

Modificaciones de parches y axiomas de separación en topología sin puntos

8 de julio de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Universidad de Guadalajara

Contenido

Lo que sabemos

Lo que hemos hecho

Conclusiones

Ejemplo

Sea $S = \mathbb{R}$ y consideremos las topologías generadas por:

$$\mathcal{O}_l S = \{(-\infty, a)\}, \quad \mathcal{O}_m S = \{(a, b)\}, \quad \mathcal{O}_n S = \{[a, b)\},$$

donde $a, b \in S$. Entonces

$$\mathcal{O}_l S \hookrightarrow \mathcal{O}_m S \hookrightarrow \mathcal{O}_n S$$

Se puede verificar que

$$\mathcal{O}_l^p S = \mathcal{O}_m S \simeq P\mathcal{O}_l S \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_l^f S = \mathcal{O}_n S \simeq N\mathcal{O}_l S,$$

es decir,

$$\mathcal{O}_l S = A \rightarrow PA \hookrightarrow NA$$

Filtros en Frm

Sea $A \in \text{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leq b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto
- Admisible ($\nabla(j)$)

Construcciones de parches

La construcción en Top:

- $S \in \text{Top}$ es empaquetado si y solo si $Q \in \mathcal{Q}S$ entonces $Q \in \mathcal{C}S$.
- ${}^pS \in \text{Top}$ es el espacio de parches con la topología generada por

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

- S es empaquetado si y solo si ${}^pS = S$.
- $T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$.
- Si S es T_1 , entonces ${}^pS = {}^{pp}S$.
- Si S es T_0 , entonces ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

$$\mathcal{O}S \hookrightarrow \mathcal{O}^pS \hookrightarrow \mathcal{O}^fS$$

Construcciones de parches

La construcción en Frm:

- Para $A \in \text{Frm}$, PA es el marco de parches y es generado por

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}.$$

- A es parche trivial si y solo si $A \simeq PA$.
- ¿Cuándo ocurre que $A \simeq PA$?
- ¿Cómo se comporta PA ?

$$A \longrightarrow PA \hookrightarrow NA$$

El diagrama de parches

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & PA & \hookrightarrow & NA \\
 \downarrow U_A & & \downarrow PU_A & & \downarrow NU_A \\
 \mathcal{O}S & \longrightarrow & P\mathcal{O}S & \hookrightarrow & N\mathcal{O}S \\
 & \searrow & \downarrow \pi_S & & \downarrow \sigma_S \\
 & & \mathcal{O}^pS & \hookrightarrow & \mathcal{O}^fS
 \end{array} \tag{1}$$

- La contrucción de parches es funtorial si para

$$f: A \rightarrow B$$

convierte filtros abiertos.

- U_A convierte filtros abiertos.

Marcos arreglados

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

- $F \in A^\wedge$ es α -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1,$$

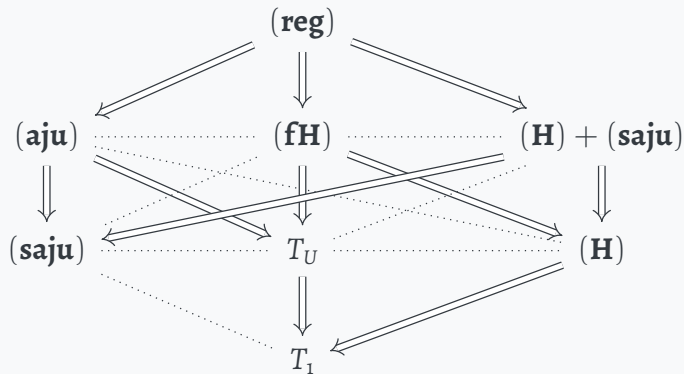
donde $d = d(\alpha) = f^\alpha(\circ)$ y $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$

- A es α -arreglado si todo $F \in A^\wedge$ es α -arreglado.
- A es arreglado si A es α -arreglado para algún α .

Propiedades de los marcos arreglados

- Arreglado \Leftrightarrow Parche trivial.
- Regular \Rightarrow Arreglado.
- Si A es arreglado $\Rightarrow S = \text{pt } A$ es T_1 .
- Si A es 1-arreglado $\Rightarrow S$ es T_2 .
- $\mathcal{O}S$ es 1-arreglado $\Leftrightarrow S$ es T_2 .
- $\mathcal{O}S$ es arreglado $\Leftrightarrow S$ es empaquetado y apilado.

Axiomas de separación en Frm



Axiomas tipo Hausdorff

Axioma/Comportamiento	C.	1°	2°	S. H.	C. S. E.
(dH)	x	✓	x	x	x
(H)	✓	✓	x	✓	x
(Hp)	✓	✓	x	✓	?
(fH)	x	x	✓	✓	✓

C.= Propiedad conservativa

S. H.= Suficientemente Hausdorff

C. S. E.= Comportamiento similar al espacial

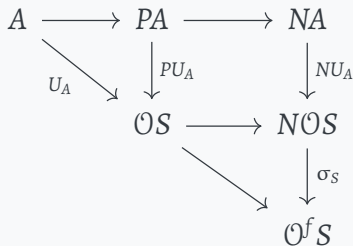
Analizando PA

¿El marco de parches se comporta como el espacio de parches?

- PA , en general, no es T_1 .
- Al no ser T_1 no puede cumplir algún otro axioma de separación más fuerte que T_1 .
- ¿ PA cumple (**saju**)?
- ¿Se cumple que $PA \simeq P^2A$?
- Se cumple que $P^2A \simeq P^3A$.

¿Qué pasa si el marco A cumple (**H**)?

- Si A es $(\mathbf{H}) \Rightarrow S = \text{pt} A$ es T_2
- Si S es $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$ es 1-arreglado.
- Si $\mathcal{O}S$ es 1-arreglado $\Rightarrow \mathcal{O}S \simeq P\mathcal{O}S$.
- Si S es $T_2 \Rightarrow^p S = S$.
- Si $^pS = S \Rightarrow \mathcal{O}S = \mathcal{O}^pS$.



Marcos arreglados vs propiedades en Frm

Corolario

*Si $A \in \text{Frm}$ es espacial, entonces $\mathcal{O}S$ cumple **(H)** $\Leftrightarrow A$ es 1-arreglado.*

Corolario

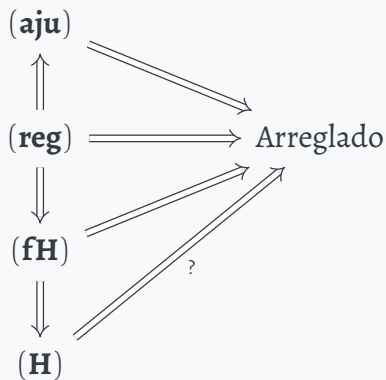
Todo marco ajustado es arreglado.

Proposición

Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.

Proposición

Si A es arreglado, A_j es arreglado para $j \in \mathcal{N}A$.



Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^\wedge$, entonces

$$u_d \leq v_F \leq w_F$$

para $d = v_F(\circ)$, $v_F = f^\infty$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Si $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Arreglado $\Leftrightarrow v_F \leq u_d$
- **(fH)** $\Leftrightarrow \forall j \in [v_F, w_F], j = u_\bullet$ y $\bullet \in A$.
- **(aju)** $\Leftrightarrow [v_F, w_F] = \{*\}$ y $* = u_\bullet$ para $\bullet \in A$.

Por el Teorema de Hoffman-Mislove

$$Q \in \mathcal{QS} \leftrightarrow F \in A^\wedge \quad \text{y} \quad Q \in \mathcal{QS} \leftrightarrow \nabla \in \mathcal{OS}^\wedge.$$

Además, $[v_Q, w_Q] \subseteq N\mathcal{OS}$ es un intervalo de admisibilidad.

Proposición

Con F y Q como antes, si $j \in [v_Q, w_Q]$, entonces

$$\nabla(U_*jU^*) = F$$

donde U^* es la reflexión espacial y U_* es su adjunto derecho.

Equivalentemente

$$\mathcal{U}: [v_Q, w_Q] \rightarrow [v_F, w_F].$$

El Q-cuadrado

En [12] construyen el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f^\infty} & A \\ U_A \downarrow & & \downarrow U_A \\ \mathcal{OS} & \xrightarrow{F^\infty} & \mathcal{OS} \end{array}$$

y prueban que $U_A \circ f^\infty \leq F^\infty \circ U_A$.

Si $j \in NA$, \hat{f}^∞ es el núcleo asociado al filtro $j_*F \in A^\wedge$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f}^\infty} & A \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ A_j & \xrightarrow{f^\infty} & A_j \end{array}$$

Proposición

Para j, f y \hat{f} como antes, se cumple que

1. $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$.
2. $j \circ \hat{f}^\infty \leq f^\infty \circ j$.

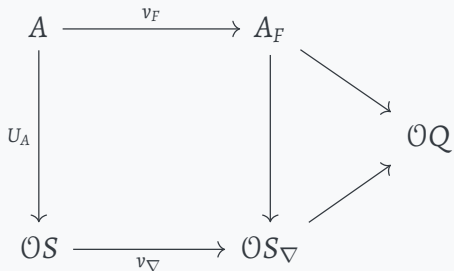
Definiendo $H = f^\infty \circ j$ y $h = H|_{A_{j*F}}$, obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\hat{f}^\infty} & A_{\hat{f}^\infty} \\
 j \downarrow & \searrow H & \downarrow h \\
 A_j & \xrightarrow{f^\infty} & A_{f^\infty}
 \end{array} \tag{2}$$

Proposición

El diagrama (2) es conmutativo.

Consideremos



¿Qué pasa si A cumple **(H)**?

Marcos KC

$S \in \text{Top}$ es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Definición

$A \in \text{Frm}$ es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.

Equivalentemente

$$A_F = u_d$$

para algún $d \in A$ y $F \in A^\wedge$.

Propiedades de los marcos KC

$KC \Rightarrow$ Arreglado

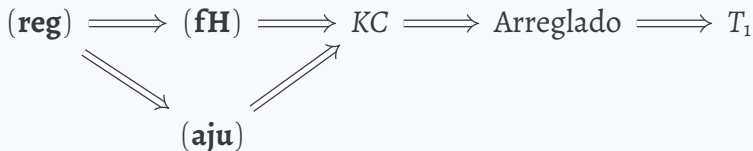
Proposición

Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.

Proposición

Si A es KC , entonces A es T_1 .

De hecho



La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$ es una topología..

Propiedades de $\mathcal{O}S$

- $\mathcal{O}S$ es T_1 .
- $\mathcal{O}S$ no es **(H)**.
- $\mathcal{O}S$ es compacto.
- $\mathcal{O}S$ es **(aju)**.
- $\mathcal{O}S$ es KC .
- $\mathcal{O}S$ es 2-arreglado.

El ejemplo de Paseka y Smarda

Consideremos $A \in \mathbf{Frm}$ y $A_r = \{a \in A \mid \neg\neg a = a\}$. Definimos

$$K(A) = \{(u, v) \mid u \in A, v \in A_r, u \leq v\}$$

$K(A) \in \mathbf{Frm}$.

Propiedades de $K(A)$

- Si A es **(H)** y $\neg m = \circ$ para m máximo, $K(A)$ es **(H)**.
- Si A es compacto, entonces $K(A)$ es compacto.
- $K(A)$ no es subajustado

De manera adicional, sea $A = [0, 1]$ con la topología usual.
Entonces





- $\mathcal{O}I$ es (\mathbf{H}) .
- $\mathcal{O}I$ es compacto.
- $K(\mathcal{O}I)$ es compacto y (\mathbf{H}) .
- $K(\mathcal{O}I)$ no es subajustado.
- $K(\mathcal{O}I)$ no es espacial.

Existe marcos Hausdorr y compactos que no son espaciales.





Conclusiones

- Requerimos identificar cual es significado de que un marco sea US .
- Conocer más sobre el comportamiento del marco de parches para niveles superiores.
- Verificar que (H) implica (o no) KC (o arreglado).
- Desarrollar ejemplos donde aparezcan las propiedades que están involucradas en la investigación.
- Explorar las posibilidades que brindan los intervalos de admisibilidad y el Q -cuadrado.

Bibliografía I

-  P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
-  J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
-  J. Paseka and B. Smarda, *T_2 -frames and almost compact frames*. Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.
-  J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

-  J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
-  RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
-  RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
-  RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

Bibliografía III



H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en <https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons>.



H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*. Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.



H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

Bibliografía IV



H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/hsimmons>.



A. Wilansky, *Between T_1 and T_2* , MONTHLY (1967): 261-266.



A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.