Marcos arreglados

27 de febrero de 2025

Juan Carlos Monter Cortés
Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx

¿Qué son los marcos arreglados?

- Una de las aplicaciones de la teoría de marcos es que, en cierto punto, un marco puede llegar a mimetizar el comportamiento de la topología de un espacio.
- En este sentido, los marcos arreglados buscan imitar la propiedad de que un espacio sea empaquetado.
- Como es habitual, las variantes que proporcionan los marcos son caracterizaciones “libres de puntos”.

Espacio de parches

Sea $S \in \mathbf{Top}$. El espacio de parches, denotado por ${}^{p}S$, es el espacio cuya topología está dada por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

Un espacio es *empaquetado* si todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

Propiedades:

- $T_2 \Rightarrow$ empaquetado $\Rightarrow T_1$
- $S = {}^{p}S \Leftrightarrow S$ es empaquetado
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$.

Filtros en **Frm**

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Filtros en Frm

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto
- Admisible ($\nabla(j)$)

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

Teorema (Hoffman-Mislove):

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}(A)$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1. $\mathcal{Q}S =$ compactos saturados en S
2. $A^{\wedge} =$ filtros abiertos en A

Teorema (Hoffman-Mislove extendido):

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}(A)$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1. $\mathcal{Q}S =$ compactos saturados en S
2. $A^{\wedge} =$ filtros abiertos en A
3. $v_F =$ núcleos ajustados

Teorema (Hoffman-Mislove extendido):

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}(A)$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1. $\mathcal{Q}S =$ compactos saturados en S
2. $A^{\wedge} =$ filtros abiertos en A
3. $v_F =$ núcleos ajustados

El Teorema de H.-M. nos proporciona $(F, Q, \nabla(Q))$

$$F \in A^{\wedge} \leftrightarrow Q \in \mathcal{Q}S \leftrightarrow \nabla(Q) \in \mathcal{O}S^{\wedge}$$

$$x \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x) \Leftrightarrow U_A(x) \in \nabla(Q)$$

El marco de parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *marco de parches*.

$$\mathrm{Pbase}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

El marco de parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *marco de parches*.

$$\mathrm{Pbase}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

- PA es el marco generado por la Pbase.
- $A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $A \simeq PA$
- A es parche trivial $\Leftrightarrow u_d = v_F$

El marco de parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *marco de parches*.

$$\mathrm{Pbase}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

- PA es el marco generado por la Pbase.
- $A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $A \simeq PA$
- A es parche trivial $\Leftrightarrow u_d = v_F$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r, "\iota"] & NA \end{tikzcd}$$

Marcos arreglados

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

- $F \in A^{\wedge}$ es α-arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1,$$

  donde $d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$ y $f = \bigvee\{v_a \mid a \in F\}$
- A es α-arreglado si todo $F \in A^{\wedge}$ es α-arreglado.
- A es arreglado si A es α-arreglado para algún α.

Marcos arreglados

Propiedades:

- Parche trivial $\Leftrightarrow$ arreglado
- Arreglado $\Leftrightarrow$ empaquetado + apilado
- Un espacio S tiene topología 1-arreglada $\Leftrightarrow$ S es T_2.
- Arreglado $\Rightarrow$ T_1
- Regularidad $\Rightarrow$ arreglado
- $(\mathbf{fH})$ $\Rightarrow$ arreglado

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$.
- A es arreglado si todo cociente compacto es cerrado.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^\wedge$.
- $F \in A^\wedge \Rightarrow F = \nabla(j)$.
- A es arreglado si todo cociente compacto es cerrado.
- $F \in [v_F, w_F]$ produce una familia de cocientes compactos.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^\wedge$.
- $F \in A^\wedge \Rightarrow F = \nabla(j)$.
- A es arreglado si todo cociente compacto es cerrado.
- $F \in [v_F, w_F]$ produce una familia de cocientes compactos.
- $v_F = w_F$ produce un único cociente compacto.

Colapso del intervalo de admisibilidad

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{aju}) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & v_F = w_F \\
(\mathbf{fH}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \\
(\mathbf{H}) \arrow[uur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Resultados probados

Proposición:

Para $F \in A^{\wedge}$ y $Q \in \mathcal{Q}S$, si $j \in [V_Q, W_Q]$, entonces

$$\nabla(U_* j U^*) = F.$$

De esta manera $\mho\colon [V_Q, W_Q] \to [V_F, W_F]$

$$\begin{tikzcd}
NA \arrow[rr, shift left, "N(U)"] & & N\mathcal{O}S \arrow[ll, shift left, "N(U)_*"] \\
{[v_F, w_F]} \arrow[u, hook] \arrow[rr, dashed, shift left, "\mho^*"] & & {[v_Q, w_Q]} \arrow[u, hook] \arrow[ll, shift left, "\mho"]
\end{tikzcd}$$

Resultados probados

Proposición:

Para un marco A Hausdorff, el intervalo de admisibilidad asociado a un filtro abierto es trivial. En otras palabras, para $F \in A^{\wedge}$, $[v_F, w_F] = \{*\}$, es decir, $v_F = w_F$.

Teorema:

En un marco Hausdorff todo cociente compacto es isomorfo a un cociente cerrado de la topología de un espacio Hausdorff.

EL Q-cuadrado

Ingredientes:

- $U_A : \mathcal{O}S$
- $F \in A^{\wedge} \to v_F$
- $A_F = A_{v_F}$
- $\nabla \in \mathcal{O}S \to v_\nabla$
- $\mathcal{O}S_\nabla = \mathcal{O}S_{v_\nabla}$
- $G = \nabla U_A$
- $Q = \mathrm{pt}\, A_F$
- $g = G_{|A_F}$
- $?: \mathcal{O}S_\nabla \to A_F$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, shift left, "F"] \arrow[dd, shift right, "U_A"'] \arrow[ddrr, "G"] & & A_F \arrow[ll, shift left, "F_*"] \arrow[dd, dashed, shift left, "g"] \arrow[dr] & \\
& & & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[uu, shift right, "(U_A)_*"'] \arrow[rr, shift right, "\nabla"'] & & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ll, shift right, "\nabla_*"'] \arrow[uu, shift left, "?"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Resultados probados

Proposición:

Sea A un marco y $j \in NA$. Si A es arreglado, entonces A_j es arreglado.

Preguntas abiertas

- ¿Se cumple que $PPA = PA$ o $PPPA = PPA$?
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$ arreglado?
- ¿A arreglado $\Rightarrow \prod A$ arreglado?
- ¿Cómo se puede medir el fallo de la condición de arreglo?
- ¿Qué significa que un marco sea apilado?
- ¿Existen ejemplos de marcos (locales) Hausdorff y compactos que sean cerrados?