¿Por qué son más las nociones Hausdorff en álgebra que en topología?

Seminario de Álgebra, CUCEI
29 de noviembre de 2024

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara

juan.monter2902@alumnos.udg.mx

Lo que veremos hoy ☺

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

$$\mathbf{Frm} = \begin{cases} A, & \text{marcos} \\ \\ f, & \text{morfismo de marcos} \end{cases}$$

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

¿Qué relación existe entre los marcos y los espacios topológicos?

$$\left(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset\right)$$

- $\mathcal{O}(\_)\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Frm}$
- $\mathrm{pt}(\_)\colon \mathbf{Frm} \to \mathbf{Top}$
- El funtor pt es adjunto izquierdo de $\mathcal{O}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Top} \arrow[d, shift right=2em, "\mathcal{O}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{Frm} \arrow[u, shift right=2em, "\mathrm{pt}"']
\end{tikzcd}$$

Axiomas de separación

En la topología clásica (topología sensible a puntos), tenemos la siguiente relación entre los axiomas de separación

$$
\begin{tikzcd}
T_4 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_{3\frac{1}{2}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_0 \\
 & (norm) & R_3 \arrow[r, Rightarrow] & R_2 \arrow[r, Rightarrow] & R_1 \arrow[r, Rightarrow] & R_0
\end{tikzcd}
$$

donde $R_2 = (\mathbf{reg})$, $R_3 = (\mathbf{creg})$, $T_i = R_{i-1} + T_{i-1}$ y $T_{3\frac{1}{2}} = R_3 + T_3$, para $i = 1, 2, 3$.
$T_4 = (\mathbf{norm}) + T_1$.

El axioma T_2

T_2: Sean $x \neq y \in S$, entonces existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad y \in V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.
- Es más débil que T_3.

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.
- Es más débil que T_3.
- Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal es cerrada.

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.
- Es más débil que T_3.
- Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal es cerrada.
- Si S es T_2, todo $Q \in \mathfrak{Q}S$ es cerrado.

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.
- Es más débil que T_3.
- Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal es cerrada.
- Si S es T_2, todo $Q \in \mathfrak{Q}S$ es cerrado.
- Si S es T_2 y compacto, S es regular.

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.
- Es más débil que T_3.
- Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal es cerrada.
- Si S es T_2, todo $Q \in \mathfrak{Q}S$ es cerrado.
- Si S es T_2 y compacto, S es regular.
- El producto de espacios T_2 es T_2.

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.
- Es más débil que T_3.
- Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal es cerrada.
- Si S es T_2, todo $Q \in \mathfrak{Q}S$ es cerrado.
- Si S es T_2 y compacto, S es regular.
- El producto de espacios T_2 es T_2.
- Los subespacios de un espacio T_2 son T_2.

¿Qué sabemos sobre T_2?

- Es más fuerte que T_1.
- Es más débil que T_3.
- Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal es cerrada.
- Si S es T_2, todo $Q \in \mathcal{Q}S$ es cerrado.
- Si S es T_2 y compacto, S es regular.
- El producto de espacios T_2 es T_2.
- Los subespacios de un espacio T_2 son T_2.
- $\vdots$

Un poco más sobre los marcos

Sean $a, b \in A \in \mathbf{Frm}$.

Un poco más sobre los marcos

Sean $a, b \in A \in \mathbf{Frm}$.

- $\neg a =$ negación (pseudocomplemento).

Un poco más sobre los marcos

Sean $a, b \in A \in \mathbf{Frm}$.

- $\neg a =$ negación (pseudocomplemento).
- $a^* =$ complemento.

Un poco más sobre los marcos

Sean $a, b \in A \in \mathbf{Frm}$.

- $\neg a =$ negación (pseudocomplemento).
- $a^* =$ complemento.
- $(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}$.

Un poco más sobre los marcos

Sean $a, b \in A \in \mathbf{Frm}$.

- $\neg a =$ negación (pseudocomplemento).
- $a^* =$ complemento.
- $(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}$.
- $\neg a = (a \succ 0)$.

Un poco más sobre los marcos

Sean $a, b \in A \in \mathbf{Frm}$.

- $\neg a =$ negación (pseudocomplemento).
- $a^* =$ complemento.
- $(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}$.
- $\neg a = (a \succ 0)$.
- a es regular si $a = \neg\neg a$.

Un poco más sobre los marcos

Sean $a, b \in A \in \mathbf{Frm}$.

- $\neg a =$ negación (pseudocomplemento).
- $a^* =$ complemento.
- $(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}$.
- $\neg a = (a \succ 0)$.
- a es regular si $a = \neg\neg a$.
- $A \in \mathbf{Frm}$ es espacial si $A = \mathcal{O}S$.

Un poco sobre sublocales

Definición:

Sea $L \in \mathbf{Loc}$. $S \subseteq L$ es un sublocal si:

1. $a, b \in S \Rightarrow a \wedge b \in S$.
2. $l \in L$ y $s \in S \Rightarrow (l \succ s) \in S$.

Un poco sobre sublocales

Definición:

Sea $L \in \mathbf{Loc}$. $S \subseteq L$ es un sublocal si:

1. $a, b \in S \Rightarrow a \wedge b \in S$.
2. $l \in L$ y $s \in S \Rightarrow (l \succ s) \in S$.

$$S \text{ es cerrado} \Leftrightarrow S = \overline{S}$$

Un poco sobre sublocales

Definición:

Sea $L \in \mathbf{Loc}$. $S \subseteq L$ es un sublocal si:

1. $a, b \in S \Rightarrow a \wedge b \in S$.
2. $l \in L$ y $s \in S \Rightarrow (l \succ s) \in S$.

$$S \text{ es cerrado} \Leftrightarrow S = \overline{S}$$

¿Quién es $\overline{S}$?

Un poco sobre sublocales

Definición:

Sea $L \in \mathbf{Loc}$. $S \subseteq L$ es un sublocal si:

1. $a, b \in S \Rightarrow a \wedge b \in S$.
2. $l \in L$ y $s \in S \Rightarrow (l \succ s) \in S$.

$$S \text{ es cerrado} \Leftrightarrow S = \overline{S}$$

¿Quién es $\overline{S}$?

$$\overline{S} = \uparrow \bigwedge S$$

para cada sublocal S y $\bigwedge S \in S$.

Ajustado, subajustado y el axioma T_D

(**aju**) $\forall\, U, V \in \mathcal{O}S$, con $U \nsubseteq V$, $\exists\, W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \quad \text{y} \quad (W \cup V)^{\circ} \neq V.$$

Ajustado, subajustado y el axioma T_D

(**aju**) $\forall\, U, V \in \mathcal{O}S$, con $U \nsubseteq V$, $\exists\, W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \quad \text{y} \quad (W \cup V)^{\circ} \neq V.$$

(**saju**) $\forall\, U, V \in \mathcal{O}S$, con $U \nsubseteq V$, $\exists\, W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \neq V \cup W.$$

Ajustado, subajustado y el axioma T_D

(**aju**) $\forall\, U, V \in \mathcal{O}S$, con $U \not\subseteq V$, $\exists\, W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \quad \text{y} \quad (W \cup V)^{\circ} \neq V.$$

(**saju**) $\forall\, U, V \in \mathcal{O}S$, con $U \not\subseteq V$, $\exists\, W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \neq V \cup W.$$

T_D $\forall\, x \in S, \exists\, U \in \mathcal{O}S$ tal que

$$x \in U \quad \text{y} \quad U \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S.$$

Ajustado, subajustado y el axioma T_D

(**aju**) $\forall\, U, V \in \mathcal{O}S$, con $U \not\subseteq V$, $\exists\, W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \quad \text{y} \quad (W \cup V)^\circ \neq V.$$

(**saju**) $\forall\, U, V \in \mathcal{O}S$, con $U \not\subseteq V$, $\exists\, W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \neq V \cup W.$$

T_D $\forall\, x \in S$, $\exists\, U \in \mathcal{O}S$ tal que

$$x \in U \quad \text{y} \quad U \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S.$$

$$(\textbf{aju}) \Rightarrow (\textbf{saju}), \quad (\textbf{saju}) \not\Rightarrow T_D, \quad T_D \not\Rightarrow (\textbf{saju})$$

Otra alternativa de ver los axiomas T_n

$$T_1 = T_D + (\mathbf{saju})$$
$$T_2 = N_2 + (\mathbf{saju})$$
$$T_3 = N_3 + (\mathbf{saju})$$
$$T_4 = N_4 + (\mathbf{saju})$$

.

Otra alternativa de ver los axiomas T_n

$$T_1 = T_D + (\mathbf{saju})$$
$$T_2 = N_2 + (\mathbf{saju})$$
$$T_3 = N_3 + (\mathbf{saju})$$
$$T_4 = N_4 + (\mathbf{saju})$$

donde N_i, para $i = 2, 3, 4$, son conocidas como *propiedades de normalidad* (ver [11]).

Otra alternativa de ver los axiomas T_n

$$\begin{aligned} T_1 &= T_D + (\mathbf{saju}) \\ T_2 &= N_2 + (\mathbf{saju}) \\ T_3 &= N_3 + (\mathbf{saju}) \\ T_4 &= N_4 + (\mathbf{saju}) \end{aligned}$$

donde N_i, para $i = 2, 3, 4$, son conocidas como *propiedades de normalidad* (ver [11]).

Existen otras maneras de definir los axiomas de separación en **Frm**

Elemento máximo, primo y semiprimo

$A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \operatorname{pt} A$, entonces

Elemento máximo, primo y semiprimo

$A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \operatorname{pt} A$, entonces

- $p \in S$ si y solo si $p \neq 1$ y $\forall\, a, b \in A$ si

$$a \wedge b \leqslant p \Rightarrow a \leqslant p \text{ o } b \leqslant p.$$

Si $p \in S$ entonces p es *primo*.

Elemento máximo, primo y semiprimo

$A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \operatorname{pt} A$, entonces

- $p \in S$ si y solo si $p \neq 1$ y $\forall\, a, b \in A$ si

$$a \wedge b \leqslant p \Rightarrow a \leqslant p \text{ o } b \leqslant p.$$

  Si $p \in S$ entonces p es *primo*.

- $p \in A$ es *semiprimo* si $\forall\, a, b \in A$ con $a \wedge b = 0$, entonces $a \leqslant p$ o $b \leqslant p$.

Elemento máximo, primo y semiprimo

$A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \operatorname{pt} A$, entonces

- $p \in S$ si y solo si $p \neq 1$ y $\forall\ a, b \in A$ si

  $$a \wedge b \leqslant p \Rightarrow a \leqslant p \text{ o } b \leqslant p.$$

  Si $p \in S$ entonces p es *primo*.

- $p \in A$ es *semiprimo* si $\forall\ a, b \in A$ con $a \wedge b = 0$, entonces $a \leqslant p$ o $b \leqslant p$.
- $p \in A$ es *máximo* si $\forall\ m \in A$ con $p \leqslant m$, entonces $p = m$ o $m = 1$.

Elemento máximo, primo y semiprimo

$A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \operatorname{pt} A$, entonces

- $p \in S$ si y solo si $p \neq 1$ y $\forall\, a, b \in A$ si

  $$a \wedge b \leqslant p \Rightarrow a \leqslant p \text{ o } b \leqslant p.$$

  Si $p \in S$ entonces p es *primo*.

- $p \in A$ es *semiprimo* si $\forall\, a, b \in A$ con $a \wedge b = 0$, entonces $a \leqslant p$ o $b \leqslant p$.

- $p \in A$ es *máximo* si $\forall\, m \in A$ con $p \leqslant m$, entonces $p = m$ o $m = 1$.

$$\text{máximo} \;\Rightarrow\; \text{primo} \;\Rightarrow\; \text{semiprimo}$$

Axiomas de separación (libres de puntos)

(T_1) Todo elemento primo es máximo.

Axiomas de separación (libres de puntos)

(T_1) Todo elemento primo es máximo.

(reg) $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec$"= *bastante por debajo*

$$U = \bigcup \{V \mid V \prec U\}$$

Axiomas de separación (libres de puntos)

(T_1) Todo elemento primo es máximo.

(reg) $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec$"= *bastante por debajo*

$$U = \bigcup\{V \mid V \prec U\}$$

$(T_3) = (reg) + (T_1)$

Axiomas de separación (libres de puntos)

(T_1) Todo elemento primo es máximo.

(reg) $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec$"= *bastante por debajo*

$$U = \bigcup\{V \mid V \prec U\}$$

$(T_3) = (reg) + (T_1)$

$(creg)$ $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec\!\prec$"= *completamente por debajo*

$$U = \bigcup\{V \mid V \prec\!\prec U\}$$

Axiomas de separación (libres de puntos)

(T_1) Todo elemento primo es máximo.

(reg) $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec$"= *bastante por debajo*

$$U = \bigcup \{V \mid V \prec U\}$$

$(T_3) = (reg) + (T_1)$

$(creg)$ $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec\!\prec$"= *completamente por debajo*

$$U = \bigcup \{V \mid V \prec\!\prec U\}$$

$(T_{3\frac{1}{2}}) = (creg) + (T_1)$

Axiomas de separación (libres de puntos)

(T_1) Todo elemento primo es máximo.

(reg) $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec$"= *bastante por debajo*

$$U = \bigcup\{V \mid V \prec U\}$$

$(T_3) = (reg) + (T_1)$

$(creg)$ $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec\!\prec$"= *completamente por debajo*

$$U = \bigcup\{V \mid V \prec\!\prec U\}$$

$(T_{3\frac{1}{2}}) = (creg) + (T_1)$

$(norm)$ $\forall\, X, Y \in \mathcal{O}S$ tales que $X \cup Y = S$, $\exists\, U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$X \cup U = S, \quad Y \cup V = S, \quad U \cap V = \emptyset$$

Axiomas de separación (libres de puntos)

(T_1) Todo elemento primo es máximo.

(reg) $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec$"= *bastante por debajo*

$$U = \bigcup \{V \mid V \prec U\}$$

$(T_3) = (reg) + (T_1)$

$(creg)$ $\forall\, U \in \mathcal{O}S$, con "$\prec\!\prec$"= *completamente por debajo*

$$U = \bigcup \{V \mid V \prec\!\prec U\}$$

$(T_{3\frac{1}{2}}) = (creg) + (T_1)$

$(norm)$ $\forall\, X, Y \in \mathcal{O}S$ tales que $X \cup Y = S$, $\exists\, U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$X \cup U = S, \quad Y \cup V = S, \quad U \cap V = \emptyset$$

$(T_4) = (norm) + (T_1)$

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definition

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definition

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.
2. Decimos que una propiedad en marcos P es *suficientemente Hausdorff* si y solo si P implica la propiedad Hausdorff espacial.

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definition

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.
2. Decimos que una propiedad en marcos P es *suficientemente Hausdorff* si y solo si P implica la propiedad Hausdorff espacial.
3. Decimos que una propiedad en marcos P es de *1° orden* si y solo si P es enunciada como una fórmula para elementos del marco.

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definition

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.
2. Decimos que una propiedad en marcos P es *suficientemente Hausdorff* si y solo si P implica la propiedad Hausdorff espacial.
3. Decimos que una propiedad en marcos P es de *1° orden* si y solo si P es enunciada como una fórmula para elementos del marco.
4. Decimos que una propiedad en marcos P es de *2° orden* si y solo si P es enunciada como una caracterización de sublocales.

Débilmente Hausdorff [Dowker y Strauss (1972)]

Esta noción sugiere ver T_2 como algo más fuerte que T_1.

Débilmente Hausdorff [Dowker y Strauss (1972)]

Esta noción sugiere ver T_2 como algo más fuerte que T_1.

Definición

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Decimos que A es *débilmente Hausdorff* si se cumple lo siguiente:

(**dH**) $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

con $a, b, u, v \in A$.

Débilmente Hausdorff [Dowker y Strauss (1972)]

Esta noción sugiere ver T_2 como algo más fuerte que T_1.

Definición

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Decimos que A es *débilmente Hausdorff* si se cumple lo siguiente:

(**dH**) $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

con $a, b, u, v \in A$.

Recordemos que

$$T_1 = T_D + (\mathbf{saju}).$$

La propuesta de Dowker y Strauss fue

$$T_2 = (\mathbf{dH}) + (\mathbf{saju}).$$

La propuesta de Dowker y Strauss fue

$$T_2 = (\mathbf{dH}) + (\mathbf{saju}).$$

Observaciones

La propuesta de Dowker y Strauss fue

$$T_2 = (\mathbf{dH}) + (\mathbf{saju}).$$

Observaciones

- $(\mathbf{dH}) = N_2$.

La propuesta de Dowker y Strauss fue

$$T_2 = (\mathbf{dH}) + (\mathbf{saju}).$$

Observaciones

- $(\mathbf{dH}) = N_2$.
- Un espacio S cumple T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ cumple T_2 (en marcos).

La propuesta de Dowker y Strauss fue

$$T_2 = (\mathbf{dH}) + (\mathbf{saju}).$$

Observaciones

- $(\mathbf{dH}) = N_2$.
- Un espacio S cumple T_2 (espacial) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}S$ cumple T_2 (en marcos).
- $(\mathbf{dH})$ no es suficientemente Hausdorff.

Hausdorff [Johnstone y Shu-Hau (1987)]

Esta noción sugiere ver T_2 como algo más débil que T_3.

Hausdorff

[Johnstone y Shu-Hau (1987)]

Esta noción sugiere ver T_2 como algo más débil que T_3.

Definición

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y consideremos $a, b \in A$. Decimos que a está *bastante por debajo* de b (denotado por "$a \prec b$") si $\exists\, c \in A$ tal que

$$a \wedge c = 0 \quad \text{y} \quad c \vee b = 1$$

Hausdorff [Johnstone y Shu-Hau (1987)]

Esta noción sugiere ver T_2 como algo más débil que T_3.

Definición

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y consideremos $a, b \in A$. Decimos que a está *bastante por debajo* de b (denotado por "$a \prec b$") si $\exists\, c \in A$ tal que

$$a \wedge c = 0 \quad \text{y} \quad c \vee b = 1$$

$(\mathbf{reg})$ $\forall\, b \in A$,

$$b = \bigvee \{a \in A \mid a \prec b\}$$

Haciendo las respectivas modificaciones obtenemos

Haciendo las respectivas modificaciones obtenemos

Definición [Paseka y Smarda (1987)]:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y sean $a, b \in A$ con $b \neq 1$. Decimos que "$a \sqsubset b$" si

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad \neg a \leqslant b$$

Haciendo las respectivas modificaciones obtenemos

Definición [Paseka y Smarda (1987)]:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y sean $a, b \in A$ con $b \neq 1$. Decimos que "$a \sqsubset b$" si

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad \neg a \leqslant b$$

T_2 $\quad \forall\, b \in A$ con $b \neq 1$,

$$b = \bigvee \{a \in A \mid a \sqsubset b\}.$$

Haciendo las respectivas modificaciones obtenemos

Definición [Paseka y Smarda (1987)]:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y sean $a, b \in A$ con $b \neq 1$. Decimos que "$a \sqsubset b$" si

$$a \leqslant b \quad \text{y} \quad \neg a \leqslant b$$

T_2 $\quad \forall\, b \in A$ con $b \neq 1$,

$$b = \bigvee \{a \in A \mid a \sqsubset b\}.$$

Equivalentemente

T_2 $\quad \forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad v \leqslant a, \quad u \wedge v = 0.$$

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

(H) $\forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

(**H**) $\forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Observaciones:

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

$(\mathbf{H})$ $\forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Observaciones:

- T_2 (P. y S.) $\Leftrightarrow (\mathbf{H})$.

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

$(\mathbf{H})$ $\forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Observaciones:

- T_2 (P. y S.) $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow T_2$ (D. y S.).

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

$(\mathbf{H})$ $\forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Observaciones:

- T_2 (P. y S.) $\Leftrightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow T_2$ (D. y S.).
- Un espacio cumple T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ cumple $(\mathbf{H})$.

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

$(\mathbf{H})$ $\forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Observaciones:

- T_2 (P. y S.) $\Leftrightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow T_2$ (D. y S.).
- Un espacio cumple T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ cumple $(\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H})$ es hereditaria.

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

$(\mathbf{H})$ $\forall\, 1 \neq a \not\leq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \not\leq a, \quad v \not\leq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Observaciones:

- T_2 (P. y S.) $\Leftrightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow T_2$ (D. y S.).
- Un espacio cumple T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ cumple $(\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H})$ es hereditaria.
- $(\mathbf{H})$ es cerrada bajo coproductos.

Johnstone y Shu-Hau modificaron la noción dada por Isbell y obtuvieron

$(\mathbf{H})$ $\forall\, 1 \neq a \nleq b, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$u \nleq a, \quad v \nleq b, \quad u \wedge v = 0.$$

Observaciones:

- T_2 (P. y S.) $\Leftrightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow T_2$ (D. y S.).
- Un espacio cumple T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ cumple $(\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{H})$ es hereditaria.
- $(\mathbf{H})$ es cerrada bajo coproductos.
- $(\mathbf{reg}) \Rightarrow (\mathbf{H})$

Ejemplo

$A \in$ **Frm** y sea

$$\tilde{A} = \{(x, y) \mid x \leqslant y\} \subseteq L \times \mathcal{B}(L),$$

donde

$$\mathcal{B}(L) = \{x \in A \mid x = \neg\neg x\} = \{x^* \mid x \in L\}$$

Ejemplo

$A \in$ **Frm** y sea

$$\tilde{A} = \{(x, y) \mid x \leqslant y\} \subseteq L \times \mathcal{B}(L),$$

donde

$$\mathcal{B}(L) = \{x \in A \mid x = \neg\neg x\} = \{x^* \mid x \in L\}$$

Observaciones:

Ejemplo

$A \in \mathbf{Frm}$ y sea

$$\tilde{A} = \{(x, y) \mid x \leqslant y\} \subseteq L \times \mathcal{B}(L),$$

donde

$$\mathcal{B}(L) = \{x \in A \mid x = \neg\neg x\} = \{x^* \mid x \in L\}$$

Observaciones:

- A es Hausdorff $\Rightarrow \tilde{A}$ es Hausdorff.

Ejemplo

$A \in$ **Frm** y sea

$$\tilde{A} = \{(x, y) \mid x \leqslant y\} \subseteq L \times \mathcal{B}(L),$$

donde

$$\mathcal{B}(L) = \{x \in A \mid x = \neg\neg x\} = \{x^* \mid x \in L\}$$

Observaciones:

- A es Hausdorff $\Rightarrow \tilde{A}$ es Hausdorff.
- A compacto $\Rightarrow \tilde{A}$ compacto.

Ejemplo

$A \in$ **Frm** y sea

$$\tilde{A} = \{(x, y) \mid x \leqslant y\} \subseteq L \times \mathcal{B}(L),$$

donde

$$\mathcal{B}(L) = \{x \in A \mid x = \neg\neg x\} = \{x^* \mid x \in L\}$$

Observaciones:

- A es Hausdorff $\Rightarrow \tilde{A}$ es Hausdorff.
- A compacto $\Rightarrow \tilde{A}$ compacto.
- $\tilde{A}$ no es subajustado.

Ejemplo

$A \in \mathbf{Frm}$ y sea

$$\tilde{A} = \{(x,y) \mid x \leqslant y\} \subseteq L \times \mathcal{B}(L),$$

donde

$$\mathcal{B}(L) = \{x \in A \mid x = \neg\neg x\} = \{x^* \mid x \in L\}$$

Observaciones:

- A es Hausdorff $\Rightarrow$ $\tilde{A}$ es Hausdorff.
- A compacto $\Rightarrow$ $\tilde{A}$ compacto.
- $\tilde{A}$ no es subajustado.
- $\tilde{A}$ es Hausdorff y compacto, pero no regular.

Fuertemente Hausdorff [Isbell (1972)]

Esta noción sugiere ver T_2 en marcos como algo similar a T_2 espacial.

Fuertemente Hausdorff [Isbell (1972)]

Esta noción sugiere ver T_2 en marcos como algo similar a T_2 espacial.

Proposición:

S es $T_2 \Leftrightarrow \Delta = \{(x,x) \in (S \times S) \mid x \in S\}$ es cerrada en $S \times S$.

Fuertemente Hausdorff [Isbell (1972)]

Esta noción sugiere ver T_2 en marcos como algo similar a T_2 espacial.

Proposición:

S es $T_2 \Leftrightarrow \Delta = \{(x,x) \in (S \times S) \mid x \in S\}$ es cerrada en $S \times S$.

La caracterización anterior es traducida para el producto de locales (coproducto de marcos).

Definición:

Sea L un local. Consideramos el coproducto binario $L \oplus L$. Decimos que un marco es *fuertemente Hausdorff* si y solo si el sublocal diagonal $\Delta[L]$ es cerrado en $L \oplus L$.

Definición:

Sea L un local. Consideramos el coproducto binario $L \oplus L$. Decimos que un marco es *fuertemente Hausdorff* si y solo si el sublocal diagonal $\Delta[L]$ es cerrado en $L \oplus L$.

La propiedad enunciada en la definición anterior puede ser reescrita de la siguiente manera.

(**fH**) $\quad \Delta[L] = \uparrow d_L,$

donde d_L es el menor elemento de $\Delta[L]$, es decir,

$$d_L = \Delta(0) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leqslant 0\} = \downarrow \{(x, x^*) \mid x \in L\}.$$

Observaciones:

- Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.

Observaciones:

- Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.
- $(\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H})$.

Observaciones:

- Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.
- $(\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{fH}) +$ compacto $\Rightarrow (\mathbf{reg})$.

Observaciones:

- Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.
- $(\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{fH})$ + compacto $\Rightarrow (\mathbf{reg})$.
- Sean S un espacio T_0 y $\mathcal{O}S$ un marco fuertemente Hausdorff. Entonces S es T_2.

Observaciones:

- Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.
- $(\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{fH}) + \text{compacto} \Rightarrow (\mathbf{reg})$.
- Sean S un espacio T_0 y $\mathcal{O}S$ un marco fuertemente Hausdorff. Entonces S es T_2.
- $(\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \not\Rightarrow (\mathbf{fH})$.

Observaciones:

- Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.
- $(\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H})$.
- $(\mathbf{fH}) +$ compacto $\Rightarrow (\mathbf{reg})$.
- Sean S un espacio T_0 y $\mathcal{O}S$ un marco fuertemente Hausdorff. Entonces S es T_2.
- $(\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \not\Rightarrow (\mathbf{fH})$.
- $(\mathbf{reg}) \Rightarrow (\mathbf{fH})$.

Hausdorff punteados [Rosicky y Smarda (1985)]

Esta noción sugiere ver T_2 como una propiedad relaciona con T_1 en marcos.

Hausdorff punteados [Rosicky y Smarda (1985)]

Esta noción sugiere ver T_2 como una propiedad relaciona con T_1 en marcos.
Recordemos que

(T_1) Todo elemento primo en A es máximo.

Hausdorff punteados [Rosicky y Smarda (1985)]

Esta noción sugiere ver T_2 como una propiedad relaciona con T_1 en marcos.
Recordemos que

(T_1) Todo elemento primo en A es máximo.

Definición:

Decimos que un marco A es *Hausdorff punteado* si cumple la siguiente propiedad
$(\mathbf{Hp})$ Todo elemento semiprimo en A es máximo.

Observaciones:

- S es T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ es $(\mathbf{Hp})$.

Observaciones:

- S es T_2 (espacial) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}S$ es $(\mathbf{Hp})$.
- $(\mathbf{H}) \Rightarrow (\mathbf{Hp})$.

Observaciones:

- S es T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ es $(\mathbf{Hp})$.
- $(\mathbf{H}) \Rightarrow (\mathbf{Hp})$.
- ¿Qué pasaría si tenemos $(\mathbf{Hp}) + (\mathbf{saju})$?

Observaciones:

- S es T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ es $(\mathbf{Hp})$.
- $(\mathbf{H}) \Rightarrow (\mathbf{Hp})$.
- ¿Qué pasaría si tenemos $(\mathbf{Hp}) + (\mathbf{saju})$?
- $(\mathbf{Hp})$ caracteriza a algunos marcos espaciales.

Observaciones:

- S es T_2 (espacial) $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$ es $(\mathbf{Hp})$.
- $(\mathbf{H}) \Rightarrow (\mathbf{Hp})$.
- ¿Qué pasaría si tenemos $(\mathbf{Hp}) + (\mathbf{saju})$?
- $(\mathbf{Hp})$ caracteriza a algunos marcos espaciales.
- No existe mas información sobre $(\mathbf{Hp})$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{reg}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(\mathbf{aju}) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr, dotted, no head] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dl, dotted, no head] & (\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \arrow[d] \arrow[dll] \arrow[dl, dotted, no head] \\
(\mathbf{saju}) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[dr, dotted, no head] & T_U \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d] & (\mathbf{H}) \arrow[dl] \\
 & T_1 &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (H) & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r] & (\mathbf{fH}) \arrow[r] \arrow[ur] & T_U \arrow[r] & T_1
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathbf{saju}) & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r] & (\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \arrow[ur] \arrow[r] & (\mathbf{H}) \arrow[r] & T_1
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathbf{saju}) \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r] & (\mathbf{aju}) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & (T_1) \\
 & & (T_U)
\end{tikzcd}
$$

En resumen

Axioma/Comportamiento	**C.**	1°	2°	**S. H.**	**C. S. E.**
(**dH**)	x	✓	x	x	x
(**H**)	✓	✓	x	✓	x
(**Hp**)	✓	✓	x	✓	?
(**fH**)	x	x	✓	✓	✓

C.= Propiedad conservativa
S. H.= Suficientemente Huasdorff
C. S. E.= Comportamiento similar al espacial

Conclusiones

- T_2 (D. y S.) no es suficientemente Hausdorff.

Conclusiones

- T_2 (D. y S.) no es suficientemente Hausdorff.
- $(\mathbf{H})$ podría ser un muy buen acercamiento a T_2.

Conclusiones

- T_2 (D. y S.) no es suficientemente Hausdorff.
- (**H**) podría ser un muy buen acercamiento a T_2.
- (**fH**) reúne los aspectos espaciales, pero es complicado trabajar con ella.

Conclusiones

- T_2 (D. y S.) no es suficientemente Hausdorff.
- (**H**) podría ser un muy buen acercamiento a T_2.
- (**fH**) reúne los aspectos espaciales, pero es complicado trabajar con ella.
- (**Hp**) necesita ser aun explorada.

Conclusiones

- T_2 (D. y S.) no es suficientemente Hausdorff.
- (**H**) podría ser un muy buen acercamiento a T_2.
- (**fH**) reúne los aspectos espaciales, pero es complicado trabajar con ella.
- (**Hp**) necesita ser aun explorada.
- No podemos concluir con certeza cual noción Hausdorff en marcos es "la mejor".

☺Gracias por su atención☺

References I

- H. Dowker and D. Strauss, *Separation axioms for frames*. In topics in topology, pp. 223-240. Proc. Colloq., Keszthely, 1992.

- J. R. Isbell, *Atomless parts of spaces*. Math. Scand. 31 (1972) 5-32.

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

References II

- P.T. Johnstone, S.-H. Sun, *Weak products and Hausdorff locales*. In: Categorical algebra and its applications, pp. 173-193. Lecture notes in mathematics, vol. 1348. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

References III

- J. Paseka, B. Smarda, *T_2-frames and almost compact frames*. Czechoslovak Math. J. 42 (1992) 297-313.
- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
- J. Rosicky, B. Smarda, *T_1-locales*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 98 (1985) 81-86.

References IV

- Harold Simmons, *The assembly of a frame*, University of Manchester (2006).

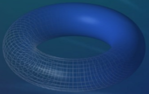
- Harold Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (1978), vol. 21, no 1, p. 41-48.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2024. Universidad de Guadalajara.

Sábados de T.A.C.O.S.

(TOPOLOGÍA, ÁLGEBRA, CATEGORÍAS Y ESTRUCTURAS ORDENADAS)

Dirigido a Estudiantes de licenciatura y posgrado con interés en T.A.C.O.S.



Sábados

12:30-14:00hrs horario del centro de México

Seminario virtual
a través de la plataforma Google Meet

Google Meet

Enlace de reuniones:
https://meet.google.com/ttj-rdox-hww

Únete a nuestro canal de difusión en WhatsApp

Seminario e investigación apoyada por el proyecto CONAHCYT CBF2023-2024-2630

Más información:
juan.monter2902@alumnos.udg.mx

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

CUCEI

CONACYT

Dirección de Apoyo a la Investigación