

Modificaciones de parches

y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

12 de noviembre de 2025

Juan Carlos Monter Cortés
Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi
Universidad de Guadalajara

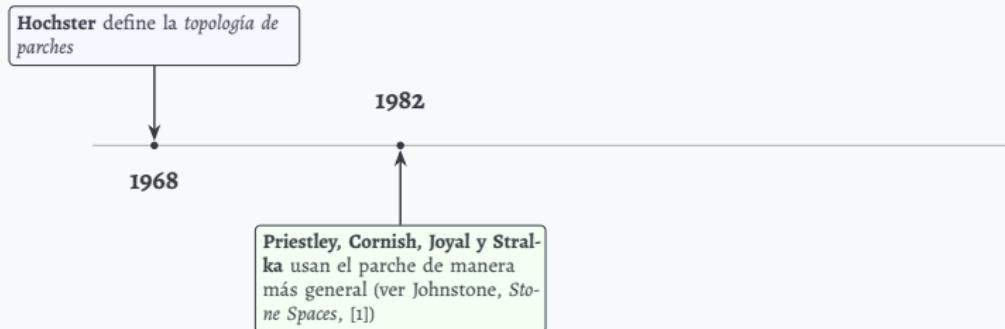
La construcción de parches

Hochster define la *topología de parches*

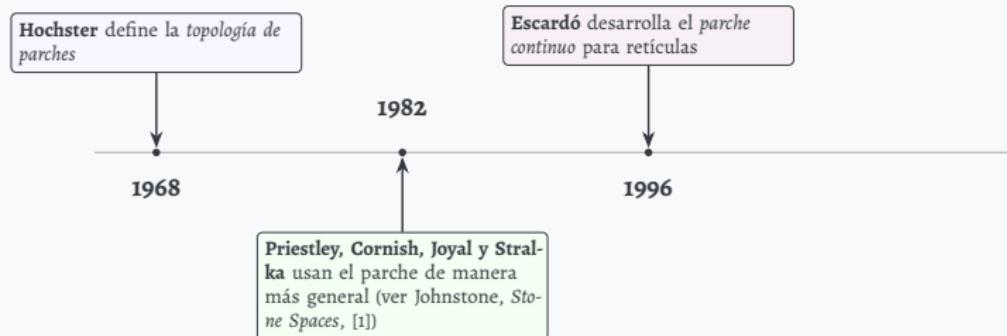


1968

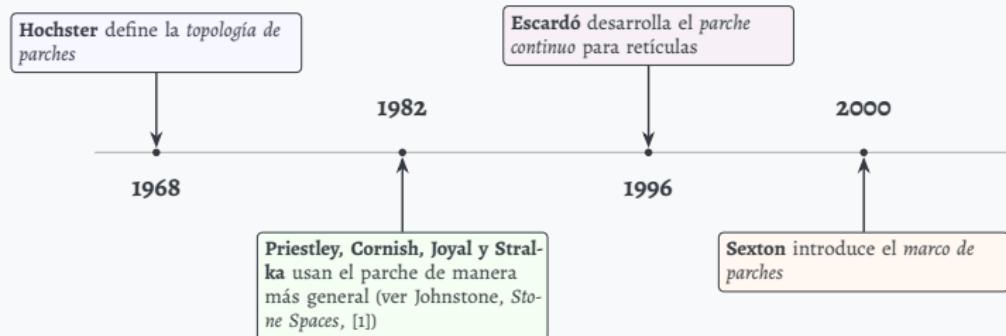
La construcción de parches



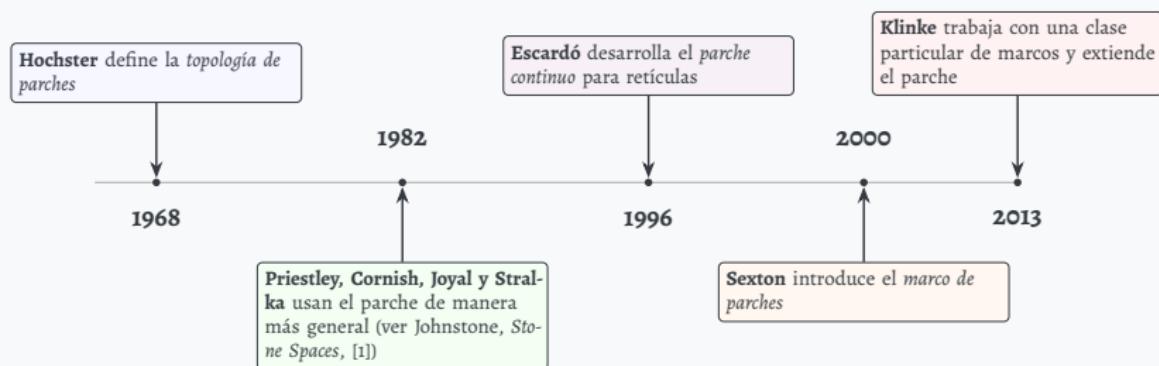
La construcción de parches



La construcción de parches



La construcción de parches



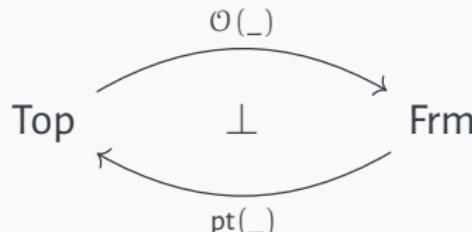
Teoría de marcos

$$\text{Frm} = \begin{cases} \text{Obj : } & (A, \leqslant, \wedge, \vee, \mathbb{1}, \circ) \\ \text{Flechas: } & f: A \rightarrow B \end{cases}$$

Para $S \in \text{Top}$,

$$(\emptyset S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \text{Frm}$$

Además,



es una adjunción.

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j: A \rightarrow A$ un morfismo monótono. Decimos que j es un **núcleo** si:

$$i) \ a \leq j(a) \quad ii) \ j^2(a) = j(a) \quad iii) \ j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

$NA = \{\text{núcleos en } A\}$.

Si $a \in A$, definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y $u_a, v_a, w_a \in NA$.

Definición

Sea $A \in \text{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

Sea $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$. Si $j \in NA$,

$$j: A \rightarrow A_j \text{ es suprayectivo} \quad \text{y} \quad A_j \in \text{Frm}$$

A_j es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

Filtros

Definición

Sea $A \in \text{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro** si:

1. $1 \in F$.
2. Si $a \leq b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.
3. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

En particular, decimos que F es un **filtro abierto** si:

$X \subseteq A$ dirigido tal que $\bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset$.

$A^\wedge =$ Filtros abiertos en A .

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \text{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para $j, k \in NA$ definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que $f \in [j]$ es un **núcleo ajustado** si para todo $k \in [j], f \leq k$. Equivalentemente

$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee \{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}.$$

El Teorema de Hofmann-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^\wedge$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^\wedge$ si y solo si A_j es compacto¹.
3. $F = \nabla(j) \in A^\wedge$ si y solo si para todo $k \in [j]$ se tiene que $v_F \leq k$, donde

$$v_F = f^\infty \quad \text{y} \quad v_F \text{ es ajustado.}$$

Teorema [Hofmann-Mislove]

Sea $A \in \text{Frm}$ y $S = \text{pt } A \in \text{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}_S$ y $F \in A^\wedge$.

¹ $A \in \text{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

El Teorema de Hofmann-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^\wedge$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^\wedge$ si y solo si A_j es compacto¹.
3. $F = \nabla(j) \in A^\wedge$ si y solo si para todo $k \in [j]$ se tiene que $v_F \leq k$, donde

$$v_F = f^\infty \quad \text{y} \quad v_F \text{ es ajustado.}$$

Teorema [Hofmann-Mislove (extendido)]

Sea $A \in \text{Frm}$ y $S = \text{pt } A \in \text{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{QS}$ y núcleos ajustados.

¹ $A \in \text{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

Espacio de parches

Consideremos $S \in \text{Top}$. Denotamos por ${}^p S = (S, \mathcal{O}^p S)$ al **espacio de parches** de S , donde $\mathcal{O}^p S$ está generado por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^p S \longrightarrow \mathcal{O}^f S$$

Definición

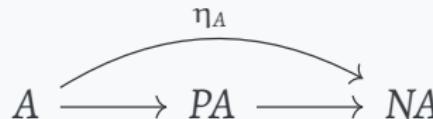
S es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado) es cerrado

S es empaquetado $\iff {}^p S = S$ y $T_2 \Rightarrow$ empaquetado $\Rightarrow T_1$

Marco de parches

Consideremos $A \in \text{Frm}$. Denotamos por PA al **marco de parches** de A , donde PA está generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}$$



Definición

A es **parche trivial** si y solo si $A \cong PA$.

$$? \Rightarrow \text{parche trivial} \Rightarrow T_1$$

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \text{Frm}$, $F \in A^\wedge$ y $\alpha \in \text{Ord}$. Decimos que:

1. F es **α -eficiente** si para $x \in F$, $d \vee x = 1$, donde

$$d = d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

2. A es **α -eficiente** si cada $F \in A^\wedge$ es α -eficiente.
3. A es **eficiente** si es α -eficiente para algún $\alpha \in \text{Ord}$.

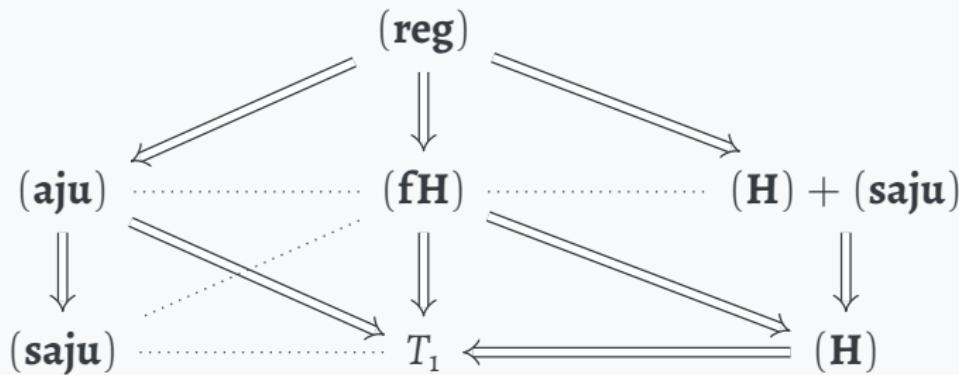
Proposición [[8], Lema 8.2.2]

$$A \text{ es eficiente} \iff A \text{ es parche trivial.}$$

Objetivos

1. Entender los marcos eficientes con mayor detalle.
2. Explorar su relación con algunos axiomas de separación en Frm.
3. Proporcionar herramientas que permitan estudiar a los marcos eficientes.
4. Dar ejemplos.

Axiomas de separación en Frm^2



²Para cualesquiera $a \not\leq b \in A$ tenemos que A es:

(reg) si $\exists x, y \in A$ tales que $a \vee x = 1, y \not\leq b$ y $x \wedge y = 0$.

(H) si $\exists c \in A$ tal que $c \not\leq a$ y $\neg c \leq b$.

(aju) si $\exists x, y \in A$ tales que $x \vee a = 1, y \not\leq b$ y $x \wedge y \leq b$.

(saju) si $\exists c \in A$ tal que $c \vee a = 1 \neq c \vee b$.

(fH) y T_1 son nociones algo diferentes. Todas estas pueden verse en [5].

Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [8]

- En el caso espacial ($A = \emptyset S$),

$$\emptyset S \text{ es } 0\text{-eficiente} \iff S = \emptyset$$

$$\emptyset S \text{ es } 1\text{-eficiente} \iff S \text{ is } T_2$$

$$\emptyset S \text{ es eficiente} \iff S \text{ es empaquetado y apilado.}$$

- Para $A \in \text{Frm}$ arbitrario

$$A \text{ es } (\mathbf{reg}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}$$

$$A \text{ es } (\mathbf{aju}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}$$

$$A \text{ es eficiente} \Rightarrow A \text{ es } T_1$$

Cronograma de actividades

Cronograma de actividades

Cronograma de actividades (2da mitad)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Consultar fuentes bibliográficas	✓	✓	✓	
Proponer conjeturas	✓	✓	✓	✓
Validación y rechazo de conjeturas	✓	✓	✓	✓
Redacción y presentación de artículos	✓	✓	✓	✓
Escritura de la tesis	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones	✓	✓	✓	✓
Sustentación				✓

¿Qué significa $u_d = v_F$?

Para $f = \bigvee\{v_\alpha \mid \alpha \in F\} \in NA$ y tomamos

$$f^\circ = \text{id}, \quad f^{\alpha+1} = f(f^\alpha), \quad f^\lambda = \bigvee\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Consideramos $v_F = f^\infty$. Entonces

- Si $d = v_F(\circ) \Rightarrow u_d \leqslant v_F$
- Si $x \in F$ tal que $u_d(x) = x \vee d = 1 \Rightarrow v_F \leqslant u_d$
- $f^\alpha \notin NA$, pero $f^\infty \in NA$.
- Bajo eficiencia obtenemos $F = \nabla(u_d)$.

El diccionario

Top

Frm

El diccionario

Top

Frm

- Espacio de parches ($^p S$)

El diccionario

Top

Frm

- Espacio de parches (pS)
- Marco de parches (PA)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase = $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase = $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- $\mathcal{PPA} = \mathcal{PPPA}?$
- $\mathcal{E}(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Eficiente?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- $\mathcal{PPA} = \mathcal{PPPA}?$
- $\mathcal{E}(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Eficiente?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?
- ¿(H) \Rightarrow Eficiente?
- Cocientes compactos cerrados.

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^p S$)
- pbase= $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^p S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?
- ¿(**H**) \Rightarrow Eficiente?
- **Cocientes compactos cerrados.**

Algunos resultados

Si $(f: A \rightarrow B) \in \text{Frm}$, $G \subseteq A$ y $F \subseteq B$ son filtros, entonces

$$b \in f[G] \iff f_*(b) \in G \quad \text{y} \quad a \in f_*[F] \iff f(a) \in F.$$

También, si $F \in B^\wedge$, entonces $f_*(F) \in A^\wedge$.

Proposición

Para f^∞ y f_j^∞ los núcleos asociados a $F \in A_j^\wedge$ y $j_*F \in A^\wedge$, respectivamente, tenemos que

$$j \circ f_j^\infty \leqslant f^\infty \circ j$$

Demostración

Por inducción transfinita. □

Más propiedades de los marcos eficientes

Proposición

Si $A \in \text{Frm}$ es eficiente y $j \in NA$, entonces A_j es eficiente.

Demostración

- Tomamos $x \in F \in A_j^\wedge$ y $F \subseteq j_*[F] \in A^\wedge$.
- Para f^∞ y f_j^∞ como antes, tenemos

$$d = d(\alpha) \geq d_j(\alpha) = d_j$$

- Ya que A es eficiente, entonces $d_j \vee x = 1$, para todo $x \in j_*[F]$.
En particular, para todo $x \in F$.
- Por lo tanto, $d \vee x = 1$.



Proposición

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de marcos eficientes, entonces $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es un marco eficiente.

Demostración

Sabemos que $\bigoplus A_i \in \text{Frm}$ y $(\iota_i: A_i \rightarrow \bigoplus A_i) \in \text{Frm}$. Entonces

- Existe $(\iota_i)_*$ y para $F \in (\bigoplus A_i)^\wedge$, $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$.
- Consideramos $\sup\{\alpha_i\}$ como el grado de eficiencia de cada A_i .
- Por la eficiencia, si $x_i \in (\iota_i)_*[F]$, entonces $x_i \vee d_i = 1$.
- Consideramos $\langle x_i \rangle \in F$.
- Verificamos que $\langle d_i \rangle \leq f_F^\alpha(\iota_i(o)) = d(\alpha) = d$.
- Por lo tanto $\langle x_i \rangle \vee d = 1$.

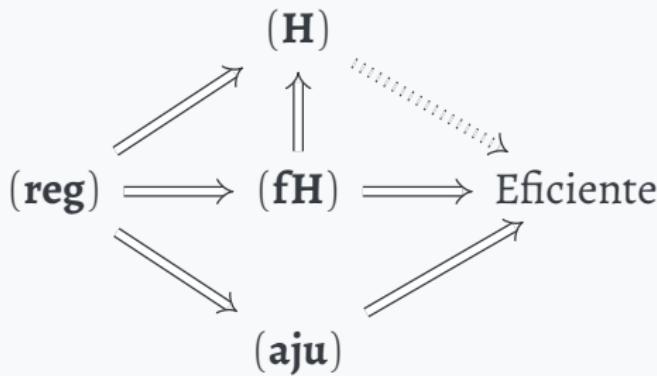


Corolario

Si A es (fH) , A es eficiente.

Demostración

Bajo (fH) todos los cocientes compactos son cerrados. □



Cocientes compactos

$$\text{Eficiente} \iff \text{P. trivial} \iff u_d = v_F$$

Notemos que

A_{u_d} es un cociente cerrado y A_{v_F} es un cociente compacto.

Si A es eficiente, tenemos un cociente compacto y cerrado.

Marcos KC

En [13], Wilansky menciona que $S \in \text{Top}$ es **KC** si cada subconjunto compacto es cerrado.

Definición

$A \in \text{Frm}$ es un **marco KC** si cada cociente compacto es cerrado.

KC \Rightarrow Eficiente

Proposición

Si $A \in \text{Frm}$ es **KC** y $j \in NA$, entonces A_j es **KC**.

Demostración

- Consideramos $k \in NA_j$ tal que $\nabla(k) \in A_j^\wedge$.
- Si $\nabla(k) \in A_j^\wedge \Rightarrow j_*[\nabla(k)] \in A^{\wedge_3}$.
- Tomamos $l = j_* \circ k \circ j \in NA$ y $\nabla(l) \in A^\wedge \Rightarrow l = u_a$ para algún $a \in A$.
- Además $a = k(j(a))$.
- Para $x, b \in A_j$ con $b = j(a)$ tenemos $u_b(x) = k(x)$.

□

³**Proposición:** Para $j \in NA$ y $k \in NA_j$. Si $\nabla(k) \in A_j^\wedge$, $\nabla(j_*k) \in A^\wedge$.

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\nu_F} & A_F \\ U_A \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{O}S & \xrightarrow{\nu_\nabla} & \mathcal{O}S_\nabla \end{array}$$

↗ ≈ ↘ ≈

donde $g = (U_A)_* \circ (\nu_\nabla)_{|A_F}$.

¿Qué pasa si A tiene la propiedad (**H**)?

Teorema

Sea A un marco con la propiedad **(H)**, entonces para cada $F \in A^\wedge$ y su correspondiente $Q \in \mathcal{QS}$, tenemos

$$\mathcal{O}Q \simeq \uparrow Q',$$

es decir, el marco de abiertos del espacio de puntos de A_F es isomorfo a un cociente compacto y cerrado de un espacio Hausdorff.

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$.
- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.
- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.
- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos α -eficientes.



Bibliografía I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque localico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
-  J. Paseka and B. Smarda, *T_2 -frames and almost compact frames*. Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.



Bibliografía II

-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
-  RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
-  RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.



Bibliografía III

-  H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.man.ac.uk/~hsimmons>.
-  H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*. Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.
-  H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.



Bibliografía IV

-  H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons>.
-  A. Wilansky, *Between T₁ and T₂*, MONTHLY (1967): 261-266.
-  A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.