Intervalos de admisibilidad y marcos *KC*

MITAC, Agosto 2025
29 de julio de 2025

Juan Carlos Monter Cortés

Universidad de Guadalajara
juan.monter2902@alumnos.udg.mx
github.com/JCmonter

Contenido

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

Marcos

- A
- $(A, \leqslant)$
- $(A, \leqslant, \vee, 0)$ o $(A, \leqslant, \wedge, 1)$
- $(A, \leqslant, \bigvee, \bigwedge, 0, 1)$

Un marco es una retícula completa que cumple cierta ley distributiva (ley distributiva de marcos), es decir,

$$(A, \leqslant, \bigvee, \wedge, 0, 1), \quad a \wedge \bigvee X = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\}$$

$$\mathbf{Frm} = \begin{cases} A, & \text{marcos} \\ \\ f, & \text{morfismo de marcos} \end{cases}$$

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

¿Por qué estudiamos los marcos?

- Estructuras simples.
- Existen herramientas que facilitan el estudio de los marcos.
- Correspondencias biyectivas.
- Buen comportamiento categórico.
- La topología de un espacio ($\mathcal{O}S$) es un marco.
- $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\mathrm{op}}$ está en relación con $\mathbf{Top}$.

Cocientes en **Frm**

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Cocientes en **Frm**

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

Cocientes en Frm

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

Congruencias $\leftrightarrow$ Conjuntos implicativos $\leftrightarrow$ Núcleos

Cocientes en Frm

Frm proporciona correspondencias biyectivas interesantes

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

Definición:

Sea $A \in \mathbf{Frm}$ y $j\colon A \to A$, decimos que j es un *núcleo* si:

1. j infla.
2. j es monótona.
3. j es idempotente.
4. j respeta ínfimos finitos.

$$NA = \text{núcleos de } A.$$

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo suprayectivo $f\colon A \to B$.

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo suprayectivo $f: A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo suprayectivo $f : A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- A_j es un cociente de A.

Definición:

Un cociente de un marco A es un marco B equipado con un morfismo supráyectivo $f : A \to B$.

Si $A \in \mathbf{Frm}$ y $j \in NA$, entonces $A_j \in \mathbf{Frm}$.

$$A_j = \{a \in A \mid j(a) = a\}.$$

- A_j es un cociente de A.
- ¿Qué es un cociente compacto?

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

Otros “tipos” de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} “cociente cerrado”

Otros “tipos” de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} “cociente cerrado”
- A_{v_a} “cociente abierto”

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"
- A_{v_a} "cociente abierto"
- A_{w_a} "cociente regular"

Otros "tipos" de cocientes

$a \in A \in \mathbf{Frm}$ definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} "cociente cerrado"
- A_{v_a} "cociente abierto"
- A_{w_a} "cociente regular"

Núcleos $\leftrightarrow$ Sublocales $\leftrightarrow$ Subespacios

Otros “tipos” de cocientes

$a \in A \in$ **Frm** definimos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = a \succ x, \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

$x \in A$

- A_{u_a} “cociente cerrado” $\leftrightarrow$ sublocal cerrado.
- A_{v_a} “cociente abierto” $\leftrightarrow$ sublocal abierto.
- A_{w_a} “cociente regular” $\leftrightarrow$ sublocal regular.

Núcleos $\leftrightarrow$ Sublocales $\leftrightarrow$ Subespacios

Teoría de marcos

Núcleos

Filtros de admisiblidad

Intervalos de admisibilidad

Cocientes en Frm

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Si $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Si $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Arreglado $\Leftrightarrow v_F \leqslant u_d$

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Si $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Arreglado $\Leftrightarrow v_F \leqslant u_d$
- $(\mathbf{fH}) \Leftrightarrow \forall j \in [v_F, w_F], j = u_\bullet$ y $\bullet \in A$.

Intervalos de admisibilidad

Si $F \in A^{\wedge}$, entonces

$$u_d \leqslant v_F \leqslant w_F$$

para $d = v_F(0)$, $v_F = f^{\infty}$.

Información con los intervalos

- $[v_F, w_F] \subseteq NA$ es el intervalo de admisibilidad.
- Si $j \in [v_F, w_F]$, A_j es compacto.
- Arreglado $\Leftrightarrow v_F \leqslant u_d$
- $(\mathbf{fH}) \Leftrightarrow \forall j \in [v_F, w_F], j = u_\bullet$ y $\bullet \in A$.
- $(\mathbf{aju}) \Leftrightarrow [v_F, w_F] = \{*\}$ y $* = u_\bullet$ para $\bullet \in A$.

Marcos KC

$S \in \mathrm{Top}$ es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Marcos *KC*

$S \in$ Top es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Definición

$A \in$ Frm *es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.*

Marcos *KC*

$S \in$ Top es KC si todo conjunto compacto es cerrado. S es US si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.

$$T_2 \Rightarrow KC \Rightarrow US \Rightarrow T_1$$

Definición

$A \in$ Frm *es KC si todo cociente compacto de A es cerrado.*

Equivalentemente

$$A_F = u_d$$

para algún $d \in A$ y $F \in A^{\wedge}$.

Propiedades de los marcos KC

$$KC \Rightarrow \text{Arreglado}$$

Propiedades de los marcos *KC*

$$KC \Rightarrow \text{Arreglado}$$

Proposición

Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.

Propiedades de los marcos KC

$$KC \Rightarrow \text{Arreglado}$$

Proposición

Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.

Proposición

Si A es KC, entonces A es T_1.

De hecho

Propiedades de los marcos KC

$$KC \Rightarrow \text{Arreglado}$$

Proposición

Si A es KC entonces A_j es KC para todo $j \in NA$.

Proposición

Si A es KC, entonces A es T_1.

De hecho

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow] & KC \arrow[r, Rightarrow] & \text{Arreglado} \arrow[r, Rightarrow] & T_1 \\
& (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] & & &
\end{tikzcd}$$

La topología máximo compacta

Consideremos $S = \{x, y\} \cup \mathbb{N}^2$ con $x, y \notin \mathbb{N}^2$ y sea

$$R_n = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Definimos

$$\mathcal{O}S = \mathcal{P}\mathbb{N}^2 \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$$

donde

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq S \mid x \in U \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, U \cap R_n \text{ es cofinito}\}$$

$$\mathcal{V} = \{V \subseteq S \mid y \in V \text{ y } \exists F \subseteq \mathbb{N} \text{ finito tal que } \forall n \notin F, R_n \subseteq V\}$$

$\mathcal{O}S$ es una topología..

Propiedades de $\mathcal{O}S$

- $\mathcal{O}S$ es T_1.
- $\mathcal{O}S$ no es (**H**).
- $\mathcal{O}S$ es compacto.
- $\mathcal{O}S$ es (**aju**).
- $\mathcal{O}S$ es KC.
- $\mathcal{O}S$ es 2-arreglado.

El ejemplo de Paseka y Smarda

Consideremos $A \in \mathsf{Frm}$ y $A_r = \{a \in A \mid \neg\neg a = a\}$. Definimos

$$K(A) = \{(u, v) \mid u \in A,\ v \in A_r,\ u \leqslant v\}$$

$K(A) \in \mathsf{Frm}$.

Propiedades de $K(A)$

- Si A es $(\mathbf{H})$ y $\neg m = 0$ para m máximo, $K(A)$ es $(\mathbf{H})$.
- Si A es compacto, entonces $K(A)$ es compacto.
- $K(A)$ no es subajustado

De manera adicional, sea $A = [0, 1]$ con la topología usual. Entonces

- $\mathcal{O}I$ es $(\mathbf{H})$.
- $\mathcal{O}I$ es compacto.
- $K(\mathcal{O}I)$ es compacto y $(\mathbf{H})$.
- $K(\mathcal{O}I)$ no es subajustado.
- $K(\mathcal{O}I)$ no es espacial.

Existe marcos Hausdorr y compactos que no son espaciales.

Bibliografía I

- P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

- J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

- J. Paseka and B. Smarda, *T_2-frames and almost compact frames.* Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.

- J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

Bibliografía II

- J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.
- RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
- RA Sexton, *Frame theoretic assembly as a unifying construct*, The University of Manchester (United Kingdom), 2000.
- RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

Bibliografía III

- H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons.

- H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

- H. Simmons, *The lattice theoretic part of topological separation properties*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 21, pp. 41–48, 1978.

Bibliografía IV

- H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.
- A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.
- A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.