# Modificaciones de parches y axiomas de separación en topología sin puntos

26 de julio de 2025

Juan Carlos Monter Cortés Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Universidad de Guadalajara

$$T_2$$
: Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in OS$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

$$T_2$$
: Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in OS$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

$$T_2$$
: Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in OS$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

Si S es  $T_2$ ,

• Todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2$$
: Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in OS$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

- Todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.
- El subespacio diagonal es cerrado.

$$T_2$$
: Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in OS$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

- Todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.
- El subespacio diagonal es cerrado.
- $T_2$ + compacto  $\Rightarrow$  Regular.

$$T_2$$
: Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in OS$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

- Todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.
- El subespacio diagonal es cerrado.
- $T_2$ + compacto  $\Rightarrow$  Regular.
- •

$$T_2$$
: Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in OS$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

- Todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.
- El subespacio diagonal es cerrado.
- $T_2$ + compacto  $\Rightarrow$  Regular.
- :

La construcción en Top:

•  $S \in \text{Top es empaquetado si y solo si } Q \in \mathcal{Q}S \text{ entonces } Q \in \mathcal{C}S.$ 

- $S \in \text{Top}$  es empaquetado si y solo si  $Q \in QS$  entonces  $Q \in CS$ .
- ${}^pS \in \text{Top}$  es el espacio de parches con la topología generada por

$$pbase = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

La construcción en Top:

- $S \in \text{Top}$  es empaquetado si y solo si  $Q \in QS$  entonces  $Q \in CS$ .
- ${}^pS \in \text{Top}$  es el espacio de parches con la topología generada por

$$pbase = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

• S es empaquetado si y solo si  ${}^{p}S = S$ .

- $S \in \text{Top}$  es empaquetado si y solo si  $Q \in QS$  entonces  $Q \in CS$ .
- ${}^pS \in \text{Top}$  es el espacio de parches con la topología generada por

$$pbase = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

- S es empaquetado si y solo si  ${}^{p}S = S$ .
- $T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$ .

- $S \in \text{Top}$  es empaquetado si y solo si  $Q \in QS$  entonces  $Q \in CS$ .
- ${}^pS \in \text{Top}$  es el espacio de parches con la topología generada por

$$pbase = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, \ Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

- S es empaquetado si y solo si  ${}^{p}S = S$ .
- $T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$ .
- Si S es  $T_1$ , entonces  ${}^pS = {}^{pp}S$ .

- $S \in \text{Top}$  es empaquetado si y solo si  $Q \in \mathcal{Q}S$  entonces  $Q \in \mathcal{C}S$ .
- ${}^pS \in \text{Top}$  es el espacio de parches con la topología generada por

$$pbase = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, \ Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

- S es empaquetado si y solo si  ${}^{p}S = S$ .
- $T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$ .
- Si S es  $T_1$ , entonces  ${}^pS = {}^{pp}S$ .
- Si *S* es  $T_{\circ}$ , entonces  ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

- $S \in \text{Top}$  es empaquetado si y solo si  $Q \in QS$  entonces  $Q \in CS$ .
- ${}^pS \in \text{Top}$  es el espacio de parches con la topología generada por

$$pbase = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, \ Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

- S es empaquetado si y solo si  ${}^{p}S = S$ .
- $T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$ .
- Si S es  $T_1$ , entonces  ${}^pS = {}^{pp}S$ .
- Si *S* es  $T_{\circ}$ , entonces  ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

$$OS \longrightarrow O^pS \longrightarrow O^fS$$

Lo que necesitamos:

1. Núcleos

- 1. Núcleos
  - Núcleos abiertos (v•)

- 1. Núcleos
  - Núcleos abiertos (v•)
  - Núcleos cerrados (u<sub>•</sub>)

- 1. Núcleos
  - Núcleos abiertos (v<sub>•</sub>)
  - Núcleos cerrados (u<sub>•</sub>)
- 2. Filtros

- 1. Núcleos
  - Núcleos abiertos (v<sub>•</sub>)
  - Núcleos cerrados (u<sub>•</sub>)
- 2. Filtros
  - Filtros abiertos ( $A^{\wedge}$ )

- 1. Núcleos
  - Núcleos abiertos (v<sub>•</sub>)
  - Núcleos cerrados (u<sub>•</sub>)
- 2. Filtros
  - Filtros abiertos ( $A^{\wedge}$ )
  - Filtros admisibles  $(\nabla(j))$

- 1. Núcleos
  - Núcleos abiertos (v<sub>•</sub>)
  - Núcleos cerrados (u<sub>•</sub>)
- 2. Filtros
  - Filtros abiertos ( $A^{\wedge}$ )
  - Filtros admisibles ( $\nabla(j)$ )
- 3. El Teorema de Hoffman-Mislove

La construcción en Frm:

La construcción en Frm:

Pbase = 
$$\{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

La construcción en Frm:

• Para  $A \in Frm$ , PA es el marco de parches y es generado por

Pbase = 
$$\{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

• A es parche trivial si y solo si  $A \simeq PA$ .

La construcción en Frm:

Pbase = 
$$\{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

- A es parche trivial si y solo si  $A \simeq PA$ .
- ¿Cuándo ocurre que  $A \simeq PA$ ?

La construcción en Frm:

Pbase = 
$$\{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

- A es parche trivial si y solo si  $A \simeq PA$ .
- ¿Cuándo ocurre que  $A \simeq PA$ ?
- ¿Cómo se comparta PA?

La construcción en Frm:

Pbase = 
$$\{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

- *A* es parche trivial si y solo si  $A \simeq PA$ .
- ¿Cuándo ocurre que  $A \simeq PA$ ?
- ¿Cómo se comparta PA?

$$A \longrightarrow PA \longrightarrow NA$$

La construcción en Frm:

• Para  $A \in Frm$ , PA es el marco de parches y es generado por

Pbase = 
$$\{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

- A es parche trivial si y solo si  $A \simeq PA$ .
- ¿Cuándo ocurre que  $A \simeq PA$ ?
- ¿Cómo se comparta PA?

$$A \longrightarrow PA \longrightarrow NA$$

¿Qué tanto se parece empaquetado y parche trivial?

# Ejemplo

Sea  $S = \mathbb{R}$  y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde  $a, b \in S$ .

# Ejemplo

Sea  $S = \mathbb{R}$  y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde  $a, b \in S$ . Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

# Ejemplo

Sea  $S = \mathbb{R}$  y consideremos las topologías generadas por:

$$O_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad O_m S = \{(a, b)\}, \quad O_n S = \{[a, b)\},$$

donde  $a, b \in S$ . Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

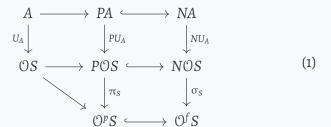
Se puede verificar que

$$O_1^p S = O_m S \simeq PO_l S$$
 y  $O_1^f S = O_n S \simeq NO_l S$ ,

es decir,

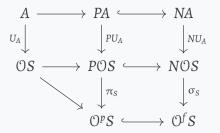
$$O_1S = A \rightarrow PA \hookrightarrow NA$$

# El diagrama de parches



(1)

# El diagrama de parches



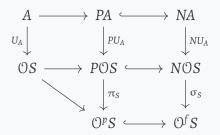
• La construcción de parches es funtorial si para

$$f: A \rightarrow B$$

convierte filtros abiertos.

(1)

### El diagrama de parches



• La construcción de parches es funtorial si para

$$f: A \rightarrow B$$

convierte filtros abiertos.

•  $U_A$  convierte filtros abiertos.

Sea  $A \in \operatorname{Frm} y \alpha \in \mathbf{Ord}$ .

Sea  $A \in \operatorname{Frm} y \alpha \in \operatorname{Ord}$ .

•  $F \in A^{\wedge}$  es  $\alpha$ -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \lor x = 1$$
,

donde 
$$d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$$
 y  $f = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F\}$ 

Sea  $A \in \operatorname{Frm} y \alpha \in \operatorname{Ord}$ .

•  $F \in A^{\wedge}$  es  $\alpha$ -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \lor x = 1$$
,

donde 
$$d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$$
 y  $f = \bigvee \{v_a \mid a \in F\}$ 

• A es  $\alpha$ -arreglado si todo  $F \in A^{\wedge}$  es  $\alpha$ -arreglado.

Sea  $A \in \operatorname{Frm} y \alpha \in \mathbf{Ord}$ .

•  $F \in A^{\wedge}$  es  $\alpha$ -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \lor x = 1$$
,

donde 
$$d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$$
 y  $f = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F\}$ 

- A es  $\alpha$ -arreglado si todo  $F \in A^{\wedge}$  es  $\alpha$ -arreglado.
- A es arreglado si A es  $\alpha$ -arreglado para algún  $\alpha$ .

Arreglado ⇔ Parche trivial.

- Arreglado ⇔ Parche trivial.
- Regular  $\Rightarrow$  Arreglado.

- Arreglado ⇔ Parche trivial.
- Regular  $\Rightarrow$  Arreglado.
- Si A es arreglado  $\Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_1$ .

- Arreglado ⇔ Parche trivial.
- Regular  $\Rightarrow$  Arreglado.
- Si A es arreglado  $\Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_1$ .
- Si A es 1-arreglado  $\Rightarrow S$  es  $T_2$ .

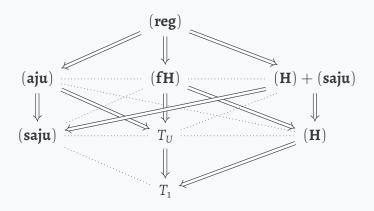
- Arreglado ⇔ Parche trivial.
- Regular  $\Rightarrow$  Arreglado.
- Si A es arreglado  $\Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_1$ .
- Si A es 1-arreglado  $\Rightarrow S$  es  $T_2$ .
- OS es 1-arreglado  $\Leftrightarrow S$  es  $T_2$ .

- Arreglado ⇔ Parche trivial.
- Regular  $\Rightarrow$  Arreglado.
- Si A es arreglado  $\Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_1$ .
- Si A es 1-arreglado  $\Rightarrow S$  es  $T_2$ .
- OS es 1-arreglado  $\Leftrightarrow S$  es  $T_2$ .
- OS es arreglado  $\Leftrightarrow S$  es empaquetado y apilado.

Objetivo

Conocer la relación que existe entre la propiedad arreglado y los distintas propiedades de separación que existe en Frm

# Axiomas de separación en Frm



# Axiomas tipo Hausdorff

(**dH**): Si 
$$a \lor b = 1$$
, con  $a, b \ne 1$ ,  $\exists u, v \text{ tales que } u \nleq a, v \nleq b \text{ y}$   
 $u \land v = 0$ .

(**H**): Si  $1 \neq a \nleq b \exists u, v \text{ tales que } u \nleq a, v \nleq b \text{ y } u \land v = 0.$ 

(**Hp**): Todo elemento semiprimo es máximo.

(**fH**): El sublocal diagonal es cerrado.

# Comportamiento de los axiomas

**S. H.**= Suficientemente Huasdorff ( $P \Rightarrow T_2$ )

**C.**= Propiedad conservativa ( $P \Leftrightarrow T_2$ )

C. S. E.= Comportamiento similar al espacial

$$((\mathbf{H}) + \text{Compacto} \Rightarrow (\mathbf{reg}))$$

Propiedad/Comportamiento	C.	1°	2°	S. H.	C. S. E.
( <b>dH</b> )	X	$\checkmark$	X	X	X
( <b>H</b> )	<b>√</b>	<b>√</b>	X	✓	X
( <b>Hp</b> )	<b>√</b>	<b>√</b>	X	<b>√</b>	?
( <b>fH</b> )	X	X	<b>√</b>	✓	<b>√</b>

• Conocer la relación entre parche trivial y empaquetado.

- Conocer la relación entre parche trivial y empaquetado.
- Ver el comportamiento de arreglado con respecto a los axiomas tipo Hausdorff.

- Conocer la relación entre parche trivial y empaquetado.
- Ver el comportamiento de arreglado con respecto a los axiomas tipo Hausdorff.
- Desarrollar teoría que permita comprender la interacción entre las propiedades.

- Conocer la relación entre parche trivial y empaquetado.
- Ver el comportamiento de arreglado con respecto a los axiomas tipo Hausdorff.
- Desarrollar teoría que permita comprender la interacción entre las propiedades.
- Ver ejemplos.

¿El marco de parches se comporta como el espacio de parches?

• PA, en general, no es  $T_1$ .

- PA, en general, no es  $T_1$ .
- Al no ser T<sub>1</sub> no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que T<sub>1</sub>.

- PA, en general, no es  $T_1$ .
- Al no ser T<sub>1</sub> no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que T<sub>1</sub>.
- ¿PA cumple (saju)?

- PA, en general, no es  $T_1$ .
- Al no ser T<sub>1</sub> no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que T<sub>1</sub>.
- ¿PA cumple (**saju**)?
- ¿Se cumple que  $PA \simeq P^2A$ ?

- PA, en general, no es  $T_1$ .
- Al no ser T<sub>1</sub> no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que T<sub>1</sub>.
- ¿PA cumple (saju)?
- ¿Se cumple que  $PA \simeq P^2A$ ?
- Se cumple que  $P^2A \simeq P^3A$ .

¿El marco de parches se comporta como el espacio de parches?

- PA, en general, no es  $T_1$ .
- Al no ser T<sub>1</sub> no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que T<sub>1</sub>.
- ¿PA cumple (saju)?
- ¿Se cumple que  $PA \simeq P^2A$ ?
- Se cumple que  $P^2A \simeq P^3A$ .

¿Qué pasa si el marco A cumple (H)?

• Si A es  $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_2$ 

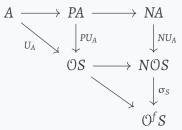
- Si A es  $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_2$
- Si S es  $T_2 \Rightarrow OS$  es 1-arreglado.

- Si A es  $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_2$
- Si S es  $T_2 \Rightarrow OS$  es 1-arreglado.
- Si OS es 1-arreglado  $\Rightarrow OS \simeq POS$ .

- Si A es  $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_2$
- Si S es  $T_2 \Rightarrow OS$  es 1-arreglado.
- Si OS es 1-arreglado  $\Rightarrow OS \simeq POS$ .
- Si S es  $T_2 \Rightarrow^p S = S$ .

- Si A es  $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_2$
- Si S es  $T_2 \Rightarrow OS$  es 1-arreglado.
- Si OS es 1-arreglado  $\Rightarrow OS \simeq POS$ .
- Si S es  $T_2 \Rightarrow^p S = S$ .
- $\operatorname{Si}^{p}S = S \Rightarrow \mathfrak{O}S = \mathfrak{O}^{p}S$ .

- Si A es  $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \operatorname{pt} A$  es  $T_2$
- Si S es  $T_2 \Rightarrow OS$  es 1-arreglado.
- Si OS es 1-arreglado  $\Rightarrow OS \simeq POS$ .
- Si S es  $T_2 \Rightarrow^p S = S$ .
- Si  ${}^pS = S \Rightarrow \mathfrak{O}S = \mathfrak{O}^pS$ .



## Marcos arreglados vs propiedades en Frm

#### Corolario

 $SiA \in Frm$  es espacial, entonces OS cumple  $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow A$  es 1-arreglado.

#### Corolario

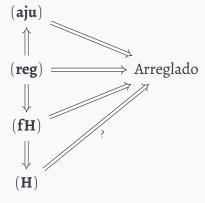
Todo marco ajustado es arreglado.

### Proposición

Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.

### Proposición

Si A es arreglado,  $A_i$  es arreglado para  $j \in NA$ .



#### Intervalos de admisibilidad

Si 
$$F \in A^{\wedge}$$
, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para 
$$d = v_F(o)$$
,  $v_F = f^{\infty}$ .

#### Información con los intervalos

#### Intervalos de admisibilidad

Si  $F \in A^{\wedge}$ , entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para 
$$d = v_F(o)$$
,  $v_F = f^{\infty}$ .

#### Información con los intervalos

•  $[v_F, w_F] \subseteq NA$  es el intervalo de admisibilidad.

Si  $F \in A^{\wedge}$ , entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para  $d = v_F(o)$ ,  $v_F = f^{\infty}$ .

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$  es el intervalo de admisibilidad.
- Si  $j \in [v_F, w_F]$ ,  $A_j$  es compacto.

Si  $F \in A^{\wedge}$ , entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para  $d = v_F(o)$ ,  $v_F = f^{\infty}$ .

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$  es el intervalo de admisibilidad.
- Si  $j \in [v_F, w_F]$ ,  $A_j$  es compacto.
- Arreglado  $\Leftrightarrow v_F \leqslant u_d$

Si  $F \in A^{\wedge}$ , entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para  $d = v_F(o)$ ,  $v_F = f^{\infty}$ .

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$  es el intervalo de admisibilidad.
- Si  $j \in [v_F, w_F]$ ,  $A_j$  es compacto.
- Arreglado  $\Leftrightarrow v_F \leqslant u_d$
- $(\mathbf{fH}) \Leftrightarrow \forall j \in [v_F, w_F], j = u_{\bullet} y \bullet \in A.$

Si  $F \in A^{\wedge}$ , entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para  $d = v_F(o)$ ,  $v_F = f^{\infty}$ .

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$  es el intervalo de admisibilidad.
- Si  $j \in [v_F, w_F]$ ,  $A_j$  es compacto.
- Arreglado  $\Leftrightarrow v_F \leqslant u_d$
- $(\mathbf{fH}) \Leftrightarrow \forall j \in [v_F, w_F], j = u_{\bullet} y \bullet \in A.$
- $(\mathbf{aju}) \Leftrightarrow [v_F, w_F] = \{*\} y * = u_{\bullet} \text{ para } \bullet \in A.$

Por el Teorema de Hoffman-Mislove

$$Q\in \mathcal{Q}S \leftrightarrow \mathit{F}\in \mathit{A}^{\wedge} \quad \mathsf{y} \quad \mathit{Q}\in \mathcal{Q}S \leftrightarrow \nabla \in \mathcal{O}S^{\wedge}.$$

Además,  $[v_Q, w_Q] \subseteq NOS$  es un intervalo de admisibilidad.

Por el Teorema de Hoffman-Mislove

$$Q \in QS \leftrightarrow F \in A^{\wedge}$$
 y  $Q \in QS \leftrightarrow \nabla \in OS^{\wedge}$ .

Además,  $[v_Q, w_Q] \subseteq NOS$  es un intervalo de admisibilidad.

### Proposición

Con Fy Q como antes,  $sij \in [v_Q, w_Q]$ , entonces

$$\nabla(U_*jU^*)=F$$

donde  $U^*$  es la reflexión espacial y  $U_*$  es su adjunto derecho.

Por el Teorema de Hoffman-Mislove

$$Q \in QS \leftrightarrow F \in A^{\wedge}$$
  $y \quad Q \in QS \leftrightarrow \nabla \in OS^{\wedge}$ .

Además,  $[v_Q, w_Q] \subseteq NOS$  es un intervalo de admisibilidad.

### Proposición

Con Fy Q como antes, si  $j \in [v_Q, w_Q]$ , entonces

$$\nabla(U_*jU^*)=F$$

donde  $U^*$  es la reflexión espacial y  $U_*$  es su adjunto derecho.

Equivalentemente

# El Q-cuadrado

En [12] construyen el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f^{\infty}} & A \\
U_{A} \downarrow & & \downarrow U_{A} \\
OS & \xrightarrow{F^{\infty}} & OS
\end{array}$$

y prueban que  $U_A \circ f^{\infty} \leqslant F^{\infty} \circ U_A$ .

# El Q-cuadrado

En [12] construyen el diagrama

$$egin{aligned} A & \stackrel{f^{\infty}}{\longrightarrow} A \ U_A & & \downarrow U_A \ \mathcal{O}S & \stackrel{F^{\infty}}{\longrightarrow} \mathcal{O}S \end{aligned}$$

y prueban que  $U_A \circ f^\infty \leqslant F^\infty \circ U_A$ . Si  $j \in NA$ ,  $\widehat{f}^\infty$  es el núcleo asociado al filtro  $j_*F \in A^\wedge$ .

# El Q-cuadrado

En [12] construyen el diagrama

$$egin{array}{cccc} A & \stackrel{f^{\infty}}{\longrightarrow} & A & & & \downarrow U_A \ U_A & & & & \downarrow U_A & & & \downarrow U_A \ \mathcal{O}S & \stackrel{F^{\infty}}{\longrightarrow} & \mathcal{O}S & & & & \end{array}$$

y prueban que  $U_A \circ f^{\infty} \leqslant F^{\infty} \circ U_A$ . Si  $j \in NA$ ,  $\hat{f}^{\infty}$  es el núcleo asociado al filtro  $j_*F \in A^{\wedge}$ .

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f^{\infty}} & A \\
\downarrow^{j} & & \downarrow^{j} \\
A_{j} & \xrightarrow{f^{\infty}} & A_{j}
\end{array}$$

Para  $j, \hat{f}, \hat{y}$  como antes, se cumple que

1. 
$$j \circ \hat{f} \leqslant f \circ j$$
.

2. 
$$j \circ \hat{f}^{\infty} \leqslant f^{\infty} \circ j$$
.

Para  $j, f, y\hat{f}$  como antes, se cumple que

- 1.  $j \circ \hat{f} \leqslant f \circ j$ .
- 2.  $j \circ \hat{f}^{\infty} \leqslant f^{\infty} \circ j$ .

Definiendo  $H=f^{\infty}\circ j$  y  $h=H_{|A_{j_*F}}$ , obtenemos el diagrama

Para  $j, \hat{f}, \hat{y}$  como antes, se cumple que

- 1.  $j \circ \hat{f} \leqslant f \circ j$ .
- $2. \ j \circ \widehat{f}^{\infty} \leqslant f^{\infty} \circ j.$

Definiendo  $H=f^{\infty}\circ j$  y  $h=H_{|A_{i*}|}$ , obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\widehat{f}^{\infty}} & A_{\widehat{f}^{\infty}} \\
\downarrow j & & \downarrow h \\
A_{j} & \xrightarrow{f^{\infty}} & A_{f^{\infty}}
\end{array} \tag{2}$$

Para  $j, f, y\hat{f}$  como antes, se cumple que

- 1.  $j \circ \hat{f} \leqslant f \circ j$ .
- 2.  $j \circ \widehat{f}^{\infty} \leqslant f^{\infty} \circ j$ .

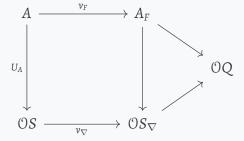
Definiendo  $H = f^{\infty} \circ j$  y  $h = H_{|A_{i*F}|}$ , obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\widehat{f}^{\infty}} & A_{\widehat{f}^{\infty}} \\
\downarrow & & \downarrow h \\
A_{j} & \xrightarrow{f^{\infty}} & A_{f^{\infty}}
\end{array} \tag{2}$$

### Proposición

El diagrama (2) es conmutativo.

#### Consideremos



¿Qué pasa si A cumple (H)?

#### Marcos KC

 $S \in \mathsf{Top}$  es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

#### Marcos KC

 $S \in \mathsf{Top}$  es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

### Definición

 $A \in Frm$  es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.

#### Marcos KC

 $S \in \text{Top es KC}$  si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

### Definición

 $A \in Frm$  es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.

Equivalentemente

$$A_F = u_d$$

para algún  $d \in A$  y  $F \in A^{\wedge}$ .

 $KC \Rightarrow Arreglado$ 

 $KC \Rightarrow Arreglado$ 

## Proposición

 $Si A es KC entonces A_j es KC para todo j \in NA.$ 

 $KC \Rightarrow Arreglado$ 

## Proposición

 $Si A es KC entonces A_j es KC para todo j \in NA.$ 

## Proposición

Si A es KC, entonces  $A es T_1$ .

De hecho

 $KC \Rightarrow Arreglado$ 

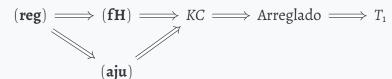
### Proposición

 $Si A es KC entonces A_j es KC para todo j \in NA.$ 

### Proposición

SiA es KC, entonces A es  $T_1$ .

De hecho



## La topología máximo compacta

Consideremos  $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$  con  $x, y \notin \mathbb{N}^2$  y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

**Definimos** 

$${\mathbb O}{\mathcal S}={\mathbb P}{\mathbb N}^2\cup{\mathcal U}\cup{\mathcal V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{ U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito} \}$$

$$V = \{ V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V \}$$

OS es una topología..

# Propiedades de OS

- OS es  $T_1$ .
- OS no es  $(\mathbf{H})$ .
- OS es compacto.
- OS es (aju).
- 0*S* es *KC*.
- OS es 2-arreglado.

# El ejemplo de Paseka y Smarda

Consideremos  $A \in \operatorname{Frm} y A_r = \{a \in A \mid \neg \neg a = a\}$ . Definimos

$$K(A) = \{(u, v) \mid u \in A, v \in A_r, u \leqslant v\}$$

 $K(A) \in Frm.$ 

### Propiedades de K(A)

- Si A es (**H**) y  $\neg m$  = 0 para m máximo, K(A) es (**H**).
- Si A es compacto, entonces K(A) es compacto.
- *K*(*A*) no es subajustado

De manera adicional, sea A = [0, 1] con la topología usual. Entonces

- OI es (**H**).
- OI es compacto.
- K(OI) es compacto y (**H**).
- K(OI) no es subajustado.
- K(OI) no es espacial.

Existe marcos Hausdorr y compactos que no son espaciales.

• Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea *US*.

- Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea US.
- Conocer más sobre el comportamiento del marco de parches para niveles superiores.

- Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea US.
- Conocer más sobre el comportamiento del marco de parches para niveles superiores.
- Verificar que (**H**) implica (o no) *KC* (o arreglado).

- Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea US.
- Conocer más sobre el comportamiento del marco de parches para niveles superiores.
- Verificar que (**H**) implica (o no) *KC* (o arreglado).
- Desarrollar ejemplos donde aparezcan las propiedades que están involucradas en la investigación.

- Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea US.
- Conocer más sobre el comportamiento del marco de parches para niveles superiores.
- Verificar que (**H**) implica (o no) *KC* (o arreglado).
- Desarrollar ejemplos donde aparezcan las propiedades que están involucradas en la investigación.
- Explorar las posibilidades que brindan los intervalos de admisibilidad y el Q-cuadrado.

# Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
- J. Monter; A. Zaldívar, El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
- J. Paseka and B. Smarda,  $T_2$ -frames and almost compact frames. Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.
- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.



# Bibliografía II

- J. Picado and A. Pultr, Separation in point-free topology, Springer, 2021.
- RA Sexton, A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
- RA Sexton, Frame theoretic assembly as a unifying construct, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free* patch constructions, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

## Bibliografía III

- H. Simmons, An Introduction to Frame Theory, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.
- H. Simmons, Regularity, fitness, and the block structure of frames. Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.
- H. Simmons, The lattice theoretic part of topological separation properties, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

## Bibliografía IV

- H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www.cs.man.ac.uk/hsimmons.
- 🔋 A. Wilansky, Between T1 and T2, MONTHLY (1967): 261-266.
- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.