.

## Demostración

- Consideramos  $k \in NA_j$  tal que  $\nabla(k) \in A_j^\wedge$ .
- Si  $\nabla(k) \in A_j^\wedge \Rightarrow j_*[\nabla(k)] \in A^\wedge$ .
- Tomamos  $l = j_* \circ k \circ j \in NA$  y  $\nabla(l) \in A^\wedge \Rightarrow l = u_a$  para algún  $a \in A$ .
- Además  $a = k(j(a))$ .
- Para  $x, b \in A_j$  con  $b = j(a)$  tenemos  $u_b(x) = k(x)$ .



## Definición:

1. Para  $\mathcal{P}$  una propiedad que satisface  $A \in \text{Frm}$  decimos que  $\mathcal{P}$  es conservativa si  $S = \text{pt } A$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}_s$ .
  2. Para  $\mathcal{P}_s$  una propiedad que satisface  $S \in \text{Top}$  decimos que  $\mathcal{P}_s$  es conservativa si  $A = \mathcal{O}S$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ .
- $(\mathbf{reg})$ ,  $(\mathbf{H})$ , y  $T_1$  son conservativas.
  - $(\mathbf{fH})$  no es conservativa ( $T_2 \not\Rightarrow (\mathbf{fH})$ ).
  - Eficiente no es conservativa (empaquetado  $\not\Rightarrow$  eficiente).
  - En el caso espacial,  $\mathbf{KC}$  =empaquetado.

Podemos construir el diagrama (ver [12])

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$A$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

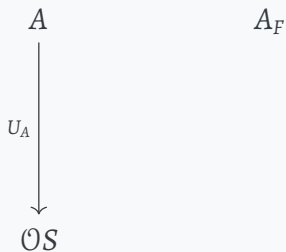
$$A$$
$$\mathcal{OS}$$



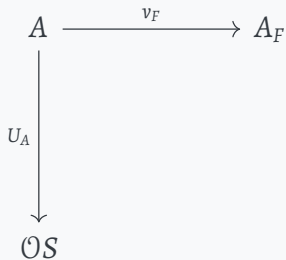
Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\
 \downarrow U_A & & \\
 \mathcal{O}S & & \mathcal{O}S_{\nabla}
 \end{array}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\
 \downarrow U_A & & \\
 \mathcal{O}S & \xrightarrow{v_{\nabla}} & \mathcal{O}S_{\nabla}
 \end{array}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

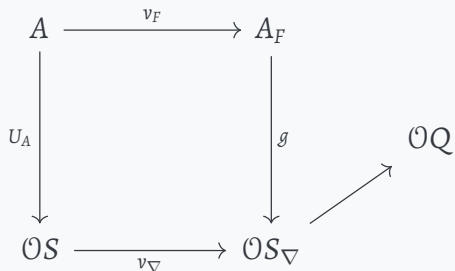
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\ \downarrow U_A & & \downarrow g \\ \mathcal{O}S & \xrightarrow{v_{\nabla}} & \mathcal{O}S_{\nabla} \end{array}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\
 U_A \downarrow & & \downarrow g \\
 \mathcal{O}S & \xrightarrow{v_\nabla} & \mathcal{O}S_\nabla
 \end{array}$$

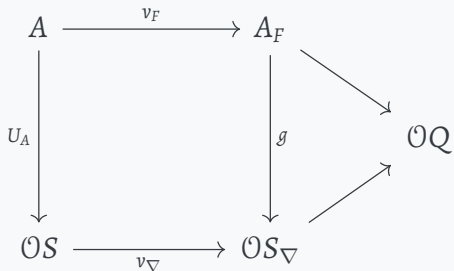
$\mathcal{O}Q$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

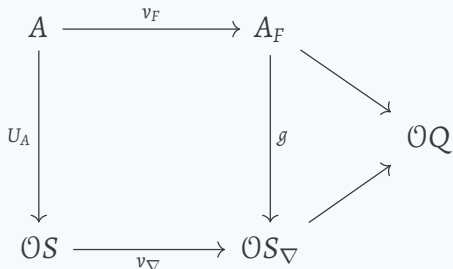




Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])



donde  $g = (U_A)_* \circ (v_\nabla)|_{A_F}$ .

¿Qué pasa si  $A$  tiene la propiedad **(H)**?

## Teorema

Sea  $A$  un marco con la propiedad **(H)**, entonces para cada  $F \in A^\wedge$  y su correspondiente  $Q \in \mathcal{Q}S$ , tenemos

$$\mathcal{O}Q \simeq \uparrow Q',$$

es decir, el marco de abiertos del espacio de puntos de  $A_F$  es isomorfo a un cociente compacto y cerrado de un espacio Hausdorff.

# Cronograma de actividades (Al inicio)

Cronograma de actividades								
Actividades	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Revisión de bibliografía	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Lectura de artículos	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Generar de conjeturas		✓	✓	✓	✓	✓		
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

# Cronograma de actividades (Particular)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Aprender sobre construcciones de parches	✓	✓	✓					
Aprender sobre axiomas de separación	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Entender ejemplos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Consultar fuentes alternativas		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Desarrollar teoría			✓	✓	✓	✓	✓	
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

# Cronograma de actividades (2da mitad)

Cronograma de actividades				
Actividades	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Consultar fuentes bibliográficas	✓	✓	✓	
Proponer conjeturas	✓	✓	✓	✓
Validación y rechazo de conjeturas	✓	✓	✓	✓
Redacción y presentación de artículos	✓	✓	✓	✓
Escritura de la tesis	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones	✓	✓	✓	✓
Sustentación				✓

# Cosas por hacer

- Obtener un ejemplo de marco eficiente que no sea KC.
- Probar que los marcos KC son cerrados bajo coproductos.
- Dar la noción libre de puntos de apilado y fuertemente apilado.
- Establecer las condiciones necesarias y suficientes para relacionar eficiencia con  $(\mathbf{H})$ .
- $\vdots$

# Bibliografía I



P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074



J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.







J. Paseka and B. Smarda,  $T_2$ -frames and almost compact frames. Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.



J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.



# Bibliografía II

-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
-  RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
-  RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

# Bibliografía III



H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons>.



H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*. Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.



H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

# Bibliografía IV



H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/hsimmons>.



A. Wilansky, *Between  $T_1$  and  $T_2$* , MONTHLY (1967): 261-266.



A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.