

# **Modificaciones de parches**

## y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

*21 de enero de 2026*

**Juan Carlos Monter Cortés**  
**Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi**  
Universidad de Guadalajara

# La construcción de parches

Hochster define la topología de parches



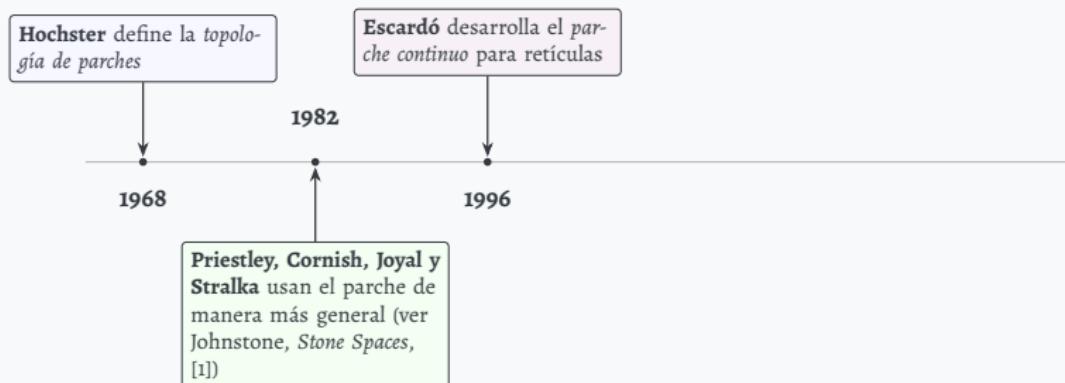
---

1968

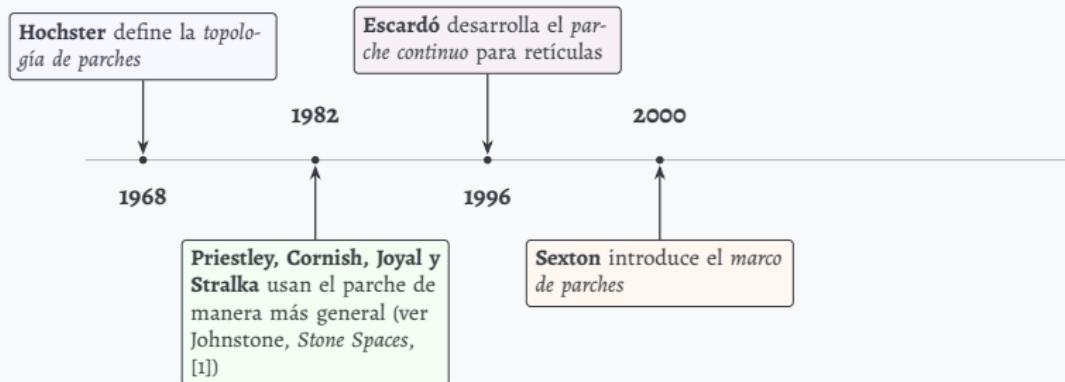
# La construcción de parches



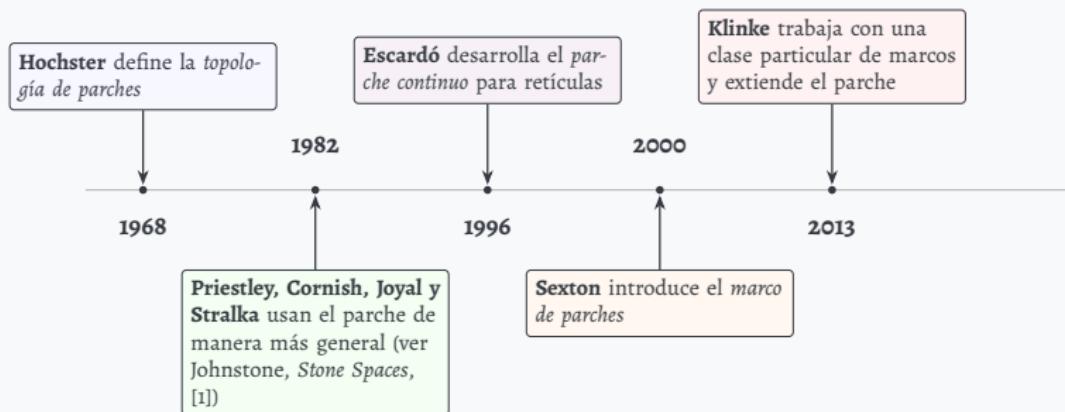
# La construcción de parches



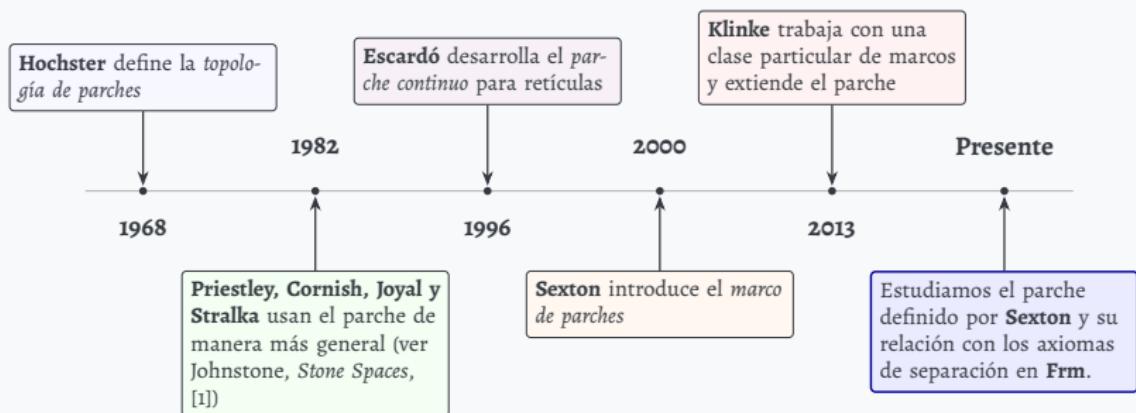
# La construcción de parches



# La construcción de parches



# La construcción de parches



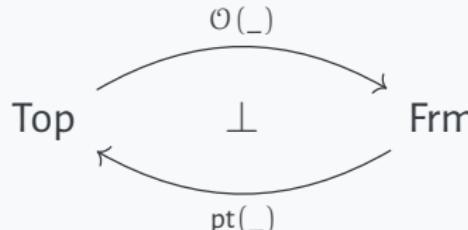
# Teoría de marcos

$$\text{Frm} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Obj :} & (A, \leqslant, \wedge, \vee, \mathbb{1}, \circ) \\ \text{Flechas:} & f: A \rightarrow B \end{array} \right.$$

Para  $S \in \text{Top}$ ,

$$(\emptyset S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \text{Frm}$$

Además,



es una adjunción.

# La relación entre Top, Loc y Frm

$$\text{Loc} = \text{Frm}^{\text{op}} \quad \text{y} \quad f \in \text{Frm} \implies f_* \in \text{Loc}.$$



**Subespacio**  
 $X \subseteq S$

**Sublocal**  
 $M \hookrightarrow L$

**Cociente**  
 $A \rightarrow B$

El estudio de los **cocientes** en Frm se realiza a través de los **núcleos**.

# Núcleos y cocientes

## *Definición*

Sea  $j: A \rightarrow A$ . Decimos que  $j$  es un **núcleo** si:

- |  |  |
|--|--|
| <b>(N1)</b> $a \leqslant j(a)$ .                                 | <b>(N3)</b> $j(j(a)) = j(a)$ .                   |
| <b>(N2)</b> si $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$ . | <b>(N4)</b> $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$ . |

$NA = \{\text{núcleos en } A\}$ . Para  $a \in A$ , definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y  $u_a, v_a, w_a \in NA$ .

---

°Recordemos que  $a \succ x = \bigvee \{c \in A \mid c \wedge a \leqslant x\}$ .

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

## Definición

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

Si  $j \in NA$  y  $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$ , entonces

$j^*: A \rightarrow A_j$ , dado por  $j^*(a) = j(a)$ , es suprayectivo y  $A_j \in \text{Frm}$ .

$A_j$  es el *marco cociente*.

## Definición

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

Si  $j \in NA$  y  $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$ , entonces

$j^*: A \rightarrow A_j$ , dado por  $j^*(a) = j(a)$ , es suprayectivo y  $A_j \in \text{Frm}$ .

$A_j$  es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

# Filtros

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Decimos que  $F \subseteq A$  es un **filtro** si:

1.  $1 \in F$ .
2. Si  $a \leqslant b$  y  $a \in F$ , entonces  $b \in F$ .
3. Si  $a, b \in F$ , entonces  $a \wedge b \in F$ .

# Filtros

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Decimos que  $F \subseteq A$  es un **filtro** si:

1.  $1 \in F$ .
2. Si  $a \leqslant b$  y  $a \in F$ , entonces  $b \in F$ .
3. Si  $a, b \in F$ , entonces  $a \wedge b \in F$ .

En particular, decimos que  $F$  es un **filtro abierto** si:

$X \subseteq A$  dirigido tal que  $\bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset$ .

$A^\wedge =$ Filtros abiertos en  $A$ .

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admissible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admissible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para  $j, k \in NA$  definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para  $j, k \in NA$  definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que  $f$  es un **núcleo ajustado** si es el menor elemento de su bloque. Equivalentemente

$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee \{v_a \mid a \in A\}.$$

# El Teorema de Hofmann-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>1</sup>.
3.  $F \in A^\wedge$  si y solo  $v_F = f_F^\infty$  es el menor núcleo que admite a  $F$

## *Teorema [Hofmann-Mislove]*

Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $S = \text{pt}A \in \text{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{QS}$  y  $F \in A^\wedge$ .

---

<sup>0</sup> $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$ .  $f_F^0 = id$ ,  $f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^\alpha)$  y  $f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ .

<sup>1</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# El Teorema de Hofmann-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>1</sup>.
3.  $F \in A^\wedge$  si y solo  $v_F = f_F^\infty$  es el menor núcleo que admite a  $F$

## *Teorema [Hofmann-Mislove-Johnstone]*

Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $S = \text{pt } A \in \text{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{QS}$  y núcleos ajustados.

---

<sup>0</sup> $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$ .  $f_F^0 = id$ ,  $f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^\alpha)$  y  $f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ .

<sup>1</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# El Teorema de Hofmann-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>1</sup>.
3.  $F \in A^\wedge$  si y solo  $v_F = f_F^\infty$  es el menor núcleo que admite a  $F$

## *Teorema [Hofmann-Mislove-Johnstone]*

Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $S = \text{pt} A \in \text{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{QS}$  y núcleos ajustados.

$$Q \longleftrightarrow F \longleftrightarrow v_F$$

---

<sup>0</sup> $f_F = \dot{\bigvee} = \{v_a \mid a \in F\}$ .  $f_F^0 = id$ ,  $f_F^{\alpha+1} = f_F \circ (f_F^\alpha)$  y  $f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ .

<sup>1</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# Espacio de parches

Consideremos  $S \in \text{Top}$ . Denotamos por  ${}^p S = (S, \mathcal{O}^p S)$  al **espacio de parches** de  $S$ , donde  $\mathcal{O}^p S$  está generado por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^p S$$

## Definición

$S$  es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado<sup>2</sup>) es cerrado

$S$  es empaquetado  $\iff {}^p S = S$  y  $T_2 \Rightarrow$  empaquetado  $\Rightarrow T_1$

---

<sup>2</sup> $E \subseteq S$  es saturado si  $E = \overline{\bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}}$ .

# Marco de parches

Consideremos  $A \in \text{Frm}$ . Denotamos por  $PA$  al **marco de parches** de  $A$ , donde  $PA$  está generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}$$

$$A \xrightarrow{\quad} PA \xrightarrow{\quad} NA \qquad \eta_A(a) = u_a$$

## Definición

$A$  es **parche trivial** si y solo si  $A \cong PA$ .

$$? \Rightarrow \text{parche trivial} \Rightarrow T_1$$

**¿Cuándo ocurre que  $A \cong PA$ ?**

# El diccionario

Top

Frm

# El diccionario

Top

Frm

- Espacio de parches ( $^p S$ )

# El diccionario

Top

Frm

- Espacio de parches ( $^pS$ )
- Marco de parches (PA)

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase =  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase =  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase =  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase =  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase =  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$  Empaquetado

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase =  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?
- ¿( $\mathbf{H}$ )  $\Rightarrow$  Parche trivial?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase =  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$  Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase =  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- $\mathcal{PPA} = PPPA?$
- $\mathcal{H} \Rightarrow$  Parche trivial?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?
- ¿(H)  $\Rightarrow$ Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_d = v_F$
- ¿PPA = PPPA?
- ¿(**H**)  $\Rightarrow$ Parche trivial?
- **Cocientes compactos cerrados.**

# Marcos eficientes

*Definición [[8], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

# Marcos eficientes

## *Definición [[8], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(\circ).$$

# Marcos eficientes

## *Definición [[8], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(\circ).$$

2.  $A$  es  **$\alpha$ -eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.

# Marcos eficientes

## *Definición [[8], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(\circ).$$

2.  $A$  es  **$\alpha$ -eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.
3.  $A$  es **eficiente** si es  $\alpha$ -eficiente para algún  $\alpha \in \text{Ord}$ .

# Marcos eficientes

## *Definición [[8], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d \vee x = 1$ , donde

$$d := d(\alpha) = f^\alpha(\circ).$$

2.  $A$  es  **$\alpha$ -eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.
3.  $A$  es **eficiente** si es  $\alpha$ -eficiente para algún  $\alpha \in \text{Ord}$ .

## *Proposición [[8], Lema 8.2.2]*

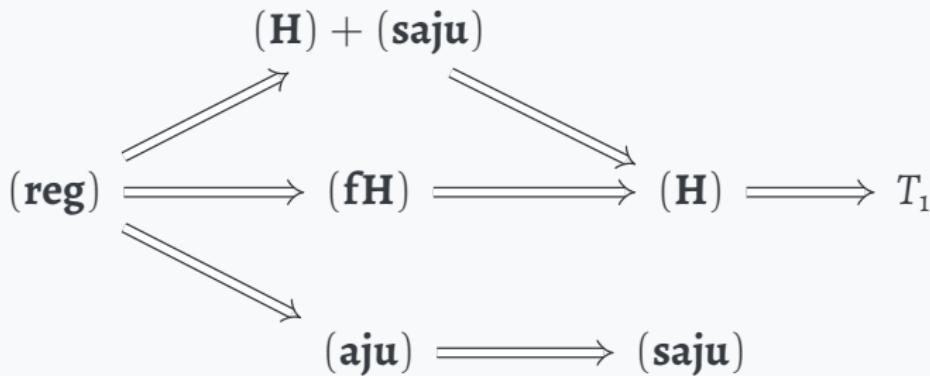
$$A \text{ es eficiente} \iff A \text{ es parche trivial.}$$

# Axiomas de separación en Frm

Para cualesquiera  $a \not\leq b \in A$  tenemos que A es:

- **(reg):** si  $\exists x, y \in A$  tales que  $a \vee x = 1, y \not\leq b$  y  $x \wedge y = 0$ .
- **(H):** si  $\exists c \in A$  tal que  $c \not\leq a$  y  $\neg c \leq b$ .
- **(aju):** si  $\exists x, y \in A$  tales que  $x \vee a = 1, y \not\leq b$  y  $x \wedge y \leq b$ .
- **(saju):** si  $\exists c \in A$  tal que  $c \vee a = 1 \neq c \vee b$ .
- **(fH):** si el sublocal diagonal es cerrado.
- $T_1 : \text{si } p \in \text{pt}A, p \text{ es máximo.}$

# Axiomas de separación en Frm



¿Qué relación existe entre los axiomas de separación y los marcos eficientes?

# Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [8]

- En el caso espacial ( $A = \emptyset S$ ),

$$\emptyset S \text{ es } 0\text{-eficiente} \iff S = \emptyset$$

$$\emptyset S \text{ es } 1\text{-eficiente} \iff S \text{ es } T_2$$

$$\emptyset S \text{ es eficiente} \iff S \text{ es empaquetado y apilado.}$$

- Para  $A \in \text{Frm}$  arbitrario

$$A \text{ es } (\mathbf{reg}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}$$

$$A \text{ es eficiente} \Rightarrow A \text{ es } T_1$$

**A es (aju)  $\Rightarrow$  A es eficiente**

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

**En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.**

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

**1-eficiente  $\not\Rightarrow (\mathbf{reg})$**

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

**En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.**

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

**1-eficiente  $\not\Rightarrow (\text{reg})$**

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

**2-eficiente  $\not\Rightarrow (\text{H})$**

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

1-eficiente  $\not\Rightarrow (\mathbf{reg})$

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

2-eficiente  $\not\Rightarrow (\mathbf{H})$

- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos  $\omega$ -eficientes.

$\omega$ -eficiente  $\not\Rightarrow n\text{-eficiente para algún } n \in \mathbb{N}$

# Objetivos

**Objetivo principal:** Establecer la eficiencia como un axioma de separación libre de puntos.

## **Objetivos específicos:**

1. Comprender la noción de eficiencia con mayor detalle.
2. Analizar el comportamiento del parche libre de puntos
3. Explorar su relación con algunos axiomas de separación en Frm.
4. Investigar nociones libres de puntos y sensibles de puntos relacionadas con la eficiencia.
5. Desarrollar herramientas que permitan el estudio de los marcos eficientes.
6. Construir ejemplos que ilustren el comportamiento de los marcos eficientes y del marco de parches.

# ¿Qué significa $u_d = v_F$ ?

Para  $f = \dot{\bigvee} \{v_\alpha \mid \alpha \in F\} \notin NA$  y tomamos

$$f^\circ = \text{id}, \quad f^{\alpha+1} = f(f^\alpha), \quad f^\lambda = \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Consideramos  $v_F = f^\infty \in NA$ . Entonces

- Si  $d = v_F(0) \Rightarrow u_d \leqslant v_F$
- Si  $x \in F$  tal que  $u_d(x) = x \vee d = 1 \Rightarrow v_F \leqslant u_d$
- Bajo eficiencia obtenemos  $F = \nabla(u_d)$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

*Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

## *Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

1. Si  $j \leq k$ , entonces  $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

## *Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

1. Si  $j \leq k$ , entonces  $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ .
2. Si  $j$  es ajustado, se cumple que

$$j \leq k \iff \nabla(j) \subseteq \nabla(k).$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(\circ) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(\circ) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(\circ) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Por lo tanto  $\nabla(u_{d(1)}) = F$ .

## *Observaciones:*

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto  $F$ , proporciona un cociente compacto cerrado.

## *Observaciones:*

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto  $F$ , proporciona un cociente compacto cerrado.
- Entre más grande es el grado de eficiencia, más lejos está el marco de ser Hausdorff.

# Algunos resultados

Si  $(f: A \rightarrow B) \in \text{Frm}$ ,  $G \subseteq A$  y  $F \subseteq B$  son filtros, entonces

$$b \in f[G] \iff f_*(b) \in G \quad \text{y} \quad a \in f_*[F] \iff f(a) \in F.$$

También, si  $F \in B^\wedge$ , entonces  $f_*(F) \in A^\wedge$ .

## *Proposición*

Para  $f^\infty$  y  $f_j^\infty$  los núcleos asociados a  $F \in A_j^\wedge$  y  $j_*F \in A^\wedge$ , respectivamente, tenemos que

$$j \circ f_j^\infty \leqslant f^\infty \circ j$$

## *Demostración*

Por inducción transfinita. □

# Más propiedades de los marcos eficientes

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  es eficiente y  $j \in NA$ , entonces  $A_j$  es eficiente.

## *Demostración*

- Tomamos  $x \in F \in A_j^\wedge$  y  $F \subseteq j_*[F] \in A^\wedge$ .
- Ya que  $A$  es eficiente, entonces  $d \vee x = 1$ , para todo  $x \in j_*[F]$ .  
En particular, para todo  $x \in F$ .
- Para  $f^\infty$  y  $f_j^\infty$  como antes, tenemos

$$d = d(\alpha) \leqslant d_j(\alpha) = d_j$$

- Por lo tanto,  $d_j \vee x = 1$ .



## *Proposición*

Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de marcos eficientes, entonces  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  es un marco eficiente.

## *Demostración*

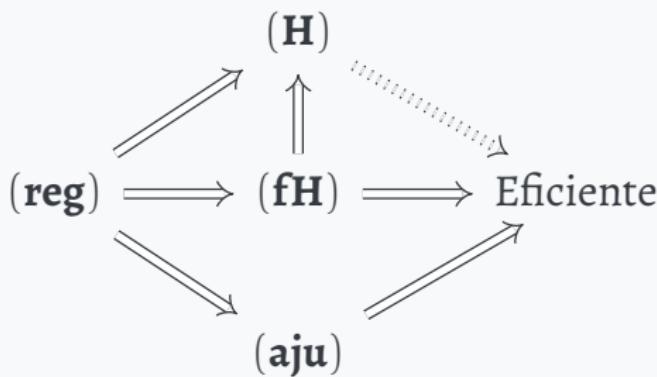
Sabemos que  $\bigoplus A_i \in \text{Frm}$  y  $(\iota_i: A_i \rightarrow \bigoplus A_i) \in \text{Frm}$ . Entonces

- Existe  $(\iota_i)_*$  y para  $F \in (\bigoplus A_i)^\wedge$ ,  $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$ .
- Consideramos  $\alpha = \sup\{\alpha_i\}$  como el grado de eficiencia de cada  $A_i$ .
- Por la eficiencia, si  $x_i \in (\iota_i)_*[F]$ , entonces  $x_i \vee d_i = 1$ .
- Consideramos  $\langle x_i \rangle \in F$ .
- Verificamos que  $\langle d_i \rangle \leq f_F^\alpha(\iota_i(\circ)) = d(\alpha) = d$ .
- Por lo tanto  $\langle x_i \rangle \vee d = 1$ .



## *Corolario*

Si  $A$  es  $(fH)$ ,  $A$  es eficiente.



# Cocientes compactos

$$\text{Eficiente} \iff \text{P. trivial} \iff u_d = v_F$$

Notemos que

$A_{u_d}$  es un cociente cerrado y  $A_{v_F}$  es un cociente compacto.

Si  $A$  es eficiente, tenemos un cociente compacto y cerrado.

En [13], Wilansky menciona que  $S \in \text{Top}$  es **KC** si cada subconjunto compacto es cerrado.

# Marcos KC

## *Definición*

$A \in \text{Frm}$  es un **marco KC** si cada cociente compacto es cerrado.

**KC**  $\Rightarrow$  Eficiente

**¿Existen marcos que son eficientes y no son KC?**

*Proposición:*

Para  $j \in NA$  y  $k \in NA_j$ . Si  $\nabla(k) \in A_j^\wedge$ ,  $\nabla(j_*kj) \in A^\wedge$ .

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  es **KC** y  $j \in NA$ , entonces  $A_j$  es **KC**.

## *Demostración*

- Consideramos  $k \in NA_j$  tal que  $\nabla(k) \in A_j^\wedge$ .
- Si  $\nabla(k) \in A_j^\wedge \Rightarrow j_*[\nabla(k)] \in A^\wedge$ .
- Tomamos  $l = j_* \circ k \circ j \in NA$  y  $\nabla(l) \in A^\wedge \Rightarrow l = u_a$  para algún  $a \in A$ .
- Además  $a = k(j(a))$ .
- Para  $x, b \in A_j$  con  $b = j(a)$  tenemos  $u_b(x) = k(x)$ .



## Definición:

1. Para  $\mathcal{P}$  una propiedad que satisface  $A \in \text{Frm}$  decimos que  $\mathcal{P}$  es conservativa si  $S = \text{pt} A$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}_s$ .
  2. Para  $\mathcal{P}_s$  una propiedad que satisface  $S \in \text{Top}$  decimos que  $\mathcal{P}_s$  es conservativa si  $A = \mathcal{O}S$  satisface la propiedad  $\mathcal{P}$ .
- 
- (**reg**), (**H**), y  $T_1$  son conservativas.
  - (**fH**) no es conservativa ( $T_2 \not\Rightarrow (\mathbf{fH})$ ).
  - Eficiente no es conservativa (empaqueado  $\not\Rightarrow$  eficiente).
  - En el caso espacial, **KC** = empaquetado.

Podemos construir el diagrama (ver [12])

Podemos construir el diagrama (ver [12])

A

Podemos construir el diagrama (ver [12])

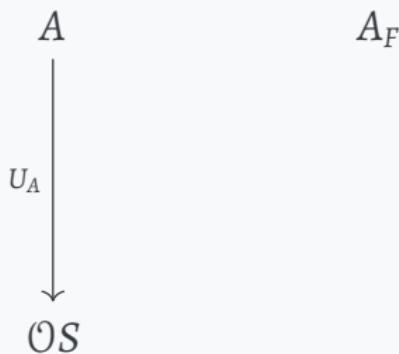
*A*

*OS*

Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\ U_A \downarrow & & \\ \mathcal{O}S & & \end{array}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\ U_A \downarrow & & \\ \mathcal{OS} & & \mathcal{OS}_\nabla \end{array}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\ U_A \downarrow & & \\ \mathcal{OS} & \xrightarrow{v_\nabla} & \mathcal{OS}_\nabla \end{array}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

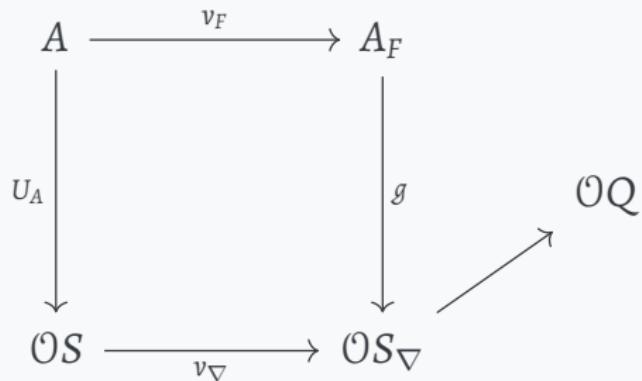
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\ U_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{J} \\ \mathcal{O}S & \xrightarrow{v_\nabla} & \mathcal{O}S_\nabla \end{array}$$

Podemos construir el diagrama (ver [12])

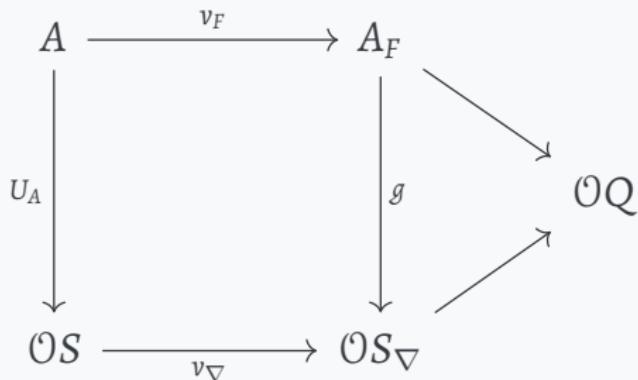
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_F} & A_F \\ U_A \downarrow & & \downarrow \mathcal{G} \\ \mathcal{O}S & \xrightarrow{v_\nabla} & \mathcal{O}S_\nabla \end{array}$$

$\mathcal{O}Q$

Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])



Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\nu_F} & A_F \\
 U_A \downarrow & & \downarrow g \\
 \mathcal{O}S & \xrightarrow{\nu_\nabla} & \mathcal{O}S_\nabla
 \end{array}$$

donde  $g = (U_A)_* \circ (\nu_\nabla)_{|A_F}$ .

¿Qué pasa si  $A$  tiene la propiedad **(H)**?

## *Teorema*

Sea  $A$  un marco con la propiedad **(H)**, entonces para cada  $F \in A^\wedge$  y su correspondiente  $Q \in \mathcal{QS}$ , tenemos

$$\mathcal{O}Q \simeq \uparrow Q',$$

es decir, el marco de abiertos del espacio de puntos de  $A_F$  es isomorfo a un cociente compacto y cerrado de un espacio Hausdorff.

## Cronograma de actividades

## Cronograma de actividades

# Cronograma de actividades (2da mitad)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Consultar fuentes bibliográficas	✓	✓	✓	
Proponer conjeturas	✓	✓	✓	✓
Validación y rechazo de conjeturas	✓	✓	✓	✓
Redacción y presentación de artículos	✓	✓	✓	✓
Escritura de la tesis	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones	✓	✓	✓	✓
Sustentación				✓

# Cosas por hacer

- Obtener un ejemplo de marco eficiente que no sea KC.
- Probar que los marcos KC son cerrados bajo coproductos.
- Dar la noción libre de puntos de apilado y fuertemente apilado.
- Establecer las condiciones necesarias y suficientes para relacionar eficiencia con (**H**).
- :



# Bibliografía I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque localico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
-  J. Paseka and B. Smarda,  *$T_2$ -frames and almost compact frames*. Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.



## Bibliografía II

-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
-  RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
-  RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.



# Bibliografía III

-  H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.man.ac.uk/~hsimmons>.
-  H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*. Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.
-  H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.



# Bibliografía IV

-  H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons>.
-  A. Wilansky, *Between T<sub>1</sub> and T<sub>2</sub>*, MONTHLY (1967): 261-266.
-  A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.