¿Para qué estudiar topología sin puntos y cómo hacerlo?

XX Seminario de Matemáticas Aplicadas, FCBIyT UATx
16 de octubre de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx
github.com/JCmonter

Contenido

¿Por qué hablar de “topología sin puntos”?

Punto

¿Por qué hablar de “topología sin puntos”?

Punto

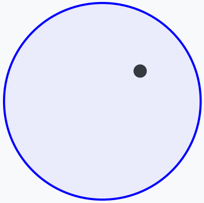
Recta

¿Por qué hablar de “topología sin puntos”?

¿Por qué hablar de “topología sin puntos”?

Punto

Recta



Abierto

¿Por qué hablar de "topología sin puntos"?

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

¿Qué es la topología sin puntos?

- En topología clásica describimos un espacio como un conjunto de puntos S junto con una familia de abiertos τ.
- En la topología sin puntos nos olvidamos de S y trabajamos únicamente con la estructura de abiertos.
- El enfoque anterior se trabaja por medio de la **teoría de marcos**.

"Lo importante no son los puntos, sino cómo se relacionan los abiertos"

¿Qué es un marco?

- A

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, 0)$ o $(A, \leqslant, \bigwedge, 1)$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Marco

Un **marco** es una retícula completa, $(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1)$, en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i). \qquad \text{(LDM)}$$

¿Qué es un marco?

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Marco

Un **marco** es una retícula completa, $(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1)$, en la que los ínfimos finitos se distribuyen sobre supremos arbitrarios:

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i). \qquad \text{(LDM)}$$

LDM: Ley Distributiva de marcos

¿Que es una topología?

Topología

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\varnothing, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

¿Que es una topología?

Topología

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\varnothing, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

Al par (S, τ) se le llama **espacio topológico**.

¿Que es una topología?

Topología

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\varnothing, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Al par (S, τ) se le llama **espacio topológico**. De hecho,

$$(\tau, \subseteq, \bigcup, \cap, \varnothing, X)$$

es un marco.

¿Que es una topología?

Topología

Una **topología** sobre un conjunto S es una familia $\tau \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que:

- $\varnothing, S \in \tau$.
- Si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Al par (S, τ) se le llama **espacio topológico**. De hecho,

$$(\tau, \subseteq, \bigcup, \cap, \varnothing, X)$$

es un marco. A $\tau = \mathcal{O}S$ se le llama el **marco de abiertos** de S.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.
- **Adjunciones:** conexión entre topologías y marcos.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.
- **Adjunciones:** conexión entre topologías y marcos.
- **Generalización:** construcción de sublocales, núcleos y ensamble.

Detalles rigurosos

- **Morfismos de marcos:** funciones que preservan supremos y finitos ínfimos.
- **Categoría Frm:** marcos como objetos y morfismos como flechas.
- **Adjunciones:** conexión entre topologías y marcos.
- **Generalización:** construcción de sublocales, núcleos y ensamble.

"Detrás de la idea intuitiva hay una teoría categórica robusta"

Adjunción entre Top y Frm

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}(\_)"] & \mathsf{Frm} \arrow[l, shift left, "\mathrm{pt}(\_)"]
\end{tikzcd}
$$

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}(\_)"] & \mathsf{Frm} \arrow[l, shift left, "\mathsf{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{O}$: Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}(\_)"] & \mathsf{Frm} \arrow[l, shift left, "\mathrm{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{O}$: Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt: Construye el **espacio de puntos** de un marco.

Adjunción entre Top y Frm

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}(\_)"] & \mathsf{Frm} \arrow[l, shift left, "\mathrm{pt}(\_)"]
\end{tikzcd}
$$

- $\mathcal{O}$: Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt: Construye el **espacio de puntos** de un marco.
- Esta relación forma una **adjunción**:

Adjunción entre Top y Frm

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}(\_)"] & \mathsf{Frm} \arrow[l, shift left, "\mathrm{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{O}$: Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt: Construye el **espacio de puntos** de un marco.
- Esta relación forma una **adjunción**:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathrm{pt}(A)) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\mathsf{Frm}}(A, \mathcal{O}(S)).$$

Adjunción entre Top y Frm

$$\mathsf{Top} \underset{\mathsf{pt}(\_)}{\overset{\mathcal{O}(\_)}{\rightleftarrows}} \mathsf{Frm}$$

- $\mathcal{O}$: Asigna a cada espacio topológico su **marco de abiertos**.
- pt: Construye el **espacio de puntos** de un marco.
- Esta relación forma una **adjunción**:

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, \mathsf{pt}(A)) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{Frm}}(A, \mathcal{O}(S)).$$

"La topología sin puntos y la topología clásica se conectan por esta adjunción"

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- A veces es más sencillo hacer teoría de marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- A veces es más sencillo hacer teoría de marcos.
- Parte de la topología usual se puede ver como un caso particular de la teoría de marcos.

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite "traducir" nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite “traducir” nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

$$\mathsf{Top} \longleftrightarrow \mathsf{Frm}$$

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite "traducir" nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

$$\mathsf{Top} \longleftrightarrow \mathsf{Frm}$$

"¿Consideras que en algún momento has realizado topología sin puntos?"

¿Para qué estudiar topología sin puntos?

La topología sin puntos permite "traducir" nociones clásicas de la categoría de espacios topológicos al contexto de marcos, y viceversa.

$$\mathsf{Top} \longleftrightarrow \mathsf{Frm}$$

"¿Consideras que en algún momento has realizado topología sin puntos?"

Seguramente sí...

Primer encuentro con la continuidad

En cálculo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definición ε–δ

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Primer encuentro con la continuidad

En cálculo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definición ε–δ

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

"Así conocimos la continuidad por primera vez"

Continuidad en espacios métricos

En análisis matemático: $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$.

Definición ε–δ *(versión métrica)*

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; d_1(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Continuidad en espacios métricos

En análisis matemático: $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$.

Definición ε–δ ***(versión métrica)***

f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ d_1(x, a) < \delta \ \Rightarrow \ d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

"La idea es la misma, pero sigue siendo técnica"

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$$\forall\, V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$$\forall\ V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

"Una sola condición global simplifica todo"

Caracterización topológica

Teorema

$f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ es continua si y solo si

$$\forall\ V \text{ abierto en } Y, \quad f^{-1}(V) \text{ es abierto en } X.$$

"Una sola condición global simplifica todo"

¿De qué manera prefieres demostrar continuidad?

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.

Topología clásica vs. topología sin puntos

Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.

Topología clásica vs. topología sin puntos

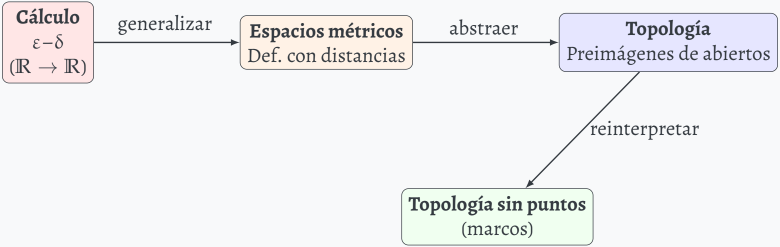
Topología clásica

- Requiere un conjunto de puntos S.
- Los abiertos son subconjuntos de S.
- Argumentos basados en puntos.

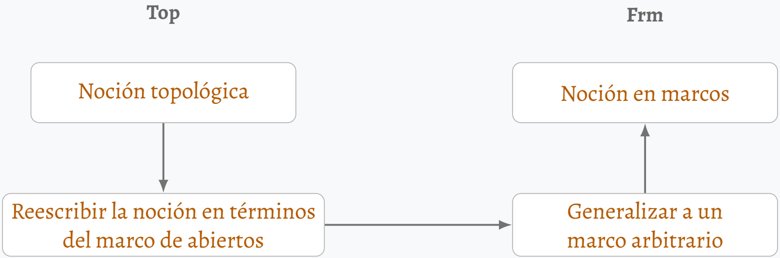
Topología sin puntos (marcos)

- No requiere conjunto de puntos.
- Se trabaja con la estructura de abiertos.
- Más general: todo espacio $\rightsquigarrow$ marco.

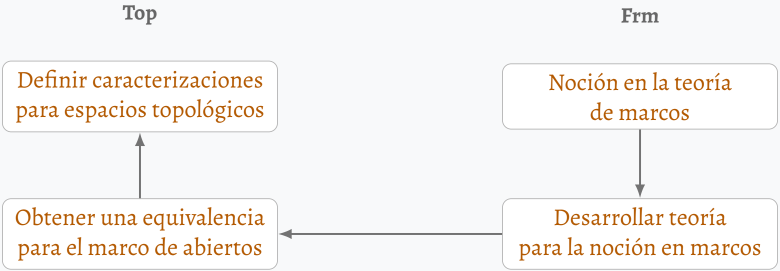
Recorrido: de ε–δ a la topología sin puntos



De Top a Frm


Top
Frm
Noción topológica
Noción en marcos
Reescribir la noción en términos del marco de abiertos
Generalizar a un marco arbitrario

De Frm a Top


Top
Frm
Definir caracterizaciones para espacios topológicos
Noción en la teoría de marcos
Obtener una equivalencia para el marco de abiertos
Desarrollar teoría para la noción en marcos

Axiomas de separación en Top

- **T_0 (Kolmogórov):** para $x \neq y$, existe abierto que contiene a uno y no al otro.
- **T_1:** para $x \neq y$, hay abierto que contiene a x pero no a y y viceversa).
- **T_2 (Hausdorff):** para $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U, V con $x \in U, y \in V$.
- **Regular:** para todo $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ con $x \notin F$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.
- **Normal:** para cualesquiera cerrados disjuntos $F, G \subseteq X$, existen abiertos disjuntos U, V con $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

¿Cómo se leen estas ideas *sin puntos*?

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathrm{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \mathrm{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \varnothing \iff X \cup Y = S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \varnothing \iff X \cup Y = S$.
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$.

Normalidad sin puntos

Sea $S \in \text{Top}$. Si $A \in \mathcal{O}S$, entonces $A' \in \mathcal{C}S$.

- **Normalidad:** para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}S$ con $A \cap B = \varnothing$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$.

¿Qué necesitamos para hacer la traducción?

- Si $A, B \in \mathcal{C}S \iff X = A', Y = B' \in \mathcal{O}S$.
- $A \cap B = \varnothing \iff X \cup Y = S$.
- $A \subseteq U \iff U' \subseteq X \iff X \cup U = S$.
- Traducción: para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{O}S$ con $X \cup Y = S$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ con $X \cup U = Y \cup V = S$ y $U \cap V = \varnothing$.

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A, \quad m \leqslant b < 1 \;\Rightarrow\; b = m$.

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A, \;\; m \leqslant b < 1 \;\Rightarrow\; b = m.$
- **primo:** un elemento $a \in A$ con $a \neq 1$ es *primo* si para todos $u, v \in A$,
$$u \wedge v \leqslant a \;\Rightarrow\; (u \leqslant a) \text{ o } (v \leqslant a).$$

Ingredientes para traducir T_1

Elementos en un marco A

- **máximo:** un elemento $m \in A$ es *máximo* si $m < 1$ y, para todo $b \in A, \quad m \leqslant b < 1 \;\Rightarrow\; b = m.$
- **primo:** un elemento $a \in A$ con $a \neq 1$ es *primo* si para todos $u, v \in A$,
$$u \wedge v \leqslant a \;\Rightarrow\; (u \leqslant a) \text{ o } (v \leqslant a).$$

Observación

En un *marco* todo elemento **máximo** es **primo**. El recíproco **no** vale en general.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$ es un elemento primo.

T_1 sin puntos

T_1: Para todo $x \neq y \in S$, existe $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$ y $y \notin U$.

- S es $T_1 \iff \forall x \in S, \overline{\{x\}} = \{x\}$ (los unipuntuales son cerrados).
- Entonces $S \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.
- $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento máximo.
- $S \setminus \{x\}$ es un elemento primo.
- Traducción: todo elemento primo es máximo.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee,\ \wedge,\ \succ,\ \prec$ y $\neg$.

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee, \ \wedge, \ \succ, \ \prec$ y $\neg$.
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee,\ \wedge,\ \succ,\ \prec$ y $\neg$.
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a = 0\} = (a \succ 0).$$

Ingredientes para traducir regularidad

Si $a, b \in A$, podemos hacer algebra a través de sus operaciones.

- Operaciones del marco: $\bigvee$, $\wedge$, $\succ$, $\prec$ y $\neg$.
- Implicación:

$$(a \succ b) = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a \leqslant b\}.$$

- Negación:

$$\neg a = \bigvee\{x \in A \mid x \wedge a = 0\} = (a \succ 0).$$

- Relación bastante por debajo:

$$\begin{aligned} a \prec b &\iff \text{existe } c \in A \text{ tal que } c \wedge a = 0, c \vee b = 1. \\ &\iff \neg a \vee b = 1. \end{aligned}$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que
$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que
$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$
- Si $V \in \mathcal{O}S$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{O}S$.

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que
$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$
- Si $V \in \mathcal{O}S$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{O}S$.
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$.

Regularidad sin puntos

Regularidad: Para todo $x \in S$ y $X \in \mathcal{C}S$ con $x \notin X$, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que

$$x \in U, \quad X \subseteq V, \quad U \cap V = \varnothing.$$

- S es regular $\iff$ para todo $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{O}S$ tal que
$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$
- Si $V \in \mathcal{O}S$, entonces $\neg V = S \setminus \overline{V} \in \mathcal{O}S$.
- $\overline{V} \subseteq U \iff \neg V \vee U = S \iff V \prec U$.
- Traducción: para todo $U \in \mathcal{O}S$

$$U = \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \prec U\}.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es $\mathbf{T}_1$ si todo elemento primo es máximo.

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es $\mathbf{T}_1$ si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es $\mathbf{T}_1$ si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

- A es **normal** si para todos $a, b \in A$ con $a \vee b = 1$, existen $u, v \in A$ tales que

$$a \vee u = 1, \quad b \vee v = 1, \quad u \wedge v = 0.$$

Los axiomas en Frm

Si A es un marco arbitrario, entonces:

- A es $\mathbf{T}_1$ si todo elemento primo es máximo.
- A es **regular** si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{x \in A \mid x \prec a\}.$$

- A es **normal** si para todos $a, b \in A$ con $a \vee b = 1$, existen $u, v \in A$ tales que

$$a \vee u = 1, \quad b \vee v = 1, \quad u \wedge v = 0.$$

Obtuvimos algunos axiomas de separación que podemos usar cuando trabajemos con marcos :D

Algunas traducciones más tecnicas

Noción locálica (geométrica)	**Notación**	**Correspondencia en núcleos (algebraica)**
Sublocal denso más pequeño de A	$d(A)$	Corresponde al núcleo doble negación (w_0).
Sublocal denso en A		Corresponde al núcleo j que está por debajo del núcleo doble negación ($j \leqslant w_0$).
Sublocal abierto		Corresponde al núcleo v_a.
Sublocal cerrado		Corresponde al núcleo u_a.
Sublocal booleano		Corresponde al núcleo w_a.
Sublocal A_k denso en A_j		Corresponde al núcleo k tal que $k \leqslant w_a$.
Sublocal A_k denso en NA_j		Corresponde al núcleo k tal que $j \lessdot k$.
Sublocal A_k denso en ninguna parte de A_j	$A_k \leqslant_{nd} A_j$	Corresponde al núcleo k tal que $j(0) \lessdot k(0)$.

La tabla completa puede verse en [2]

¿Dónde más aparecen los marcos?

Cómputo y Lógica

- Teoría de dominios y semántica denotacional (Scott, puntos fijos de Tarski).
- Lógica intuicionista / teoría de tipos: marcos = Heyting completas; sheaves/locales.
- Toposes y razonamiento sin puntos (Kripke–Joyal, modelos constructivos).

Matemáticas y áreas afines

- Geometría algebraica: Spec R (Zariski), espacios espectrales.
- Medida/probabilidad constructiva: "Borel locales", integración sin puntos.
- Dualidades: Stone; marcos espaciales vs. espacios topológicos.

Palabras clave: domain theory, Scott topology, Heyting algebra, topos, Stone duality, spectral spaces, locale measure.

Computación vista con marcos (versión ligera)

Diccionario Lógica ↔ Marco (Heyting completo)

$$
\begin{array}{rcll}
\text{Conjunción } (\wedge) & \leftrightarrow & \wedge & (\text{ínfimo}) \\
\text{Disyunción } (\vee) & \leftrightarrow & \vee & (\text{supremo}) \\
\text{Implicación } (\rightarrow) & \leftrightarrow & a \Rightarrow b & \\
\text{Negación } (\neg a) & \leftrightarrow & a^* := (a \Rightarrow 0) & \\
\forall_i \varphi_i & \leftrightarrow & \bigwedge_i [\![\varphi_i]\!] & \\
\exists_i \varphi_i & \leftrightarrow & \bigvee_i [\![\varphi_i]\!] &
\end{array}
$$

- **Propiedades observables** de programas = *abiertos*; forman un **marco**.
- Semántica $f : \mathrm{St} \to \mathrm{St}$ induce $f^* = f^{-1} : \mathcal{O}(\mathrm{St}) \to \mathcal{O}(\mathrm{St})$ que preserva $\bigvee$ y $\wedge$ finitos $\Rightarrow$ **morfismo de marcos**.
- En lógica clásica $a \vee \neg a = 1$; en marcos (intuicionista) *no necesariamente*.

En cómputo, razonar por propiedades = razonar en un marco.

Notas

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺Gracias por su atención☺

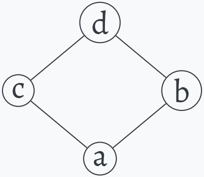
https://github.com/JCmonter/Apuntes/tree/main/Presentaciones

Orden parcial

Definición

Una relación $\leqslant$ en un conjunto A es un **orden parcial** si cumple:

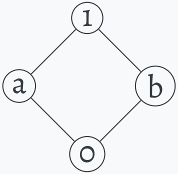
- Reflexividad: $a \leqslant a$.
- Antisimetría: $a \leqslant b$ y $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.
- Transitividad: $a \leqslant b$ y $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.



Ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado (Hasse).

Supremo e ínfimo

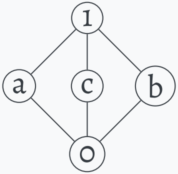
- El **supremo** de un subconjunto es la menor cota superior.
- El **ínfimo** es la mayor cota inferior.



Aquí $\sup\{a, b\} = 1$, $\inf\{a, b\} = 0$.

De semirretícula a retícula

- Una **semirretícula** es un poset con supremos finitos (o ínfimos finitos).
- Una **retícula** tiene ambos: supremos e ínfimos finitos.



Retícula: todos los pares tienen sup e inf.

Marco

Definición

Un **marco** es una retícula completa $(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1)$ donde vale la **Ley Distributiva de Marcos** (LDM):

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i \;=\; \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

Esta es la definición formal que conecta con la topología sin puntos.

Un ejemplo espacial

Sea $S = \mathbb{R}$ y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde $a, b \in S$. Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

Se puede verificar que

$$\mathcal{O}_l^p S = \mathcal{O}_m S \simeq P\mathcal{O}_l S \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_l^f S = \mathcal{O}_n S \simeq N\mathcal{O}_l S,$$

es decir,

$$\mathcal{O}_l S = A \to PA \hookrightarrow NA$$

Axiomas tipo Hausdorff

(**dH**) : Si $a \vee b = 1$, con $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**H**) : Si $1 \neq a \nleq b$ $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**Hp**) : Todo elemento semiprimo es máximo.

(**fH**) : El sublocal diagonal es cerrado.