Cocientes compactos vs marcos arreglados

2 de mayo de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara

juan.monter2902@alumnos.udg.mx

Contenido

Por si acaso…

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Por si acaso…

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

Por si acaso…

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

Por si acaso...

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

$$\mathbf{Frm} = \begin{cases} A, & \text{marcos} \\ f, & \text{morfismo de marcos} \end{cases}$$

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

Cocientes en **Frm**

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Cocientes en **Frm**

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

Cocientes en **Frm**

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Congruencias $\leftrightarrow$ Conjuntos implicativos $\leftrightarrow$ Núcleos

Cocientes en Frm

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y $j\colon A \to A$, decimos que j es un *núcleo* si:

1. j infla.
2. j es monótona.
3. j es idempotente.
4. j respeta ínfimos finitos.

$$NA = \text{núcleos de } A.$$

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo suprayectivo $f : A \to B$.

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo supravectivo $f: A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo suprayectivo $f\colon A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- A_j es un cociente de A.

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo supravectivo $f: A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- A_j es un cociente de A.
- ¿Qué es un cociente compacto?

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

Otros “tipos” de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"
- A_{v_a} "cociente abierto"

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"
- A_{v_a} "cociente abierto"
- A_{w_a} "cociente regular"

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"
- A_{v_a} "cociente abierto"
- A_{w_a} "cociente regular"

Núcleos $\leftrightarrow$ Sublocales $\leftrightarrow$ Subespacios

Otros “tipos” de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} “cociente cerrado” $\leftrightarrow$ sublocal cerrado.
- A_{v_a} “cociente abierto” $\leftrightarrow$ sublocal abierto.
- A_{w_a} “cociente regular” $\leftrightarrow$ sublocal regular.

Núcleos $\leftrightarrow$ Sublocales $\leftrightarrow$ Subespacios

Filtros en **Frm**

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Filtros en **Frm**

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto
- Admisible ($\nabla(j)$)

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

$$f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}, \quad v_F = f^{\infty}, \quad w_F = w_a.$$

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

A es compacto si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

A es compacto si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

- A_j es un cociente de A.

Cocientes compactos

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Una *cubierta* A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$. Una *subcubierta* de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$

A es compacto si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.

¿Qué son los marcos arreglados?

- Una de las aplicaciones de la teoría de marcos es que, en cierto punto, un marco puede llegar a mimetizar el comportamiento de la topología de un espacio.

¿Qué son los marcos arreglados?

- Una de las aplicaciones de la teoría de marcos es que, en cierto punto, un marco puede llegar a mimetizar el comportamiento de la topología de un espacio.
- En este sentido, los marcos arreglados buscan imitar la propiedad de que un espacio sea empaquetado.

¿Qué son los marcos arreglados?

- Una de las aplicaciones de la teoría de marcos es que, en cierto punto, un marco puede llegar a mimetizar el comportamiento de la topología de un espacio.
- En este sentido, los marcos arreglados buscan imitar la propiedad de que un espacio sea empaquetado.
- Como es habitual, las variantes que proporcionan los marcos son caracterizaciones “libres de puntos”.

Aspectos sensibles a puntos

Definition

Un espacio topológico S es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado

Aspectos sensibles a puntos

Definition

Un espacio topológico S es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado

Si Q $\in \mathcal{Q}S$ y Q $\notin \mathcal{C}S \Rightarrow S$ no es empaquetado.

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S,\ Q \in \mathcal{Q}S\}$$

Aspectos sensibles a puntos

Definition

Un espacio topológico S es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado

Si $Q \in \mathcal{Q}S$ y $Q \notin \mathcal{C}S \Rightarrow S$ no es empaquetado.

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S,\ Q \in \mathcal{Q}S\}$$

Definition

Para un espacio topológico S, sea ${}^{p}S$ (*espacio de parches*), el espacio con los mismos puntos que S y la topología $\mathcal{O}^{p}S$ generada por la pbase.

Marcos arreglados

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

- $F \in A^{\wedge}$ es α-arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1,$$

  donde $d = d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$ y $f = \bigvee\{v_a \mid a \in F\}$
- A es α-arreglado si todo $F \in A^{\wedge}$ es α-arreglado.
- A es arreglado si A es α-arreglado para algún α.

Marcos arreglados

Propiedades:

- Parche trivial $\Leftrightarrow$ arreglado
- Arreglado $\Leftrightarrow$ empaquetado $+$ apilado
- Un espacio S tiene topología 1-arreglada $\Leftrightarrow$ S es T_2.
- Arreglado $\Rightarrow$ T_1
- Regularidad $\Rightarrow$ arreglado
- $(\mathbf{fH})$ $\Rightarrow$ arreglado

Más información sobre el arreglo

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Más información sobre el arreglo

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

Más información sobre el arreglo

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.

Más información sobre el arreglo

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.

Más información sobre el arreglo

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$.

Más información sobre el arreglo

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$.
- Si $u_d(x) = 1$, entonces $u_d = v_F$

Cocientes compactos vs marcos arreglados

¿Qué relación existe entre los cocientes compactos y los marcos arreglados?

Cocientes compactos vs marcos arreglados

¿Qué relación existe entre los cocientes compactos y los marcos arreglados?

A es arreglado $\Leftrightarrow$ A tiene al menos un cociente compacto y cerrado.

De manera adicional...

Cocientes compactos vs marcos arreglados

¿Qué relación existe entre los cocientes compactos y los marcos arreglados?

A es arreglado $\Leftrightarrow$ A tiene al menos un cociente compacto y cerrado.

De manera adicional...

- $[v_F, w_F]$ produce una familia de cocientes compactos.

Cocientes compactos vs marcos arreglados

¿Qué relación existe entre los cocientes compactos y los marcos arreglados?

A es arreglado $\Leftrightarrow A$ tiene al menos un cociente compacto y cerrado.

De manera adicional...

- $[v_F, w_F]$ produce una familia de cocientes compactos.
- $v_F = w_F$ produce un único cociente compacto.

Espacios-Marcos KC

Definición:

Decimos que un espacio topológico S es un *espacio KC* si cada conjunto compacto es cerrado.

Espacios-Marcos KC

Definición:

Decimos que un espacio topológico S es un *espacio KC* si cada conjunto compacto es cerrado.

Definición:

Un marco A es un *marco KC* si cada cociente compacto de A es cerrado.

Espacios-Marcos KC

Definición:

Decimos que un espacio topológico S es un *espacio KC* si cada conjunto compacto es cerrado.

Definición:

Un marco A es un *marco KC* si cada cociente compacto de A es cerrado.

En otras palabras, si cada sublocal compacto es cerrado.

El comportamiento de KC

En espacios

$$T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow KC \Longrightarrow T_1$$

En marcos

$$(\mathbf{reg}) \Longrightarrow (\mathbf{H}) \Longrightarrow KC \Longrightarrow \mathbf{Arr} \Longrightarrow T_1$$

En espacios

$$T_2 + \text{compacto} \implies \text{Regular}$$

En marcos

$$(\mathbf{H}) + \text{compacto} \;\not\!\!\implies (\mathbf{reg})$$

Existe un marco que cumple $(\mathbf{H})$ compacto que no es $(\mathbf{saju})$

$$(\mathbf{reg}) \implies (\mathbf{aju}) \implies (\mathbf{saju})$$

Colapso del intervalo de admisibilidad

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{aju}) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & v_F = w_F \\
(\mathbf{fH}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \\
(\mathbf{H}) \arrow[uur, Rightarrow, "?"'] &
\end{tikzcd}
$$

Lo que estamos trabajando

- Condiciones que permitan colapsar los intervalos de admisibilidad.

- $\vdots$

Lo que estamos trabajando

- Condiciones que permitan colapsar los intervalos de admisibilidad.
- Caracterizar o conocer el comportamiento de los filtros abiertos de un marco.
- $\vdots$

Lo que estamos trabajando

- Condiciones que permitan colapsar los intervalos de admisibilidad.
- Caracterizar o conocer el comportamiento de los filtros abiertos de un marco.
- Conocer la relación de la condición de arreglo con los distintos cocientes que produce el intervalo de admisibilidad.
- $\vdots$

Lo que estamos trabajando

- Condiciones que permitan colapsar los intervalos de admisibilidad.
- Caracterizar o conocer el comportamiento de los filtros abiertos de un marco.
- Conocer la relación de la condición de arreglo con los distintos cocientes que produce el intervalo de admisibilidad.
- Definir nociones libres de puntos relacionadas con KC.
- $\vdots$

Lo que estamos trabajando

- Condiciones que permitan colapsar los intervalos de admisibilidad.
- Caracterizar o conocer el comportamiento de los filtros abiertos de un marco.
- Conocer la relación de la condición de arreglo con los distintos cocientes que produce el intervalo de admisibilidad.
- Definir nociones libres de puntos relacionadas con KC.
- Dar ejemplos de los diferentes marcos que se vayan definiendo.
- $\vdots$

Lo que estamos trabajando

- Condiciones que permitan colapsar los intervalos de admisibilidad.
- Caracterizar o conocer el comportamiento de los filtros abiertos de un marco.
- Conocer la relación de la condición de arreglo con los distintos cocientes que produce el intervalo de admisibilidad.
- Definir nociones libres de puntos relacionadas con KC.
- Dar ejemplos de los diferentes marcos que se vayan definiendo.
- $\vdots$

References I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

References II

- Rosemary A Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

- Harold Simmons, *The assembly of a frame*, University of Manchester (2006).

- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2024. Universidad de Guadalajara.