

# **Modificaciones de parches y axiomas de separación en topología sin puntos**

*25 de julio de 2025*

**Juan Carlos Monter Cortés**

**Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi**

Universidad de Guadalajara

# El axioma $T_2$

$T_2$ : Si  $x, y \in S$  con  $x \neq y$ ,  $\exists U, V \in \mathcal{O}S$  tal que  $x \in U, y \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

Si  $S$  es  $T_2$ ,

- Todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.
- El subespacio diagonal es cerrado.
- $T_2 + \text{compacto} \Rightarrow \text{Regular}$ .
- $\vdots$

# Construcciones de parches

La construcción en Top:

- $S \in \text{Top}$  es empaquetado si y solo si  $Q \in \mathcal{Q}S$  entonces  $Q \in \mathcal{C}S$ .
- ${}^pS \in \text{Top}$  es el espacio de parches con la topología generada por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

- $S$  es empaquetado si y solo si  ${}^pS = S$ .
- $T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$ .
- Si  $S$  es  $T_1$ , entonces  ${}^pS = {}^{pp}S$ .
- Si  $S$  es  $T_0$ , entonces  ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

$$\mathcal{O}S \hookrightarrow \mathcal{O}^pS \hookrightarrow \mathcal{O}^fS$$

# Para la “traducción”

Lo que necesitamos:

1. Núcleos
  - Núcleos abiertos
  - Núcleos cerrados
2. Filtros
  - Filtros abiertos
  - Filtros admisibles
3. El Teorema de Hoffman-Mislove

# Construcciones de parches

La construcción en Frm:

- Para  $A \in \text{Frm}$ ,  $PA$  es el marco de parches y es generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}.$$

- $A$  es parche trivial si y solo si  $A \simeq PA$ .
- ¿Cuándo ocurre que  $A \simeq PA$ ?
- ¿Cómo se comporta  $PA$ ?

$$A \longrightarrow PA \hookrightarrow NA$$

¿Qué tanto se parece empaquetado y parche trivial?

# Ejemplo

Sea  $S = \mathbb{R}$  y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde  $a, b \in S$ . Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

Se puede verificar que

$$\mathcal{O}_l^p S = \mathcal{O}_m S \simeq P\mathcal{O}_l S \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_l^f S = \mathcal{O}_n S \simeq N\mathcal{O}_l S,$$

es decir,

$$\mathcal{O}_l S = A \rightarrow PA \hookrightarrow NA$$

# El diagrama de parches

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & PA & \hookrightarrow & NA \\
 \downarrow U_A & & \downarrow PU_A & & \downarrow NU_A \\
 \mathcal{O}S & \longrightarrow & P\mathcal{O}S & \hookrightarrow & N\mathcal{O}S \\
 & \searrow & \downarrow \pi_S & & \downarrow \sigma_S \\
 & & \mathcal{O}^p S & \hookrightarrow & \mathcal{O}^f S
 \end{array} \tag{1}$$

- La construcción de parches es funtorial si para

$$f: A \rightarrow B$$

convierte filtros abiertos.

- $U_A$  convierte filtros abiertos.

# Marcos arreglados

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $\alpha \in \mathbf{Ord}$ .

- $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1,$$

donde  $d = d(\alpha) = f^\alpha(\circ)$  y  $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$

- $A$  es  $\alpha$ -arreglado si todo  $F \in A^\wedge$  es  $\alpha$ -arreglado.
- $A$  es arreglado si  $A$  es  $\alpha$ -arreglado para algún  $\alpha$ .

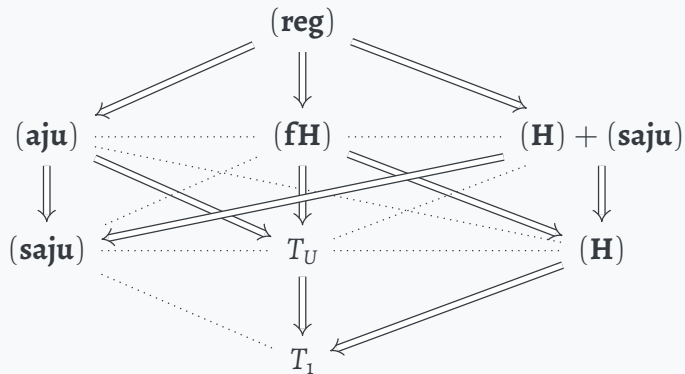


# Propiedades de los marcos arreglados

- Arreglado  $\Leftrightarrow$  Parche trivial.
- Regular  $\Rightarrow$  Arreglado.
- Si  $A$  es arreglado  $\Rightarrow S = \text{pt } A$  es  $T_1$ .
- Si  $A$  es 1-arreglado  $\Rightarrow S$  es  $T_2$ .
- $\mathcal{O}S$  es 1-arreglado  $\Leftrightarrow S$  es  $T_2$ .
- $\mathcal{O}S$  es arreglado  $\Leftrightarrow S$  es empaquetado y apilado.

¿Qué relación existe entre la propiedad arreglado y las distintas propiedades de separación que existen en  $\mathbf{Frm}$ ?

# Axiomas de separación en Frm



# Axiomas tipo Hausdorff

(**dH**) : Si  $a \vee b = 1$ , con  $a, b \neq 1$ ,  $\exists u, v$  tales que  $u \not\leq a, v \not\leq b$  y  $u \wedge v = 0$ .

(**H**) : Si  $1 \neq a \not\leq b \exists u, v$  tales que  $u \not\leq a, v \not\leq b$  y  $u \wedge v = 0$ .

(**Hp**) : Todo elemento semiprimo es máximo.

(**fH**) : El sublocal diagonal es cerrado.

## En resumen...

Propiedad/Comportamiento	<b>C.</b>	1°	2°	<b>S. H.</b>	<b>C. S. E.</b>
( <b>dH</b> )	x	✓	x	x	x
( <b>H</b> )	✓	✓	x	✓	x
( <b>Hp</b> )	✓	✓	x	✓	?
( <b>fH</b> )	x	x	✓	✓	✓

**S. H.**= Suficientemente Huasdorff ( $P \Rightarrow T_2$ )

**C.**= Propiedad conservativa ( $P \Leftrightarrow T_2$ )

**C. S. E.**= Comportamiento similar al espacial

$$((\mathbf{H}) + \text{Compacto} \not\Rightarrow (\mathbf{reg}))$$

## Otros objetivos

- Conocer la relación entre parche trivial y empaquetado.
- Ver el comportamiento de arreglado con respecto a los axiomas tipo Hausdorff.
- Desarrollar teoría que permita comprender la interacción entre las propiedades.
- Ver ejemplos.

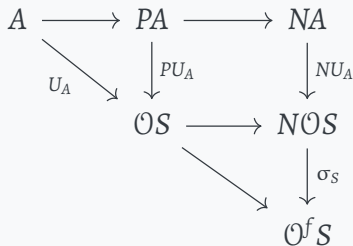
# Analizando $PA$

¿El marco de parches se comporta como el espacio de parches?

- $PA$ , en general, no es  $T_1$ .
- Al no ser  $T_1$  no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que  $T_1$ .
- ¿ $PA$  cumple (**saju**)?
- ¿Se cumple que  $PA \simeq P^2A$ ?
- Se cumple que  $P^2A \simeq P^3A$ .

¿Qué pasa si el marco  $A$  cumple (**H**)?

- Si  $A$  es  $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \text{pt } A$  es  $T_2$
- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$  es 1-arreglado.
- Si  $\mathcal{O}S$  es 1-arreglado  $\Rightarrow \mathcal{O}S \simeq P\mathcal{O}S$ .
- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow^p S = S$ .
- Si  ${}^pS = S \Rightarrow \mathcal{O}S = \mathcal{O}^pS$ .





# Marcos arreglados vs propiedades en Frm

## **Corolario**

*Si  $A \in \text{Frm}$  es espacial, entonces  $\mathcal{O}S$  cumple **(H)**  $\Leftrightarrow A$  es 1-arreglado.*

## **Corolario**

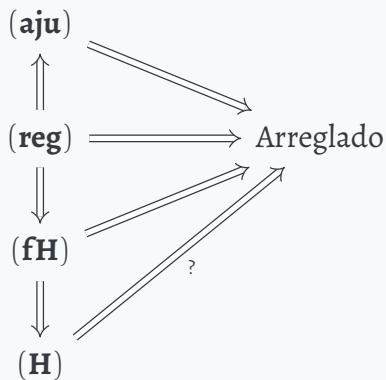
*Todo marco ajustado es arreglado.*

## **Proposición**

*Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.*

## **Proposición**

*Si  $A$  es arreglado,  $A_j$  es arreglado para  $j \in NA$ .*



# Intervalos de admisibilidad

Si  $F \in A^\wedge$ , entonces

$$u_d \leq v_F \leq w_F$$

para  $d = v_F(\circ)$ ,  $v_F = f^\infty$ .

## *Información con los intervalos*

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$  es el intervalo de admisibilidad.
- Si  $j \in [v_F, w_F]$ ,  $A_j$  es compacto.
- Arreglado  $\Leftrightarrow v_F \leq u_d$
- **(fH)**  $\Leftrightarrow \forall j \in [v_F, w_F], j = u_\bullet \text{ y } \bullet \in A$ .
- **(aju)**  $\Leftrightarrow [v_F, w_F] = \{*\} \text{ y } * = u_\bullet \text{ para } \bullet \in A$ .

Por el Teorema de Hoffman-Mislove

$$Q \in \mathcal{QS} \leftrightarrow F \in A^\wedge \quad \text{y} \quad Q \in \mathcal{QS} \leftrightarrow \nabla \in \mathcal{OS}^\wedge.$$

Además,  $[v_Q, w_Q] \subseteq N\mathcal{OS}$  es un intervalo de admisibilidad.

### ***Proposición***

Con  $F$  y  $Q$  como antes, si  $j \in [v_Q, w_Q]$ , entonces

$$\nabla(U_*jU^*) = F$$

donde  $U^*$  es la reflexión espacial y  $U_*$  es su adjunto derecho.

Equivalentemente

$$\mathcal{U}: [v_Q, w_Q] \rightarrow [v_F, w_F].$$

# El Q-cuadrado

En [12] construyen el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f^\infty} & A \\ U_A \downarrow & & \downarrow U_A \\ \mathcal{OS} & \xrightarrow{F^\infty} & \mathcal{OS} \end{array}$$

y prueban que  $U_A \circ f^\infty \leq F^\infty \circ U_A$ .

Si  $j \in NA$ ,  $\hat{f}^\infty$  es el núcleo asociado al filtro  $j_*F \in A^\wedge$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f}^\infty} & A \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ A_j & \xrightarrow{f^\infty} & A_j \end{array}$$

## Proposición

Para  $j, f$  y  $\hat{f}$  como antes, se cumple que

1.  $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$ .
2.  $j \circ \hat{f}^\infty \leq f^\infty \circ j$ .

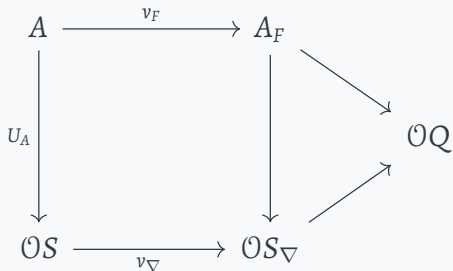
Definiendo  $H = f^\infty \circ j$  y  $h = H|_{A_{j*F}}$ , obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{f}^\infty} & A_{\hat{f}^\infty} \\
 j \downarrow & \searrow H & \downarrow h \\
 A_j & \xrightarrow{f^\infty} & A_{f^\infty}
 \end{array} \tag{2}$$

## Proposición

El diagrama (2) es conmutativo.

Consideremos



¿Qué pasa si  $A$  cumple **(H)**?

# Marcos KC

$S \in \text{Top}$  es KC si todo conjunto compacto es cerrado.  $S$  es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

## *Definición*

$A \in \text{Frm}$  es KC si todo cociente compacto de  $A$  es cerrado.

Equivalentemente

$$A_F = u_d$$

para algún  $d \in A$  y  $F \in A^\wedge$ .



# Propiedades de los marcos $KC$

$KC \Rightarrow$  Arreglado

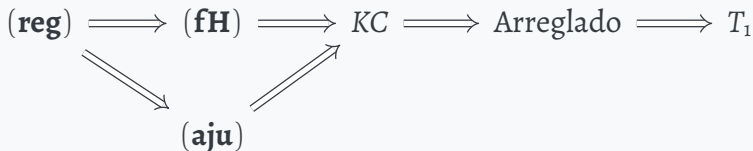
## *Proposición*

Si  $A$  es  $KC$  entonces  $A_j$  es  $KC$  para todo  $j \in NA$ .

## *Proposición*

Si  $A$  es  $KC$ , entonces  $A$  es  $T_1$ .

De hecho



# La topología máximo compacta

Consideremos  $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$  con  $x, y \notin \mathbb{N}^2$  y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$  es una topología..

# Propiedades de $\mathcal{O}S$

- $\mathcal{O}S$  es  $T_1$ .
- $\mathcal{O}S$  no es **(H)**.
- $\mathcal{O}S$  es compacto.
- $\mathcal{O}S$  es **(aju)**.
- $\mathcal{O}S$  es  $KC$ .
- $\mathcal{O}S$  es 2-arreglado.

# El ejemplo de Paseka y Smarda

Consideremos  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $A_r = \{a \in A \mid \neg\neg a = a\}$ . Definimos

$$K(A) = \{(u, v) \mid u \in A, v \in A_r, u \leq v\}$$

$K(A) \in \mathbf{Frm}$ .

## *Propiedades de $K(A)$*

- Si  $A$  es **(H)** y  $\neg m = \circ$  para  $m$  máximo,  $K(A)$  es **(H)**.
- Si  $A$  es compacto, entonces  $K(A)$  es compacto.
- $K(A)$  no es subajustado

De manera adicional, sea  $A = [0, 1]$  con la topología usual.  
 Entonces





- $\mathcal{O}I$  es  $(\mathbf{H})$ .
- $\mathcal{O}I$  es compacto.
- $K(\mathcal{O}I)$  es compacto y  $(\mathbf{H})$ .
- $K(\mathcal{O}I)$  no es subajustado.
- $K(\mathcal{O}I)$  no es espacial.

Existe marcos Hausdorr y compactos que no son espaciales.





# Conclusiones

- Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea  $US$ .
- Conocer más sobre el comportamiento del marco de parches para niveles superiores.
- Verificar que ( $H$ ) implica (o no)  $KC$  (o arreglado).
- Desarrollar ejemplos donde aparezcan las propiedades que están involucradas en la investigación.
- Explorar las posibilidades que brindan los intervalos de admisibilidad y el  $Q$ -cuadrado.

# Bibliografía I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
-  J. Paseka and B. Smarda,  *$T_2$ -frames and almost compact frames*. Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

# Bibliografía II

-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
-  RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
-  RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.



# Bibliografía III



H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons>.



H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*. Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.



H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

# Bibliografía IV



H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at [http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons](http://www.cs.man.ac.uk/hsimmons).



A. Wilansky, *Between  $T_1$  and  $T_2$* , MONTHLY (1967): 261-266.



A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.