

# **¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?**

*Seminario de Álgebra, CUCEI  
21 de noviembre de 2025*

**Juan Carlos Monter Cortés**

Universidad de Guadalajara

✉ juan.monter2902@alumnos.udg.mx

⌚ [github.com/JCmonter](https://github.com/JCmonter)

Investigación apoyada por SECIHTI-PROYECTO CBF2023-2024-2630

# Contenido

Construcciones de parches

Teoría de marcos

Marco de parches

Parche trivial

Marcos eficientes

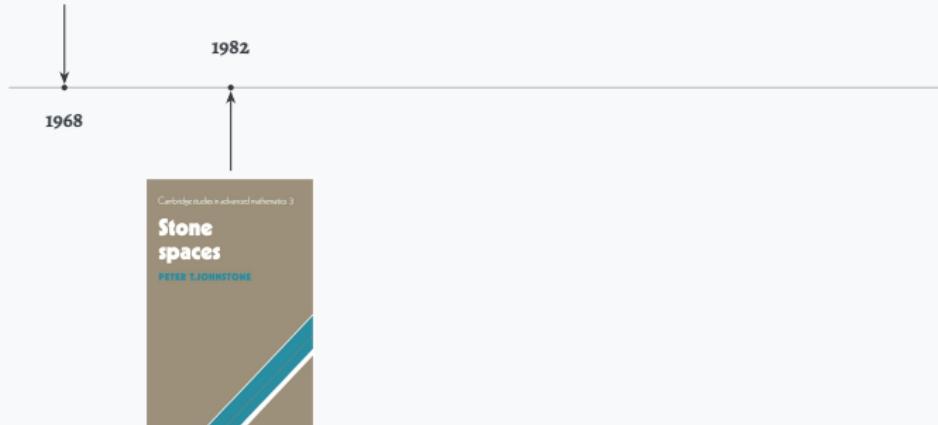
Ejemplos

# Un poco de historia



1968

# Un poco de historia



# Un poco de historia



## Un poco de historia



1982

1968

1996

2000

1968



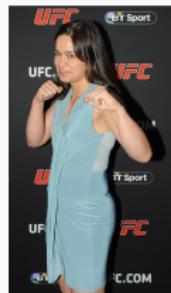
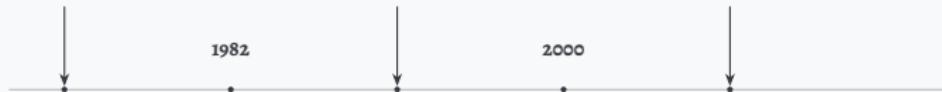
# Un poco de historia



A BITOPOLOGICAL POINT-FREE APPROACH TO  
COMPACTIFICATIONS

by

Olaf Karl Kleinecke



# Un poco de historia

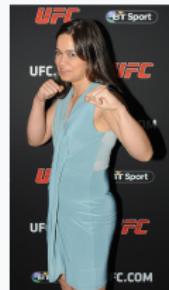
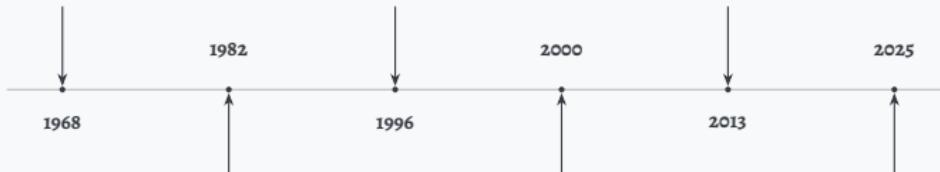


A BITOPOLOGICAL POINT-FREE APPROACH TO  
COMPACTIFICATIONS

by

Olaf Karl Kleine

2025



# Espacio de parches

Consideremos  $S \in \text{Top}$ . Denotamos por  ${}^pS = (S, \mathcal{O}^p S)$  al **espacio de parches** de  $S$ , donde  $\mathcal{O}^p S$  está generado por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S^1\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^p S$$

---

<sup>1</sup>Decimos que  $Q \subseteq S$  es saturado si  $Q = \bigcap \{V \in \mathcal{O}S \mid Q \subseteq V\}$ .  
 $\mathcal{Q}S =$  Conjuntos compactos saturados de  $S$ .

# Espacio de parches

Consideremos  $S \in \text{Top}$ . Denotamos por  ${}^pS = (S, \mathcal{O}^p S)$  al **espacio de parches** de  $S$ , donde  $\mathcal{O}^p S$  está generado por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S^1\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^p S$$

## Definición

$S$  es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado) es cerrado

$S$  es empaquetado  $\iff {}^pS = S$  y  $T_2 \Rightarrow$  empaquetado  $\Rightarrow T_1$

---

<sup>1</sup>Decimos que  $Q \subseteq S$  es saturado si  $Q = \bigcap \{V \in \mathcal{O}S \mid Q \subseteq V\}$ .  
 $\mathcal{Q}S =$  Conjuntos compactos saturados de  $S$ .

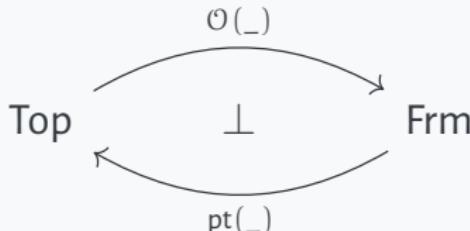
# Teoría de marcos

$$\text{Frm} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Obj :} & (A, \leqslant, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{o}) \\ \text{Flechas:} & f: A \rightarrow B \end{array} \right.$$

Para  $S \in \text{Top}$ ,

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \text{Frm}$$

Además,



es una adjunción, es decir,  $\text{Hom}_{\text{Top}}(\text{pt } A, S) \cong \text{Hom}_{\text{Frm}}(A, \mathcal{O}S)$ .

# Núcleos y cocientes

## *Definición*

Sea  $j: A \rightarrow A$ . Decimos que  $j$  es un **núcleo** si para todo  $a, b \in A$  se cumplen:

- i)  $a \leq j(a)$
- ii)  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
- iii)  $j^2(a) = j(a)$
- iv)  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

# Núcleos y cocientes

## *Definición*

Sea  $j: A \rightarrow A$ . Decimos que  $j$  es un **núcleo** si para todo  $a, b \in A$  se cumplen:

- i)  $a \leqslant j(a)$
- ii)  $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
- iii)  $j^2(a) = j(a)$
- iv)  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

$$NA = \{\text{núcleos en } A\} \in \text{Frm.}$$

# Núcleos y cocientes

## *Definición*

Sea  $j: A \rightarrow A$ . Decimos que  $j$  es un **núcleo** si para todo  $a, b \in A$  se cumplen:

- i)  $a \leq j(a)$
- ii)  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
- iii)  $j^2(a) = j(a)$
- iv)  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

$$NA = \{\text{núcleos en } A\} \in \text{Frm.}$$

Si  $a \in A$ , definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y  $u_a, v_a, w_a \in NA$ .

.

# Núcleos y cocientes

## *Definición*

Sea  $j: A \rightarrow A$ . Decimos que  $j$  es un **núcleo** si para todo  $a, b \in A$  se cumplen:

- i)  $a \leq j(a)$
- ii)  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
- iii)  $j^2(a) = j(a)$
- iv)  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

$NA = \{\text{núcleos en } A\} \in \text{Frm.}$

Si  $a \in A$ , definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y  $u_a, v_a, w_a \in NA$ . Además,  $\eta_A: A \rightarrow NA$  dada por  $\eta_A(a) = u_a$ .

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

## Definición

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

Sea  $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$ . Si  $j \in NA$ ,

$j: A \rightarrow A_j$  es suprayectivo y  $A_j \in \text{Frm}$

$A_j$  es el *marco cociente*.

## Definición

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Un **cociente** de  $A$  es un marco  $B$  y un morfismo

$$f: A \rightarrow B$$

suprayectivo.

Sea  $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$ . Si  $j \in NA$ ,

$$j: A \rightarrow A_j \text{ es suprayectivo} \quad \text{y} \quad A_j \in \text{Frm}$$

$A_j$  es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

# Filtros

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Decimos que  $F \subseteq A$  es un **filtro** si:

1.  $1 \in F$ .
2. Si  $a \leq b$  y  $a \in F$ , entonces  $b \in F$ .
3. Si  $a, b \in F$ , entonces  $a \wedge b \in F$ .

# Filtros

## *Definición*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Decimos que  $F \subseteq A$  es un **filtro** si:

1.  $1 \in F$ .
2. Si  $a \leq b$  y  $a \in F$ , entonces  $b \in F$ .
3. Si  $a, b \in F$ , entonces  $a \wedge b \in F$ .

En particular, decimos que  $F$  es un **filtro abierto** si:

$X \subseteq A$  dirigido tal que  $\bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset$ .

$A^\wedge =$ Filtros abiertos en  $A$ .

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admissible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admissible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para  $j, k \in NA$  definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admissible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para  $j, k \in NA$  definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que  $f \in [j]$  es un **núcleo ajustado** si para todo  $k \in [j], f \leq k$ .

# Filtros de admisibilidad

## *Definición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ .

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

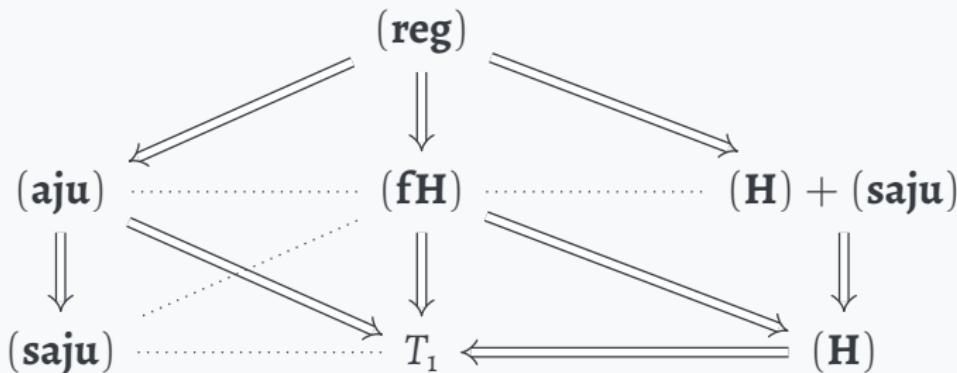
2. Para  $j, k \in NA$  definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que  $f \in [j]$  es un **núcleo ajustado** si para todo  $k \in [j], f \leq k$ . Equivalentemente

$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee \{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}.$$

# Axiomas de separación en $\text{Frm}^2$



<sup>2</sup>Para cualesquiera  $a \not\leq b \in A$  tenemos que A es:

**(reg)** si  $\exists x, y \in A$  tales que  $a \vee x = 1, y \not\leq b$  y  $x \wedge y = 0$ .

**(H)** si  $\exists c \in A$  tal que  $c \not\leq a$  y  $\neg c \leq b$ .

**(aju)** si  $\exists x, y \in A$  tales que  $x \vee a = 1, y \not\leq b$  y  $x \wedge y \leq b$ .

**(saju)** si  $\exists c \in A$  tal que  $c \vee a = 1 \neq c \vee b$ .

**(fH)** y  $T_1$  son nociones algo diferentes. Todas estas pueden verse en [3].

# El Teorema de Hoffman-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>3</sup>.
3.  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$  si y solo si para todo  $k \in [j]$  se tiene que  $v_F \leq k$ , donde  $v_F = f_F^\infty$ .

---

<sup>3</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# El Teorema de Hoffman-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>3</sup>.
3.  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$  si y solo si para todo  $k \in [j]$  se tiene que  $v_F \leq k$ , donde  $v_F = f_F^\infty$ .

## *Teorema [Hoffman-Mislove]*

Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $S = \text{pt } A \in \text{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{Q}_S$  y  $F \in A^\wedge$ .

$$Q \longleftrightarrow F$$

---

<sup>3</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# El Teorema de Hoffman-Mislove

## *Proposición*

1. Si  $F \in A^\wedge$ , entonces  $F = \nabla(j)$ .
2.  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$  si y solo si  $A_j$  es compacto<sup>3</sup>.
3.  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$  si y solo si para todo  $k \in [j]$  se tiene que  $v_F \leq k$ , donde  $v_F = f_F^\infty$ .

## *Teorema [Hoffman-Mislove (extendido)]*

Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $S = \text{pt } A \in \text{Top}$ . Existe una correspondencia biyectiva entre  $Q \in \mathcal{Q}_S$  y núcleos ajustados.

$$Q \longleftrightarrow F \longleftrightarrow v_F$$

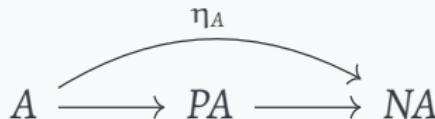
---

<sup>3</sup> $A \in \text{Frm}$  es compacto si y solo si para  $X \subseteq A$ ,  $1 = \bigvee X$ .

# Marco de parches

Consideremos  $A \in \text{Frm}$ . Denotamos por  $PA$  al **marco de parches** de  $A$ , donde  $PA$  está generado por

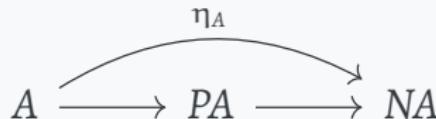
$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}$$



# Marco de parches

Consideremos  $A \in \text{Frm}$ . Denotamos por  $PA$  al **marco de parches** de  $A$ , donde  $PA$  está generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}$$



## Definición

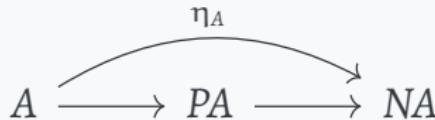
$A$  es **parche trivial** si y solo si  $A \simeq PA$ .

$$? \Rightarrow \text{parche trivial} \Rightarrow T_1$$

# Marco de parches

Consideremos  $A \in \text{Frm}$ . Denotamos por  $PA$  al **marco de parches** de  $A$ , donde  $PA$  está generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}$$



## Definición

$A$  es **parche trivial** si y solo si  $A \simeq PA$ . *¿Cuándo sucede esto?*

$$? \Rightarrow \text{parche trivial} \Rightarrow T_1$$

# El diccionario

Top

Frm

# El diccionario

Top

Frm

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )

Frm

- Marco de parches (PA)

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$

# El diccionario

Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$
- $\xi(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$
- $\xi(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$
- $\xi(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$
- $\xi(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$
- $\xi(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

# El diccionario

## Top

- Espacio de parches ( ${}^p S$ )
- pbase=  $\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado ( ${}^p S = S$ )
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$ Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

## Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase=  $\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ( $PA \cong A$ )
- $u_a = v_F$
- $\xi(\mathbf{H}) \Rightarrow$ Parche trivial?
- **Cocientes compactos cerrados.**

# Parche trivial vs otras propiedades

*Proposición [Caso espacial ( $A = \emptyset S$ )]*

Sea  $S \in \text{Top}$ . Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si  $S$  es  $T_2$ , entonces  $\emptyset S$  es parche trivial.
2. Si  $S$  es  $T_1$ , sobrio y empaquetado, entonces  $\emptyset S$  es parche trivial.

# Parche trivial vs otras propiedades

## *Proposición [Caso espacial ( $A = \emptyset S$ )]*

Sea  $S \in \text{Top}$ . Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si  $S$  es  $T_2$ , entonces  $\emptyset S$  es parche trivial.
2. Si  $S$  es  $T_1$ , sobrio y empaquetado, entonces  $\emptyset S$  es parche trivial.

## *Proposición [Caso general]*

Sea  $A \in \text{Frm}$ . Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si  $A$  cumple (**reg**) y  $j \in NA$ . Si  $\nabla(j) \in A^\wedge$ , entonces  $j = u_a$ , donde  $a = j(\circ)$ .
2. Si  $A$  cumple (**aju**), entonces  $j \in NA$  es ajustado.

# Comparando $u_a$ y $v_F$

*Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , las siguientes se cumplen:

# Comparando $u_a$ y $v_F$

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , las siguientes se cumplen:

1.  $u_a \leq j \iff a \leq j(o)$

# Comparando $u_a$ y $v_F$

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , las siguientes se cumplen:

1.  $u_a \leq j \iff a \leq j(o)$
2.  $v_a \leq j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j).$

# Comparando $u_a$ y $v_F$

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , las siguientes se cumplen:

1.  $u_a \leq j \iff a \leq j(\circ)$
2.  $v_a \leq j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j).$

Para  $f_F = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$ , tenemos

$$f^\circ = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^\alpha, \quad f^\lambda = \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así  $v_F = f^\infty$ .

# Comparando $u_a$ y $v_F$

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , las siguientes se cumplen:

1.  $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(\circ)$
2.  $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j).$

Para  $f_F = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$ , tenemos

$$f^\circ = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^\alpha, \quad f^\lambda = \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así  $v_F = f^\infty$ . De manera similar,

$$d(\circ) = \circ, \quad d(\alpha + 1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee \{d(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}.$$

# Comparando $u_a$ y $v_F$

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , las siguientes se cumplen:

1.  $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(o)$
2.  $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j).$

Para  $f_F = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$ , tenemos

$$f^o = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^\alpha, \quad f^\lambda = \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así  $v_F = f^\infty$ . De manera similar,

$$d(o) = o, \quad d(\alpha + 1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee \{d(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}.$$

Si  $d = f^\infty(o) = v_F(o)$ , se cumple que  $u_d \leqslant v_F$ .

# Comparando $u_a$ y $v_F$

## *Proposición*

Si  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , las siguientes se cumplen:

1.  $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(o)$
2.  $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j).$

Para  $f_F = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$ , tenemos

$$f^o = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^\alpha, \quad f^\lambda = \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así  $v_F = f^\infty$ . De manera similar,

$$d(o) = o, \quad d(\alpha + 1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee \{d(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}.$$

Si  $d = f^\infty(o) = v_F(o)$ , se cumple que  $u_d \leqslant v_F$ . ¿Cuándo  $v_F \leqslant u_d$ ?

# Marcos eficientes

*Definición [[6], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

# Marcos eficientes

*Definición [[6], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d(\alpha) \vee x = 1$ , donde

$$d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

# Marcos eficientes

## *Definición [[6], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d(\alpha) \vee x = 1$ , donde

$$d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

2.  $A$  es  **$\alpha$ -eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.

# Marcos eficientes

## *Definición [[6], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d(\alpha) \vee x = 1$ , donde

$$d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

2.  $A$  es  **$\alpha$ -eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.
3.  $A$  es **eficiente** si es  $\alpha$ -eficiente para algún  $\alpha \in \text{Ord}$ .

# Marcos eficientes

## *Definición [[6], Def. 8.2.1]*

Sean  $A \in \text{Frm}$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $\alpha \in \text{Ord}$ . Decimos que:

1.  $F$  es  **$\alpha$ -eficiente** si para  $x \in F$ ,  $d(\alpha) \vee x = 1$ , donde

$$d(\alpha) = f^\alpha(o).$$

2.  $A$  es  **$\alpha$ -eficiente** si cada  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -eficiente.
3.  $A$  es **eficiente** si es  $\alpha$ -eficiente para algún  $\alpha \in \text{Ord}$ .

## *Proposición [[6], Lema 8.2.2]*

$$A \text{ es eficiente} \iff A \text{ es parche trivial.}$$

# Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [6]

# Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [6]

- En el caso espacial ( $A = \emptyset S$ ),

$$\emptyset S \text{ es } 0\text{-eficiente} \iff S = \emptyset$$

$$\emptyset S \text{ es } 1\text{-eficiente} \iff S \text{ es } T_2$$

$$\emptyset S \text{ es eficiente} \iff S \text{ es empaquetado y apilado.}$$

# Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [6]

- En el caso espacial ( $A = \emptyset S$ ),

$$\emptyset S \text{ es } 0\text{-eficiente} \iff S = \emptyset$$

$$\emptyset S \text{ es } 1\text{-eficiente} \iff S \text{ es } T_2$$

$$\emptyset S \text{ es eficiente} \iff S \text{ es empaquetado y apilado.}$$

- Para  $A \in \text{Frm}$  arbitrario

$$A \text{ es } (\mathbf{reg}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}$$

$$A \text{ es } (\mathbf{aju}) \Rightarrow A \text{ es eficiente}$$

$$A \text{ es eficiente} \Rightarrow A \text{ es } T_1$$

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

*Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

## *Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

1. Si  $j \leqslant k$ , entonces  $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ .

# ¿Qué significa ser $\alpha$ -eficiente?

1-Eficiente  $\Rightarrow$  2-Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha$ -Eficiente  $\Rightarrow \dots \Rightarrow T_1$

## *Proposición*

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j, k \in NA$ .

1. Si  $j \leq k$ , entonces  $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ .
2. Si  $j$  es ajustado, se cumple que

$$j \leq k \iff \nabla(j) \subseteq \nabla(k).$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(\circ) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(\circ) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $F \in A^\wedge$ .

- Si  $A$  es 1-eficiente, para  $x \in F$  se cumple que  $x \vee d(1) = 1$ , es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 &\Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(\circ) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Por lo tanto  $\nabla(u_{d(1)}) = F$ .

# La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

# La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.

# La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.

# La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto  $F$ , proporciona un cociente compacto cerrado.

# La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión  $d(\alpha)$  se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto  $F$ , proporciona un cociente compacto cerrado.

Lo “malo...”: el grado de eficiencia puede ser arbitrariamente grande 😞

# Más propiedades de los marcos eficientes

## *Proposición*

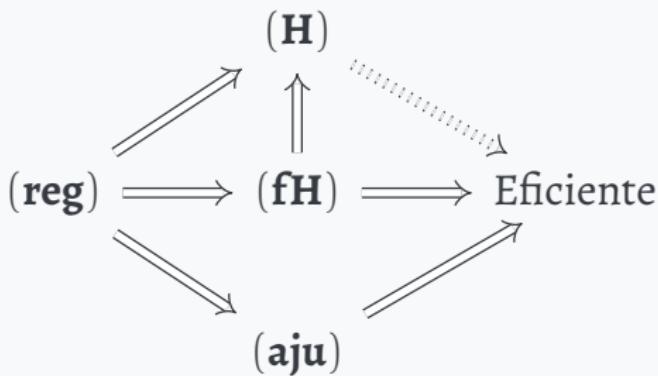
Si  $A \in \text{Frm}$  es eficiente y  $j \in NA$ , entonces  $A_j$  es eficiente.

## *Proposición*

Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de marcos eficientes, entonces  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  es un marco eficiente.

## Corolario

Si  $A$  es  $(fH)$ ,  $A$  es eficiente.



# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

*En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.*

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

*1-eficiente  $\not\Rightarrow (\mathbf{reg})$*

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

1-eficiente  $\not\Rightarrow (\text{reg})$

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

2-eficiente  $\not\Rightarrow (\text{H})$

# Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que  $PA = NA$ .
- Con la topología conumerable vemos que  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ .

En ambos casos  $A$  no es 1-eficiente y  $PA$  es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

1-eficiente  $\not\Rightarrow (\mathbf{reg})$

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

2-eficiente  $\not\Rightarrow (\mathbf{H})$

- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos  $\omega$ -eficientes.

$\omega$ -eficiente  $\not\Rightarrow n\text{-eficiente para algún } n \in \mathbb{N}$

# Bibliografía I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
-  RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

# Bibliografía II

-  RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.
-  H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons>.
-  H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*. Applied Categorical Structures **14** (2006): 1-34.

# Bibliografía III

-  H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.
-  H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons>.
-  A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺¡Muchas gracias! ☺



[https://github.com/JCmonter/  
Apuntes/tree/main/  
Presentaciones](https://github.com/JCmonter/Apuntes/tree/main/Presentaciones)

# La topología subregular de $\mathbb{R}$

Consideramos  $S = \mathbb{R}$  con la topología generada por la base

$$\mathcal{O}_{sr}S = \{U \cup (\mathbb{Q} \cap V) \mid U, V \in \mathcal{O}S\}.$$

y  $\mathcal{O}S$  es la topología métrica.

- $\mathcal{O}S \subseteq \mathcal{O}_{sr}S$ .
- $(S, \mathcal{O}_{sr}S)$  es  $T_2$ , entonces  $\mathcal{O}_{sr}S$  es 1-eficiente.
- $\mathcal{O}S_{sr}$  no es ajustado.

# Topología máximo compacta

Sea  $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ , donde  $(x, y) \notin \mathbb{N}^2$  y  $x \neq y$ . Definimos

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Tomamos

$$\mathcal{OS} = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U}_x \cup \mathcal{V}_y,$$

donde

$$\mathcal{U}_x = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } U \cap R_n \text{ es cofinito } \forall n \in \mathbb{N}\},$$

y

$$\mathcal{V}_y = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } R_n \subseteq V \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

# Topología guía sobre un árbol

$\mathbb{T}$  es un árbol si para cada nodo  $x$  el conjunto

$$\mathcal{P}(x) = \{y \in \mathbb{T} \mid y \leq x\}$$

es linealmente ordenado. Denotamos por

$$I(x) = \{y \in \mathbb{T} \mid y \text{ es sucesor inmediato de } x\}.$$

Para  $* \notin \mathbb{T}$ , definimos  $S = \mathbb{T} \cup \{*\}$  y la familia  $\mathcal{OS}$  de subconjuntos  $U \subseteq S$  tales que:

- $(\forall x \in \mathbb{T})[x \in U \Rightarrow I(x) \setminus U \text{ es numerable}].$
- $* \in U \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{T})[I(x) \setminus U \text{ es numerable}].$

$\mathcal{OS}$  es una topología sobre  $S$ , llamada **topología guía** sobre el árbol  $\mathbb{T}$ .