

# **Patch modifications and separation axioms in point-free topology**

*Seminario de avance de tesis III*

*5 de diciembre de 2024*

**Juan Carlos Monter Cortés**  
**Luis Ángel Zaldívar Corichi**

Universidad de Guadalajara

✉ [juan.monter2902@alumnos.udg.mx](mailto:juan.monter2902@alumnos.udg.mx)

# Lo que veremos hoy 😊

Lo que si sabemos

Espacio de parches vs ensamble de parches

Los problemas que tenemos

La conjetura

Las alternativas que hemos pensado

## Espacio de parches

**Definición:**

Un espacio topológico  $S$  es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado.

# Espacio de parches

## *Definición:*

Un espacio topológico  $S$  es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado.

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

# Espacio de parches

## *Definición:*

Un espacio topológico  $S$  es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado.

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

## *Definición:*

Para un espacio topológico  $S$ , sea  ${}^pS$  (*espacio de parches*), el espacio con los mismos puntos que  $S$  y la topología  $\mathcal{O}^pS$  generada por la pbase.

## *Observaciones:*

- $T_2 \Rightarrow T_0 + \text{empaqueta} \Rightarrow T_1$ .

## *Observaciones:*

- $T_2 \Rightarrow T_0 + \text{empaqueta} \Rightarrow T_1$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^p S$  es  $T_1$  y si  $S$  es  $T_1 \Rightarrow {}^p S = {}^{pp} S$ .

## *Observaciones:*

- $T_2 \Rightarrow T_0 + \text{empaqueta} \Rightarrow T_1$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^p S$  es  $T_1$  y si  $S$  es  $T_1 \Rightarrow {}^p S = {}^{pp} S$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^{pp} S = {}^{ppp} S$ .



## *Observaciones:*

- $T_2 \Rightarrow T_0 + \text{empaqueta} \Rightarrow T_1$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^p S$  es  $T_1$  y si  $S$  es  $T_1 \Rightarrow {}^p S = {}^{pp} S$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^{pp} S = {}^{ppp} S$ .
- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow S = {}^p S$ .

## *Observaciones:*

- $T_2 \Rightarrow T_0 + \text{empaqueta} \Rightarrow T_1$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^p S$  es  $T_1$  y si  $S$  es  $T_1 \Rightarrow {}^p S = {}^{pp} S$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^{pp} S = {}^{ppp} S$ .
- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow S = {}^p S$ .
- $S$  es empaquetado  $\Leftrightarrow S = {}^p S$ .

## Observaciones:

- $T_2 \Rightarrow T_0 + \text{empaqueta} \Rightarrow T_1$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^p S$  es  $T_1$  y si  $S$  es  $T_1 \Rightarrow {}^p S = {}^{pp} S$ .
- Si  $S$  es  $T_0 \Rightarrow {}^{pp} S = {}^{ppp} S$ .
- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow S = {}^p S$ .
- $S$  es empaquetado  $\Leftrightarrow S = {}^p S$ .

¿Cuál es el análogo de empaquetado en **Frm**?

# Filtros, núcleos y el Teorema de H-M

## *Definition*

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $F \subseteq A$ , decimos que  $F$  es un *filtro* si:

1.  $1 \in F$ .
2.  $a \leq b, a \in F \Rightarrow b \in F$ .
3.  $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$ .

# Filtros, núcleos y el Teorema de H-M

## *Definition*

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $F \subseteq A$ , decimos que  $F$  es un *filtro* si:

1.  $1 \in F$ .
2.  $a \leq b, a \in F \Rightarrow b \in F$ .
3.  $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$ .

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto
- Admisible ( $\nabla(j)$ )

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$



Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

**Observaciones:**

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

### **Observaciones:**

- $NA$  = conjunto de todos los núcleos en  $A$  y  $NA \in \mathbf{Frm}$ .

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

### Observaciones:

- $NA$  = conjunto de todos los núcleos en  $A$  y  $NA \in \mathbf{Frm}$ .
- $u_a(x) = a \vee x$ ,  $v_a(x) = (a \succ x)$ ,  $w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$ .

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

### **Observaciones:**

- $NA$  = conjunto de todos los núcleos en  $A$  y  $NA \in \mathbf{Frm}$ .
- $u_a(x) = a \vee x$ ,  $v_a(x) = (a \succ x)$ ,  $w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$ .
- $\eta_A: A \rightarrow NA$ ,  $a \mapsto u_a$ .

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

### Observaciones:

- $NA$  = conjunto de todos los núcleos en  $A$  y  $NA \in \mathbf{Frm}$ .
- $u_a(x) = a \vee x$ ,  $v_a(x) = (a \succ x)$ ,  $w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$ .
- $\eta_A: A \rightarrow NA$ ,  $a \mapsto u_a$ .
- Si  $f = f^* \in \mathbf{Frm} \Rightarrow k = f_* f^* \in NA$ .

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$ . Para  $a, b \in A$ ,  $j: A \rightarrow A$  es un *núcleo* si:

1.  $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$
2.  $a \leq j(a)$
3.  $j^2(a) = j(a)$
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

### Observaciones:

- $NA$  = conjunto de todos los núcleos en  $A$  y  $NA \in \mathbf{Frm}$ .
- $u_a(x) = a \vee x$ ,  $v_a(x) = (a \succ x)$ ,  $w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$ .
- $\eta_A: A \rightarrow NA$ ,  $a \mapsto u_a$ .
- Si  $f = f^* \in \mathbf{Frm} \Rightarrow k = f_* f^* \in NA$ .
- Para  $U_A^*: A \rightarrow \mathcal{OS}$ ,  $sp = (U_A)_* U_A^* \in NA$ .



# Filtros admisibles y núcleos ajustados

## *Definición:*

Sea  $j \in NA$ . El *filtro de admisibilidad* de  $j$  es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

# Filtros admisibles y núcleos ajustados

## *Definición:*

Sea  $j \in NA$ . El *filtro de admisibilidad* de  $j$  es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

## *Observaciones:*

# Filtros admisibles y núcleos ajustados

## *Definición:*

Sea  $j \in NA$ . El *filtro de admisibilidad* de  $j$  es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

## *Observaciones:*

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k).$

# Filtros admisibles y núcleos ajustados

## *Definición:*

Sea  $j \in NA$ . El *filtro de admisibilidad* de  $j$  es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

## *Observaciones:*

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$ .
- $j \in NA$  es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

# Filtros admisibles y núcleos ajustados

## Definición:

Sea  $j \in NA$ . El *filtro de admisibilidad* de  $j$  es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

## Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$ .
- $j \in NA$  es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^\wedge \Rightarrow F = \nabla(j)$  para algún  $j \in NA$ .

# Filtros admisibles y núcleos ajustados

## Definición:

Sea  $j \in NA$ . El *filtro de admisibilidad* de  $j$  es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

## Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$ .
- $j \in NA$  es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^\wedge \Rightarrow F = \nabla(j)$  para algún  $j \in NA$ .
- $F \in A^\wedge \Rightarrow [v_F, w_F]$

## *Teorema (Hoffman-Mislove):*

Sean  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $S = \text{pt}(A)$ , entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1.  $\mathcal{Q}S$  = compactos saturados en  $S$
2.  $A^\wedge$  = filtros abiertos en  $A$

## *Teorema (Hoffman-Mislove extendido):*

Sean  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $S = \text{pt}(A)$ , entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1.  $\mathcal{Q}S$  = compactos saturados en  $S$
2.  $A^\wedge$  = filtros abiertos en  $A$
3.  $v_F$  = núcleos ajustados



## *Teorema (Hoffman-Mislove extendido):*

Sean  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $S = \text{pt}(A)$ , entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1.  $\mathcal{Q}S$  = compactos saturados en  $S$
2.  $A^\wedge$  = filtros abiertos en  $A$
3.  $v_F$  = núcleos ajustados

El Teorema de H.-M. nos proporciona  $(F, Q, \nabla(Q))$

$$F \in A^\wedge \leftrightarrow Q \in \mathcal{Q}S \leftrightarrow \nabla(Q) \in \mathcal{O}S^\wedge$$

$$x \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x) \Leftrightarrow U_A(x) \in \nabla(Q)$$

# El ensamble parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *marco de parches*.

$$\text{p-base}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}.$$

# El ensamble parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *marco de parches*.

$$\text{p-base}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}.$$

Sea  $P(A) = \langle \text{p-base}(A) \rangle$ , es decir, tomamos supremos arbitrarios de elementos en  $\text{p-base}(A)$

$$\begin{array}{ccccc} & & \eta_A & & \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ A & \xrightarrow{i} & P(A) & \xrightarrow{\iota} & NA \end{array}$$

# El ensamble parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *marco de parches*.

$$\text{p-base}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}.$$

Sea  $P(A) = \langle \text{p-base}(A) \rangle$ , es decir, tomamos supremos arbitrarios de elementos en  $\text{p-base}(A)$

$$\begin{array}{ccccc} & & \eta_A & & \\ & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \\ A & \xrightarrow{i} & P(A) & \xrightarrow{\iota} & NA \end{array}$$

¿Cuándo  $A \cong P(A)$ ?

# Parche trivial

## *Definición:*

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

# Parche trivial

## *Definición:*

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco  $A$  parche trivial?

# Parche trivial

## *Definición:*

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco  $A$  parche trivial?

## *Observaciones:*

# Parche trivial

## *Definición:*

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco  $A$  parche trivial?

## *Observaciones:*

- $S = {}^pS \leftrightarrow A \cong PA.$



# Parche trivial

## *Definición:*

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco  $A$  parche trivial?

## *Observaciones:*

- $S = {}^pS \leftrightarrow A \cong PA.$
- Si  $j \in NA, j = \bigvee \{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}.$

# Parche trivial

## Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco  $A$  parche trivial?

## Observaciones:

- $S = {}^pS \leftrightarrow A \cong PA.$
- Si  $j \in NA, j = \bigvee \{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}.$
- Si  $j \in PA, j = \bigvee \{v_F \wedge u_d \mid F \in A^\wedge \text{ y } d \in A\}.$

# Parche trivial

## Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco  $A$  parche trivial?

## Observaciones:

- $S = {}^pS \leftrightarrow A \cong PA.$
- Si  $j \in NA, j = \bigvee \{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}.$
- Si  $j \in PA, j = \bigvee \{v_F \wedge u_d \mid F \in A^\wedge \text{ y } d \in A\}.$
- $A$  es parche trivial  $\Leftrightarrow v_F = u_d.$

# Parche trivial

## Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$  es *parche trivial* si  $i: A \rightarrow P(A)$  es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco  $A$  parche trivial?

## Observaciones:

- $S = {}^pS \leftrightarrow A \cong PA.$
- Si  $j \in NA, j = \bigvee \{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}.$
- Si  $j \in PA, j = \bigvee \{v_F \wedge u_d \mid F \in A^\wedge \text{ y } d \in A\}.$
- $A$  es parche trivial  $\Leftrightarrow v_F = u_d.$
- $\forall a \in A, u_a \leq v_a \text{ y } v_a \leq j \Leftrightarrow j(a) = 1.$

# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(o)$

# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(o)$

## *Demostración*



# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(o)$

## *Demostración*

1.  $A$  es regular  $\Rightarrow A$  es ajustado.



# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(o)$

## *Demostración*

1.  $A$  es regular  $\Rightarrow A$  es ajustado.
2.  $A$  es ajustado  $\Rightarrow$  cada bloque tiene un solo elemento.





# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(o)$

## *Demostración*

1.  $A$  es regular  $\Rightarrow A$  es ajustado.
2.  $A$  es ajustado  $\Rightarrow$  cada bloque tiene un solo elemento.
3.  $x = \bigvee \{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = o \vee z \vee x = 1]\}$  es dirigido.



# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(o)$

## *Demostración*

1.  $A$  es regular  $\Rightarrow A$  es ajustado.
2.  $A$  es ajustado  $\Rightarrow$  cada bloque tiene un solo elemento.
3.  $x = \bigvee \{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = o \vee z \vee x = 1]\}$  es dirigido.
4.  $\nabla(u_d) = \nabla(j) \Rightarrow j \sim u_d$ .



# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(o)$

## *Demostración*

1.  $A$  es regular  $\Rightarrow A$  es ajustado.
2.  $A$  es ajustado  $\Rightarrow$  cada bloque tiene un solo elemento.
3.  $x = \bigvee \{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = o \vee z \vee x = 1]\}$  es dirigido.
4.  $\nabla(u_d) = \nabla(j) \Rightarrow j \sim u_d$ .
5.  $A$  es ajustado  $\Rightarrow u_d$  es el único en su bloque.



# Regularidad implica parche trivial

## *Teorema:*

Supongamos que  $A$  es un marco regular y sea  $j \in NA$  tal que  $\nabla(j)$  es abierto. Entonces  $j = u_d$ , donde  $d = j(\circ)$

## *Demostración*

1.  $A$  es regular  $\Rightarrow A$  es ajustado.
2.  $A$  es ajustado  $\Rightarrow$  cada bloque tiene un solo elemento.
3.  $x = \bigvee \{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = \circ \vee z \vee x = 1]\}$  es dirigido.
4.  $\nabla(u_d) = \nabla(j) \Rightarrow j \sim u_d$ .
5.  $A$  es ajustado  $\Rightarrow u_d$  es el único en su bloque.
6.  $j = u_d$ .



# Marcos arreglados

## *Definición:*

Sea  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $\alpha$  un ordinal, un filtro abierto  $F$  en  $A$  es  $\alpha$ -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_{d(\alpha)}(x) = d(\alpha) \vee x = 1,$$

donde  $d(\alpha) = f^\alpha(\circ)$  y  $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$ .

Un marco es *parche trivial* si y solo si es arreglado (donde arreglado quiere decir que es  $\alpha$ -arreglado para algún ordinal  $\alpha$ ).

Un marco es *parche trivial* si y solo si es arreglado (donde arreglado quiere decir que es  $\alpha$ -arreglado para algún ordinal  $\alpha$ ).

***Teorema:***

Sea  $S$  un espacio  $T_0$ , éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si  $S$  es  $T_2$ .

Un marco es *parche trivial* si y solo si es arreglado (donde arreglado quiere decir que es  $\alpha$ -arreglado para algún ordinal  $\alpha$ ).

***Teorema:***

Sea  $S$  un espacio  $T_0$ , éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si  $S$  es  $T_2$ .



Un marco es *parche trivial* si y solo si es arreglado (donde arreglado quiere decir que es  $\alpha$ -arreglado para algún ordinal  $\alpha$ ).

**Teorema:**

Sea  $S$  un espacio  $T_0$ , éste tiene **marco de abiertos 1-arreglado si y solo si  $S$  es  $T_2$** .

# Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

## *Definición:*

1. Para un espacio  $S$  decimos que una propiedad  $P$  es *conservativa* si y solo si  $\mathcal{O}S$  tiene la propiedad  $P_S$ .

# Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

## *Definición:*

1. Para un espacio  $S$  decimos que una propiedad  $P$  es *conservativa* si y solo si  $\mathcal{O}S$  tiene la propiedad  $P_S$ .
2. Decimos que una propiedad en marcos  $P$  es *suficientemente Hausdorff* si y solo si  $P$  implica la propiedad Hausdorff espacial.

# Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

## *Definición:*

1. Para un espacio  $S$  decimos que una propiedad  $P$  es *conservativa* si y solo si  $\mathcal{O}S$  tiene la propiedad  $P_S$ .
2. Decimos que una propiedad en marcos  $P$  es *suficientemente Hausdorff* si y solo si  $P$  implica la propiedad Hausdorff espacial.
3. Decimos que una propiedad en marcos  $P$  es de *1° orden* si y solo si  $P$  es enunciada como una fórmula para elementos del marco.

# Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

## *Definición:*

1. Para un espacio  $S$  decimos que una propiedad  $P$  es *conservativa* si y solo si  $\mathcal{O}S$  tiene la propiedad  $P_S$ .
2. Decimos que una propiedad en marcos  $P$  es *suficientemente Hausdorff* si y solo si  $P$  implica la propiedad Hausdorff espacial.
3. Decimos que una propiedad en marcos  $P$  es de *1° orden* si y solo si  $P$  es enunciada como una fórmula para elementos del marco.
4. Decimos que una propiedad en marcos  $P$  es de *2° orden* si y solo si  $P$  es enunciada como una caracterización de sublocales.

# Marcos Hausdorff

(dH)  $a \vee b = 1$  y  $a, b \neq 1$ ,  $\exists u, v$  tales que  $u \not\leq a$ ,  $v \not\leq b$  y  
 $u \wedge v = 0$ .

# Marcos Hausdorff

(**dH**)  $a \vee b = 1$  y  $a, b \neq 1$ ,  $\exists u, v$  tales que  $u \not\leq a$ ,  $v \not\leq b$  y  
 $u \wedge v = \circ$ .

(**H**)  $1 \neq a \not\leq b \in L$ ,  $\exists u, v \in L$  tales que  $u \not\leq a$ ,  $v \not\leq b$  y  
 $u \wedge v = \circ$ .

# Marcos Hausdorff

(**dH**)  $a \vee b = 1$  y  $a, b \neq 1$ ,  $\exists u, v$  tales que  $u \not\leq a$ ,  $v \not\leq b$  y  $u \wedge v = 0$ .

(**H**)  $1 \neq a \not\leq b \in L$ ,  $\exists u, v \in L$  tales que  $u \not\leq a$ ,  $v \not\leq b$  y  $u \wedge v = 0$ .

(**Hp**) Cada elemento semiprimo en  $L$  es máximo.



# Marcos Hausdorff

(**dH**)  $a \vee b = 1$  y  $a, b \neq 1$ ,  $\exists u, v$  tales que  $u \not\leq a$ ,  $v \not\leq b$  y  $u \wedge v = \circ$ .

(**H**)  $1 \neq a \not\leq b \in L$ ,  $\exists u, v \in L$  tales que  $u \not\leq a$ ,  $v \not\leq b$  y  $u \wedge v = \circ$ .

(**Hp**) Cada elemento semiprimo en  $L$  es máximo.

[(**fH**)] El sublocal diagonal  $\Delta[L]$  es cerrado en  $L \oplus L$ .

$$\Leftrightarrow \Delta[L] = \uparrow d_L$$

donde  $d_L$  es el menor elemento de  $\Delta[L]$ , es decir,

$$d_L = \Delta(\circ) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leq \circ\} = \downarrow \{(x, x^*) \mid x \in L\}.$$

# El razonamiento

## *Definición:*

Decimos que un marco  $A$  es espacial si  $A = \mathcal{O}S$ , para  $S$  un espacio topológico.

# El razonamiento

## *Definición:*

Decimos que un marco  $A$  es espacial si  $A = \mathcal{O}S$ , para  $S$  un espacio topológico.

## *Teorema:*

Si  $A$  es un marco espacial entonces

$A$  es 1-arreglado si y solo si  $S$  es  $T_2$

# La conjetura

- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow OS$  es parche trivial

# La conjetura

- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$  es parche trivial
- Un marco  $A$  es arreglado  $\Leftrightarrow A$  parche trivial.

# La conjetura

- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$  es parche trivial
- Un marco  $A$  es arreglado  $\Leftrightarrow A$  parche trivial.
- **(H)** es conservativa

# La conjetura

- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$  es parche trivial
- Un marco  $A$  es arreglado  $\Leftrightarrow A$  parche trivial.
- **(H)** es conservativa

$\mathcal{O}S$  es **(H)**  $\Leftrightarrow S$  es  $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$  parche trivial  $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$  arreglado

# La conjetura

- Si  $S$  es  $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$  es parche trivial
- Un marco  $A$  es arreglado  $\Leftrightarrow A$  parche trivial.
- $(\mathbf{H})$  es conservativa

$\mathcal{O}S$  es  $(\mathbf{H}) \Leftrightarrow S$  es  $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$  parche trivial  $\Leftrightarrow \mathcal{O}S$  arreglado

## *Conjetura*

Todo marco Hausdorff es 1-arreglado.



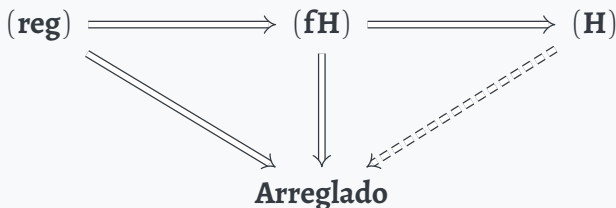
Buscamos tener nuevas caracterizaciones de arreglo basadas en las nociones tipo Hausdorff para marcos. Por ejemplo:

***Teorema:***

Para  $A$  un marco espacial,  $\mathcal{O}S$  es un marco Hausdorff si y solo si  $A$  es 1-arreglado.

***Teorema:***

Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.



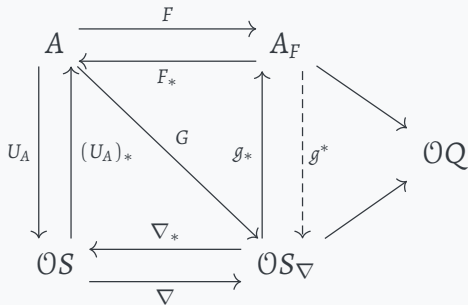
# ¿Qué significa apilado en marcos?

$\mathcal{O}S \text{ } \bullet - \text{arreglado} \Leftrightarrow S = \emptyset$





$\mathcal{O}S \text{ } \mathbf{1} - \text{arreglado} \Leftrightarrow S \text{ es } T_2$

$\mathcal{O}S \text{ arreglado} \Leftrightarrow S \text{ empaquetado} + \text{apilado}$





# EL Q-cuadrado



# References I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque localico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

## References II

-  Rosemary A Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
-  Harold Simmons, *The assembly of a frame*, University of Manchester (2006).
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.
-  A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2024. Universidad de Guadalajara.