

# **¿Para qué estudiar topología sin puntos y cómo hacerlo?**

*Seminario de Estudiantes en Matemáticas (SEMAS), CUCEI  
9 de febrero de 2026*

**Juan Carlos Monter Cortés**

Universidad de Guadalajara

✉ juan.monter2902@alumnos.udg.mx

⌚ [github.com/JCmonter](https://github.com/JCmonter)

# Contenido

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

¿Qué es la topología sin puntos?

¿Cómo estudiar topología sin puntos?

# Nacimiento de la topología clásica



Gauss



Poincaré



Hausdorff

- Surge del estudio geométrico y analítico de deformaciones continuas.
- Se formaliza la noción de *espacio topológico*: puntos + abiertos.

# Nacimiento de la topología clásica



Gauss



Poincaré



Hausdorff

- Surge del estudio geométrico y analítico de deformaciones continuas.
- Se formaliza la noción de *espacio topológico*: puntos + abiertos.

*La topología clásica estudia espacios como conjuntos de puntos organizados por abiertos.*

# Nacimiento de la topología “sin puntos”



Isbell



Tarski



Stone

- Se observa que los abiertos forman estructuras algebraicas ricas.
- Comienza el enfoque: estudiar “espacios” a través de la estructura de abiertos.

# Nacimiento de la topología “sin puntos”



Isbell



Tarski



Stone

- Se observa que los abiertos forman estructuras algebraicas ricas.
- Comienza el enfoque: estudiar “espacios” a través de la estructura de abiertos.

*La topología puede desarrollarse sin mencionar puntos explícitamente.*

# Actualidad de la topología sin puntos



Simmons



Johnstone



Picado

- Teoría consolidada: libros, cursos y herramientas modernas.
- Investigación activa y conexiones con lógica, computación y geometría.

# Actualidad de la topología sin puntos



Simmons



Johnstone



Picado

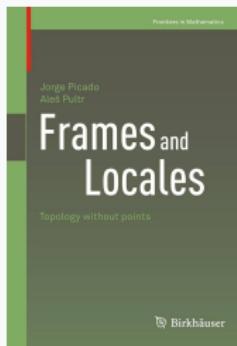
- Teoría consolidada: libros, cursos y herramientas modernas.
- Investigación activa y conexiones con lógica, computación y geometría.

*La topología sin puntos es hoy un área viva de investigación.*

# Topología sin puntos en México



MITAC 2024



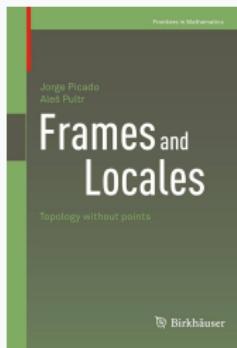
58 Congreso SMM

- En CUCEI se estudian axiomas de separación, construcciones de parches, aspectos categóricos de la teoría de marcos, entre otras cosas.

# Topología sin puntos en México



MITAC 2024



58 Congreso SMM

- En CUCEI se estudian axiomas de separación, construcciones de parches, aspectos categóricos de la teoría de marcos, entre otras cosas.

*¿Consideras que en algún momento has realizado topología sin puntos?*

# Topología, continuidad y axiomas de separación

## Definición:

Una **topología** sobre un conjunto  $S$  es una familia  $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$  tal que:

- $\emptyset, S \in \tau$ .
- Si  $U, V \in \tau$ , entonces  $U \cap V \in \tau$ .
- Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ .

# Topología, continuidad y axiomas de separación

## Definición:

Una **topología** sobre un conjunto  $S$  es una familia  $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$  tal que:

- $\emptyset, S \in \tau$ .
- Si  $U, V \in \tau$ , entonces  $U \cap V \in \tau$ .
- Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ .

Al par  $(S, \tau)$  se le llama **espacio topológico**.

# Topología, continuidad y axiomas de separación

## Definición:

Una **topología** sobre un conjunto  $S$  es una familia  $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$  tal que:

- $\emptyset, S \in \tau$ .
- Si  $U, V \in \tau$ , entonces  $U \cap V \in \tau$ .
- Si  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ .

Al par  $(S, \tau)$  se le llama **espacio topológico**. De hecho,

$$(\tau, \subseteq, \bigcup, \cap, \emptyset, X)$$

es un **marco**.

# Primer encuentro con la continuidad

En cálculo:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Definición  $\varepsilon-\delta$*

$f$  es continua en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

# Primer encuentro con la continuidad

En cálculo:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Definición  $\varepsilon-\delta$*

$f$  es continua en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

“Debemos exhibir los elementos  $\varepsilon-\delta$  de la definición”

# Continuidad en espacios métricos

**En análisis matemático:**  $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ .

*Definición  $\varepsilon-\delta$  (versión métrica)*

$f$  es continua en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

# Continuidad en espacios métricos

En análisis matemático:  $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ .

*Definición  $\varepsilon-\delta$  (versión métrica)*

$f$  es continua en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

“La idea es la misma y sigue siendo técnica”

# Caracterización topológica

## *Teorema*

$f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$  es continua si y solo si

$$\forall V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

# Caracterización topológica

## *Teorema*

$f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$  es continua si y solo si

$\forall V$  abierto en  $Y$ ,  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .

“Una condición global que no menciona puntos”

# Caracterización topológica

## *Teorema*

$f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$  es continua si y solo si

$$\forall V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

“Una condición global que no menciona puntos”

¿De qué manera prefieres demostrar continuidad?

# Axiomas de separación en Top

- **T<sub>0</sub>:** para  $x \neq y$ , existe abierto que contiene a uno y no al otro.
- **T<sub>1</sub>:** para  $x \neq y$ , hay abierto que contiene a  $x$  pero no a  $y$  y viceversa).
- **T<sub>2</sub>:** para  $x \neq y$ , existen abiertos disjuntos  $U, V$  con  $x \in U$ ,  $y \in V$ .
- **Regular:** para todo  $x \in X$  y todo cerrado  $F \subseteq X$  con  $x \notin F$ , existen abiertos disjuntos  $U, V$  tales que  $x \in U$  y  $F \subseteq V$ .
- **Normal:** para cualesquiera cerrados disjuntos  $F, G \subseteq X$ , existen abiertos disjuntos  $U, V$  con  $F \subseteq U$  y  $G \subseteq V$ .

# Axiomas de separación en Top

- **T<sub>0</sub>:** para  $x \neq y$ , existe abierto que contiene a uno y no al otro.
- **T<sub>1</sub>:** para  $x \neq y$ , hay abierto que contiene a  $x$  pero no a  $y$  y viceversa).
- **T<sub>2</sub>:** para  $x \neq y$ , existen abiertos disjuntos  $U, V$  con  $x \in U$ ,  $y \in V$ .
- **Regular:** para todo  $x \in X$  y todo cerrado  $F \subseteq X$  con  $x \notin F$ , existen abiertos disjuntos  $U, V$  tales que  $x \in U$  y  $F \subseteq V$ .
- **Normal:** para cualesquiera cerrados disjuntos  $F, G \subseteq X$ , existen abiertos disjuntos  $U, V$  con  $F \subseteq U$  y  $G \subseteq V$ .

¿Cómo se leen estas ideas *sin puntos*?

# ¿Por qué topología sin puntos?



Punto

# ¿Por qué topología sin puntos?



Punto

---

Recta

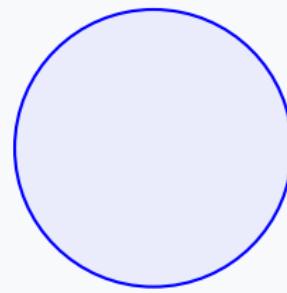
# ¿Por qué topología sin puntos?



Punto



Recta



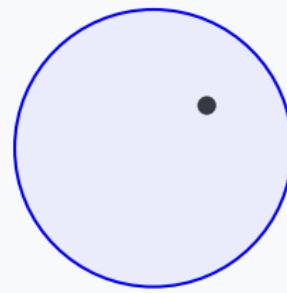
Abierto

# ¿Por qué topología sin puntos?



Punto

Recta



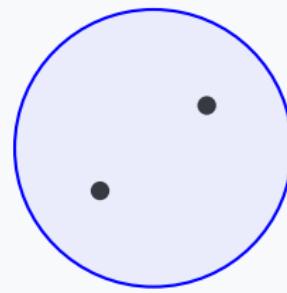
Abierto

# ¿Por qué topología sin puntos?



Punto

Recta



Abierto

# ¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos  $S$  junto con una familia de abiertos  $\tau$ .

# ¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos  $S$  junto con una familia de abiertos  $\tau$ .
- En la topología sin puntos nos olvidamos de  $S$  y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.

# ¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos  $S$  junto con una familia de abiertos  $\tau$ .
- En la topología sin puntos nos olvidamos de  $S$  y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

# ¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos  $S$  junto con una familia de abiertos  $\tau$ .
- En la topología sin puntos nos olvidamos de  $S$  y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

“Lo importante no son los puntos, sino cómo se relacionan los abiertos”

# ¿Qué es un marco?

- A

# ¿Qué es un marco?

- $A$
- $(A, \leqslant)$

# ¿Qué es un marco?

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, o)$  o  $(A, \leqslant, \wedge, 1)$

# ¿Qué es un marco?

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, \circ)$  o  $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$

# ¿Qué es un marco?

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, \circ, 0)$  o  $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$

## *Definición:*

Un **marco** es una retícula completa,  $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$ , en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} \quad \text{donde } a \in A \text{ y } X \subseteq A. \quad (1)$$

# ¿Qué es un marco?

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, \circ, 1)$
- $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$

## *Definición:*

Un **marco** es una retícula completa,  $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$ , en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} \quad \text{donde } a \in A \text{ y } X \subseteq A. \quad (1)$$

A (1) se le conoce como *Ley Distributiva de marcos (LDM)*.

# Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.

# Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.

# Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Functorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).

# Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Functorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).
- **Adjunciones:** existen correspondencias biyectivas y equivalencias.

# Algunos aspectos adicionales

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Functorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).
- **Adjunciones:** existen correspondencias biyectivas y equivalencias.
- **Generalización:** una clase de marcos pueden verse como generalizaciones de los subespacios.

# Algunos aspectos adicionales

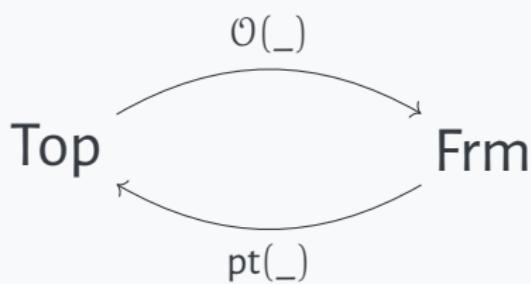
- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan la estructura de la retícula.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos de marcos como flechas.
- **Functorialidad:** podemos relacionar objetos y flechas de Frm con otras categorías o subcategorías (y viceversa).
- **Adjunciones:** existen correspondencias biyectivas y equivalencias.
- **Generalización:** una clase de marcos pueden verse como generalizaciones de los subespacios.

“Detrás de la idea intuitiva hay una teoría categórica robusta”

# Conexión entre Top y Frm

$\text{Top} = \begin{cases} \text{Objetos: espacios topológicos} \\ \text{Flechas: funciones continuas} \end{cases}$

$\text{Frm} = \begin{cases} \text{Objetos: marcos} \\ \text{Flechas: morfismos de marcos} \end{cases}$



# Los funtores $\mathcal{O}(\_)$ y $\text{pt}(\_)$

**El functor  $\mathcal{O}(\_)$  : Top  $\rightarrow$  Frm**

$$\begin{array}{ccc}
 S & \longmapsto & \mathcal{O}(S) \\
 S \xrightarrow{\varphi} T & & A \xrightarrow{f} B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}(S) & \xleftarrow[\mathcal{O}(\varphi) = \varphi^{-1}]{} & \mathcal{O}(T) \\
 & & \text{pt}(A) \xleftarrow[\text{pt}(f) = f_*]{} \text{pt}(B)
 \end{array}$$

**El functor  $\text{pt}(\_)$  : Frm  $\rightarrow$  Top**

$$\text{Top}(S, \text{pt}(A)) \cong \text{Frm}(A, \mathcal{O}(S)).$$

*La topología clásica y la topología sin puntos se conectan por medio de esta adjunción.*

# Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.

# Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

# Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

# Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

# Las ventajas de trabajar en Frm

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- A veces es más sencillo hacer teoría de marcos.

# Topología clásica vs. topología sin puntos

## Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos  $S$ .

## Topología sin puntos (marcos)

# Topología clásica vs. topología sin puntos

## Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos  $S$ .
- Los abiertos son subconjuntos de  $S$ .

## Topología sin puntos (marcos)

# Topología clásica vs. topología sin puntos

## Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos  $S$ .
- Los abiertos son subconjuntos de  $S$ .
- Argumentos basados en puntos.

## Topología sin puntos (marcos)

# Topología clásica vs. topología sin puntos

## Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos  $S$ .
- Los abiertos son subconjuntos de  $S$ .
- Argumentos basados en puntos.

## Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.

# Topología clásica vs. topología sin puntos

## Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos  $S$ .
- Los abiertos son subconjuntos de  $S$ .
- Argumentos basados en puntos.

## Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.

# Topología clásica vs. topología sin puntos

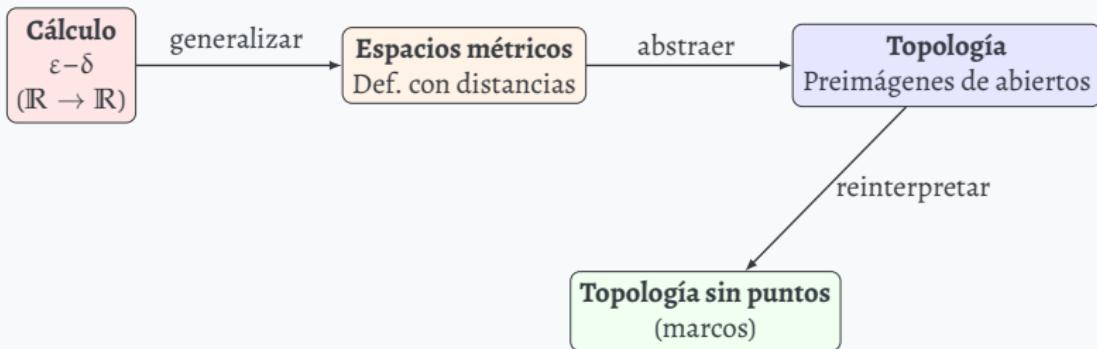
## Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos  $S$ .
- Los abiertos son subconjuntos de  $S$ .
- Argumentos basados en puntos.

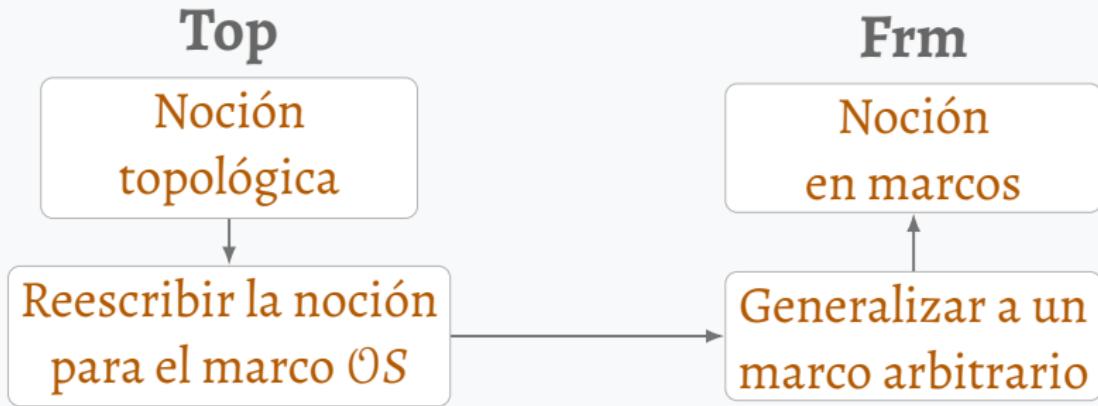
## Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.
- Resultados topológicos pueden ser trasladados a marcos.

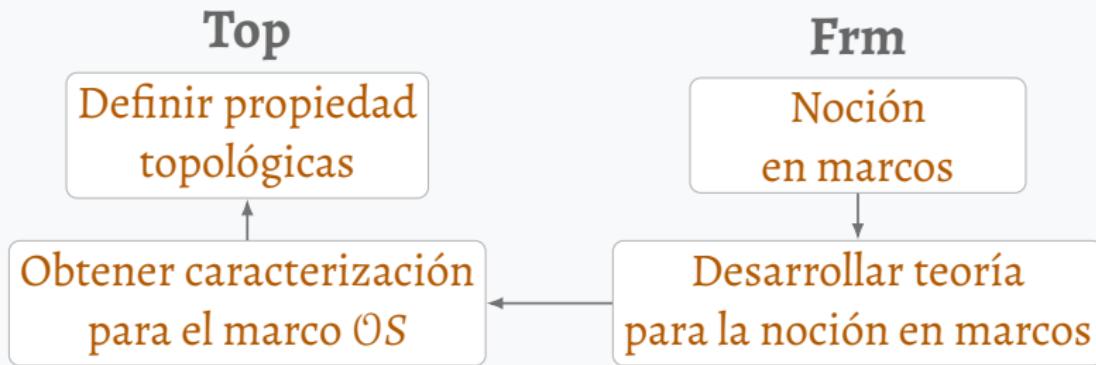
# Recorrido: de $\varepsilon-\delta$ a la topología sin puntos



# De Top a Frm



# De Frm a Top



# Normalidad sin puntos

Sea  $S \in \text{Top}$ . Si  $A \in \mathcal{O}S$ , entonces  $A' \in \mathcal{C}S$ .

# Normalidad sin puntos

Sea  $S \in \text{Top}$ . Si  $A \in \mathcal{O}S$ , entonces  $A' \in \mathcal{C}S$ .

- **Normalidad:** para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{C}S$  con  $A \cap B = \emptyset$ , existen  $U, V \in \mathcal{O}S$  con  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

# Normalidad sin puntos

Sea  $S \in \text{Top}$ . Si  $A \in \mathcal{O}S$ , entonces  $A' \in \mathcal{C}S$ .

- **Normalidad:** para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{C}S$  con  $A \cap B = \emptyset$ , existen  $U, V \in \mathcal{O}S$  con  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

## Normalidad sin puntos

Sea  $S \in \text{Top}$ . Si  $A \in \mathcal{O}S$ , entonces  $A' \in \mathcal{C}S$ .

- **Normalidad:** para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{CS}$  con  $A \cap B = \emptyset$ , existen  $U, V \in \mathcal{OS}$  con  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .  
¿Qué necesitamos para hacer la traducción?
  - Si  $A, B \in \mathcal{CS} \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{OS}$ .

# Normalidad sin puntos

Sea  $S \in \text{Top}$ . Si  $A \in \mathcal{O}S$ , entonces  $A' \in \mathcal{C}S$ .

- **Normalidad:** para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{C}S$  con  $A \cap B = \emptyset$ , existen  $U, V \in \mathcal{O}S$  con  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .  
*¿Qué necesitamos para hacer la traducción?*
- Si  $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$ .
- $A \cap B = \emptyset \iff X \cup Y = S$ .

# Normalidad sin puntos

Sea  $S \in \text{Top}$ . Si  $A \in \mathcal{O}S$ , entonces  $A' \in \mathcal{C}S$ .

- **Normalidad:** para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{C}S$  con  $A \cap B = \emptyset$ , existen  $U, V \in \mathcal{O}S$  con  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .  
*¿Qué necesitamos para hacer la traducción?*
- Si  $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$ .
- $A \cap B = \emptyset \iff X \cup Y = S$ .
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$ .

# Normalidad sin puntos

Sea  $S \in \text{Top}$ . Si  $A \in \mathcal{O}S$ , entonces  $A' \in \mathcal{C}S$ .

- **Normalidad:** para cualesquiera  $A, B \in \mathcal{C}S$  con  $A \cap B = \emptyset$ , existen  $U, V \in \mathcal{O}S$  con  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .  
*¿Qué necesitamos para hacer la traducción?*
- Si  $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$ .
- $A \cap B = \emptyset \iff X \cup Y = S$ .
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$ .
- **Traducción:** para cualesquiera  $X, Y \in \mathcal{O}S$  con  $X \cup Y = S$ , existen  $U, V \in \mathcal{O}S$  con  $X \cup U = Y \cup V = S$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

# Ingredientes para traducir $T_1$

*Elementos en un marco A*

# Ingredientes para traducir $T_1$

## *Elementos en un marco A*

- **máximo:** un elemento  $m \in A$  es *máximo* si  $m < 1$  y, para todo  $b \in A$ ,  $m \leq b < 1 \Rightarrow b = m$ .

# Ingredientes para traducir $T_1$

## *Elementos en un marco A*

- **máximo:** un elemento  $m \in A$  es *máximo* si  $m < 1$  y, para todo  $b \in A$ ,  $m \leqslant b < 1 \Rightarrow b = m$ .
- **primo:** un elemento  $a \in A$  con  $a \neq 1$  es *primo* si para todos  $u, v \in A$ ,

$$u \wedge v \leqslant a \Rightarrow (u \leqslant a) \circ (v \leqslant a).$$

# Ingredientes para traducir $T_1$

## *Elementos en un marco A*

- **máximo:** un elemento  $m \in A$  es *máximo* si  $m < 1$  y, para todo  $b \in A$ ,  $m \leqslant b < 1 \Rightarrow b = m$ .
- **primo:** un elemento  $a \in A$  con  $a \neq 1$  es *primo* si para todos  $u, v \in A$ ,

$$u \wedge v \leqslant a \Rightarrow (u \leqslant a) \circ (v \leqslant a).$$

## *Observación*

En un *marco* todo elemento **máximo** es **primo**. El recíproco **no** vale en general.

# T<sub>1</sub> sin puntos

**T<sub>1</sub>:** Para todo  $x \neq y \in S$ , existe  $U \in \mathcal{O}_S$  con  $x \in U$  y  $y \notin U$ .

# T<sub>1</sub> sin puntos

**T<sub>1</sub>:** Para todo  $x \neq y \in S$ , existe  $U \in \mathcal{O}_S$  con  $x \in U$  y  $y \notin U$ .

- $S$  es  $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$  (los unipuntuales son cerrados).

# T<sub>1</sub> sin puntos

**T<sub>1</sub>:** Para todo  $x \neq y \in S$ , existe  $U \in \mathcal{O}S$  con  $x \in U$  y  $y \notin U$ .

- $S$  es  $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$  (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces  $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$ .

# T<sub>1</sub> sin puntos

**T<sub>1</sub>:** Para todo  $x \neq y \in S$ , existe  $U \in \mathcal{O}S$  con  $x \in U$  y  $y \notin U$ .

- $S$  es  $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$  (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces  $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$ .
- $S \setminus \overline{\{x\}}$  es un elemento máximo.

# T<sub>1</sub> sin puntos

**T<sub>1</sub>:** Para todo  $x \neq y \in S$ , existe  $U \in \mathcal{O}S$  con  $x \in U$  y  $y \notin U$ .

- $S$  es  $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$  (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces  $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$ .
- $S \setminus \overline{\{x\}}$  es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$  es un elemento primo.

# T<sub>1</sub> sin puntos

**T<sub>1</sub>:** Para todo  $x \neq y \in S$ , existe  $U \in \mathcal{OS}$  con  $x \in U$  y  $y \notin U$ .

- $S$  es  $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$  (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces  $S \setminus \{x\} \in \mathcal{OS}$ .
- $S \setminus \overline{\{x\}}$  es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$  es un elemento primo.
- **Traducción:** todo elemento primo es máximo.

# Ingredientes para traducir regularidad

Si  $a, b \in A$ , podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

# Ingredientes para traducir regularidad

Si  $a, b \in A$ , podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco:  $\vee, \wedge, \succ, \prec$  y  $\neg$ .

# Ingredientes para traducir regularidad

Si  $a, b \in A$ , podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco:  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\succ$ ,  $\prec$  y  $\neg$ .
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

# Ingredientes para traducir regularidad

Si  $a, b \in A$ , podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco:  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\succ$ ,  $\prec$  y  $\neg$ .
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a = o\} = (a \succ o).$$

# Ingredientes para traducir regularidad

Si  $a, b \in A$ , podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco:  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\succ$ ,  $\prec$  y  $\neg$ .
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a = o\} = (a \succ o).$$

- Relación bastante por debajo:

$$\begin{aligned} a \prec b &\iff \text{existe } c \in A \text{ tal que } c \wedge a = o, c \vee b = 1. \\ &\iff \neg a \vee b = 1. \end{aligned}$$

# Regularidad sin puntos

**Regularidad:** Para todo  $x \in S$  y  $X \in \mathcal{CS}$  con  $x \notin X$ , existen  $U, V \in \mathcal{OS}$  tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

# Regularidad sin puntos

**Regularidad:** Para todo  $x \in S$  y  $X \in \mathcal{CS}$  con  $x \notin X$ , existen  $U, V \in \mathcal{OS}$  tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- $S$  es regular  $\iff$  para todo  $x \in X$  y  $U \in \mathcal{OS}$  con  $x \in U$ , existe  $V \in \mathcal{OS}$  tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

# Regularidad sin puntos

**Regularidad:** Para todo  $x \in S$  y  $X \in \mathcal{CS}$  con  $x \notin X$ , existen  $U, V \in \mathcal{OS}$  tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- $S$  es regular  $\iff$  para todo  $x \in X$  y  $U \in \mathcal{OS}$  con  $x \in U$ , existe  $V \in \mathcal{OS}$  tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

- Si  $V \in \mathcal{OS}$ , entonces  $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{OS}$ .

# Regularidad sin puntos

**Regularidad:** Para todo  $x \in S$  y  $X \in \mathcal{CS}$  con  $x \notin X$ , existen  $U, V \in \mathcal{OS}$  tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- $S$  es regular  $\iff$  para todo  $x \in X$  y  $U \in \mathcal{OS}$  con  $x \in U$ , existe  $V \in \mathcal{OS}$  tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

- Si  $V \in \mathcal{OS}$ , entonces  $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{OS}$ .
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$ .

# Regularidad sin puntos

**Regularidad:** Para todo  $x \in S$  y  $X \in \mathcal{CS}$  con  $x \notin X$ , existen  $U, V \in \mathcal{OS}$  tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- $S$  es regular  $\iff$  para todo  $x \in X$  y  $U \in \mathcal{OS}$  con  $x \in U$ , existe  $V \in \mathcal{OS}$  tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

- Si  $V \in \mathcal{OS}$ , entonces  $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{OS}$ .
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$ .
- **Traducción:** para todo  $U \in \mathcal{OS}$

$$U = \bigcup \{V \in \mathcal{OS} \mid V \prec U\}.$$

# Los axiomas en Frm

Si  $A$  es un marco arbitrario, entonces:

- $A$  es  $T_1$  si todo elemento primo es máximo.

# Los axiomas en Frm

Si  $A$  es un marco arbitrario, entonces:

- $A$  es **T<sub>1</sub>** si todo elemento primo es máximo.
- $A$  es **regular** si para todo  $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

o equivalentemente  $\forall a \not\leq b \in A \ \exists x, y \in A$  tales que

$$a \vee x = 1, \quad y \not\leq b \quad x \wedge y = 0.$$

# Los axiomas en Frm

Si  $A$  es un marco arbitrario, entonces:

- $A$  es **T<sub>1</sub>** si todo elemento primo es máximo.
- $A$  es **regular** si para todo  $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

o equivalentemente  $\forall a \not\leq b \in A \ \exists x, y \in A$  tales que

$$a \vee x = 1, \quad y \not\leq b \quad x \wedge y = 0.$$

- $A$  es **normal** si para todos  $a, b \in A$  con  $a \vee b = 1$ , existen  $u, v \in A$  tales que

$$a \vee u = 1, \quad b \vee v = 1, \quad u \wedge v = 0.$$

# Axiomas tipo Hausdorff

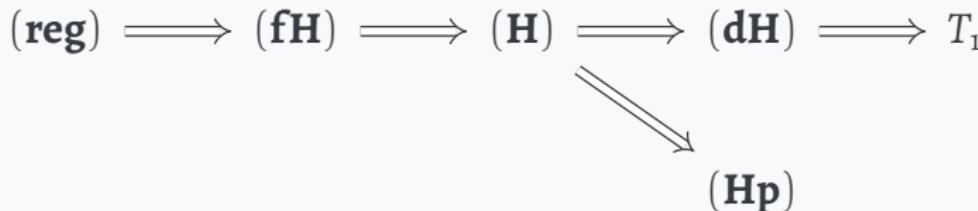
En espacios

$$T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$$

$T_2$  es más débil que  $T_3$  y más fuerte que  $T_1$ . Además,

$$S \text{ es } T_2 \iff \{(s, s) \in S \times S\} \subseteq S \times S \text{ es cerrado.}$$

En marcos



La teoría de separación en Frm es más rica que en Top.

# Topología sin puntos y otras áreas de las matemáticas

- Lógica matemática.
- Teoría de categorías.
- Teoría de haces y topos.
- Ciencias de la computación.
- Topología clásica.

*La topología sin puntos es un lenguaje transversal.*

# Mensaje final

- La topología puede estudiarse desde los puntos...
- pero también desde la estructura de los abiertos.
- La topología sin puntos:
  - no reemplaza a la topología clásica,
  - la extiende y la profundiza.
- Muchas nociones clásicas admiten formulaciones puramente algebraicas.

*Cambiar el punto de vista cambia las preguntas  
que podemos hacer.*

# Bibliografía I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
-  H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons>.
-  A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺Gracias por su atención☺



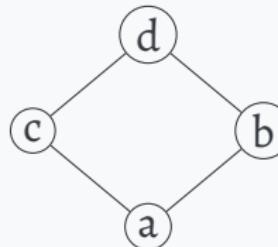
[https://github.com/JCmonter/  
Apuntes/tree/main/  
Presentaciones](https://github.com/JCmonter/Apuntes/tree/main/Presentaciones)

# Orden parcial

## *Definición*

Una relación  $\leqslant$  en un conjunto  $A$  es un **orden parcial** si cumple:

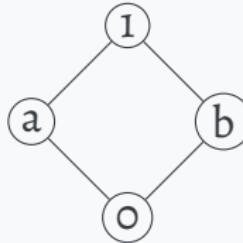
- Reflexividad:  $a \leqslant a$ .
- Antisimetría:  $a \leqslant b$  y  $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ .
- Transitividad:  $a \leqslant b$  y  $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ .



Ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado (Hasse).

# Supremo e ínfimo

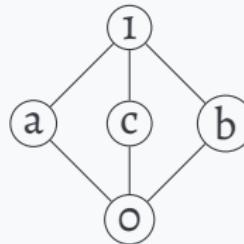
- El **supremo** de un subconjunto es la menor cota superior.
- El **ínfimo** es la mayor cota inferior.



Aquí  $\sup\{a, b\} = 1$ ,  $\inf\{a, b\} = o$ .

# De semirretícula a retícula

- Una **semirretícula** es un poset con supremos finitos (o ínfimos finitos).
- Una **retícula** tiene ambos: supremos e ínfimos finitos.



Retícula: todos los pares tienen sup e inf.

# Marco

## *Definición*

Un **marco** es una retícula completa  $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, \circ, 1)$  donde vale la **Ley Distributiva de Marcos** (LDM):

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

Esta es la definición formal que conecta con la topología sin puntos.

# Un ejemplo espacial

Sea  $S = \mathbb{R}$  y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde  $a, b \in S$ . Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

Se puede verificar que

$$\mathcal{O}_l^p S = \mathcal{O}_m S \simeq P \mathcal{O}_l S \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_l^f S = \mathcal{O}_n S \simeq N \mathcal{O}_l S,$$

es decir,

$$\mathcal{O}_l S = A \rightarrow PA \hookrightarrow NA$$

# Axiomas tipo Hausdorff

**(dH)** : Si  $a \vee b = 1$ , con  $a, b \neq 1$ ,  $\exists u, v$  tales que  $u \not\leq a, v \not\leq b$  y  $u \wedge v = 0$ .

**(H)** : Si  $1 \neq a \not\leq b \exists u, v$  tales que  $u \not\leq a, v \not\leq b$  y  $u \wedge v = 0$ .

**(Hp)** : Todo elemento semiprimo es máximo.

**(fH)** : El sublocal diagonal es cerrado.