Modificaciones de parches

y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

11 de noviembre de 2025

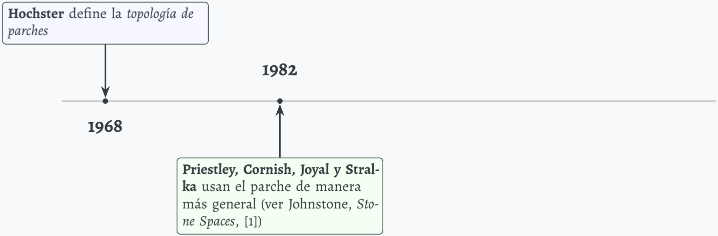
Juan Carlos Monter Cortés
Director: Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi
Universidad de Guadalajara

La construcción de parches

Hochster define la *topología de parches*

1968

La construcción de parches



La construcción de parches

1968

Hochster define la *topología de parches*

1982

Priestley, Cornish, Joyal y Stralka usan el parche de manera más general (ver Johnstone, *Stone Spaces*, [1])

1996

Escardó desarrolla el *parche continuo* para retículas

La construcción de parches

1968

Hochster define la *topología de parches*

1982

Priestley, Cornish, Joyal y Stralka usan el parche de manera más general (ver Johnstone, *Stone Spaces*, [1])

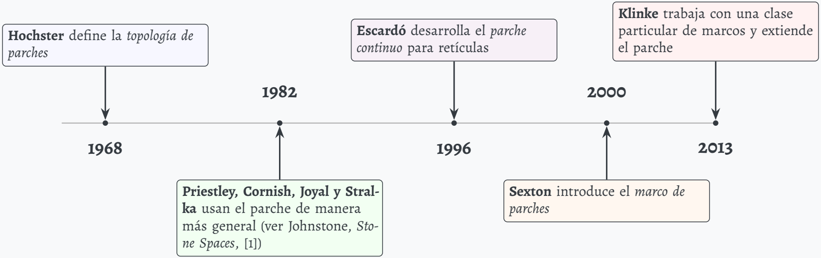
1996

Escardó desarrolla el *parche continuo* para retículas

2000

Sexton introduce el *marco de parches*

La construcción de parches



Teoría de marcos

$$\mathsf{Frm} = \begin{cases} \mathsf{Obj} : & (A, \leqslant, \wedge, \bigvee, 1, 0) \\ \\ \text{Flechas:} & f \colon A \to B \end{cases}$$

Para $S \in \mathsf{Top}$,

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset) \in \mathsf{Frm}$$

Además,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top} \arrow[rr, bend left, "\mathcal{O}(\_)"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Frm} \arrow[ll, bend left, "\mathrm{pt}(\_)"] \end{tikzcd}$$

es una adjunción.

Núcleos y cocientes

Definición

Sea $j\colon A \to A$ un morfismo monótono. Decimos que j es un **núcleo** si:

$$i)\ a \leqslant j(a) \quad ii)\ j^2(a) = j(a) \quad iii)\ j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$$

$NA = \{\text{núcleos en } A\}$.
Si $a \in A$, definimos

$$u_a(x) = a \vee x \quad v_a(x) = (a \succ x) \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

y $u_a, v_a, w_a \in NA$.

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Un **cociente** de A es un marco B y un morfismo

$$f\colon A \to B$$

suprayectivo.

Sea $A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}$. Si $j \in NA$,

$$j\colon A \to A_j \text{ es suprayectivo} \quad \text{y} \quad A_j \in \mathsf{Frm}$$

A_j es el *marco cociente*. En particular,

$$A_{u_a} = \text{c. cerrado}, \quad A_{v_a} = \text{c. abierto}, \quad A_{w_a} = \text{c. regular}.$$

Filtros

Definición

Sea $A \in \mathsf{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un **filtro** si:

1. $1 \in F$.
2. Si $a \leqslant b$ y $a \in F$, entonces $b \in F$.
3. Si $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

En particular, decimos que F es un **filtro abierto** si:

$$X \subseteq A \text{ dirigido tal que } \bigvee X \in F \Rightarrow F \cap X \neq \emptyset.$$

$A^{\wedge}$ =Filtros abiertos en A.

Filtros de admisibilidad

Definición

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $j \in NA$.

1. Un filtro es **admisible** si tiene la forma

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

2. Para $j, k \in NA$ definimos

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k)$$

3. Decimos que $f \in [\,j\,]$ es un **núcleo ajustado** si para todo $k \in [\,j\,], f \leqslant k$. Equivalentemente

$$f \text{ es ajustado} \iff f = \bigvee\{v_a \mid a \in F = \nabla(j)\}.$$

El Teorema de Hoffman-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[1].
3. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si para todo $k \in [\, j \,]$ se tiene que $v_F \leqslant k$, donde

$$v_F = f^{\infty} \quad \text{y} \quad v_F \text{ es ajustado.}$$

Teorema [Hoffman-Mislove]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \mathsf{pt}\, A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y $F \in A^{\wedge}$.

[1] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

El Teorema de Hoffman-Mislove

Proposición

1. Si $F \in A^{\wedge}$, entonces $F = \nabla(j)$.
2. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si A_j es compacto[1].
3. $F = \nabla(j) \in A^{\wedge}$ si y solo si para todo $k \in [\, j\,]$ se tiene que $v_F \leqslant k$, donde

$$v_F = f^{\infty} \quad \text{y} \quad v_F \text{ es ajustado.}$$

Teorema [Hoffman-Mislove (extendido)]

Sea $A \in \mathsf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}\, A \in \mathsf{Top}$. Existe una correspondencia biyectiva entre $Q \in \mathcal{Q}S$ y núcleos ajustados.

[1] $A \in \mathsf{Frm}$ es compacto si y solo si para $X \subseteq A$, $1 = \bigvee X$.

Espacio de parches

Consideremos $S \in \mathsf{Top}$. Denotamos por ${}^pS = (S, \mathcal{O}^pS)$ al **espacio de parches** de S, donde $\mathcal{O}^pS$ está generado por

$$\mathrm{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathfrak{Q}S\}$$

$$\mathcal{O}S \longrightarrow \mathcal{O}^pS \longrightarrow \mathcal{O}^fS$$

Definición

S es **empaquetado** si todo subconjunto compacto (saturado) es cerrado

S es empaquetado $\iff {}^pS = S$ y $T_2 \Rightarrow$ empaquetado $\Rightarrow T_1$

Marco de parches

Consideremos $A \in \mathsf{Frm}$. Denotamos por PA al **marco de parches** de A, donde PA está generado por

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r] & NA \end{tikzcd}$$

Definición

A es **parche trivial** si y solo si $A \simeq PA$.

$$? \Rightarrow \text{ parche trivial } \Rightarrow T_1$$

Marcos eficientes

Definición [[8], Def. 8.2.1]

Sean $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$ y $\alpha \in \mathsf{Ord}$. Decimos que:

1. F es α-**eficiente** si para $x \in F$, $d \vee x = 1$, donde
$$d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0).$$
2. A es α-**eficiente** si cada $F \in A^{\wedge}$ es α-eficiente.
3. A es **eficiente** si es α-eficiente para algún $\alpha \in \mathsf{Ord}$.

Proposición [[8], Lema 8.2.2]

$$A \text{ es eficiente} \iff A \text{ es parche trivial.}$$

Objetivos

1. Entender los marcos eficientes con mayor detalle.
2. Explorar su relación con algunos axiomas de separación en Frm.
3. Proporcionar herramientas que permitan estudiar a los marcos eficientes.
4. Dar ejemplos.

Axiomas de separación en Frm[2]

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{reg}) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{aju}) \arrow[r, dash, dotted] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, dash, dotted] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \arrow[d, Rightarrow] \\
(\mathbf{saju}) \arrow[r, dash, dotted] \arrow[ur, dash, dotted] & T_1 & (\mathbf{H}) \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

[2] Para cualesquiera $a \nleq b \in A$ tenemos que A es:
(reg) si $\exists\, x, y \in A$ tales que $a \vee x = 1$, $y \nleq b$ y $x \wedge y = 0$.
(H) si $\exists\, c \in A$ tal que $c \nleq a$ y $\neg c \leqslant b$.
(aju) si $\exists\, x, y \in A$ tales que $x \vee a = 1$, $y \nleq b$ y $x \wedge y \leqslant b$.
(saju) si $\exists\, c \in A$ tal que $c \vee a = 1 \neq c \vee b$.
(fH) y T_1 son nociones algo diferentes. Todas estas pueden verse en [5].

Propiedades de los marcos eficientes

Este es in resumen de las propiedades que Sexton menciona en [8]

- En el caso espacial ($A = \mathcal{O}S$),

$$\begin{aligned} \mathcal{O}S \text{ es 0-eficiente} &\iff S = \emptyset \\ \mathcal{O}S \text{ es 1-eficiente} &\iff S \text{ is } T_2 \\ \mathcal{O}S \text{ es eficiente} &\iff S \text{ es empaquetado y apilado.} \end{aligned}$$

- Para $A \in \mathsf{Frm}$ arbitrario

$$\begin{aligned} A \text{ es } (\mathbf{reg}) &\Rightarrow A \text{ es eficiente} \\ A \text{ es } (\mathbf{aju}) &\Rightarrow A \text{ es eficiente} \\ A \text{ es eficiente } &\Rightarrow A \text{ es } T_1 \end{aligned}$$

Cronograma de actividades (Al inicio)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Revisión de bibliografía	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Lectura de artículos	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Generar de conjeturas		✓	✓	✓	✓	✓		
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

Cronograma de actividades (Particular)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Aprender sobre construciones de parches	✓	✓	✓					
Aprender sobre axiomas de separación	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Entender ejemplos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Consultar fuentes alternativas		✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Desarrollar teoría			✓	✓	✓	✓	✓	
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

Cronograma de actividades (2da mitad)

Cronograma de actividades

Actividades	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Consultar fuentes bibliográficas	✓	✓	✓	
Proponer conjeturas	✓	✓	✓	✓
Validación y rechazo de conjeturas	✓	✓	✓	✓
Redacción y presentación de artículos	✓	✓	✓	✓
Escritura de la tesis	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones	✓	✓	✓	✓
Sustentación				✓

El diccionario

Top

Frm

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)

El diccionario

Top	Frm
• Espacio de parches (${}^{p}S$)	• Marco de parches (PA)
• pbase$= \{U \cap Q'\}$	

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$=\{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$=\{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Eficiente?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Eficiente?

El diccionario

Top

- Espacio de parches (${}^{p}S$)
- pbase$= \{U \cap Q'\}$
- Empaquetado (${}^{p}S = S$)
- $Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$
- ${}^{pp}S = {}^{ppp}S$
- $T_2 \Rightarrow$Empaquetado
- Subespacios compactos cerrados

Frm

- Marco de parches (PA)
- Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
- Parche trivial ($PA \cong A$)
- $u_d = v_F$
- ¿$PPA = PPPA$?
- ¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Eficiente?
- Cocientes compactos cerrados.

El diccionario

Top	Frm
Espacio de parches (${}^{p}S$)	Marco de parches (PA)
pbase$= \{U \cap Q'\}$	Pbase$= \{u_a \wedge v_F\}$
Empaquetado (${}^{p}S = S$)	Parche trivial ($PA \cong A$)
$Q \in \mathcal{Q}S \Rightarrow Q \in \mathcal{C}S$	$u_d = v_F$
${}^{pp}S = {}^{ppp}S$	¿$PPA = PPPA$?
$T_2 \Rightarrow$Empaquetado	¿$(\mathbf{H}) \Rightarrow$Eficiente?
Subespacios compactos cerrados	Cocientes compactos cerrados.

Algunos resultados

Si $(f\colon A \to B) \in \mathsf{Frm}$, $G \subseteq A$ y $F \subseteq B$ son filtros, entonces

$$b \in f[G] \iff f_*(b) \in G \quad \text{y} \quad a \in f_*[F] \iff f(a) \in F.$$

También, si $F \in B^{\wedge}$, entonces $f_*(F) \in A^{\wedge}$.

Proposición

Para f^{∞} y f_j^{∞} los núcleos asociados a F y j_*F, respectivamente, tenemos que

$$j \circ f_j^{\infty} \leqslant f^{\infty} \circ j$$

Demostración

Por inducción transfinita. $\square$

Más propiedades de los marcos eficientes

Proposición

Si $A \in \mathsf{Frm}$ es eficiente y $j \in NA$, entonces A_j es eficiente.

Demostración

- Tomamos $x \in F \in A_j^{\wedge}$ y $F \subseteq j_*[F] \in A^{\wedge}$.
- Para f^{∞} y f_j^{∞} como antes, tenemos

$$d = d(\alpha) \geqslant d_j(\alpha) = d_j$$

- Ya que A es eficiente, entonces $d_j \vee x = 1$, para todo $x \in j_*[F]$. En particular, para todo $x \in F$.
- Por lo tanto, $d \vee x = 1$.

$\square$

Proposición

Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de marcos eficientes, entonces $\bigoplus_{i\in I} A_i$ es un marco eficiente.

Demostración

Sabemos que $\bigoplus A_i \in \mathsf{Frm}$ y $(\iota_i \colon A_i \to \bigoplus A_i) \in \mathit{Frm}$. Entonces

- Existe $(\iota_i)_*$ y para $F \in (\bigoplus A_i)^\wedge$, $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$.
- Consideramos $\sup\{\alpha_i\}$ como el grado de eficiencia de cada A_i.
- Por la eficiencia, si $x_i \in (\iota_i)_*[F]$, entonces $x_i \vee d_i = 1$.
- Consideramos $\langle x_i \rangle \in F$.
- Verificamos que $\langle d_i \rangle \leqslant f_F^\alpha(\iota_i(0)) = d(\alpha) = d$.
- Por lo tanto $\langle x_i \rangle \vee d = 1$.

$\square$

Corolario

Si A es (**fH**), A es eficiente.

Demostración

Bajo (**fH**) todos los cocientes compactos son cerrados. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{H}) \arrow[dr, Rightarrow, dotted] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{Eficiente} \\
 & (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

Cocientes compactos

$$\text{Eficiente} \iff \text{P. trivial} \iff u_d = v_F$$

Notemos que

A_{u_d} es un cociente cerrado y A_{v_F} es un cociente compacto.

Si A es eficiente, tenemos un cociente compacto y cerrado.

Marcos KC

En [13], Wilansky menciona que $S \in \mathrm{Top}$ es **KC** si cada subconjunto compacto es cerrado.

Definición

$A \in \mathrm{Frm}$ es un **marco KC** si cada cociente compacto es cerrado.

$$\mathbf{KC} \Rightarrow \text{Eficiente}$$

Proposición

Si $A \in \mathrm{Frm}$ es **KC** y $j \in NA$, entonces A_j es **KC**.

Demostración

- Consideramos $k \in NA_j$ tal que $\nabla(k) \in A_j^{\wedge}$.
- Si $\nabla(k) \in A_j^{\wedge} \Rightarrow j_*[\nabla(k)] \in A^{\wedge}$[3].
- Tomamos $l = j_* \circ k \circ j \in NA$ y $\nabla(l) \in A^{\wedge} \Rightarrow l = u_a$ para algún $a \in A$.
- Además $a = k(j(a))$.
- Para $x, b \in A_j$ con $b = j(a)$ tenemos $u_b(x) = k(x)$.

$\square$

[3] **Proposición:** Para $j \in NA$ y $k \in NA_j$. Si $\nabla(k) \in A_j^{\wedge}$, $\nabla(j_* k j) \in A^{\wedge}$.

Podemos construir el diagrama (ver [12])

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
& & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $g = (U_A)_* \circ (v_\nabla)_{|A_F}$.

¿Qué pasa si A tiene la propiedad ($\mathbf{H}$)?

Teorema

Sea A un marco con la propiedad $(\mathbf{H})$, entonces para cada $F \in A^{\wedge}$ y su correspondiente $Q \in \mathcal{Q}S$, tenemos

$$\mathcal{O}Q \simeq \uparrow Q',$$

es decir, el marco de abiertos del espacio de puntos de A_F es isomorfo a un cociente compacto y cerrado de un espacio Hausdorff.

Algunos ejemplos

- Con la topología cofinita vemos que $PA = NA$.
- Con la topología conumerable vemos que $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$.
- La topología subregular de los reales proporciona un marco 1-eficiente que no es regular.
- Con la topología máximo compacta tenemos un marco 2-eficiente que no es 1-eficiente.
- La topología guía sobre un árbol muestra que existen marcos α-eficientes.

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

- J. Paseka and B. Smarda, *T_2-frames and almost compact frames.* Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

Bibliografía III

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

- H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

Bibliografía IV

- H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.

- A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.