# Intervalos de admisibilidad y marcos *KC*

*MITAC, Agosto 2025*
*5 de agosto de 2025*

**Juan Carlos Monter Cortés**

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx
github.com/JCmonter

# Contenido


Información preliminar

Intervalos de admisibilidad

Marcos *KC*

Ejemplos

# Marcos

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

# Marcos

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

# Marcos

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

# Marcos

- $A$
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\}$$

$$\mathbf{Frm} = \begin{cases} A, & \text{marcos} \\ \\ f, & \text{morfismo de marcos} \end{cases}$$

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

$$U_A(x) = \{x \in \mathrm{pt}\, A \mid x \not\leq p\} \qquad A \simeq \mathcal{O}S, A \text{ es espacial.}$$

# ¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

$$U_A(x) = \{x \in \mathrm{pt}\,A \mid x \not\leq p\} \qquad A \simeq \mathcal{O}S, A \text{ es espacial.}$$

# Cocientes en **Frm**

**Frm** proporciona correspondencias biyectivas interesantes

# Cocientes en **Frm**

**Frm** proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

# Cocientes en Frm

**Frm** proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Congruencias $\leftrightarrow$ Conjuntos implicativos $\leftrightarrow$ Núcleos

# Cocientes en Frm

**Frm** proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

### *Definición:*

Sea $A \in$ **Frm** y $j\colon A \to A$, decimos que $j$ es un *núcleo* si:

1. $j$ infla.
2. $j$ es monótona.
3. $j$ es idempotente.
4. $j$ respeta ínfimos finitos.

$$NA = \text{núcleos de } A.$$

***Definición:***

Un cociente de un marco $A$ es un marco $B$ equipado con un morfismo supráyectivo $f : A \to B$.

*Definición:*

Un cociente de un marco $A$ es un marco $B$ equipado con un morfismo supravectivo $f: A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

***Definición:***

Un cociente de un marco $A$ es un marco $B$ equipado con un morfismo supráyectivo $f : A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- $A_j$ es un cociente de $A$.

***Definición:***

Un cociente de un marco $A$ es un marco $B$ equipado con un morfismo supráyectivo $f : A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- $A_j$ es un cociente de $A$.
- Existen cocientes interesantes que estudiar

# Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

# Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in$ **Frm** definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

# Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- $A_{u_a}$ "cociente cerrado"

# Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- $A_{u_a}$ "cociente cerrado"
- $A_{v_a}$ "cociente abierto"

# Algunos tipos de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- $A_{u_a}$ “cociente cerrado”
- $A_{v_a}$ “cociente abierto”
- $A_{w_a}$ “cociente regular”

# Filtros en Frm

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que $F$ es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

# Filtros en Frm

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que $F$ es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto ($A^{\wedge}$)
- Admisible ($\nabla(j)$)

# Filtros en Frm

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que $F$ es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto ($A^{\wedge}$)
- Admisible ($\nabla(j)$)

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

***Observaciones:***

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

***Observaciones:***

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

***Observaciones:***

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

***Observaciones:***

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

***Observaciones:***

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

***Observaciones:***

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

$$f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}, \quad v_F(a) = f^{\infty}(a), \quad w_F(a) = \bigwedge\{p \in M \mid a \leqslant p\}.$$

# Filtros de admisiblidad

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de $j$ es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

***Observaciones:***

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

$$f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}, \quad v_F(a) = f^{\infty}(a), \quad w_F(a) = \bigwedge\{p \in M \mid a \leqslant p\}.$$

$M = \{m \in A \setminus F \mid m \text{ es máximo}\}$ y $M \subseteq S = \mathrm{pt}\, A$.

# Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

***Información con los intervalos***

# Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

## *Información con los intervalos*

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.

# Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

## *Información con los intervalos*

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:

# Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

## *Información con los intervalos*

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:
  - Se puede colapsar el intervalo ($[v_F, w_F] = \{*\}$).

# Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

## *Información con los intervalos*

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:
  - Se puede colapsar el intervalo ($[v_F, w_F] = \{*\}$).
  - Si $j \in [v_F, w_F]$, $j$ tiene una forma peculiar ($j = u_\bullet$, $\bullet \in A$).

# Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(\circ)$, $v_F = f^{\infty}$.

## *Información con los intervalos*

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Bajo ciertas condiciones, los intervalos se comportan de manera particular:
  - Se puede colapsar el intervalo ($[v_F, w_F] = \{*\}$).
  - Si $j \in [v_F, w_F]$, $j$ tiene una forma peculiar ($j = u_{\bullet}$, $\bullet \in A$).
- ¿Qué significa que ocurra alguno de los casos anteriores?

# Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

# Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si $A$ es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.

# Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si $A$ es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.
- Si $A$ es *ajustado*, $v_F = w_F = u_\bullet$ para algún $\bullet \in A$.

# Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si $A$ es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.
- Si $A$ es *ajustado*, $v_F = w_F = u_\bullet$ para algún $\bullet \in A$.
- Si $A$ es *fuertemente Hausdorff*, $u_\bullet = j \in [v_F, w_F]$ para algún $\bullet \in A$.

# Relación con otras propiedades

Sean $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$.

- Si $A$ es *arreglado*, $v_F = u_d$, para $d = v_F(0)$.
- Si $A$ es *ajustado*, $v_F = w_F = u_\bullet$ para algún $\bullet \in A$.
- Si $A$ es *fuertemente Hausdorff*, $u_\bullet = j \in [v_F, w_F]$ para algún $\bullet \in A$.

¿Existen otras propiedades que se relacionen con los intervalos?

# Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$

# Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}, F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}, F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

# Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}, F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}, F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

$$F = \nabla(Q), \text{ donde } Q \in \mathcal{Q}S$$

# Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}, F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}, F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

$$F = \nabla(Q), \text{ donde } Q \in \mathcal{Q}S$$

- $\phi \colon [v_{\nabla(Q)}, w_{\nabla(Q)}] \to [v_F, w_F]$

# Algo más técnico

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$
- $\mathcal{O}S \in \mathsf{Frm}$, $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq N\mathcal{O}S$

$$F = \nabla(Q), \text{ donde } Q \in \mathcal{Q}S$$

- $\phi\colon [v_{\nabla(Q)}, w_{\nabla(Q)}] \to [v_F, w_F]$

¿Qué propiedades cumple $\phi$?

# Cocientes compactos

***Definición:***

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

# Cocientes compactos

***Definición:***

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* $A$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.

# Cocientes compactos

***Definición:***

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* $A$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de $X$ es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.

# Cocientes compactos

*Definición:*

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* $A$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de $X$ es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- $A$ es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

# Cocientes compactos

***Definición:***

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* $A$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de $X$ es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- $A$ es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

$A$ es compacto si $1$ es compacto.

# Cocientes compactos

***Definición:***

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* $A$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de $X$ es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- $A$ es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

$A$ es compacto si 1 es compacto.

- $A_j$ es un cociente de $A$.

# Cocientes compactos

### *Definición:*

Sea $A \in \mathbf{Frm}$.

- Una *cubierta* $A$ es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.
- Una *subcubierta* de $X$ es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.
- $A$ es *compacto* si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

$A$ es compacto si 1 es compacto.

- $A_j$ es un cociente de $A$.
- $A_j$ es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.

# Marcos *KC*

$S \in$ Top es KC si todo conjunto compacto es cerrado. $S$ es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

# Marcos *KC*

$S \in \mathsf{Top}$ es KC si todo conjunto compacto es cerrado. $S$ es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

***Definición***

$A \in \mathsf{Frm}$ *es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.*

# Marcos *KC*

$S \in$ Top es KC si todo conjunto compacto es cerrado. $S$ es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

## *Definición*

$A \in$ Frm *es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.*

Equivalentemente

$$A_j = A_{u_\bullet}$$

para algún $\bullet \in A$, $F \in A^{\wedge}$ y $j \in [v_F, w_F]$.

# Propiedades de los marcos *KC*

- $KC \Rightarrow$ Arreglado

# Propiedades de los marcos $KC$

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si $A$ es $KC$ entonces $A_j$ es $KC$ para todo $j \in NA$.

# Propiedades de los marcos $KC$

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si $A$ es $KC$ entonces $A_j$ es $KC$ para todo $j \in NA$.
- Si $A$ es $KC$, entonces $A$ es $T_1$.

# Propiedades de los marcos $KC$

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si $A$ es $KC$ entonces $A_j$ es $KC$ para todo $j \in NA$.
- Si $A$ es $KC$, entonces $A$ es $T_1$.

De hecho

# Propiedades de los marcos $KC$

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si $A$ es $KC$ entonces $A_j$ es $KC$ para todo $j \in NA$.
- Si $A$ es $KC$, entonces $A$ es $T_1$.

De hecho

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & KC \arrow[r, Rightarrow] & \text{Arreglado} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
& (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

# Propiedades de los marcos *KC*

- $KC \Rightarrow$ Arreglado
- Si $A$ es $KC$ entonces $A_j$ es $KC$ para todo $j \in NA$.
- Si $A$ es $KC$, entonces $A$ es $T_1$.

De hecho

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & KC \arrow[r, Rightarrow] & \text{Arreglado} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
& (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}
$$

¿Como se relaciona $KC$ con otras propiedades en $\mathsf{Frm}$?

# *KC* y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, $A_j$ es compacto.

# *KC* y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, $A_j$ es compacto.
- Si $A$ es $KC$, entonces $A_j$ es compacto y cerrado

# *KC* y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, $A_j$ es compacto.
- Si $A$ es $KC$, entonces $A_j$ es compacto y cerrado
- Si $A$ es $KC$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, $A_j$ es compacto y cerrado.

# *KC* y su relación con los intervalos

- $A \in \mathsf{Frm}$, $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.
- $F \in A^{\wedge}$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, $A_j$ es compacto.
- Si $A$ es $KC$, entonces $A_j$ es compacto y cerrado
- Si $A$ es $KC$, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, $A_j$ es compacto y cerrado.

Bajo *KC* los intervalos de admisibilidad están conformados por $u_\bullet$

# ¿Para qué usamos los marcos *KC*

Si $S \in \mathrm{Top}$ y es $T_2$, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

# ¿Para qué usamos los marcos *KC*

Si $S \in \mathrm{Top}$ y es $T_2$, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

# ¿Para qué usamos los marcos *KC*

Si $S \in \mathrm{Top}$ y es $T_2$, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En Top : $KC \Leftrightarrow$ Empaquetado

# ¿Para qué usamos los marcos $KC$

Si $S \in \mathrm{Top}$ y es $T_2$, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En $\mathrm{Top} : KC \Leftrightarrow \text{Empaquetado}$
- En $\mathrm{Frm} : KC \Rightarrow \text{Arreglado}$

# ¿Para qué usamos los marcos $KC$

Si $S \in \mathsf{Top}$ y es $T_2$, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En $\mathsf{Top}$ : $KC \Leftrightarrow$ Empaquetado
- En $\mathsf{Frm}$ : $KC \Rightarrow$ Arreglado

$$\mathcal{O}S \text{ es } KC \Leftrightarrow S \text{ es empaquetado}$$

# ¿Para qué usamos los marcos *KC*

Si $S \in \mathrm{Top}$ y es $T_2$, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado.

$$T_2 \Rightarrow \text{Empaquetado} \Rightarrow T_1$$

- En $\mathrm{Top}$ : $KC \Leftrightarrow$ Empaquetado
- En $\mathrm{Frm}$ : $KC \Rightarrow$ Arreglado

$$\mathcal{O}S \text{ es } KC \Leftrightarrow S \text{ es empaquetado}$$

¿Qué pasa en el caso no espacial?

# Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

# Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

# Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

$$\begin{aligned} I_F &\to [v_F, w_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

# Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

$$\begin{aligned} I_F &\to [v_F, w_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

$I_F$ indica la complejidad del intervalo de admisibilidad $[v_F, w_F]$.

# Complejidad del intervalo

Si $A \in \mathsf{Frm}$ y $F \in A^{\wedge}$, entonces $[v_F, w_F] \subseteq NA$.

$$I_F = [v_F(0), w_F(0)] \subseteq A \quad \text{y} \quad j_a = v_F \vee u_a$$

para $a \in I_F$

$$\begin{aligned} I_F &\to [v_F, w_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

$I_F$ indica la complejidad del intervalo de admisibilidad $[v_F, w_F]$.

¿Qué pasa si $A$ es espacial?

## *Definición*

*Sea* $S \in \mathsf{Top}$ *y* $E \in \mathcal{P}S$. *Definimos* $[E] \colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ *por*

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

## *Definición*

*Sea* $S \in \mathsf{Top}$ *y* $E \in \mathcal{P}S$*. Definimos* $[E] \colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ *por*

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.

## *Definición*

*Sea* $S \in \mathsf{Top}$ *y* $E \in \mathcal{P}S$. *Definimos* $[E] \colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ *por*

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.
- Si $j \in N\mathcal{O}S$ tiene la forma de $[E]$, se dice que es un *núcleo espacialmente inducido*.

## *Definición*

*Sea* $S \in \mathsf{Top}$ *y* $E \in \mathcal{P}S$. *Definimos* $[E]\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ *por*

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.
- Si $j \in N\mathcal{O}S$ tiene la forma de $[E]$, se dice que es un *núcleo espacialmente inducido*.

Si $A = \mathcal{O}S$ y $Q \in \mathcal{Q}S$

$$v_F \leqslant [Q'] \leqslant [M'] = w_F$$

## *Definición*

*Sea* $S \in \mathsf{Top}$ *y* $E \in \mathcal{P}S$. *Definimos* $[E]\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}S$ *por*

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ.$$

- $[E] \in N\mathcal{O}S$.
- Si $j \in N\mathcal{O}S$ tiene la forma de $[E]$, se dice que es un *núcleo espacialmente inducido*.

Si $A = \mathcal{O}S$ y $Q \in \mathcal{Q}S$

$$v_F \leqslant [Q'] \leqslant [M'] = w_F$$

Si $S$ es $T_1$, $Q = M$.

# La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

# La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

# La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$ es una topología y es un marco *KC* que no es $(\mathbf{H})$.

# La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$ es una topología y es un marco $KC$ que no es $(\mathbf{H})$.

$$¿(\mathbf{H}) \Rightarrow KC?$$

# Bibliografía I


- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

# Bibliografía II


- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.
- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.
- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

# Bibliografía III


- A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.
- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.

☺Gracias por su atención☺

https://github.com/JCmonter