¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

Seminario de Álgebra, CUCEI
24 de noviembre de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx
github.com/JCmonter

Investigación apoyada por SECIHTI-PROYECTO CBF2023-2024-2630

Contenido

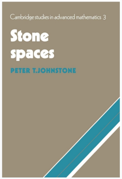
Un poco de historía

1968

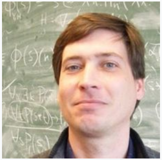
Un poco de historía

1982

1968



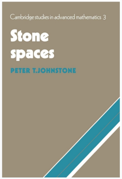
Un poco de historía



1982

1968

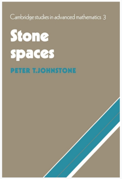
1996

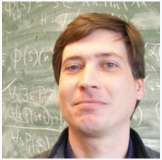


Un poco de historía

1968

1982

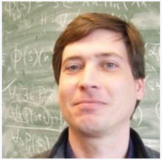




1996

2000

Un poco de historía



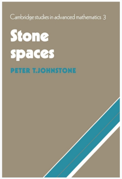

A bitopological point-free approach to compactifications

by

Olaf Karl Klinke

1982 — 2000

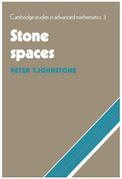
1968 — 1996 — 2013

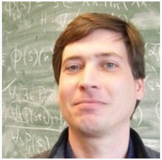


Un poco de historía

1968

1982





1996

2000

2013

2025

Espacio de parches

Consideremos $S \in \mathrm{Top}$. Denotamos por ${}^pS = (S, \mathcal{O}^pS)$ al **espacio de parches** de S, donde $\mathcal{O}^pS$ está generado por

$$\mathrm{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S^1\}$$

$$\mathcal{O}S \hookrightarrow \mathcal{O}^pS$$

[1]Decimos que $Q \subseteq S$ es saturado si $Q = \bigcap\{V \in \mathcal{O}S \mid Q \subseteq V\}$.
$\mathcal{Q}S$ = Conjuntos compactos saturados de S.

Espacio de parches

Consideremos $S \in \mathrm{Top}$. Denotamos por ${}^{p}S = (S, \mathcal{O}^{p}S)$ al **espacio de parches** de S, donde $\mathcal{O}^{p}S$ está generado por

$$\mathrm{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S^{1}\}$$

$$\mathcal{O}S \hookrightarrow \mathcal{O}^{p}S$$

Definición

S es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado) es cerrado

S es empaquetado $\iff {}^{p}S = S$ y $T_2 \Rightarrow$ empaquetado $\Rightarrow T_1$

[1] Decimos que $Q \subseteq S$ es saturado si $Q = \bigcap\{V \in \mathcal{O}S \mid Q \subseteq V\}$.
$\mathcal{Q}S =$ Conjuntos compactos saturados de S.

Teoría de marcos

$$\mathsf{Frm} = \begin{cases} \mathsf{Obj}: & (A, \leqslant, \wedge, \bigvee, 1, 0) \\ \text{Flechas:} & f\colon A \to B \end{cases}$$

Para $S \in \mathsf{Top}$,

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \mathsf{Frm}$$

Además,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{O}(\_)"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Frm} \arrow[ll, bend left, "\mathsf{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

es una adjunción, es decir, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathsf{pt}\, A, S) \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{Frm}}(A, \mathcal{O}S)$.

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j\colon A \to A$. Decimos que j es un **núcleo** si para todo $a, b \in A$ se cumplen:

$$i)\ a \leqslant j(a) \quad ii)\ a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b) \quad iii)\ j^2(a) = j(a) \quad iv)\ j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j\colon A \to A$. Decimos que j es un **núcleo** si para todo $a, b \in A$ se cumplen:

$$i)\ a \leqslant j(a) \quad ii)\ a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b) \quad iii)\ j^2(a) = j(a) \quad iv)\ j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

$NA = \{\text{núcleos en } A\} \in \mathsf{Frm}$.

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j\colon A \to A$. Decimos que j es un **núcleo** si para todo $a, b \in A$ se cumplen:

$$i)\ a \leqslant j(a) \quad ii)\ a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b) \quad iii)\ j^2(a) = j(a) \quad iv)\ j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

$NA = \{\text{núcleos en } A\} \in \mathsf{Frm}$.
Si $a \in A$, definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y $u_a, v_a, w_a \in NA$.

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j\colon A \to A$. Decimos que j es un **núcleo** si para todo $a, b \in A$ se cumplen:

$$i)\ a \leqslant j(a) \quad ii)\ a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b) \quad iii)\ j^2(a) = j(a) \quad iv)\ j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

$NA = \{\text{núcleos en } A\} \in \mathsf{Frm}$.
Si $a \in A$, definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y $u_a, v_a, w_a \in NA$. Además, $\eta_A\colon A \to NA$ dada por $\eta_A(a) = u_a$.

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f\colon A \to B$$

suprayectivo.

.

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f\colon A \to B$$

suprayectivo.

Sea $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$. Si $j \in NA$,

$$j\colon A \to A_j \text{ es suprayectivo} \quad \text{y} \quad A_j \in \mathsf{Frm}$$

A_j es el *marco cociente*.

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f\colon A \to B$$

suprayectivo.

Sea $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$. Si $j \in NA$,

$$j\colon A \to A_j \text{ es suprayectivo} \quad \text{y} \quad A_j \in \mathsf{Frm}$$

A_j es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

Filtros

Definición

Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro** si:

1. $1 \in F$.
2. Si $a \leqslant b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.
3. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

.

Filtros

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro** si:

1. $1 \in F$.
2. Si $a \leqslant b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.
3. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

En particular, decimos que F es un **filtro abierto** si:

$$X \subseteq A \text{ dirigido tal que } \bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset.$$

$A^{\wedge} =$Filtros abiertos en A.

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para $j, k \in NA$ definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para $j, k \in NA$ definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que $f \in [\, j\,]$ es un **núcleo ajustado** si para todo $k \in [\, j\,], f \leqslant k$.

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para $j, k \in NA$ definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que $f \in [\,j\,]$ es un **núcleo ajustado** si para todo $k \in [\,j\,], f \leqslant k$. Equivalentemente

$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee\{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}.$$

Axiomas de separación en Frm[2]

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{reg}) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{aju}) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl, dotted, no head] & (\mathbf{H})+(\mathbf{saju}) \arrow[d, Rightarrow] \\
(\mathbf{saju}) \arrow[r, dotted, no head] & T_1 & (\mathbf{H}) \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

[2] Para cualesquiera $a \nleq b \in A$ tenemos que A es:
(reg) si $\exists\, x, y \in A$ tales que $a \vee x = 1$, $y \nleq b$ y $x \wedge y = 0$.
(H) si $\exists\, c \in A$ tal que $c \nleq a$ y $\neg c \leqslant b$.
(aju) si $\exists\, x, y \in A$ tales que $x \vee a = 1$, $y \nleq b$ y $x \wedge y \leqslant b$.
(saju) si $\exists\, c \in A$ tal que $c \vee a = 1 \neq c \vee b$.
(fH) y T_1 son nociones algo diferentes. Todas estas pueden verse en [3].

El Teorema de Hoffman-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[3].
3. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si para todo $k \in [\, j\,]$ se tiene que $v_F \leqslant k$, donde $v_F = f_F^{\infty}$.

[3] $A \in \mathrm{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

El Teorema de Hoffman-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[3].
3. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si para todo $k \in [\, j\,]$ se tiene que $v_F \leqslant k$, donde $v_F = f_F^{\infty}$.

Teorema [Hoffman-Mislove]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}\, A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y $F \in A^{\wedge}$.

$$Q \longleftrightarrow F$$

[3] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

El Teorema de Hoffman-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[3].
3. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si para todo $k \in [\, j\,]$ se tiene que $v_F \leqslant k$, donde $v_F = f_F^{\infty}$.

Teorema [Hoffman-Mislove (extendido)]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \operatorname{pt} A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y núcleos ajustados.

$$Q \longleftrightarrow F \longleftrightarrow v_F$$

[3] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

Marco de parches

Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$. Denotamos por PA al **marco de parches** de A, donde PA está generado por

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r] & NA \end{tikzcd}$$

Marco de parches

Consideremos $A \in \mathsf{Frm}$. Denotamos por PA al **marco de parches** de A, donde PA está generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r] & NA \end{tikzcd}$$

Definición

A es **parche trivial** si y solo si $A \simeq PA$.

$$? \Rightarrow \text{ parche trivial } \Rightarrow T_1$$

Marco de parches

Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$. Denotamos por PA al **marco de parches** de A, donde PA está generado por

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r] & NA \end{tikzcd}$$

Definición

A es **parche trivial** si y solo si $A \simeq PA$. ¿Cuándo sucede esto?

$$? \Rightarrow \text{ parche trivial } \Rightarrow T_1$$

El diccionario

Top

Frm

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)

Frm

- Marco de parches (PA)

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase$= \{U \cap Q'\}$	

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase= $\{U \cap Q'\}$	• Pbase= $\{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$=\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$=\{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase$= \{U \cap Q'\}$	• Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
• Empaquetado (${}^{p}S = S$)	• Parche trivial ($PA \cong A$)
• $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathfrak{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_a = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_a = v_F$

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$=\{U \cap Q'\}$	Pbase$=\{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_a = v_F$
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_a = v_F$
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?
Subespacios compactos cerrados	

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$=\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$=\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_a = v_F$
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_a = v_F$
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$=\{U \cap Q'\}$	Pbase$=\{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_a = v_F$
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?
Subespacios compactos cerrados	Cocientes compactos cerrados.

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_a = v_F$
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Parche trivial?
- Cocientes compactos cerrados.

Parche trivial vs otras propiedades

Proposición [Caso espacial ($A = \mathcal{O}S$)]

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si S es T_2, entonces $\mathcal{O}S$ es parche trivial.
2. Si S es T_1, sobrio y empaquetado, entonces $\mathcal{O}S$ es parche trivial.

Parche trivial vs otras propiedades

Proposición [Caso espacial ($A = \mathcal{O}S$)]

Sea $S \in \mathsf{Top}$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si S es T_2, entonces $\mathcal{O}S$ es parche trivial.
2. Si S es T_1, sobrio y empaquetado, entonces $\mathcal{O}S$ es parche trivial.

Proposición [Caso general]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. Si A cumple $(\mathbf{reg})$ y $j \in NA$. Si $\nabla(j) \in A^{\wedge}$, entonces $j = u_a$, donde $a = j(0)$.
2. Si A cumple $(\mathbf{aju})$, entonces $j \in NA$ es ajustado.

Comparando u_a y v_F

Proposición

Si $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$, las siguientes se cumplen:

.

Comparando u_a y v_F

Proposición

Si $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$, las siguientes se cumplen:

1. $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(0)$

.

Comparando u_a y v_F

Proposición

Si $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$, las siguientes se cumplen:

1. $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(0)$
2. $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j)$.

.

Comparando u_a y v_F

Proposición

Si $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$, las siguientes se cumplen:

1. $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(0)$
2. $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j)$.

Para $f_F = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$, tenemos

$$f^0 = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^{\alpha}, \quad f^{\lambda} = \bigvee\{f^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así $v_F = f^{\infty}$.

Comparando u_a y v_F

Proposición

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$, las siguientes se cumplen:

1. $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(0)$
2. $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j)$.

Para $f_F = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$, tenemos

$$f^0 = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^{\alpha}, \quad f^{\lambda} = \bigvee\{f^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así $v_F = f^{\infty}$. De manera similar,

$$d(0) = 0, \quad d(\alpha + 1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee\{d(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}.$$

Comparando u_a y v_F

Proposición

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$, las siguientes se cumplen:

1. $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(0)$
2. $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j)$.

Para $f_F = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$, tenemos

$$f^0 = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^{\alpha}, \quad f^{\lambda} = \bigvee\{f^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así $v_F = f^{\infty}$. De manera similar,

$$d(0) = 0, \quad d(\alpha+1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee\{d(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}.$$

Si $d = f^{\infty}(0) = v_F(0)$, se cumple que $u_d \leqslant v_F$.

Comparando u_a y v_F

Proposición

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$, las siguientes se cumplen:

1. $u_a \leqslant j \iff a \leqslant j(0)$
2. $v_a \leqslant j \iff j(a) = 1 \iff a \in \nabla(j)$.

Para $f_F = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}$, tenemos

$$f^0 = id, \quad f^{\alpha+1} = f \circ f^{\alpha}, \quad f^{\lambda} = \bigvee\{f^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}.$$

Así $v_F = f^{\infty}$. De manera similar,

$$d(0) = 0, \quad d(\alpha+1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee\{d(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}.$$

Si $d = f^{\infty}(0) = v_F(0)$, se cumple que $u_d \leqslant v_F$. ¿Cuándo $v_F \leqslant u_d$?

Marcos eficientes

Definición [[6], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

Marcos eficientes

Definición [[6], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d(\alpha) \vee x = 1$, donde

$$d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$

Marcos eficientes

Definición [[6], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d(\alpha) \vee x = 1$, donde
$$d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.

Marcos eficientes

Definición [[6], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d(\alpha) \vee x = 1$, donde
$$d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.
3. A es **eficiente** si es α-eficiente para algún $\alpha \in \mathsf{Ord}$.

Marcos eficientes

Definición [[6], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d(\alpha) \vee x = 1$, donde
$$d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.
3. A es **eficiente** si es α-eficiente para algún $\alpha \in \mathsf{Ord}$.

Proposición [[6], Lema 8.2.2]

$$A \text{ es eficiente} \iff A \text{ es parche trivial.}$$

Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [6]

Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [6]

- En el caso espacial ($A = \mathcal{O}S$),

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}S \text{ es 0-eficiente} &\iff S = \emptyset \\
\mathcal{O}S \text{ es 1-eficiente} &\iff S \text{ es } T_2 \\
\mathcal{O}S \text{ es eficiente} &\iff S \text{ es empaquetado y apilado.}
\end{aligned}
$$

Propiedades de los marcos eficientes

Este es un resumen de las propiedades que Sexton menciona en [6]

- En el caso espacial ($A = \mathcal{O}S$),

$$\begin{aligned} \mathcal{O}S \text{ es 0-eficiente} &\iff S = \emptyset \\ \mathcal{O}S \text{ es 1-eficiente} &\iff S \text{ es } T_2 \\ \mathcal{O}S \text{ es eficiente} &\iff S \text{ es empaquetado y apilado.} \end{aligned}$$

- Para $A \in \mathrm{Frm}$ arbitrario

$$\begin{aligned} A \text{ es } (\mathbf{reg}) &\Rightarrow A \text{ es eficiente} \\ A \text{ es } (\mathbf{aju}) &\Rightarrow A \text{ es eficiente} \\ A \text{ es eficiente } &\Rightarrow A \text{ es } T_1 \end{aligned}$$

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

Proposición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j, k \in NA$.

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

Proposición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j, k \in NA$.

1. Si $j \leqslant k$, entonces $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$.

¿Qué significa ser α-eficiente?

$$1\text{—Eficiente} \Rightarrow 2\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{—Eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_1$$

Proposición

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $j, k \in NA$.

1. Si $j \leqslant k$, entonces $\nabla(j) \subseteq \nabla(k)$.
2. Si j es ajustado, se cumple que

$$j \leqslant k \iff \nabla(j) \subseteq \nabla(k).$$

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

•

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,

.

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 \Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) &\Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ &\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ &\Rightarrow v_F(0) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ &\Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

.

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,

$$
\begin{aligned}
u_{d(1)}(x) = 1 \Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\
&\Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\
&\Rightarrow v_F(0) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\
&\Rightarrow d(\infty) = d(1).
\end{aligned}
$$

Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

.

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es 1-eficiente, para $x \in F$ se cumple que $x \vee d(1) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} u_{d(1)}(x) = 1 \Rightarrow x \in \nabla(u_{d(1)}) \Rightarrow \nabla(v_F) = F \subseteq \nabla(u_{d(1)}) \\ \Rightarrow v_F \leqslant u_{d(1)} \\ \Rightarrow v_F(0) = d(\infty) \leqslant u_{d(1)} = d(1). \\ \Rightarrow d(\infty) = d(1). \end{aligned}$$

Además,

$$u_{d(1)} \leqslant u_d \leqslant v_F \Rightarrow \nabla(u_{d(1)}) \subseteq \nabla(u_d) \subseteq \nabla(v_F) = F.$$

Por lo tanto $\nabla(u_{d(1)}) = F$.

La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.

La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.

La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto F, proporciona un cociente compacto cerrado.

La pregunta inicial

¿Para qué son eficientes los marcos eficientes?

- Bajo eficiencia, la sucesión $d(\alpha)$ se estabiliza en el grado de eficiencia.
- Proporciona el menor núcleo cerrado que admite a un filtro abierto.
- Para cada filtro abierto F, proporciona un cociente compacto cerrado.

Lo "malo...:": el grado de eficiencia puede ser arbitrariamente grande ☹

Más propiedades de los marcos eficientes

Proposición

Si $A \in \mathrm{Frm}$ es eficiente y $j \in NA$, entonces A_j es eficiente.

Proposición

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de marcos eficientes, entonces $\bigoplus_{i \in I} A_i$ es un marco eficiente.

Corolario

Si A es $(\mathbf{fH})$, A es eficiente.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{H}) \arrow[dr, Rightarrow, dotted] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{Eficiente} \\
 & (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\operatorname{pt} NA \subseteq \operatorname{pt} PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

1-eficiente $\not\Rightarrow$ (**reg**)

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

$$\text{1-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{reg})$$

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

$$\text{2-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{H})$$

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$.

En ambos casos A no es 1-eficiente y PA es espacial.

- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.

$$1\text{-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{reg})$$

- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.

$$2\text{-eficiente} \not\Rightarrow (\mathbf{H})$$

- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos ω-eficientes.

$$\omega\text{-eficiente} \not\Rightarrow n\text{-eficiente para algún } n \in \mathbb{N}$$

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

Bibliografía II

- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.

- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

Bibliografía III

- H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.
- H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.
- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺¡Muchas gracias! ☺

https://github.com/JCmonter/Apuntes/tree/main/Presentaciones

La topología subregular de $\mathbb{R}$

Consideramos $S = \mathbb{R}$ con la topología generada por la base

$$\mathcal{O}_{sr}S = \{U \cup (\mathbb{Q} \cap V) \mid U, V \in \mathcal{O}S\}.$$

y $\mathcal{O}S$ es la topología métrica.

- $\mathcal{O}S \subseteq \mathcal{O}_{sr}S$.
- $(S, \mathcal{O}_{sr}S)$ es T_2, entonces $\mathcal{O}_{sr}S$ es 1-eficiente.
- $\mathcal{O}S_{sr}$ no es ajustado.

Topología máximo compacta

Sea $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$, donde $(x, y) \notin \mathbb{N}^2$ y $x \neq y$. Definimos

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}.$$

Tomamos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U}_x \cup \mathcal{V}_y,$$

donde

$$\mathcal{U}_x = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } U \cap R_n \text{ es cofinito } \forall n \in \mathbb{N}\},$$

y

$$\mathcal{V}_y = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } R_n \subseteq V \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Topología guía sobre un árbol

$\mathbb{T}$ es un árbol si para cada nodo x el conjunto

$$\mathcal{P}(x) = \{y \in \mathbb{T} \mid y \leqslant x\}$$

es linealmente ordenado. Denotamos por

$$I(x) = \{y \in \mathbb{T} \mid y \text{ es sucesor inmediato de } x\}.$$

Para $* \notin \mathbb{T}$, definimos $S = \mathbb{T} \cup \{*\}$ y la familia $\mathcal{O}S$ de subconjuntos $U \subseteq S$ tales que:

- $(\forall x \in \mathbb{T})[x \in U \Rightarrow I(x) \setminus U \text{ es numerable}]$.
- $* \in U \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{T})[I(x) \setminus U \text{ es numerable}]$.

$\mathcal{O}S$ es una topología sobre S, llamada **topología guía** sobre el árbol $\mathbb{T}$.