¿Para qué estudiar topología sin puntos y cómo hacerlo?

Seminario de Estudiantes en Matemáticas (SEMAS), CUCEI
8 de febrero de 2026

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx
github.com/JCmonter

Contenido

Nacimiento de la topología clásica


Gauss


Poincaré


Hausdorff

- Surge del estudio geométrico y analítico de deformaciones continuas.
- Se formaliza la noción de *espacio topológico*: puntos + abiertos.

La topología clásica estudia espacios como conjuntos de puntos organizados por abiertos.

Nacimiento de la topología “sin puntos”


Isbell


Tarski


Stone

- Se observa que los abiertos forman estructuras algebraicas ricas.
- Comienza el enfoque: estudiar “espacios” a través de la estructura de abiertos.

La topología puede desarrollarse sin mencionar puntos explícitamente.

Actualidad de la topología sin puntos

Simmons

Johnstone

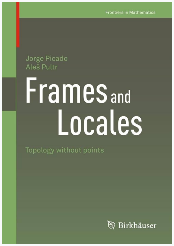
Picado

- Teoría consolidada: libros, cursos y herramientas modernas.
- Investigación activa y conexiones con lógica, computación y geometría.

La topología sin puntos es hoy un área viva de investigación.

Topología sin puntos en México

MITAC 2024



58 Congreso SMM

- Cada vez más personas se interesan en aprender sobre esta área.
- En CUCEI se estudian axiomas de separación, construcciones de parches, .

¿Consideras que en algún momento has realizado topología sin puntos?

Topología, continuidad y axiomas de separación

Definición:

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\varnothing, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Topología, continuidad y axiomas de separación

Definición:

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\varnothing, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Al par (S, τ) se le llama **espacio topológico**.

Topología, continuidad y axiomas de separación

Definición:

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\varnothing, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Al par (S, τ) se le llama **espacio topológico**. De hecho,

$$(\tau, \subseteq, \bigcup, \cap, \varnothing, X)$$

es un marco.

Primer encuentro con la continuidad

En cálculo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

***Definición** ε–δ*

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Primer encuentro con la continuidad

En cálculo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definición ε–δ

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

“Debemos exhibir los elementos ε-δ de la definición”

Continuidad en espacios métricos

En análisis matemático: $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$.

Definición ε–δ (versión métrica)

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; d_1(x,a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Continuidad en espacios métricos

En análisis matemático: $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$.

Definición ε–δ (versión métrica)

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

“La idea es la misma y sigue siendo técnica”

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$$\forall\ V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$$\forall\ V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

"Una condición global que no menciona puntos"

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$$\forall\ V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

"Una condición global que no menciona puntos"

¿De qué manera prefieres demostrar continuidad?

Axiomas de separación en Top

- **T_0:** para $x \neq y$, existe abierto que contiene a uno y no al otro.
- **T_1:** para $x \neq y$, hay abierto que contiene a x pero no a y y viceversa).
- **T_2:** para $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U, V con $x \in U$, $y \in V$.
- **Regular:** para todo $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ con $x \notin F$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.
- **Normal:** para cualesquiera cerrados disjuntos $F, G \subseteq X$, existen abiertos disjuntos U, V con $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

¿Cómo se leen estas ideas *sin puntos*?

¿Por qué topología sin puntos?

Punto

¿Por qué topología sin puntos?

Punto

Recta

¿Por qué topología sin puntos?

¿Por qué topología sin puntos?

¿Por qué topología sin puntos?

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

"Lo importante no son los puntos, sino cómo se relacionan los abiertos"

¿Qué es un marco?

- A

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, 0)$ o $(A, \leqslant, \bigwedge, 1)$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Definición:

Un **marco** es una retícula completa, $(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1)$, en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i \; = \; \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i). \qquad \text{(LDM)}$$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Definición:

Un **marco** es una retícula completa, $(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1)$, en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i). \qquad \text{(LDM)}$$

LDM: Ley Distributiva de marcos

Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.

Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.

Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Funtorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).

Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Funtorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).
- **Adjunciones:** existen correspondencias biyectivas y equivalencias.

Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Funtorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).
- **Adjunciones:** existen correspondencias biyectivas y equivalencias.
- **Generalización:** una clase de marcos pueden verse como generalizaciones de los subespacios.

Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Funtorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).
- **Adjunciones:** existen correspondencias biyectivas y equivalencias.
- **Generalización:** una clase de marcos pueden verse como generalizaciones de los subespacios.

"Detrás de la idea intuitiva hay una teoría categórica robusta"

Conexión entre Top y Frm

$$\mathsf{Top} \quad = \quad \begin{cases} \text{Objetos: espacios topológicos} \\ \text{Flechas: funciones continuas} \end{cases}$$

$$\mathsf{Frm} \quad = \quad \begin{cases} \text{Objetos: marcos} \\ \text{Flechas: morfismos de marcos} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{O}(\_)"] & & \mathsf{Frm} \arrow[ll, bend left, "\mathrm{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

Los funtores $\mathcal{O}(\_)$ y $\mathrm{pt}(\_)$

El funtor $\mathcal{O}(\_) : \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}$

$$S \longmapsto \mathcal{O}(S)$$

$$\begin{array}{c} S \xrightarrow{\quad\varphi\quad} T \\ \downarrow \\ \mathcal{O}(S) \xleftarrow[\mathcal{O}(\varphi) = \varphi^{-1}]{} \mathcal{O}(T) \end{array}$$

El funtor $\mathrm{pt}(\_) : \mathsf{Frm} \to \mathsf{Top}$

$$A \longmapsto \mathrm{pt}(A)$$

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{\quad f\quad} B \\ \downarrow \\ \mathrm{pt}(A) \xleftarrow[\mathrm{pt}(f) = f_*]{} \mathrm{pt}(B) \end{array}$$

$$\mathsf{Top}(S, \mathrm{pt}(A)) \cong \mathsf{Frm}(A, \mathcal{O}(S)).$$

La topología clásica y la topología sin puntos se conectan por medio de esta adjunción.

Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.

Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- A veces es más sencillo hacer teoría de marcos.

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.

Topología clásica vs. topología sin puntos

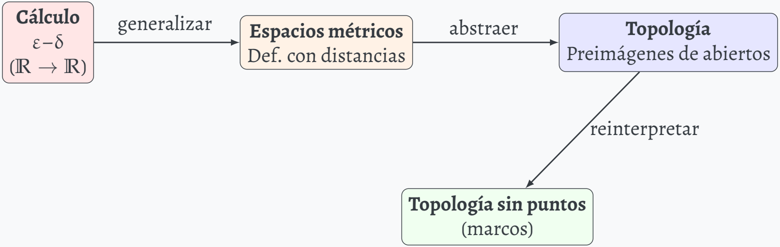
Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

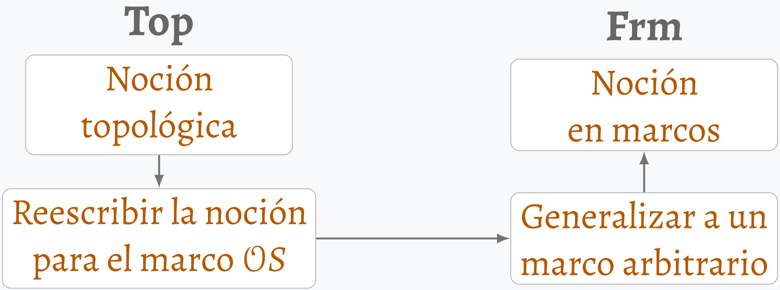
Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.
- Resultados topológicos pueden ser trasladados a marcos.

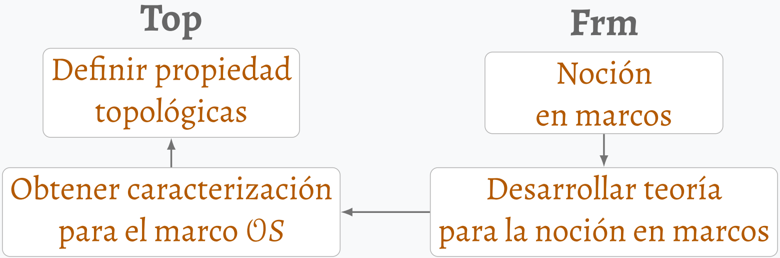
Recorrido: de ε–δ a la topología sin puntos



De Top a Frm


Top
Noción topológica
Reescribir la noción para el marco $\mathcal{O}S$
Frm
Noción en marcos
Generalizar a un marco arbitrario

De Frm a Top


Top
Definir propiedad topológicas
Obtener caracterización para el marco $\mathcal{OS}$
Frm
Noción en marcos
Desarrollar teoría para la noción en marcos

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathrm{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

  ¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathrm{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

  ¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \varnothing \iff X \cup Y = S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \varnothing \iff X \cup Y = S$.
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathrm{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \varnothing \iff X \cup Y = S$.
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$.
- Traducción: para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{O}S$ con $X \cup Y = S$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $X \cup U = Y \cup V = S$ y $U \cap V = \varnothing$.

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A, \quad m \leqslant b < 1 \ \Rightarrow \ b = m$.

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A, \;\; m \leqslant b < 1 \;\Rightarrow\; b = m$.
- **primo:** un elemento $a \in A$ con $a \neq 1$ es *primo* si para todos $u, v \in A$,
$$u \wedge v \leqslant a \;\Rightarrow\; (u \leqslant a) \text{ o } (v \leqslant a).$$

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A, \quad m \leqslant b < 1 \;\Rightarrow\; b = m.$
- **primo:** un elemento $a \in A$ con $a \neq 1$ es *primo* si para todos $u, v \in A$,
$$u \wedge v \leqslant a \;\Rightarrow\; (u \leqslant a) \text{ o } (v \leqslant a).$$

Observación

En un *marco* todo elemento **máximo** es **primo**. El recíproco **no** vale en general.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$ es un elemento primo.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$ es un elemento primo.
- Traducción: todo elemento primo es máximo.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee$, $\wedge$, $\succ$, $\prec$ y $\neg$.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee$, $\wedge$, $\succ$, $\prec$ y $\neg$.
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee$, $\wedge$, $\succ$, $\prec$ y $\neg$.
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a = 0\} = (a \succ 0).$$

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee, \ \wedge, \ \succ, \ \prec$ y $\neg$.
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a = 0\} = (a \succ 0).$$

- Relación bastante por debajo:

$$\begin{aligned} a \prec b \iff & \quad \text{existe } c \in A \text{ tal que } c \wedge a = 0, c \vee b = 1. \\ \iff & \quad \neg a \vee b = 1. \end{aligned}$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que
$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$
- Si $V \in \mathcal{O}S$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{O}S$.

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que
$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$
- Si $V \in \mathcal{O}S$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{O}S$.
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$.

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que
$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$
- Si $V \in \mathcal{O}S$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{O}S$.
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$.
- Traducción: para todo $U \in \mathcal{O}S$
$$U = \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \prec U\}.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es $\mathbf{T}_1$ si todo elemento primo es máximo.

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es $\mathbf{T}_1$ si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

o equivalentemente $\forall\ a \not\leq b \in A\ \ \exists\ x, y \in A$ tales que

$$a \vee x = 1, \quad y \not\leq b \quad x \wedge y = 0.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es $\mathbf{T}_1$ si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

  o equivalentemente $\forall\ a \nleq b \in A\ \ \exists\ x, y \in A$ tales que

$$a \vee x = 1, \quad y \nleq b \quad x \wedge y = 0.$$

- A es **normal** si para todos $a, b \in A$ con $a \vee b = 1$, existen $u, v \in A$ tales que

$$a \vee u = 1, \quad b \vee v = 1, \quad u \wedge v = 0.$$

Axiomas tipo Hausdorff

En espacios

$$T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$$

T_2 es más débil que T_3 y más fuerte que T_1. Además,

$$S \text{ es } T_2 \iff \{(s,s) \in S \times S\} \subseteq S \times S \text{ es cerrado.}$$

En marcos

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{H}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{dH}) \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
& & & (\mathbf{Hp}) &
\end{tikzcd}$$

La teoría de separación en Frm es más rica que en Top.

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺Gracias por su atención☺

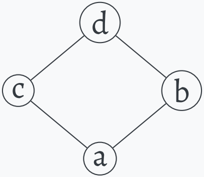
https://github.com/JCmonter/Apuntes/tree/main/Presentaciones

Orden parcial

Definición

Una relación $\leqslant$ en un conjunto A es un **orden parcial** si cumple:

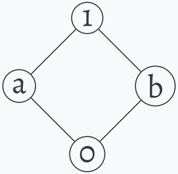
- Reflexividad: $a \leqslant a$.
- Antisimetría: $a \leqslant b$ y $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.
- Transitividad: $a \leqslant b$ y $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.



Ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado (Hasse).

Supremo e ínfimo

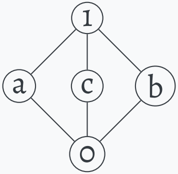
- El **supremo** de un subconjunto es la menor cota superior.
- El **ínfimo** es la mayor cota inferior.



Aquí $\sup\{a, b\} = 1$, $\text{ínf}\{a, b\} = 0$.

De semirretícula a retícula

- Una **semirretícula** es un poset con supremos finitos (o ínfimos finitos).
- Una **retícula** tiene ambos: supremos e ínfimos finitos.



Retícula: todos los pares tienen sup e inf.

Marco

Definición

Un **marco** es una retícula completa $(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1)$ donde vale la **Ley Distributiva de Marcos** (LDM):

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

Esta es la definición formal que conecta con la topología sin puntos.

Un ejemplo espacial

Sea $S = \mathbb{R}$ y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde $a, b \in S$. Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

Se puede verificar que

$$\mathcal{O}_l^p S = \mathcal{O}_m S \simeq P\mathcal{O}_l S \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_l^f S = \mathcal{O}_n S \simeq N\mathcal{O}_l S,$$

es decir,

$$\mathcal{O}_l S = A \to PA \hookrightarrow NA$$

Axiomas tipo Hausdorff

(**dH**) : Si $a \vee b = 1$, con $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**H**) : Si $1 \neq a \nleq b$ $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**Hp**) : Todo elemento semiprimo es máximo.

(**fH**) : El sublocal diagonal es cerrado.