Patch modifications and separation axioms in point-free topology

Seminario de avance de tesis III
6 de diciembre de 2024

Juan Carlos Monter Cortés
Luis Ángel Zaldívar Corichi

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx

Lo que veremos hoy ☺

- Lo que si sabemos
  - Espacio de parches vs ensamble de parches
- Los problemas que tenemos
  - La conjetura
- Otras alternativas

Espacio de parches

Definición:

Un espacio topológico S es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado.

Espacio de parches

Definición:

Un espacio topológico S es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado.

$$\mathrm{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S,\ Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

Espacio de parches

Definición:

Un espacio topológico S es *empaquetado* si todo conjunto compacto saturado es cerrado.

$$\mathrm{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S,\ \ Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

Definición:

Para un espacio topológico S, sea ${}^{p}S$ (*espacio de parches*), el espacio con los mismos puntos que S y la topología $\mathcal{O}^{p}S$ generada por la pbase.

Observaciones:

- $T_2 \Rightarrow T_0 +$ empaqueta $\Rightarrow T_1$.

Observaciones:

- $T_2 \Rightarrow T_0 +$ empaqueta $\Rightarrow T_1$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^pS$ es T_1 y si S es $T_1 \Rightarrow {}^pS = {}^{pp}S$.

Observaciones:

- $T_2 \Rightarrow T_0 +$ empaqueta $\Rightarrow T_1$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^{p}S$ es T_1 y si S es $T_1 \Rightarrow {}^{p}S = {}^{pp}S$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^{pp}S = {}^{ppp}S$.

Observaciones:

- $T_2 \Rightarrow T_0 +$ empaqueta $\Rightarrow T_1$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^pS$ es T_1 y si S es $T_1 \Rightarrow {}^pS = {}^{pp}S$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^{pp}S = {}^{ppp}S$.
- Si S es $T_2 \Rightarrow S = {}^pS$.

Observaciones:

- $T_2 \Rightarrow T_0 +$ empaqueta $\Rightarrow T_1$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^pS$ es T_1 y si S es $T_1 \Rightarrow {}^pS = {}^{pp}S$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^{pp}S = {}^{ppp}S$.
- Si S es $T_2 \Rightarrow S = {}^pS$.
- S es empaquetado $\Leftrightarrow S = {}^pS$.

Observaciones:

- $T_2 \Rightarrow T_0 +$ empaqueta $\Rightarrow T_1$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^{p}S$ es T_1 y si S es $T_1 \Rightarrow {}^{p}S = {}^{pp}S$.
- Si S es $T_0 \Rightarrow {}^{pp}S = {}^{ppp}S$.
- Si S es $T_2 \Rightarrow S = {}^{p}S$.
- S es empaquetado $\Leftrightarrow S = {}^{p}S$.

¿Cuál es el análogo de empaquetado en **Frm**?

Filtros, núcleos y el Teorema de H.-M.

Definition

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Filtros, núcleos y el Teorema de H.-M.

Definition

Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para $F \subseteq A$, decimos que F es un *filtro* si:

1. $1 \in F$.
2. $a \leqslant b, a \in F \Rightarrow b \in F$.
3. $a, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F$.

Existen diferentes tipos de filtros:

- Propio
- Primo
- Completamente primo
- (Scott) abierto
- Admisible ($\nabla(j)$)

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j \colon A \to A$ es un *núcleo* si:

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j \colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$
4. $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$
4. $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Observaciones:

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j \colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$
4. $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Observaciones:

- $NA =$ conjunto de todos los núcleos en A y $NA \in \mathbf{Frm}$.

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$
4. $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Observaciones:

- $NA =$ conjunto de todos los núcleos en A y $NA \in \mathbf{Frm}$.
- $u_a(x) = a \vee x, v_a(x) = (a \succ x), w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$.

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$
4. $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Observaciones:

- $NA =$ conjunto de todos los núcleos en A y $NA \in \mathbf{Frm}$.
- $u_a(x) = a \vee x, v_a(x) = (a \succ x), w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$.
- $\eta_A\colon A \to NA, a \mapsto u_a$.

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$
4. $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Observaciones:

- $NA =$ conjunto de todos los núcleos en A y $NA \in \mathbf{Frm}$.
- $u_a(x) = a \vee x$, $v_a(x) = (a \succ x)$, $w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$.
- $\eta_A\colon A \to NA$, $a \mapsto u_a$.
- Si $f = f^* \in \mathbf{Frm} \Rightarrow k = f_* f^* \in NA$.

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $a, b \in A$. Decimos que $j\colon A \to A$ es un *núcleo* si:

1. $a \leqslant b \Rightarrow j(a) \leqslant j(b)$
2. $a \leqslant j(a)$
3. $j^2(a) = j(a)$
4. $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

Observaciones:

- $NA =$ conjunto de todos los núcleos en A y $NA \in \mathbf{Frm}$.
- $u_a(x) = a \vee x$, $v_a(x) = (a \succ x)$, $w_a = ((x \succ a) \succ a) \in NA$.
- $\eta_A\colon A \to NA$, $a \mapsto u_a$.
- Si $f = f^* \in \mathbf{Frm} \Rightarrow k = f_* f^* \in NA$.
- Para $U_A^*\colon A \to \mathcal{O}S$, $sp = (U_A)_* U_A^* \in NA$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Definición:

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Definición:

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Definición:

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Definición:

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Definición:

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.

Filtros admisibles y núcleos ajustados

Definición:

Sea $j \in NA$. El *filtro de admisibilidad* de j es el conjunto

$$\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}.$$

Observaciones:

- $j, k \in NA, j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k)$.
- $j \in NA$ es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow [v_F, w_F]$.

Teorema (Hoffman-Mislove):

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}(A)$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1. $\mathcal{Q}S =$ compactos saturados en S
2. $A^{\wedge} =$ filtros abiertos en A

Teorema (Hoffman-Mislove extendido):

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}(A)$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1. $\mathcal{Q}S =$ compactos saturados en S
2. $A^{\wedge} =$ filtros abiertos en A
3. $v_F =$ núcleos ajustados

Teorema (Hoffman-Mislove extendido):

Sean $A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}(A)$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre:

1. $\mathcal{Q}S =$ compactos saturados en S
2. $A^{\wedge} =$ filtros abiertos en A
3. $\nu_F =$ núcleos ajustados

El Teorema de H.-M. nos proporciona $(F, Q, \nabla(Q))$

$$F \in A^{\wedge} \leftrightarrow Q \in \mathcal{Q}S \leftrightarrow \nabla(Q) \in \mathcal{O}S^{\wedge}$$

$$x \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x) \Leftrightarrow U_A(x) \in \nabla(Q)$$

El ensamble parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *ensamble de parches*.

$$\text{p-base}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

El ensamble parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *ensamble de parches*.

$$\text{p-base}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

Sea $PA = \langle \text{p-base}(A) \rangle$, es decir, tomamos supremos arbitrarios de elementos en p-base(A)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r, "\iota"] & NA \end{tikzcd}$$

El ensamble parches

Basados en el Teorema de H.-M. se introduce el *ensamble de parches*.

$$\text{p-base}(A) = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^{\wedge}\}.$$

Sea $PA = \langle \text{p-base}(A) \rangle$, es decir, tomamos supremos arbitrarios de elementos en p-base(A)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r, "\iota"] & NA \end{tikzcd}$$

¿Cuándo $A \cong PA$?

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i \colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i\colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco A parche trivial?

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i\colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco A parche trivial?

Observaciones:

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i\colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco A parche trivial?

Observaciones:

- $S = {}^{p}S \leftrightarrow A \cong PA$.

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i\colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco A parche trivial?

Observaciones:

- $S = {}^{p}S \leftrightarrow A \cong PA$.
- Si $j \in NA$, $j = \bigvee\{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}$.

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i\colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco A parche trivial?

Observaciones:

- $S = {}^{p}S \leftrightarrow A \cong PA$.
- Si $j \in NA$, $j = \bigvee\{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}$.
- Si $j \in PA$, $j = \bigvee\{v_F \wedge u_d \mid F \in A^{\wedge}$ y $d \in A\}$.

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i\colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco A parche trivial?

Observaciones:

- $S = {}^{p}S \leftrightarrow A \cong PA$.
- Si $j \in NA$, $j = \bigvee\{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}$.
- Si $j \in PA$, $j = \bigvee\{v_F \wedge u_d \mid F \in A^{\wedge}$ y $d \in A\}$.
- A es parche trivial $\Leftrightarrow v_F = u_d$.

Parche trivial

Definición:

$A \in \mathbf{Frm}$ es *parche trivial* si $i \colon A \to P(A)$ es un isomorfismo.

¿Bajo qué circunstancias es el marco A parche trivial?

Observaciones:

- $S = {}^{p}S \leftrightarrow A \cong PA$.
- Si $j \in NA$, $j = \bigvee\{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}$.
- Si $j \in PA$, $j = \bigvee\{v_F \wedge u_d \mid F \in A^{\wedge}$ y $d \in A\}$.
- A es parche trivial $\Leftrightarrow v_F = u_d$.
- $\forall\, a \in A$, $u_a \leqslant v_a$ y $v_a \leqslant j \Leftrightarrow j(a) = 1$.

Regularidad implica parche trival

Teorema:

Supongamos que A es un marco regular y sea $j \in NA$ tal que $\bigtriangledown(j)$ es abierto. Entonces $j = u_d$, donde $d = j(0)$

Regularidad implica parche trival

Teorema:

Supongamos que A es un marco regular y sea $j \in NA$ tal que $\bigtriangledown(j)$ es abierto. Entonces $j = u_d$, donde $d = j(0)$

Demostración

$\square$

Regularidad implica parche trival

Teorema:

Supongamos que A es un marco regular y sea $j \in NA$ tal que $\triangledown(j)$ es abierto. Entonces $j = u_d$, donde $d = j(0)$

Demostración

1. A es regular $\Rightarrow$ A es ajustado.

$\square$

Regularidad implica parche trival

Teorema:

Supongamos que A es un marco regular y sea $j \in NA$ tal que $\bigtriangledown(j)$ es abierto. Entonces $j = u_d$, donde $d = j(0)$

Demostración

1. A es regular $\Rightarrow$ A es ajustado.
2. $x = \bigvee\{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\}$ es dirigido.

$\square$

Regularidad implica parche trival

Teorema:

Supongamos que A es un marco regular y sea $j \in NA$ tal que $\bigtriangledown(j)$ es abierto. Entonces $j = u_d$, donde $d = j(0)$

Demostración

1. A es regular $\Rightarrow$ A es ajustado.
2. $x = \bigvee\{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\}$ es dirigido.
3. $\nabla(u_d) = \nabla(j) \Rightarrow j \sim u_d$.

$\square$

Regularidad implica parche trival

Teorema:

Supongamos que A es un marco regular y sea $j \in NA$ tal que $\triangledown(j)$ es abierto. Entonces $j = u_d$, donde $d = j(0)$

Demostración

1. A es regular $\Rightarrow$ A es ajustado.
2. $x = \bigvee\{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\}$ es dirigido.
3. $\nabla(u_d) = \nabla(j) \Rightarrow j \sim u_d$.
4. A es ajustado $\Rightarrow$ u_d es el único en su bloque.

$\square$

Regularidad implica parche trival

Teorema:

Supongamos que A es un marco regular y sea $j \in NA$ tal que $\bigtriangledown(j)$ es abierto. Entonces $j = u_d$, donde $d = j(0)$

Demostración

1. A es regular $\Rightarrow$ A es ajustado.
2. $x = \bigvee\{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\}$ es dirigido.
3. $\nabla(u_d) = \nabla(j) \Rightarrow j \sim u_d$.
4. A es ajustado $\Rightarrow$ u_d es el único en su bloque.
5. $j = u_d$.

$\square$

Marcos arreglados

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y α un ordinal, un filtro abierto F en A es α*—arreglado* si

$$x \in F \Rightarrow u_{d(\alpha)}(x) = d(\alpha) \vee x = 1,$$

donde $d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$ y $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$.

Marcos arreglados

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y α un ordinal, un filtro abierto F en A es α—*arreglado* si

$$x \in F \Rightarrow u_{d(\alpha)}(x) = d(\alpha) \vee x = 1,$$

donde $d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$ y $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$.

- Un marco A es α—arreglado si $\forall\, F \in A^{\wedge} \Rightarrow F$ es α—arreglado.

Marcos arreglados

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y α un ordinal, un filtro abierto F en A es α—*arreglado* si

$$x \in F \Rightarrow u_{d(\alpha)}(x) = d(\alpha) \vee x = 1,$$

donde $d(\alpha) = f^{\alpha}(0)$ y $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$.

- Un marco A es α—arreglado si $\forall\, F \in A^{\wedge} \Rightarrow F$ es α—arreglado.
- Parche trivial $\Leftrightarrow$ Arreglado

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Arreglado es una noción que caracteriza marcos por medio de propiedades espaciales.

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Arreglado es una noción que caracteriza marcos por medio de propiedades espaciales.

Observaciones:

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Arreglado es una noción que caracteriza marcos por medio de propiedades espaciales.

Observaciones:

- Arreglado $\Rightarrow T_1$.

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Arreglado es una noción que caracteriza marcos por medio de propiedades espaciales.

Observaciones:

- Arreglado $\Rightarrow$ T_1.
- Arreglado $\Rightarrow$ empaquetado y Empaquetado $\not\Rightarrow$ Arreglado.

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Arreglado es una noción que caracteriza marcos por medio de propiedades espaciales.

Observaciones:

- Arreglado $\Rightarrow$ T_1.
- Arreglado $\Rightarrow$ empaquetado y Empaquetado $\not\Rightarrow$ Arreglado.
- Arreglado $\Leftrightarrow$ Empaquetado + Apilado.

Teorema:

Sea S un espacio T_0, éste tiene marco de abiertos 1-arreglado si y solo si S es T_2.

Arreglado es una noción que caracteriza marcos por medio de propiedades espaciales.

Observaciones:

- Arreglado $\Rightarrow T_1$.
- Arreglado $\Rightarrow$ empaquetado y Empaquetado $\not\Rightarrow$ Arreglado.
- Arreglado $\Leftrightarrow$ Empaquetado + Apilado.

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definición:

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definición:

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.
2. Decimos que una propiedad en marcos P es *suficientemente Hausdorff* si y solo si P implica la propiedad Hausdorff espacial.

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definición:

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.
2. Decimos que una propiedad en marcos P es *suficientemente Hausdorff* si y solo si P implica la propiedad Hausdorff espacial.
3. Decimos que una propiedad en marcos P es de *1° orden* si y solo si P es enunciada como una fórmula para elementos del marco.

Propiedad conservativa, de 1° orden y de 2° orden

Definición:

1. Para un espacio S decimos que una propiedad P es *conservativa* si y solo si $\mathcal{O}S$ tiene la propiedad P_S.
2. Decimos que una propiedad en marcos P es *suficientemente Hausdorff* si y solo si P implica la propiedad Hausdorff espacial.
3. Decimos que una propiedad en marcos P es de *1° orden* si y solo si P es enunciada como una fórmula para elementos del marco.
4. Decimos que una propiedad en marcos P es de *2° orden* si y solo si P es enunciada como una caracterización de sublocales.

Marcos Hausdorff

(**dH**) $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

Marcos Hausdorff

(**dH**) $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**H**) $1 \neq a \not\leq b \in L$, $\exists\, u, v \in L$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

Marcos Hausdorff

(**dH**) $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**H**) $1 \neq a \nleq b \in L$, $\exists\, u, v \in L$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**Hp**) Cada elemento semiprimo en L es máximo.

Marcos Hausdorff

(**dH**) $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, $\exists\, u, v$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**H**) $1 \neq a \nleq b \in L$, $\exists\, u, v \in L$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

(**Hp**) Cada elemento semiprimo en L es máximo.

[(**fH**)] El sublocal diagonal $\Delta[L]$ es cerrado en $L \oplus L$.

$$\Leftrightarrow \Delta[L] = \uparrow d_L$$

donde d_L es el menor elemento de $\Delta[L]$, es decir,

$$d_L = \Delta(0) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leqslant 0\} = \downarrow \{(x, x^*) \mid x \in L\}.$$

El razonamiento

Definición:

Decimos que un marco A es espacial si $A = \mathcal{O}S$, para S un espacio topológico.

El razonamiento

Definición:

Decimos que un marco A es espacial si $A = \mathcal{O}S$, para S un espacio topológico.

Teorema:

Si A es un marco espacial entonces

$$A \text{ es 1-arreglado si y solo si } S \text{ es } T_2$$

La conjetura

- Si S es $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$ es parche trivial

La conjetura

- Si S es $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$ es parche trivial
- Un marco A es arreglado $\Leftrightarrow$ A parche trivial.

La conjetura

- Si S es $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$ es parche trivial
- Un marco A es arreglado $\Leftrightarrow$ A parche trivial.
- $(\mathbf{H})$ es conservativa

La conjetura

- Si S es $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$ es parche trivial
- Un marco A es arreglado $\Leftrightarrow$ A parche trivial.
- $(\mathbf{H})$ es conservativa

$$\mathcal{O}S \text{ es } (\mathbf{H}) \Leftrightarrow S \text{ es } T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S \text{ parche trivial } \Leftrightarrow \mathcal{O}S \text{ arreglado}$$

La conjetura

- Si S es $T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S$ es parche trivial
- Un marco A es arreglado $\Leftrightarrow$ A parche trivial.
- $(\mathbf{H})$ es conservativa

$$\mathcal{O}S \text{ es } (\mathbf{H}) \Leftrightarrow S \text{ es } T_2 \Rightarrow \mathcal{O}S \text{ parche trivial } \Leftrightarrow \mathcal{O}S \text{ arreglado}$$

Conjetura

Todo marco Hausdorff es 1-arreglado.

Teorema:

Para A un marco espacial, $\mathcal{O}S$ es un marco Hausdorff si y solo si A es 1—arreglado.

Teorema:

Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (\mathbf{H}) \arrow[dl, Rightarrow, dashed] \\
& \textbf{Arreglado} &
\end{tikzcd}$$

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$.
- A es arreglado si todo cociente compacto es cerrado.

Otra forma de ver arreglado

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA \Rightarrow A_j \in \mathbf{Frm}$.

Observaciones:

- A_j es un cociente de A.
- A_j es compacto $\Leftrightarrow \nabla(j) \in A^{\wedge}$.
- $F \in A^{\wedge} \Rightarrow F = \nabla(j)$.
- A es arreglado si todo cociente compacto es cerrado.

¿Existen ejemplos de marcos (locales) Hausdorff y compactos que sean cerrados?

¿Qué significa apilado en marcos?

$$\mathcal{O}S \ 0-\text{arreglado} \ \Leftrightarrow S=\emptyset$$

$$\mathcal{O}S \ 1-\text{arreglado} \ \Leftrightarrow S \text{ es } T_2$$

$$\mathcal{O}S \ \text{arreglado} \ \Leftrightarrow S \text{ empaquetado } + \text{ apilado}$$

Definición:

Sea $S \in$ **Top** y $Q \in \mathcal{Q}S$. Decimos que $X \in \mathcal{C}S$ es *Q-irreducible* (denotado por "$Q \ltimes X$"), si

$$Q \subseteq U \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap U)}$$

Equivalentemente $Q \subseteq U \Rightarrow X = \overline{(X \cap U)}$, para cada $U \in \mathcal{O}S$.

Definición:

- $S \in \mathbf{Top}$ es *apilado* si

$$Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{Q}$$

se cumple para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.

Definición:

- $S \in \mathbf{Top}$ es *apilado* si

$$\mathcal{Q} \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{\mathcal{Q}}$$

  se cumple para cada $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.

- $S \in \mathbf{Top}$ es *fuertemente apilado* si

$$\mathcal{Q} \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{X \cap \mathcal{Q}}$$

  se cumple para cada $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.

Definición:

- $S \in \mathbf{Top}$ es *apilado* si

$$Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{Q}$$

  se cumple para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.

- $S \in \mathbf{Top}$ es *fuertemente apilado* si

$$Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{X \cap Q}$$

  se cumple para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.

¿Qué relación tiene esta noción espacial con las nociones en marcos?

EL Q-cuadrado

Ingredientes:

- $U_A : \mathcal{O}S$
- $F \in A^{\wedge} \to v_F$
- $A_F = A_{v_F}$
- $\nabla \in \mathcal{O}S \to v_\nabla$
- $\mathcal{O}S_\nabla = \mathcal{O}S_{v_\nabla}$
- $G = \nabla U_A$
- $Q = \mathrm{pt}\, A_F$
- $g = G_{|A_F}$
- $?\colon \mathcal{O}S_\nabla \to A_F$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[dd, shift right, "U_A"'] \arrow[ddr, "G"] & A_F \arrow[l, shift left, "F_*"] \arrow[dd, dashed, shift left, "g"] \arrow[dr] & \\
 & & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[uu, shift right, "(U_A)_*"'] \arrow[r, shift right, "\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[l, shift right, "\nabla_*"'] \arrow[uu, shift left, "?"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Observaciones:

Observaciones:

- El Q—cuadrado está definido para cada $F \in A^{\wedge}$.

Observaciones:

- El $Q-$cuadrado está definido para cada $F \in A^{\wedge}$.
- Si A es espacial $\Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.

Observaciones:

- El Q—cuadrado está definido para cada $F \in A^{\wedge}$.
- Si A es espacial $\Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.
- Si $? = g_*$ y $g_* g = sp \Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.

Observaciones:

- El Q—cuadrado está definido para cada $F \in A^{\wedge}$.
- Si A es espacial $\Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.
- Si $? = g_*$ y $g_* g = sp \Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.
- En general, ¿quién es "?"?

Observaciones:

- El Q—cuadrado está definido para cada $F \in A^{\wedge}$.
- Si A es espacial $\Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.
- Si $? = g_*$ y $g_* g = sp \Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.
- En general, ¿quién es "?"?
- Si conocemos todos los $F \in A^{\wedge}$, conocemos todos los Q—cuadrados.

Observaciones:

- El Q—cuadrado está definido para cada $F \in A^{\wedge}$.
- Si A es espacial $\Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.
- Si $? = g_*$ y $g_* g = sp \Rightarrow A \to A_F \to \mathcal{O}Q$.
- En general, ¿quién es "?"?
- Si conocemos todos los $F \in A^{\wedge}$, conocemos todos los Q—cuadrados.
- Existen ejemplos donde se conocen todos los $F \in A^{\wedge}$

Las propiedades del funtor N

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "U"'] \arrow[r, phantom, "\xmapsto{N(\_)}"] & NA \arrow[d, "N(U)"] \\
\mathcal{O}S & N\mathcal{O}S
\end{tikzcd}
$$

Observaciones:

Las propiedades del funtor N

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "U"'] \arrow[r, phantom, "\xmapsto{N(\_)}"] & NA \arrow[d, "N(U)"] \\
\mathcal{O}S & N\mathcal{O}S
\end{tikzcd}
$$

Observaciones:

Las propiedades del funtor N

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "U"'] \arrow[r, phantom, "\xmapsto{N(\_)}"] & NA \arrow[d, "N(U)"] \\
\mathcal{O}S & N\mathcal{O}S
\end{tikzcd}
$$

Observaciones:

- $N(U) \dashv N(U)_*$

Las propiedades del funtor N

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "U"'] \arrow[r, phantom, "\overset{N(\_)}{\longmapsto}"] & NA \arrow[d, "N(U)"] \\ \mathcal{O}S & N\mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

Observaciones:

- $N(U) \dashv N(U)_*$
- $N(U)(j) \leqslant k \Leftrightarrow j \leqslant N(U)_*(k)$

Las propiedades del funtor N

$$
\begin{array}{ccc}
A & & NA \\
{\scriptstyle U}\downarrow & \xmapsto{N(\_)} & \downarrow{\scriptstyle N(U)} \\
\mathcal{O}S & & N\mathcal{O}S
\end{array}
$$

Observaciones:

- $N(U) \dashv N(U)_*$
- $N(U)(j) \leqslant k \Leftrightarrow j \leqslant N(U)_*(k)$
- $N(U)(j) \leqslant k \Leftrightarrow Uj \leqslant kU$

Las propiedades del funtor N

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "U"'] \arrow[r, phantom, "\xmapsto{N(\_)}"] & NA \arrow[d, "N(U)"] \\ \mathcal{O}S & N\mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

Observaciones:

- $N(U) \dashv N(U)_*$
- $N(U)(j) \leqslant k \Leftrightarrow j \leqslant N(U)_*(k)$
- $N(U)(j) \leqslant k \Leftrightarrow Uj \leqslant kU$
- $N(U)_*(j) = U_* j U^*$ y $UN(U)_*(j) = jU$

Los intervalos $[v\_, w\_]$

Para $F \in A^{\wedge}$, $Q \in \mathcal{Q}S$ y $j \in N\mathcal{O}S$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

Los intervalos $[v\_, w\_]$

Para $F \in A^{\wedge}$, $Q \in \mathcal{Q}S$ y $j \in N\mathcal{O}S$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

- $U_*(j(U(x))) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$

Los intervalos $[v\_, w\_]$

Para $F \in A^{\wedge}$, $Q \in \mathcal{Q}S$ y $j \in N\mathcal{O}S$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

- $U_*(j(U(x))) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$
- $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \mathrm{pt}\, A$. Así,

Los intervalos $[v\_, w\_]$

Para $F \in A^{\wedge}$, $Q \in \mathcal{Q}S$ y $j \in N\mathcal{O}S$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

- $U_*(j(U(x))) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$
- $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \mathrm{pt}\, A$. Así,
- $x \in F \Leftrightarrow x \in \nabla(U_* j U^*)$

Los intervalos $[v\_, w\_]$

Para $F \in A^{\wedge}$, $Q \in \mathcal{Q}S$ y $j \in N\mathcal{O}S$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

- $U_*(j(U(x))) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$
- $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \mathsf{pt}\, A$. Así,
- $x \in F \Leftrightarrow x \in \nabla(U_* j U^*)$
- $F = \nabla(U_* j U^*)$

Los intervalos $[v\_, w\_]$

Para $F \in A^{\wedge}$, $Q \in \mathcal{Q}S$ y $j \in N\mathcal{O}S$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

- $U_*(j(U(x))) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$
- $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \mathsf{pt}\, A$. Así,
- $x \in F \Leftrightarrow x \in \nabla(U_* j U^*)$
- $F = \nabla(U_* j U^*)$

Por lo tanto

$$j \in [v_Q, w_Q] \Rightarrow F \in [v_F, w_F].$$

De esta manera

$$\mho\colon [V_Q, W_Q] \to [V_F, W_F]$$

$$\begin{tikzcd}
NA \arrow[r, shift left, "N(U)"] & N\mho S \arrow[l, shift left, "N(U)_*"] \\
{[v_F, w_F]} \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, shift left, "\mho^*"] & {[v_Q, w_Q]} \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, "\mho"]
\end{tikzcd}$$

Observaciones:

De esta manera

$$\mho\colon [V_Q, W_Q] \to [V_F, W_F]$$

$$\begin{tikzcd}
NA \arrow[r, shift left, "N(U)"] & N\mho S \arrow[l, shift left, "N(U)_*"] \\
{[v_F, w_F]} \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, shift left, "\mho^*"] & {[v_Q, w_Q]} \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, "\mho"]
\end{tikzcd}$$

Observaciones:

- ¿Qué información aporta el morfismo $\mho*$?

De esta manera

$$\mho\colon [V_Q, W_Q] \to [V_F, W_F]$$

$$\begin{tikzcd}
NA \arrow[r, shift left, "N(U)"] & N\mho S \arrow[l, shift left, "N(U)_*"] \\
{[v_F, w_F]} \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, shift left, "\mho^*"] & {[v_Q, w_Q]} \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, "\mho"]
\end{tikzcd}$$

Observaciones:

- ¿Qué información aporta el morfismo $\mho*$?
- ¿Cuál es el comportamiento de los diagramas anteriores cuando A cumple alguna propiedad Hausdorff?

References I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074
- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.
- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.
- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

References II

- Rosemary A Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

- Harold Simmons, *The assembly of a frame*, University of Manchester (2006).

- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2024. Universidad de Guadalajara.