Intervalos de admisibilidad y marcos *KC*

MITAC, Agosto 2025
5 de agosto de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx
github.com/JCmonter

Contenido

Información preliminar

Intervalos de admisibilidad

Marcos *KC*

Ejemplos

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\}$$

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

$$\mathbf{Frm} = \begin{cases} A, & \text{marcos} \\ \\ f, & \text{morfismo de marcos} \end{cases}$$

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

$$U_A(x) = \{x \in \mathsf{pt}\,A \mid x \not\leq p\} \qquad A \simeq \mathcal{O}S, A \text{ es espacial.}$$

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

$$U_A(x) = \{x \in \mathrm{pt}\, A \mid x \not\leq p\} \qquad A \simeq \mathcal{O}S, A \text{ es espacial.}$$

Cocientes en **Frm**

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Cocientes en Frm

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

Cocientes en Frm

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Congruencias $\leftrightarrow$ Conjuntos implicativos $\leftrightarrow$ Núcleos

Cocientes en Frm

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

Definición:

Sea $A \in$ **Frm** y $j\colon A \to A$, decimos que j es un *núcleo* si:

1. j infla.
2. j es monótona.
3. j es idempotente.
4. j respeta ínfimos finitos.

$$NA = \text{núcleos de } A.$$

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo supráyectivo $f : A \to B$.

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo supráyectivo $f : A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo supráyectivo $f : A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- A_j es un cociente de A.

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo supràyectivo $f : A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- A_j es un cociente de A.
- Existen cocientes interesantes que estudiar

Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in$ **Frm** definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"

Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in$ **Frm** definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"
- A_{v_a} "cociente abierto"

Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"
- A_{v_a} "cociente abierto"
- A_{w_a} "cociente regular"

Filtros en **Frm**

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Filtros en Frm

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto ($A^{\wedge}$)
- Admisible ($\nabla(j)$)

Filtros en Frm

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto ($A^{\wedge}$)
- Admisible ($\nabla(j)$)

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

$$f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}, \quad v_F(a) = f^{\infty}(a), \quad w_F(a) = \bigwedge\{p \in M \mid a \leqslant p\}.$$

Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

$$f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}, \quad v_F(a) = f^{\infty}(a), \quad w_F(a) = \bigwedge\{p \in M \mid a \leqslant p\}.$$

$M = \{m \in A \setminus F \mid m \text{ es máximo}\}$ y $M \subseteq S = \mathrm{pt}\, A$.

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:
  - Se puede colapsar el intervalo ($[v_F, w_F] = \{*\}$).

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:
  - Se puede colapsar el intervalo ($[v_F, w_F] = \{*\}$).
  - Si $j \in [v_F, w_F]$, j tiene una forma peculiar ($j = u_{\bullet}$, $\bullet \in A$).

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:
    - Se puede colapsar el intervalo ($[v_F, w_F] = \{*\}$).
    - Si $j \in [v_F, w_F]$, j tiene una forma peculiar ($j = u_{\bullet}$, $\bullet \in A$).
- ¿Qué significa que ocurra alguno de los casos anteriores?

Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.

Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.
- Si A es *ajustado*, $v_F = w_F = u_\bullet$ para algún $\bullet \in A$.

Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.
- Si A es *ajustado*, $v_F = w_F = u_\bullet$ para algún $\bullet \in A$.
- Si A es *fuertemente Hausdorff*, $u_\bullet = j \in [v_F, w_F]$ para algún $\bullet \in A$.

Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si A es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.
- Si A es *ajustado*, $v_F = w_F = u_\bullet$ para algún $\bullet \in A$.
- Si A es *fuertemente Hausdorff*, $u_\bullet = j \in [v_F, w_F]$ para algún $\bullet \in A$.

¿Existen otras propiedades que se relacionen con los intervalos?

Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$

Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}$, $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}$, $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

$$F = \nabla(Q),\ \text{donde } Q \in \mathcal{Q}S$$

Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}, F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}, F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

$$F = \nabla(Q), \text{ donde } Q \in \mathcal{Q}S$$

- $\phi\colon [v_{\nabla(Q)}, w_{\nabla(Q)}] \to [v_F, w_F]$

Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}, F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}, F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

$$F = \nabla(Q), \text{ donde } Q \in \mathcal{Q}S$$

- $\phi \colon [v_{\nabla(Q)}, w_{\nabla(Q)}] \to [v_F, w_F]$

¿Qué propiedades cumple ϕ?

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* de A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* de A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* de A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- A es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* de A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- A es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

A es compacto si 1 es compacto.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* de A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- A es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

A es compacto si 1 es compacto.

- A_j es un cociente de A.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* de A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- A es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

A es compacto si 1 es compacto.

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.

Marcos *KC*

$S \in$ Top es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Marcos KC

$S \in$ Top es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Definición

$A \in$ Frm *es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.*

Marcos *KC*

$S \in \mathsf{Top}$ es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Definición

$A \in \mathsf{Frm}$ *es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.*

Equivalentemente

$$A_j = A_{u_\bullet}$$

para algún $\bullet \in A$, $F \in A^\wedge$ y $j \in [v_F, w_F]$.

Propiedades de los marcos KC

- $KC \Rightarrow$ Arreglado

Propiedades de los marcos KC

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.

Propiedades de los marcos *KC*

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.
- Si A es KC, entonces A es T_1.

Propiedades de los marcos *KC*

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.
- Si A es KC, entonces A es T_1.

De hecho

Propiedades de los marcos *KC*

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.
- Si A es KC, entonces A es T_1.

De hecho

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & KC \arrow[r, Rightarrow] & \text{Arreglado} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
 & (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

Propiedades de los marcos *KC*

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.
- Si A es KC, entonces A es T_1.

De hecho

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & KC \arrow[r, Rightarrow] & \text{Arreglado} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
& (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

¿Como se relaciona KC con otras propiedades en Frm?

KC y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.

KC y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Si A es KC, entonces A_j es compacto y cerrado

KC y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Si A es KC, entonces A_j es compacto y cerrado
- Si A es KC, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto y cerrado.

KC y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Si A es KC, entonces A_j es compacto y cerrado
- Si A es KC, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto y cerrado.

Bajo KC los intervalos de admisibilidad están conformados por $u_\bullet$

¿Para qué usamos los marcos KC

Si $S \in \mathrm{Top}$ y es T_2, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

¿Para qué usamos los marcos *KC*

Si $S \in \mathrm{Top}$ y es T_2, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

¿Para qué usamos los marcos KC

Si $S \in \text{Top}$ y es T_2, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En Top : $KC \Leftrightarrow$ Empaquetado

¿Para qué usamos los marcos KC

Si $S \in \mathsf{Top}$ y es T_2, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En Top : $KC \Leftrightarrow$ Empaquetado
- En Frm : $KC \Rightarrow$ Arreglado

¿Para qué usamos los marcos *KC*

Si $S \in \mathsf{Top}$ y es T_2, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En $\mathsf{Top} : KC \Leftrightarrow \text{Empaquetado}$
- En $\mathsf{Frm} : KC \Rightarrow \text{Arreglado}$

$$\mathcal{O}S \text{ es } KC \Leftrightarrow S \text{ es empaquetado}$$

¿Para qué usamos los marcos *KC*

Si $S \in \mathsf{Top}$ y es T_2, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En Top : $KC \Leftrightarrow$ Empaquetado
- En Frm : $KC \Rightarrow$ Arreglado

$$\mathcal{O}S \text{ es } KC \Leftrightarrow S \text{ es empaquetado}$$

¿Qué pasa en el caso no espacial?

Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

$$\begin{aligned} I_F &\to [v_F, w_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

$$\begin{aligned} I_F &\to [v_F, w_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

I_F indica la complejidad del intervalo de admisibilidad $[v_F, w_F]$.

Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

$$\begin{aligned} I_F &\to [v_F, w_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

I_F indica la complejidad del intervalo de admisibilidad $[v_F, w_F]$.

¿Qué pasa si A es espacial?

Definición

Sea $S \in \mathsf{Top}$ *y* $E \in \mathcal{P}S$. *Definimos* $[E] \colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ *por*

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

Definición

Sea $S \in \mathsf{Top}$ *y* $E \in \mathcal{P}S$*. Definimos* $[E] \colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ *por*

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.

Definición

Sea $S \in \mathsf{Top}$ y $E \in \mathcal{P}S$. Definimos $[E]\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ por

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.
- Si $j \in N\mathcal{O}S$ tiene la forma de $[E]$, se dice que es un *núcleo espacialmente inducido*.

Definición

Sea $S \in \mathsf{Top}$ y $E \in \mathcal{P}S$. Definimos $[E]\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ por

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.
- Si $j \in N\mathcal{O}S$ tiene la forma de $[E]$, se dice que es un *núcleo espacialmente inducido*.

Si $A = \mathcal{O}S$ y $Q \in \mathcal{Q}S$

$$v_F \leqslant [Q'] \leqslant [M'] = w_F$$

Definición

Sea $S \in \mathsf{Top}$ y $E \in \mathcal{P}S$. Definimos $[E]\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ por

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.
- Si $j \in N\mathcal{O}S$ tiene la forma de $[E]$, se dice que es un *núcleo espacialmente inducido*.

Si $A = \mathcal{O}S$ y $Q \in \mathcal{Q}S$

$$v_F \leqslant [Q'] \leqslant [M'] = w_F$$

Si S es T_1, $Q = M$.

La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$ es una topología y es un marco *KC* que no es $(\mathbf{H})$.

La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$ es una topología y es un marco KC que no es $(\mathbf{H})$.

$$¿(\mathbf{H}) \Rightarrow KC?$$

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

Bibliografía II

- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.

- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

Bibliografía III

- A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.
- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺Gracias por su atención☺

https://github.com/JCmonter/Apuntes/tree/main/Presentaciones