

Cocientes compactos vs marcos arreglados

30 de abril de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara

✉ juan.monter2902@alumnos.udg.mx

Contenido

Cocientes compactos

Marcos arreglados

C. C. vs M. A.

Por si acaso...

Cocientes en **Frm**

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Congruencias \leftrightarrow Conjuntos implicativos \leftrightarrow Núcleos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y $j: A \rightarrow A$, decimos que j es un *núcleo* si:

1. j infla.
2. j es monótona.
3. j es idempotente.
4. j respeta ínfimos finitos.

$NA = \text{núcleos de } A.$

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo suprayectivo $f: A \rightarrow B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- A_j es un cociente de A .
- ¿Qué es un cociente compacto?

Filtros en **Frm**

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leq b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Filtros en **Frm**

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leq b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto
- Admisible ($\nabla(j)$)

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k).$

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^\wedge \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

A es compacto si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

A es compacto si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

A es compacto si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

- A_j es un cociente de A .

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

A es compacto si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

- A_j es un cociente de A .
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^\wedge$.

¿Qué son los marcos arreglados?

- Una de las aplicaciones de la teoría de marcos es que, en cierto punto, un marco puede llegar a mimetizar el comportamiento de la topología de un espacio.
- En este sentido, los marcos arreglados buscan imitar la propiedad de que un espacio sea empaquetado.
- Como es habitual, las variantes que proporcionan los marcos son caracterizaciones “libres de puntos”.

Marcos arreglados

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

- $F \in A^\wedge$ es α -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1,$$

donde $d = d(\alpha) = f^\alpha(\circ)$ y $f = \bigvee \{v_a \mid a \in F\}$

- A es α -arreglado si todo $F \in A^\wedge$ es α -arreglado.
- A es arreglado si A es α -arreglado para algún α .





Marcos arreglados

Propiedades:





- Parche trivial \Leftrightarrow arreglado
- Arreglado \Leftrightarrow empaquetado + apilado
- Un espacio S tiene topología 1-arreglada $\Leftrightarrow S$ es T_2 .
- Arreglado $\Rightarrow T_1$
- Regularidad \Rightarrow arreglado
- **(fH)** \Rightarrow arreglado

Cocientes compactos vs marcos arreglados

References I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque localico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

References II

-  Rosemary A Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
-  Harold Simmons, *The assembly of a frame*, University of Manchester (2006).
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.
-  A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2024. Universidad de Guadalajara.