

¿Para qué estudiar topología sin puntos y cómo hacerlo?

*Seminario de Estudiantes en Matemáticas (SEMAS), CUCEI
7 de febrero de 2026*

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara

✉ juan.monter2902@alumnos.udg.mx

/github.com/JCmonter

Contenido

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

¿Qué es la topología sin puntos?

¿Cómo estudiar topología sin puntos?

Ejemplos

Nacimiento de la topología clásica



Gauss



Poincaré



Hausdorff

- Surge del estudio geométrico y analítico de deformaciones continuas.
- Se formaliza la noción de *espacio topológico*: puntos + abiertos.

La topología clásica estudia espacios como conjuntos de puntos organizados por abiertos.

Nacimiento de la topología “sin puntos”



Isbell



Tarski



Stone

- Se observa que los abiertos forman estructuras algebraicas ricas.
- Comienza el enfoque: estudiar “espacios” a través de la estructura de abiertos.

La topología puede desarrollarse sin mencionar puntos explícitamente.

Actualidad de la topología sin puntos



Simmons



Johnstone



Picado

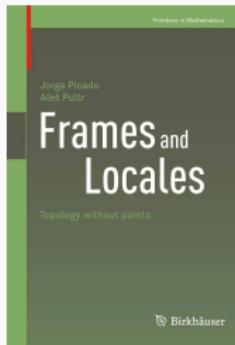
- Teoría consolidada: libros, cursos y herramientas modernas.
- Investigación activa y conexiones con lógica, computación y geometría.

La topología sin puntos es hoy un área viva de investigación.

Topología sin puntos en México



MITAC 2024



58 Congreso SMM

- Cada vez más personas se interesan en aprender sobre esta área.
- En CUCEI se estudian axiomas de separación, construcciones de parches, .

¿Consideras que en algún momento has realizado topología sin puntos?

Topología, continuidad y axiomas de separación

Definición:

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\emptyset, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Topología, continuidad y axiomas de separación

Definición:

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\emptyset, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Al par (S, τ) se le llama **espacio topológico**.

Topología, continuidad y axiomas de separación

Definición:

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\emptyset, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Al par (S, τ) se le llama **espacio topológico**. De hecho,

$$(\tau, \subseteq, \bigcup, \cap, \emptyset, X)$$

es un **marco**.

Primer encuentro con la continuidad

En cálculo: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición $\varepsilon-\delta$

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Primer encuentro con la continuidad

En cálculo: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición $\varepsilon-\delta$

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

“Debemos exhibir los elementos $\varepsilon-\delta$ de la definición”

Continuidad en espacios métricos

En análisis matemático: $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$.

Definición $\varepsilon-\delta$ (versión métrica)

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Continuidad en espacios métricos

En análisis matemático: $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$.

Definición ε - δ (versión métrica)

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

“La idea es la misma y sigue siendo técnica”

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$$\forall V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$\forall V$ abierto en Y , $f^{-1}(V)$ es abierto en X .

“Una condición global que no menciona puntos”

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$\forall V$ abierto en Y , $f^{-1}(V)$ es abierto en X .

“Una condición global que no menciona puntos”

¿De qué manera prefieres demostrar continuidad?

Axiomas de separación

Los axiomas de separación son nociones topológicas que permiten distinguir puntos distintos (o conjuntos cerrados) a través de conjuntos abiertos.

¿Por qué topología sin puntos?



Punto

¿Por qué topología sin puntos?



Punto

Recta

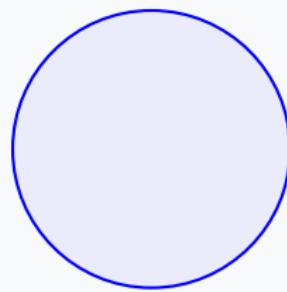
¿Por qué topología sin puntos?



Punto



Recta



Abierto

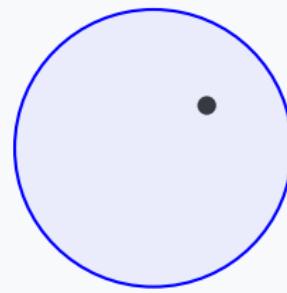
¿Por qué topología sin puntos?



Punto



Recta



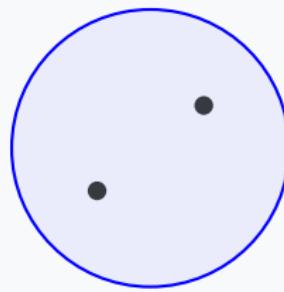
Abierto

¿Por qué topología sin puntos?



Punto

Recta



Abierto

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ .

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ .
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ .
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ .
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

“Lo importante no son los puntos, sino cómo se relacionan los abiertos”

¿Qué es un marco?

- A

¿Qué es un marco?

- A
- (A, \leqslant)

¿Qué es un marco?

- A
- (A, \leqslant)
- (A, \leqslant, \vee, o) o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$

¿Qué es un marco?

- A
- (A, \leqslant)
- $(A, \leqslant, \vee, \circ)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$

¿Qué es un marco?

- A
- (A, \leqslant)
- $(A, \leqslant, \vee, \circ, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$

Marco

Un **marco** es una retícula completa, $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$, en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i). \quad (\text{LDM})$$

¿Qué es un marco?

- A
- (A, \leqslant)
- $(A, \leqslant, \vee, \circ, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$

Marco

Un **marco** es una retícula completa, $(A, \leqslant, \vee, \wedge, \circ, 1)$, en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i). \quad (\text{LDM})$$

LDM: Ley Distributiva de marcos

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.
- **Adiciones:** conexión entre topologías y marcos.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.
- **Adjunciones:** conexión entre topologías y marcos.
- **Generalización:** construcción de sublocales, núcleos y ensamble.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.
- **Adjunciones:** conexión entre topologías y marcos.
- **Generalización:** construcción de sublocales, núcleos y ensamble.

“Detrás de la idea intuitiva hay una teoría categórica robusta”

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{\mathcal{O}(_)} & \text{Frm} \\ & \xleftarrow{\text{pt}(_)} & \end{array}$$

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{\mathcal{O}(_)} & \text{Frm} \\ & \xleftarrow{\text{pt}(_)} & \end{array}$$

- \mathcal{O} : Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{\mathcal{O}(_) } & \text{Frm} \\ & \xleftarrow{\text{pt}(_)} & \end{array}$$

- \mathcal{O} : Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt : Construye el **espacio de puntos** de un marco.

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{\mathcal{O}(_)} & \text{Frm} \\ & \xleftarrow{\text{pt}(_)} & \end{array}$$

- \mathcal{O} : Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt : Construye el **espacio de puntos** de un marco.
- Esta relación forma una **adjunción**:

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{\mathcal{O}(_)} & \text{Frm} \\ & \xleftarrow{\text{pt}(_)} & \end{array}$$

- \mathcal{O} : Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt : Construye el **espacio de puntos** de un marco.
- Esta relación forma una **adjunción**:

$$\text{Hom}_{\text{Top}}(S, \text{pt}(A)) \cong \text{Hom}_{\text{Frm}}(A, \mathcal{O}(S)).$$

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{\mathcal{O}(_)} & \text{Frm} \\ & \xleftarrow{\text{pt}(_)} & \end{array}$$

- \mathcal{O} : Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt : Construye el **espacio de puntos** de un marco.
- Esta relación forma una **adjunción**:

$$\text{Hom}_{\text{Top}}(S, \text{pt}(A)) \cong \text{Hom}_{\text{Frm}}(A, \mathcal{O}(S)).$$

“La topología sin puntos y la topología clásica se conectan por esta adjunción”

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- A veces es más sencillo hacer teoría de marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- A veces es más sencillo hacer teoría de marcos.
- Parte de la topología usual se puede ver como un caso particular de la teoría de marcos.

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite “traducir” nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite “traducir” nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

Top \longleftrightarrow Frm

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite “traducir” nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

Top \longleftrightarrow Frm

“¿Consideras que en algún momento has realizado topología sin puntos?”

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite “traducir” nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

Top \longleftrightarrow Frm

“¿Consideras que en algún momento has realizado topología sin puntos?”

Seguramente sí...

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S .

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S .
- Los abiertos son subconjuntos de S .

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S .
- Los abiertos son subconjuntos de S .
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S .
- Los abiertos son subconjuntos de S .
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S .
- Los abiertos son subconjuntos de S .
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.

Topología clásica vs. topología sin puntos

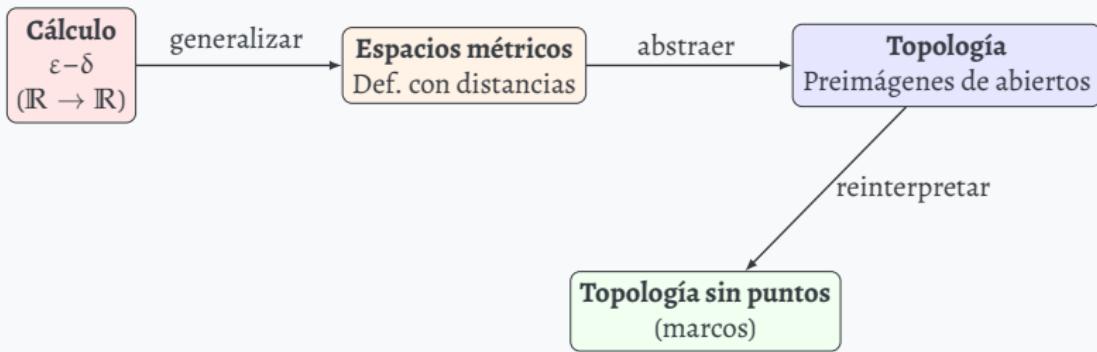
Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S .
- Los abiertos son subconjuntos de S .
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.
- Más general: todo espacio \leadsto marco.

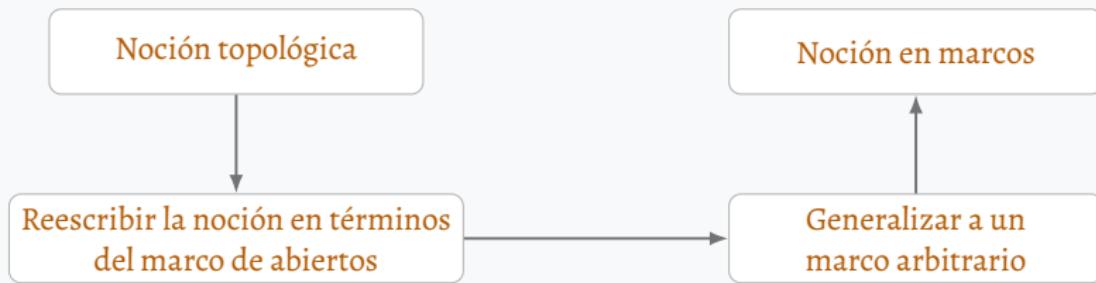
Recorrido: de $\varepsilon-\delta$ a la topología sin puntos



De Top a Frm

Top

Frm



De Frm a Top

Top

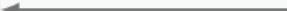
Frm

Definir caracterizaciones
para espacios topológicos

Noción en la teoría
de marcos

Obtener una equivalencia
para el marco de abiertos

Desarrollar teoría
para la noción en marcos



Axiomas de separación en Top

- **T₀ (Kolmogórov):** para $x \neq y$, existe abierto que contiene a uno y no al otro.
- **T₁:** para $x \neq y$, hay abierto que contiene a x pero no a y y viceversa).
- **T₂ (Hausdorff):** para $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U, V con $x \in U, y \in V$.
- **Regular:** para todo $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ con $x \notin F$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.
- **Normal:** para cualesquiera cerrados disjuntos $F, G \subseteq X$, existen abiertos disjuntos U, V con $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

¿Cómo se leen estas ideas *sin puntos*?

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \emptyset$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \emptyset$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \emptyset$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
¿Qué necesitamos para hacer la traducción?
- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \emptyset$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
¿Qué necesitamos para hacer la traducción?
- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \emptyset \iff X \cup Y = S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \emptyset$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
¿Qué necesitamos para hacer la traducción?
- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \emptyset \iff X \cup Y = S$.
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \emptyset$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
¿Qué necesitamos para hacer la traducción?
- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \emptyset \iff X \cup Y = S$.
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$.
- **Traducción:** para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{O}S$ con $X \cup Y = S$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $X \cup U = Y \cup V = S$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A$, $m \leq b < 1 \Rightarrow b = m$.

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A$, $m \leqslant b < 1 \Rightarrow b = m$.
- **primo:** un elemento $a \in A$ con $a \neq 1$ es *primo* si para todos $u, v \in A$,

$$u \wedge v \leqslant a \Rightarrow (u \leqslant a) \circ (v \leqslant a).$$

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A$, $m \leqslant b < 1 \Rightarrow b = m$.
- **primo:** un elemento $a \in A$ con $a \neq 1$ es *primo* si para todos $u, v \in A$,

$$u \wedge v \leqslant a \Rightarrow (u \leqslant a) \circ (v \leqslant a).$$

Observación

En un *marco* todo elemento **máximo** es **primo**. El recíproco **no** vale en general.

T₁ sin puntos

T₁: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}_S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

T₁ sin puntos

T₁: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}_S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).

T₁ sin puntos

T₁: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.

T₁ sin puntos

T₁: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.

T₁ sin puntos

T₁: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$ es un elemento primo.

T₁ sin puntos

T₁: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{OS}$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{OS}$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$ es un elemento primo.
- **Traducción:** todo elemento primo es máximo.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\vee, \wedge, \succ, \prec$ y \neg .

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: \vee , \wedge , \succ , \prec y \neg .
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: \vee , \wedge , \succ , \prec y \neg .
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a = o\} = (a \succ o).$$

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer álgebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: \vee , \wedge , \succ , \prec y \neg .
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a = o\} = (a \succ o).$$

- Relación bastante por debajo:

$$\begin{aligned} a \prec b &\iff \text{existe } c \in A \text{ tal que } c \wedge a = o, c \vee b = 1. \\ &\iff \neg a \vee b = 1. \end{aligned}$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{CS}$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{OS}$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{CS}$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{OS}$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- S es regular \iff para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{OS}$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{OS}$ tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{CS}$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{OS}$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- S es regular \iff para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{OS}$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{OS}$ tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

- Si $V \in \mathcal{OS}$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{OS}$.

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{CS}$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{OS}$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- S es regular \iff para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{OS}$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{OS}$ tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

- Si $V \in \mathcal{OS}$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{OS}$.
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$.

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{CS}$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{OS}$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

- S es regular \iff para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{OS}$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{OS}$ tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

- Si $V \in \mathcal{OS}$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{OS}$.
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$.
- **Traducción:** para todo $U \in \mathcal{OS}$

$$U = \bigcup \{V \in \mathcal{OS} \mid V \prec U\}.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es T_1 si todo elemento primo es máximo.

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es **T_1** si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee\{x \in A \mid x \prec a\}.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es **T_1** si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

- A es **normal** si para todos $a, b \in A$ con $a \vee b = 1$, existen $u, v \in A$ tales que

$$a \vee u = 1, \quad b \vee v = 1, \quad u \wedge v = 0.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es **T_1** si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

- A es **normal** si para todos $a, b \in A$ con $a \vee b = 1$, existen $u, v \in A$ tales que

$$a \vee u = 1, \quad b \vee v = 1, \quad u \wedge v = 0.$$

Obtuvimos algunos axiomas de separación que podemos usar cuando trabajemos con marcos :D

Algunas traducciones más técnicas

Noción localica (geométrica)	Notación	Correspondencia en núcleos (algebraica)
Sublocal denso más pequeño de A	$d(A)$	Corresponde al núcleo doble negación (w_o).
Sublocal denso en A		Corresponde al núcleo j que está por debajo del núcleo doble negación ($j \leq w_o$).
Sublocal abierto		Corresponde al núcleo v_a .
Sublocal cerrado		Corresponde al núcleo u_a .
Sublocal booleano		Corresponde al núcleo w_a .
Sublocal A_k denso en A_j		Corresponde al núcleo k tal que $k \leq w_a$.
Sublocal A_k denso en NA_j		Corresponde al núcleo k tal que $j \lessdot k$.
Sublocal A_k denso en ninguna parte de A_j	$A_k \leq_{nd} A_j$	Corresponde al núcleo k tal que $j(o) \lessdot k(o)$.

La tabla completa puede verse en [2]

¿Dónde más aparecen los marcos?

Cómputo y Lógica

- Teoría de dominios y semántica denotacional (Scott, puntos fijos de Tarski).
- Lógica intuicionista / teoría de tipos: marcos = Heyting completas; sheaves/locales.
- Toposes y razonamiento sin puntos (Kripke–Joyal, modelos constructivos).

Matemáticas y áreas afines

- Geometría algebraica: Spec R (Zariski), espacios espectrales.
- Medida/probabilidad constructiva: “Borel locales”, integración sin puntos.
- Dualidades: Stone; marcos espaciales vs. espacios topológicos.

Palabras clave: domain theory, Scott topology, Heyting algebra, topos, Stone duality, spectral spaces, locale measure.

Computación vista con marcos (versión ligera)

Diccionario Lógica \leftrightarrow Marco (Heyting completo)

$$\text{Conjunción } (\wedge) \Leftrightarrow \wedge \text{ (ínfimo)}$$

$$\text{Disyunción } (\vee) \Leftrightarrow \vee \text{ (supremo)}$$

$$\text{Implicación } (\rightarrow) \Leftrightarrow a \Rightarrow b$$

$$\text{Negación } (\neg a) \Leftrightarrow a^* := (a \Rightarrow 0)$$

$$\forall_i \varphi_i \Leftrightarrow \bigwedge_i [\![\varphi_i]\!]$$

$$\exists_i \varphi_i \Leftrightarrow \bigvee_i [\![\varphi_i]\!]$$

- Propiedades observables de programas = *abiertos*; forman un **marco**.
- Semántica $f : St \rightarrow St$ induce $f^* = f^{-1} : \mathcal{O}(St) \rightarrow \mathcal{O}(St)$ que preserva \vee y \wedge finitos \Rightarrow **morfismo de marcos**.
- En lógica clásica $a \vee \neg a = 1$; en marcos (intuicionista) *no necesariamente*.

En cómputo, razonar por propiedades = razonar en un márcó.

Bibliografía I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque localico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

-  H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons>.

-  A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺Gracias por su atención☺



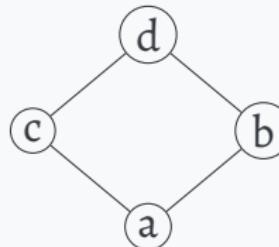
[https://github.com/JCmonter/
Apuntes/tree/main/
Presentaciones](https://github.com/JCmonter/Apuntes/tree/main/Presentaciones)

Orden parcial

Definición

Una relación \leqslant en un conjunto A es un **orden parcial** si cumple:

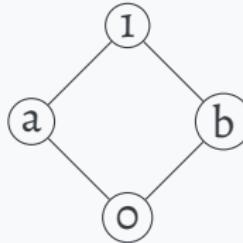
- Reflexividad: $a \leqslant a$.
- Antisimetría: $a \leqslant b$ y $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.
- Transitividad: $a \leqslant b$ y $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.



Ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado (Hasse).

Supremo e ínfimo

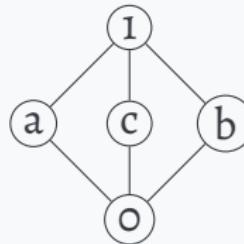
- El **supremo** de un subconjunto es la menor cota superior.
- El **ínfimo** es la mayor cota inferior.



Aquí $\sup\{a, b\} = 1$, $\inf\{a, b\} = o$.

De semirretícula a retícula

- Una **semirretícula** es un poset con supremos finitos (o ínfimos finitos).
- Una **retícula** tiene ambos: supremos e ínfimos finitos.



Retícula: todos los pares tienen sup e inf.

Marco

Definición

Un **marco** es una retícula completa $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, \circ, 1)$ donde vale la **Ley Distributiva de Marcos** (LDM):

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

Esta es la definición formal que conecta con la topología sin puntos.

Un ejemplo espacial

Sea $S = \mathbb{R}$ y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde $a, b \in S$. Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

Se puede verificar que

$$\mathcal{O}_l^p S = \mathcal{O}_m S \simeq P \mathcal{O}_l S \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_l^f S = \mathcal{O}_n S \simeq N \mathcal{O}_l S,$$

es decir,

$$\mathcal{O}_l S = A \rightarrow PA \hookrightarrow NA$$

Axiomas tipo Hausdorff

(dH) : Si $a \vee b = 1$, con $a, b \neq 1$, $\exists u, v$ tales que $u \not\leq a, v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

(H) : Si $1 \neq a \not\leq b \exists u, v$ tales que $u \not\leq a, v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

(Hp) : Todo elemento semiprimo es máximo.

(fH) : El sublocal diagonal es cerrado.