Modificaciones de parches
y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

21 de enero de 2026

Juan Carlos Monter Cortés
Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi
Universidad de Guadalajara

La construcción de parches

Hochster define la *topología de parches*

1968

La construcción de parches

Hochster define la *topología de parches*

1968

1982

Priestley, Cornish, Joyal y Stralka usan el parche de manera más general (ver Johnstone, *Stone Spaces*, [1])

La construcción de parches

1968

Hochster define la *topología de parches*

1982

Priestley, Cornish, Joyal y Stralka usan el parche de manera más general (ver Johnstone, *Stone Spaces*, [1])

1996

Escardó desarrolla el *parche continuo* para retículas

La construcción de parches

1968: **Hochster** define la *topología de parches*

1982: **Priestley, Cornish, Joyal y Stralka** usan el parche de manera más general (ver Johnstone, *Stone Spaces*, [1])

1996: **Escardó** desarrolla el *parche continuo* para retículas

2000: **Sexton** introduce el *marco de parches*

La construcción de parches

1968 — **Hochster** define la *topología de parches*

1982 — **Priestley, Cornish, Joyal y Stralka** usan el parche de manera más general (ver Johnstone, *Stone Spaces*, [1])

1996 — **Escardó** desarrolla el *parche continuo* para retículas

2000 — **Sexton** introduce el *marco de parches*

2013 — **Klinke** trabaja con una clase particular de marcos y extiende el parche

La construcción de parches

- **1968** — **Hochster** define la *topología de parches*
- **1982** — **Priestley, Cornish, Joyal y Stralka** usan el parche de manera más general (ver Johnstone, *Stone Spaces*, [1])
- **1996** — **Escardó** desarrolla el *parche continuo* para retículas
- **2000** — **Sexton** introduce el *marco de parches*
- **2013** — **Klinke** trabaja con una clase particular de marcos y extiende el parche
- **Presente** — Estudiamos el parche definido por **Sexton** y su relación con los axiomas de separación en **Frm**.

Teoría de marcos

$$\mathsf{Frm} = \begin{cases} \text{Obj}: & (A, \leqslant, \wedge, \bigvee, 1, 0) \\ \\ \text{Flechas}: & f \colon A \to B \end{cases}$$

Para $S \in \mathsf{Top}$,

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \mathsf{Frm}$$

Además,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{O}(\_)"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Frm} \arrow[ll, bend left, "\mathsf{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

es una adjunción.

La relación entre Top, Loc y Frm

$$\mathsf{Loc} = \mathsf{Frm}^{\mathrm{op}} \qquad \text{y} \qquad f \in \mathsf{Frm} \implies f_* \in \mathsf{Loc}\,.$$

Top → **Loc** → **Frm**

Subespacio
$X \subseteq S$

Sublocal
$M \hookrightarrow L$

Cociente
$A \to B$

El estudio de los **cocientes** en Frm se realiza a través de los **núcleos**.

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j\colon A \to A$. Decimos que j es un **núcleo** si:

(N1) $a \leqslant j(a)$.

(N2) si $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$.

(N3) $j(j(a)) = j(a)$.

(N4) $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$.

$NA = \{$núcleos en $A\}$. Para $a \in A$, definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y $u_a, v_a, w_a \in NA$.

°Recordemos que $a \succ x = \bigvee\{c \in A \mid c \wedge a \leqslant x\}$.

Definición

Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f\colon A \to B$$

suprayectivo.

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f : A \to B$$

suprayectivo.

Si $j \in NA$ y $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$, entonces

$j^* : A \to A_j,$ dado por $j^*(a) = j(a),$ es suprayectivo y $A_j \in \mathsf{Frm}$.

A_j es el *marco cociente*.

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f \colon A \to B$$

suprayectivo.

Si $j \in NA$ y $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$, entonces

$j^* \colon A \to A_j,$ dado por $j^*(a) = j(a),$ es suprayectivo y $A_j \in \mathsf{Frm}$.

A_j es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

Filtros

Definición

Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro** si:

1. $1 \in F$.
2. Si $a \leqslant b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.
3. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

Filtros

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro** si:

1. $1 \in F$.
2. Si $a \leqslant b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.
3. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

En particular, decimos que F es un **filtro abierto** si:

$$X \subseteq A \text{ dirigido tal que } \bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset.$$

$A^{\wedge} =$Filtros abiertos en A.

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para $j, k \in NA$ definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma
$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$
2. Para $j, k \in NA$ definimos
$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$
3. Decimos que f es un **núcleo ajustado** si es el menor elemento de su bloque. Equivalentemente
$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee\{v_a \mid a \in A\}.$$

El Teorema de Hofmann-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[1].
3. $F \in A^{\wedge}$ si y solo $v_F = f_F^{\infty}$ es el menor núcleo que admite a F

Teorema [Hofmann-Mislove]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}\, A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y $F \in A^{\wedge}$.

---

[0] $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$. $f_F^{0} = id$, $f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^{\alpha})$ y $f_F^{\lambda} = \bigvee\{f_F^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}$.

[1] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

El Teorema de Hofmann-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[1].
3. $F \in A^{\wedge}$ si y solo $v_F = f_F^{\infty}$ es el menor núcleo que admite a F

Teorema [Hofmann-Mislove-Johnstone]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \mathsf{pt}\, A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y núcleos ajustados.

---

[0] $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$. $f_F^{0} = id, f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^{\alpha})$ y $f_F^{\lambda} = \bigvee\{f_F^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}$.

[1] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

El Teorema de Hofmann-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[1].
3. $F \in A^{\wedge}$ si y solo $v_F = f_F^{\infty}$ es el menor núcleo que admite a F

Teorema [Hofmann-Mislove-Johnstone]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}\, A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y núcleos ajustados.

$$Q \longleftrightarrow F \longleftrightarrow v_F$$

[0] $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$. $f_F^{0} = id, f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^{\alpha})$ y $f_F^{\lambda} = \bigvee\{f_F^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}$.
[1] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

Espacio de parches

Consideremos $S \in \mathsf{Top}$. Denotamos por ${}^pS = (S, \mathcal{O}^pS)$ al **espacio de parches** de S, donde $\mathcal{O}^pS$ está generado por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^pS$$

Definición

S es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado[2]) es cerrado

$$S \text{ es empaquetado} \iff {}^pS = S \quad \text{y} \quad T_2 \Rightarrow \text{empaquetado} \Rightarrow T_1$$

[2] $E \subseteq S$ es *saturado* si $E = \bigcap\{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$.

Marco de parches

Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$. Denotamos por PA al **marco de parches** de A, donde PA está generado por

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r] & NA \end{tikzcd} \qquad \eta_A(a) = u_a$$

Definición

A es **parche trivial** si y solo si $A \cong PA$.

$$? \Rightarrow \text{ parche trivial } \Rightarrow T_1$$

¿Cuándo ocurre que $A \cong PA$?

El diccionario

Top

Frm

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (^{p}S)	

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)

Frm

- Marco de parches (PA)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase$= \{U \cap Q'\}$	• Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
• Empaquetado (${}^{p}S = S$)	• Parche trivial ($PA \cong A$)
• $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	• $u_d = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$
${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	¿$PPA = PPPA$?
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$
${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	¿$PPA = PPPA$?
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?
Subespacios compactos cerrados	Cocientes compactos cerrados.

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d \vee x = 1$, donde

$$d := d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d \vee x = 1$, donde
$$d := d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d \vee x = 1$, donde
$$d := d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.
3. A es **eficiente** si es α-eficiente para algún $\alpha \in \mathsf{Ord}$.

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d \vee x = 1$, donde
$$d := d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.
3. A es **eficiente** si es α-eficiente para algún $\alpha \in \mathsf{Ord}$.

Proposición [[8], Lema 8.2.2]

$$A \text{ es eficiente} \iff A \text{ es parche trivial.}$$

Axiomas de separación en Frm

Para cualesquiera $a \nleq b \in A$ tenemos que A es:

- **(reg):** si $\exists\, x, y \in A$ tales que $a \vee x = 1$, $y \nleq b$ y $x \wedge y = 0$.
- **(H):** si $\exists\, c \in A$ tal que $c \nleq a$ y $\neg c \leqslant b$.
- **(aju):** si $\exists\, x, y \in A$ tales que $x \vee a = 1$, $y \nleq b$ y $x \wedge y \leqslant b$.
- **(saju):** si $\exists\, c \in A$ tal que $c \vee a = 1 \neq c \vee b$.
- **(fH):** si el sublocal diagonal es cerrado.
- T_1 : si $p \in \operatorname{pt} A$, p es máximo.

Axiomas de separación en Frm

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{H}) \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
 & (\mathbf{aju}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{saju}) &
\end{tikzcd}$$

¿Qué relación existe entre los axiomas de separación y los marcos eficientes?

Propiedades de los marcos eficientes

Este es in resumen de las propiedades que Sexton menciona en [8]

- En el caso espacial ($A = \mathcal{O}S$),

$$\begin{aligned} \mathcal{O}S \text{ es 0-eficiente} &\iff S = \emptyset \\ \mathcal{O}S \text{ es 1-eficiente} &\iff S \text{ is } T_2 \\ \mathcal{O}S \text{ es eficiente} &\iff S \text{ es empaquetado y apilado.} \end{aligned}$$

- Para $A \in \mathrm{Frm}$ arbitrario

$$\begin{aligned} A \text{ es } (\mathbf{reg}) &\Rightarrow A \text{ es eficiente} \\ A \text{ es eficiente} &\Rightarrow A \text{ es } T_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{A \text{ es } (\mathbf{aju}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}}$$

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\operatorname{pt} NA \subseteq \operatorname{pt} PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

$$\text{1-eficiente} \not\Rightarrow (\textbf{reg})$$

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

$$\text{1-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{reg})$$

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

$$\text{2-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{H})$$

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

$$1\text{-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{reg})$$

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

$$2\text{-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{H})$$

- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos ω-eficientes.

$$\omega\text{-eficiente} \not\Rightarrow n\text{-eficiente para algún } n \in \mathbb{N}$$

Objetivos

Objetivo principal: Establecer la eficiencia como un axioma de separación libre de puntos.

Objetivos específicos:

1. Comprender la noción de eficiencia con mayor detalle.
2. Analizar el comportamiento del parche libre de puntos
3. Explorar su relación con algunos axiomas de separación en Frm.
4. Investigar nociones libres de puntos y sensibles de puntos relacionadas con la eficiencia.
5. Desarrollar herramientas que permitan el estudio de los marcos eficientes.
6. Construir ejemplos que ilustren el comportamiento de los marcos eficientes y del marco de parches.

¿Qué significa $u_d = v_F$?

Para $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\} \notin NA$ y tomamos

$$f^0 = \mathrm{id}, \quad f^{\alpha+1} = f(f^\alpha), \quad f^\lambda = \bigvee\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Consideramos $v_F = f^\infty \in NA$. Entonces

- Si $d = v_F(0) \Rightarrow u_d \leqslant v_F$
- Si $x \in F$ tal que $u_d(x) = x \vee d = 1 \Rightarrow v_F \leqslant u_d$
- Bajo eficiencia obtenemos $F = \nabla(u_d)$.

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

Proposición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j, k \in NA$.

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

Proposición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j, k \in NA$.

1. Si $j \leqslant k$, entonces $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$.

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

Proposición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j, k \in NA$.

1. Si $j \leqslant k$, entonces $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$.
2. Si j es ajustado, se cumple que

$$j \leqslant k \iff \nabla(j) \subseteq \nabla(k).$$

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

.

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- *Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,*

.

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 \Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ \Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ \Rightarrow v_F(0) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ \Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

.

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 \Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ \Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ \Rightarrow v_F(0) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ \Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

.

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 \Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ \Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ \Rightarrow v_F(0) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ \Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

  Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Por lo tanto $\nabla(u_{d(1)}) = F$.

Observaciones:

Observaciones:

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.

Observaciones:

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.

Observaciones:

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto F, proporciona un cociente compacto cerrado.

Observaciones:

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto F, proporciona un cociente compacto cerrado.
- Entre más grande es el grado de eficiencia, más lejos está el marco de ser Hausdorff.

Algunos resultados

Si $(f : A \to B) \in \mathsf{Frm}$, $G \subseteq A$ y $F \subseteq B$ son filtros, entonces

$$b \in f[G] \iff f_*(b) \in G \quad \text{y} \quad a \in f_*[F] \iff f(a) \in F.$$

También, si $F \in B^\wedge$, entonces $f_*(F) \in A^\wedge$.

Proposición

Para f^∞ y f_j^∞ los núcleos asociados a $F \in A_j^\wedge$ y $j_*F \in A^\wedge$, respectivamente, tenemos que

$$j \circ f_j^\infty \leqslant f^\infty \circ j$$

Demostración

Por inducción transfinita. $\square$

Más propiedades de los marcos eficientes

Proposición

Si $A \in \mathsf{Frm}$ es eficiente y $j \in NA$, entonces A_j es eficiente.

Demostración

- Tomamos $x \in F \in A_j^{\wedge}$ y $F \subseteq j_*[F] \in A^{\wedge}$.
- Ya que A es eficiente, entonces $d \vee x = 1$, para todo $x \in j_*[F]$. En particular, para todo $x \in F$.
- Para f^{∞} y f_j^{∞} como antes, tenemos

$$d = d(\alpha) \leqslant d_j(\alpha) = d_j$$

- Por lo tanto, $d_j \vee x = 1$.

$\square$

Proposición

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de marcos eficientes, entonces $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es un marco eficiente.

Demostración

Sabemos que $\bigoplus A_i \in \mathsf{Frm}$ y $(\iota_i \colon A_i \to \bigoplus A_i) \in \mathit{Frm}$. Entonces

- Existe $(\iota_i)_*$ y para $F \in (\bigoplus A_i)^\wedge$, $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$.
- Consideramos $\alpha = \sup\{\alpha_i\}$ como el grado de eficiencia de cada A_i.
- Por la eficiencia, si $x_i \in (\iota_i)_*[F]$, entonces $x_i \vee d_i = 1$.
- Consideramos $\langle x_i \rangle \in F$.
- Verificamos que $\langle d_i \rangle \leqslant f_F^\alpha(\iota_i(0)) = d(\alpha) = d$.
- Por lo tanto $\langle x_i \rangle \vee d = 1$.

$\square$

Corolario

Si A es $(\mathbf{fH})$, A es eficiente.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{H}) \arrow[dr, Rightarrow, dotted] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{Eficiente} \\
 & (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Cocientes compactos

$$\text{Eficiente} \iff \text{P. trivial} \iff u_d = v_F$$

Notemos que

A_{u_d} es un cociente cerrado y A_{v_F} es un cociente compacto.

Si A es eficiente, tenemos un cociente compacto y cerrado.

En [13], Wilansky menciona que $S \in \mathsf{Top}$ es **KC** si cada subconjunto compacto es cerrado.

Marcos KC

Definición

$A \in$ Frm es un **marco KC** si cada cociente compacto es cerrado.

$$\textbf{KC} \Rightarrow \text{Eficiente}$$

¿Existen marcos que son eficientes y no son KC?

Proposición:

Para $j \in NA$ y $k \in NA_j$. Si $\nabla(k) \in A_j^{\wedge}$, $\nabla(j_*kj) \in A^{\wedge}$.

Proposición

Si $A \in \mathsf{Frm}$ es **KC** y $j \in NA$, entonces A_j es **KC**.

Demostración

- Consideramos $k \in NA_j$ tal que $\nabla(k) \in A_j^{\wedge}$.
- Si $\nabla(k) \in A_j^{\wedge} \Rightarrow j_*[\nabla(k)] \in A^{\wedge}$.
- Tomamos $l = j_* \circ k \circ j \in NA$ y $\nabla(l) \in A^{\wedge} \Rightarrow l = u_a$ para algún $a \in A$.
- Además $a = k(j(a))$.
- Para $x, b \in A_j$ con $b = j(a)$ tenemos $u_b(x) = k(x)$.

$\square$

Definición:

1. Para $\mathcal{P}$ una propiedad que satisface $A \in \mathit{Frm}$ decimos que $\mathcal{P}$ es conservativa si $S = \operatorname{pt} A$ satisface la propiedad $\mathcal{P}_s$.
2. Para $\mathcal{P}_s$ una propiedad que satisface $S \in \mathsf{Top}$ decimos que $\mathcal{P}_s$ es conservativa si $A = \mathcal{O}S$ satisface la propiedad $\mathcal{P}$.

- $(\mathbf{reg})$, $(\mathbf{H})$, y T_1 son conservativas.
- $(\mathbf{fH})$ no es conservativa ($T_2 \not\Rightarrow (\mathbf{fH})$).
- Eficiente no es conservativa (empaquetado $\not\Rightarrow$ eficiente).
- En el caso espacial, **KC** $=$empaquetado.

Podemos construir el diagrama (ver [12])

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$A$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$A$$

$$\mathcal{O}S$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "U_A"'] \\ \mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "U_A"'] & A_F \\
\mathcal{O}S &
\end{tikzcd}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \\
\mathcal{O}S &
\end{tikzcd}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \\
\mathcal{O}S & \mathcal{O}S_{\nabla}
\end{tikzcd}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla
\end{tikzcd}
$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla
\end{tikzcd}
$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] & & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla & &
\end{tikzcd}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] & \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ur] & \mathcal{O}Q
\end{tikzcd}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] \arrow[dr] & \\ & & \mathcal{O}Q \\ \mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] \arrow[dr] & \\
 & & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde $g = (U_A)_* \circ (v_\nabla)_{|A_F}$.

¿Qué pasa si A tiene la propiedad $(\mathbf{H})$?

Teorema

Sea A un marco con la propiedad $(\mathbf{H})$, entonces para cada $F \in A^{\wedge}$ y su correspondiente $Q \in \mathcal{Q}S$, tenemos

$$\mathcal{O}Q \simeq \uparrow Q',$$

es decir, el marco de abiertos del espacio de puntos de A_F es isomorfo a un cociente compacto y cerrado de un espacio Hausdorff.

Cronograma de actividades (Al inicio)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Revisión de bibliografía	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Lectura de artículos	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Generar de conjeturas		✓	✓	✓	✓	✓		
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

Cronograma de actividades (Particular)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Aprender sobre construciones de parches	✓	✓	✓					
Aprender sobre axiomas de separación	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Entender ejemplos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Consultar fuentes alternativas		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Desarrollar teoría			✓	✓	✓	✓	✓	
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

Cronograma de actividades (2da mitad)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Consultar fuentes bibliográficas	✓	✓	✓	
Proponer conjeturas	✓	✓	✓	✓
Validación y rechazo de conjeturas	✓	✓	✓	✓
Redacción y presentación de artículos	✓	✓	✓	✓
Escritura de la tesis	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones	✓	✓	✓	✓
Sustentación				✓

Cosas por hacer

- Obtener un ejemplo de marco eficiente que no sea KC.
- Probar que los marcos KC son cerrados bajo coproductos.
- Dar la noción libre de puntos de apilado y fuertemente apilado.
- Establecer las condicines necesarias y suficientes para relacionar eficiencia con $(\mathbf{H})$.
- $\vdots$

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

- J. Paseka and B. Smarda, *T_2-frames and almost compact frames.* Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

Bibliografía III

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

- H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

Bibliografía IV

- H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.

- A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.